ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 7 *РАДИОФИЗИКА* *1977*

УДК 538.56 : 519.25

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛУЧАЙНЫХ СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В. И. Кляцкин, В. И. Татарский

Задача о распространении волн в поглощающих одномерных случайных средах рассматривается для моделей флуктуаций диэлектрической проницаемости в виде случайных процессов трех типов: дельта-коррелированные процессы, телеграфный процесс и обобщенный телеграфный процесс. Во всех трех случаях получено замкнутое уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения волны от слоя среды. Анализируются стационарные распределения вероятностей. Показано, что при определенных ограничениях на параметры среды стационарное распределение вероятностей не зависит от модели флутуирующей среды.

Задача о распространении волн в одномерной среде со случайными неоднородностями привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, простотой этой задачи по сравнению с аналогичными задачами для двух- или трехмерных сред и, с другой стороны, важностью ее для понимания физики процесса распространения волн в случайных средах.

В случае мелкомасштабных флуктуаций диэлектрической проницаемости ($kl \ll 1$, где k — волновое число, а l — радиус корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости) хорошо известно, что распределение вероятностей коэффициента отражения волны от слоя флуктуирующей среды можно описывать уравнением Эйнштейна—Фоккера (в предположении гауссовости флуктуаций диэлектрической проницаемости) (см., например, [1]). В другом же случае — крупномасштабных флуктуаций диэлектрической проницаемости ($kl \gg 1$) — такой ясности нет. Встречающиеся в литературе утверждения, что в ряде случаев уравнение для плотности вероятностей коэффициента отражения также имеет вид уравнения Эйнштейна—Фоккера (см., например, [2, 3]), нуждаются в более строгом обосновании. Поэтому представляет определенный интерес точное решение задачи для какой-нибудь модели флуктуаций диэлектрической проницаемости с конечным радиусом корреляции. Такой моделью, допускающей точное решение, является модель флуктуаций диэлектрической проницаемости в виде телеграфного случайного процесса. Этот случай изучался в работах [4, 5]. Аналогичный результат имеет место и в случае модели флуктуаций в виде обобщенного телеграфного процесса. В работе [6] разработан математический аппарат, позволяющий довольно просто исследовать статистические характеристики решений стохастических уравнений, содержащих в качестве флуктуирующих параметров телеграфный или обобщенный телеграфный случайные процессы. Ниже мы применяем этот аппарат для анализа задачи о статистических характеристиках коэффициента отражения волны от слоя флуктуирующей среды.

1. ИСХОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ СЛЕДСТВИЯ

Пусть диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x)$ равна $\varepsilon_0 = \varepsilon_{01} + i\varepsilon_{02} = \mathrm{const}$ при $-\infty < x < 0$, $\varepsilon_L = \varepsilon_{L1} + i\varepsilon_{L2} = \mathrm{const}$ при $x > L$, а в области $0 < x < L$ имеет вид $\varepsilon(x) = \bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}(x)$, где $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \mathrm{const}$ — среднее значение, а $\tilde{\varepsilon}(x) = \tilde{\varepsilon}^*(x)$ — флуктуирующая часть $\varepsilon(x)$. Пусть далее нормально к слою распространяется электромагнитная волна $E_y(x) = U(x)$, подчиняющаяся уравнению

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x) U = 0. \tag{1}$$

К уравнению такого же типа сводится при горизонтальной поляризации и случай наклонного падения волны на слой. Рассмотрим задачу о падении на неоднородный слой из области $x > L$ волны $A_L \exp[-ik_L \times (x - L)]$, где $k_L = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_L}$. С учетом отраженной волны решение уравнения (1) будет иметь вид

$$U(x) = A_L \exp[-ik_L(x - L)] + B_L \exp[ik_L(x - L)] \tag{2}$$

$$(x > L)$$

и

$$U(x) = A_0 \exp(-ik_0 x), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0} \quad (x < 0) \tag{3}$$

с учетом условий излучения. Нашей задачей будет определение статистических характеристик коэффициента отражения от неоднородного слоя

$$R_L \equiv B_L / A_L. \tag{4}$$

Введем в области $0 < x < L$ вместо $U(x)$ новую неизвестную функцию

$$R(x) = \frac{kU(x) - iU'(x)}{kU(x) + iU'(x)}, \quad 0 < x < L, \quad U'(x) = \frac{dU}{dx}, \tag{5}$$

где $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\bar{\varepsilon}} = \varkappa + i\gamma$. Дифференцируя (5) по x и используя уравнение (1), легко получить следующее уравнение для $R(x)$:

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2i(\varkappa + i\gamma)R + \frac{i\tilde{\varepsilon}(x)}{2|\bar{\varepsilon}|}(\varkappa - i\gamma)[1 + R(x)]^2. \tag{6}$$

Граничными условиями к уравнению (1) являются непрерывность $U(x)$ и $U'(x)$ при $x = 0$ и $x = L$, откуда следует, что

$$U(0) = A_0, \quad U'(0) = -ik_0 A_0, \quad U(L) = A_L + B_L, \quad U'(L) = ik_L(B_L - A_L). \tag{7}$$

Положим в (5) $x = 0$ и используем (7):

$$R(0) = \frac{kA_0 - k_0 A_0}{kA_0 + k_0 A_0} = \frac{k - k_0}{k + k_0} = \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\bar{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{8}$$

Эта формула определяет начальное условие к уравнению (6).

