ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 7 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 538.56 : 519.25

О ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Барабаненков

Методом Фредгольма построено асимптотическое решение уравнения Бете—Солпитера для ковариации функции Грина скалярного излучения в неограниченной рассеивающей среде при большом оптическом расстоянии между центрами тяжести точек наблюдения и точек источника. Согласно этому решению, свойства когерентности поля на большом оптическом расстоянии от его источников определяются мнимой частью средней функции Грина, а интенсивность поля (или его лучевая яркость) убывает обратно пропорционально расстоянию от источников.

Ларсеном и Келлером [1] был разработан метод решения уравнения переноса излучения в рассеивающей среде в виде асимптотического разложения лучевой яркости в ряд по малому параметру, равному отношению длины экстинкции к размеру рассеивающего объема. Было показано, что лучевая яркость удовлетворяет как функция координат на большом оптическом расстоянии от источников излучения и от границы среды диффузионному уравнению, которое для среды без истинного поглощения переходит в уравнение Пуассона.

Необходимо отметить, что ранее вопрос о глубинном режиме излучения в рассеивающей среде исследовали многие авторы [2–6], исходя из уравнения переноса. В [7] с помощью уравнения Бете — Солпитера (Б—С) найдена с точностью до постоянного множителя асимптотика корреляционной функции поля на большой оптической глубине в рассеивающей среде с плоской границей при падении на нее внешнего поля, не зависящего от горизонтальных координат. Представляется интересным дальнейшее исследование подобного рода глубинной асимптотики корреляционной функции поля в отношении ее зависимости от источников излучения и граничных условий. В данной работе среда считается неограниченной и выясняется зависимость глубинной асимптотики корреляционной функции поля от его источников.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходим из уравнения Б—С [8] для ковариации функции Грина

$$B(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1'; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2') = \overline{G(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_1')\, G^*(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_2')},$$

где черта означает усреднение по ансамблю и звездочка указывает на переход к комплексно-сопряженной величине. Вводим координаты центра тяжести и разностные $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}$ для точек наблюдения $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, а также $\boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{r}'$ — для точек источника $\boldsymbol{r}_1'$ и $\boldsymbol{r}_2'$, полагая

$$R=\frac{1}{2}(r_1+r_2),\quad r=r_1-r_2,\quad R'=\frac{1}{2}(r_1'+r_2'),$$

$$r'=r_1'-r_2'.$$

Уравнение Б—С для ковариации $B(R-R', r, r')$ функции Грина в однородной (в среднем) рассеивающей среде после преобразования Фурье по координатам центра тяжести и разностным точек наблюдения согласно

$$B(R, r, r')=\int e^{i(QR+pr)}d^3Qd^3p\Phi(Q, p, r') \tag{1}$$

принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi(Q, p, r')=\Phi_0(Q, p)e^{-ipr'}+(2\pi)^3\Phi_0(Q, p)\times\\ \times\int\widetilde{K}(Q, p, p'')d^3p''\Phi(Q, p'', r').\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь через $\Phi_0(Q, p)$ обозначена билинейная комбинация вида

$$\Phi_0(Q, p)=\tilde{\overline{G}}\left(p+\frac{1}{2}Q\right)\tilde{\overline{G}}^*\left(p-\frac{1}{2}Q\right), \tag{3}$$

где $\tilde{\overline{G}}(p)$ — фурье-образ средней функции Грина $\overline{G}(r)$, связанный с фурье-образом $\tilde{M}(p)$ ядра $M(r)$ массового оператора согласно [9].

Ядро $\tilde{K}(Q, p, p')$ равно фурье-образу

$$\widetilde{K}(Q, p, p')=\int e^{-iQR}e^{-i(pr-p'r')}d^3Rd^3rd^3r'K(R, r, r') \tag{4}$$

ядра $K(R, r, r')$ оператора интенсивности по координатам центра тяжести R и разностным r, r'.

