

СОДЕРЖАНИЕ

Арманд Н. А., Башаринов А. Е., Шутко А. М. Исследования природной среды радиофизическими методами (обзор)	809
Осташов В. Е., Шишов В. И. О форме импульса пульсара, рассеянного в межзвездной среде	842
Фридман П. А. О координатной точности многочастотного интерферометра	848
Сахокия Д. М. Рассеяние электромагнитной волны в плазме с сильной ленгмюровской турбулентностью	853
Айзакий Н. И. К вопросу об усилении монохроматической волны электронным пучком в нелинейной плазме	857
Безродный В. Г., Синявский С. Н., Шубова Р. С., Ямпольский Ю. М. Спектральный анализ вариаций СДВ-сигналов в волноводе Земля—ионосфера	861
Барабаненков Ю. Н. О кинетическом уравнении для квантоворемеханического волнового пакета в среде с квазистатическими флуктуациями потенциала	868
Силаков Е. Л. О радиационном затухании колебаний типа «шепчущей галереи» на прозрачной границе	876
Хазанов И. В. К нелинейной теории вынужденного рассеяния волн	887
Мальцев А. А. О «шумовых» спектрах колебаний взаимно связанных нелинейных осцилляторов	893
Дубков А. А., Музычук О. В. К анализу высших приближений уравнения Дайсона для средней функции Грина	901
Кременецкий С. Д., Никаноров А. А. Интегралы Френеля в задаче расчета отраженного неровной поверхностью электромагнитного поля	908
Черкасова К. П., Ломоносов М. И., Хижняк Н. А. Дифракция плоской электромагнитной волны на сфере с магнитной анизотропией	913
Власов Б. И. О пространственном разрешении теплового способа записи модулированного потока излучения на пленочных структурах	924
Бажанов В. С., Исаев В. А., Марков Г. А. О резонансных свойствах неоднородного плазменного столба	932
 Краткие сообщения и письма в редакции	
Митякова Э. Е., Мясников Е. Н., Рахлин А. В. Предварительные результаты измерений высотного распределения неоднородностей ионосферы, возбуждаемых мощным коротковолновым радиоизлучением	939
Сажин С. С. Магнитосферный захват электростатических волн на частотах ниже протонной плазменной частоты	941
Буренин А. В., Крупнов А. Ф. О работе радиоспектроскопов в условиях насыщения спектральных линий	943
Рыжов Ю. А. К теории систем, находящихся под действием не дельта-коррелированных случайных сил	945
Бегишвили Г. А., Гавриленко В. Г., Джандиери Г. В. О роли параметрических эффектов при излучении и рассеянии волн в средах с пространственно-временными флуктуациями	948
Лазиев Э. М., Оксузян Г. Г., Погосян Э. С. Излучение заряженных сгустков, пролетающих сквозь стопку диэлектрических пластин в волноводе	950

Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XVII, № 1, 1977 г.

953

УДК 538.56

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ РАДИОФИЗИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

(Обзор)

Н. А. Арманд, А. Е. Башаринов, А. М. Шутко

СОДЕРЖАНИЕ

- I. Введение
- II. Физико-химические свойства вод акваторий
 - II.1. Краткая характеристика физико-химических свойств водной поверхности
 - II.2. Связь диэлектрических свойств с физико-химическими характеристиками водной поверхности
 - II.3. Радиационные модели водной поверхности
 - II.4. Экспериментальные исследования СВЧ радиационных характеристик водной поверхности
- III. Состояние поверхности и вариации уровня океана
 - III.1. Океанографические данные
 - III.2. Радиационные модели акваторий в условиях волнения
 - III.3. Экспериментальные исследования СВЧ радиационных характеристик акваторий
 - III.4. Измерения положений уровня морской поверхности
- IV. Исследования ледового и снегового покрова радиофизическими методами
 - IV.1. Диэлектрические характеристики ледовых покровов
 - IV.2. Радиационные модели
 - IV.3. Экспериментальные исследования
- V. Влажность почв и грунтов
 - V.1. Физико-механические свойства почв
 - V.2. Диэлектрические характеристики почво-грунтов
 - V.3. Модели СВЧ излучения и радиолокационного отражения почво-грунтов.
 - V.4. Данные экспериментальных исследований СВЧ радиометрических и радиолокационных характеристик увлажненных покровов
- VI. Растительные покровы
 - VI.1. Биометрические и электрофизические показатели растительных покровов
 - VI.2. Радиационные модели растительных покровов
 - VI.3. Экспериментальные исследования
- VII. Радиофизические методы в геологических исследованиях
 - VII.1. Геологическая интерпретация радиолокационных изображений поверхности Земли
 - VII.2. Подповерхностное зондирование
 - VII.3. Регистрация геотермальной деятельности
- VIII. Заключение

I. ВВЕДЕНИЕ

Исследования природной среды радиофизическими методами в СВЧ диапазоне получили заметное развитие в течение последних десяти—пятнадцати лет.

Объектами исследования являются поверхность Мирового Океана, морские и континентальные льды, материковые грунты, растительные покровы и другие.

Исследования производятся как путем наблюдений структуры полей радиоволн искусственных источников излучения, так и полей радиотеплового излучения объектов природной среды.

Особенности распространения и рассеяния радиоволн в атмосфере и земных покровах позволяют вести наблюдения независимо от условий освещенности и наличия облачности и получать сигналы, зависящие не только от состояния поверхности Земли, но и от объектов, расположенных под поверхностью.

Методы активного зондирования включают изучение сигналов, обусловленных поверхностным рассеянием, сигналов, отраженных от подповерхностных объектов, и выполнение профильных измерений.

Возможности подповерхностного обнаружения определяются толщиной скин-слоя в земных покровах, которая в СВЧ диапазоне имеет значения от единиц миллиметров (для морской воды) до сотен метров (для материковых ледников).

Методы пассивного зондирования основаны на регистрации интенсивности естественных излучений в СВЧ диапазоне.

Спектральные и поляризационные измерения СВЧ излучений позволяют получать сведения о состоянии земных покровов, а также термальных процессах естественного и искусственного происхождения.

Детальное обсуждение вопросов однозначности и точности решения обратных геофизических задач, а также вопросов, связанных с атмосферным зондированием, выходит за рамки настоящего обзора.

II. ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОД АКВАТОРИЙ

II.1. Краткая характеристика физико-химических свойств водной поверхности

II.1.1. Важнейшими характеристиками морской воды являются ее температура и соленость [1, 3].

Суточные и сезонные вариации интенсивности прямой и рассеянной солнечной радиации, горизонтальные и вертикальные перемещения водных масс, испарение, осадки, теплообмен между океаном и атмосферой, сток пресных вод рек и теплых вод термальных источников, штормы влияют на величины температуры и солености водной поверхности.

Минимальные значения температуры, около -2°C , отмечаются в полярных областях, максимальные, около $+28^{\circ}\text{C}$ —в тропической зоне. Наибольшее зарегистрированное значение температуры $+35,6^{\circ}\text{C}$.

Средняя соленость воды на поверхности Мирового океана равна $34,730/\text{oo}^*$. Широтные изменения солености в Мировом океане невелики, они заключены в пределах от 34 до $38/\text{oo}$. Самая низкая соленость отмечается в окраинных сибирских морях Северного Ледовитого океана, здесь она меньше ($30 - 25\%$) из-за стока речных вод и таяния льда

II.1.2. При скорости ветра около $5 - 7 \text{ m/s}$ на поверхности открытого океана появляются пенообразования [1, 4]. Площадь водной поверхности, покрытая пеной, возрастает пропорционально скорости ветра [4-6, 9, 10] и составляет около 10% при скорости 20 m/s .

Пена, представляющая собой смесь воды и пузырьков воздуха, характеризуется высокой пористостью. Плотность пены составляет величину около $0,01 \text{ g/cm}^3$ [7].

Толщина слоя пены изменяется от единиц миллиметров до нескольких сантиметров. Пенный бурун на гребне волн характеризуется еще большим значением толщины. Продолжительность существования пенообразований зависит от солености и в сильной степени от наличия органических примесей (планктона) [4-8].

Источником пенообразования является не только ветер. Пена может образовываться также в результате турбулентности поверх-

* $10/\text{oo} = 1 \text{ g/l}$.

ностных и внутренних волн, понижения давления, вызванного движением внутренних волн, в местах концентрации планктона [1, 4, 5].

II.2. Связь диэлектрических свойств с физико-химическими характеристиками водной поверхности

II.2.1. Зависимость диэлектрической проницаемости воды ϵ_λ от температуры T и солености S является функцией длины электромагнитной волны λ . Связь ϵ_λ с длиной волны и температурой для пресной воды в диапазоне сантиметровых волн приближенно описывается релаксационной формулой Дебая:

$$\epsilon_\lambda = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{1 + (\lambda_s/\lambda)^2} - i \frac{\lambda_s}{\lambda} \frac{\epsilon_s - \epsilon_0}{1 + (\lambda_s/\lambda)^2}. \quad (\text{II.1})$$

От температуры в этом выражении зависят статическая проницаемость ϵ_s , «оптическая» проницаемость ϵ_0 и критическая длина волны λ_s , связанная со временем релаксации τ соотношением $\lambda_s = 2\pi c_0 \tau$, c_0 — скорость света в вакууме. Соленость оказывает влияние на параметры ϵ_s и λ_s [57, 60, 131, 132] и дополнительно учитывается добавкой к (II.1) члена [57]

$$2i \sigma_s \frac{\lambda}{c_0}, \quad (\text{II.2})$$

характеризующего степень увеличения проводимости раствора при наличии в нем соли (σ_s — статическая проводимость раствора электролита).

Подробная сводка данных для пресной воды в диапазоне волн от 1 мм до нескольких метров содержится в [58], где рассмотрен диапазон изменения температур от -8°C (переохлажденная вода) до 40°C .

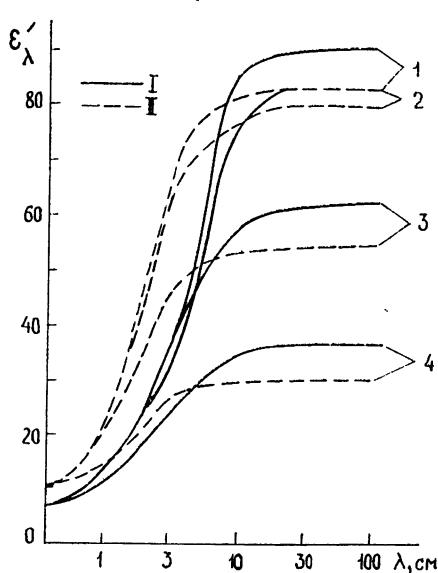


Рис. 1.

Рис. 1. Спектральная зависимость действительной части диэлектрической проницаемости ϵ_λ воды при различных значениях температуры и солености (по данным [60, 62, 63]):

I — температура 0°C , II — температура 20°C ; 1 — соленость 0%, 2 — 20%, 3 — 90%, 4 — 180%

Рис. 2. Спектральная зависимость тангенса угла потерь $\tan \delta$ воды. Обозначения те же, что на рис. 1.

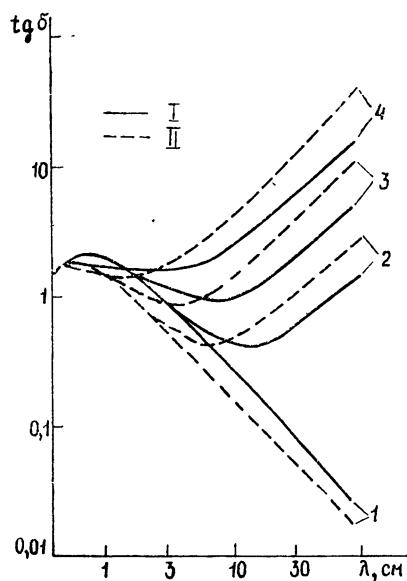


Рис. 2.

Анализ данных исследований диэлектрических характеристик воды в радиодиапазоне позволяет выявить следующие закономерности (см. рис. 1 и 2): действительная часть ϵ'_λ диэлектрической проницаемости возрастает с увеличением длины волны, наибольшая крутизна зависимости $\epsilon'(\lambda)$ отмечается в миллиметровом и сантиметровом диапазонах. В этом же диапазоне с увеличением температуры величина ϵ' существенно возрастает, а в дециметровом диапазоне — незначительно уменьшается; увеличение солености приводит к незначительному уменьшению действительной части диэлектрической проницаемости на волнах, длиннее 1—3 см, и к существенному возрастанию мнимой части ϵ'' в диапазоне волн $\lambda > 5 \div 8$ см.

II.2.2. Расчетные оценки диэлектрических свойств пенообразований получены для простых моделей пены в виде пористого диэлектрика [92], мелкодисперской смеси морской воды и воздуха [93], тонких пленок воды, чередующихся с прослойками воздуха [94]. Полученные результаты показывают, что диэлектрическая проницаемость пены $\epsilon_{\lambda, p}$ является функцией объемной концентрации воздуха и длины волны.

II.2.3. По данным прямых [95—99] и косвенных [90, 100] лабораторных измерений величина действительной части диэлектрической проницаемости нефтепродуктов в диапазоне сантиметровых и миллиметровых волн в отсутствие примесных включений воды составляет от 1,8 до 2,28. Поглощающая способность значительно меньше, чем у морской воды — тангенс углов потерь нефтепродуктов меньше значения $2 \cdot 10^{-2}$, существенно зависит от состава нефти, увеличивается при увеличении содержания воды в нефти. Примеси воды оказывают влияние также на величину действительной части диэлектрической проницаемости.

III. Радиационные модели водной поверхности

III.3.1. Зависимость радиационных свойств спокойной водной поверхности от температуры и солености определяется в приближении Кирхгофа с помощью отражательных формул Френеля [17, 35], которые включают в себя характеристики среды в виде комплексной диэлектрической проницаемости ϵ_λ и угол наблюдения ϑ :

$$T_{\perp \lambda} = x_\lambda T; \quad (III.3)$$

$$x_\lambda = 1 - R_\lambda. \quad (III.4)$$

Коэффициент отражения Френеля R_λ зависит от поляризации излучения. На вертикальной поляризации.

$$x_{\parallel \lambda} = 1 - R_{\parallel \lambda} = \frac{4 |\epsilon_\lambda| \sqrt{|\epsilon_{\lambda, \theta}|} \cos \vartheta \cos (\delta - \delta_s/2)}{|\epsilon_\lambda|^2 \cos^2 \vartheta + |\epsilon_\lambda| + 2 |\epsilon_\lambda| \sqrt{|\epsilon_{\lambda, \theta}|} \cos \vartheta \cos (\delta - \delta_s/2)}. \quad (III.5)$$

На горизонтальной поляризации

$$x_{\perp \lambda} = 1 - R_{\perp \lambda} = \frac{4 \sqrt{|\epsilon_{\lambda, \theta}|} \cos \vartheta \cos (\delta_s/2)}{\cos^2 \vartheta + |\epsilon_\lambda| + 2 \sqrt{|\epsilon_{\lambda, \theta}|} \cos \vartheta \cos (\delta_s/2)}. \quad (III.6)$$

В (III.5) и (III.6) приняты обозначения: $\epsilon_\lambda = \epsilon'_\lambda - i \epsilon''_\lambda$, $\frac{\epsilon''_\lambda}{\epsilon'_\lambda} = \operatorname{tg} \delta_\lambda$, δ_λ — угол потерь,

$$\epsilon'_{\lambda, \theta} = \epsilon'_\lambda - \sin^2 \vartheta, \quad \epsilon''_{\lambda, \theta} = \epsilon''_\lambda, \quad \operatorname{tg} \delta_{\lambda, \theta} = \frac{\epsilon''_\lambda}{\epsilon'_\lambda - \sin^2 \vartheta},$$

$$|\varepsilon_\lambda| = \varepsilon'_\lambda \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\lambda}, \quad |\varepsilon_{\lambda_0}| = \varepsilon'_{\lambda_0} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{\lambda_0}}.$$

При вертикальном наблюдении ($\vartheta = 0^\circ$)

$$x_{\parallel\lambda} = x_{\perp\lambda} = x_{0\lambda} = \frac{4 \sqrt{|\varepsilon_\lambda|} \cos(\delta/2)}{|\varepsilon_\lambda| + 2 \sqrt{|\varepsilon_\lambda|} \cos(\delta/2) + 1}. \quad (\text{II.7})$$

Толщина эффективного излучающего слоя (скин-слоя) определяется как величина, обратная коэффициенту поглощения:

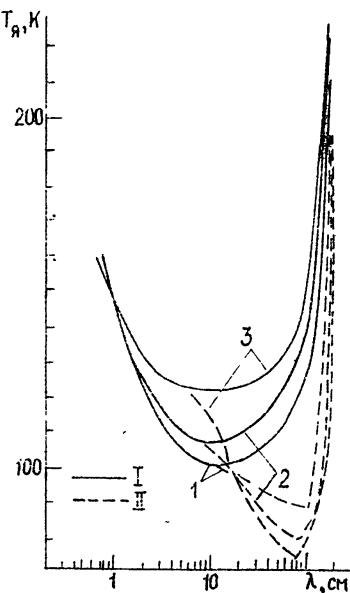
$$l_\lambda = 1/\gamma_\lambda,$$

$$\gamma_\lambda = 2 \sqrt{2\varepsilon'_\lambda} \frac{\pi}{2} (V\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_\lambda} - 1)^{1/2}. \quad (\text{II.8})$$

Расчеты по (II.3)—(II.8) выявляют существенные спектральные особенности взаимосвязи радиационных характеристик с величинами температуры и солености [60, 61, 90, 101—103]. В диапазоне волн короче 3 см излучательная способность пресной воды уменьшается с увеличением температуры водной поверхности, на более длинных волнах — возрастает. В результате зависимость радиояркости от температуры на волнах короче 3 см отличается нелинейным характером (с отрицательным градиентом в определенных интервалах значений T). На волнах длиннее 5—8 см радиояркость практически линейно зависит от температуры; крутизна этой зависимости $\left(\frac{\text{град } T_y}{\text{град } T}\right)$ составляет 0,35—0,5.

Увеличение солености (концентрации NaCl) от 0 до 40% сопровождается незначительным возрастанием яркостной температуры в диапазоне волн короче 3 см, не превышающим 3 К, и существенным уменьшением радиояркости на волнах длиннее 8—10 см, составляющим при температуре 20°C около 10 К на волне 20 см, 20 K — на волне 30 см и 40 K — на волне 75 см [61] (см. рис. 3). Крутизна зависимости является функцией температуры и возрастает приблизительно в 2,5 раза при увеличении температуры от 0 до 40°C. Отмечаются спектральные особенности зависимости $T_y(S, T)$ в диапазоне $\lambda \approx 18 \text{ см}$; при солености около 40% практически отсутствует зависимость радиояркости от температуры, а при температуре около 0°C радиояркость практически не зависит от солености.

Рис. 3. Спектральная зависимость радиояркостной температуры T_y при различных значениях термодинамической температуры T и солености S : I — соленость 0%, II — 40%; I — температура 0°C, 2 — 20°C, 3 — 40°C.



II.3.2. Излучательная способность гладкой водной поверхности, покрытой однородным плоским слоем пены или нефтепродуктов, определяется приближенно с помощью соотношений [17, 34] для слоистых

моделей, учитывающих диэлектрические параметры слоев и многократные отражения электромагнитного излучения от границ раздела слоев, обусловливающие наличие интерференционных эффектов (см. разд. 4).

Для насыщенных воздухом пенных смесей, когда $Q \ll 0,95$, интерференционные эффекты практически отсутствуют, излучательная способность воды, покрытой слоем такой смеси, может быть оценена по формуле [93]

$$\kappa_\lambda \approx 1 - R_{2\lambda} e^{-2\tau_\lambda}. \quad (\text{II.9})$$

Расчеты в диапазоне волн от 0,8 до 21 см показывают [92], что при пористости пены $Q = 0,94 \div 0,99$ увеличение относительной толщины l/λ слоя от значений 0,1 до 1 приводит к возрастанию κ_λ от значений 0,45 — 0,65 до 0,9 — 1. Спектральная зависимость $\kappa(\lambda)$ при фиксированной толщине слоя характеризуется уменьшением величины κ с увеличением длины волны.

II.3.3. Пленка нефтепродуктов на плоской водной поверхности по данным расчетов [100, 104] обуславливает возрастание яркостной температуры в диапазоне волн короче 3 см, осциллирующее при изменении толщины слоя нефти. Этот эффект в большей мере проявляется на горизонтальной поляризации. Максимальные приращения радиояркости при соотношении толщины пленки и длины волны около 0,15 достигают 80 К и более. При соотношении $l/\lambda < 0,05$ величина радиояркостного контраста не превышает 10 К.

II.4. Экспериментальные исследования СВЧ радиационных характеристик водной поверхности

II.4.1. По данным лабораторных измерений на волнах 0,8; 1,6 и 3,2 см [105] и на волне 3 мм [90] наблюдается хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями излучательной способности при солености 0; 20 и 30 % и изменении температуры от 10 \div 20°C до 30 \div 40°C. Максимальные различия величины $\Delta\kappa \approx 0,005$ отмечаются на волне 0,8 см при солености 20 %.

Подробные исследования радиационных свойств акваторий в натуральных условиях, при измерениях с борта самолетов [17, 106, 107] и ИСЗ [17] на сантиметровых волнах (3,4 и 8,5 см) подтвердили количественно основные теоретические представления о зависимости $T_\lambda(T)$ при спокойном море и показали возможность измерения температуры поверхности с точностью до 0,5°C методами СВЧ радиометрии. На рис. 4 приведены пространственные реализации температуры участка Каспийского моря по данным прямых измерений с корабля и радиометрических — с борта самолета [107]. Среднеквадратичное расхождение данных составляет 0,8 К.

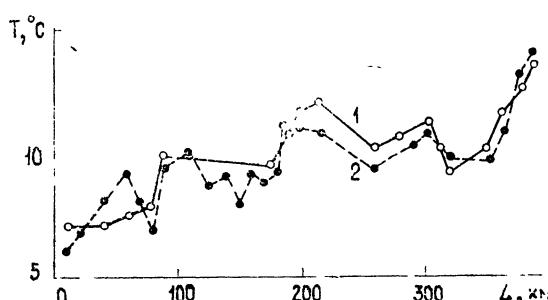


Рис. 4. Сравнение данных прямых измерений температуры поверхности моря (1) и результатов дистанционного зондирования (2) [106].

При наличии волнения и других возмущающих факторов температура может быть оценена путем проведения одновременных измерений радиационных характеристик на нескольких длинах волн [17].

Данные измерений вариаций радиояркости с борта самолета ИРЭ АН СССР в диапазоне волн 0,8—30 см [89] при изменении солености водоемов (Азовское море—оз. Сиваш—соляные озера на Арабатской стрелке) в пределах 200,0% и более находятся в хорошем качественном соответствии с результатами модельных расчетов.

Так, увеличение солености приближенно на 200% при температуре около 25°C сопровождается уменьшением радиояркости на 50 К. По данным [108, 109] изменение радиояркости водной поверхности при температуре 25,5°C составило 13 ± 2 К при изменении солености на 17 ± 5 %, что также качественно хорошо согласуется с расчетными значениями. В [61] отмечается, что метровый диапазон волн может быть использован для исследования солености моря активными методами.

II.4.2. По данным лабораторных [105, 110] и натурных [93, 111–113] измерений излучательная способность пенных гребней близка к значениям 0,7—0,9 в диапазоне миллиметровых и коротких сантиметровых волн. С увеличением длины волны излучательная способность пенообразований уменьшается, что объясняется уменьшением оптической толщины слоя пены. По этой же причине излучательная способность участков морской поверхности, покрытых тонким слоем пены, меньше указанных выше значений, как длинноволновой, так и в коротковолновой области СВЧ спектра.

II.4.3. Данные лабораторных измерений излучательной способности на длине волны 3,2 см [105] и яркостной температуры на длинах волн 3 мм [90], 2,08 см [100] и 11,3 см [114] подтверждают теоретические выводы об увеличении радиояркости в результате появления на водной поверхности пленки нефтепродуктов (см. рис. 5). При относительной толщине пленки $\delta/\lambda \approx 0,15 \div 0,25$ приращение радиояркости достигает на горизонтальной поляризации 100 К и более при скользящих углах наблюдения $\vartheta > 45^\circ$.

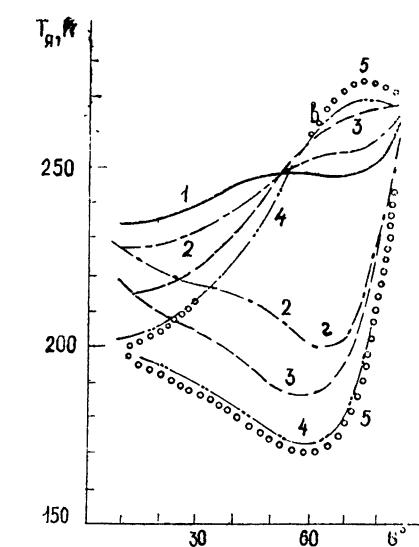


Рис. 5.

Рис. 5. Угловая зависимость радиояркостной температуры T_{α} водной поверхности на вертикальной (в) и горизонтальной (г) поляризациях при наличии пленки нефти различной толщины. Экспериментальные данные [90]. Длина волны—3 мм; 1—толщина пленки 0,46 мм, 100% покрытия; 2—толщина пленки 0,23 мм, 100% покрытия; 3—толщина пленки 0,12 мм, 90% покрытия; 4—толщина пленки 0,07 мм, 60% покрытия; 5—чистая водная поверхность.

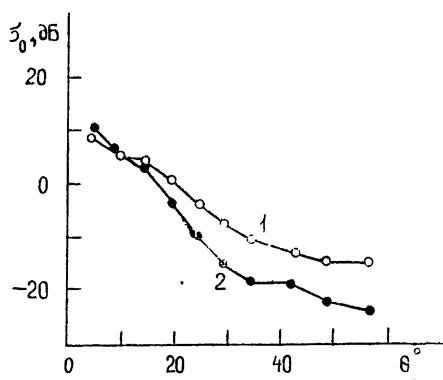


Рис. 6.

Рис. 6. Угловая зависимость удельного сечения рассеяния в отсутствие (1) и при наличии (2) пленки нефти. Экспериментальные данные [116]. Частота 13,3 ГГц.

Отмечается наличие радиационных контрастов над покрытыми нефтью районами акваторий при измерениях с борта самолета [66].

Присутствие нефтяной пленки не только изменяет диэлектрические свойства верхнего слоя водной поверхности, но влияет также на характеристики высокочастотной части спектра волнения, сглаживая капиллярные и мелкие гравитационные волнобразования. В результате интенсивность радиолокационного сигнала, рассеянного в обратном направлении, значительно уменьшается (рис. 6). Величина и стабильность контраста определяются исходными гидрологическими характеристиками — интенсивностью волнения, скоростью ветра, параметрами пленки [65, 116].

III. СОСТОЯНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ВАРИАЦИИ УРОВНЯ ОКЕАНА

III.1. Океанографические данные

Поверхность среднего уровня Мирового океана приближенно совпадает с изопотенциальной и принимается за поверхность геоида. Вариации поверхности уровня, обусловленные влиянием гармоник гравитационного поля, представляют собой крупномасштабные вариации (характерный размер порядка 10^3 км). Крупномасштабные вариации положения уровня возникают также за счет приливных явлений.

Изменения положения уровня за счет локальных динамических воздействий (волны цунами, океанические вихри, вариации атмосферного давления и другие) характеризуются пространственными масштабами средних размеров $10^2 - 10^3$ км.

Вариации положения уровня за счет динамических воздействий составляют величины порядка единиц метров (за счет приливных явлений и сгонно-нагонных ветровых воздействий) и дециметровых изменений (за счет вариаций давления и наклонов поверхности, обусловленных течениями).

Воздействие ветровых возмущений вызывает появление капиллярных волн миллиметровой высоты.

Пространственный спектр капиллярных волн согласно [11] аппроксируется в виде

$$S(x) \approx \frac{D(w)}{x^3}, \quad (\text{III.1})$$

где $x = 2\pi/\Lambda$, Λ — длина волны,

$$D^{1/2}(w) \approx 1,2 + 0,13 w \text{ (м/с)} + \dots, \quad (\text{III.2})$$

w — скорость ветра ($3 \leq w \leq 20$ м/с)*.

По (III.1) интенсивность капиллярных волн нарастает с увеличением скорости ветра до насыщения (при $w \approx 20$ м/с). По мере развития ветрового возмущения происходит возрастание амплитуды волн и формируются гравитационные волны. В установившемся режиме эффективное значение высоты σ_h волны описывается соотношением

$$\sigma_h \sim kw^3. \quad (\text{III.3})$$

При сильном ветре высота волны достигает $20 - 30$ м. Спектр установившегося волнения описывается эмпирическими моделями, развитыми Филлипсом [12], Китайгородским [13] и другими.

* В [12] используется аппроксимация пространственного спектра капиллярных волн в виде $S(x) = \frac{(2+6) \cdot 10^{-8}}{\pi} x^{-4}$ (независимо от силы ветра при $w \geq 3$ м/с).

Так, например, нормированный спектр выражается в виде

$$G(\omega) = \frac{2\omega_m^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\omega^n} \exp\left[-\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^p\right], \quad (\text{III.4})$$

где $5 < n < 6$, $2 < p < 4$, $G(\omega_m) = G_{\max}$.

Пространственный спектр волнения $S(x)$ вычисляется преобразованием (III.4) с учетом дисперсионного уравнения для глубокой воды:

$$\times(\omega) = \omega^2/g. \quad (\text{III.5})$$

Средние значения длины морской волны составляют от нескольких десятков метров (при среднем ветре) до нескольких сотен метров (при сильном ветре).

III.2. Радиационные модели акваторий в условиях волнения

III.2.1. Радиационные процессы СВЧ диапазона в акваториях определяются температурой и состоянием сравнительного тонкого слоя толщиной от долей сантиметра до нескольких сантиметров. Влияние неровностей поверхности слоя описывается с помощью метода малых возмущений, метода касательных плоскостей и двухмасштабной модели. Влияние пены и брызг вносит дополнительные эффекты, играющие заметную роль, в частности, при формировании радиотеплового излучения поверхности акваторий.

III.2.2. В условиях малых ($\sigma_h \ll \lambda$) и пологих ($\sigma_h \ll \Lambda$) отклонений поверхности отражение радиоволн от морской поверхности описывается с помощью метода малых возмущений, когда вторичное поле представляется в виде суммы зеркальной (когерентной) и рассеянной (некогерентной) компонент [15, 16].

Среднее значение рассеянного поля вычисляется путем статистического осреднения результатов интегрирования по элементам поверхности с учетом распределения случайных вариаций положения рассеивающих элементов.

Соотношение интенсивности некогерентной P_n и когерентной P_k компонент в направлении зеркального отражения зависит от интенсивности волнения.

В [15, 18] для вертикального зондирования получено приближенное соотношение:

$$\frac{P_n}{P_k} \approx (2k\sigma_h)^2 [1 + 0,3(2k\sigma_h)^2], \quad (\text{III.6})$$

где $k = 2\pi/\lambda$, σ_h — эффективное значение высоты волны.

Функция распределения интенсивности рассеянного поля приближенно описывается обобщенным законом Рэлея [15], когда размеры зоны Френеля заметно превышают длину морской волны и корреляция между квадратурными составляющими может не учитываться*.

Интенсивность рассеяния в направлении, обратном направлению зондирования, под углом θ к вертикали характеризуется удельным сечением рассеяния:

$$\sigma_{\text{вв}}(\theta) = 4\pi k^4 (1 + \sin^2 \theta)^2 S(x_0) \quad (\text{III.7})$$

при вертикальной поляризации,

* При размерах зоны Френеля, соизмеримых с длиной морской волны, рэлеевский закон распределения интенсивности рассеянного сигнала не выполняется [19].

$$\sigma_{\text{rr}}(\theta) = 4\pi k^4 \cos^4(\theta) S(x_0)$$

при горизонтальной поляризации, где $S(x_0)$ — спектральная плотность морских волн в области волновых чисел,

$$x_0 = 2k \sin \theta. \quad (\text{III.8})$$

Условие (III.8) представляет резонансное брэгговское соотношение.

Зависимость интенсивности капиллярных волн от скорости ветра согласно (III.2) приводит к зависимости удельного сечения рассеяния от силы ветра.

III.2.3. В условиях развитого ветрового волнения при размерах морской волны, значительно превышающих длину сантиметровых и дециметровых радиоволн, используется приближение Кирхгофа, основанное на представлении отраженного поля в виде суммы полей, отраженных элементами плоских участков, касательных к данной точке поверхности моря.