Положим в (5) $x = L$ и используем (7):

$$R(L) = \frac{k(B_L + A_L) + k_L(B_L - A_L)}{k(B_L + A_L) - k_L(B_L - A_L)} = \frac{k(R_L + 1) + k_L(R_L - 1)}{k(R_L + 1) - k_L(R_L - 1)}.$$

Разрешая это уравнение относительно R_L, получаем формулу, выражающую интересующую нас величину R_L через решение $R(L)$ уравнения (6) в точке L:

$$R_L = \frac{(k_L + k)R(L) + (k_L - k)}{(k_L + k) + (k_L - k)R(L)} = \frac{(\sqrt{\varepsilon_L} + \sqrt{\varepsilon})R(L) + (\sqrt{\varepsilon_L} - \sqrt{\varepsilon})}{(\sqrt{\varepsilon_L} + \sqrt{\varepsilon}) + (\sqrt{\varepsilon_L} - \sqrt{\varepsilon})R(L)}. \tag{9}$$

Таким образом, коэффициент отражения R_L может быть выражен через вспомогательную функцию $R(x)$.

Уравнение (6) имеет первый порядок по x, и начальное условие к нему задано в точке $x = 0$. Отсюда следует, что значение $R(x)$ зависит лишь от предшествующих по x значений $\tilde{\varepsilon}(x')$, $x' \leqslant x$, т. е. выполняется принцип динамической причинности. В то же время этим свойством не обладает решение $U(x)$ уравнения (1), так как граничные условия к нему заданы на обоих концах неоднородного слоя.

В дальнейшем будем считать, что $\gamma \ll \varkappa$, т. е. поглощение на длине волны мало. Тогда можно пренебречь величиной γ во втором слагаемом в (6). В то же время мы сохраняем γ в первом слагаемом, что обеспечивает правильное экспоненциальное затухание волн.

Положим

$$R(x) = e^{-(u + i\varphi)}, \quad 0 \leqslant u(x) \leqslant \infty, \quad -\pi \leqslant \varphi(x) \leqslant \pi. \tag{10}$$

Тогда из (6) легко получить следующую систему уравнений для $u(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\frac{du(x)}{dx} = 2\gamma + \alpha\xi(x)\sin\varphi(x)\,\mathrm{sh}\,u(x); \tag{11}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -2\varkappa - \alpha\xi(x)\left[1 + \cos\varphi(x)\,\mathrm{ch}\,u(x)\right], \tag{12}$$

где $\tilde{\varepsilon}(x) = \mu\xi(x)$, $\alpha = \dfrac{\varkappa\mu}{|\bar{\varepsilon}|}$, а величина μ характеризует интенсивность флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$.

Рассмотрим величину

$$\Phi[u, \varphi, x; \xi(\tilde{x})] = \delta(u(x) - u)\,\delta(\varphi(x) - \varphi), \tag{13}$$

являющуюся функционалом от случайного процесса $\xi(\tilde{x})$. Среднее значение этой функции — совместная плотность вероятностей для $u(x), \varphi(x)$:

$$\langle \Phi[u, \varphi, x; \xi(\tilde{x})] \rangle = W(u, \varphi, x). \tag{14}$$

Дифференцируя (13) по x и используя уравнения (11), (12), получим уравнение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi)\,\Phi = \alpha\xi(x)\hat{M}(u, \varphi)\,\Phi(u, \varphi, x), \tag{15}$$

где линейные операторы $\hat{L}(u, \varphi)$ и $\hat{M}(u, \varphi)$ определяются по формулам

$$\hat{L}(u, \varphi) f = \left(\gamma \frac{\partial}{\partial u} - \varkappa \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) f,$$
$$\hat{M}(u, \varphi) f = -\frac{\partial}{\partial u} \sin\varphi \operatorname{sh} u f + \frac{\partial}{\partial \varphi}(1 + \cos\varphi \operatorname{ch} u) f. \tag{16}$$

В дальнейшем нам понадобится выражение для вариационной производной функции $\Phi(u, \varphi, x)$ по $\xi(x')$ при $x' = x$. Для нее стандартным путем получаем выражение

$$\frac{\delta\Phi[u, \varphi, x; \xi(\tilde{x})]}{\delta\xi(x)} = \alpha \hat{M}(u, \varphi)\Phi(u, \varphi, x). \tag{17}$$

Усредним теперь уравнение (15). С учетом (14) получаем уравнение для совместной плотности вероятностей величин $u(x)$ и $\varphi(x)$ вида

$$\frac{\partial W(u, \varphi, x)}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W = \alpha \hat{M}(u, \varphi)\langle \xi(x)\Phi(u, \varphi, x)\rangle. \tag{18}$$

Уравнение (18) незамкнуто относительно функции W. Конкретный вид этого уравнения определяется средней величиной в правой части и зависит от характера случайной функции $\xi(x)$. Отметим, что для гауссова дельта-коррелированного процесса $\xi(x)$ уравнение (18) принимает вид уравнения Эйнштейна—Фоккера:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W = \frac{\alpha^2}{2}\sigma^2 \hat{M}^2(u, \varphi) W(u, \varphi, x)$$
$$(\langle\xi(x)\rangle = 0, \ \langle\xi(x)\xi(x')\rangle = \sigma^2\delta(x - x')). \tag{19}$$

Исследованию этого (или эквивалентных этому) уравнения посвящен ряд работ [7—11, 2, 3], и мы не будем останавливаться на нем, а перейдем непосредственно к процессам $\xi(x)$ с конечным радиусом корреляции.

