ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 7 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 532.517.4

О ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПИЛООБРАЗНЫХ ВОЛН

С. С. Моисеев, А. В. Тур, В. В. Яновский

Рассмотрена однородная турбулентность в модели Бюргерса с подкачкой энергии случайной внешней силой в гармоники с малыми номерами k. Показано, что при большом количестве нелинейных волн возникает турбулентная вязкость, приводящая к размытию пилообразных волн. С помощью функциональной формулировки турбулентности и ренормировочной группы получен спектр турбулентности волновых пакетов с учетом нелинейности в модели Бюргерса.

1. Хорошо известно, что уравнение Бюргерса описывает широкий класс нелинейных волновых процессов в недиспергирующих средах с диссипацией (см., например, [1, 2]). В связи с этим представляет интерес исследовать турбулентность на основе модели Бюргерса, учитывая, что в отличие от уравнений Навье—Стокса решения уравнения Бюргерса при $\mathrm{Re} \gg 1$ не стохастизируются, по-видимому, из-за его интегрируемости. По этой причине при постановке задачи о турбулентности в уравнении Бюргерса следует, вообще говоря, рассматривать либо эволюцию начального распределения вероятности, либо задачу о переработке вероятности, создаваемой случайным источником (типа белого шума). Эволюции распределения вероятности пилообразных волн посвящена работа [3], где получен закон вырождения турбулентности, однако больший интерес представляет задача о нахождении стационарного спектра турбулентности при подкачке энергии случайной внешней силой.

Общая картина турбулентности пилообразных волн дана в работе [4]. В качестве спектра может быть взята величина v_k^2, где v_k представляет собой преобразование Фурье пилообразного колебания. При больших k

$$v_k^2 \sim k^{-2}. \tag{1}$$

Отметим, что затухание энергии гармоник на фронте ударной волны учитывалось в работе [5]. Спектр вида k^{-2} получается в том случае, если пакеты, в которые объединяются гармоники с близкими фазовыми скоростями, превращаются в пилообразные волны, несмотря на их взаимодействие друг с другом. Поскольку при однородной турбулентности волновой пакет за время своей эволюции успевает провзаимодействовать с большим количеством волн, то возникает вопрос, может ли сравниться это вазимодействие с взаимодействием пакета и не размоет ли взаимодействие пилообразную волну. В данной работе показано, что взаимодействие крупномасштабного пакета с мелкомасштабными турбулентными пульсациями приводит к турбулентной вязкости, размывающей пакет и препятствующей его опрокидыванию. Спектр при этом убывает медленнее, чем k_0^{-2}: $E(k) \sim k^{-5/3}$.

2. Спектр однородной турбулентности в модели Бюргерса со случайным источником можно получить, используя метод ренормировочной группы, предложенный в [6]. Предварительно сформулируем задачу об описании турбулентности в терминах характеристического функционала. Будем считать, что подкачка энергии в крупномасштабные пульсации осуществляется случайной внешней силой f, дельта-коррелированной во времени:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f. \tag{2}$$

Учитывая стационарность и однородность, получим

$$\langle fv \rangle = 2\nu\left\langle\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\rangle \equiv \bar{\varepsilon}, \tag{3}$$

$\bar{\varepsilon}$ — средняя скорость диссипации энергии. Так как роль силы сводится только к подкачке энергии, то естественно считать, что ее статистические свойства полностью определяются условием стационарности энергии, т. е. балансом «источник» — «сток». Последнее, например, справедливо, если сила имеет гауссов закон распределения вероятности с коррелятором

$$\langle f(x_1, t_1) f(x_2, t_2) \rangle = \delta(t_2 - t_1) B(x_2 - x_1), \tag{4}$$

$B(x_2 - x_1)$ — пространственная часть коррелятора. Левую часть формулы (3) можно выразить через коррелятор внешней силы по формуле Фуруцу—Новикова [7]:

$$\langle fv[f] \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle f(x, t) f(x_1, t_1) \rangle \left\langle \frac{\delta v[f]}{\delta f(x_1, t_1)\, dx_1 dt_1} \right\rangle dx_1 dt_1, \tag{5}$$