Допустимость представления о локально плоских процессах отражения связана с предположениями об отсутствии затенения элементов (т. е. для наблюдений в области вблизи вертикали) и плавности неровностей (когда радиус кривизны поверхности значительно превышает длину радиоволны).

Для поверхности изотропного типа с колокольной корреляционной функцией уклонов поверхности и при гауссовой статистике угловая зависимость удельной эффективной поверхности рассеяния в области углов вблизи вертикали выражается соотношением [20]

$$\sigma_0(\theta) = R_0 \frac{l_h^2}{4\sigma_h^2} \exp\left(-\frac{l_h^2}{4\sigma_h^2} \operatorname{tg}^2 \theta\right), \quad (\text{III.9})$$

l_h — интервал корреляции углов наклона, R_0 — коэффициент отражения при $\theta = 0$.

Графическое представление диаграммы обратного рассеяния, полученное с помощью двухмасштабной модели (см. сноску на стр. 819), по (III.7) и (III.9) дано на рис. 7.

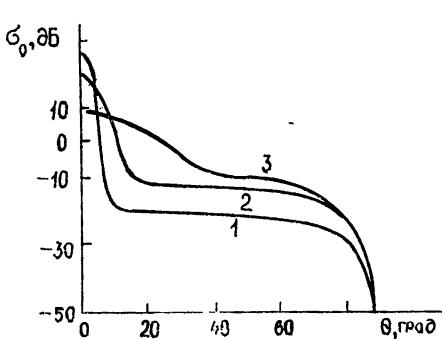


Рис. 7. Диаграмма обратного рассеяния морской поверхности при наблюдении на вертикальной поляризации [20]:

1 — гладкая поверхность, 2 — поверхность при волнении до трех баллов, 3 — поверхность при волнении 5—7 баллов.

Коэффициент корреляции флуктуаций комплексной амплитуды поля на разнесенных частотах пропорционален характеристической функции мгновенных отклонений поверхности от горизонтального уровня [20]:

$$r(\Delta f) = \frac{\overline{\delta E \delta E^*_{\Delta f}}}{\sigma_E^2}, \quad (\text{III.10})$$

$$|r(\Delta f)| \approx \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(h) \exp\left(-\frac{j 4\pi h_k \Delta f}{c}\right) dh \right|.$$

В случае нормального закона отклонения точки поверхности от углового уровня преобразование (III.10) приводит с учетом поправки на декорреляцию к соотношению

$$|r(\Delta f)| = \exp \left[-2 \left(\frac{\Delta f \sigma_h}{c} \right)^2 \right] r_d(\Delta f), \quad (\text{III.11})$$

где $r_d(\Delta f)$ — фактор декорреляции, зависящий от радиуса кривизны фронта электромагнитной волны и размеров облучаемой площадки.

III.2.4. Интенсивность и поляризация радиотеплового излучения морской поверхности в условиях ветрового волнения изменяется за счет изменения углов наклона поверхности и появления пены и брызг. Влияние пены в сантиметровом диапазоне проявляется, в частности, в виде значительного увеличения степени черноты.

При углах наблюдения, близких к вертикали ($\theta < 50^\circ$), влияние вариаций углов наклона поверхности учитывается с помощью приближения Кирхгофа*. При скользящих углах наблюдения морской поверхности заметное влияние оказывают эффекты затенения.

III.2.5. Форма эхо-сигнала, отраженного от шероховатой морской поверхности, деформируется и приобретает искажения, зависящие от интенсивности волнения. При облучении поверхности радиоимпульсами прямоугольной формы наличие малых шероховатостей вызывает затягивание заднего фронта.

При высоте морской волны, не превышающей длину радиоволны, длительность переднего фронта эхо-сигнала определяется временем, при котором достигается максимальный размер одновременно облучаемой площадки. Как нетрудно видеть, это время определяется длительностью зондирующего сигнала.

Изменение средней интенсивности эхо-сигнала при вертикальном зондировании во время нарастания определяется условием

$$P_s(t) = \Pi_0 \sigma(t) \equiv \Pi_0 (t_m^2 - t_n^2), \quad (\text{III.12})$$

где Π_0 — плотность первичного потока поля облучения,

$$P_s(t_m) = P_{s \max} \quad \text{при} \quad t_m = t_n + \tau_0. \quad (\text{III.13})$$

При высоте морской волны, превышающей длину радиоволны, процесс нарастания фронта эхо-сигнала связан с нарастанием во времени числа отражающих элементов, что вызывает дополнительный наклон переднего фронта эхо-сигнала. Случайное расположение отражающих точек на взволнованной поверхности определяет случайный характер процесса нарастания эхо-сигнала.

Средняя длительность переднего фронта эхо-сигнала при отражении от морской поверхности оценивается соотношением

$$\bar{\tau}_{\text{fp}} \approx \tau_0 + k \sigma_h. \quad (\text{III.14})$$

Примерный характер нарастания среднего значения огибающей эхо-сигнала от взволнованной морской поверхности представлен на рис. 8.

* Одновременный учет влияния крупномасштабных и мелкомасштабных составляющих морских волн достигается в двухмасштабной модели [16]. Морская поверхность представляется в виде суперпозиции слаженной поверхности и мелкомасштабных возмущений. Слаженная поверхность выбирается так, что значения радиусов кривизны значительно превышают длину электромагнитной волны и углы наклона возмущенной поверхности относительно слаженной достаточно малы.

Расчеты интенсивности обратного рассеяния допускают приближение Кирхгофа в секторе вблизи направления зеркального отражения и приближения малых возмущений на скользящих углах (III.7). Применение обоих приближений позволяет описать показатели рассеяния во всем диапазоне углов наблюдения.

Форма заднего фронта эхо-импульса зависит от ширины главного лепестка диаграммы направленности, ориентации луча антенны относительно вертикали и других факторов.

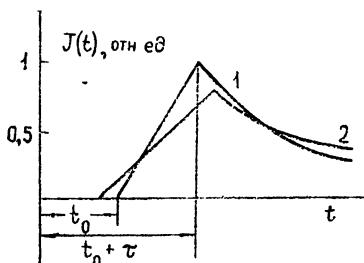


Рис. 8. Изменение во времени среднего значения интенсивности эхо-сигнала от морской поверхности:
1 — слабое волнение ($0,1 \lambda < \sigma_h < \lambda$); 2 — умеренное волнение ($\sigma_h > 0,1 c \tau$).

III.3. Экспериментальные исследования СВЧ радиационных характеристик акваторий

III.3.1. Эффекты рассеяния на капиллярных волнах и их связь с интенсивностью приводного ветра подробно исследовались в лабораторных и натурных условиях. Резонансный характер рассеяния радиоволн сантиметрового диапазона на капиллярных волнах подтверждается сопоставлением данных одновременных измерений спектра интенсивности эха и волномерных измерений [21].

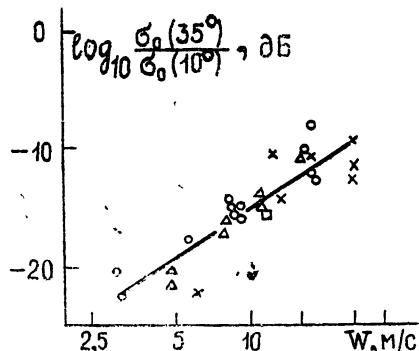
Экспериментальные данные о связи удельного сечения рассеяния со скоростью ветра хорошо аппроксимируются линейно-логарифмической зависимостью [11, 22]:

$$\log \sigma_0(\theta) = \alpha_\lambda(\theta) + \beta_\lambda(\theta) \log w. \quad (\text{III.15})$$

Коэффициенты $\alpha_\lambda(\theta)$ и $\beta_\lambda(\theta)$ зависят от угла наблюдения в вертикальной плоскости и ориентации линий визирования относительно вектора ветра. Пример результатов натурных измерений с самолета приведен на рис. 9. Использование зависимости (3.15) для оценки вектора ветра позволяет получить оценки с точностью около 15% по интенсивности и $\pm 20^\circ$ по направлению.

Рис. 9. Экспериментальные значения зависимости удельного сечения рассеяния морской поверхности от силы ветра при наблюдении на частоте около 13,6 ГГц [22]:

кружки, треугольники, крестики — данные по трем сериям экспериментов.



III.3.2. Экспериментальные данные по наблюдениям рассеянного поля на крупных волнах находятся в хорошем соответствии с рассмотренными модельными представлениями.

При линейных размерах поля зрения, не превышающих длину морской волны, сигнал, отраженный от морской поверхности, испытывает амплитудную и частотную модуляцию.

Частотная модуляция вызывается изменением параметров рассеивающей ряби при воздействии крупных волн; величина вариаций частоты пропорциональна высоте волны [22].

Амплитудная модуляция эхо-сигнала вызывается изменением наклона отражающего участка при волновых движениях. Регистрация спектра амплитудной модуляции позволяет определить распределение периода волновых колебаний, спектр углов наклона, высоту волны и другие параметры [23, 24].

Зависимость величины удельного сечения рассеяния от наклона морской волны позволяет использовать радиолокационное изображение морской поверхности, на котором разрешаются отдельные волновые образования, для определения спектра волновых чисел, пространственной неоднородности и направления движения морских волн [25]. Экспериментальные зависимости радиояркостной температуры поверхности акваторий от силы ветра, связанные с влиянием углов наклона участков поверхности и появлением пены, получены в работах [114, 124, 127].

На рис. 10 в качестве примера приведены зависимости, полученные в [124, 127] и др.

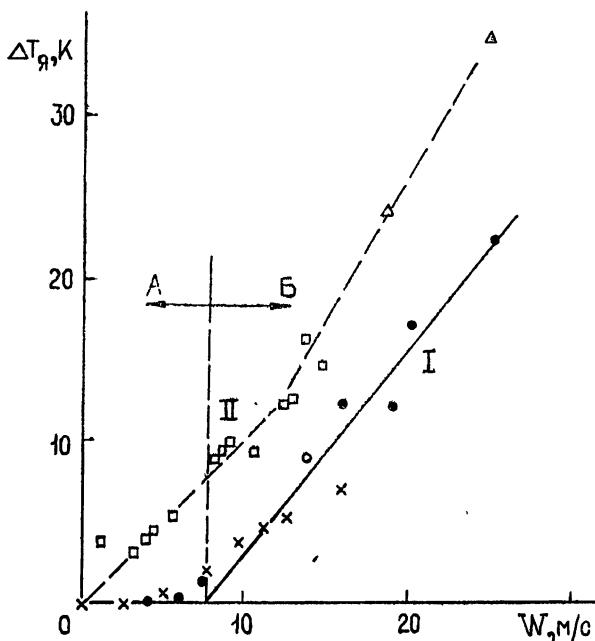


Рис. 10. Зависимость приращения яркостной температуры T_y от скорости ветра:

1 — по данным [127], $\lambda = 1,55 \text{ см}$, горизонтальная поляризация (точки, треугольники); 2 — по данным [124], $\lambda = 1,55 \text{ см}$, горизонтальная поляризация (квадраты); 3 — по данным [114], $\lambda = 11,3 \text{ см}$, круговая поляризация (кружки); 4 — по данным [17], $\lambda = 8,5 \text{ см}$ (крестики);

I — $\theta = 0^\circ$; II — $\theta = 55^\circ$;

A — на поверхности лишь волнообразования; B — на поверхности волны и пены.

При зондировании поверхности в УКВ диапазоне эхо-сигнал содержит когерентную и некогерентную составляющие. Наличие обеих составляющих проявляется в виде флюктуационной модуляции. Измерение глубины флюктуационной модуляции позволяет по методике, разработанной в [15] и [18], производить оценку эффективного значения высоты волны. Точность оценки высоты волны по экспериментальным данным составляет около 10% [26].

Наблюдения зависимости коэффициента корреляции флуктуаций эхо-сигналов на разнесенных частотах в сантиметровом диапазоне от интенсивности волнения производились в лабораторных и натурных условиях. Данные натурных испытаний, приведенные на рис. 11, хорошо согласуются с расчетными значениями.

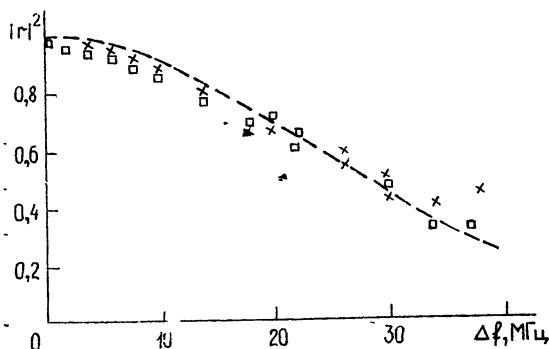


Рис. 11. Расчетные и экспериментальные значения зависимости коэффициента корреляции эхо-сигналов от разности частот зондирующих колебаний:

1—полет в направлении ветра при скорости ветра 10—15 м/с (крестики); 2—полет против ветра при скорости ветра 10—15 м/с (квадраты). В расчетах принято эффективное значение высоты волны $\sigma_h = 0,7 \text{ м}$.

III.4. Измерения положений уровня морской поверхности

Положение уровня морской поверхности определяется путем измерений высоты ИСЗ. Высотомерные наблюдения проводятся в широком участке спектра от диапазона коротких волн до оптического диапазона.

Использование радиовысотомеров сантиметрового диапазона позволяет реализовать режим направленного излучения при слабой зависимости результатов наблюдения от метеорологических условий.

Вариации положений уровня морской поверхности, получаемые из данных высотомерных измерений, δH_n определяются суммарными отклонениями, обусловленными формой геоида ΔH_g , и динамическими эффектами ΔH_d (приливные явления, ветровой нагон, океанические течения и др.):

$$\delta H_n = \Delta H_g + \Delta H_d. \quad (\text{III.16})$$

Вариации положения уровня океана, вызванные динамическими воздействиями, имеют особенности, связанные с характерными изменениями во времени и сравнительно малой пространственной протяженностью. Эти особенности отличают динамические вариации уровня поверхности океана от длиннопериодических вариаций, обусловленных структурой гравитационного поля.

Требования к точности регистрации вариаций положения уровня выбираются в зависимости от изучаемых динамических процессов и определяются чувствительностью положения уровня к влиянию внешних воздействий (см. разд. III.1).

Точность регистрации вариаций положения уровня (при допущении точного знания параметров орбиты ИСЗ в геоцентрической системе координат) определяется совокупностью методических и инструментальных погрешностей измерений высоты. Составляющие погрешностей измерения высоты при ширине полосы зондирующего сигнала $\Delta f \sim 100 \text{ МГц}$ (эквивалентная длительность импульса 10 нс) и при отношении энергии эхо-сигнала к спектральной плотности шумов $\sqrt{2\Theta}/N_w \sim 10$ имеют эффективные значения, приведенные в табл. 1.

Обработка данных радиовысотометрических измерений, проведенных при экспериментах «Скайлаб» (1973 г.) и «Госс III» (1975 г.) позволила зафиксировать вариации положения уровня, связанные с влиянием

морских течений и состоянием поверхности океана [28]. Определение формы геоида реализуется путем абсолютных измерений.

Таблица 1

Составляющие ошибок	Шумовая	Влияние замираний эхо-сигнала	Влияние рефракции	„Размытие“ фронта эха	Нестабильность ориентации ИСЗ δ	Инструментальные погрешности
Формульные оценки	$\frac{1}{\Delta f} \sqrt{\frac{N_{\text{ш}}}{2\Theta}}$	$\frac{1}{\Delta f} \frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{\sigma_c}{c} \sim 10^{-6}$	$\sigma_{\Phi} \sqrt{\frac{N_{\text{ш}}}{2\Theta}}$	$\delta < 0,5^\circ$	Суммарная величина
Эффективное значение погрешностей [м]	0,15	0,2 – 0,5 при $10 \leq n \leq 50$	0,5	0,1 – 0,4	0,3 – 1,0 без учета коррекции	1 – 3

n — число некоррелированных измеренных значений за время сглаживания.

Высота уровня поверхности моря H_g над поверхностью сфероида Земли находится по данным высоты ИСЗ из траекторных измерений, пересчитанных в геоцентрическую систему координат — $H_{\text{сф}}$, и результатов высотомерных измерений H_i с учетом поправки ΔH_d , обусловленной динамическими воздействиями,

$$H_g = H_{\text{сф}} - (H_i + \Delta H_d). \quad (\text{III.17})$$

Точность определения формы геоида зависит от точности измерения положения ИСЗ в геоцентрической системе координат, погрешностей высотомерных измерений и погрешностей учета динамических воздействий.

Согласно [29] определение формы геоида с погрешностью 1—5 м позволит уточнить имеющиеся данные о спектре пространственных гармоник гравитационного поля Земли. Влияние гравитационных аномалий наблюдалось при измерениях высоты уровня океана в эксперименте «Скайлаб», где четко зафиксированы изменения уровня в области Пуэрто-риканской впадины [28].

IV. ИССЛЕДОВАНИЯ ЛЕДОВОГО И СНЕГОВОГО ПОКРОВА РАДИОФИЗИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

IV.1. Диэлектрические характеристики ледовых покровов

Диэлектрические свойства сплошных ледовых образований как полярных диэлектриков имеют выраженную частотную зависимость с параметрами, изменяющимися от температуры [32].

Диэлектрическая проницаемость морских и пресноводных льдов, представляющих смесь кристаллов льда, капелек воды и пузырьков воздуха, зависит от температуры, степени увлажнения и пористости льда, содержания соли в ледяных кристаллах и водяных включениях [17, 32].

Для расчетов диэлектрической проницаемости используются соотношения для многокомпонентных смесей [33].

Пресноводные льды без водяных включений имеют значения действительной части диэлектрической проницаемости $\epsilon_r \approx 3 \div 3,5$ величины погонного поглощения в дециметровом и сантиметровом диапазонах составляют от 10^{-2} (nep/m) до единиц (nep/m).

Наличие водяных капелек, прослоек и увлажнения может заметно изменять значения комплексной диэлектрической проницаемости. Диэлектрическая проницаемость морских льдов зависит от содержания рассола и степени солености воды, образующей лед. Действительная часть диэлектрической проницаемости меняется в пределах $\epsilon' = 3 - 15$.

Наблюдается резкая зависимость угла потерь и погонного затухания радиоволн от солености льда и дополнительного содержания морской воды. Погонное поглощение в морских льдах может достигать от единиц до нескольких десятков (nep/m) в дециметровом диапазоне, сотен (nep/m) — в сантиметровом диапазоне [33].

Диэлектрическая проницаемость снежного покрова, рассматриваемого как смесь частиц льда и воздуха, вычисляется по формулам двухкомпонентной смеси (см. [32]). Значения действительной части диэлектрической проницаемости снега заметно изменяются в зависимости от плотности (которая может иметь величину от 0,01 до 0,6 g/cm^3), и степени увлажнения снега.

IV.2. Радиационные модели

IV.2.1. Слоистый характер и однородность свойств ледовых образований в горизонтальном направлении определяют значение плоскослоистых моделей при радиационных расчетах. В рамках плоскослоистых моделей рассматриваются структуры с резкими и плавными переходами и многослойные структуры со случайной вариацией параметров.

Заметная глубина проникновения радиоволн СВЧ диапазона в ледовых покрывах (от десятых долей метра до сотен метров) вызывает необходимость учета рефракционных эффектов и эффектов объемного рассеяния.

При анализе радиационных характеристик плоскослоистых сред различаются случаи, когда сигналы, отраженные на границах, фиксируются раздельно (например, за счет разрешения по времени запаздывания), и случаи суперпозиции отраженных полей.

IV.2.2. В случаях отсутствия временного разделения сигналов, отраженных от верхней и нижней границ, энергетический коэффициент отражения R_λ без учета поглощения в слое, определяется когерентной суперпозицией колебаний, отраженных на границах [34]:

$$R_\lambda = \frac{R_{12} + R_{23} + 2\sqrt{R_{12}R_{23}} \cos(2kl \sin \theta + \varphi_1 + \varphi_2)}{1 + R_{12}R_{23} \pm 2\sqrt{R_{12}R_{23}} \cos(2kl \sin \theta + \varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (IV.1)$$

где R_{12} , φ_1 и R_{23} , φ_2 — коэффициенты отражения и фазовые сдвиги на верхней и нижней границах.

Суперпозиция колебаний, отраженных на границах, определяет формирование радиотеплового излучения плоскослоистой среды. Спектральная зависимость степени черноты плоскослоистой среды с учетом поглощения в слое [35]

$$\kappa_\lambda = \frac{(1 - R_{12})(1 - R_{23}e^{-2t_\lambda})}{1 + [R_{12}R_{23}e^{-2t_\lambda} \pm 2\sqrt{R_{12}R_{23}}e^{-2t_\lambda} \cos(2kl \sin \theta + \varphi_1 + \varphi_2)]}. \quad (IV.2)$$

(IV.1) и (IV.2) показывают осциллирующий характер зависимости коэффициента отражения и степени черноты ледового слоя от толщины слоя и угла визирования*.

* Наличие переходных слоев с плавным изменением параметров оказывает согласующее действие, и интерференционные осцилляции сглаживаются

При широкополосном приеме происходит «замывание» интерференционных осцилляций и соотношение для степени черноты имеет вид

$$\kappa_{\lambda+\Delta\lambda} = \frac{(1 - R_{12})(1 - R_{23}e^{-2\tau_\lambda})}{1 - R_{12}R_{23}e^{-2\tau_\lambda}}. \quad (\text{IV.3})$$

В условиях (IV.3) степень черноты выражается монотонной зависимостью от толщины льда.

IV.2.3. При исследованиях ледников представляет интерес учет влияния крупных пологих неровностей на границах раздела.

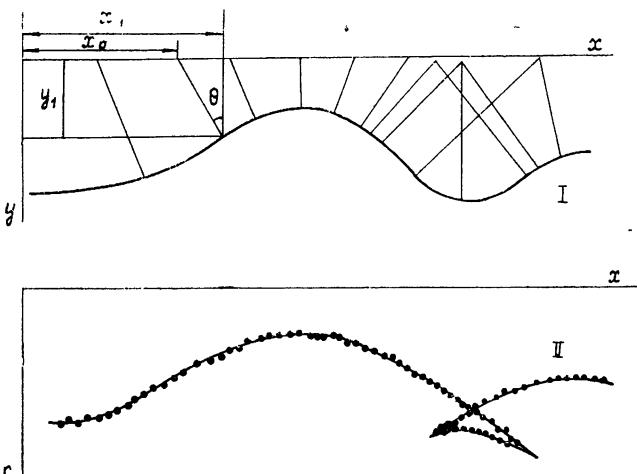


Рис. 12. Форма профиля рельефа подстилающей поверхности и значения измеряемой дальности до отражающих областей:

I — рельеф поверхности $y = f_0(x)$; II — значения измеряемой дальности до отражающей области $r = f(x)$ (наблюдатель перемещается по оси x).

Модель отражения радиоволн метрового диапазона от ледников с неплоской нижней границей развита в рамках приближения Кирхгофа [36]. На рис. 12 представлено положение отражающей подледной области для источника с горизонтальной координатой x_0 . Координаты отражающей области x_1, y_1 связаны с положением источника уравнениями, которые (без учета рефракции радиоволн) имеют вид

$$x_1 = x_0 + y_1 - \frac{dy}{dx}; \quad (\text{IV.4})$$

$$r_1 = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (\text{IV.5})$$

где $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta$. Интегрирование (IV.4) и (IV.5) по данным измерений наклонной дальности в процессе горизонтального смещения источника излучения $r_1 = f(x_0)$ позволяет восстановить форму профиля донной части $y_1 = f_0(x_1)$.

В местах впадин рельефа образуются две (или три) отражающие области на противоположных склонах, что вызывает двойные (или тройные) эхо-сигналы (см. рис. 12).

Заметное влияние на формирование радиационных характеристик ледовых образований оказывают многослойные структуры со случайным изменением параметров [17, 37].

Фактор рассеяния на мелких неоднородностях $\bar{\gamma}_p$ оценивается средним значением коэффициента объемного рассеяния

$$\bar{\gamma}_p = \frac{1}{\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} q_\lambda(a) N(a) da}, \quad (IV.6)$$

где $q_\lambda(a)$ — поперечник рассеяния частиц, $N(a)$ — объемное содержание неоднородностей радиуса a .

Соотношение для среднего значения степени черноты среды, содержащей мелкие рассеивающие неоднородности, в условиях, аналогичных (4) — (8), преобразуется к виду

$$\bar{\chi}_\lambda = 1 - R_\lambda - (1 - R_\lambda)^2 \bar{\gamma}_p l_s = (1 - R_\lambda)^2 [1 - \bar{q}_\lambda \bar{N} l_s (1 - R_\lambda)^2], \quad (IV.7)$$

где \bar{q}_λ — среднее значение поперечника рассеяния, l_s — толщина скин-слоя, \bar{N} — среднее значение объемного содержания неоднородностей.

Спектральная зависимость величины $\bar{\gamma}_p$ обусловлена зависимостью эффективного поперечника рассеяния q_λ от соотношения размеров рассеивающих неоднородностей и длины волны.

IV.3. Экспериментальные исследования

При лабораторных и натурных исследованиях выявлены особенности отражательных и излучательных свойств верхнего слоя ледовых образований, а также особенности формирования эхо-сигналов от нижней границы раздела и неоднородностей структуры льда.

Умеренное поглощение радиоволн сантиметрового диапазона в пресноводных льдах и снеге позволяет использовать этот диапазон для просвечивания ледовых слоев и снежного покрова [37, 53].

Наблюдения эхо-сигналов от верхней и нижней границ озерного льда, выполненные с вертолета с помощью радиолокационной установки на волне около 10 см с длительностью импульсов 1,3 нс, показали, что радиолокационные оценки толщины льда отличаются не более чем на 10% от данных прямых измерений толщины льда [37] (см. также [38]).

Наблюдения радиотеплового излучения пресноводных льдов в согласии с (IV.2) и (IV.4) показывают наличие зависимостей интенсивности излучения от толщины льда.

Так, наблюдения радиотеплового излучения в диапазоне волн 0,8—3,4 см для пресных и малосоленых льдов на озерах в районе Шатуры, Кольского полуострова, на Карском, Аральском и Белом

морях показали монотонную зависимость радиояркостной температуры от толщины льда при значениях толщины до 0,5 м [40].

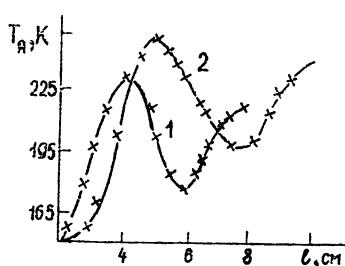


Рис. 13. Экспериментальные данные о зависимости радиояркостной температуры от толщины нарастающего морского льда (соленость воды 11%) (1 — на волне 30 см, 2 — на волне 60 см) [17].

Осцилляционные зависимости интенсивности радиотеплового излучения от толщины льда вида (4.2) наблюдались при экспериментах с узкополосными радиометрами в лабораторных и натурных условиях (см. рис. 13) [41, 42].

Значительное поглощение радиоволн сантиметрового и дециметрового диапазона в морских льдах ($\gamma_\lambda \approx 10 \div 300 \text{ dB/m}$) определяет

целесообразность выбора метровых радиоволн в качестве рабочего диапазона при просвечивании соленых льдов.

Эксперименты с видеоимпульсным зондированием при длительности сигнала около 10^{-8} с показали возможность одновременного наблюдения сигналов, отраженных от верхней и нижней кромки льда, для ледовых полей толщиной льда более 0,5 м [43, 44].

Оценки толщины ледового покрова, полученные по измерениям времен запаздывания эхо-сигналов от верхней и нижней кромки, отличаются не более чем на 20% от значений толщины льда в контрольных точках [44].

Спектральные характеристики радиотеплового излучения, полученные в [45, 46], показывают заметные различия степени черноты однолетних и паковых льдов в миллиметровом диапазоне (рис. 14).

Уменьшение степени черноты пористых паковых льдов в миллиметровом диапазоне радиоволн, обусловленное рассеянием радиоволн на пузырьках воздуха в верхнем слое льда, позволяет оценивать степень пористости льдов [46].

Спектральные особенности радиоизлучения наблюдались также в местах образования торосов [47].

Зависимости характеристик обратного рассеяния в сантиметровом и дециметровом диапазонах от толщины льда (в условиях суперпозиции отражений от верхней и нижней кромок) наблюдались в [48], где выявлены заметные различия удельного сечения рассеяния для ледовых полей, отличающихся на 5—6 градаций толщины льда.

Электрофизические характеристики и внутренняя структура ледников Антарктиды, Гренландии и горных ледников в умеренных широтах исследовались радиолокационным методом в отечественных и зарубежных работах [49—51].

При наблюдениях использовались импульсные радиолокационные приборы метрового диапазона с длительностью зондирующих сигналов $0,2 - 0,5 \text{ мкс}$; охваченная площадь составляет около 10^6 км^2 [51].

При импульсном глубинном зондировании материковых ледников определены значения диэлектрической проницаемости ледников, получены оценки толщины ледников и формы рельефа подледного ложа* [50, 51].

V. ВЛАЖНОСТЬ ПОЧВ И ГРУНТОВ

V.1. Физико-механические свойства почв

Почва включает в себя твердые частицы, почвенную воду и воздух. Твердые частицы состоят из минеральных и органических веществ. Почвенная влага не одинакова по своему качеству. Различают следующие категории влаги: прочносвязанная, рыхлосвязанная и свободная [134]. В зависимости от типа почвы, характера ее обработки, особенностей

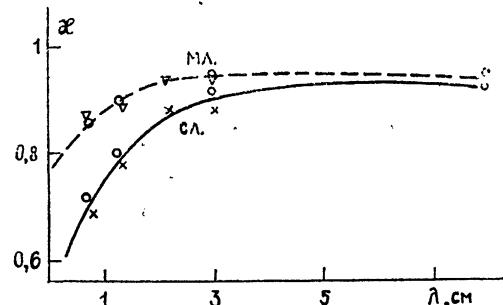


Рис. 14. Спектральные зависимости степени черноты для однолетних (МЛ) и паковых (СЛ) ледовых полей [46]:
1 — данные измерений ИСЗ "Космос-243" (кружки); 2 — данные измерений с самолета (треугольники, крестики).

* Формула профиля подледного ложа определялась с помощью соотношений (IV.4), (IV.5).

рельефа местности земная поверхность отличается наличием неровностей, характерные размеры которых варьируют от долей миллиметра и десятков сантиметров (мелкоструктурные и крупноструктурные неровности) до десятков метров и более (особенности рельефа).

V.2. Диэлектрические характеристики почво-грунтов

Диэлектрическая проницаемость сухого грунта зависит от плотности [165]. Для силикатных пород выполняется соотношение

$$\sqrt{\epsilon'} \approx 1 + 0,5 \rho_c, \quad (\text{V.1})$$

где ρ_c — плотность в $\text{г}/\text{см}^3$. Для грунтов из песка и глины $\epsilon' = 3 \div 4$ тангенс угла потерь $\operatorname{tg} \delta = 10^{-2} \div 10^{-3}$ [17, 136, 137].

Эквивалентная диэлектрическая проницаемость увлажненных и мерзлых почво-грунтов оценивается, исходя из соотношений теории многокомпонентных смесей [33, 90, 138]. Эти соотношения учитывают относительный объем компонент, их диэлектрические параметры, форму элементов включений. Анализ применимости соотношений теории смесей и некоторые численные результаты расчета содержатся в [17, 90, 139–141]. Показано, что параметром зависимости диэлектрической проницаемости от величины относительной влажности* является плотность грунта; в то же время величина плотности слабо влияет на характер и крутизну зависимости диэлектрической проницаемости от объемного веса влаги в почве**.

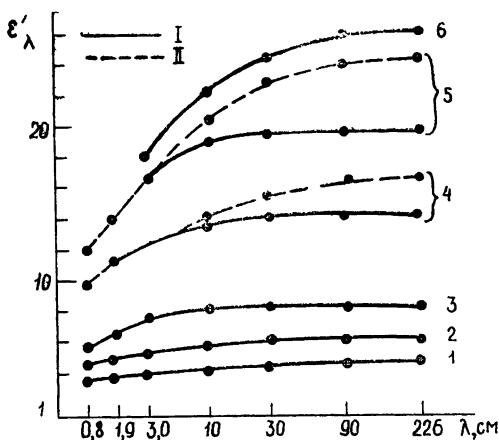


Рис. 15. Спектральная зависимость действительной части диэлектрической проницаемости $\epsilon\lambda'$ при различных значениях относительной влажности $m\%$ (по данным [136]):
I — песчаный грунт плотностью $1,85 \text{ г}/\text{см}^3$, II — глинистый грунт плотностью $1,67 \text{ г}/\text{см}^3$; $1-m=3\%$; $2-m=6\%$; $3-m=9\%$; $4-m=15\%$; $5-m=21\%$; $6-m=24\%$ ($1-3$ — одинаковые для песка и глины значения).