При этом мы подробно рассмотрим случай телеграфного процесса и более кратко остановимся на случае обобщенного телеграфного процесса, который в иностранной литературе носит название процесса Кубо—Андерсена.

2. ТЕЛЕГРАФНЫЙ ПРОЦЕСС

Пусть теперь $\xi(x)$ — телеграфный случайный процесс, определяемый формулой (см. [6])

$$\xi(x) = a(-1)^{n(0, x)}, \tag{20}$$

где $\mathrm{Prob}(a = 1) = \mathrm{Prob}(a = -1) = 1/2$, а $n(0, x)$ — целочисленный случайный процесс, обладающий свойствами:

1) $n(x_1, x_3) = n(x_1, x_2) + n(x_2, x_3)$, $x_1 < x_2 < x_3$;

2) $n(x_1, x_2)$ и $n(x_2, x_3)$ при $x_1 < x_2 < x_3$ статистически независимы;

3) $\mathrm{Prob}\,(n(x_1, x_2) = m) = \frac{\bar{n}^m}{m!} e^{-\bar{n}}$, $\bar{n}(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx' \nu(x')$.

В дальнейшем для простоты мы ограничимся случаем стационарного случайного процесса, когда $\nu = \mathrm{const}$ и $\bar{n}(x_1, x_2) = \nu\,|x_2 - x_1|$. Корреляционная функция для $\tilde{\varepsilon}(x)$ в этом случае имеет вид

$$\langle\tilde{\varepsilon}(x_1)\tilde{\varepsilon}(x_2)\rangle = \mu^2 \exp(-2\nu|x_1 - x_2|),$$

и радиус корреляции $l = 1/2\nu$.

Как было показано в работе [6], если $F_x[\xi(\tilde{x})]$ — функционал от телеграфного случайного процесса, то имеет место равенство $(\tilde{x} \leqslant x)$

$$\langle \xi(x) F_x[\xi(\tilde{x})]\rangle = \int\limits_0^x dx' \exp[-2\nu(x-x')]\left\langle \frac{\delta F_x[\tilde{\xi}(\tilde{x}, x')]}{\delta\xi(x')}\right\rangle, \tag{21}$$

где $\tilde{\xi}(\tilde{x}, x') = \theta(x' - \tilde{x})\,\xi(\tilde{x})$, т. е. аргументом функционала F_x под знаком интеграла является функция, совпадающая с $\xi(\tilde{x})$ при $\tilde{x} < x'$ и равная нулю при $\tilde{x} > x'$.

Равенство (21) позволяет получить замкнутое уравнение для W аналогично дельта-коррелированным процессам. В самом деле, для вычисления средней величины в правой части (18) мы можем использовать формулу (21), в которой следует положить $F_x = \Phi$:

$$\langle\xi(x)\,\Phi(u, \varphi, x)\rangle = \int\limits_0^x dx'\, e^{-2\nu(x-x')}\left\langle \frac{\delta\Phi[u, \varphi, x; \tilde{\xi}]}{\delta\xi(x')}\right\rangle. \tag{22}$$

Здесь $\Phi[u, \varphi, x; \tilde{\xi}]$ определяется уравнением (15), в котором случайная функция $\xi(x)$ заменена на функцию $\tilde{\xi}(x)$, равную нулю при $x > x'$, а при $x \leqslant x'$ — совпадающую с $\xi(x)$. Поэтому при $x > x'$ $\Phi[\tilde{\xi}]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Phi[\tilde{\xi}]}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi)\,\Phi[\tilde{\xi}] = 0 \qquad (x > x') \tag{23}$$

с начальным условием

$$\Phi[\tilde{\xi}]|_{x=x'} = \Phi(u, \varphi, x'). \tag{24}$$

Решением задачи (23), (24), как легко проверить, является функция

$$\Phi[u, \varphi, x; \tilde{\xi}] = \exp[-2(x-x')\,\hat{L}(u, \varphi)]\,\Phi(u, \varphi, x'), \tag{25}$$

где оператор $\exp[-2(x-x')\hat{L}(u, \varphi)]$ в силу определения оператора $\hat{L}(u, \varphi)$ (формула (16)) является оператором сдвига по φ и u, т. е.

$$\exp[-2(x-x')\hat{L}(u, \varphi)]\,\Phi(u, \varphi, x') = \Phi(u - 2\gamma(x-x'), \varphi + 2\varkappa(x-x'), x'). \tag{25'}$$

Действуя теперь на (25) оператором $\delta/\delta\xi(x')$, получаем с учетом равенства (17) выражение

$$\frac{\delta\Phi[\tilde{\xi}]}{\delta\xi(x')} = \alpha \exp\left[-2(x-x')\hat{L}(u,\varphi)\right]\hat{M}(u,\varphi)\Phi(u,\varphi,x'), \tag{26}$$

и, следовательно, уравнение (18) с учетом (21), (26) принимает форму замкнутого уравнения:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + 2\hat{L}(u,\varphi)W = \alpha^2 \hat{M}(u,\varphi)\int_0^x dx' \exp\left[-2(x-x')(\nu+\hat{L})\right]\times$$
$$\times \hat{M}(u,\varphi)W(u,\varphi,x'). \tag{27}$$

Уравнение (27) для плотности вероятностей коэффициента отражения является точным следствием динамических уравнений (11), (12) и сделанных предположений относительно случайной функции $\tilde{\varepsilon}(x)$.