2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ БЕТЕ—СОЛПИТЕРА

Согласно оптической теореме [10] в рассеивающей среде без истинного поглощения мнимая часть фурье-образа ядра массового оператора выражается через мнимую часть фурье-образа средней функции Грина и фурье-образ ядра оператора интенсивности соотношением

$$\operatorname{Im}\widetilde{M}(p')=\int\operatorname{Im}\tilde{\overline{G}}(p)d^3p\widetilde{K}_0(p, p'), \tag{5}$$

где обозначено $\widetilde{K}_0(p, p')=\widetilde{K}(Q,p,p')_{Q=0}$. Из соотношений взаимности [11] для оператора интенсивности в изотропной (в среднем) рассеивающей среде следует, что

$$\widetilde{K}(Q, p, p')=\widetilde{K}(Q, p', p),\quad \widetilde{K}(Q, p, p')=\widetilde{K}^*(-Q, p, p'). \tag{6}$$

Первое соотношение (6) позволяет переписать оптическую теорему (5) в сопряженной форме

$$\operatorname{Im}\widetilde{M}(p)=\int\widetilde{K}_0(p, p')d^3p'\operatorname{Im}\tilde{\overline{G}}(p'). \tag{7}$$

Отбросим в уравнении Б—С (2) неоднородный член и положим $Q=0$. Получаем однородное уравнение вида

$$\Phi(p)=(2\pi)^3\Phi_0(p)\int\widetilde{K}_0(p, p')d^3p'\Phi(p'), \tag{8}$$

где обозначено $\Phi_0(p)=\Phi_0(\boldsymbol{Q}, p)_{Q=0}$. Однородное уравнение, союзное [12] к (8), записывается как

$$\Psi(p') = (2\pi)^3 \int \Psi(p)\,\Phi_0(p)\,d^3p\,\widetilde{K}_0(p, p'). \tag{9}$$

С помощью равенств (3) для $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, p)$ и [9] для $\widetilde{\overline{G}}(p)$, оптической теоремы (5) и ее сопряженной формы (7) находим, что решения однородных уравнений (8) и (9) с точностью до постоянных множителей имеют вид

$$\Phi(p) = \operatorname{Im}\widetilde{\overline{G}}(p), \quad \Psi(p') = \operatorname{Im}\widetilde{M}(p'). \tag{10}$$

Выражения (10) (первое из них получено в [7]) показывают, что однородное уравнение Б—С и союзное к нему однородное уравнение в однородной (в среднем) изотропой рассеивающей среде без истинного поглощения имеют частные решения, равные с точностью до постоянных множителей мнимым частям средней функции Грина и ядра массового оператора.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ—СОЛПИТЕРА

Согласно методу Фредгольма [12] решение уравнения Б—С (2) ищем в виде

$$\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}') = \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})\, e^{-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}'} + \int \frac{D(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')}{D(\boldsymbol{Q})}\, d^3p'\,\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}')\, e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}'}. \tag{11}$$

Здесь $D(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ и $D(Q)$ — первый минор и детерминант Фредгольма, а их отношение представляет собой резольвенту уравнения Б—С (2).

Положим

$$D(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = (2\pi)^3\,\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p})\, E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'). \tag{12}$$

Тогда, используя два известных уравнения [12] для резольвенты, получаем для ядра $E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ два соотношения Фредгольма вида

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') &= \widetilde{K}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, D(Q) + (2\pi)^3 \times \\ &\times \int \widetilde{K}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\,\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})\, d^3q\, E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}'); \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') &= \widetilde{K}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, D(Q) + (2\pi)^3 \times \\ &\times \int E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\,\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q})\, d^3q\, \widetilde{K}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}'). \end{aligned} \tag{14}$$

Они служат для определения ядра $E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ и детерминанта $D(Q)$.

Нас интересует асимптотика ковариации функции Грина (1) при больших значениях R, которым отвечают малые значения $\boldsymbol{Q}$. Поэтому раскладываем все входящие в соотношения (13) и (14) функции в ряд Тейлора по $\boldsymbol{Q}$, записывая

$$\begin{gathered} E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = E_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') + E_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, Q_\alpha + \dots, \quad D(Q) = D_0 + D_1 Q^2 + \dots, \\ \Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}) = \Phi_0(p) + \Phi_\alpha(\boldsymbol{p})\, Q_\alpha + \dots, \\ \widetilde{K}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = \widetilde{K}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') + \widetilde{K}_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')\, Q_\alpha + \dots, \end{gathered} \tag{15}$$

где по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. После приравнивания членов одинакового порядка малости по Q получаем соотношения Фредгольма нулевого, первого и т. д. порядков.