Однако соотношения теории смесей дают весьма приближенные количественные оценки диэлектрических свойств увлажненных почво-грунтов. В этой связи определяющее значение имеют представительные данные лабораторных измерений диэлектрических свойств для образцов песчаного и глинистого грунтов, плотность которых около $1,75 \text{ г}/\text{см}^3$, выполненных в диапазоне волн от 0,8 до 226 см [136] (см. рис. 15); для образцов суглинистых почв плотностью от 1,2 до $1,8 \text{ г}/\text{см}^3$, выполненных в диапазоне волн от 7,5 см до 10 м; для образцов песчаного, глинистого и илистого грунтов плотностью от 1,2 до $1,7 \text{ г}/\text{см}^3$ при температуре от -20°C до $+24^\circ\text{C}$ на волнах от 1,5 до 300 см [137], а также данные других работ [143].

С увеличением влажности величина ϵ'' линейно возрастает и составляет в сантиметровом диапазоне волн значение около 4—6 при влажности 15—20%.

* Относительная влажность m (%) определяется как отношение веса воды к весу сухого грунта в единице объема почвы.

** Объемный вес влаги ρ_v ($\text{г}/\text{см}^3$) — вес воды в единице объема почвы.

Данные [137, 142] подтверждают теоретические выводы о том, что основным параметром, определяющим величину ϵ' , является объемная влажность.

V.3. Модели СВЧ излучения и радиолокационного отражения почво-грунтов

V.3.1. Яркостная температура, характеризующая интенсивность излучения полубесконечной среды с произвольным распределением по глубине диэлектрической проницаемости $\epsilon(h)$ и температуры $T(h)$, определяется из выражений, являющихся обобщением (II.3), (II.4).

Приближенные соотношения, характеризующие излучательную способность x_λ и коэффициент поглощения γ_λ однородной слабопоглощающей среды имеют вид

$$x_\lambda \approx \frac{4 \sqrt{\epsilon'_\lambda}}{\epsilon'_\lambda + 2 \sqrt{\epsilon'_\lambda} + 1} \quad (\theta = 0^\circ); \quad (V.2)$$

$$\gamma_\lambda = \frac{2\pi \operatorname{tg} \delta \sqrt{\epsilon'_\lambda}}{\lambda}. \quad (V.3)$$

Увеличение диэлектрической проницаемости сопровождается уменьшением излучательной способности, яркостной температуры и возрастанием коэффициента поляризации [17, 35, 146, 147]. С учетом данных [136] о значениях ϵ при различном влагосодержании оценки крутизны радиационно-влажностной зависимости составляют (4—5) К и (2—3) К на процент влажности соответственно при плотности грунта 1,7—1,8 g/cm^3 и 1,2—1,4 g/cm^3 или около 0,2 К g/dm^3 практически независимо от плотности грунта. Относительные изменения коэффициента поляризации составляют около 0,2% (g/dm^3) при углах наблюдения около 60° .

Толщина скин-слоя глинистого грунта по данным [136] не превышает длины волны во всем СВЧ диапазоне и составляет от 3 до 7 длин волн в случае сухого (менее 5% влажности) песчаного грунта.

V.3.2. Отмечается [15, 69] наличие зависимости удельной площади обратного рассеяния от величины диэлектрической проницаемости и, следовательно, влажности грунта при значительном влиянии степени шероховатости и параметров растительного покрова. Результаты модельных расчетов имеют качественный характер.

Эффективная глубина слоя, зондируемого при скользящих углах наблюдения, близка к толщине скин-слоя. При вертикальном наблюдении глубина зондирования может составлять несколько скин-слоев.

Толщина скин-слоя глинистого грунта по данным [136] не превышает длины волны во всем СВЧ диапазоне и составляет от 3 до 7 длин волн в случае сухого (менее 5% влажности) песчаного грунта.

V.3.3. Наличие векториальной неоднородности диэлектрической про-

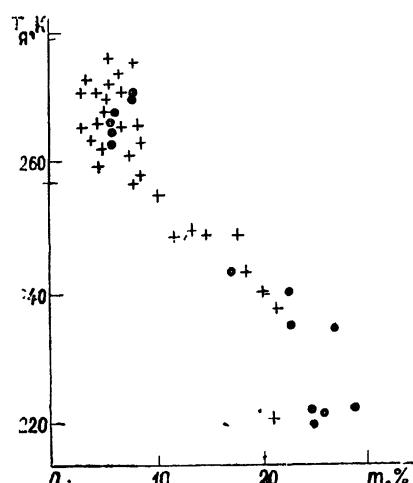


Рис. 16. Зависимость яркостной температуры T_g на волне 21 см от величины относительной влажности $m\%$ [156], открытый грунт:
1 — супесь (крестики), 2 — суглинок (кружки).

ницаемости приводит к появлению особенностей в спектре излучения — зависимости T_{λ} от параметров, характеризующих профиль $\epsilon_{\lambda}(h)$ [17, 35, 148, 159].

Радиационный контраст, обусловленный наличием неоднородностей на глубине l , определяется из (IV.3) приближенным соотношением

$$\Delta \kappa_{\lambda} \approx (1 - R_{12})^2 R_{23} e^{-2\tau_{\lambda}}, \quad (V.4)$$

где

$$\tau_{\lambda} = \gamma_{\lambda} l.$$

Наличие плавных переходов $\epsilon(h)$ оказывает согласующее действие, что приводит к уменьшению отражений на границах [34]. Отражение от плавного переходного слоя на границе «верхний слой — однородное полупространство» заметно лишь при относительной толщине слоя $l/\lambda \approx 0,1 \div 0,3$. Для модели с экспоненциально меняющейся диэлектрической проницаемостью достигается почти полное отсутствие отражений при толщине переходного слоя, превышающей половину длины волны.

V.3.4. По отношению к диапазону миллиметровых, сантиметровых и дециметровых волн земная поверхность может представляться шероховатой и локально гладкой. Результаты модельных оценок влияния мелкоструктурных неровностей по методу малых возмущений показывают, что величина излучательной способности при наличии малых возмущений

$$\kappa_{\sim} = 1 - A_{\sim} = 1 - [(R - \Delta R) + D_J] \quad (V.5)$$

(A_{\sim} — альбедо возмущенной поверхности, ΔR — степень уменьшения зеркальной компоненты [149], D_J — дисперсия рассеянного поля) отличается от величины $\kappa = 1 - R$ для плоской поверхности не более чем на 0,01 — 0,02 в диапазоне углов наблюдения от 0 до 60° . Крупноструктурные неровности приводят к существенной деполяризации излучения [150] и заметному возрастанию радиояркости на 10 К и более, главным образом, на горизонтальной поляризации при скользящих углах наблюдения.

V.4. Данные экспериментальных исследований СВЧ радиометрических и радиолокационных характеристик увлажненных покровов

V.4.1. Результаты экспериментов, лабораторных [151, 152], стационарных наземных [146], с борта самолетов [89, 153, 154] и ИСЗ [17, 146, 155] в диапазоне волн от 0,8 до 30 см подтвердили наличие резкой зависимости радиационных характеристик от влажности поверхностного слоя. Количественные соотношения крутизны радиационно-влажностных зависимостей, выявленные в экспериментах, близки к расчетным оценкам. Перепад уровней радиоизлучения сухой почвы и почвы в состоянии полной влагоемкости составляет 60 — 90 К. Такой же величины радиояркостный контраст «мерзлый — талый грунт» и контрасты в открытых заболоченных районах. При наиболее распространенных в полевых условиях значениях плотности $—1 — 1,5 \text{ г}/\text{см}^3$ крутизна радиационно-влажностной зависимости составляет величину около $-0,2 \text{ К} (\text{г}/\text{дм}^3)$, соответствующую расчетному значению. Влияние вариаций плотности грунта наблюдается, главным образом, при малых значениях влагосодержания (см. рис. 16, 17). Значение радиояркости коррелирует с величиной влагосодержания в слое толщиной $(0,1 — 1,0)\lambda$. Значимых спектральных различий в значениях крутизны радиационно-влажностных зависимостей не наблюдается. Коэффициент поляризации излучения на скользящих углах наблюдения возрастает с увеличением влагосодержания. Крутизна экспериментальной зависимости меньше расчетной,

что может быть объяснено влиянием неровностей и вертикальной неоднородностью распределения влажности. Полученные данные показывают возможность измерения до 10 градаций влажности по собственному СВЧ излучению.

V.4.2. Густой растительный покров в виде зерновой или пожнивной кукурузы высотой 1,5—2 м практически полностью экранирует излучение почвы в сантиметровом диапазоне волн и снижает на 20—40% крутизну «радиационно-влажностной» зависимости в дециметровом диапазоне при вертикальном наблюдении. Растительные покровы в виде всходов сельскохозяйственных культур высотой до 30—50 см снижают крутизну «радиационно-влажностной» зависимости в сантиметровом диапазоне не более чем на 10—20% и практически не экранируют излучение почвы в дециметровом диапазоне волн [89, 153, 154, 156] (см. также разд. 6).

Кустарники, лес в заболоченных районах экранируют на 60—80% излучение в сантиметровом диапазоне и на 20—40% в диапазоне дециметровых волн. Отчетливо регистрируются заболоченные участки.

V.4.3. Многочисленные экспериментальные радиолокационные исследования выявили наличие зависимости удельной площади обратного рассеяния σ_0 от влажности верхнего слоя грунта [155, 157, 158].

Наибольшей крутизной, около 0,06—0,08 dB/(g/dm³), в сантиметровом диапазоне волн характеризуется зависимость от влажности собственных коэффициентов матрицы рассеяния $\sigma_{0\parallel\parallel}$ и $\sigma_{0\perp\perp}$ при вертикальном зондировании. При увеличении угла наблюдения от 0 до 20° чувствительность к изменению влажности ухудшается в 3—5 раз. Наличие растительности резко влияет на крутизну зависимости коэффициентов рассеяния от влажности [158] (см. разд. 6). Ввиду того, что σ_0 является сложной функцией влажности грунта, степени шероховатости поверхности, характера растительного покрова и угла наблюдения, возможно получение оценок влагосодержания по величине удельной площади рассеяния для выбранных участков с известным состоянием растительного покрова или для участков, имеющих эталонные аналоги.

V.4.4. Обнаружено, что при наличии грунтовых вод под слоем песчаного грунта на глубине радиояркость уменьшается с увеличением длины волны. Величина составляет около 10—20 К на волнах 20—30 м. В ряде случаев регистрируется контраст величиной в несколько градусов Кельвина при залегании вод на значительно больших глубинах — до 10 м. Такой результат можно объяснить малым содержанием влаги в поверхностном слое и подъемом капиллярной влаги из водоносного слоя к верхним горизонтам. В случае глинистых грун-

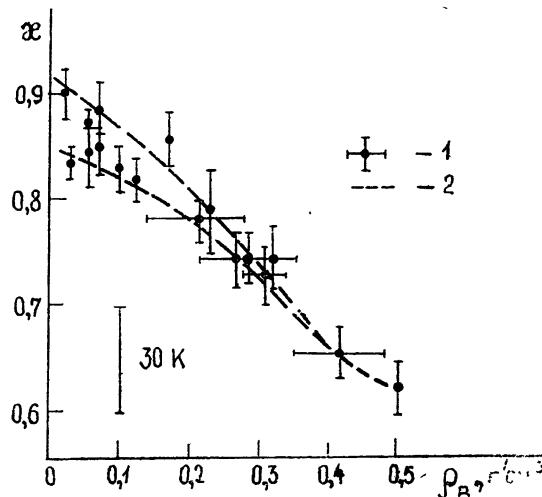


Рис. 17. Зависимость излучательной способности x на волне 3,2 см от объемного веса влаги (открытый грунт, суглинок):⁴
1—локальные вариации излучательной способности и влажности; 2—пределы изменений средних значений излучательной способности, обусловленные изменением плотности грунта.

тов радиационный контраст регистрируется при залегании водоносных слоев на меньших глубинах (см. рис. 18).

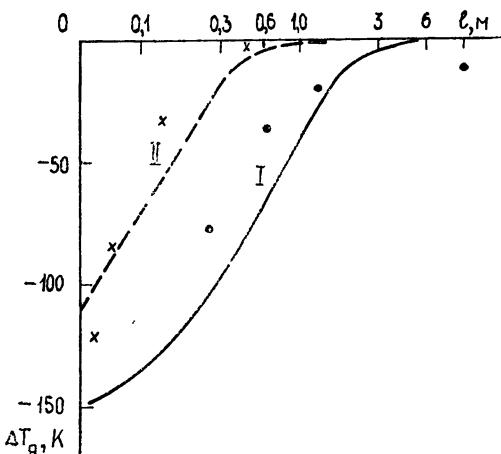


Рис. 18. Зависимость радиояркостного контраста на волне 30 см от глубины залегания уровня грунтовых вод (данные ИРЭ АН СССР);

I — песчаный грунт (сплошная линия—расчет, точки—эксперимент), II—глинистый грунт (штриховая линия—расчет, крестики—эксперимент);
1 — расчет, 2 — эксперимент.

VI. РАСТИТЕЛЬНЫЕ ПОКРОВЫ

VI.1. Биометрические и электрофизические показатели растительных покровов

Растительные покровы характеризуются содержанием биомассы на единицу площади, относительным содержанием влаги в клетчатке, степенью покрытия площади, высотой и диаметром стволов растений и другими показателями. Примерные биометрические показатели типовых сельскохозяйственных культур по данным [69] представлены в табл. 2.

Таблица 2

Биометрические показатели культурных растений

Виды растений	Вес, g/cm^2	Высота, см	Степень покрытия, %	Содержание влаги, %	Число стеблей, cm^{-2}	Сечение стебля, cm^2
1. Травяной покров, клевер	0,8—0,16	16—18	90—100	85	0,6—1,5	$8 \cdot 10^{-3} — 16 \cdot 10^{-2}$
2. Сахарная свекла	—	55	95	—	0,02	—
3. Пшеница	0,25	110	25	36	0,04	0,09

Эффективная диэлектрическая проницаемость растительного покрова может быть оценена по формулам теории двухкомпонентных смесей (смесь клетчатки и воздуха) [70]:

$$\epsilon_{kp} = \frac{\epsilon_p (1 + pu) + u (1 - p)}{\epsilon_p (1 - p) + p + u}, \quad (VI.1)$$

где $10 < u < 20$ — коэффициент, зависящий от формы, p — коэффициент заполнения, $\epsilon_p \approx W \epsilon_W$ — диэлектрическая проницаемость растительной массы, зависящая, главным образом, от относительного содержания влаги W .

Согласно данным табл. 2 величина объемного заполнения среды растительной массы составляет $10^{-2} — 10^{-3}$ при относительном содержании влаги в клетчатке 30 — 90 %.

В указанных условиях действительное значение эффективной диэлектрической проницаемости растительных покровов находится в интервале 1,1 — 1,5. Величина угла потерь составляет 10^{-2} — $5 \cdot 10^{-1}$.

VI.2. Радиационные модели растительных покровов

Эффекты рассеяния и поглощения радиоволн в растительном покрове могут быть описаны моделями, учитывающими взаимодействие радиоволн с совокупностью элементов растительности. В качестве моделей растительного покрова используются модели сплошной среды (когда расстояния между рассеивающими элементами можно полагать малыми по сравнению с длиной волны) и модели в виде набора рассеивателей при расстояниях между рассеивающими элементами, превышающих длину волны.

Представление растительного покрова в виде сплошной двухкомпонентной среды с диэлектрической проницаемостью, определяемой (VI.1), позволяет оценить величину погонного поглощения и интенсивность отражения в зеркальном направлении. Интенсивность обратного рассеяния, определяющего удельное сечение рассеяния, зависит, главным образом, от степени шероховатости верхней границы.

Модель растительного покрова в виде набора рассеивателей со значениями сечения рассеяния σ_p и поглощения, σ_n , позволяет представить результирующее поле путем некогерентного (или частично когерентного) суммирования парциальных рассеянных полей.

Размеры элементов растений соизмеримы с длиной волны, и расчеты сечений рассеяния и поглощения должны производиться на основе дифракционных моделей, учитывающих форму и размер элемента (так, например, используются модели в виде диэлектрических цилиндров, пластин и др.) [70, 71].

При учете эффектов однократного* некогерентного рассеяния среднее значение коэффициента рассеяния определяется в виде

$$\bar{\sigma}_0 = \overline{\Sigma \sigma_{pi} N_{ti}} = \bar{\sigma}_p \bar{N}_t, \quad (\text{VI.2})$$

где σ_{pi} — сечение рассеяния элемента i -й формы, $\bar{\sigma}_p$ — средневзвешенное значение сечения рассеяния элементов, N_{ti} — число элементов i -й формы в рассеивающем объеме, \bar{N}_t — среднее число элементов в единичном рассеивающем объеме**.

Согласно (VI.2) интенсивность обратного рассеяния зависит от биометрических показателей растительного покрова и величины единичного рассеивающего объема.

Поле обратного рассеяния для участков растительных покровов, слой которых является в выбранном участке СВЧ диапазона полупрозрачным, формируется за счет наложения компоненты, рассеянной грунтом, и компоненты, вызванной рассеянием на множестве элементов растений.

Двухкомпонентная модель позволяет достаточно полно представить количественные соотношения процесса рассеяния радиоволн сантиметрового и дециметрового диапазона для участков с зерновыми и корнеплодными культурами.

Так, например, для участков с зерновыми культурами в диапазоне углов вблизи вертикали основной вклад обусловливается составляющей поля рассеяния от грунта; для скользящих направлений преобладает

* Оценка применимости приближения однократного рассеяния определяется величиной вероятности выживания кванта, зависящей от величины отношения σ_p/σ_n .

** Единичный рассеивающий объем представляет цилиндр с основанием единичной площади и глубиной, равной грубине скин-слоя.

составляющая поля рассеяния, зависящая от биометрических показателей растительного покрова.

VI.3. Экспериментальные исследования

VI.3.1. Радиолокационные наблюдения эхо-сигналов от растительных покровов характеризуются наличием интенсивных замираний интерференционного происхождения.

Диаграмма обратного рассеяния радиоволн от сельскохозяйственных полей характеризуется медленным снижением при отклонении от направления зеркального отражения. Измеренные значения коэффициента рассеяния находятся в интервале 0,3—0,01 [73, 74].

Спектральные зависимости интенсивности обратного рассеяния для культурных ландшафтов в сантиметровом диапазоне имеют слабо выраженный характер [69, 73, 74]. Наблюдаются заметное различие рассеивающей способности и поляризационных характеристик рассеяния ландшафтов со злаковыми и корнеплодными культурами [75] и регулярные сезонные вариации коэффициента рассеяния [75].

Обнаружены зависимости интенсивности рассеяния от количества зеленой массы [166] (характер зависимости различается для злаковых и корнеплодных культур (см. рис. 19))*. Рисунок 19

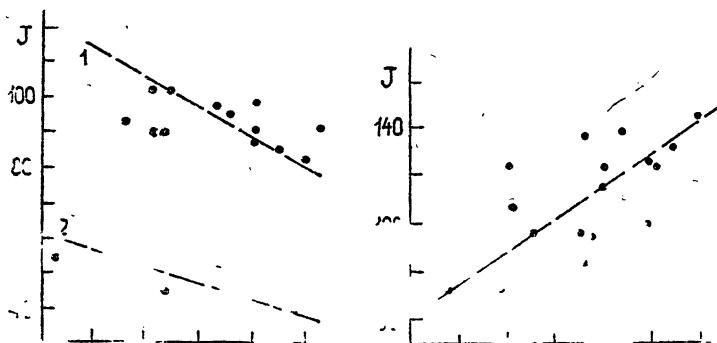


Рис. 19. а) Экспериментальные зависимости интенсивности рассеяния (волна около 2 см) от величины зеленой массы для полей яровой пшеницы (1—угол скольжения луча 13—16°; 2—угол скольжения 22—24°); б) зависимости интенсивности рассеяния (волна около 2 см) от густоты корней сахарной свеклы (угол скольжения 17—26°) [166].

Методом оценки интенсивности эхо-сигналов при перемещении углкового отражателя внутри растительного покрова получены (для $\lambda = 3$ см) данные о величине погонного поглощения радиоволн [75]. Измеренные значения составляют 6 дБ/м для пшеницы, 12 дБ/м для всходов овса, около 15 дБ/м для всходов картофеля.

VI.3.2. Исследования сезонных вариаций коэффициента рассеяния лиственного леса показывают снижение рассеивающей способности леса в летние месяцы при развитии лиственного покрова.

Указанное уменьшение коэффициента рассеяния связано, по-видимому, с уменьшением эффективной толщины отражающего слоя за счет возрастания потерь в лиственной массе.

VI.3.3. Интенсивность радиотеплового излучения растительных покровов формируется наложением потоков излучения грунта, ослаблен-

* На горизонтальной поляризации наблюдается снижение интенсивности по мере роста и созревания злаковых культур.

ного при распространении в слое растительности, и собственного излучения элементов растений.

В местах загорания растительных покровов интенсивность радиотеплового излучения участка увеличивается так, что радиояркостная температура повышается до сотен градусов Кельвина.

В случае верховых пожаров увеличение интенсивности излучения возникает за счет излучения нагретых аэрозольных частиц пламени [78] и элементов растений.

В случае низовых пожаров добавляется компонента излучения нагретого грунта. Весьма большие приращения радиояркостных температур наблюдались на участках возгорания торфяных болот и штабелей на торфоразработках (см. рис. 20) [79].

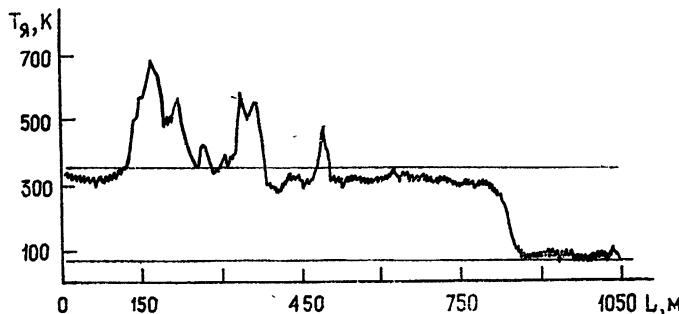


Рис. 20. Вариации радиояркостной температуры в районе пожара на торфяном болоте (сентябрь 1972) [79].

При наблюдениях радиотеплового излучения штабелей торфа зафиксировано увеличение интенсивности излучения за счет нагрева внутренних экзотермических реакций при отсутствии видимых признаков горения [79].

Слабое поглощение радиоволн сантиметрового диапазона в дымовых образованиях и гидрометеоритах позволяет производить обнаружение очагов возгорания в условиях отсутствия видимости.

VII. РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

VII.1. Геологическая интерпретация радиолокационных изображений поверхности Земли

Зависимость параметров матрицы рассеяния радиоволн от характеристик рельефа, электрофизических параметров грунта и степени шероховатости определяет возможности геологической интерпретации радиолокационных изображений [80, 81, 91].

На радиолокационных изображениях местности выделяются рельефные детали и структурные образования, связанные с дислокациями материальных платформ [81].

При наблюдениях на углах 50 — 70° от вертикали четкость выделения рельефных деталей улучшается благодаря влиянию эффектов затенения, показатели интенсивности обратного рассеяния позволяют выявить особенности растительного покрова.

Радиолокационные изображения прибрежных областей имеют особенности в зонах, закрываемых водой во время приливов и штормовых явлений [83, 84, 90]. Детали рельефных неоднородностей четко прослеживаются при наличии снежного покрова.

Структурные детали на радиолокационных изображениях (число линеаментных образований на единицу площади) используются для характеристики сейсмической активности региона [85].

Возможности структурно-геологической интерпретации радиотепловых изображений земной поверхности обсуждаются в [82] (см. также разд. 5). Так, например, показатели дисперсности и пористости почв оцениваются по вариациям степени увлажнения.

VII.2. Подповерхностное зондирование

Геологические объекты (линзы грунтовых вод, рудные тела и другие), находящиеся на декаметровых и гектаметровых глубинах, являются мишениями, создающими отражение электромагнитной энергии при импульсном подповерхностном зондировании, с помощью приборов, расположенных на поверхности Земли и на летательных аппаратах.

В условиях умеренного поглощения в верхних слоях осадочных пород интенсивность сигналов, отраженных подповерхностными неоднородностями, оказывается достаточной для обнаружения геологических объектов.

Плотность потока энергии, отраженного от подповерхностного слоя Π_9 в условиях плоскослоистой аппроксимации определяется в виде

$$\Pi_9 = \Pi R_{23} (1 - R_{12})^2 e^{-2aH}, \quad (\text{VII.1})$$

где Π — плотность потока падающей энергии, R_{23} — коэффициент отражения от неоднородности, R_{12} — коэффициент отражения на поверхности, H — глубина залегания отражающего слоя.

При достаточном энергетическом потенциале зондирующей установки оказывается возможным наблюдение эхо-сигналов от объектов, глубина залегания которых в несколько раз превышает глубину скин-слоя*.

Сигналы подповерхностного зондирования должны иметь широкую полосу, обеспечивающую высокое разрешение во времени запаздывания, в диапазоне сравнительно длинных волн (декаметровый участок).

Условие максимальной широкополосности реализуется при многочастотном излучении в форме синтезированных видеоимпульсных сигналов. Способы формирования видеоимпульсных сигналов рассмотрены в [86].

Расчетные оценки по (VII.1) показывают, что при энергетическом потенциале установки более 120 дБ** возможно обнаружение водоносных слоев на глубинах до 100 \div 200 м в сухих песчаных грунтах и на глубинах до 30 \div 50 м для песчано-глинистых грунтов.

Экспериментальная проверка возможности обнаружения грунтовых вод при импульсном зондировании в УКВ диапазоне с летательного аппарата показала, что при средней мощности передатчика около 0,1 Вт регистрируются эхо-сигналы при глубине залегания грунтовых вод около 30 м [87].

VII.3. Регистрация геотермальной деятельности

Измерение спектра интенсивности радиотеплового излучения участков земной поверхности позволяет оценить характеристики температурных полей, обусловленных геотермальной деятельностью.

* Глубина скин-слоя в случае сухого песка (при влажности грунта до 5%) для СВЧ диапазона составляет несколько длин волн.

** Энергетический потенциал характеризуется отношением мощности передающего устройства к уровню шумов приемника.

Анализ связей спектров радиотеплового излучения с интенсивностью глубинных потоков тепла впервые проведен Троицким в модели горячих недр Луны [88].

Тепловые потоки, идущие из недр планеты, обусловленные процессами радиоактивного распада и экзотермическими реакциями, вызывают появление неравномерных температурных полей. Вертикальный градиент температурного поля $\frac{dT}{dH}$ определяется интенсивностью теплового потока Q и коэффициентом теплопроводности слоя k_T :

$$\frac{dT}{dH} = - \frac{Q}{k_T}. \quad (\text{VII.2})$$

Радиус «теплового пятна» на поверхности земли определяется глубиной теплового источника.

Получение оценки геотермального градиента может производиться по данным регистрации радиояркостных температур на нескольких волнах, для которых глубины проникновения $l_s(\lambda)$ заметно отличаются между собой и превышают глубину проникновения суточных температурных волн.

Разница радиояркостных температур на волнах λ_1 и λ_2 в этом случае оказывается пропорциональной величине температурного градиента:

$$\Delta T_s \approx \kappa \frac{dT}{dH} \Delta l_s. \quad (\text{VII.3})$$

Чувствительность СВЧ радиометрического метода составляет $\frac{dT}{dH} \sim 0,1 \div 1 \text{ град/м}$, т. е. позволяет обнаруживать источники, величина теплового потока которых примерно на порядок превышает среднее значение геотермального потока.

Предварительные эксперименты в районе Камчатки показали возможность СВЧ радиометрического обнаружения термальных источников в зонах вулканической деятельности [89].

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные к настоящему времени представления о СВЧ радиационных свойствах природных образований получили применения при дистанционном зондировании в геофизических исследованиях и для решения прикладных задач.

Значительные возможности совершенствования дистанционных наблюдений связаны с комплексным использованием оптического, инфракрасного и радиоволнового диапазонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Шулейкин, Физика моря, изд. АН СССР, М., 1963.
2. А. Нельсон-Смит, Загрязнение моря нефтью, Гидрометеоиздат, Л., 1973.
3. Г. Н. Смирнов, Океанология, изд. Высшая школа, М., 1974.
4. H. U. Roll, Physics of the Marine Atmosphere, Academ. Press, N. Y., 1965.
5. E. C. La Fond and P. V. Bhavanagayana, J. Mar. Biol. Ass. India, 1, 288 (1959),
6. E. C. Monahan, J. Phys. Oceanography, 1, 139 (1971).
7. T. Abe, Papers in Meteorol. and Geophys., 14, № 2, 93 (1963).
8. T. Abe and A. Watanabe, Papers in Meteorol. and Geophys., 16, № 2, 77 (1965).

9. D. B. Ross, V. J. Cardone and J. W. Sonaway, IEEE Trans. Geosci. Electron, GE-8, № 4, 326 (1970).
10. D. C. Blanchard, J. Atm. Sci., 28, 645 (1971).
11. R. Moore and W. Pierson, J. Hydronaut., 5, № 2, 52 (1971).
12. О. Филиппс, Динамика верхнего слоя океана, изд. Мир, М., 1969.
13. С. А. Китайгородский, Физика взаимодействия атмосферы и океана, Гидрометеоиздат, Л., 1970.
14. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, IEEE Trans, AP-16, № 5, 560 (1968).
15. С. Зубкович, Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1968.
16. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние радиоволн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
17. А. Е. Башаринов, А. С. Гурвич, С. Т. Егоров, Радиоизлучение Земли как планеты, изд. Наука, М., 1974.
18. А. А. Гарнакерян, А. С. Сосунов, В. Т. Лобач и др., в сб. Неконтактные методы измерения океанографических параметров, Гидрометеоиздат, 1975, стр. 59.
19. И. М. Фукс, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 11, № 10, 1038 (1975).
20. D. Weissman, IEEE Trans, AP-21, 649 (1973).
21. А. И. Калмыков, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1095 (1966).
22. C. Swift and W. Jones, IEEE Internat. Conv., 74, 34/4 (1974).
23. Б. Л. Замараев, А. И. Калмыков, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 5, № 1 (1969).
24. А. Д. Розенберг, И. Е. Островский и др., Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 9, № 12, 1323 (1973).
25. А. А. Загородников, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 10, № 7, 791 (1974).
26. А. А. Гарнакерян, А. С. Сосунов, В. В. Тимонов, XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн (Тезисы докладов), ч. III, изд. Казанского университета, 1975, стр. 154.
27. D. Weissman, C. T. Swift a. o., Proc. of URSI meet. on microwave scat. emiss. from the Earth, Inst. Appl. Phys., Bern, 1974.
28. J. McGaugh, L. Miller, a. o., Proc. IX Internat. Symp. Rem. Sens. Envir, App-Arbor, 1974.
29. И. А. Лейкин, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг и др., Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 3, 346 (1975).
30. А. М. Шутко, Труды Главн. геофиз. обсерватории, вып. 222, 19 (1968).
31. В. В. Мелентьев, Ю. И. Рабинович, Труды Главн. геофиз. обсерватории, вып. 295, 79 (1973).
32. В. В. Богородский, А. В. Гусев, Г. П. Хохлов, Физика пресноводного льда, Гидрометеоиздат, Л., 1971.
33. В. И. Розенберг, Рассеяние и ослабление электромагнитного излучения атмосферными частицами, Гидрометеоиздат, Л., 1972.
34. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1974.
35. А. Е. Башаринов, Л. Т. Тучков, В. М. Поляков, Н. И. Ананов, Изменение радиотепловых и плазменных излучений в СВЧ диапазоне, изд. Сов. радио, М., 1968.
36. C. Haggison, Geophysics, 35, № 6, 1099 (1970).
37. А. С. Гурвич, В. И. Калинин, Д. Т. Матвеев, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 8, № 12, 1247 (1973).
38. R. Vickers a. o., Advaneed concepts and techniques in the study of snow and ice resourcs, Nat. Acad. of Science, Washington, 1974.
39. М. И. Финкельштейн, В. Т. Глущев, А. Н. Петров, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, 1323 (1971).
40. В. Т. Артемов и др., в сб. Исследования природной среды космическими средствами, Геоботаника, почвоведение, гидрология, изд. АН СССР, М., 1974, стр. 79.
41. А. Е. Башаринов, М. А. Колесов, А. А. Курская, Л. Т. Тучков, Труды Главн. геофиз. обсерватории, вып. 222, 195 (1968).
42. A. England, Radio Sci., 9, 447 (1974).
43. М. И. Финкельштейн, В. А. Кутев, Радиотехника и электроника, 17, № 10, 2107 (1972).
44. М. И. Финкельштейн, Радиотехника и электроника, 19, № 3, 528 (1974).
45. P. Gloersen a. o., Proc. of URSI spec. meet., Inst. Appl. Phys., Bern, 1974, p. 101.
46. А. Е. Башаринов, А. А. Курская, в сб. Исследование природной среды космическими средствами, Геоботаника, почвоведение, геология, изд. АН СССР, М., 1974, стр. 79.
47. M. Tiagi a. o., Proc. of URSI spec. meet., Inst. Appl. Phys., Bern, 1974, p. 95.