Уравнение (27) является в отличие от уравнения Эйнштейна—Фоккера интегро-дифференциальным. Его можно свести к системе двух уравнений в частных производных первого порядка по x:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial x} + 2\hat{L}(u,\varphi)W = \alpha^2\hat{M}(u,\varphi)\Psi, \\ &\frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2[\nu + \hat{L}(u,\varphi)]\Psi = \hat{M}(u,\varphi)W \end{aligned} \tag{28}$$

с начальными условиями при $x=0$, $W=\Phi(u,\varphi,0)$, $\Psi=0$. Отметим, что в предельном случае $\nu\to\infty$ уравнение (27) переходит в уравнение Эйнштейна—Фоккера

$$\frac{\partial W}{\partial x} + 2\hat{L}(u,\varphi)W = D\hat{M}^2(u,\varphi)W(u,\varphi,x), \tag{29}$$

где $D = \frac{\alpha^2}{2\nu} = \alpha^2 l = \sigma_\varepsilon^2\frac{\varkappa^2}{|\bar{\varepsilon}|^2}l$.

Рассмотрим уравнение (27) или эквивалентную ему систему уравнений (28). Будем искать решение системы уравнений (28) в виде рядов Фурье по φ:

$$W(u,\varphi;x) = \sum_{-\infty}^{\infty} W_n(u,x)e^{in\varphi}, \quad \Psi(u,\varphi;x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\Psi_n(u,x)e^{in\varphi}. \tag{30}$$

Тогда для коэффициентов Фурье W_n, Ψ_n легко получить соответствующую систему уравнений.

Нас будет интересовать плотность вероятностей для $|R|$, связанная с функцией $\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi W(u,\varphi,x) = 2\pi W_0(u,x)$. Для нее получаем

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} + 2\gamma\frac{\partial W_0}{\partial u} = i\frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh} u(\Psi_{-1}-\Psi_1), \tag{31}$$

а функции $\Psi_{\pm1}$ будут описываться уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{\mp1} + 2\left(\nu + \gamma\frac{\partial}{\partial u} \pm i\varkappa\right)\Psi_{\mp1} = \frac{i}{2}\Big[\mp 2W_{\mp1} \mp (\operatorname{ch} u +$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh}u\Big)W_0\mp\left(\operatorname{ch}u-\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh}u\right)W_{\mp 2}\Big]. \tag{32}$$

Система уравнений (31), (32) не замкнута, так как помимо W_0, $\Psi_{\pm 1}$ в нее входят функции $W_{\pm 1}$, $W_{\pm 2}$.

Сделаем теперь упрощающее предположение, что $|W_{\pm 1}|$, $|W_{\pm 2}| \ll W_0$, т. е. влияние гармоник $W_{\pm 1}$, $W_{\pm 2}$ на динамику W_0 несущественно. В этом случае система уравнений (31), (32) принимает вид замкнутой системы уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial W_0}{\partial x}+2\gamma\frac{\partial W_0}{\partial u}=i\frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh}u\,(\Psi_{-1}-\Psi_1),\\ \frac{\partial}{\partial x}\Psi_{\mp 1}+2\left(\nu+\gamma\frac{\partial}{\partial u}\pm i\varkappa\right)\Psi_{\mp 1}=\mp\frac{i}{2}\left(\operatorname{ch}u+\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh}u\right)W_0.\end{gathered} \tag{33}$$

Отметим, что эта система уравнений эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению для функции $W_0(u, x)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial W_0}{\partial x}+2\gamma\frac{\partial}{\partial u}W_0=\frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh}u\int_0^x dx'\exp\Big[-2(x-x')\times\\ \times\left(\nu-\gamma\frac{\partial}{\partial u}\right)\Big]\cos 2\varkappa(x-x')\left[\operatorname{ch}u+\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{sh}u\right]W_0(x'),\end{gathered} \tag{34}$$

которое формально совпадает с уравнением (27), проинтегрированным по φ при дополнительном предположении:

$$\begin{gathered}\left\langle\hat{M}(u,\varphi)\exp\left[2(x-x')\varkappa\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\hat{M}(u,\varphi)W(u,\varphi,x')\right\rangle=\\ =\left\langle\hat{M}(u,\varphi)\exp\left[2(x-x')\varkappa\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\hat{M}(u,\varphi)\right\rangle W_0(u,x').\end{gathered}$$

Здесь угловыми скобками обозначена операция интегрирования по φ, что соответствует обычно используемому в таких задачах методу усреднения по быстроменяющимся величинам.

При наличии затухания ($\gamma\neq 0$) решение уравнения (27) при $x\to\infty$ выходит на стационарное распределение

$$W(u,\varphi,\infty)=W(u,\varphi).$$

Уравнение для стационарного распределения легко получить из (27), совершив замену переменной интегрирования $x'\to x-x'$ и устремив $x\to\infty$:

$$\hat{L}(u,\varphi)W(u,\varphi)=\frac{\alpha^2}{4}\hat{M}(u,\varphi)\frac{1}{\nu+\hat{L}(u,\varphi)}\hat{M}(u,\varphi)W(u,\varphi). \tag{35}$$

Соответствующее стационарное уравнение для нулевой фурье-гармоники принимает вид

$$\frac{d}{du}\left\{W_0(u)-\frac{\alpha^2}{8\gamma}\operatorname{sh}u\left[\frac{\nu+\gamma\frac{d}{du}}{\left(\nu+\gamma\frac{d}{du}\right)^2+\varkappa^2}\left(2\operatorname{ch}u\,W_0+\operatorname{sh}u\frac{dW_0}{du}+\right.\right.\right.$$

$$+(W_1+W_{-1})-\frac{1}{2}\operatorname{sh}u\frac{d}{du}(W_2+W_{-2})\Big)+\frac{i\varkappa}{\left(\nu+\gamma\frac{d}{du}\right)^2+\varkappa^2}\times$$

$$\times\left(W_1-W_{-1}-\frac{1}{2}\operatorname{sh}u\frac{d}{du}(W_2-W_{-2})\right)\Bigg]\Bigg\}=0. \tag{36}$$

Уравнение (36), так же как и нестационарное уравнение, не является замкнутым, так как помимо W_0 в него входят функции $W_1\pm W_{-1}$, $W_2\pm W_{-2}$.