а) Решение соотношений Фредгольма нулевого порядка

Переписывая уравнение Б—С в координатном представлении, нетрудно убедиться, что оно, вообще говоря, не разрешимо. Это следует из того, что для него, вообще говоря, не выполняется известное условие разрешимости [12], согласно которому неоднородный член уравнения должен быть «ортогонален» решению однородного союзного уравнения. Чтобы обойти эту трудность, введем в среду бесконечно малое истинное поглощение, следуя методу [13] (стр. 73) решения уравнения переноса излучения в среде с изотропным рассеянием*.

Обозначая коэффициент истинного поглощения через $1-c\to 0$ $(0<c<1)$, приводим соотношения Фредгольма нулевого порядка к виду

$$\begin{aligned} cE_0(p,p') &= \widetilde{K}_0(p,p')\,D_0-(1-c)\,E_0(p,p')+\\ &+(2\pi)^3\int \widetilde{K}_0(p,q)\,\Phi_0(q)\,d^3q\,E_0(q,p'), \end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned} cE_0(p,p') &= \widetilde{K}_0(p,p')\,D_0-(1-c)\,E_0(p,p')+\\ &+(2\pi)^3\int E_0(p,q)\,\Phi_0(q)\,d^3q\,\widetilde{K}_0(q,p'). \end{aligned}$$

Оптическую теорему (5) и ее сопряженную форму (7) с учетом поглощения записываем, вводя в их левые части множитель, равный c. При решении соотношений Фредгольма (16) используем разложение в ряд Тейлора по $1-c$, полагая

$$E_0(p,p')=E_0^{(0)}(p,p')+(1-c)\,E_0^{(1)}(p,p')+\ldots,\quad D_0=(1-c)\,D_0^{(1)}+\ldots\tag{17}$$

Подставляем разложения (17) в соотношения (16) и приравниваем члены одинакового порядка малости по $1-c$. В нулевом приближении по $1-c$ получаем два однородных соотношения Фредгольма для $E_0^{(0)}\times$ $\times(p,p')$ типа уравнений (8) и (9), которые решаются с помощью оптической теоремы (5) и ее сопряженной формы (7), записанных с учетом поглощения. В первом приближении по $1-c$ получаем два неоднородных соотношения Фредгольма для $E_0^{(1)}(p,p')$. Из условий их разрешимости находим значение $D_0^{(1)}$. В результате оказывается, что

$$\begin{aligned} E_0^{(0)}(p,p') &= \operatorname{Im}\widetilde{M}(p)\operatorname{Im}\widetilde{M}(p'),\\ D_0^{(1)} &= (1/c)\int \operatorname{Im}\widetilde{M}(p)\,d^3p\,\operatorname{Im}\tilde{\tilde{G}}(p)>0. \end{aligned}\tag{18}$$

То, что величина $D_0^{(1)}$ действительно положительна, проверяется с помощью равенства [9] для $\tilde{\tilde{G}}(p)$.

---

* Фактически такого же рода метод бесконечно малого поглощения обычно используется при построении запаздывающей функции Грина монохроматического волнового поля, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца.

б) Решение соотношений Фредгольма первого порядка

Соотношения Фредгольма первого порядка по $\boldsymbol{Q}$ выписываются без особого труда. Условия их разрешимости удовлетворяются автоматически в силу изотропности рассеивающей среды. Из этих соотношений следует, что векторное ядро $E_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ может быть представлено в виде

$$E_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = [F(p)(s_p)_\alpha + F(p')(s_{p'})_\alpha]\, E_0^{(0)}(p, p'), \tag{19}$$