48. S. Parashar and A. Biggs, Proc. IX Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1974.
49. В. Б. Богородский, Физические методы исследования ледников, Гидрометеоиздат, Л., 1968.
50. В. Б. Богородский, Радиозондирование льда, Гидрометеоиздат, Л., 1975.
51. C. Harrison, Radio propagation effects in glaciers (dissert. of doct. of philosoph.), Cambridge, 1972.
52. P. Gloersen a. o., J. Geophys. Res., 78, № 18, 3564 (1973).
53. R. Vickers and G. Rose, Proc. VIII Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1972, p. 261.
54. M. Meier and A. Edgerton, Proc. VII Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1971, p. 1188.
55. M. Meier, Proc. Internat. Symp. on Role snow and Ice in Hydrology, Unesco/WMO, Banff, Alberta, 1972, p. 739.
56. J. B. Hasted, D. M. Ritson, C. H. Collie, J. Chem. Phys., 61, № 1 (1948).
57. J. B. Hasted, Progress in Dielectrics, 3, 103 (1961).
58. P. S. Ray, Appl. Opt., 11, № 8, 1836 (1972).
59. В. И. Розенберг, Рассеяние и ослабление электромагнитного излучения атмосферными частицами, Гидрометеоиздат, Л., 1972.
60. Ю. И. Рабинович, В. В. Мелентьев, Труды ГГО, вып. 235, 78 (1970).
61. В. Ю. Райзер, Е. А. Шарков, В. С. Эткин, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 11, № 6, 652 (1975).
62. F. E. Harris and C. T. O'Konski, J. Phys. Chem., 61, № 3 (1957).
63. J. Barthell, F. Schmithals und H. Behret, Zeitschrift für Physikalische Chemie, 71, 115 (1970).
64. J. B. Hasted, G. W. Roderick, J. Chem. Phys., 29, № 1, 17 (1958).
65. N. W. Guinard, Proc. VII Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1971, p. 1005.
66. J. P. Hollinger, Proc. IX Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., 3, Ann Arbor, 1974, p. 1761.
67. H. Gray a. o., Proc. VII Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., 3, Ann Arbor, 1971, p. 1827.
68. W. Ho and W. Hall, J. Geophys. Res., 78, 27 (1973).
69. W. Peake, IRE Nat. Conv. Rec., 1, 27 (1959).
70. E. Attema and J. Kuilenburg, Proc. of URSI spec. meet., Inst. Appl. Phys. Bern, 1974, p. 177.
71. Г. Ван-дер-Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
72. F. Ulaby, IEEE Trans., AP-23, № 1 (1975).
73. S. Morain and O. Simonett, Proc. IV Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1966, p. 605.
74. G. de Loog a. o., IEEE Trans., GE-12, 70 (1974).
75. B. Drake and R. Shuman, Proc. IX Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1974, p. 219.
76. R. Haralick a. o., Rem. Sens. Envir., 1, 131 (1970).
77. Б. А. Редькин, В. В. Ключко, Ж. Г. Очерт, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1172 (1973).
78. Г. П. Грудинская, Е. В. Богомолова, XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн (Тезисы докладов), изд. Наука, М., 1972, стр. 131.
79. В. Т. Артемов и др., в сб. Исследование природной среды космическими средствами, Геоботаника, почвоведение, гидрология, изд. АН СССР, 1974, стр. 75.
80. С. И. Стрельников, Сов. геология, 3 (1972).
81. В. Б. Комаров, В. А. Старостин, Б. П. Нярво, в сб. Исследование природной среды космическими средствами, Геология, геоморфология, изд. АН СССР, М., 1973, стр. 111.
82. Г. Я. Черняк, О. М. Ясковский, Радиоволновые исследования в гидрологии и инженерной геологии, изд. Недра, М., 1973.
83. L. Dellwig and R. Mooge, J. Geophys. Res., 71, 3597 (1966).
84. P. Mur, C. Toman, Зарубежная радиоэлектроника, 2 (1972).
85. D. Kedar a. o., Proc. VII Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1973, p. 1195.
86. C. Bergtram a. o., Proc. VII Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., Ann Arbor, 1973, p. 241.
87. М. И. Финкельштейн, В. А. Кутев, О. П. Власов, Докл. АН СССР, 219, № 6, 1427 (1974).
88. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 40, № 6 (1963).
89. А. Е. Башаринов, Л. Ф. Бородин и др., XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн (Тезисы докладов), ч III, изд. Казанского университета, 1975, стр. 116.
90. Remote Sensing for Environmental Sciences, Ed. E. Schanda, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

91. H. Mac Donald, J. Lewis a. o., *Geol. Sos. Am. Bull.*, **82**, 345 (1971).
92. J. D. Doppelman, *J. Geophys. Res.*, **75**, № 3, 696 (1970).
93. Д. Т. Матвеев, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, **7**, № 10, 1070 (1971).
94. P. W. Rosenkranz and D. H. Staelin, *J. Geophys. Res.*, **77**, № 33, 652 (1972).
95. S. Roberts, A. Von Hippel, *J. Appl. Phys.*, **17**, № 7, 610 (1946).
96. H. Yamamoto and S. Ohkawa, *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.*, **MT-19**, № 10, 827 (1971).
97. J. Bach and H. Gupta, *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.*, **22**, № 1, 52 (1974).
98. А. А. Демьянов, В. В. Мериакри, Журнал прикладной спектроскопии, **13**, вып. 4, 639 (1970).
99. A. T. Edgerton, D. Meeks and D. Williams, *J. Hydronaut.*, **7**, № 1, 35 (1973).
100. А. А. Глотов, Д. Т. Матвеев, В. Г. Мировский и др., Метеорология и гидрология, **6**, 90 (1975).
101. С. В. Переслегин, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, **3**, № 1, 47 (1967).
102. V. Siroonian, *J. Geophys. Res.*, **73**, № 14, 4481 (1968).
103. Ю. И. Рабинович, В. В. Мелентьев, Труды ГГО, вып. 235, 124 (1970).
104. Л. М. Митник, Изв. АН СССР, серия Водные ресурсы, **2**, 180 (1974).
105. В. В. Мелентьев, Ю. И. Рабинович, Труды ГГО, вып. 291, 9 (1972).
106. А. С. Гурвич, С. Т. Егоров, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, **2**, № 3 (1966).
107. Д. Т. Матвеев, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, **4**, № 5, 508 (1968).
108. J. D. Doppelman, R. A. Mennella and D. E. Evans, *J. Geophys. Res.*, **75**, № 30, 5909 (1970).
109. J. F. Paris, Proc. VIII Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., **1**, Ann Arbor, 1972, p. 665.
110. G. F. Williams, *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, **GE-9**, 221 (1971).
111. W. Nordberg, J. Conaway, D. B. Ross and T. Wilheit, *J. Atm. Sci.*, **28**, № 4, 429 (1971).
112. B. Au, J. Heppeley a. o., Proc. IX Internat. Symp. Rem. Sens. Envir., **3**, Ann Arbor, 1974, p. 1763.
113. P. Gloersen, W. J. Webster, Jr., T. T. Wilheit a. o., Proc. of URSI Spec. Meet. on Microwave Scat. Emiss. from the Earth, Bern, 1974, p. 11.
114. M. Van Melle, H. Wang and W. Hall, *J. Geophys. Res.*, **78**, № 6, 969 (1973).
115. J. P. Hollinger, R. A. Mennella, *Science*, **181**, 4094, 54 (1973).
116. H. Krishen, *J. Geophys. Res.*, **78**, № 12, 1952 (1973).
117. A. Stogrin, *IEEE Trans. Ant. Prop.*, **AP-1S**, 278, 2 (1967).
118. К. С. Шифрин, С. Н. Ионина, Труды ГГО, вып. 222, 22 (1968).
119. А. М. Шутко, Труды ГМЦ, вып. 50, 103 (1969).
120. Е. М. Шульгина, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, **8**, № 7, 773 (1972).
121. Л. М. Марцинкевич, В. В. Мелентьев, Труды ГГО, вып. 291, 24 (1972).
122. F. J. Ulaby and A. K. Fung, SWIEEECO Record Techn. Papers, Dallas, 1970, p. 436.
123. S. T. Wu, A. K. Fung, CRES Univ. Kansas. Techn. Report, **186**, 3 (1971).
124. J. P. Hollinger, *IEEE Trans. Geosci. Electron.*, **GE-9**, № 3, 165 (1971).
125. А. К. Городецкий, Д. Т. Матвеев, А. П. Орлов, в сб. Исследования природной среды космическими средствами, Геоботаника, почвоведение, гидрология **3**, 90, изд. АН СССР, М., 1974.
126. В. В. Мелентьев, Ю. И. Рабинович, Г. Г. Щукин, Труды ГГО, вып. 291, 34 (1972).
127. W. Nordberg, J. Conaway and P. Thaddeus, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **95**, 404, 408 (1969).
128. Л. М. Марцинкевич, Д. Т. Матвеев, Метеорология и гидрология, **8**, 50 (1971).
129. G. F. Williams, Jr., *J. Geophys. Res.*, **74**, № 18, 4591 (1969).
130. J. A. Saxton, J. A. Lane, *Wireless Engineer*, **29**, 269 (1952).
131. E. J. Grant, T. J. Buchanan and H. F. Cook, *J. Chem. Phys.*, **26**, 156 (1957).
132. A. Stogryn, *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.*, **MTT-19**, 733 (1971).
133. Ch. Burrows and S. S. Attwood, *Radio Wave Propagation*, N. Y., 1949.
134. А. А. Роде, В. Н. Смирнов, Почвоведение, изд. Высшая школа, М., 1972.
135. M. J. Campbell and J. Ulricks, *J. Geophys. Res.*, **74**, № 25, 5867 (1969).

136. Ю. И. Лещанский, Г. Н. Лебедева, В. Д. Шумилин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 562 (1971).
137. R. Hoekstra and A. Delapre, J. Geophys. Res., 79, № 11, 1699 (1974).
138. Н. П. Богородицкий и др., Теория диэлектриков, изд. Энергия, М., 1965.
139. G. P. De Loog, Dielectric Properties of Heterogeneous Mixtures, Ph. D. Thesis, Univ. of Leiden, Leiden, 1956.
140. J. A. Reynolds and J. M. Hough, Proc. Phys. Soc., 70B, 452, 769 (1957).
141. G. Poe, A. T. Edgerton, Proc. IV Ann. Earth Res. Progr., 4, NASA—MSC, Houston, 93/1—93/23, 1972.
142. J. R. Lundien, Proc. of URSI Spec. Meet. on Microwave Scat. Emiss. from the Earth, Bern, 1974, p. 197.
143. В. В. Богородский и др., Изв. АН СССР, серия Физика Земли, 7, 119 (1973).
144. В. В. Богородский и др., Изв. АН СССР, серия Физика Земли, 6, 86 (1971).
145. В. Г. Глушнев, Б. Д. Слуцкер, М. И. Финкельштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 19, № 1, 59 (1976).
146. А. Е. Башаринов, А. М. Шутко, Метеорология и гидрология, 9, 17 (1971).
147. А. Е. Попов, Е. А. Шарков, В. С. Эткин, Метеорология и гидрология, 10 (1974).
148. Е. М. Шульгина, Труды ГГО, вып. 295, 98 (1973).
149. С. Я. Брауде, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 5, 691 (1959).
150. D. G. Rea, N. Hetherington and R. Mifflin, J. Geophys. Res., 73, 22, 7009 (1968).
151. В. В. Мелентьев, Ю. И. Рабинович, Труды ГГО, вып. 291, № 14 (1972).
152. К. Я. Кондратьев, В. В. Мелентьев, Ю. И. Рабинович, Е. М. Шульгина, Докл. АН СССР, 208, № 2, 342 (1973).
153. А. Е. Башаринов, Л. Ф. Бородин, А. М. Шутко, в сб. Исследование природной среды космическими средствами, Геоботаника, почвоведение, геология, 3, 81, изд. АН СССР, М., 1974.
154. T. Schmugge, P. Gloersen, T. Wilheit and F. Geiger, J. Geophys. Res., 79, № 2 (1974).
155. J. R. Eagleman and F. T. Ulaby, American Astronomical Soc. Meet., Los Angeles, 1974.
156. R. W. Newton, S. L. Lee, J. W. Rouse Jr. and J. F. Paris, Proc. IX Internat. Symp. Rem. Sens. Environ., 1, Ann Arbor, 1974, p. 725.
157. R. K. Moore, F. Dickey, C. King and J. Holtzman, GRES Techn. Memorandum, 177—33 (1972).
158. F. T. Ulaby, IEEE Trans. Ant. Prop., AP-22, 257 (1974).
159. T. T. Wilheit, Jr., Rep. X-911-75-66, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, 1975.
160. Ю. И. Рабинович, В. В. Мелентьев, Способ измерения излучательной способности естественных поверхностей Земли, Авт. свид. № 268518, 1968.
161. D. H. Staelin, Proc. IEEE, 54, 4 (1969).
162. К. Я. Кондратьев, Метеорология и гидрология, 4 (1969).
163. K. Tomiyasu, TIIИЭР, 62 № 1, 107 (1974).
164. D. M. Anderson and A. R. Tice, Soil Sci. Soc. Am. Proc., 35, 47 (1971).
165. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 6, 1057 (1962).
166. A. E. Basharinow, E. N. Zotowa and M. I. Naumov, Rep. IAF-76-052 on XXVII Cong. Internat. Astronaut, Fed. Anaheim, 1976.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
12 июля 1976 г.

УДК 523.164

О ФОРМЕ ИМПУЛЬСА ПУЛЬСАРА, РАССЕЯННОГО В МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЕ

B. E. Осташов, B. I. Шишов

Показано, что первоначально узкий импульс излучения, рассеянного в случайно-неоднородной среде со степенным спектром турбулентности, имеет хвостовую часть степенного вида, в то время как при рассеянии излучения в среде с одним характерным масштабом неоднородностей хвостовая часть импульса имеет экспоненциальный вид.

Предлагается провести измерения формы хвостовой части импульса пульсаров для определения формы спектра турбулентности межзвездной среды.

Форма первоначально узкого импульса излучения, рассеянного в случайно-неоднородной среде, изучалась в работах [1-4]. В этих работах было показано, что форма переднего фронта импульса сильно зависит от распределения среды между источником и наблюдателем. Задний фронт имеет экспоненциальную форму независимо от распределения среды по лучу зрения, если среда имеет один характерный масштаб неоднородностей. Вместе с тем экспериментально полученная форма импульса пульсара PSR 0833 показывает более слабое падение интенсивности на заднем фронте, чем это предсказывалось выше упомянутой теорией [4].

Ниже мы рассмотрим форму заднего фронта импульса, рассеянного в среде со степенным спектром турбулентности. Вначале мы рассмотрим модель фазового экрана, затем полученные результаты обобщим на случай протяженной среды.

1. МОДЕЛЬ ФАЗОВОГО ЭКРАНА

Модель фазового экрана позволяет просто и вместе с тем наглядно вычислить форму импульса, рассеянного на экране. Пусть узкий импульс излучения с плоским фронтом рассеивается на геометрически тонком слое среды (фазовом экране). Тогда распределение рассеянного излучения по направлениям θ на выходе из слоя можно охарактеризовать интенсивностью $I(\theta)$. Задержка приходящего излучения в точку наблюдения из направления θ равна

$$t = \frac{z\theta^2}{2c}, \quad (1)$$

где z — расстояние от наблюдателя до экрана, c — скорость света. Поскольку в каждый момент времени в данную точку приема приходит излучение только из направлений $|\theta| = \theta$, то интенсивность рассеянного импульса в точке приема $P(t)$ в зависимости от времени t связана с распределением интенсивности по направлениям соотношением

$$P(t) \sim I\left(|\theta| = \sqrt{\frac{2tc}{z}}\right) \quad (t > 0). \quad (2)$$

Распределение по направлениям излучения с единичным потоком после рассеяния определяется соотношением

$$I(\theta) = \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int \exp \left[-\frac{1}{2} D(u) \right] \exp (-ik\theta u) d^2 u, \quad (3)$$

где k — волновое число, u — пространственная координата, $D(u)$ — структурная функция флуктуаций фазы на выходе из слоя, связанная с пространственным спектром турбулентности $\Phi_{N_e}(q)$ соотношением [5, 6]

$$D(u) = A \lambda^2 \pi \Delta z \int [1 - \cos(uq)] \Phi_{N_e}(q_z = 0, q) d^2 q, \quad (4)$$

$$A = 5 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2,$$

где Δz — толщина фазового экрана, λ — длина волны, q — пространственная частота.

Если $D(u)$ представима в квадратичном виде (среда с одним характерным масштабом неоднородностей)

$$D(u) = (u/u_0)^2,$$

то $I(\theta)$ имеет гауссов вид, а $P(t)$ — экспоненциальный:

$$P(t) = 1/t_0 e^{-t/t_0}, \quad (5)$$

$$t_0 = \frac{z \theta_0^2}{c}, \quad \theta_0 = 1/ku_0.$$

Здесь u_0 — характерный масштаб флуктуаций поля, θ_0 — характерный угол рассеяния, ε — полная энергия в импульсе. Если $D(u)$ не имеет квадратичной формы, то форма импульса будет существенно иной.

Так если

$$D(u) = (u/u_0)^\alpha \quad (1 < \alpha < 2), \quad (6)$$

то $I(\theta)$ имеет асимптотику при больших θ ($\theta \gg 1/ku_0$):

$$I(\theta) \approx B(\alpha) (ku_0 \theta)^{-2-\alpha} (ku_0)^{-2},$$

$$B(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi^2} \Gamma^2(1 + \alpha/2) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad (7)$$

и соответственно при $t \gg t_0$:

$$P(t) = \varepsilon A(\alpha) \frac{1}{t_0} (t/t_0)^{-1-(\alpha/2)},$$

$$t_0 = z/2c(ku_0)^2. \quad (8)$$

Если $2-\alpha \rightarrow 0$ (но $2-\alpha > 0$), то форма импульса приближенно представима в виде

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t_0} \exp(-t/t_0), & 0 < t < 2t_0 \ln\left(\frac{2}{2-\alpha}\right) \\ \frac{2-\alpha}{2} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}, & t > 2t_0 \ln\left(\frac{2}{2-\alpha}\right) \end{cases}. \quad (9)$$

Тот факт, что асимптотическая форма импульса при больших t связана линейно со спектром турбулентности, есть не случайное совпадение. Действительно, мелкие неоднородности (с масштабом, много меньшим

u_0) рассеивают только малую долю энергии, но на большие углы. Крупные неоднородности не вносят заметного перераспределения энергии рассеянного излучения на больших углах. Поэтому рассеяние на большие углы можно описать в приближении Борна (однократное рассеяние), которое и устанавливает линейную связь между интенсивностью рассеянного излучения и спектром неоднородностей.

2. ПРОТЯЖЕННАЯ СРЕДА

Для изучения формы импульса излучения, рассеянного в протяженной среде, обратимся к уравнениям эволюции моментов поля. В соответствии с [8] средняя форма импульса связана с частотно-разнесенным вторым моментом $\Gamma(\Delta\nu)$ комплексной амплитуды поля $E(\nu)$:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \Gamma(\Delta\nu) \exp(i\Delta\nu t) d(\Delta\nu), \\ \Gamma(\Delta\nu) &= \langle E(\nu) E^*(\nu + \Delta\nu) \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь ν — частота, $\Delta\nu$ — разнос частот.

Уравнение эволюции второго момента $\Gamma(r, \eta, \Delta\nu)$ для сферической волны имеет вид [1, 7]

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial r} + D'(r\eta)\Gamma + \frac{i\delta}{kr^2}\Delta_\eta\Gamma = 0, \quad \Gamma|_{r=0} = 1; \quad (11)$$

$$\delta = \Delta\nu/2\nu, \quad (12)$$

где r — расстояние от источника, η — разнос угловых координат, Δ_η — поперечный лапласиан, $D'(r\eta)$ — градиент структурной функции флюктуаций фазы, связанный со спектром неоднородностей соотношением (4) без множителя Δz .

Уравнение (11) можно перевести в интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 + \int_0^r dr' \int G(r, r', \eta - \eta') \Gamma(r'\eta') D'(r'\eta') d^2\eta', \\ G(r, r', \eta - \eta') &= \frac{krr'}{4i\pi\delta(r - r')} \exp\left[-\frac{krr'(\eta - \eta')^2}{4i\delta(r - r')}\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Разложение Γ в итерационный ряд уравнения (13) есть разложение по кратности рассеяния. Как говорилось выше, применительно к фазовому экрану, для спектров степенного вида хвостовая часть импульса описывается в приближении однократного рассеяния. Большим значениям t соответствуют малые значения $\Delta\nu$. Мы остановимся на исследовании Γ при малых значениях $\Delta\nu$.

В приближении однократного рассеяния получаем из (13)

$$\Gamma = 1 + \int_0^r dr' \int G(r, r', \eta - \eta') D'(r'\eta') d^2\eta'. \quad (14)$$

Принимая $D'(r'\eta')$ в виде

$$(D'r'\eta') = \frac{1}{r_0} |r'\eta'| u_0^\alpha, \quad (15)$$

где r_0 — некоторое фиксированное расстояние, получаем для Γ при малых $\Delta\nu$

$$\Gamma \approx 1 + A'(\alpha) (i\Delta\nu/\Delta\nu_0)^{\alpha/2} r/r_0,$$

$$A'(\alpha) = \Gamma^3(1 + \alpha/2)/\Gamma(2 + \alpha), \quad \Delta v_0 = ck^2 u_0/2r. \quad (16)$$

Выражение (16) получено для случая статистически однородной среды. Во временной зависимости интенсивности хвостовую часть будет определять в основном член, пропорциональный $\Delta v^{a/2}$. Выполнив преобразование Фурье, получаем при $t \gg \Delta v_0^{-1}$

$$\begin{aligned} P(t) &\approx B(\alpha) (t/t_0)^{-\frac{\alpha}{2}-1} (r/r_0), \\ B(\alpha) &= \Gamma^4 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha+2}{4}\pi\right) / \Gamma(2+\alpha)\pi. \end{aligned} \quad (17)$$

При $\alpha \rightarrow 2$ $B(\alpha) = 1/6\pi$.

При $\alpha \rightarrow 2$ мы можем дать более полное описание импульса. Для этого представим $D'(r\eta)$ в виде

$$D(r\eta) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{r\eta}{u_0}\right)^2 - \frac{2-\alpha}{r_0} \left(\frac{r\eta}{u_0}\right)^2 \ln \left(\frac{r\eta}{u_0}\right). \quad (18)$$

Далее определим функцию Грина уравнения (11), в котором в качестве $D(r\eta)$ взято $D_0(r\eta) = \frac{1}{r_0}(r\eta/u_0)^2$, и получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Gamma(r, \eta, \Delta v) &= \Gamma_0(r, \eta, \Delta v) + \int_0^r dr' \int d^2\eta \tilde{G}(r, r', \eta, \eta') \times \\ &\times [D'(r'\eta') - D_0(r'\eta')] \Gamma(r', \eta', \Delta v), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Gamma_0(r, \eta, \Delta v)$ — решение уравнения (11) при $D' = D'_0$:

$$\Gamma_0(r, \eta, \Delta v) = \frac{\sqrt{4i(r'/r)} (\Delta v/\Delta v_0)^{1/2}}{\operatorname{sh} [\sqrt{4i(r'/r)} (\Delta v/\Delta v_0)^{1/2}]} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{\operatorname{th} [\sqrt{4i(r'/r)} (\Delta v/\Delta v_0)^{1/2}]} \right\}. \quad (20)$$

Выражение для $G(r', r, \eta, \eta', \Delta v)$ достаточно громоздко, и мы не будем его полностью выписывать. Выпишем только выражение для $G(r, r', \eta = 0, \eta', \Delta v)$, которое понадобится в дальнейшем,

$$\begin{aligned} G(r, r', \eta = 0, \eta', \Delta v) &= \frac{1}{2\pi c} \exp [-(\eta')^2/4c], \\ c &= \frac{(4i)^{3/2}}{[(x')^2 + 16]} \left(\frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} x'}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} x'} - \operatorname{th} x' \right), \\ x' &= \sqrt{4i} \frac{r'}{r} \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_0} \right)^{1/2}, \quad x = \sqrt{4i} \left(\frac{\Delta v}{\Delta v_0} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Разлагая (19) в итерационный ряд, получим в первом приближении по малому параметру $(2 - \alpha)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(r, \eta = 0, \Delta v) &= \Gamma_0(\eta = 0, \Delta v) + \int_0^r dr' \int d^2\eta' G(r, r', \eta = 0, \eta) \times \\ &\times [D'(r'\eta') - D'_0(r'\eta')] \Gamma_0(r', \eta'). \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение (22) совместно с (20) и (21) правильно описывает форму частотной корреляционной функции при всех существенных значениях Δv и, следовательно, дает нам правильную форму импульса при всех t .

Асимптотика (22) при малых Δv (большие t для $I(t)$) такая же, как и в случае (14).

Итак, для импульса, рассеянного в протяженной среде, имеем при $\alpha \rightarrow 2$

$$I(t) = \begin{cases} \frac{2-\alpha}{6\pi} \frac{r}{r_0} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2, & t > \frac{t_0 \ln \frac{24\pi^2}{2-\alpha}}{2\pi^2} \\ 4\pi \frac{r}{r_0} \exp \left(-\frac{2\pi^2 t}{t_0} \right), & t < \frac{t_0 \ln \frac{24\pi^2}{2-\alpha}}{2\pi^2} \end{cases} . \quad (23)$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, по форме задней части импульса мы можем определить тип спектра неоднородностей; является ли он степенным, или имеет характерную частоту перегиба (спектр с выделенным размером неоднородностей). Если спектр неоднородностей имеет степенной вид, то по форме заданного фронта импульса мы можем определить показатель степени спектра α , если α не слишком близко к 2. Если же $\alpha \rightarrow 2$, то показатель α определяется по времени перехода экспоненциального затухания в степенное.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство. Форма задней части импульса не зависит от распределения среды между источником и наблюдателем, а зависит только от формы спектра неоднородностей.

К настоящему времени наилучшие экспериментальные данные по форме импульса получены для пульсара CP 0833. В [4] была предпринята попытка описать эту форму с помощью модели спектра неоднородностей с одним выделенным масштабом при различных моделях распределения среды между наблюдателем и источником. Во всех случаях, рассмотренных в [4], теоретическая модель давала более быстрое падение интенсивности на хвосте импульса, чем это наблюдалось на эксперименте. Отсюда можно сделать вывод, что для объяснения хвостовой части импульса необходимо предположить степенной характер спектра неоднородностей со значением α , близким к 2. Здесь следует подчеркнуть, что этот вывод справедлив лишь для оболочки CP 0833, поскольку именно она дает основной вклад в рассеяние [4]. Для определения спектра неоднородностей межзвездной среды следует провести измерения формы импульса других пульсаров. Для таких измерений необходимо иметь отношение 'сигнал/шум порядка 100 в максимуме' интенсивности импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Л. М. Ерухимов, *Astrophys. Space Sci.*, 11, 351 (1971).
2. В. И. Шишов, Астрон. ж., 50, 941 (1973).
3. Л. М. Ерухимов, И. Г. Зариницына, П. И. Кирш, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 4, 573 (1973).
4. I. P. Williamson, *Month. Not. R. Astron. Soc.*, 166, 499 (1974).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1967.
6. В. И. Татарский, Распространение электромагнитных волн в турбулентной атмосфере, Физматгиз, М., 1967.
7. И. В. Чашей, В. И. Шишов, Астрон. ж., 53, 26 (1976).
8. В. А. Алимов, Л. Е. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 2, 268 (1968).

ON THE SHAPE OF A PULSAR PULSE SCATTERED IN THE
INTERSTELLAR MEDIUM

V. E. Ostashov, V. I. Shishov

It is shown that the initially narrow pulse of emission scattered in a randomly inhomogeneous medium with the power turbulence spectrum has the power-form tail part while in the case of emission scattering in the medium with one characteristic scale of inhomogeneities the tail part of the pulse is exponential.

Measurements of the shape of the tail part of the pulse are suggested to be made in order to define the form of the turbulence spectrum of the interstellar medium

УДК 621.317.762

О КООРДИНАТНОЙ ТОЧНОСТИ МНОГОЧАСТОТНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

П. А. Фридман

Рассматривается влияние аддитивных помех на точность измерения угловой координаты, вычисленной по задержке между сигналами, регистрируемыми радиоинтерферометром с многоканальным приемом. Учет аномальных ошибок измерения позволяет получить более реальные оценки потенциальной координатной точности по сравнению с традиционными методами.

1. В последние годы радиоастрономические методы измерения координат небесных объектов начали конкурировать с оптическими— достигнуты точности порядка 0",1. Ведущую роль в этих измерениях играют радиоинтерферометры (РИ), причем подобная точность получена впервые на РИ с электрической связью между антеннами (общим гетеродином) на базах до нескольких километров. В то же время РИ со сверхдлинными базами (РСДБ) обладают гораздо большей потенциальной угловой точностью, порядка 0",001. Однако подобная точность пока не достигнута, и в первую очередь из-за наличия случайных ошибок измерений. В этой заметке будет рассмотрено влияние аддитивных помех на координатную точность РСДБ при измерении задержки.

2. При прохождении точечного источника через диаграмму направленности РИ возникает отклик, который можно записать как функцию пространственной координаты (часового угла θ) следующим образом:

$$s(\theta) = S(\theta - \theta_0) \frac{\sin \left[\frac{\pi D}{c} \Delta f \sin(\theta - \theta_0) \right]}{\frac{D}{c} \Delta f \sin(\theta - \theta_0)} \cos \left[2\pi D \frac{f_0}{c} \sin(\theta - \theta_0) + \varphi_0 \right], \quad (1)$$

где θ_0 — часовой угол источника, при котором разность хода когерентных фронтов волн, достигающих антенн РИ, равна нулю, $S(\theta)$ — огибающая, определяемая диаграммой направленности антенн РИ, D — база, f_0 — средняя частота настройки приемников, Δf — полоса приема (форма частотной характеристики приемников принимается прямоугольной), c — скорость света, φ_0 — начальный фазовый сдвиг. Реальные наблюдения отягощены помехами, и обработке подлежит смесь сигнала и шума:

$$y(\theta, \theta_0) = s(\theta - \theta_0) + n(\theta),$$

где $n(\theta)$ — случайный процесс с нормальным распределением. Ставится задача оценки параметра θ_0 при наличии шума. Процедура оптимальной обработки сигнала вида радиоимпульса (1) со случайной фазой φ_0 с целью измерения времени его прихода (задержки) многократно описана в литературе по радиолокации и статистической теории связи

[1, 2]. В полученной после обработки реализации выделяют пик максимальной амплитуды, положение максимума этого пика соответствует оценке θ_0^* . Воспользуемся известным из теории связи соотношением для дисперсии σ^2 оценки θ_0^* [1, 2]:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{(\theta - \theta_0^*)^2} = \frac{1}{2d^2 \Delta \Omega_{\text{eff}}}, \quad (2)$$

где d — отношение сигнала к шуму, $\Delta \Omega_{\text{eff}}$ — эффективная ширина спектра сигнала. Формула (2) дает нижнюю границу точности при условии, что правильно выбран пик максимальной амплитуды. Между тем, при наличии помех имеется много ложных пиков и существует возможность появления так называемых аномальных ошибок — неправильный выбор пика [2, 3]. Эта ситуация особенно характерна для многолепесткового сигнала РИ. Аномальные ошибки характеризуются дополнительным вкладом в общую среднеквадратичную ошибку измерения:

$$\sigma_2^2 = \frac{\Theta}{24\theta_k} \exp\left(-\frac{d^2}{2}\right), \quad (3)$$

где 2Θ — ширина интервала неопределенности, в котором находится искомая координата объекта, θ_k — интервал корреляции отклика $s(\theta)$. Для отклика вида (1)

$$\sigma_2^2 = \frac{\Theta \Delta \Omega_{\text{eff}}}{4\pi} \exp\left(-\frac{d^2}{2}\right). \quad (3')$$

Полная ошибка теперь равна $\sigma_s^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Зависимость «обычной» ошибки σ_1^2 и аномальной ошибки σ_2^2 от $\Delta \Omega_{\text{eff}}$, определяющей ширину спектра отклика $s(\theta)$, противоположна: σ_1^2 — уменьшается с ростом $\Delta \Omega_{\text{eff}}$, а σ_2^2 растет. Учет аномальных ошибок особенно важен при малом отношении сигнала к шуму d и сложном спектре сигнала, как формула (2) дает заниженные значения ошибки.