Сделаем теперь два упрощающих предложения относительно стационарного распределения:

$$1)\ |W_1\pm W_{-1}|,\quad |W_2\pm W_{-2}|\ll W_0.$$

В этом случае в уравнении (36) можно оставить лишь $W_0(u)$ и в результате получить уравнение

$$W_0(u)=\frac{\alpha^2}{8\gamma}\operatorname{sh}u\frac{\nu+\gamma\frac{d}{du}}{\left(\nu+\gamma\frac{d}{du}\right)^2+\varkappa^2}\left(2\operatorname{ch}u\,W_0+\operatorname{sh}u\frac{dW_0}{du}\right)+\text{const}. \tag{37}$$

Отметим, что уравнение (37) соответствует переходу $x\to\infty$ в уравнении (34).

$$2)\left|\gamma\frac{d}{du}\left(2\operatorname{ch}u\,W_0+\operatorname{sh}u\frac{dW_0}{du}\right)\right|\ll\nu\left|2\operatorname{ch}u\,W_0+\operatorname{sh}u\frac{dW_0}{du}\right|,$$

т. е. в правой части (37) можно пренебречь оператором $\gamma\frac{d}{du}$. В этом случае в уравнении (37) можно заменить оператор на число $\frac{\nu}{\nu^2+\varkappa^2}$.

Тогда уравнение (37) примет вид

$$W_0(u)=\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}u\left(2\operatorname{ch}u+\operatorname{sh}u\frac{d}{du}\right)W_0+\text{const},$$

$$\beta=\frac{8\gamma}{\alpha^2\nu}(\nu^2+\varkappa^2)=\frac{4\gamma}{\alpha^2 l}(1+4l^2\varkappa^2), \tag{38}$$

где $l=1/2\nu$ — радиус корреляций функции $\xi(x)$.

Нормируемое на единицу решение этого уравнения соответствует значению const = 0 и имеет вид

$$W_0(u)=\frac{\beta}{\operatorname{sh}^2u}\exp\left[-\beta(\operatorname{cth}u-1)\right]. \tag{39}$$

Функция (39) имеет максимум при $u=u_0=\frac{1}{2}\ln\left[\beta+\sqrt{1+\beta^2}\right]$. Условие 2) после подстановки в него полученного решения (39) принимает вид

$$\left|\frac{\beta}{\operatorname{sh}^2 u} - 3\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u}\right| \ll \frac{\nu}{\gamma}. \qquad (40)$$

Если $\nu/\gamma < 3$, то неравенство (40) нарушается в большей области значений u. Поэтому необходимо, чтобы выполнялось

$$\gamma \ll \nu. \qquad (41)$$

В этом случае (40) сводится к условию

$$\operatorname{sh}^2 u \gg \frac{\gamma\beta}{\nu} \equiv \operatorname{sh}^2 u_*.$$

Отметим, что неравенство (41) является условием малости затухания волны на масштабах порядка радиуса корреляции и является естественным для данной задачи. В противном случае волна из-за большого затухания не почувствует слоистую структуру среды.

Таким образом, решение (39) заведомо непригодно в области малых u, соответствующих значениям коэффициента, по модулю близким к единице. Если выполняется условие $W_0(u_*) \ll W_0(u_0)$, то область $u < u_*$ не является существенной. Так как на участке $0 < u < u_*$ функция $W_0(u)$ монотонно возрастает, то условие $W_0(u_*) \ll W_0(u_0)$ можно заменить более удобным условием $\operatorname{sh} 2u_* \ll \operatorname{sh} 2u_0 = \beta$. Это приводит к неравенству $\beta\left(\frac{\nu}{\gamma} - \frac{\gamma}{\nu}\right) \gg 1$ или, так как $\frac{\gamma}{\nu} \ll \frac{\nu}{\gamma}$, к условию $\beta\nu/\gamma \gg 1$. Подставляя β из (39), найдем окончательно, что предположение 2) справедливо в существенной области значений u при

$$\alpha^2 \ll (\varkappa^2 + \nu^2) \text{ или } \sigma_\varepsilon^2 \ll |\bar{\varepsilon}|^2 (1 + \nu^2/\varkappa^2), \qquad (42)$$

а распределение вероятностей (39) правильно описывает область значений

$$|R| < e^{-u_*} = \sqrt{1 + \beta\gamma/\nu} - \sqrt{\beta\gamma/\nu}.$$

Перейдем теперь к выяснению условий, при которых справедливо предположение 1), считая, что (41) и (42) выполняются. Для этого следует изучить уравнение для W_1. В правой части этого уравнения стоит общий коэффициент $\alpha^2/(\nu^2 + \varkappa^2)$, который согласно (42) мал. Поэтому в правой части уравнения для W_1 можно оставить лишь W_0, пренебрегая амплитудами других (малых) гармоник. В результате получаем уравнение

$$\gamma \frac{dW_1}{du} - i\varkappa W_1 = -\frac{\alpha^2\beta}{8(\nu - i\varkappa)} \frac{W_0(u)}{\operatorname{sh} u}. \qquad (43)$$