где ядро $E_0(p, p')$ равно первому выражению (18) и через s_p обозначен единичный вектор вдоль вектора $\boldsymbol{p}$. Чисто мнимая функция $F(p)$ от модуля p удовлетворяет интегральному уравнению вида

$$F(p)\,\mathrm{Im}\,\widetilde{M}(p) = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \widetilde{K}_{01}(p, q)\, F(q) \times$$

$$\times\, \mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{G}}(q)\, q^2\, dq + \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty [\widetilde{K}_{01}(p, q)\, \varphi(q) + \tag{20}$$

$$+\, 3\widetilde{K}_0^{(1)}(p, q) + \widetilde{K}_1^{(1)}(p, q)]\, \mathrm{Im}\,\tilde{\tilde{G}}(q)\, q^2\, dq.$$

Здесь $\varphi(p)$ — чисто мнимая функция от модуля p, определяемая равенством

$$\Phi_\alpha(\boldsymbol{p}) = \Phi_0(p)\, \varphi(p)\, (s_p)_\alpha\,. \tag{21}$$

Через $\widetilde{K}_{01}(p, q)$, $\widetilde{K}_0^{(1)}(p, q)$ и $\widetilde{K}_1^{(1)}(p, q)$ обозначены зависящие от модулей p, q соответственно первый, нулевой и первый коэффициенты разложений вещественного ядра $\widetilde{K}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ и чисто мнимого ядра $\widetilde{K}^{(1)}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ в ряды по полиномам Лежандра $P_n(s_p s_q)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. При этом ядро $\widetilde{K}^{(1)}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ вводится путем записи векторного ядра $\widetilde{K}_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ из соображений симметрии в виде

$$\widetilde{K}_\alpha(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \widetilde{K}^{(1)}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})(s_p)_\alpha + \widetilde{K}^{(1)}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})(s_q)_\alpha\,. \tag{22}$$

Соотношения Фредгольма второго порядка по $\boldsymbol{Q}$ позволяют определить коэффициент D_1 во втором разложении (15) для детерминанта $D(Q)$. Искомое значение D_1, получающееся из условий разрешимости этих соотношений, является вещественным и представляется довольно громоздким выражением. Поэтому для вычисления коэффициента D_1 удобнее воспользоваться законом сохранения энергии (см. формулу (27)).

Первые равенства (17), (18) и равенство (19) дают, согласно первому разложению (15), значение ядра $E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ с точностью до членов второго порядка малости по $\boldsymbol{Q}$. Детерминант Фредгольма $D(Q)$ представлен вторым разложением (15), где коэффициент D_0 определяется вторыми равенствами (17), (18). Подставляем эти значения $E(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')$ и $D(Q)$ в подынтегральное выражение правой части формулы (11), попутно раскладывая подынтегральный множитель $\Phi_0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}')$ в ряд по $\boldsymbol{Q}$ с точностью до членов второго порядка малости. В результате получаем приближенное решение $\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}')$ уравнения (2).

Производим над полученным решением $\Phi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}')$ обратное преобразование Фурье согласно (1). При этом необходимо вычислить интеграл по $\boldsymbol{Q}$ от выражения, содержащего сингулярный множитель вида $1/(D_0 + D_1 Q^2)$. Такого рода интеграл приобретает смысл, если предположить, что коэффициент D_1, как и D_0, положителен,

$$D_1 > 0. \tag{23}$$

Сделанное предположение проверяется с помощью приближенного значения (30) для D_1. При условии (23) обратное преобразование Фурье (1) не вызывает затруднений и приводит к следующей формуле для некогерентной части искомой ковариации функции Грина:

$$\begin{gathered} B(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') - \overline{G}\left(\boldsymbol{R} + \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{2}\right)\overline{G}^*\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{2}\right) = \\ = \frac{1}{4\pi D_1}\frac{1}{R}\operatorname{Im}\overline{G}(r)\operatorname{Im}\overline{G}(r') + \frac{1}{4\pi D_1}\frac{1}{R^2}\times \\ \times\left[H(r)(\boldsymbol{s_R r})\operatorname{Im}\overline{G}(r') - H(r')(\boldsymbol{s_R r}')\operatorname{Im}\overline{G}(r)\right] + \ldots \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь в правой части $\boldsymbol{s_R}$ — единичный вектор вдоль вектора $\boldsymbol{R}$. Через $H(r)$ обозначена чисто мнимая функция от модуля r, равная интегралу

$$\begin{gathered} H(r) = \frac{4\pi}{r^2}\int_0^\infty \left[\cos(pr) - \frac{\sin(pr)}{pr}\right]\times \\ \times\left[\varphi(p) + F(p)\right]\operatorname{Im}\tilde{\overline{G}}(p)\,p\,dp. \end{gathered} \tag{25}$$