3. Расширение полосы приема РИ приводит к сужению огибающей отклика, что позволяет повысить потенциальную точность координатных измерений. При наблюдениях с РСДБ полоса Δf ограничена устройствами регистрации. Роджерс предложил синтезировать широкую полосу приема ΔF , наблюдая в нескольких разнесенных узкополосных каналах с частотами настройки f_i , расположенных внутри ΔF [4], рис. 1 а и 1 б.

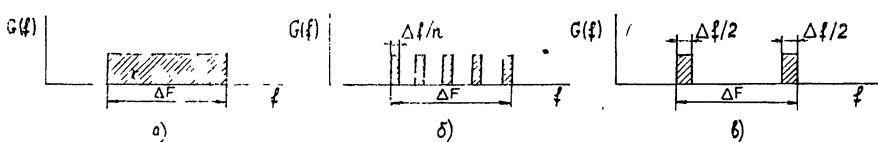


Рис. 1. Частотные характеристики приемных систем радиоинтерферометра:
а) со сплошным заполнением синтезируемой полосы ΔF ;
б) n -канального, Δf — полоса регистрации; в) двухчастотного.

Суммарный отклик такого РИ

$$s_s(\theta) = \sum_{i=1}^n s_i(\theta) = \sum_{i=1}^n S_{mi} A_i (\theta - \theta_0) \cos (\omega_{0i} \theta + \varphi_i). \quad (4)$$

При $\Delta F/f_0 \ll 1$ можно приближенно положить

$$S_{mi} = S_m, A_i(\theta) = A(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi D}{nc} \Delta f \sin \theta\right)}{\pi \frac{D}{nc} \Delta f \sin \theta};$$

тогда

$$s_z(\theta) = S_m A(\theta - \theta_0) \sum_{i=1}^n \cos(\omega_{0i}\theta + \varphi_i). \quad (4')$$

Корреляционная функция сигнала имеет теперь много максимумов, и вероятность аномальных ошибок резко возрастает. Роджерс рекомендует распределить центральные частоты каналов f_i внутри полосы ΔF по закону геометрической прогрессии с целью уменьшения амплитуд боковых лепестков [4]. В то же время нетрудно показать, что для того, чтобы увеличить $\Delta \Omega_{eff}$, надо разнести каналы как можно дальше к краю интервала $f_0 - \Delta F/2, f_0 + \Delta F/2$. При расположении, соответствующем рис. 1 в, $\Delta \Omega_{eff}$ максимальна:

$$\Delta \Omega_{eff} = \frac{\pi D}{c} \sqrt{\frac{\Delta F^2}{6} + \frac{\Delta f^2}{12}} \approx 0,41 \frac{\pi D}{c} \Delta F \quad (\Delta f/\Delta F \ll 1). \quad (5)$$

Уровень боковых лепестков будет, конечно, в этом случае наибольший, но при измерении координат интерес представляет такая интегральная характеристика, как $\Delta \Omega_{eff}$. При решении вопроса о расположении каналов приема внутри синтезируемой полосы и о предельно допустимой ширине этой полосы необходимо учитывать случайные ошибки измерения, причем особенно важен учет аномальных ошибок. Можно поставить задачу построения оптимального, с точки зрения измерения задержки, расположения каналов, подобно тому, как это делается в теории синтеза антенных решеток при других критериях оптимальности. Однако практического значения оптимальное распределение каналов не имеет, так как эффект аномальных ошибок проявляется себя в этом случае примерно при тех же отношениях сигнала к шуму, что и в субоптимальном режиме, например согласно рис. 1 в. В то же время приемная аппаратура в этом последнем примере значительно упрощается.

4. Для исследования двухчастотного метода были проведены оценочные расчеты потенциальной точности при измерении координат с помощью РСДБ для двух систем регистрации на магнитную ленту: для системы с магнитофоном, совместимым с ЭВМ (ширина полосы частот регистрируемых сигналов $\Delta f = 250 \text{ кГц}$, длительность записи $\tau = 3 \text{ мин}$ [5]), и для системы с видеомагнитофоном ($\Delta f = 2 \text{ МГц}$, $\tau = 30 \text{ мин}$ [6]). Отношение сигнала к шуму рассчитывалось по формуле

$$d = 0,22 \frac{S}{k} \sqrt{\frac{A_{eff,1} A_{eff,2}}{T_{s1} T_{s2}}} \sqrt{\Delta f \tau}, \quad (6)$$

где S — спектральная плотность потока источника, $A_{eff,1,2}$ — эффективные площади антенн, T_{s1}, T_{s2} — полные шумовые температуры систем, Δf — полоса регистрации, τ — время усреднения, k — постоянная Больцмана. Численный коэффициент 0,22 учитывает однобитовую регистрацию с частотой выборок $f_s = 2 \Delta f$. При расчете принималось $A_{eff,1} = A_{eff,2} = 200 \text{ м}^2$, $T_{s1} = T_{s2} = 100 \text{ К}$, база $D = 5 \cdot 10^3 \text{ км}$, $\lambda = 5 \text{ см}$, интервал неопределенности $\Theta = 2''$. Максимальный разнос каналов определяется высокочувствительными СВЧ усилителями на входах приемников. В настоящее время разработаны охлажденные до темпе-

ратуры жидкого азота невырожденные параметрические усилители с полосой до 500 МГц, что делает оценки, приводимые ниже, близкими к реальным.

На рис. 2 изображены зависимости суммарной ошибки σ_x от плотности потока источника для РСДБ с первой и второй системами регистрации при различных разносах каналов. Расчеты делались по формулам (2) и (3'). Для РСДБ с малой полосой регистрации хорошо виден пороговый эффект аномальных ошибок: точность при $\Delta F = 10$ МГц лучше, чем при $\Delta F = 100$ и 300 МГц, при потоках, меньших 2 ян. Для РСДБ с полосой регистрации 2 МГц пороговые эффекты проявляются при потоках меньше 0,5 ян при $\Delta F = 100$ и 300 МГц.

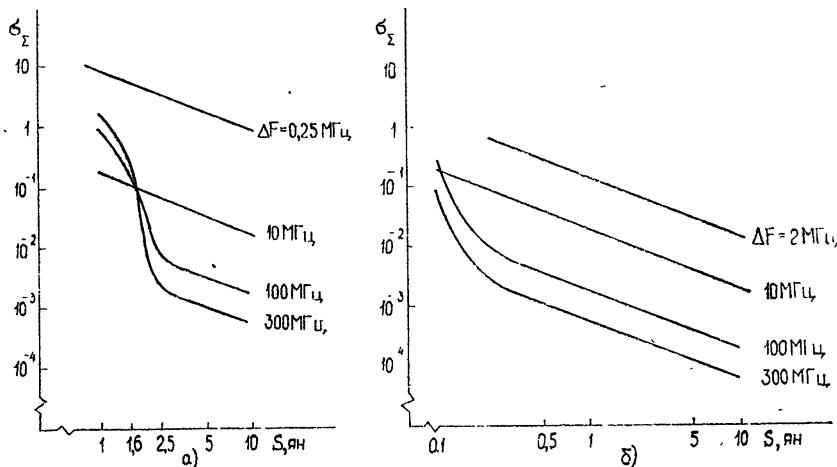


Рис. 2. Зависимость угловой ошибки σ_x (в угловых секундах) РСДБ от величины сигнала:

а) для системы с магнитофоном, совместимым с ЭВМ, $\Delta f = 250$ кГц, $\tau = 3$ мин; б) для системы с видеомагнитофоном, $\Delta f = 2$ МГц, $\tau = 30$ мин, S — плотность потока радиоисточника.

Полученные результаты для точности измерения координат по задержке в многочастотном РСДБ отличаются от оценок, сделанных по формуле для точности, приводимой в [4]. Нам кажется, что учет аномальных ошибок позволяет получить более реальные оценки для конкретных систем РСДБ с синтезированием полосы приема.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Хелстром, Статистическая теория обнаружения сигналов, ИЛ, М., 1963.
2. Дж. Возенкрафт, И. Джекобс, Теоретические основы техники связи, изд. Мир, М., 1969.
3. А. Ф. Фомин, Помехоустойчивость систем передачи непрерывных сообщений, изд. Сов. радио, М., 1975.
4. А. Е. Е. Rogers, Radio Sci., 5, № 10, 1239 (1970).
5. Л. Р. Коган, Л. И. Матвеенко, Л. С. Чесалин, Автометрия, № 1, 51 (1976).
6. Кларк, ТИИЭР, 61, № 9, 94 (1973).

ON THE COORDINATE ACCURACY OF MULTI-FREQUENCY INTERFEROMETER

P. A. Friedman

The influence of additive noises upon the measurement accuracy of the angular coordinate calculated from the delay in signals received by a multi-channel radio interferometer is considered. The account of anomalous measurement errors permits to obtain more realistic estimations of the potential coordinate accuracy as compared with the conventional methods.

УДК 533.951

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ С СИЛЬНОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Д. М. Сахокия

Рассматривается рассеяние высокочастотной монохроматической электромагнитной волны на ансамбле одномерных солитонов. Показано, что рассеяние происходит лишь на солитонах, амплитуда которых удовлетворяет условию $E_{\max}^2 / 16 \pi n_0 T_e \gg v_{Te}^2 / c^2$. Получены выражения для интенсивности сателлитов, появляющихся в результате рассеяния, и величины сдвига частоты.

Нелинейные процессы, протекающие в плазме с возбуждением ленгмюровской турбулентности, приводят к накоплению ленгмюровских колебаний в длинноволновой области, где линейное затухание мало. В работах [1-3] было показано, что если энергия W^l ленгмюровских колебаний удовлетворяет неравенству

$$W^l / nT > k_1^2 r_D^2$$

(n — плотность плазмы, T — ее температура, k_1 — волновое число ленгмюровских колебаний, $r_D = v_{Te} / \omega_{pe}$ — дебаевский радиус электронов, v_{Te} — тепловая скорость электронов), то такой «ленгмюровский конденсат» неустойчив относительно образования локализованных в пространстве ленгмюровских колебаний — солитонов.

В данной работе рассматривается рассеяние высокочастотной монохроматической электромагнитной волны на одномерном солитоне, который можно представить в виде уединенной волны, сохраняющей форму при движении в нелинейной среде. Поле одномерного солитона, распространяющегося вдоль оси x , можно записать в безразмерных переменных в следующем виде:

$$E^s(\zeta, \tau) = \frac{\pi \sqrt{2(1-v^2)}}{\text{ch } \zeta} \exp \left(-i\Omega\tau + i\frac{v}{2}\zeta + i\Phi \right) + \text{к. с.}, \quad (1)$$

где $\tau = t/t_0$, $t_0 = \frac{3}{2} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{\omega_{pe}}$, m_i — масса ионов, m_e — масса электронов, $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ — электронная плазменная частота, e — заряд электрона, n_0 — невозмущенная плотность плазмы, $\zeta = x/t_0 v_s$, $v_s = (T_e / m_i)^{1/2}$ — скорость ионного звука, $v = u/v_s$, u — групповая скорость солитона, Φ — начальная фаза, $\Omega = -v^2/4 - x^2$, $x^2 = \frac{3 E_{\max}^2}{32 n_0 T_e} \times \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{1-v^2}$, E_{\max} — амплитуда солитона.

Интенсивность рассеянной волны представим как работу поля рассеянной волны над током, являющимся источником этой же волны,

т. е., в нашем случае, над током второго порядка по полю, возбужденным высокочастотной монохроматической волной и полем солитона.

Используя здесь и далее обозначения работы [4], пишем для рассейнной интенсивности:

$$I = - \int j^{(2)}(\mathbf{r}, t) E^{(2)}(\mathbf{r}, t) dx. \quad (2)$$

Переходя к фурье-представлению, из (2) получим

$$\begin{aligned} I = & -4\pi i \int \frac{\omega}{k^2 - \omega^2 \epsilon_k^t} j_{k_1}^{(2)} e_{k_1}^t e_{k_1}^{t*} j_{k_1}^{(2)} \times \\ & \times \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i(\omega - \omega') t] dk dk' dx, \end{aligned} \quad (3)$$

где ω и \mathbf{k} — частоты и волновые векторы рассеянных волн, а $dk = d\omega dk$.

Выражение для нелинейного тока имеет вид

$$j_{k_1}^{(2)} = \int S_{kk_1 k_2 k_3} E_{k_1}^s E_{k_2}^t \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) dk_1 dk_2. \quad (4)$$

Падающую монохроматическую волну представим в виде

$$E_{k_1}^s = \frac{1}{2} E_0 \left\{ \delta(\omega_2 - \omega_{k_0}) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0) + \delta(\omega_2 + \omega_{k_0}) \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_0) \right\}. \quad (5)$$

Поле солитона (1) запишем в фурье-представлении и вместе с выражениями (4) и (5) подставим в (3).

Интенсивность излучения является величиной действительной. Поэтому необходимо в выражении $(k^2 - \omega^2 \epsilon_k^t)^{-1}$ учесть мнимую малую добавку к частоте, т. е. взять $(k^2 - \omega^2 \epsilon_k^t)^{-1} \approx i\pi \frac{\omega}{|\omega|} \delta(k^2 - \omega^2 \epsilon_k^t)$.

Кроме того, необходимо соблюдать выполнение распадных условий для высокочастотной монохроматической волны и солитона.

Принимая во внимание эти замечания, после некоторых преобразований произведем в (3) интегрирование и при $u \ll v_s$ для интенсивности получим

$$\begin{aligned} I = & 6\pi^4 |E_0|^2 n_0 T_e \frac{v_{pe}^2}{\omega_{pe}^2} \int \frac{|S_{k_1 k_0 k - k_0}|^2}{\left| \operatorname{ch} \frac{3}{4} \pi \left(\frac{16\pi n_0 T_e}{3E_{\max}^2} \right)^{1/2} \frac{k - k_0}{k_D} \right|^2} \times \\ & \times \left\{ \delta\left(\omega_k - \omega_0 - \omega_{pe} + \frac{E_{\max}^2}{16\pi n_0 T_e}\right) + \delta\left(\omega_k - \omega_0 + \omega_{pe} - \frac{E_{\max}^2}{16\pi n_0 T_e}\right) \right\} dk. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\{\omega_0, \mathbf{k}_0\}$ описывают падающую волну, а $\{\omega_k, \mathbf{k}\}$ — рассеянную ($\omega_k = ck$, c — скорость света). Волновое число солитона $\mathbf{k}^s = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ направлено вдоль оси x . Волновые числа высокочастотной электромагнитной волны \mathbf{k}, \mathbf{k}_0 разложены по составляющим $\mathbf{k} \{k_\perp, k\}$ и $\mathbf{k}_0 \{k_{0\perp}, k_0\}$, где $\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}_{0\perp}$ — составляющие векторов в xy -плоскости, а k, k_0 — составляющие вдоль x (по \mathbf{k}_\perp произведено интегрирование).

Подставляя $|S_{k_1 k_0 k - k_0}|^2$ в явном виде (см. [4]):

$$|S_{k_1 k_0 k - k_0}|^2 = (e_k^* e_{k_0})^2 \frac{\omega_{pe}^2 |k - k_0|^2}{64\pi^3 n_0 m_e \omega^2}$$

(здесь e_k, e_{k_0} — орты рассеянной и падающей волн, соответственно), получим

$$I \sim |E_0|^2 \left(\frac{v_{Te}}{c} \right)^3 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 v_{Te}. \quad (7)$$

Как видно из (6), высокочастотная волна будет рассеиваться лишь на солитонах, для которых выполняется условие

$$\frac{E_{\max}^2}{16\pi n_0 T_e} \gg \frac{v_{Te}^2}{c^2}. \quad (8)$$

Сдвиг частоты рассеянного сателлита дается δ -функцией в выражении (6). Если обозначить через ω_{+c} , ω_{-c} расположение центров фиолетового и красного ленгмюровских сателлитов, $\omega_{\pm c} = \omega_0 \pm \omega_{pe}$, то для $\Delta\omega_{\pm}$ — сдвига частоты по отношению к $\omega_{\pm c}$ — можно записать

$$\Delta\omega_{\pm} = \omega - \omega_{\pm c} = \mp \frac{E_{\max}^2}{16\pi n_0 T_e} \omega_{pe}. \quad (9)$$

Боковые линии сигнала, полученного при рассеянии на солитоне, сдвинуты ближе к основной линии, соответствующей частоте ω_0 , на величину $(E_{\max}^2/16\pi n_0 T_e) \omega_{pe}$ по сравнению с боковой линией, появляющейся при рассеянии на плазме, в которой возбуждены нелокализованные ленгмюровские колебания с низким уровнем заключенной в них энергии турбулентности. Этот факт дает возможность идентификации солитонов в рассеиваемой плазме.

Если рассеяние происходит не на единичном солитоне, а в плазме с N полным числом солитонов, то рассеянный сигнал будет иметь размытый хвост $I_{\omega-\omega_c}$ в сторону основного сигнала.

Так как величина сдвига частоты зависит от амплитуды рассеивающего солитона, а величина интенсивности рассеянной волны от этой амплитуды не зависит, то форма кривой $I_{\omega-\omega_c}$ рассеянного сигнала может дать некоторую информацию о спектре энергии W_{k_1} солитонов в плазме.

Действительно, плотность энергии солитонов $W = \int W_{k_1} dk_1$. Введем $N(E_{\max})$ — функцию распределения солитонов по амплитудам E_{\max} : $N = \int N(E_{\max}) dE_{\max}$. Тогда $W \approx \int E_{\max} N(E_{\max}) dE_{\max} \approx \approx \int N(\sqrt{\omega - \omega_c}) d(\omega - \omega_c) \approx \int k_1 N(k_1) dk_1 \quad (W_{k_1} = k_1 N(k_1))$.

Интенсивность рассеянной волны на одном солитоне I_0 от E_{\max} не зависит. Таким образом, можно записать для интенсивности dI в интервале частот $d\omega$:

$$dI = I_0 N(E_{\max}) dE_{\max} \approx I_0 \frac{N(E_{\max})}{E_{\max}} d(\omega - \omega_c) \approx I_{\omega-\omega_c} d(\omega - \omega_c).$$

Если $I_{\omega-\omega_c}$ аппроксимируется к виду $I_{\omega-\omega_c} \sim 1/(\omega - \omega_c)^n$, где n — некоторое число, то искомый спектр имеет вид

$$W_{k_1} \sim 1/k_1^{2(n-1)}.$$

Например, если спектр солитонов имеет вид $W_{k_1} \sim 1/k_1^2$ (см. [3]), то кривая, определяющая интенсивность сателлита $I_{\omega-\omega_c}$ должна аппроксимироваться к виду $I_{\omega-\omega_c} \sim 1/(\omega - \omega_c)^3$.

Полученные выводы могут найти применение при экспериментальном изучении солитонов в плазме.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. Н. Цытовичу за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, Докл. АН СССР, **159**, 767 (1964).
2. Л. И. Рудаков, Докл. АН СССР, **207**, 821 (1972).
3. A. S. Kingsep, L. J. Rudakov and R. N. Sudan, Phys. Rev. Letters, **31**, 1482 (1973).
4. D. M. Sakhokya and V. N. Tsitovich, Nuclear Fusion, **8**, 241 (1968).

Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию
9 августа 1976 г.

SCATTERING OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE IN PLASMA WITH A STRONG LANGMUIR TURBULENCE

D. M. Sakhokya

The scattering of a high-frequency monochromatic electromagnetic wave by a one-dimensional soliton is considered.

The scattering is shown to take place only on solitons which amplitude satisfies the condition $\frac{E_{\max}^2}{16 \pi n_0 T_e} \gg \frac{v_{Te}^2}{c^2}$. Expressions are obtained for the intensity of satellites arising as a result of scattering and frequency shift.

УДК 533.951

К ВОПРОСУ ОБ УСИЛЕНИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАЗМЕ

H. I. Айзацкий

Рассмотрено стационарное усиление монохроматической ленгмюровской волны электронным пучком с учетом эффекта самовоздействия, который обусловлен изменением плотности плазмы под действием сил высокочастотного давления. Показано, что максимальная амплитуда усиливающего поля может быть меньше, чем в случае линейной плазмы.

Математическое моделирование процесса коллективного взаимодействия электронного пучка с плазмой показывает, что с уменьшением величины v_g/v_0 максимальная амплитуда усиливающего поля возрастает по сравнению с максимальной амплитудой нарастающего во времени пространственно-периодического сигнала [1, 2]. Этот результат объясняется эффектом накопления колебаний [3, 4]. С ростом амплитуды усиливающего поля важную роль начинают играть нелинейные свойства плазмы. Взаимодействие волн в пучковых системах при сильной нелинейности потока частиц и слабой нелинейности плазмы без учета самовоздействия было исследовано в работах [5, 6], где показана возможность эффективной перекачки энергии пучка в несинхронные моды при трехволновом взаимодействии. При этом изменяется пространственная зависимость амплитуды усиливающей пучком волны по сравнению с одномодовым приближением [1], максимальная же ее величина практически не меняется. При больших амплитудах усиливающего поля, т. е. при малых v_g/v_0 , а также в случае релятивистских пучков, необходимо учитывать эффект самовоздействия волны. Самовоздействие может быть обусловлено перераспределением концентрации заряженных частиц, происходящим под действием сил высокочастотного давления [7, 8]. Данная работа посвящена исследованию влияния такой нелинейности на процесс усиления плазменной волны в случае, когда трехволновое взаимодействие можно не учитывать. Впервые возможность стабилизации пучковой неустойчивости за счет изменения плотности плазмы под действием высокочастотного давления была указана в работе [9], где рассмотрен случай нерезонансного возбуждения ленгмюровской волны с фиксированной фазой ($\omega \approx kv_0 \ll \omega_p$). Ниже мы рассмотрим эффект самовоздействия в резонансном случае $\omega \approx \omega_p$, когда по мере роста амплитуды поля нелинейные стрикционные эффекты приводят к изменению локальной фазовой скорости волны, что нарушает условие черенковского синхронизма частиц пучка с волной и стабилизирует рост амплитуды поля*.

Для рассмотрения эффектов, связанных с силами высокочастотного давления, воспользуемся методом получения системы укороченных

* Аналогичный механизм использован в [10] для объяснения стабилизации бунemanовской неустойчивости на уровне, значительно меньшем обусловленного эффектами обратного влияния; при этом нелинейность определяется релятивистской зависимостью массы частиц пучка от скорости.

уравнений, предложенным в работе [11], учитывая при этом наличие пучка электронов. Тогда система уравнений, описывающая одномерный процесс релаксации пучка, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + v \frac{\partial}{\partial t} + \omega_p^2 - 3v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} E = & - \omega_p^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\delta n}{n_0} E \right\} + 4\pi e \frac{\partial^2 n_b}{\partial t^2}, \\ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \frac{\delta n}{n_0} = & \frac{e^2}{8Mm\omega_p^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} |E|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь δn — медленное изменение профиля плотности плазмы под действием высокочастотного давления, $c_s^2 \equiv T_e/M$, $\omega_p^2 \equiv 4\pi e^2 n_0/m$, $v_{Te}^2 \equiv T_e/m$, v — частота столкновений, n_0 — плотность плазмы, n_b — плотность пучка. Нас будут интересовать стационарные решения системы (1), соответствующие процессу усиления плазменной волны пучком вдоль пространственной координаты z . Введем медленно меняющиеся амплитуду и фазу волны:

$$E = E_0(z) \cos[kz - \omega t + \varphi(z)]. \quad (2)$$

Тогда с помощью методики, предложенной в [12, 13], система (1) может быть сведена к следующей:

$$(1 - 3W\mathcal{E}^2) \frac{d\mathcal{E}}{d\xi} = -v_c \mathcal{E} + \int_{-1/2}^{1/2} \cos[2\pi\tau(\xi, \tau(0)) + \varphi(\xi)] d\tau(0), \quad (3)$$

$$\mathcal{E} \left[(1 - W\mathcal{E}^2) \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{W}{\theta} \mathcal{E}^2 + \Delta \right] = - \int_{-1/2}^{1/2} \sin[2\pi\tau(\xi, \tau(0)) + \varphi(\xi)] d\tau(0),$$

где

$$\mathcal{E} = E_0/E_H, \quad E_H \equiv \left[4\pi n_b m v_0^2 \gamma_0^2 \left(\frac{n_b}{n_0} \right)^{1/3} \left(\frac{v_0}{v_g} \right)^{4/3} \right]^{1/2},$$

$$\xi \equiv x z, \quad x \equiv k \left(\frac{n_b}{n_0} \frac{v_0}{v_g} \right)^{1/3} \frac{1}{\gamma_0}, \quad \gamma_0 \equiv \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-1/2},$$

$$\theta \equiv \frac{x}{k}, \quad \Delta \equiv \frac{v_g}{v_0 \theta} \frac{\omega_p - kv_0}{\omega_p}, \quad v_c \equiv v \frac{v_0}{v_g} \frac{k}{x \omega_p},$$

$$W \equiv \frac{3}{182\pi} \frac{v_0}{v_g} \frac{E_H^2}{n_0 T_e}, \quad v_g \equiv \frac{d\omega}{dk},$$

v_0 — начальная скорость пучка.

Систему (3) необходимо дополнить уравнением движения частиц пучка

$$= -\frac{\gamma_0^3}{2\pi} \left(1 - 2\pi\theta \frac{d\tau}{d\xi} \right)^3 \left[1 - \beta_0^2 \left(1 - 2\pi\theta \frac{d\tau}{d\xi} \right)^{-2} \right]^{3/2} \mathcal{E} \cos(2\pi\tau + \varphi). \quad (4)$$

При $W/\theta \ll 1$, когда плазменной нелинейностью можно пренебречь, (3) переходит в известную систему уравнений [14]. Как видно из (3), стрикционные эффекты начинают играть роль при таких амплитудах поля, когда $W\mathcal{E}^2/\theta \sim 1$. При этом волна выходит из синхронизма с пучком. Таким образом, в данной модели можно ожидать стабилизацию амплитуды возбуждаемой волны на уровне, определяемом соотношением

$$\mathcal{E}_c \approx \left(\frac{\theta}{W} \right)^{1/2} \approx \left[5 \left(\frac{v_g}{v_0} \right)^3 \frac{n_0}{n_b} \frac{1}{\gamma_0^3} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Такая стабилизация имеет место в том случае, когда $\mathcal{E}_c \ll 1$. В противном случае либо преобладает пучковая нелинейность ($\mathcal{E}_c \gg 1$), либо два рассматриваемых механизма нелинейности становятся конкурирующими.

Для подтверждения правильности приведенной оценки численно решалась система (3) и (4). На рис. 1 представлена пространственная зависимость поля при $\theta = 0,05$ (I — $W = 0$, II — $W = 1$, III — $W = 5$) в случае, когда начальная амплитуда волны $\mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E}_c$, т. е., когда на начальной стадии волна синхронна с пучком ($\Delta = 0$). Видно, что с ростом отношения W/θ наблюдается уменьшение амплитуды возбуждаемого поля по сравнению со случаем линейной плазмы ($W = 0$), при этом результаты расчета максимальной амплитуды по порядку величины совпадают с оценкой (5). Глубокие осцилляции амплитуды поля определяются эффектами фазовых колебаний частиц пучка за счет нелинейного изменения фазы поля (см. рис. 2, где представлена зависимость изменения фазы поля от координаты в случае $W = 5$, пунктирная кривая — зависимость амплитуды от ξ).

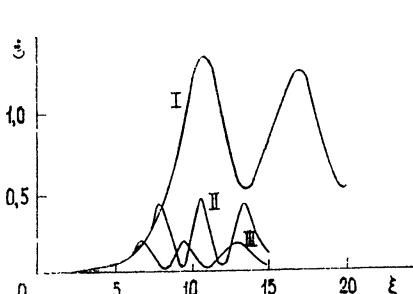


Рис. 1.

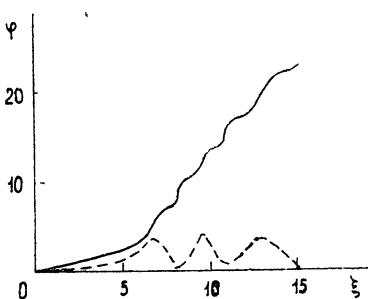


Рис. 2.

Изменение плотности плазмы в рассматриваемом стационарном случае повторяет изменение огибающей поля:

$$\frac{\delta n}{n_0} = - \frac{|e|^2}{8m\omega^2 T_e} |E|^2 \approx - 2W \frac{v_g}{v_0} \mathcal{E}^2. \quad (6)$$

При $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_c$ $\delta n/n_0 \approx - \frac{1}{3} \frac{v_g}{v_0} \theta \ll 1$.

Приведенное выше рассмотрение справедливо в том случае, если начальная амплитуда поля при $z = 0$ удовлетворяет условию $E_0^2(z = 0)/4\pi n_0 T_e \ll 1$. При выполнении противоположного условия важную роль начинает играть высокочастотная электронная нелинейность.

Необходимо также отметить, что представление поля в виде (2), где E_0 и φ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза, а также система уравнений (3), справедливы при $\theta \ll 1$. В случае одномерной плазмы это довольно жесткое условие из-за малости групповой скорости ленг-мюровской волны, для ограниченных систем (плазменный волновод и т. п.) оно может быть выполнено относительно легко.

Таким образом, эффекты самовоздействия волны могут оказывать важное влияние на характер релаксации электронного пучка в плазме, приводя к уменьшению эффективности отбора энергии от пучка.

В заключение выражаю благодарность В. Й. Курилко за ценные советы и плодотворное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Ядерный синтез, 12, 133 (1972).
2. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Ядерный синтез, 15, 1514 (1972).
3. А. А. Веденов, Атомная энергия, 13, № 5 (1962).
4. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, ЖЭТФ, 47, 1389 (1964).
5. Ю. К. Гольцова, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Физика плазмы, 1, 594 (1975).
6. Н. Г. Мациборко, И. Н. Онищенко, В. Н. Ораевский, В. И. Сотников, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Физика плазмы, 1, 765 (1975).
7. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, № 3, 242 (1958); Р. З. Сагдеев, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 3, изд. АН СССР, 1958, стр. 346.
8. А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 45, 1243 (1963).
9. В. Б. Красовицкий, В. И. Курилко, ЖЭТФ, 51, 445 (1966).
10. В. И. Курилко, А. П. Толстолужский, Я. Б. Файнберг, ЖТФ, 46, 985 (1974).
11. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 62, 1745 (1972).
12. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солинцев, Лекции по СВЧ электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
13. И. Н. Онищенко, А. Р. Линецкий, Н. Г. Мациборко, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Письма в ЖЭТФ, 12, 407 (1970).
14. Н. С. Ерохин и др., Ядерный синтез, 11, 195 (1971).

Поступила в редакцию
28 июня 1976 г.

ON AMPLIFICATION OF A MONOCHROMATIC WAVE BY AN ELECTRON BEAM IN A NONLINEAR PLASMA

N. I. Aizatskii

A stationary amplification of a monochromatic Langmuir wave by an electron beam is considered with taking into account the self-action effect which is due to the change in the plasma density under the action of high-frequency pressure. It is shown that the maximum amplitude of the field amplified may be less than that in the case of linear plasma.

УДК 621.371.25

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВАРИАЦИЙ СДВ-СИГНАЛОВ В ВОЛНОВОДЕ ЗЕМЛЯ—ИОНОСФЕРА

В. Г. Безродный, С. Н. Синявский, Р. С. Шубова, Ю. М. Ямпольский

Представлены результаты экспериментального исследования случайных вариаций параметров радиосигналов в диапазоне частот 10—20 кГц. Приведены энергетические спектры флюктуаций амплитуды и фазы. Показано, что все они достаточно хорошо могут быть аппроксимированы степенной функцией с показателем степени, не зависящим от принимаемой частоты, сезона измерений, протяженности и ориентации трасс. Использование этих спектров позволило авторам в дальнейшем рассчитать целый ряд других статистических характеристик сигнала и определить вид пространственного спектра размеров иопосферных неоднородностей.