При наличии затухания выполняется условие $W(0, \varphi) = 0$ [12], так как значения R, равные по модулю единице, не могут появляться ни в одной из реализаций. Поэтому уравнение (43) следует решать с граничным условием $W_1(0) = 0$. Это решение имеет вид

$$W_1(u) = -\frac{\alpha^2\beta}{8(\nu - i\varkappa)\gamma} \int_0^u du' \exp\left(i\frac{\varkappa}{\gamma}u'\right) \frac{W_0(u - u')}{\operatorname{sh}(u - u')}. \qquad (44)$$

Если выполняются условия $\gamma \ll \varkappa$, $\alpha^2 \ll (\varkappa/\nu)(\varkappa^2 + \nu^2)$, то функция $W_0(u - u')/\operatorname{sh}(u - u')$ является плавной по сравнению с экспоненциальным множителем, и из (44) можно в этом случае получить

$$W_1(u) = -\frac{i\alpha^2\beta}{8\varkappa(\nu - i\varkappa)} \frac{W_0(u)}{\operatorname{sh} u}. \tag{44'}$$

Теперь можно выяснить, при каких условиях в уравнении (36)

$$|W_1(u)| = \frac{\alpha^2\beta}{8\varkappa\sqrt{\nu^2+\varkappa^2}} \frac{W_0(u)}{\operatorname{sh} u} \ll 2\operatorname{ch} u\, W_0 + \operatorname{sh} u \frac{dW_0}{du} = \frac{\beta}{\operatorname{sh} u} W_0(u).$$

Искомые неравенства имеют вид

$$\alpha^2 \ll \varkappa\sqrt{\varkappa^2+\nu^2} \quad \text{или} \quad \sigma_\varepsilon^2 \ll |\bar{\varepsilon}|^2 \sqrt{1+\nu^2/\varkappa^2}. \tag{45}$$

При выполнении условия (45) автоматически выполняется и условие ($\alpha \ll {}^2(\varkappa/\nu)(\varkappa^2+\nu^2)$), использованное при переходе от (44) к (44'). Кроме того, условие (42) также выполняется, если справедливо (45). Таким образом, если

$$\gamma \ll \nu, \quad \gamma \ll \varkappa, \quad \sigma_\varepsilon^2 \ll |\bar{\varepsilon}|^2 \sqrt{1+\nu^2/\varkappa^2}, \tag{46}$$

то распределение вероятностей для u описывается формулой (39). Отметим, что распределение вида (39) было получено и проанализировано в работе [3] (но с другими параметрами) как стационарное решение уравнения Эйнштейна—Фоккера. Полученное в настоящей работе распределение (39) переходит в него в случае $\nu \gg \varkappa$, когда $\beta \approx 8\frac{\gamma\nu}{\sigma_\varepsilon^2\varkappa^2}|\bar{\varepsilon}|^2$.

В противоположном случае крупномасштабных неоднородностей, $\nu \ll \varkappa$, $\beta \approx \frac{8\gamma\varkappa^2}{\alpha^2\nu} = \frac{8\gamma|\bar{\varepsilon}|^2}{\sigma_\varepsilon^2\nu}$ не зависит от длины волны, что соответствует геометрооптическому приближению. Следует подчеркнуть, что условия (46) допускают любое соотношение между радиусом корреляции $l = 1/2\nu$ и длиной волны $2\pi/\varkappa$.

Выше мы рассматривали случай телеграфного процесса (20), где a была случайной величиной. Если же величина $a \equiv 1$, т. е. случайной величиной будет только толщина слоев, то, используя вместо (21) формулу [6]

$$\langle \xi(x) F_x[\xi(\tilde{x})] \rangle = e^{-2\nu x} F_x[0] + \int_0^x dx' \exp[-2\nu(x-x')] \left\langle \frac{\delta F_x[\xi(\tilde{x}, x')]}{\delta\xi(x')} \right\rangle,$$

легко получить уравнение для $W(u; \varphi, x)$ в этом случае. Стационарное уравнение при $x \to \infty$ при этом, естественно, будет совпадать с уравнением (35).

3. ОБОБЩЕННЫЙ ТЕЛЕГРАФНЫЙ ПРОЦЕСС

Рассмотрим теперь другую модель флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ с конечным радиусом корреляции, также допускающую точное решение задачи. А именно, будем считать функцию $\tilde{\varepsilon}(x)$ обобщенным телеграфным процессом [6]

$$\tilde{\varepsilon}(x) = a_{n(0,x)}, \tag{47}$$

где совокупность случайных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ статистически независима с распределением $p(a)$ $(\langle a\rangle = 0,\ \langle a^2\rangle = \mu^2,$ а $n(0, x)$ — целочисленный случайный процесс, введенный в предыдущем разделе).

Для такой модели флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ корреляционная функция также имеет экспоненциальный вид

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x)\tilde{\varepsilon}(x')\rangle = \mu^2 \exp[-\nu(x-x')]$$

с радиусом корреляции $l = 1/\nu$.