Многоточие означает члены третьего порядка малости по $1/R$.

Функция $H(r)$ имеет при $r \to 0$ предел, равный

$$H(0) = -\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \left[\varphi(p) + F(p)\right]\operatorname{Im}\tilde{\overline{G}}(p)p^3\,dp. \tag{26}$$

Через него простым соотношением вида

$$D_1 = i\,H(0) \tag{27}$$

выражается коэффициент D_1 второго разложения (15) для детерминанта Фредгольма.

Равенство (27) выводится следующим образом. Совмещаем точки источника, полагая $\boldsymbol{r}'=0$, и вычисляем среднее значение потока энергии $\overline{W}$ полного поля точечного источника через сферу бесконечно большого радиуса. Усредняя уравнение сохранения энергии с точностью до постоянного множителя, получаем

$$\overline{W} = -\operatorname{Im}\overline{G}(r)_{r=0}\,. \tag{28}$$

С другой стороны, исходя из уравнения Дайсона, проверяем, что поток энергии среднего поля точечного источника через сферу бесконечно большого радиуса равен нулю. Поток же энергии некогерентной части ковариации поля точечного источника через сферу бесконечно большого радиуса, вычисленный с помощью формулы (24), имеет значение

$$\overline{W} = -\frac{i}{D_1}H(0)\operatorname{Im}\overline{G}(r)_{r=0}. \tag{29}$$

Сравнение равенств (28) и (29) дает соотношение (27).

В Приложении коэффициент D_1 вычисляется приближенно из соотношения (27) на основании свойства «остроты» мнимой части $\operatorname{Im}\tilde{\bar{G}}(p)$ фурье-образа средней функции Грина в точке $p = k_0$, где k_0 — волновое число свободного пространства. Полученное значение D_1 равно

$$D_1 \approx \frac{1}{12\pi} \frac{k_0^2 d}{1 - \langle\mu\rangle}. \tag{30}$$

Здесь d — длина экстинкции, $1/d = -\operatorname{Im}\widetilde{M}(k_0)/k_0$. Через $\langle\mu\rangle$ обозначена величина

$$\langle\mu\rangle = \frac{d}{12\pi} \widetilde{K}_{01}(k_0, k_0) = \left[\int (s\,s') \widetilde{K}_0(k_0 s, k_0 s')\, d^2 s\right] \times \\ \times \left[\int \widetilde{K}_0(k_0 s, k_0 s')\, d^2 s\right]^{-1}, \tag{31}$$

где s и s' — единичные векторы и интегрирование производится по всему телесному углу. Эта величина представляет собой среднее значение косинуса угла рассеяния плоской волны на эффективной неоднородности.

Вернемся к формуле (24) для некогерентной части ковариации функции Грина. В первом члене ее правой части стоит множитель, который целесообразно выделить специальным обозначением, записав

$$I_{\text{некоr}}(R) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{k_0^2}{D_1} \frac{1}{R}. \tag{32}$$

Это выражение имеет смысл лучевой яркости некогерентной части излучения точечного источника. Действительно, если в правую часть формулы (24) подставить значение средней функции Грина $\bar{G}(r)$ в пренебрежении пространственной дисперсией волн [9] и положить $r' = 0$, то получим

$$B_{\text{некоr}}(R, r, r')_{r'=0} = \int d^2 s \exp(ik_0 sr) I_{\text{некоr}}(R) + O(1/R^2),$$

где через $B_{\text{некоr}}(R, r, r')$ обозначена левая часть (24). Лучевая яркость (32) удовлетворяет уравнению Пуассона с точечным источником, что согласуется с решением [13] уравнения переноса для точечного источника в среде с изотропным рассеянием.