В период с 1973 по 1975 гг. в Институте радиофизики и электроники АН УССР были выполнены экспериментальные исследования флюктуаций параметров сверхдлинных радиоволн в волноводном канале Земля—ионосфера. Настоящая работа представляет собой изложение некоторых результатов, полученных в ходе этих исследований.

Измерения проводились в окрестностях г. Харькова в разные сезоны небольшими циклами по 10—20 дней каждый. В диапазоне частот 10—20 кГц измерялись вариации амплитуды и фазы в одном пункте, разности фаз—в пространственно разнесенных пунктах. Для измерений использовался комплекс фазометрической аппаратуры, подробное описание которого можно найти в работе [1]. В качестве высокостабильных источников сигнала применялись станции «Омега» (Алдра, Норвегия, частоты 10,2 и 13,6 кГц, протяженность трассы ~ 2200 км), GBR (Регби, Англия, частота 16 кГц, трасса ~ 2600 км), НАА (Галифакс, США, частота 17,8 кГц, трасса ~ 7000 км). Соответствующие трассы распространения были ориентированы с запада на восток и лежали в пределах угла $\sim 45^\circ$. Разнос приемных пунктов при измерениях разности фаз осуществлялся поперек направления распространения на расстояния от 40 до 120 км.

Статистической обработке подвергались толькоочные участки суточных записей, поскольку в дневное время флюктуации малы и лежат на уровне порога чувствительности измерительной аппаратуры (для фазы, например, они имели величину $\sim 1^\circ$). В часы восхода и захода Солнца случайные изменения параметров сигнала невозможно было отделить от сильных регулярных вариаций, связанных с движением линии «день—ночь» вдоль трассы распространения.

Дляочных участков записей (их продолжительность изменялась в зависимости от трассы и сезона от 4 до 11 часов) были определены оценки энергетических спектров флюктуаций относительной амплитуды $S_a(F)$, фазы $S_\phi(F)$ и разности фаз $S_{\Delta\phi}(F)$. Такой выбор величин, подлежащих определению, позволял при необходимости получить большинство статистических характеристик, описывающих временные изменения амплитуды и фазы (дисперсия, временные корреляционные и структурные функции и т. п.). При использовании дополнительных

предположений о связи временных и пространственных изменений свойств ионосферных неоднородностей они давали возможность определить также и пространственные характеристики сигнала (пространственные спектры, корреляционные и структурные функции). Еще одним преимуществом использования спектральных функций являлась их применимость для описания не только стационарных, но и целого класса нестационарных процессов — процессов со стационарными приращениями (см., например, [3]). В обоих случаях функция $S(F)$ существует и имеет один и тот же физический смысл спектральной плотности энергии.

Обработка экспериментального материала осуществлялась на ЭВМ М-222. Съем данных с перфолент производился с частотой 1 мин⁻¹. Из всего ночных участка соответствующей записи исключалось переменное среднее. Оно аппроксимировалось квадратичной параболой и определялось методом наименьших квадратов. После центрирования указанный отрезок записи разбивался на 4-часовые интервалы (в случае необходимости они могли иметь небольшие перекрывающиеся участки). Для каждого интервала рассчитывался квадрат модуля фурье-преобразования исследуемой величины, который затем усреднялся по множеству разбиений в пределах каждой записи и по всем записям данного цикла наблюдений:

$$S_x^{(j)}(F) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T x^{(j)}(t) e^{i 2\pi F t} dt \right|^2; \quad (1)$$

$$S_x(F) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_x^{(j)}(F). \quad (2)$$

Нетрудно показать, что при $T, N \rightarrow \infty$ функция $S_x(F)$ переходит в спектральную плотность $W_x(F)$ процесса со стационарными приращениями (либо стационарного процесса), связанную с его временной структурной функцией $D_x(\tau)$ соотношением

$$D_x(\tau) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(2\pi F\tau)] W_x(F) dF. \quad (3)$$

Описанный способ расчета обеспечивал определение оценок спектральных плотностей в диапазоне флуктуационных частот $(7 \div 330) \cdot 10^{-5}$ Гц. Величина нижней граничной частоты определялась разбиением ночных участков записей на 4-часовые интервалы. Верхней — максимальными частотами, на которых интенсивности флуктуаций исследуемых величин превышали порог чувствительности измерительной аппаратуры и высокочастотные шумы, связанные с дискретностью ввода данных в ЭВМ.

Расчет оценок спектральной плотности по формулам (1), (2) приводил к погрешностям статистической обработки, связанным с конечностью интервалов разбиения T (смещение оценки) и с конечностью числа усреднений N (дисперсия оценки). В предположении о статистической независимости обоих источников ошибок результирующая погрешность определялась выражением

$$\delta = \left\{ \frac{1}{N} + \left[\frac{1}{4\pi^2 T^2} \frac{d^2 S(F)}{dF^2} \middle/ S(F) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4)$$

и для приведенных в работе спектров была максимальной на нижней граничной частоте и не превышала 30%.

На рис. 1—4 приведены спектры флуктуаций амплитуды и фазы, полученные во всех циклах измерений 1973—1975 гг. Видно, что в исследуемом диапазоне флуктуационных частот все они могут быть достаточно хорошо аппроксимированы степенной функцией:

$$S_{a, \varphi}(F) = C_{a, \varphi} F^{-\alpha}. \quad (5)$$

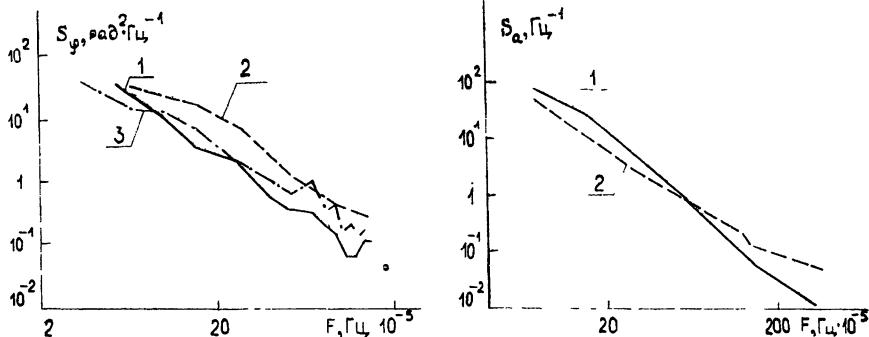


Рис. 1. Спектры флуктуаций фазы и амплитуды на частоте 10,2 кГц; 1—январь 1975 г., 2—март 1974 г., 3—январь 1973 г.

Величина входящего в (5) множителя $C_{a, \varphi}$, разная для спектров амплитуды и фазы, зависит от принимаемой частоты и расположения пункта наблюдения по отношению к передатчику и к интерференционной картине поля в волноводе. Показатель степени α от указанных факторов не зависит, и его значение лежит в интервале 2—2,3. Этот результат отличается от полученного в измерениях 1971 г. ($\alpha = 3 \div 3,8$) [2]. Вероятная причина различия заключается в том, что предыдущие измерения были выполнены в переходных условиях. Как уже указывалось выше, в этом случае сильный вклад в вариации параметров сигнала дают регулярные изменения, связанные с движением по трассе линии «день—ночь». Невозможность отделить их от флуктуаций, вызванных случайной неоднородностью ионосферы, и приводила к подъему спектров в низкочастотной области.

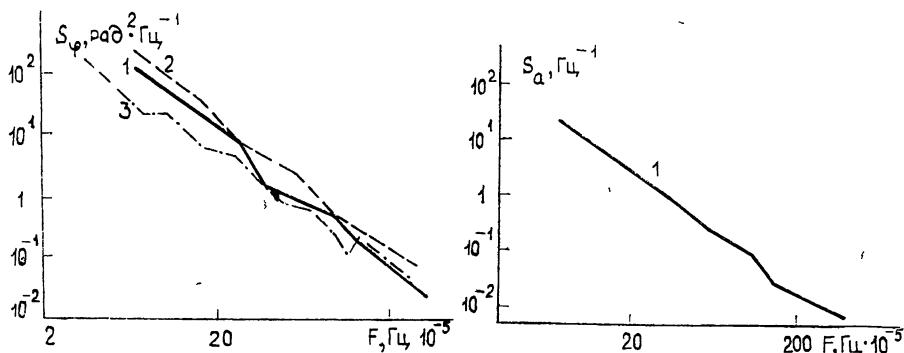


Рис. 2. Спектры флуктуаций фазы и амплитуды на частоте 13,6 кГц; 1—январь 1975 г., 2—март 1974 г., 3—январь 1973 г.

На рис. 5 приведены спектры флуктуаций разности фаз сигналов частоты 17,8 кГц, полученные в измерениях 1973—1975 гг. на разных пространственных разносах d . Для сравнения их с расчетом использована широко применяемая в других частотных диапазонах (см., например, [3, 4]) гипотеза о переносе неоднородностей всех размеров с постоянной скоростью V . В этом случае изменения параметров сигнала

повторяются в двух пунктах наблюдения с временным запаздыванием, определяющимся скоростью переноса и разносом этих пунктов. В результате не составляется труда установить связь между спектрами флуктуаций фазы и разности фаз:

$$S_{\Delta\varphi}(F) = 2S_\varphi(F) \left[1 - \frac{\sin(2\pi Fd/V_\perp)}{2\pi Fd/V_\perp} \right]. \quad (6)$$

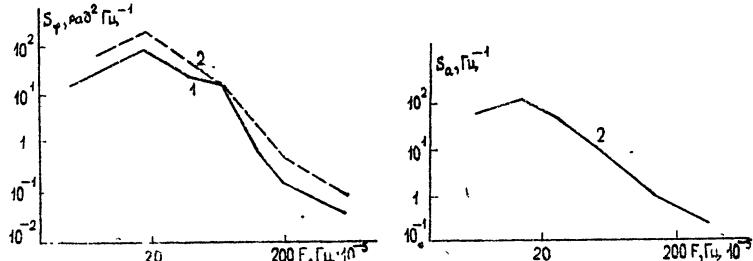


Рис. 3. Спектры флуктуаций фазы и амплитуды на частоте 16 кГц;
1—апрель 1974 г., 2—июнь 1974 г.

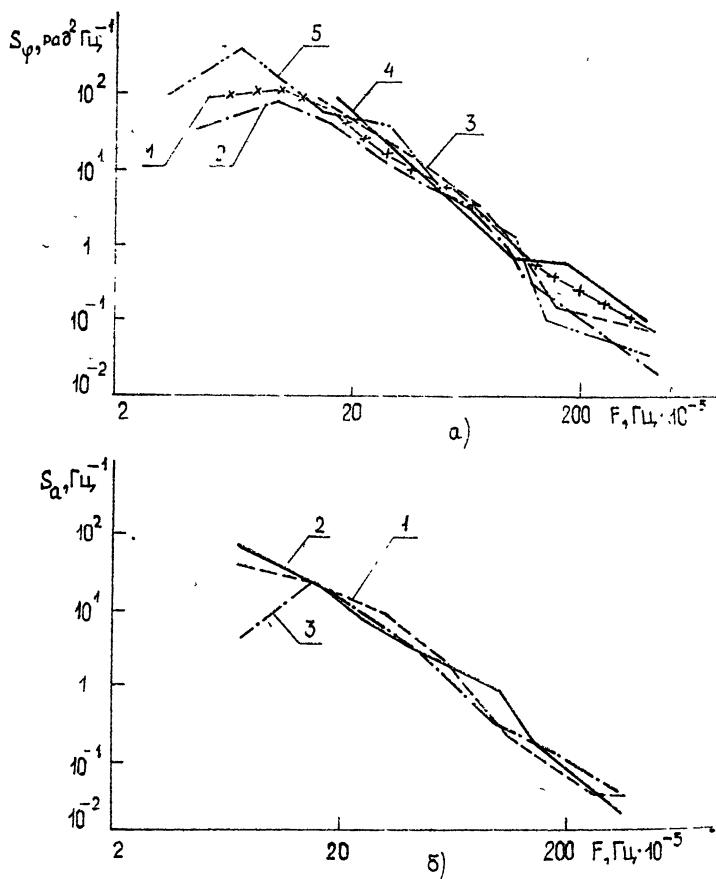


Рис. 4. Спектры флуктуаций фазы и амплитуды на частоте
17,8 кГц;
1—февраль 1975 г., 2—январь 1975 г., 3—апрель 1974 г.,
4—март 1974 г., 5—январь 1973 г.

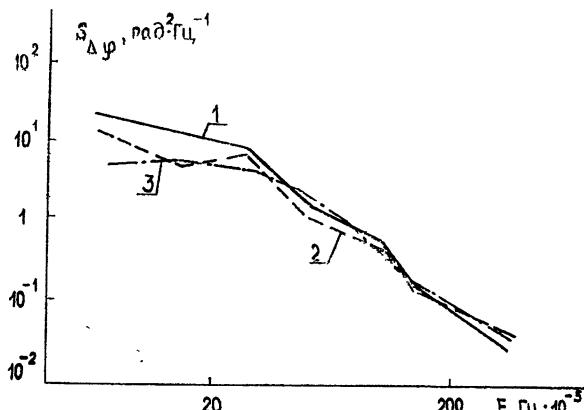


Рис. 5. Спектры флюктуаций разности фаз на частоте 17,8 кГц;

1 — $d \approx 120$ км, 1975 г., 2 — $d \approx 70$ км, 1975 г.,
3 — $d \approx 40$ км, 1973 г.

Здесь V_{\perp} и d — поперечные составляющие скорости переноса неоднородностей и разноса приемных пунктов. Как следует из формулы (6), спектр флюктуаций разности фаз можно разбить на две области. В области низких частот ($F \ll V_{\perp}/d$) имеет место соотношение $S_{\Delta\varphi}(F) \sim F^2 S_{\varphi}(F)$. В области высоких частот ($F \gg V_{\perp}/d$) спектр разности фаз равен удвоенному спектру фазы: $S_{\Delta\varphi}(F) = 2S_{\varphi}(F)$. Сравнение приведенных на рис. 5 экспериментальных спектров разности фаз с результатами расчета по формуле (6) показало их наилучшее согласие при скорости переноса $V_{\perp} \sim 50$ м/с. Полученное значение V_{\perp} не противоречит имеющимся в литературе сведениям о скоростях ионосферных ветров [5].

Предположение о переносе позволяет также осуществить переход от спектров флюктуаций фазы и амплитуды сигнала к пространственному спектру $S_{\xi}(x)$ размеров $L = 2\pi/x$ неоднородностей ионосферы. Как показано в работе [6], эти спектры с точностью до постоянного множителя повторяют друг друга. В результате для описания функций $S_{\xi}(x)$ может быть использована формула (5), в которой частота временных изменений F заменена пространственной частотой $x/2\pi F = x/V_{\perp}/2\pi$. Таким образом, при принятом нами значении скорости переноса $V_{\perp} = 50$ м/с диапазон пространственных размеров L , в котором может быть экспериментально определен спектр неоднородностей, охватывает область значений $L = 18 \div 700$ км.

Остановимся теперь вкратце на применимости аппроксимированных спектров для расчета некоторых других статистических характеристик сигнала. Знание спектра флюктуаций фазы позволяет определить спектр флюктуаций частоты, используя соотношение

$$S_f(F) = 4\pi^2 F^2 S_{\varphi}(F). \quad (7)$$

Наличие множителя F^2 в формуле (7) приводит к тому, что закон убывания $S_f(F)$ может описываться формулой (5) с показателем степени $\alpha = 0 \div 0,3$. В результате спектр флюктуаций частоты практически не отличается от спектра «белого шума», т. е. частота сигнала при его передаче в волноводе Земля—ионосфера претерпевает одинаковые вариации во всем диапазоне флюктуационных частот.

Аппроксимированные спектры $S(F)$ флюктуаций частоты, фазы, амплитуды и разности фаз дают возможность определить среднеквадра-

тические отклонения σ соответствующих величин в зависимости от длительности T их наблюдения:

$$\sigma(T) = \left(2 \int_{1/T}^{F_{\max}} S(F) dF \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где максимальная флюктуационная частота F_{\max} по-прежнему определяется возможностями измерительной аппаратуры. Результаты расчета по формуле (8) приведены на рис. 6—9. Среднеквадратичные отклонения частоты, амплитуды и фазы определены для всех исследуемых частот f , разности фаз — только для частоты 17,8 кГц, но при разных пространственных разносах d . Видно, что с ростом T среднеквадратичные отклонения фазы и амплитуды растут по степенному закону. Флюктуации частоты и разности фаз выходят на насыщение.

Кратко подведем итоги выполненного рассмотрения. В результате многолетних измерений получены спектры амплитуды и фазы СДВ-сигналов в диапазоне 10—20 кГц. Установлено, что они достаточно хорошо

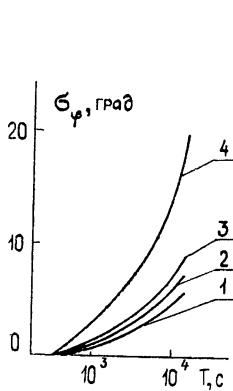


Рис. 6.

Рис. 6. Среднеквадратичные отклонения фазы;
1— $f=10,2$ кГц, 2— $f=13,6$ кГц, 3— $f=17,8$ кГц,
4— $f=16$ кГц.

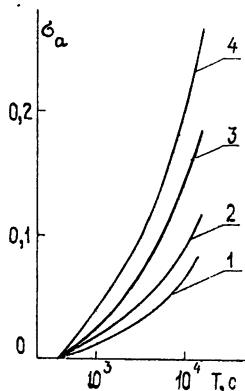


Рис. 7.

Рис. 7. Среднеквадратичные отклонения ампли-
туды;
1— $f=13,6$ кГц, 2— $f=10,2$ кГц, 3— $f=17,8$ кГц,
4— $f=16$ кГц.

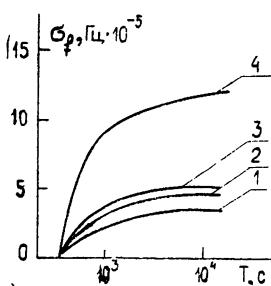


Рис. 8.

Рис. 8. Среднеквадратичные отклонения час-
тоны;
1— $f=10,2$ кГц, 2— $f=13,6$ кГц, 3— $f=17,8$ кГц,
4— $f=16$ кГц.

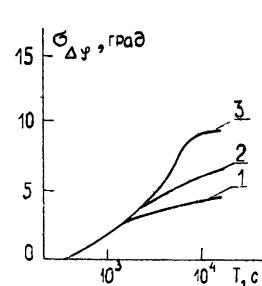


Рис. 9.

Рис. 9. Среднеквадратичные отклонения раз-
ности фаз;
1— $d \approx 40$ км, 2— $d \approx 70$ км, 3— $d \approx 120$ км.

могут быть аппроксимированы степенной функцией с показателем степени, величина которого не зависит от принимаемой частоты, сезона измерений, протяженности и ориентации трассы и т. п. Использование гипотезы о переносе неоднородностей ионосферы с постоянной скоростью позволило по результатам измерений определить характерные скорости переноса и спектр размеров этих неоднородностей. Определены также спектры флуктуаций частоты сигнала и его пространственной разности фаз. Рассчитаны зависимости величин среднеквадратичных отклонений частоты, амплитуды, фазы и разности фаз от продолжительности их наблюдения.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Л. М. Рабиновичу за выполненный большой объем расчетов на ЭВМ на стадии обработки экспериментальных данных и Л. Н. Моисеенко за помочь в представлении графического материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга, Ю. М. Ямпольский, Изв. высш. уч. зав — Радиоэлектроника, 16, № 12 (1973).
2. Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга, Ю. М. Ямпольский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 1, 43 (1974).
3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- . D. K. Barton, Proc. IEEE, 51, № 4, 626 (1963).
5. С. И. Акасофу, С. Чепмен, Солнечно-земная физика, изд. Мир, М., 1974.
6. В. Г. Безродный, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 98 (1975).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
29 марта 1976 г.

SPECTRAL ANALYSIS OF VLF SIGNAL VARIATIONS IN THE EARTH-IONOSPHERE WAVEGUIDE

V. G. Bezrodny, S. N. Sinyavskii, R. S. Shubova, Yu. M. Yampolskii

Experimental results are presented on random variations of radio signal parameters in the frequency range 10 to 20 kHz. Power spectra of the amplitude and phase fluctuations are given. As has been shown, they can be all approximated, to a sufficient accuracy, by a power law with the index independent of the reception frequency, year season, length and orientation of the propagation path. Using these spectra the authors have been able to calculate a number of other statistical characteristics of the radio signal and deduce the form of the spatial spectrum for ionospheric inhomogeneities.

УДК 538.56 : 519.25

О КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В СРЕДЕ С КВАЗИСТАТИЧЕСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПОТЕНЦИАЛА

Ю. Н. Барабаненков

Рассматривается распространение волнового пакета в случайно-переменной среде, исходя из уравнения Шредингера со случайным потенциалом, флюктуирующими в пространстве и во времени по гауссову закону. Методом мажорантного процесса и интегральных неравенств выясняются условия применимости кинетического уравнения Больцмана для вычисления диагональной части функции взаимной пространственной когерентности (ФВК) в импульсном представлении. Показано, что эти условия удовлетворяются в пределе, когда при ограниченном сверху отношении времени наблюдения к больцмановскому времени релаксации параметр квазистатичности флюктуаций потенциала и отношение временного масштаба флюктуаций потенциала к марковскому времени релаксации стремятся к нулю, а параметр гладкости начального значения диагональной части ФВК стремится к бесконечности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена нестационарная задача о распространении волн де Броиля, исходя из уравнения Шредингера со случайным потенциалом, флюктуирующим однородно в пространстве и стационарно во времени по гауссову закону. Для функции взаимной пространственной когерентности поля (ФВК) было составлено тензорное уравнение Дайсона в приближении Бурре, погрешность применения которого оценена неравенством с помощью метода мажорантного процесса [2]. Путем качественных оценок показано, что тензорное уравнение Дайсона в спектральном представлении переходит в пределе квазистатических [3] флюктуаций потенциала в кинетическое уравнение Больцмана вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2p \nabla_R \right) f_B(R, p, t) = - \int d^3 p' w_0(p, p') \times \\ \times \delta(p^2 - p'^2) [f_B(R, p, t) - f_B(R, p', t)], \quad (1)$$

$$w_0(p, p') = 2\pi B(p(s - s'), t)|_{t=0}.$$

Здесь $f_B(R, p, t)$ — спектральная плотность поля, $B(p, t)$ — пространственный фурье-образ кумулянта потенциала, s и s' — единичные векторы импульсов p и p' . Выражение $w_0(p, p') \delta(p^2 - p'^2)$ в интеграле столкновений имеет смысл вероятности перехода $p \rightarrow p'$ волнового пакета за единицу времени при элементарном акте рассеяния на эффективной неоднородности потенциала. Из-за множителя в виде дельта-функции уравнение Больцмана равносильно нестационарному уравнению переноса [4] излучения в квазистатической рассеивающей среде. Условия применимости уравнения Больцмана накладывают на временной масштаб флюктуаций потенциала ограничения снизу и сверху [1]. Поскольку эти условия имеют принципиальное значение, то пред-

ставляет интерес исследовать их на основании более строгих оценок, чем в [1]. Такие оценки, полученные методом интегральных неравенств и сравнения эволюционных операторов [5], приводятся в данной работе.

2. ФУНКЦИЯ ВЗАЙМОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Следуя [6], удобно перейти от билинейной комбинации $\gamma(p_1, p_2, t) = u(p_1, t)u^*(p_2, t)$ поля $u(p, t)$ к ее импульсному представлению $\gamma(p_1, p_2, t)$ путем преобразования Фурье по координатам p_1 и p_2 . Стохастическое уравнение Лиувилля для билинейной комбинации поля в импульсном представлении с заданным начальным условием $\gamma(p_1, p_2, t)|_{t=0} = \gamma_0(p_1, p_2)$, записанное в интегральной операторной форме, имеет вид

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma_0(t) - i \int_0^t dt' \int d^3k_1 d^3k_2 \hat{V}(k_1, k_2, t') \hat{S}_{k_1 k_2}(t - t') \gamma(t'). \quad (2)$$

Здесь $\gamma_0(p_1, p_2, t)$ — невозмущенное значение билинейной комбинации поля в свободном пространстве, $\hat{V}(k_1, k_2, t)$ — тензорный потенциал в импульсном представлении, равный

$$\hat{V}(k_1, k_2, t) = V(k_1, t) \delta^3(k_2) - \delta^3(k_1) V^*(k_2, t),$$

где $V(k, t)$ — пространственный фурье-образ потенциала $V(p, t)$.

Через $\hat{S}_{k_1 k_2}(t)$ обозначен оператор, действующий на некоторую пробную функцию $\chi(p_1, p_2)$ согласно правилу.

$$\hat{S}_{k_1 k_2}(t) \chi(p_1, p_2) = \exp[-i(p_1^2 - p_2^2)t] \chi(p_1 - k_1, p_2 - k_2). \quad (3)$$

Этот оператор производит сдвиг $p_{1,2} \rightarrow p_{1,2} - k_{1,2}$ и умножает пробную функцию на осциллирующую экспоненту с единичным модулем.

Представим решение уравнения Лиувилля (2) в виде ряда теории возмущений и усредним его почленно по ансамблю флуктуаций потенциала. В результате получаем ряд для ФВК $\bar{\gamma}(p_1, p_2, t)$. Члены этого ряда являются непрерывными и ограниченными функциями по совокупности аргументов p_1 и p_2 , если таким свойством обладает начальное значение $\gamma_0(p_1, p_2)$ билинейной комбинации поля. Поэтому можно воспользоваться для оценки членов рассматриваемого усредненного ряда C -нормой* функционального пространства непрерывных и ограниченных функций $\gamma_0(p_1, p_2)$, равной верхней грани их модуля:

$$\|\gamma_0\|_C = \sup_{p_1, p_2} |\gamma_0(p_1, p_2)|. \quad (4)$$

Важно отметить, что C -норма оператора $\hat{S}_{k_1 k_2}(t)$, определенного согласно (3), равна единице,

$$\|\hat{S}_{k_1 k_2}(t)\|_C = 1, \quad (5)$$

т. е. он является унитарным. Ряд теории возмущений для ФВК $\bar{\gamma}(t)$ в импульсном представлении исследуется на сходимость по C -норме

* В [1, 2] использовалась L^2 -норма. Заметим, что C -норма удобна при решении задачи о распространении волнового пакета, который практически остается внутри среды на протяжении всего времени наблюдения.

в точности так же, как и аналогичный ряд в координатном представлении по L^2 -норме, — методом мажорантного процесса [2].

Обозначим через $\gamma_D(p_1, p_2, t)$ приближенное значение ФВК в импульсном представлении, удовлетворяющее тензорному уравнению Дайсона в приближении Бурре. Разность между $\gamma(p_1, p_2, t)$ и $\gamma_D(p_1, p_2, t)$ подчиняется по C -норме оценке

$$\|\bar{\gamma}(t) - \gamma_D(t)\|_C \leq \frac{4t_0 t}{t_M^2} \exp\left(\frac{2t}{t_M}\right) \|\gamma_0\|_C, \quad (6)$$

где t_0 — временной масштаб флуктуаций потенциала, t_M — марковское время релаксации. Неравенство (6) аналогично неравенству (4) из [1].

Совместим в значениях $\gamma(p_1, p_2, t)$ и $\gamma_D(p_1, p_2, t)$ ФВК аргументы p_1, p_2 , полагая $p_1 = p_2 = p$. Это дает их диагональные части $f(p, t)$ и $f_D(p, t)$. Диагональная часть ФВК, например $f_D(p, t)$, может быть также получена путем интегрирования спектральной плотности $f_D(R, p, t)$ по координатам R центра тяжести. При этом выпадает из рассмотрения эффект пространственной дисперсии в тензорном уравнении Дайсона в спектральном представлении [1]. Мы сознательно отвлекаемся сейчас от рассмотрения пространственной дисперсии, сосредоточив внимание на анализе условий, при которых получается дельта-функция в интеграле столкновений уравнения Больцмана.

Разность между значениями диагональных частей ФВК $\bar{f}(p, t)$ и $f_D(p, t)$ по C -норме непрерывных и ограниченных функций от p , определенной аналогично (4), подчиняется неравенству вида (6). Причем, если начальное значение поля представляет собой частично когерентный волновой пучок, то в правой части этого неравенства можно заменить норму $\|\gamma_0\|_C$ начального значения $\gamma_0(p_1, p_2)$ ФВК на норму $\|f_0\|_C$ начального значения $\bar{f}(p, t)|_{t=0} = f_0(p)$ ее диагональной части.

Тензорное уравнение Дайсона, записанное для диагональной части $f_D(p, t)$ ФВК, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f_D(p, t) = -2 \int_0^t dt' \int d^3 p' B(p - p', t') \times \quad (7)$$

$$\times \cos[(p^2 - p'^2)t'] [f_D(p, t - t') - f_D(p', t - t')]$$

при условии вещественности пространственного фурье-образа кумулянта потенциала, $B(p, t) = B(-p, t)$. Такого рода уравнение в случае, когда потенциал испытывает только пространственные флуктуации, получено в [7] при исследовании рассеяния электронов на примесях в кристаллической решетке.

В уравнении (7) учитывается эффект временного запаздывания. Пренебрегая этим эффектом, приходим к кинетическому уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial t} f_N(p, t) = - \int d^3 p' W(p, p') [f_N(p, t) - f_N(p', t)], \quad (8)$$

где вероятность перехода $W(p, p')$ волнового пакета за единицу времени равна

$$W(p, p') = 2 \int_0^\infty dt B(p - p', t) \cos[(p^2 - p'^2)t]. \quad (9)$$

Оно было получено Папаниколау [6] двухвременным методом [8]. Разность между решениями уравнений (7) и (8) оценивается по С-норме неравенством

$$\|f_d(t) - f_p(t)\|_C \leq \frac{2t_0}{t_M} \left(\frac{2t}{t_M} + 1 \right) \exp\left(\frac{2t}{t_M}\right) \|f_0\|_C. \quad (10)$$

Переход между этими уравнениями производится в два этапа, на первом из которых в правой части уравнения (7) заменяем запаздывающий аргумент $t - t'$ на t и на втором этапе стремимся верхний предел t интегрирования по t' к бесконечности. Погрешности, возникающие на первом и втором этапах, представлены первым и вторым слагаемыми правой части неравенства (10) и оцениваются методом [5], который поясняется в Приложении.

3. ПРЕДЕЛ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛА

При гауссовом кумулянте потенциала с пространственным фурьеобразом $B(p, t)$, равным (26 а) из [1], вероятность перехода $W(p, p')$ в кинетическом уравнении (8) принимает вид

$$W(p, p') = 2\pi B_0(p - p') D(p^2 - p'^2), \quad (9a)$$

где $B_0(p) = B(p, t)|_{t=0}$ и через $D(\omega)$ обозначена функция

$$D(\omega) = \frac{1}{2} t_0 \exp\left(-\frac{\pi}{4} \omega^2 t_0^2\right). \quad (11)$$

Интеграл

$$\frac{1}{t_r} = \int W(p, p') d^3 p' \quad (12)$$

определяет время релаксации t_r кинетического уравнения (8), зависящее от волнового вектора p . Исследование показывает, что интеграл (12) допускает равномерную по волновому вектору оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_r} &\leq \frac{1}{t_r^0} = \frac{1}{t_M} O\left(\frac{l^2}{t_0}\right), \\ \frac{l^2}{t_0} &< O(1). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь t_r^0 — не зависящая от волнового вектора величина, обратное значение которой с точностью до постоянного множителя равно $(1/t_M)(l^2/t_0)$, где l — пространственный масштаб флуктуаций потенциала. Из оценки (13) видно, что если параметр квазистатичности l^2/t_0 флуктуаций потенциала достаточно мал, то отношение марковского времени релаксации t_M ко времени релаксации t_r^0 порядка параметра квазистатичности.

Согласно кинетическому уравнению (8), модуль импульса p волнового пакета изменяется при элементарном акте рассеяния на эффективной неоднородности. Однако в пределе квазистатических флуктуаций потенциала это изменение стремится к нулю, так как функция $D(p^2 - p'^2)$ начинает играть роль дельта-функции.