используя формулу

$$\frac{\delta v(x, t)}{\delta f(x_1, t)\, dx_1 dt} = \frac{1}{2}\delta(x_1 - x).$$

Из (3) получим

$$\frac{1}{2}B(0) = \bar{\varepsilon},$$

т. е. коррелятор внешней силы можно записать в виде

$$B(r) = 2\bar{\varepsilon}\, b(r/L),$$

где L — внешний масштаб турбулентности, $b(r/L)$ — безразмерная функция при $L \to \infty$:

$$b(r/L) \to b(0) = 1.$$

Воспользуемся статистическим описанием случайного поля $v(x, t)$ с помощью характеристического функционала φ:

$$\varphi = \left\langle \exp i \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t)\, y(x)\, dx \right\rangle, \tag{6}$$

$y(x)$ — некоторое неслучайное поле, достаточно быстро убывающее на бесконечности. Усреднение в (6) производится по вероятности случайной силы f. Через φ выражаются все моменты поля $v(x, t)$. Например, коррелятор $K(r)$

$$\langle v(x_1)\, v(x_2) \rangle = K(r) \qquad (r = x_2 - x_1)$$

равен

$$K(r) = -\left\{ \frac{\delta^2 \varphi}{\delta y(x_1)\, dx_1 \delta y(x_2)\, dx_2} \right\}\Bigg|_{y=0}.$$

При гауссовой силе легко получить для φ замкнутое уравнение движения. Дифференцируя (6) по времени и учитывая формулу (5), находим

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, D \frac{\partial}{\partial x} D \varphi\, dx + i\nu \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, \Delta D \varphi\, dx -$$
$$- i\bar{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, y(x')\, b(x - x')\, \varphi\, dx dx'. \tag{7}$$

Здесь

$$D = \frac{\delta}{\delta y(x)\, dx}, \qquad D' = \frac{\delta}{\delta y(x')\, dx'}.$$

При $t = 0$ жидкость покоилась, т. е.

$$\varphi\big|_{t=0} = 1. \tag{8}$$

Уравнение (7) с начальным условием (8) описывает эволюцию вероятности поля $v(x, t)$, создаваемого случайной силой.

Отметим некоторые свойства случайной функции $v(x, t)$. В однородной турбулентности

$$K(0) = \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} E(k)\, dk < \infty.$$

Из непрерывности коррелятора в нуле,

$$K(r) \xrightarrow[r \to 0]{} K(0),$$

следует непрерывность $v(x, t)$ в среднем квадратичном (см., например, [8]), что по существу означает непрерывность распределения энергии турбулентности по масштабам. Поскольку в реализациях случайной функции $v(x, t)$ есть разрывы, то $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ в среднем квадратичном уже не существует, т. е.

$$\int_0^{\infty} k^2 E(k)\, dk$$

расходится. Поскольку $\int_0^{\infty} E(k)\, dk < \infty$, то

$$E(k) \sim k^{-(1+\delta)} \qquad (0 < \delta \leqslant 2).$$

Значение δ найдем, используя ренормгруппу задачи Коши (7), (8). Уравнение (7) и начальное условие (8) инвариантны относительно преобразований

$$\alpha x = x', \qquad \alpha^{1-\beta} t = t', \qquad \alpha^{-\beta-1} y(x) = y'(x'),$$
$$\alpha^{1+\beta} \nu = \nu', \qquad \alpha^{3\beta-1} \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}', \qquad \alpha L = L'.$$

Из единственности решения начальной задачи для уравнения (7) следует теорема подобия:

$$\varphi(t, y(x), \nu, L, \bar{\varepsilon}) = \varphi(t', y'(x'), \nu', L', \bar{\varepsilon}'); \tag{9}$$

$$E(k) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos kx \{DD'\varphi\}|_{y=0}\, dx. \tag{10}$$

Используя формулу (9), перейдем в (10) к функционалу, зависящему от штрихованных переменных. Полагая $\alpha \equiv k$ и переходя к интегрированию по kx, получим

$$E(k, t) = \frac{f(k^{1+\beta}\nu, k^{3\beta-1}\bar{\varepsilon}, kL, k^{1-\beta}t)}{k^{1+2\beta}}.$$