В заключение автор благодарит Ю. А. Рыжова за обсуждение некоторых вопросов по теме данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поясним способ приближенного решения интегрального уравнения (20) для функции $F(p)$, приводящий к значению (30) для коэффициента D_1.

Мнимая часть фурье-образа средней функции Грина в пренебрежении пространственной дисперсией волн приближенно равна

$$\operatorname{Im}\tilde{\bar{G}}(p) \approx -(2\pi)^{-3} \frac{k_0/d}{(p^2 - k_0^2)^2 + (k_0/d)^2}. \tag{П.1}$$

С помощью этого равенства находим следующие значения интегралов:

$$\int_0^\infty \operatorname{Im}\tilde{\bar{G}}(p)\, p^2\, dp \approx -\frac{k_0}{(4\pi)^2}; \tag{П.2a}$$

$$\int_0^\infty [\operatorname{Im}\tilde{\bar{G}}(p)]^2 p^2\,dp \approx \frac{d}{8(2\pi)^5}. \tag{П.2б}$$

Функция $\varphi(p)$, определенная соотношением (21), в пренебрежении пространственной дисперсией имеет вид

$$\varphi(p) \approx 2i(2\pi)^3 k_0 \operatorname{Im}\tilde{\bar{G}}(p). \tag{П.3}$$

При решении уравнения (20) полагаем в нем $p = k_0$ и выносим в его правой части из-под знака интегралов по q значения функций $\widetilde{K}_{01}(k_0, q)\,F(q)$ и $\widetilde{K}_{01}(k_0, q)$ в точке $q = k_0$, пренебрегая двумя последними членами с $\widetilde{K}_0^{(1)}(k_0, q)$ и $\widetilde{K}_1^{(1)}(k_0, q)$, дающими малосущественные дисперсионные поправки к искомому решению. В результате, используя значения интегралов (П. 2), получаем

$$F(k_0) \approx -\frac{id^2}{12\pi}\frac{\widetilde{K}_{01}(k_0, k_0)}{1-(d/12\pi)\widetilde{K}_{01}(k_0, k_0)}. \tag{П.4}$$

Интеграл (26) для $H(0)$ вычисляется путем вынесения значения функции $F(p)$ из-под знака интеграла по p в точке $p = k_0$ и приближенно равен

$$H(0) \approx \frac{k_0^2}{12\pi}\,[-id + F(k_0)]. \tag{П.5}$$

Подстановка (П.4) в (П.5) приводит к формуле (30).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. Larsen and J. B. Keller, J. Math. Phys., 15, № 1, 75 (1974).
2. В. А. Амбарцумян, Изв. АН СССР, серия географическая и геофизическая, № 3, 97 (1942).
3. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
4. М. В. Масленников, Докл. АН СССР, 118, № 5, 895 (1958).
5. Г. В. Розенберг, Оптика и спектроскопия, 5, № 4, 440 (1958).
6. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, Н. А. Силантьев, ЖЭТФ, 57, № 3 (9), 988 (1969).
7. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 894 (1969).
8. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, № 1, 3 (1970).
9. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, № 1 (7), 401 (1967).
10. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 719 (1968).
11. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 88 (1973).
12. Э. Гурса, Курс математического анализа, том III, часть 2, ОНТИ, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
13. Б. Дэвинсон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.

Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологической службы

Поступила в редакцию 29 апреля 1976 г.

ON THE COHERENT FUNCTION OF RADIATION SOURCE FIELD IN UNBOUNDED SCATTERING MEDIUM

Yu. N. Barabanenkov

The asymptotic solution of the Bethe—Salpeter equation has been built by the Fredholm method for co-variation of the Green function of scalar radiation in an unbounded scattering medium at a large optical distance between the gravity centers of observation and source points. According to this solution the properties of the field coherence at a large optical distance from its sources are determined by the imaginary part of the mean Green function and the field intensity (or its ray brightness) decreases inversly proportional to the distance from the source.