Заменим в вероятности перехода $W(p, p')$, равной (9 а), множитель $B_0(p - p')$ на $B_0(p(s - s'))$ и подставим получающееся при этом новое значение $W(p, p')$ в интеграл столкновений кинетического уравнения (8), одновременно заменяя в нем $f_p(p', t)$ на $f_p(ps', t)$. После

такого преобразования кинетическое уравнение (8) переходит в уравнение Больцмана для $f_B(p, t)$ с коэффициентом $w(p, p')$, равным

$$w(p, p') = \frac{4\pi}{p} B_0(p(s - s')) \int_0^\infty D(p^2 - p''^2) p''^2 dp''. \quad (14)$$

Сравним между собой решения кинетического уравнения (8) (до его описанного преобразования) и уравнения Больцмана с коэффициентом $w(p, p')$, равным (14). В результате сравнения получается следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \left| \int \chi(p) d^3 p [f_{\Pi}(p, t) - f_B(p, t)] \right| = \\ & = \left[O\left(\frac{l^2}{t_0}\right) + O\left(\frac{1}{V(\delta p)^2 t_0}\right) + O\left(\sqrt{\frac{l^2}{t_0}}\right) \right] \times \\ & \times \left(1 + \frac{t}{t_r^0} \right) \frac{t}{t_r^0} \exp\left(\frac{3t}{t_r^0}\right) \|f_0\|_C, \quad \frac{l^2}{t_0} < O(1). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь через $\chi(p)$ обозначена неотрицательная пробная функция с интегралом по волновому вектору p , равным единице, и обращающаяся в нуль при малых значениях модуля волнового вектора p порядка $t_0^{-1/2}$,

$$\begin{aligned} \chi(p) & \geq 0, \quad \int \chi(p) d^3 p = 1, \quad \chi(p) = 0, \quad p < p_1, \\ & p_1^2 t_0 > O(1). \end{aligned} \quad (16)$$

Через δp обозначен масштаб изменения начального значения $f_0(p)$ диагональной части ФВК, определяемый через C -норму производной $f_0^{(p)}(p)$ от этого начального значения по модулю p волнового вектора равенством

$$1/\delta p = \|f_0^{(p)}\|_C / \|f_0\|_C.$$

Способ получения оценки (15), согласующейся с качественной оценкой (34) из [1], описан в Приложении.

Сравним погрешность перехода $\bar{f} \rightarrow f_{\Pi}$ от точного значения $\bar{f}(p, t)$ диагональной части ФВК к решению $f_{\Pi}(p, t)$ кинетического уравнения (8), оцениваемую неравенствами (6) и (10), с погрешностью перехода $f_{\Pi} \rightarrow f_B$ от $f_{\Pi}(p, t)$ к решению $f_B(p, t)$ уравнения Больцмана с коэффициентом $w(p, p')$, равным (14), представленную оценкой (15). Ограничим сверху отношение t^*/t_r^0 интервала t^* времени наблюдения $0 < t < t^*$ к времени релаксации t_r^0 , которое, согласно равенству (13), порядка большеванского времени релаксации t_B , вычисленного в [1]. Выбираем параметр l^2/t_0 квазистатичности настолько малым и параметр $(\delta p)^2 t_0$ гладкости начального значения $f_0(p)$ в зависимости от модуля p настолько большим, чтобы погрешность перехода $f_{\Pi} \rightarrow f_B$ была достаточно мала. Выбранное значение параметра квазистатичности, не зависящее от среднего квадрата $\langle V^2 \rangle$ флуктуаций потенциала, подставляем в значение погрешности перехода $\bar{f} \rightarrow f_{\Pi}$. Наконец, отношение t_0/t_m временного масштаба t_0 флуктуаций потенциала к марковскому времени релаксации t_m можно взять настолько малым, что погрешность этого перехода ($\bar{f} \rightarrow f_{\Pi}$) станет сколь угодно мала.

Коэффициент $w(p, p')$ уравнения Больцмана, равный (14), строго говоря, отличается от его значения $w_0(p, p')$, равного (1). Однако это

отличие при выбранной пробной функции $\chi(p)$, удовлетворяющей условиям (16), не существенно и приводит при решении уравнения Больцмана для $f_B(p, t)$ к погрешности порядка $O(1/p^2 t_0)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поясним вывод оценки (10) погрешности пренебрежения эффектом временного запаздывания в уравнении (7). Ограничимся получением первого слагаемого в правой части этой оценки.

Перепишем уравнение (7) в операторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_D(t) = \int_0^t dt' \hat{M}(t - t') f_D(t'), \\ f_D(0) = f_0. \quad (\text{П.1})$$

Его ядро $\hat{M}(t)$ представляет собой ограниченный оператор, C -норма которого оценивается как

$$\| M(t) \|_C \leq 4B(t), \\ B(t) = \int |B(p, t)| d^3 p. \quad (\text{П.2})$$

Вводим другое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(t) = \int_0^t dt' \hat{M}(t - t') f_1(t'), \\ f_1(0) = f_0, \quad (\text{П.3})$$

которое формально получается путем вынесения функции $f_D(t')$ из-под знака интеграла в правой части уравнения (П.1) в момент $t' = t$. Оценим норму разности решений этих двух уравнений. Согласно [5] (стр. 161), оцениваемая разность удовлетворяет соотношению

$$f_D(t) - f_1(t) = - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{K}_1(t - t') \times \\ \times \hat{M}(t' - t'') [f_D(t') - f_D(t'')]. \quad (\text{П.4})$$

Здесь через $\hat{K}_1(t)$ обозначен эволюционный оператор, отвечающий уравнению (П.3). Он подчиняется интегральному уравнению

$$\hat{K}_1(t) = \hat{1} + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{M}(t' - t'') \hat{K}_1(t'),$$

где $\hat{1}$ — единичный оператор. Взяв норму от обеих частей этого уравнения, приходим к интегральному неравенству:

$$\| \hat{K}_1(t) \|_C \leq 1 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \| \hat{M}(t' - t'') \|_C \| \hat{K}_1(t') \|_C.$$

Оно решается с помощью оценки (П.2) и интегральной леммы [5] (стр. 153). Это решение имеет вид

$$\|\hat{K}_1(t)\|_C \leq \exp\left(\frac{2t}{t_M}\right). \quad (\text{П.5})$$

Аналогично получается оценка для нормы решения уравнения (П.1) вида

$$\|f_D(t)\|_C \leq \exp\left(\frac{2t}{t_M}\right) \|f_0\|_C. \quad (\text{П.6})$$

Она, в свою очередь, непосредственно приводит к оценке нормы производной по времени от $\hat{f}_D(p, t)$, если оценить норму правой части уравнения (П.1). Это дает

$$\left\| \frac{\partial f_D(t)}{\partial t} \right\|_C \leq \frac{2}{t_M} \exp\left(\frac{2t}{t_M}\right) \|f_0\|_C. \quad (\text{П.7})$$

Теперь обратимся к соотношению (П.4). Оценим в его правой части разность $\hat{f}_D(t') - f_D(t'')$ по формуле конечных приращений. Взяв далее норму от обеих частей этого соотношения и используя (П.2), (П.5), (П.7), получаем искомую оценку на запаздывание:

$$\|f_D(t) - f_D(t'')\|_C \leq \frac{4t_0 t}{t_M^2} \exp\left(\frac{2t}{t_M}\right) \|f_0\|_C. \quad (\text{П.8})$$

Оценка (15) погрешности перехода от кинетического уравнения (8) к уравнению Больцмана получается в сущности таким же способом, как и оценка (П.8), однако вычисления оказываются гораздо сложнее. Наметим их схему.

Запишем для разности между $f_{\Pi}(p, t)$ и $f_B(p, t)$ соотношение типа (П.4). Умножая его на пробную функцию $\chi(p)$, интегрируя по p и переходя к оценке по модулю сверху, получаем

$$\begin{aligned} \Delta(f_{\Pi} \rightarrow f_B) &\leq t \sup_{(t' < t, p > p_0)} \left[2 \int d^3 p' |B_0(p - p') - \right. \\ &\quad \left. - B_0(p(s - s'))| D(p^2 - p'^2) \|f_{\Pi}(t')\|_C + \right. \\ &\quad \left. + \int d^3 p' B_0(p(s - s')) D(p^2 - p'^2) |f_{\Pi}(p', t') - f_{\Pi}(ps', t')| \right], \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

где через $\Delta(f_{\Pi} \rightarrow f_B)$ обозначено выражение в левой части оценки (15). Норма $\|f_{\Pi}(t)\|_C$, входящая в первый интеграл правой части (П.9), оценивается путем представления кинетического уравнения (8) в интегральной форме и перехода от него к интегральному неравенству, решение которого дает

$$\|f_{\Pi}(t)\|_C \leq \exp\left(\frac{2t}{t_r^0}\right) \|f_0\|_C. \quad (\text{П.10})$$

Разность $f_{\Pi}(p', t') - f_{\Pi}(ps', t')$, входящая во второй интеграл правой части (П.9), оценивается по формуле конечных приращений. При этом используется следующая оценка для производной $f_{\Pi}^{(p)}(p, t)$ от решения кинетического уравнения (18) по модулю p волнового вектора:

$$|f_{\Pi}^{(p)}(p, t)| \leq \left[\|f_0^{(p)}\|_C + l(1 + lp) \frac{t}{t_r^0} \|f_0\|_C \right] \exp\left(\frac{3t}{t_r^0}\right), \quad \frac{t^2}{t_r^0} < O(1). \quad (\text{П.11})$$

Эта оценка получена путем составления интегрального уравнения для производной $f_{\Pi}^{(p)}(p, t)$ и перехода от него к интегральному неравенству.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 2, 253 (1975).
2. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 7, 1071 (1973).
3. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
4. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
5. Ю. Л. Долецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, изд. Наука, М., 1970.
6. G. C. Rapanicolaou, J. Math. Phys., 13, № 12, 1912 (1972).
7. W. Kohn, J. Luttinger, Phys. Rev., 108, № 3, 590 (1957) (см. перевод в сб. Вопросы квантовой теории необратимых процессов, ИЛ, М., 1961).
8. G. C. Rapanicolaou, J. B. Keller, SIAM J. Appl. Math., 21, № 2, 287 (1971).

Поступила в редакцию
5 сентября 1975 г.

ON THE KINETIC EQUATION FOR A QUANTUM WAVE PACKET IN MEDIUM WITH QUASI-STATIC POTENTIAL FLUCTUATIONS

Yu. N. Barabanenkov

The propagation of a wave packet in a randomly-variable medium is considered based upon the Schrödinger equation with the random potential fluctuating in space and time according to the Gaussian law. Using the majorant process and integral inequality methods the applicability condition of the kinetic Boltzmann equation are found for calculating a diagonal part of the reciprocal spatial coherence function (RCF) in the pulse representation. It is shown that these conditions are satisfied in the limit when in the case of the ratio of the observation time and the Boltzmann relaxation time being limited above, the parameter of the quasi-static potential fluctuations and the ratio of the time scale of the potential fluctuations to the Markov's relaxation time tend to zero and the smoothness parameter of the initial value of the diagonal part of RCF tends to infinity.

УДК 538.574.5

О РАДИАЦИОННОМ ЗАТУХАНИИ КОЛЕБАНИЙ ТИПА «ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ» НА ПРОЗРАЧНОЙ ГРАНИЦЕ

Е. Л. Силаков

Рассматривается задача о затухании колебаний типа «шепчущей галереи» на прозрачной границе при условии полного внутреннего отражения. При помощи комплексного лучевого метода получено выражение для собственной функции с внешней стороны границы раздела в виде суммы двух волн: прямой и отраженной от комплексной каустики. Проведено сравнение с асимптотикой точного решения в случае круга и эллипса, близкого к окружности. Найдена вещественная добавка к импедансу, определяющая минимум частотного значения. Обсуждаются пределы применимости комплексного лучевого метода и возможности его применения к неаналитическим границам.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Можно выделить два механизма затухания колебаний, сосредоточенных внутри ограниченной области с прозрачной границей: 1) затухание вызвано тем, что волна, падающая изнутри на границу раздела, порождает вне границы уходящую волну, 2) падающая волна испытывает полное внутреннее отражение, поле вне границы сначала убывает экспоненциально, а уходящая волна формируется вдали от границы. При этом говорят о диффузии поля через границу или, по аналогии с квантовой механикой, о радиационном затухании колебаний [1]. Первый механизм достаточно хорошо изучен [3, 4]; известно, в частности, что асимптотически декремент затухания имеет степенной порядок по частоте. Второй механизм изучен очень мало, хотя и представляет значительный интерес, поскольку в этом случае колебания обладают очень высокой добротностью. До сих пор удалось решить только задачи с полным разделением переменных (сфера [1]), которые показывают, что в этом случае следует ожидать экспоненциальной зависимости декремента затухания от частоты.

Для колебаний типа «шепчущей галереи» на прозрачной границе возможны оба механизма. Эти колебания описываются собственными функциями уравнения Гельмгольца, сосредоточенными вблизи выпуклой замкнутой границы раздела двух сред с внутренней ее стороны.

Ограничимся рассмотрением двумерной задачи. Тогда колебания типа «шепчущей галереи» в лучевом приближении определяются системой лучей, отражающихся под малыми углами от границы (рис. 1), причем угол скольжения α связан с радиусом кривизны границы ρ соотношением [2, 3]

$$\alpha(s) = \propto \rho^{-1/3}(s) \quad (\propto \ll 1), \quad (1)$$

где s — длина дуги границы, а коэффициент \propto определяет близость каустики этой системы лучей к границе раздела. Собственные значения, соответствующие колебаниям типа «шепчущей галереи» на прозрачной границе, определяются обобщенными уравнениями Келлера—Рубинау [4]:

$$\begin{aligned}
 k_1 \left[L - \frac{x^2}{2} \int_0^L \rho^{-2/3}(s) ds \right] &= 2\pi q \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots), \\
 \frac{2}{3} k_1 x^3 - i \int_0^L w(s) \ln V(s) ds &= 2\pi \left(p + \frac{1}{4} \right), \tag{2} \\
 w(s) &= \left[\int_0^L \rho^{-2/3}(s) ds \right]^{-1} \rho^{-2/3}(s), \\
 V_0(s) &= \frac{\sin \alpha - \sqrt{N^2 - \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha + \sqrt{N^2 - \cos^2 \alpha}}.
 \end{aligned}$$

Здесь L — длина границы, $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число во внутренней среде, являющееся спектральным параметром задачи, N — показатель преломления внешней среды по отношению к внутренней, $V(s)$ — коэффициент отражения волны, в нулевом приближении совпадающей с «плоским» коэффициентом Френеля V_0^* , а $w(s)$ характеризует вклад окрестности данной точки границы в излучение.

Если внешняя среда является оптически более плотной, $N > 1$, то лучи, преломляясь, проходят через границу и образуют вне ее уходящую волну. При этом $\operatorname{Re} \ln V_0(s) < 0$ и уравнения (2) определяют комплексные собственные числа [4]. При $N < 1$ лучи испытывают полное внутреннее отражение, $|V_0| = 1$ и уравнения (2) становятся вещественными. В этом случае мнимая часть собственного значения определяется малым отличием модуля коэффициента отражения от единицы или наличием положительной добавки к граничному импедансу собственной функции, жестко связанному с коэффициентом отражения:

$$Z \equiv \frac{\partial U}{\partial n} / ikU = \sin \alpha \frac{1 - V}{1 + V}. \tag{3}$$

Целью настоящей работы является нахождение вещественной добавки к импедансу и мнимой части собственных значений при $N < 1$. Для этого сначала строится собственная функция во внешности границы при помощи комплексного лучевого метода. Оказывается, что вблизи границы раздела существует экспоненциально малая волна, распространяющаяся по направлению к границе и определяющая малое отличие модуля коэффициента отражения от единицы.

2. ЭИКОНАЛ И СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ВНЕШНЕЙ СТОРОНЫ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

Введем поверхностные координаты n, s , где n — расстояние по нормали до границы, $n > 0$ во внешней среде, а s — длина дуги до основания нормали. Они связаны с декартовыми координатами соотношениями [3]

$$x = x(s) - ny'(s), \quad y = y(s) + nx'(s). \tag{4}$$

Здесь $x(s), y(x)$ — уравнения граничной кривой. Для замкнутой кривой удобно рассматривать вместо длины дуги периодическую переменную τ :

* V_0 определяется из условий непрерывности собственной функции и ее производной на границе раздела. Если потенциал испытывает скачок на границе, то выражение для V_0 несколько изменится.

$$\begin{aligned}x(\gamma) &= \int_0^\gamma \rho(v) \sin v dv, \quad y(\gamma) = \int_0^\gamma \rho(v) \cos v dv, \\s &= \int_0^\gamma \rho(v) dv, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi.\end{aligned}\tag{5}$$

Начало декартовой системы координат находится на кривой и совпадает с началом отсчета длины дуги, ось y касается кривой, ось x направлена внутрь области, а отсчет дуги ведется по часовой стрелке (рис. 1). Переменная γ имеет простой геометрический смысл, она определяет угол между нормалью в данной точке и отрицательным направлением оси x .

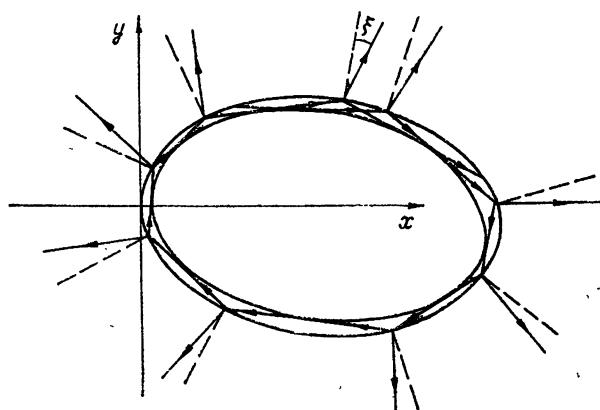


Рис. 1.

Рассмотрим собственную функцию, описывающую распространение лучей внутри области в направлении возрастания γ . При $N > 1$ преломленные лучи выходят по закону Снеллиуса под углом, близким к $\xi = \arcsin(1/N)$, и однозначно покрывают всю внешнюю среду. Уравнение луча, выходящего из точки γ_0 под углом ξ к нормали, в переменных n , γ имеет вид

$$n(\gamma_0, \gamma) = \frac{\int_{\gamma_0}^{\gamma} \rho(v) \cos(\gamma_0 + \xi - v) dv}{\sin(\gamma_0 + \xi - \gamma)} \quad (\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_0 + \xi), \tag{6}$$

а расстояние по лучу до границы раздела

$$R(\gamma_0, \gamma) = \frac{\int_{\gamma_0}^{\gamma} \rho(v) \cos(\gamma - v) dv}{\sin(\gamma_0 + \xi - \gamma)} \quad (\gamma_0 \leq \gamma < \gamma_0 + \xi). \tag{7}$$

Как и следовало ожидать, $n, R \xrightarrow[\gamma \rightarrow \gamma_0 + \xi]{} \infty$, так как луч параллелен нормали к кривой в точке $\gamma_0 + \xi$.

Переменные γ_0, R задают приближенные лучевые координаты. Приближение является весьма точным, поскольку, как легко показать, поправки к углу ξ имеют порядок $k^{-2/3}$ и область применимости формул (6), (7) асимптотически возрастает. В этих координатах выражение для эйконала имеет простой вид:

$$\tau(\gamma_0, R) = k_1 \int_0^{\gamma_0} \rho(v) dv + k_2 R \quad (k_2 = N k_1). \quad (8)$$

Первое слагаемое описывает набег фазы волны «шепчущей галереи» при распространении вдоль границы раздела, а второе — вдоль луча; в обоих слагаемых учтены только главные члены при больших частотах. Радиус кривизны r_{kp} волнового фронта определяется локальными свойствами кривой в точке выхода луча:

$$r_{kp}(\gamma_0, R) = \rho(\gamma_0) \cos \xi + R. \quad (9)$$

Выражение для собственной функции во внешней среде в лучевом приближении записывается в виде

$$U(\gamma_0, R) = W(\gamma_0) \sqrt{\frac{r_{kp}(\gamma_0)}{r_{kp}(\gamma_0, R)}} \exp\{i\tau(\gamma_0, R)\}, \quad (10)$$

$$W(\gamma_0) = -\frac{2 \times \rho^{-1/3}(\gamma_0)}{\sqrt{N^2 - 1}}, \quad r_{kp}(\gamma_0) = \rho(\gamma_0) \cos \xi,$$

где $W(\gamma_0)$ — коэффициент прохождения Френеля. Это выражение не имеет особенностей и описывает волну, расходящуюся от границы раздела.

При $N < 1$ лучи «шепчущей галереи» испытывают полное внутреннее отражение и не проходят через границу. Однако если радиус кривизны границы $\rho(\gamma)$ является аналитической функцией, то решение (10) допускает аналитическое продолжение по показателю преломления. В самом деле, уравнение Гельмгольца и решение (10) аналитически зависят от N , а граничные условия от N не зависят. Отсюда следует, что решение (10) можно продолжить по N в верхнюю полуплоскость, обойти особую точку $N = 1$ и вернуться к вещественным $N < 1$. Это эквивалентно введению малых потерь во внешней среде с последующим переходом в область $N < 1$ и устремлением потерь к нулю.

Продолженное решение определено в комплексном пространстве и описывает комплексные лучи, выходящие из комплексных точек аналитически продолженной границы раздела и пересекающие вещественное пространство. Комплексные лучи использовались во многих работах [5–8], и, хотя их применение часто трудно оправдать математически, оно сравнительно просто приводит к физически хорошо осмысленным результатам.

Используя простую связь между n и R , легко получить приближенное выражение для эйконала вдали от границы:

$$\tau(n, \gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k_2 n + f(\gamma). \quad (11)$$

Таким образом, на больших расстояниях продолженное решение описывает расходящуюся волну, удовлетворяющую условию излучения.

Поведение собственной функции вблизи границы раздела определяется производной от эйконала по нормали

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = k_2 \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N} = i k_2 \sin \eta, \quad (12)$$

$$\xi \equiv \frac{\pi}{2} - i \eta, \quad \eta > 0.$$

Здесь знак γ фиксируется правилом обхода точки ветвления в верхней полуплоскости. Как и следовало ожидать, собственная функция во внешней среде экспоненциально убывает вблизи границы раздела.

Эйконал и собственная функция зависят от n неявно, через функцию $\gamma_0(n)$. Отображение $\gamma_0(n)$ является двузначным в окрестности нуля производной обратного отображения

$$\frac{dn}{d\gamma_0} = - \frac{\rho(\gamma_0) \cos \xi + R(\gamma_0, \gamma)}{\sin(\gamma_0 + \xi - \gamma)} = - \frac{r_{kp}}{\sin(\gamma_0 + \xi - \gamma)} = 0. \quad (13)$$

Знаменатель здесь всегда конечен, и это равенство совпадает с обычным определением каустики*. Она расположена в комплексном пространстве и лишь иногда, при наличии симметрии границы раздела, имеет вещественные точки.

В окрестности каустики эйконал также является двузначной функцией и в каждую точку приходят два комплексных луча — прямой и отраженный от каустики. Поэтому к решению (10) надо добавить слагаемое, описывающее волну, отраженную от каустики. Впервые идея об отражении комплексных лучей от каустики использовалась в работе [5] в плоской задаче.

Вторая ветвь функции $\gamma_0^{(1)}(n)$ определяет комплексные точки выхода лучей, отраженных от каустики и приходящих к границе в вещественных точках:

$$\gamma_0^{(1)}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +0} \gamma_{01}(\gamma) \neq \gamma, \quad \int_0^{\gamma_{01}(\gamma)} \rho(v) \cos(\gamma_{01} + \xi - v) dv = 0. \quad (14)$$

Ограничимся рассмотрением кривых, достаточно близких к окружности, для которых это уравнение разрешимо. Заметим, что его решение определяется геометрией границы и показателем преломления, но не зависит от длины волны.

Полное решение, учитывающее обе волны вне границы раздела, можно записать в виде

$$U(n, \gamma) = W(\gamma_0) \sqrt{\frac{r_{kp}(\gamma_0)}{r_{kp}(\gamma_0, \gamma)}} \exp[i\tau(\gamma_0, \gamma)] + W(\gamma_0^{(1)}) \times \\ \times \sqrt{\frac{r_{kp}(\gamma_0^{(1)})}{r_{kp}(\gamma_0^{(1)}, \gamma)}} \exp[i\tau(\gamma_0^{(1)}, \gamma)], \quad (15)$$

где $W(\gamma_0)$ — аналитически продолженный коэффициент прохождения.

Поведение второй волны вблизи границы раздела и порядок ее величины определяются нормальной производной на границе и мнимой частью эйконала соответственно

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial n} \right|_{\gamma_0 \rightarrow \gamma_{01}} = k_2 \cos(\gamma_{01} + \xi - \gamma), \quad (16)$$

$$\tau(\gamma_{01}, \gamma) = k_1 \int_0^\gamma \rho(v) dv + k_2 \int_\gamma^{\gamma_{01}} \rho(v) [\sin \xi - \sin(\gamma_{01} + \xi - v)] dv.$$

Здесь при выводе второго выражения использовано уравнение (14). Для кривых, близких к окружности, $\operatorname{Re} \gamma_{01} \sim \gamma$, $\operatorname{Im} \gamma_{01} \sim 2\eta$ и, как

* Можно показать, что для выпуклой кривой, близкой к окружности, вторая производная отлична от нуля и каустика неособая.

легко показать, мнимая часть самого эйконала положительна. Таким образом, вторая волна экспоненциально мала вблизи границы раздела, но экспоненциально возрастает при удалении от нее. Выражение (15) описывает комплексную волну, уходящую от границы раздела, отражающуюся от каустики и приходящую обратно к границе. Оно справедливо для кривых, близких к окружности, радиус кривизны которых $\rho(\gamma)$ не имеет особенностей, в том числе и нулей, в комплексной полосе разрешимости уравнений (13), (14). Для кривых с большими изменениями радиуса кривизны это требование может выполняться на отдельных участках. Тогда, в силу локальности лучевых построений, решение (15) описывает волновой процесс с внешней стороны этих участков границы.

Интересно рассмотреть неаналитические границы раздела. Гладкую кривую можно аппроксимировать с желательной степенью точности аналитической функцией, например, усеченным рядом Фурье. Для кривых, близких к окружности, можно показать, что различные аппроксимирующие функции остаются близкими в некоторой полосе комплексной угловой переменной. Если эта полоса достаточно велика, то, взяв одну из этих функций в качестве исходной кривой, можно применять комплексный лучевой метод. Однако при уменьшении длины волны совместная полоса близости аппроксимирующих функций уменьшается и решение (15) становится несправедливым. Можно сказать, что неаналитичность связана с нарушением локальных свойств границы, и комплексная волна чувствует это.

3. СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ «ПРОЗРАЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ»

Если граница раздела является окружностью, то задача решается точно методом разделения переменных и собственная функция с внешней стороны границы пропорциональна функции Ханкеля первого рода:

$$U = \text{const } H_q^{(1)}(k_2 r) e^{iq\gamma} \quad (r \geq a, \quad q = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Здесь r, γ — полярные координаты на плоскости (рис. 2).

Лучевое представление для собственной функции можно выписать в явном виде, так как все интегралы берутся. При $N > 1$, как легко показать, выражение (10) сводится к обычному асимптотическому представлению функции Ханкеля при больших аргументах.

Рассмотрим случай $N < 1$. Уравнение (6) луча, отходящего от границы, после интегрирования принимает вид

$$r = n + a = \frac{a \operatorname{ch} \eta}{\operatorname{ch} [\eta - i(\gamma - \gamma_0)]}, \quad \rho(\gamma) \equiv a. \quad (18)$$

При монотонном возрастании n приращение угла γ сначала является чисто мнимым и становится вещественным лишь после перехода аргумента гиперболического косинуса через нуль. Точка перехода через нуль в полном согласии с уравнением (13) определяет каустику

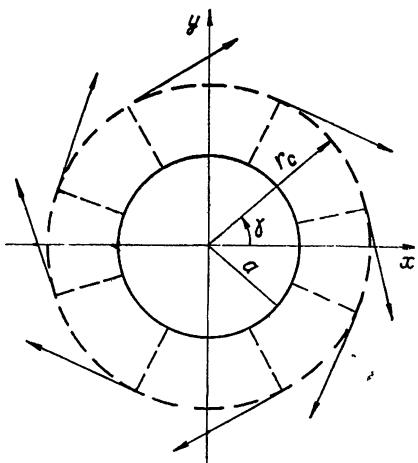


Рис. 2.

$$r_c = a \operatorname{ch} \eta = \frac{q}{k_2}. \quad (19)$$

Здесь мы использовали условие квантования (2) для колебаний типа «шепчущей галереи». Каустика представляет собой вещественную окружность, расположенную вне границы раздела. Она совпадает с линией смены асимптотики, точного решения (17). Лучи, выходящие под комплексными углами $\operatorname{Im} \gamma_0 = \eta$, приходят на каустику в вещественных точках и затем под прямым углом отходят от каустики (рис. 2). Обращая выражение (18), находим, что $\gamma_0(r)$ является двузначной функцией и в области между каустикой и границей раздела имеет вид

$$\gamma_0 = \gamma + i\eta \pm i \ln \left(\frac{a}{r} \operatorname{ch} \eta + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} \operatorname{ch}^2 \eta - 1} \right). \quad (20)$$

Эйконал также является двузначной функцией

$$\begin{aligned} \tau(r, \gamma) = k_1 a \gamma + ik_1 a & \left[\eta \mp \ln \left(\frac{a}{r} \operatorname{ch} \eta + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} \operatorname{ch}^2 \eta - 1} \right) \right] - \\ & - ik_2 a \operatorname{sh} \eta \pm ik_2 r \sqrt{\frac{a^2}{r^2} \operatorname{ch}^2 \eta - 1}, \quad a \ll r < r_c. \end{aligned} \quad (21)$$

Одна ветвь эйконала описывает главную волну, уходящую от границы, а другая — экспоненциально малую, но возрастающую при удалении от границы волну, отраженную от каустики. На каустике обе ветви совпадают.

Амплитуда волны определяется аналитическим продолжением выражения (9) для радиуса кривизны волнового фронта

$$r_{kp} = \pm ir \sqrt{\frac{a^2}{r^2} \operatorname{ch}^2 \eta - 1}. \quad (22)$$

Подставив (21) и (22) в формулу (15), получаем лучевое приближение для собственной функции в кольце между границей и каустикой:

$$\begin{aligned} U(r, \gamma) = W \frac{\sqrt{\frac{a}{r} \operatorname{sh} \eta}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} & \left\{ \exp \left\{ k_2 r [\zeta \ln (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \sqrt{\zeta^2 - 1}] \right\} - \right. \\ & \left. - i \exp \left\{ -k_2 r [\zeta \ln (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) - \sqrt{\zeta^2 - 1}] \right\} \right\} e^{iq\gamma - q(\eta - \operatorname{th} \eta)}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$k_1 a = q, \quad \zeta = \frac{a}{r} \operatorname{ch} \eta = \frac{q}{k_2 r}, \quad a \ll r < \frac{q}{k_2}.$$

Это выражение с точностью до углового множителя пропорционально первому члену равномерного асимптотического разложения функции Ханкеля при значке, большем аргумента [9]. При этом следует учесть, что мнимая часть ζ положительна, поскольку собственные значения имеют отрицательную мнимую часть.

4. СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ «ПРОЗРАЧНОГО ЭЛЛИПСА», БЛИЗКОГО К ОКРУЖНОСТИ

Для эллипса, близкого к окружности, все амплитудные множители можно взять из решения задачи для случая окружности и учесть только поправки к эйконалу уходящей и приходящей волн.

Уравнение кривой для эллипса в первом приближении имеет следующий вид:

$$\rho(\gamma) = a \left[1 - \frac{e^2}{4} (1 + 3 \cos 2\gamma) \right], \quad (24)$$

где a — большая полуось и $e \ll 1$ — эксцентриситет эллипса, являющийся малым параметром.

Приближенное уравнение луча, уходящего от границы, записывается в виде

$$n + a = \frac{a}{\sin(\gamma_0 + \xi - \gamma)} \left\{ \sin \xi + e^2 \left[(\sin \gamma_0 - \sin \gamma) \cos(\gamma_0 + \xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sin \xi \sin^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \gamma \sin(\gamma_0 + \xi - \gamma) \right] \right\}. \quad (25)$$

Теперь, при монотонном возрастании n приращение γ будет иметь ненулевую вещественную и мнимую части. Каустика становится комплексной и имеет лишь четыре вещественных точки при $\gamma = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$.