Будем рассматривать стационарное распределение $E(k)$. Тогда, учитывая, что $\dfrac{\partial E}{\partial\beta} = 0$, имеем

$$\xi_1\frac{\partial f}{\partial\xi_1} + 3\xi_2\frac{\partial f}{\partial\xi_2} = 2f,$$

$$\xi_1 = k^{1+\beta}\nu, \qquad \xi_2 = k^{3\beta-1}\bar{\varepsilon}, \tag{11}$$

$$f = \xi_2^{2/3}\psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_2^{1/3}}\right).$$

Для $E(k)$ получаем

$$E(k) = \bar{\varepsilon}^{2/3}k^{-5/3}\psi(kl, kL),$$

$l = \nu^{3/4}\bar{\varepsilon}^{-1/4}$ — масштаб диссипации.

Устремим внешний масштаб L к бесконечности. Поскольку для длинных волн $(k^{-1} \gg l)$ нелинейный член в уравнении Бюргерса много больше вязкого, то естественно предположить, что ψ разлагается в асимптотический ряд по kl, $kl \ll 1$, $(kL)^{-1} \ll 1$. Таким образом, для достаточно больших масштабов по сравнению с l вязкость не существенна. При этом первый член асимптотического разложения имеет вид

$$E(k) = \text{const}\,\bar{\varepsilon}^{2/3}k^{-5/3}, \tag{12}$$

т. е. δ в формуле (1) равно 2/3.

Нетрудно также получить аналогичную формулу для двухточечных семиинвариантов произвольного порядка $S^{(n)}(x_2 - x_1)$:

$$S^{(n)}(x_2 - x_1) = \frac{1}{i^m}\left.\frac{\delta^n \ln\varphi}{\delta y_1 \ldots \delta y_n}\right\}\Bigg|_{y=0}.$$

Спектр семиинварианта $S^{(n)}$ равен

$$S^{(n)}(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos kr\, S^{(n)}(r)\, dr.$$

Предполагая, что $S^{(n)}$ не равно нулю или бесконечности, в инерционном интервале получим

$$S^{(n)}(k) = \text{const}\,\bar{\varepsilon}^{n/3}k^{-\frac{9+n}{3}}.$$

Формула (12) формально совпадает с законом Колмогорова — Обухова для вихревой турбулентности в несжимаемой жидкости, однако полученная без каких-либо предположений о характере передачи энергии по спектру для турбулентности нелинейных волн в модели Бюргерса не имеет прежнего физического смысла. Спектр (12) свидетельствует о некотором размытии пилообразных волн в однородной турбулентности. Рассмотрим вопрос о механизме этого размытия.

3. Выделим в случайном ансамбле волн, создаваемом источником, нелинейный пакет, состоящий из волн с близкими фазовыми скоростями. Будем рассматривать крупномасштабный пакет, медленно эволюционирующий (в сопутствующей системе координат) на фоне остального случайного ансамбля. Из-за взаимодействия с фоном пакет начинает флуктуировать, поэтому v можно представить в виде

$$v = \langle v \rangle + \tilde{v} + v_\Phi, \tag{13}$$

где $\langle v \rangle$ — усредненный нелинейный пакет, $\tilde{v}$ — флуктуации скорости, v_Φ — случайный фон, $\langle \tilde{v} \rangle = 0$, $\langle v_\Phi \rangle = 0$. Поле v_Φ будем считать однородным.

Пренебрегая столкновительной вязкостью, подставим разложение (13) в уравнение Бюргерса и усредним по случайному фону. В результате получим

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{v}\tilde{v} \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{v} v_\Phi \rangle = 0. \tag{14}$$

Пусть выбранный пакет имеет характерный масштаб k_0^{-1}. Разобьем v_Φ на две компоненты — крупномасштабную $v_\Phi^{(1)}$ с характерными масштабами порядка k_0^{-1} и мелкомасштабную $v_\Phi^{(2)}$ с масштабом k^{-1}, $k \gg k_0$. Взаимодействие крупномасштабной компоненты фона $v_\Phi^{(1)}$ с крупномасштабными флуктуациями пакета приводит к некоторому новому крупномасштабному случайному процессу. В дальнейшем под $\tilde{v}$ мы будем понимать именно этот случайный процесс, а под v_Φ — мелкомасштабный фон ${}_\Phi^{(2)}$.