Для получения замкнутого уравнения для плотности вероятностей $W(u, \varphi, x)$ нам надо, как следует из (18), вычислить величину $\langle \tilde{\varepsilon}(x)\Phi(u, \varphi, x)\rangle$. Для вычисления такой корреляции воспользуемся формулой, справедливой для обобщенного телеграфного процесса $\tilde{\varepsilon}(x)$ и произвольного функционала от него $F_x[\tilde{\varepsilon}(\tilde{x})]$ $(\tilde{x} \leqslant x)$, полученной в работе [6],

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x) F_x[\tilde{\varepsilon}(\tilde{x})]\rangle = \langle \tilde{a} F_x[\tilde{a}]\rangle e^{-\nu x} + \\ + \nu \int_0^x dx' \exp[-\nu(x-x')] \langle \tilde{a} \tilde{F}_x[\tilde{a}, x', \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})]\rangle . \tag{48}$$

Здесь

$$\tilde{F}_x[\tilde{a}, x', \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})] = F_x[\tilde{a}\theta(\tilde{x}-x') + \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})\theta(x'-\tilde{x})], \\ F_x[\tilde{a}] = \tilde{F}_x[\tilde{a}, 0, \tilde{\varepsilon}(\tilde{x})], \tag{49}$$

а случайная величина $\tilde{a}$ считается статистически независимой от процесса $\tilde{\varepsilon}(x)$ с распределением $p(\tilde{a})$.

Таким образом, функционал $\tilde{F}_x$ совпадает с функционалом F_x при $x < x'$, а при $x > x'$ следует заменить процесс $\tilde{\varepsilon}(\tilde{x})$ на случайную величину $\tilde{a}$, не зависящую от $\tilde{\varepsilon}(x)$. При этом, естественно, должно выполняться условие непрерывности для $\tilde{F}_x$ при $x = x'$.

Следовательно, уравнение (18) для обобщенного телеграфного процесса $\tilde{\varepsilon}(x)$ примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi) W = \tilde{\alpha} \hat{M}(u, \varphi) \langle \tilde{a} \tilde{\Phi}[u, \varphi, x, \tilde{a}]\rangle e^{-\nu x} + \\ + \tilde{\alpha}\nu \hat{M}(u, \varphi) \int_0^x dx' \exp[-\nu(x-x')] \langle \tilde{a} \tilde{\Phi}[u, \varphi, x, x', \tilde{a}]\rangle \quad (\tilde{\alpha} = \varkappa/|\bar{\varepsilon}|), \tag{50}$$

где функционал $\tilde{\Phi}$ согласно (15) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} + 2\hat{L}(u, \varphi)\tilde{\Phi} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\hat{M}(u, \varphi)\tilde{\Phi} \quad (x > x') \tag{51}$$

с начальным условием

$$\tilde{\Phi}\Big|_{x=x'} = \Phi(u, \varphi, x'). \tag{52}$$

Решение уравнения (51) в общем виде легко написать. Для этого представим функцию $\tilde{\Phi}$ в виде

$$\tilde{\Phi} = \exp\left[-2(x-x')\hat{L}(u, \varphi)\right]\tilde{\tilde{\Phi}}. \tag{53}$$

С учетом того факта, что оператор в (53) является оператором сдвига по u и φ, для функции $\tilde{\tilde{\Phi}}$ из (51) получаем уравнение

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x} = \tilde{\alpha}\tilde{a}\hat{M}(u+2\gamma(x-x'), \varphi-2\varkappa(x-x'))\tilde{\tilde{\Phi}}, \tag{54}$$

решение которого с начальным условием при $x = x'$, вытекающим из (52), имеет вид

$$\tilde{\tilde{\Phi}} = \exp\left[\tilde{\alpha}\tilde{a}\int_0^{x-x'} d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi, \varphi-2\varkappa\xi)\right]\Phi(u, \varphi, x'). \tag{55}$$

В уравнении (50) фигурирует, однако, не сама функция $\tilde{\Phi}$, а средняя величина $\langle\tilde{a}\tilde{\Phi}\rangle$, связанная с распределением вероятностей случайной величины $\tilde{a}$. Это приводит к тому, что в уравнении (50) появляется оператор

$$\left\langle\tilde{a}\exp\left[\tilde{\alpha}\tilde{a}\int_0^{x-x'} d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi, \varphi-2\varkappa\xi)\right]\right\rangle W(u, \varphi, x'), \tag{56}$$

зависящий от конкретного вида распределения $p(\tilde{a})$. Уравнение (50) при этом оказывается замкнутым уравнением. Если же интенсивность флуктуаций $\tilde{a}$ достаточно мала, то можно ограничиться первыми членами разложения экспоненты под знаком усреднения. В первом порядке малости по $\mu^2 = \langle\tilde{a}^2\rangle$ выражение (56) принимает вид

$$\tilde{\alpha}\mu^2\int_0^{x-x'} d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi, \varphi-2\varkappa\xi)\,W(u, \varphi, x'),$$

и функция $\langle\tilde{a}\tilde{\Phi}\rangle$ будет определяться выражением

$$\begin{aligned}\langle\tilde{a}\tilde{\Phi}[u, \varphi, x, x', \tilde{a}]\rangle &= \tilde{\alpha}\mu^2\exp\left[-2(x-x')\hat{L}(u, \varphi)\right]\times \\ &\times\int_0^{x-x'} d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi, \varphi-2\varkappa\xi)\,W(u, \varphi, x').\end{aligned} \tag{57}$$

Таким образом, уравнение (50) с правой частью вида (57) является замкнутым интегро-дифференциальным уравнением, существенно отличающимся от уравнения (27) в случае флуктуаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ в виде телеграфного процесса.