Рассмотрим теперь взаимодействие нелинейного пакета $v_п = \langle v \rangle + \tilde{v}$ с мелкомасштабным фоном. Спектр (12) показывает, что в однородной турбулентности характерное время жизни нелинейного пакета масштаба k^{-1} $\tau \sim 1/kv_к$, т. е. порядка времени его опрокидывания. Характерное время корреляции $\tau_{кор}$ в мелкомасштабной компоненте $\tau_{кор} \sim 1/kv_к$. Поскольку $k \gg k_0$, то характерное время эволюции крупномасштабного пакета $t - t \gg \tau_{кор}$. По этой причине взаимодействие крупномасштабного нелинейного пакета с мелкомасштабным фоном можно считать дельта-коррелированным во времени случайным процессом с коррелятором

$$\langle v_\Phi^{(2)}(x_1, t_1) v_\Phi^{(2)}(x_2, t_2) \rangle = \mu(x_2 - x_1)\, \delta(t_2 - t_1). \tag{15}$$

Для простоты будем считать фон гауссовым. Раскроем среднее $\langle \tilde{v} v_\Phi \rangle$ с помощью формулы (5). Для этого необходимо вычислить вариационную производную $\dfrac{\delta \tilde{v}}{\delta v_\Phi}$. Поскольку один нелинейный пакет мало возмущает мелкомасштабный фон, то для фона можно написать

$$\frac{\partial v_\Phi}{\partial t} + v_\Phi \frac{\partial v_\Phi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial x^2} + \hat{I}. \tag{16}$$

Здесь $\hat{I}$ — случайный источник. С другой стороны,

$$\frac{\partial(\langle v \rangle + \tilde{v} + v_\Phi)}{\partial t} + (\langle v \rangle + \tilde{v} + v_\Phi) \frac{\partial}{\partial x}(\langle v \rangle + \tilde{v} + v_\Phi) = \\ = \nu \frac{\partial^2 v_\Phi}{\partial x^2} + \hat{I}. \tag{17}$$

Вычитая из (17) уравнение (16), получим

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} v_\Phi v_n = 0. \tag{18}$$

Запишем решение уравнения (18) в виде

$$v_n = v_n^0 - \int\limits_0^t \left\{ v_n \frac{\partial}{\partial x} v_n + \frac{\partial}{\partial x} v_\Phi v_n \right\} d\tau. \tag{19}$$

Найдем вариационную производную $\frac{\delta v_n(x, t)}{\delta v_\Phi(x', t')}$. Из (9) получим

$$\frac{\delta v_n(x, t)}{\delta v_\Phi(x', t')} = -\int\limits_{t'}^t \frac{\delta}{\delta v_\Phi(x', t')} \frac{\partial}{\partial x} \frac{v_n^2}{2} d\tau - \int\limits_{t'}^t \frac{\partial}{\partial x} v_\Phi \frac{\delta v_n(x, \tau)}{\delta v_\Phi(x', \tau')} d\tau - \\ - \int\limits_{t'}^t \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') \delta(t - t') v_n(x, \tau) d\tau. \tag{20}$$

В (20) использован принцип причинности, согласно которому $v_n(x, t)$ может зависеть от $v_\Phi(x, \tau)$ только в предшествующие моменты времени $t \geqslant \tau$. В пределе $t' \to t$

$$\frac{\delta v_n(x, t)}{\delta v_\Phi(x', t)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') v_n(x, t). \tag{21}$$

Из уравнения (20) аналогично предыдущему нетрудно получить, что

$$\frac{\delta \langle v(x, t) \rangle}{\delta v_\Phi(x', t)} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{\delta \tilde{v}(x, t)}{\delta v_\Phi(x', t)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') v_n. \tag{22}$$

Используя формулы (22), (5), вычислим среднее $\langle \tilde{v} v_\Phi \rangle$. В результате находим

$$\langle \tilde{v} v_\Phi \rangle = -\frac{1}{2} \mu(0) \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu(x - x')}{\partial x} \Big|_{x' = x} \langle v \rangle.$$

Поскольку коррелятор $\mu(x-x')$ имеет в нуле максимум, то

$$\left.\frac{\partial\mu(x-x')}{\partial x}\right|_{x=x'} = 0.$$ Окончательно

$$\langle \tilde{v}\, v_\Phi \rangle = -\frac{1}{2}\mu(0)\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x}. \tag{23}$$

Уравнение движения нелинейного пакета приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\langle \tilde{v}^2\rangle = \frac{\mu(0)}{2}\frac{\partial^2\langle v\rangle}{\partial x^2}, \tag{24}$$

т. е. в уравнении движения нелинейного пакета возникает турбулентная вязкость с коэффициентом $\nu_{\text{турб}} = \mu(0)/2$. Оценим $\nu_{\text{турб}}$:

$$\langle v_\Phi v'_\Phi \rangle \sim \mu\delta(\tau) \sim \mu(0)\frac{1}{\tau_{\text{кор}}} \sim v_\Phi^2,$$

$$\mu \sim v_\Phi^2 \tau_{\text{кор}}, \qquad \tau_{\text{кор}} \sim 1/k_\Phi v_\Phi, \qquad \mu \sim v_\Phi / k_\Phi .$$

Найдем отношение нелинейных слагаемых в уравнении (24) к вязкому члену. Учитывая, что согласно (12) $v_\kappa \sim \bar{\varepsilon}^{1/3} k^{-1/3}$, получим

$$\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial x}\langle \tilde{v}^2\rangle, \qquad \langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x}\left(\mu(0)\frac{\partial^2\langle v\rangle}{\partial x^2}\right)^{-1} \sim \left(\frac{k_0}{k}\right)^{2/3},$$

т. е. вязкий член много больше нелинейных слагаемых для крупномасштабного пакета. Следовательно, турбулентная вязкость размывает пакет, не позволяя ему превращаться в пилообразную волну. В результате этого его время жизни становится порядка времени его опрокидывания. Таким образом, однородную турбулентность, создаваемую крупномасштабным шумом, можно представлять состоящей не из пилообразных волн, а из размытых турбулентной вязкостью нелинейных пакетов. Это обстоятельство объясняет отличие полученного спектра $k^{-5/3}$ от результата работы [4]. Поскольку механизм, препятствующий опрокидыванию, носит «диссипативный», а не дисперсионный характер, то спектр (12) отличается и от результата работы [9].

Грубая оценка количества пакетов, взаимодействие с которыми размывает пилообразную волну, может быть сделана следующим образом. Пусть L — характерный размер системы, N — количество пакетов, масштаб которых меньше характерного размера пилы k^{-1}. Тогда время свободного пробега пилы

$$\tau \sim \frac{L}{N v_k} \ll \frac{1}{k v_k},$$

отсюда $N \gg kL$.

При малом количестве случайных нелинейных волн возникают пилы, спектр которых носит «квазидинамический» характер, $E_k \sim k^{-2}$.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить В. И. Петвиашвили и М. И. Рабиновича за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1973.
2. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 477 (1974).

3. T. Tatsumi and S. Kida, J. Fluid. Mech., **55**, № 4, 659 (1972).
4. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Докл. АН СССР, **208**, № 4, 794 (1973).
5. С. А. Каплан, Докл. АН СССР, **94**, 33 (1954).
6. С. С. Моисеев, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ, **71**, 3(9), 1062 (1976).
7. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, **47**, 5 (11), (1964).
8 А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, изд. Наука, М., 1968.
9. В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, Докл. АН СССР, **192**, № 2, 297 (1970).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
8 июня 1976 г.

THE TURBULENCE OF TOOTH-LIKE WAVES

S. S. Moiseev, A. V. Tur, V. V. Yanovsky

Homogeneous turbulence is considered in the Burgers model with the energy pump by the random external force into harmonics with small nymbers k. It is shown that in the case of a considerable number of nonlinear waves the turbulent viscosity occurs resulting in tooth-like wave dispersion. By means of the functional formulation of turbulence and renormalized group, a turbulent spectrum of nonlinear wave packets in the Burgers model is obtained.