При $\nu\to\infty$ это уравнение переходит в уравнение Эйнштейна—Фоккера

$$\frac{\partial W}{\partial x}+2\hat{L}(u,\varphi)W=D\hat{M}^2(u,\varphi)W(u,\varphi,x), \tag{58}$$

где

$$D=\frac{\widetilde{\alpha^2\mu^2}}{\nu}=\alpha^2 l \quad \left(\alpha^2=\frac{\mu^2\varkappa^2}{|\bar{\varepsilon}|^2}\right).$$

Дальнейший анализ уравнения (50) можно провести аналогично случаю телеграфного процесса.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (50), т. е. перейдем к пределу при $x\to\infty$:

$$\hat{L}(u,\varphi)W(u,\varphi)=\nu\frac{\alpha^2}{2}\hat{M}(u,\varphi)\int\limits_0^\infty dx'\exp[-\nu x'-2x'\hat{L}(u,\varphi)]\times$$
$$\times\int\limits_0^{x'}d\xi\,\hat{M}(u+2\gamma\xi,\varphi-2\varkappa\xi)\,W(u,\varphi). \tag{59}$$

Вычисляя интегралы в правой части (59), можно переписать это уравнение в виде

$$\hat{L}(u,\varphi)W(u,\varphi)=\frac{\nu\alpha^2}{2}\hat{M}(u,\varphi)\frac{1}{\nu+2\hat{L}(u,\varphi)}\hat{M}(u,\varphi)\times$$
$$\times\frac{1}{\nu+2\hat{L}(u,\varphi)}W(u,\varphi). \tag{60}$$

Уравнение (60) отличается от стационарного уравнения для функции W в случае флуктуаций параметров в виде телеграфного процесса (см. уравнение (35)) наличием перед W дополнительного оператора $\nu/(\nu+2\hat{L})$. Однако если мы поступим далее так же, как и в предыдущем разделе, т. е. рассмотрим только первую гармонику разложения W в ряд Фурье по φ, пренебрегая остальными, и в силу малости параметра γ пренебрежем оператором $\gamma\frac{d}{du}$ в правой части (60), то, очевидно, мы придем к уравнению, совпадающему с уравнением (38), с параметром

$$\beta=\frac{4\gamma}{\alpha^2 l}(1+4l^2\varkappa^2), \tag{61}$$

где $l=1/\nu$ — радиус корреляции функции $\tilde{\varepsilon}(x)$. Таким образом, стационарное распределение вероятностей для u в этом случае также будет описываться формулой (39).

Следует подчеркнуть некоторое различие между уравнениями (19) и (27), (50). Формально уравнение (19), как и (27), (50), является точным в случае, если ξ — дельта-коррелированная гауссова случайная функция. Однако такие функции всегда являются аппроксимацией реальных случайных функций с конечным радиусом корреляции. При исследовании законности такой аппроксимации возникают ограничения на уравнение (19). В то же время телеграфный или обобщенный телеграфный случайный процессы физически осуществимы с гораздо большей точностью, так как для них следует требовать лишь узости реальных «фронтов», а не малости радиусов корреляции по сравнению с другими масштабами задачи. В этом смысле уравнение (27) или (50) в отличие от (19) можно считать точным.

Как видно из уравнений (19), (27), (50), предположение о характере закона распределения вероятностей для $\tilde{\varepsilon}$ существенно сказывается на виде уравнения для плотности вероятностей комплексного коэффициента отражения, и эти распределения, вообще говоря, могут сильно отличаться друг от друга.

Имеются, однако, и некоторые общие свойства таких распределений. Прежде всего, это существование стационарного распределения вероятностей при наличии затухания, что впервые было в самом общем виде показано в работе [12]. Во-вторых, при выполнении условий (46) вид стационарного распределения вероятностей для модуля коэффициента отражения во всех рассмотренных случаях оказывается одинаковым и совпадает с распределением, впервые полученным в [3]. Вполне возможно, что этот закон распределения (при указанных ограничениях) не зависит от вида распределения вероятностей для $\tilde{\varepsilon}(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 8, 1240 (1973).
3. Б. С. Абрамович, А. И. Дятлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 8, 1222 (1975).
4. J. Mc Kenna and J. A. Morrison, J. Math. Phys., **11**, 2348 (1970).
5. J. A. Morrison, G. C. Papanicolaou and J. B. Keller, Com. Pure and Appl. Math., **24**, 473 (1971).
6. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **20**, № 4, 562 (1977).
7. М. Е. Герценштейн, В. Б. Васильев, Теория вероятностей и ее применение, **4**, 424 (1959).
8. М. Е. Герценштейн, В. Б. Васильев, Радиотехника и электроника, **4**, 611 (1959).
9. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, № 5, 711 (1959).
10. G. C. Papanicolaou, SIAM, J. Appl. Math., **21**, 13 (1971).
11. P. L. Sulem and V. Frish, J. Plasma Phys., **8**, 217 (1972).
12. М. Х. Захар-Иткин, УМН, **31**, 2 (1976).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
29 марта 1976 г.

ON THE STATISTIC THEORY OF WAVE PROPAGATION IN RANDOM STRATIFIED MEDIA

V. I. Klyatskin, V. I. Tatarsky

The problem of wave propagation in absorbing one-dimensional random media is considered for the fluctuation models of the dielectric permittivity as random processes of three types: delta-correlation, telegraphic and the generalized telegraphic processes. In each case a closed equation is obtained for the probability density of the reflection coefficient of a wave from a medium layer. The stationary probability distributions are analysed. It is shown that in the case of some certain limitations for the medium parameters, the stationary probability distribution does not depend on the fluctuating medium model.