Обращая уравнение луча, можно получить зависимость $\gamma_0(n, \gamma)$. Для точек на границе разделя она имеет простой вид:

$$\gamma_0(\gamma)|_{n=0} = \gamma + \left[i\eta - \frac{e^2}{2} \operatorname{sh}^2 \eta \sin(2\gamma + 2i\eta) \right] (1 \mp 1). \quad (26)$$

Для уходящей волны эйконал на границе является вещественным и описывает распространение волны «шепчущей галереи» вдоль границы:

$$\tau_0(\gamma) = q \left(\gamma - \frac{3}{8} e^2 \sin 2\gamma \right). \quad (27)$$

Эйконал приходящей волны, кроме мнимого слагаемого, описывающего затухание, содержит также вещественную добавку к начальной фазе:

$$\tau_1(\gamma) = \tau_0(\gamma) + 2iq(\eta - \operatorname{th} \eta) - \frac{ie^2}{2} q \operatorname{th} \eta \operatorname{sh}^2 \eta \cos(2\gamma + 2i\eta). \quad (28)$$

Как и следовало ожидать, в точках минимума радиуса кривизны приходящая волна имеет минимальное затухание.

Рассмотрим асимптотическое поведение при больших частотах точной собственной функции. Уравнение Гельмгольца в эллиптических координатах допускает неполное разделение переменных, что приводит к двум связанным уравнениям Матье. Внутри эллипса колебания типа «шепчущей галереи» описываются произведением угловой и радиальной функций Матье в ВКБ-приближении [2]:

$$U^{(1)}(\mu, \theta) = A \frac{\exp \left(ik_1 c \int_0^\theta \sqrt{ch^2 \mu_q - \cos^2 \varphi} d\varphi + ik_1 c \int_{\mu_q}^\mu \sqrt{ch^2 t - ch^2 \mu_q} dt \right)}{\sqrt{(ch^2 \mu_q - \cos^2 \theta)(ch^2 \mu - ch^2 \mu_q)}}, \quad (29)$$

$$2k_1 c \int_0^{\pi/2} \sqrt{ch^2 \mu_q - \cos^2 \theta} d\theta = \pi q, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu_q < \mu \leq \mu_1,$$

$$x = c \operatorname{ch} \mu \cos \theta, \quad y = c \operatorname{sh} \mu \sin \theta, \quad a = c \operatorname{ch} \mu_1,$$

где c — фокусное расстояние граничного эллипса. Второе равенство вытекает из требования периодичности решения по углу и определяет положение внутренней каустики волны «шепчущей галереи».

Собственную функцию с внешней стороны эллипса следует искать в виде ряда по частным решениям вида (29), так как ввиду зависимости постоянной разделения от свойств среды угловые собственные функции внутри и вне эллипса образуют различные ортонормированные системы:

$$U^{(2)}(\mu, \theta) = \sum_n A_n \frac{\exp \left(ik_2 c \int_0^\theta \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_n - \cos^2 \varphi} d\varphi + k_2 c \int_\mu^\mu_n \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_n - \operatorname{ch}^2 t} dt \right)}{\sqrt[4]{(\operatorname{ch}^2 \mu_n - \cos^2 \theta)(\operatorname{ch}^2 \mu_n - \operatorname{ch}^2 \mu)}}, \quad (30)$$

$$2k_2 c \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_n - \cos^2 \theta} d\theta = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu_1 \leq \mu.$$

Скалярное произведение в L_2 угловых функций разных сред в первом приближении приводится к интегральному представлению функции Бесселя, и для коэффициентов A_n , с учетом лишь множителей, зависящих от n , получается следующее выражение:

$$A_n = (b_n - a)^{1/4} J_m \left[q \frac{e^2}{8} (1 - N^2) \right] \exp \left(-k_2 \int_a^{b_n} \sqrt{\frac{b_n^2 - x^2}{x^2 - c^2}} dx \right),$$

$$b = c \operatorname{ch} \mu, \quad 2m = q - n.$$
(31)

В выражении для собственной функции под знаком суммы наиболее быстро меняется функция Бесселя и основной вклад дают слагаемые с малыми m . Поэтому можно пренебречь зависимостью от n в амплитуде, а в фазе учесть лишь первое слагаемое в разложении по малому параметру m/q . В результате ряд по m сводится к производящей функции для функции Бесселя [10] и свертывается. Окончательное выражение для собственной функции приводится к виду

$$U^{(2)}(b, \theta) = A_1 \left(\frac{b_q^2 - a^2}{b_q^2 - b^2} \right)^{1/4} \exp \left\{ -k_2 \int_a^b \sqrt{\frac{b_q^2 - x^2}{x^2 - c^2}} dx + \right.$$

$$+ iq \left(\theta - N^2 \frac{e^2}{8} \sin 2\theta \right) - q \frac{e^2}{8} (1 - N^2) \operatorname{sh} \left[-2 \ln \frac{b(b_q + \sqrt{b_q^2 - a^2})}{a(b_q + \sqrt{b_q^2 - a^2})} + \right. \quad (32)$$

$$\left. \left. + 2i\theta \right] \right\}, \quad b_q = a \operatorname{ch} \eta \left(1 - \frac{e^2}{4} \operatorname{th}^2 \eta \right), \quad a \leq b < b_q.$$

Решение имеет обычную лучевую структуру, но с комплексной фазой. Полагая $b = a$ и используя связь θ и γ , легко показать, что фаза совпадает с эйконалом (27) уходящей волны на границе

$$\theta = \gamma - \frac{e^2}{4} \sin 2\gamma. \quad (33)$$

Выражение (32) описывает волну, уходящую от границы раздела. Чтобы получить приходящую волну, нужно, как и в случае окружности, взять другую ветвь функции $\sqrt{b_q^2 - b^2}$, т. е. изменить знак перед этим корнем, а затем положить $b = a$. Тогда в амплитуде появляется множитель, описывающий отражение от каустики, а в фазе интеграл разлагается в ряд по e^2 и легко берется, после чего элементарные выкладки приводят к выражению (28) для эйконала приходящей волны на границе раздела.

5. ПОПРАВКИ К ИМПЕДАНСУ И КОМПЛЕКСНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Собственной функции (15) соответствует граничный импеданс вида

$$Z = i \operatorname{th} \eta \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\cos(\gamma_{01} + \xi - \gamma)}{\cos \xi} \right] \sqrt[3]{\frac{\rho(\gamma)}{\rho(\gamma_{01})}} \sqrt{\frac{\rho(\gamma_{01}) \cos \xi}{\rho(\gamma_{01}) \cos \xi + R(\gamma_{01}, \gamma)}} \times \right. \\ \left. \times \exp[i\tau_1(\gamma) - i\tau_0(\gamma)] \right\}, \quad \tau_0(\gamma) \equiv \tau(\gamma, \gamma), \quad \tau_1(\gamma) \equiv \tau[\gamma_{01}(\gamma), \gamma]. \quad (34)$$

Здесь второе слагаемое в фигурных скобках описывает экспоненциально малую добавку к выражению для импеданса в лучевом приближении. Можно показать, что для кривых, близких к окружности, вещественная часть добавки к импедансу положительна, т. е. модуль коэффициента отражения меньше единицы, что соответствует уходу энергии через границу. Однако выделить вещественную часть импеданса в явном виде не удается, и дальнейший анализ системы уравнений (2) для собственных значений надо проводить в каждом конкретном случае.

Некоторые упрощения возможны в том случае, когда радиус кривизны минимален в симметричной точке кривой. Тогда $\gamma_{01}(0)$ и $\tau[\gamma_{01}(0), 0]$ будут чисто мнимыми с положительной мнимой частью, а $\rho[\gamma_{01}(0)]$ остается вещественным, и выражение для логарифма коэффициента отражения в начале координат можно записать в виде

$$\ln V(0) = -i\pi + 2i\alpha \operatorname{cth} \eta \left\{ 1 + i \left[1 + \frac{\operatorname{sh}(\beta - \eta)}{\operatorname{sh} \eta} \right] \sqrt[3]{\frac{\rho(0)}{\rho(i\beta)}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{\rho(i\beta) \operatorname{sh} \eta}{iR(i\beta, 0) - \rho(i\beta) \operatorname{sh} \eta}} \exp \left[-k_2 \int_0^\beta \rho(ix) (\operatorname{ch} \eta - \operatorname{ch}(\eta + x - \beta)) dx \right] \right\}, \\ \gamma_{01}(0) \equiv i\beta, \quad \beta > \eta, \quad \rho(\gamma) = \rho(-\gamma). \quad (35)$$

Добавка к импедансу максимальна в начале отсчета, и можно приближенно выполнить усреднение логарифма коэффициента отражения, учитя лишь окрестность симметричной точки, где интеграл сводится к гауссову. Затем система уравнений (2) решается методом итераций. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем выражение для мнимой добавки к собственному значению:

$$\operatorname{Im} k_1 = -\frac{\operatorname{cth} \eta}{L} \left[1 + \frac{\operatorname{sh}(\beta - \eta)}{\operatorname{sh} \eta} \right] \sqrt[6]{\frac{\rho(i\beta)}{\rho(0)}} \times \\ \times \sqrt{\frac{\Delta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta}{2q \operatorname{sh}(\beta - \eta) [iR(i\beta, 0) - \rho(i\beta) \operatorname{sh} \eta - \rho(0) \operatorname{sh}(\beta - \eta)]}} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left\{ -\frac{\operatorname{Re} k_1}{\operatorname{ch} \eta} \left[\int_0^\beta \rho(ix) (\operatorname{ch} \eta - \operatorname{ch}(\eta + x - \beta)) dx + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\rho(0)(\operatorname{ch}(\beta - \eta) - \operatorname{ch} \eta)^2 (iR(i\beta, 0) - \rho(i\beta) \operatorname{sh} \eta)}{\operatorname{sh}(\beta - \eta) [iR(i\beta) - \rho(i\beta) \operatorname{sh} \eta - \rho(0) \operatorname{sh}(\beta - \eta)]} \right] \right\}, \\
 & \operatorname{Re} k_1 = \frac{2\pi q}{L} + \frac{\left[3\pi \left(p + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}}{2L} \left(\frac{2\pi q}{L} \right)^{1/3} \int_0^{2\pi} \rho^{1/3}(\gamma) d\gamma + \frac{2\pi}{L} \operatorname{cth} \eta, \\
 & p, q = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{36}$$

В выражении для реальной части собственного значения приведены слагаемые порядка единицы, так как их надо учесть в показателе экспоненты в выражении для мнимой части. Последнее обладает интересной особенностью: кроме ожидаемой экспоненциальной зависимости от вещественной части имеется также амплитудный множитель $q^{-1/2}$. В случае окружности этого множителя не будет, так как пропадает зависимость коэффициента затухания от угловой переменной и усреднение проводится тривиально.

Автор благодарен В. Н. Красильникову и И. А. Молоткову за обсуждение работы, а также В. Ф. Лазуткину за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
- J. B. Keller and S. I. Rubinov, *Appl. Phys.*, 9, № 1, 24 (1960).
- В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд. Наука, М., 1972.
- Е. Л. Силаков, Записки научных семинаров ЛОМИ, Л., 42, 228 (1974).
- B. D. Seckler and J. B. Keller, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 31, 192 (1959).
- Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
- S. Choudhary and L. B. Felsen, *IEEE Trans., AP-21*, 827 (1973).
- Вэй и Д. Ван, Дж. Дешамп, ТИИЭР, 62, № 11, 150 (1974).
- Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Г. И. Макаров, Уч. зап. ЛГУ, вып. 27, 3 (1951).
- И. С. Градштейн, И. И. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений, Физматгиз, М., 1965.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
29 марта 1976 г.

RADIATION DAMPING OF "WHISPERING GALLERY" MODES AT THE TRANSPARENT BOUNDARY

E. L. Silakov

The problem of damping of whispering gallery modes at the transparent boundary under the condition of the full internal reflection is considered. Using the complex ray method, an expression is obtained for the eigen function of the external interface as a sum of two waves: incident and reflected from the complex caustic. A comparison is made with the asymptotic of the exact solution in the case of circle, ellipse close to circumference. The material addition to the impedance which determines the imaginary part of the eigenvalue is found. The applicability limits of the complex ray method and the possibility of its use in nonanalytical boundaries are discussed.

УДК 538.574.4

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН

И. В. Хазанов

Рассматривается нелинейная стадия обратного рассеяния волн с фиксированными фазами в слое нелинейной среды. Учитывая распадные процессы, построены частные решения одномерной модельной задачи, описывающие стационарную перекачку энергии между высокочастотными модами с участием одной стоячей низкочастотной волны.

Обращается внимание на существование режимов индуцированного рассеяния, когда практически отсутствует отражение излучения при его прохождении через нелинейный слой.

В настоящее время хорошо известно, что при распространении интенсивного излучения в нелинейных средах существенную роль играют эффекты распадного взаимодействия волн. Они могут приводить к перекачке значительной доли падающей мощности в рассеянные волны, т. е. препятствовать прохождению излучения через вещество. Это является нежелательным фактом во многих прикладных проблемах. Однако для выяснения существа вопроса в общем случае недостаточно базироваться лишь на соотношениях для инкрементов вынужденного рассеяния, следующих из линейной теории, а необходимо исследование нелинейной стадии этих процессов, позволяющей определить уровень рассеянного излучения.

В данной работе приведены некоторые результаты рассмотрения одномерной модельной задачи о нелинейной стадии обратного рассеяния волн с фиксированными фазами в слое нелинейной среды.

Рассмотрим одномерную задачу о вынужденном рассеянии поперечной электромагнитной волны, возникающем при распаде этой волны на поперечную волну, распространяющуюся в обратном направлении, и низкочастотную продольную волну. Известно, что на начальной стадии этого процесса для определения инкрементов распадной неустойчивости можно пользоваться укороченными уравнениями, описывающими трехволновое взаимодействие. Однако на нелинейной стадии необходимо учитывать взаимодействие большего числа волн, возбуждаемых последовательно по мере нарастания неустойчивых колебаний. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда можно полагать, что во взаимодействии с высокочастотными волнами участвуют лишь две низкочастотные волны с одинаковыми частотами Ω , распространяющиеся навстречу друг другу ($\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$). Для частот и волновых векторов взаимодействующих волн выполняются условия синхронизма:

$$\omega_n = \omega_{n-1} + \Omega, \quad \mathbf{k}_n \approx \mathbf{k}_{n-1} + \mathbf{x}_{1,2}, \quad (1)$$

причем $\omega_n \gg \Omega$, $|\mathbf{k}_n| \approx |\mathbf{x}_{1,2}|/2$.

В стационарном случае $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ система уравнений, описывающая динамическое взаимодействие волн в пренебрежении их линейным зату-

ханием и расстройками волновых векторов, может быть представлен в виде

$$V \frac{da_{2n}}{dx} = iW(a_{2n+1}b_0^* + a_{2n-1}b_1), \quad (2a)$$

$$- V \frac{da_{2n+1}}{dx} = iW(a_{2n+2}b_1^* + a_{2n}b_0);$$

$$- v \frac{db_0}{dx} = iW \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n-1} a_{2n-2}^*, \quad (2b)$$

$$v \frac{db_1}{dx} = iW \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n} a_{2n-1}^* \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где a_j , V , $b_{0,1}$, v — нормированные амплитуды и групповые скорости соответственно высокочастотных и низкочастотных волн, W — коэффициент их нелинейного взаимодействия, который в силу условия $\omega_n \gg \zeta$ можно считать не зависящим от n .

Специфическая особенность обратного рассеяния заключается в том что для системы уравнений (2) необходимо, вообще говоря, решать краевую задачу с граничными условиями общего вида:

$$\begin{aligned} a_{2n}(x=0) &= a_{2n}^0, & b_1(x=0) &= b_1^0, \\ a_{2n+1}(x=L) &= a_{2n+1}^0, & b_0(x=L) &= b_0^0, \end{aligned} \quad (3)$$

где L — длина слоя. С математической точки зрения эта особенность выражается, в частности, в том, что решение рассматриваемой краевой задачи может оказаться неединственным.

Из системы уравнений (2) нетрудно найти следующие интегралы:

$$\begin{aligned} V \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{2n}|^2 - |a_{2n+1}|^2 \right] &= c_1, \\ \frac{v}{2} (|b_0|^2 + |b_1|^2) + V \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_{2n+1}|^2 &= c_2, \\ \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n} \right|^2 - \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n+1} \right|^2 &= c_3. \end{aligned} \quad (4)$$

К сожалению, приведенные интегралы можно использовать лишь для проверки найденных решений, но не для их отыскания, так как постоянные c_1 , c_2 , c_3 определяются значениями переменных величин в любом сечении $x = \text{const}$, а в краевой задаче эти значения могут быть определены только, если решение уже известно.

Путем ряда преобразований, на которых мы здесь останавливаться не будем, исходя из уравнений для высокочастотных амплитуд (2 а), можно получить стандартную систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n}(x) e^{i 2n \theta}, \quad \Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{2n+1}(x) e^{i(2n+1)\theta}$$

(θ — любое действительное число) с переменными коэффициентами, зависящими от b_0 и b_1 . Известные случаи решения подобных систем уравнений с переменными коэффициентами приведены, например, в [1]. В исследуемой нами задаче они отвечают условию $b_0 = e^{i\varphi} b_1$ ($\varphi = \text{const}$, $0 < \varphi < 2\pi$). Это дает основание попытаться искать частное решение исходной системы (2) в случае стоячих низкочастотных волн $b_0 = e^{i\varphi} b_1$. Для большей наглядности выкладок мы приведем здесь лишь результаты рассмотрения в предположении равенства амплитуд $b_0 = b_1$. Без ограничения общности примем, что величина амплитуды b_0 действительна (фаза b_0 зависит от выбора системы координат). В такой постановке решение исходной задачи можно найти способом, использованным в [2]. Воспользовавшись известным рекуррентным соотношением из теории функций Бесселя 2 $\frac{dJ_k(t)}{dt} = J_{k-1}(t) - J_{k+1}(t)$, нетрудно проверить, что при $b_0 = b_0^* = b_1$ решением уравнений системы (2 а) являются функции

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \alpha_{2n} J_{2n} \left[2i \frac{W}{V} \int b_0 dx \right], \\ a_{2n+1} &= \alpha_{2n+1} J_{2n+1} \left[2i \frac{W}{V} \int b_0 dx \right], \\ \alpha_{2n} &= -\alpha_{2n+1}, \\ \alpha_{2n-1} &= \alpha_{2n}. \end{aligned} \tag{5}$$

Используя другие известные формулы из теории функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k(t) J_{k-1}(-t) &= 0, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(t) J_{k-1}(-t) &= J_{-1}(-2t), \end{aligned} \tag{6}$$

нетрудно убедиться, что решения (5) не противоречат уравнениям системы (2 б) с условием $b_0 = b_0^* = b_1$. А для амплитуды низкочастотной волны получим известное уравнение одномерного нелинейного осциллятора с потенциалом $\sim I_0(y)$:

$$y'' + pI_1(y) = 0, \tag{7}$$

где $y(x) = -4 \frac{W}{V} \int b_0 dx$, $p = \frac{2(|a_0^0|W)^2}{vV} > 0$,

$I_n(t) = i^{-n} J_n(it)$ — модифицированные функции Бесселя порядка n . Можно получить приближенные аналитические выражения для всех финитных фазовых траекторий уравнения (7). Мы, для простоты, рассмотрим лишь те из них, что расположены не очень далеко от центра. Поэтому, оставляя только первый член в разложении $I_1(y)$ по степеням y ($y \leq 1$), имеем из (7) уравнение обычного гармонического осциллятора:

$$y'' + \frac{p}{2} y = 0. \quad (8)$$

Его решение, отвечающее физической ситуации, при которой на границах слоя все высокочастотные волны, кроме накачки, имеют малые (шумовые) амплитуды, есть

$$b_0(x) = b_0^0 \cos \frac{|a_0^0| W}{(vV)^{1/2}} x, \quad (9)$$

а для $a_n(x)$ из (5) легко находим

$$a_n(x) = \alpha_n i^n I_n \left[2 \left(\frac{v}{V} \right)^{1/2} \frac{b_0^0}{|a_0^0|} \sin \frac{|a_0^0| W}{(vV)^{1/2}} x \right], \quad (10)$$

$$\alpha_n = -\alpha_{n+1} (-1)^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Аналогично отыскивается решение и в виде других стоячих низкочастотных волн, а именно: $b_0 = e^{i\varphi} b_1$ ($0 < \varphi < 2\pi$). Все эти решения возможны лишь при дискретном наборе значений толщины слоя L . Так, например, для решений (9), (10) $L = \frac{2\pi m (vV)^{1/2}}{|a_0^0| W}$, где $m = 1, 2, 3, \dots$ При

этом амплитуда волны накачки на выходе из слоя такая же, как на входе $a_0(L) = a_0^0$. Заметим, что поведение решений (10) качественно отличается от найденных в работе [2], так как у нас вместо обычных функций Бесселя получились модифицированные. Поэтому модуль амплитуды исходной волны $|a_0(x)| \geq |a_0^0|$. Из формул (9), (10) следует, что заметный обмен энергиями между взаимодействующими волнами возможен только при достаточно большой интенсивности низкочастотных волн на границах слоя $\left(\frac{v}{V} \right)^{1/2} \frac{b_0^0}{|a_0^0|} \sim 1$. Режимы же с $b_0^0 \ll |a_0^0|$, содержащиеся в (9) и (10), оказываются неустойчивыми по отношению к возмущениям вида $\sim e^{\lambda t - h x}$ и поэтому реально неосуществимы. Вопрос об устойчивости решений (9) и (10) при $b_0^0 \gg |a_0^0|$ является весьма сложным, и для его выяснения требуется привлечение ЭВМ.

Можно выделить две характерные ситуации возможного осуществления таких режимов. Первая — это когда какой-либо внешний источник генерирует на границах области взаимодействия волн мощные низкочастотные возмущения, на которых рассеиваются высокочастотные волны. Вторая — это когда однородная среда имеет резкие границы, между которыми низкочастотные волны оказываются запертными, как в резонаторе, а высокочастотные волны свободно распространяются через эти границы. Если границы слоя ничем не выделены, то для коэффициентов отражения низкочастотных возмущений должно быть выполнено условие $R \approx \pm 1$. При этом соответственно получаются решения $b_0 = \pm b_1$. В условиях резонатора ($R \approx \pm 1$) переходный процесс может развиваться, по-видимому, так, что энергия низкочастотных волн, нарастающая с уровня теплового шума, накапливается и достигает достаточно большой величины к моменту выхода на стационарный режим (9) и (10). Обратим здесь также внимание на то, что учет нелинейности низкочастотных волн, необходимый при достаточно большой амплитуде последних, в исходной системе уравнений (2) в ряде слу-

чаев оставляет возможными часть из режимов $b_0 = e^{i\varphi} b_1$ (какие именно, зависит от вида нелинейности), хотя и несколько меняет зависимость амплитуд всех волн от координаты x .

Можно рассмотреть подобные явления и в поле двух совершенно идентичных сильных волн, бегущих навстречу друг другу, т. е. фактически обобщить найденные решения (9) и (10) на случай отражения волны накачки. В этом случае просто меняется пространственный период модуляции высокочастотных волн низкочастотными возмущениями. Соответствующие решения получаются из (9) и (10) простой заменой $|a_0^0| \rightarrow \sqrt{2}|a_0^0|$. Необходимым условием существования этих решений также является вполне дискретный набор длин слоя L .

В заключение выясним условия применимости полученных результатов на примере распада (обычного или модифицированного) $t \rightarrow t' + s$ (s —ионный звук) в плазме. Перекачку энергии между высокочастотными модами можно осуществить с помощью одной стоячей низкочастотной волны, если расстройка от синхронизма $\Delta_n = k_n - k_{n-1} - x_{1,2}$ достаточно мала: $|\Delta_n| \approx \left| \frac{n\Omega}{c} \right| \ll \frac{|a_0^0| W}{(v_s c)^{1/2}}$ (v_s и c — соответственно скорости звука и света), что легко выполнимо. В реальной ситуации число возбуждаемых высокочастотных волн невелико, хотя бы потому, что функции $|a_n| \sim I_n(t)$ резко убывают при $|n| \gg |t|$ и порог для очередного акта распада просто не будет достижим.

Для игнорирования диссипации низкочастотных волн в исходных уравнениях (2) необходимо $v_s \frac{db_0}{dx} \gg \Gamma b_0$, где $\Gamma \approx \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \Omega$ — затухание s -волны, т. е. $\gamma_{NL} = W |a_0^0| \gg \Omega \left(\frac{m}{M} \right)^{1/4} \left(\frac{c}{v_{Te}} \right)^{1/2}$ (m и M — соответственно массы электрона и иона, c — скорость света, $v_{Te} = (T_e/m)^{1/2}$ — тепловая скорость электрона). С другой стороны, так как эти поля квазипериодические в пространстве, то $\gamma_{NL} = W |a_0^0| \ll \Omega (c/v_s)^{1/2}$. Рассматриваемый слой должен быть лишь слабонеоднородным, так чтобы изменение величины волновых векторов любой из взаимодействующих мод на длине слоя было мало:

$$|\delta k_n|, |\delta x_{1,2}| \ll \frac{|a_0^0| W}{(v_s c)^{1/2}},$$

$$\delta k_n = k_n(L) - k_n(0), \quad \delta x_{1,2} = x_{1,2}(L) - x_{1,2}(0).$$

Наконец, если сам слой или падающий на него пучок электромагнитных волн имеет малые поперечные размеры: $l_\perp < (v_s c)^{1/2} / |a_0^0| W$, то диаграмму нелинейного рассеяния можно считать одномерной. Время выхода на возможный стационар (9) и (10) не превышает время пробега звука через слой $\tau \leq L/v_s$.

Автор благодарен А. Г. Литваку и Г. А. Пасманику за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Наука, М., 1971, стр. 534.
2. А. С. Бакай, ЖЭТФ, 55, 278 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
14 ноября 1975 г.,
после доработки
23 августа 1976 г.

TO THE NONLINEAR THEORY OF STIMULATED WAVE SCATTERING

I. V. Khazanov

The nonlinear stage of backscattering of waves with fixed phases in a layer of the nonlinear medium is considered. Taking into account the decay processes, partial solutions of the one-dimensional model problem describing a stationary energy re-pump between high-frequency modes with one standing low-frequency wave are built.

Attention is paid to the existence of induced scattering regimes when the radiation reflection is practically absent in the case of its transmission through the nonlinear layer.

УДК 621.317

О «ШУМОВЫХ» СПЕКТРАХ КОЛЕБАНИЙ ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

A. A. Мальцев

Теоретически исследуется эффект увеличения ширины спектральных линий динамической системы, состоящей из двух взаимно связанных осцилляторов. Показано, что при учете только слабых естественных шумов в такой системе могут наблюдаться колебания с глубокой случайной частотной модуляцией, занимающие довольно широкую полосу частот. Найдена форма спектра выходного колебания системы.

Известно (см., например, [1]), что в сложных автоколебательных системах со многими степенями свободы возможны как эффекты стабилизации, приводящие к уменьшению ширины спектральных линий, так и дестабилизации, приводящие к уширению спектральных линий выходного колебания. На возможность получения шумовых широкополосных спектров в генераторе на одном активном элементе, но со сложным многорезонансным контуром указывалось также в [2]. Эти теоретические выводы были подтверждены экспериментально [3–5]. Однако вопрос о форме шумовых широкополосных спектров ни в одной из этих работ не рассматривался.

Настоящая статья посвящена теоретическому исследованию эффекта дестабилизации в динамических системах, которые можно представить в виде совокупности двух слабо связанных нелинейных осцилляторов. Мы покажем, что при определенных условиях в таких системах могут наблюдаться колебания с глубокой случайной частотной модуляцией, занимающие довольно широкую полосу частот.

1. Рассмотрим два слабо связанных нелинейных осциллятора, собственные частоты которых ω_1 и ω_2 достаточно близки. Для такой системы, используя малость связи, нетрудно получить укороченные уравнения в виде (см., например, [6]):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= -p_1 \alpha_1 + \lambda_{12}(1 + \alpha_2) \cos \vartheta + \eta_1(t), \\ \dot{\alpha}_2 &= -p_2 \alpha_2 + \lambda_{21}(1 + \alpha_1) \cos \vartheta + \eta_2(t), \\ \dot{\varphi}_1 &= \Delta_1 + \epsilon_{12} \sin \vartheta + \xi_1(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta_2 - \epsilon_{21} \sin \vartheta + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\epsilon_{ij} = \lambda_{ij} \frac{1 + \alpha_j}{1 + \alpha_i}$, $\lambda_{ij} = \frac{\omega_0 k_{ij} R_{0j}}{2R_{0i}}$ ($i, j = 1, 2$). Здесь $\alpha_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ —

относительные изменения амплитуд и изменения фаз колебаний осцилляторов из-за взаимодействия, R_{0i} — амплитуда, а p_i — прочность предельного цикла свободного i -го осциллятора, $\vartheta = \varphi_2 - \varphi_1$ — разность фаз,

* Мы записываем укороченные уравнения в частном случае противофазного взаимодействия между осцилляторами, которое, как известно, [1], и приводит к уширению спектральных линий.

ω_0 — частота синхронных колебаний, $\Delta_i = \omega_i - \omega_0$ — смещение частоты осциллятора при синхронизации, k_{ij} — коэффициенты связи $|k_{ij}| \ll 1$, $\eta_i(t)$ и $\xi_i(t)$ — малые случайные функции.

В настоящей работе мы будем считать случайные функции $\eta_i(t)$, $\xi_i(t)$ независимыми и дельта-коррелированными:

$$\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = D_i \delta_{ij} \delta(t - t').$$

Известно, что такое предположение обычно хорошо выполняется при учете естественных шумов в системе [6, 9].

Значительное уширение спектральных линий колебаний осцилляторов может иметь место при отрицательных величинах коэффициента взаимной связи $K = \lambda_{12}/\lambda_{21} \approx -1^*$. Кратко рассмотрим поведение системы в этой области при отсутствии случайных воздействий.

Будем считать, что стационарные амплитуды у свободных осцилляторов одинаковы: $R_{01} = R_{02} = R_0$, а коэффициенты связи k_{ij} равны: $k_{12} = k(1+r)$, $k_{21} = -k(1-r)$, $k > 0$, $|r| \ll 1$. Тогда, учитывая малость a_i и r и для простоты полагая $p_1 = p_2 = p$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, из (1) нетрудно показать, что в системе возможны два качественно различных режима работы.

При $|r| > 2\lambda/p$, где $\lambda = \omega_0 k/2$, система имеет один устойчивый стационарный режим работы с частотой синхронных колебаний, равной частоте свободных осцилляторов, $\omega_0 = \omega$. При таком режиме $|\epsilon_{12}| \neq |\epsilon_{21}|$ и можно выделить синхронизующий осциллятор и синхронизуемый.

При $|r| < 2\lambda/p$ в системе происходит бифуркация и появляются два устойчивых режима работы, и соответственно частота синхронных колебаний может принимать два значения:

$$\omega_0 = \omega \pm \lambda \sqrt{1 - (pr/2\lambda)^2}. \quad (2)$$

В этом случае коэффициенты ϵ_{ij} становятся равными: $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \lambda$, а синхронизация происходит только за счёт изменения амплитуд осцилляторов. Нетрудно показать, что для уменьшения синхронизующего эффекта в режиме противофазной синхронизации надо увеличить прочность предельных циклов осцилляторов. В реально существующих схемах генераторов это происходит обычно при значительном превышении порога возбуждения.

2. Рассмотрим систему из двух связанных осцилляторов, каждый из которых находится далеко за порогом возбуждения**. Тогда можно считать $|\lambda_{ij}| \ll p$ и, применяя для анализа уравнений (1) метод, изложенный в [8], получить замкнутую систему уравнений для фаз

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Delta_1 + \lambda_{12} \sin \vartheta + \frac{\lambda_{12}(\lambda_{21} - \lambda_{12})}{2p} \sin 2\vartheta + \xi_1(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Delta_2 - \lambda_{21} \sin \vartheta + \frac{\lambda_{21}(\lambda_{21} - \lambda_{12})}{2p} \sin 2\vartheta + \xi_2(t), \\ \dot{\vartheta} &= \Delta - (\lambda_{12} + \lambda_{21}) \sin \vartheta + \frac{(\lambda_{21} - \lambda_{12})^2}{2p} \sin 2\vartheta + \xi(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta = \omega_2 - \omega_1$, $\xi(t) = \xi_2(t) - \xi_1(t)$, $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = (D_1 + D_2) \delta(t - t')$.

* В эту область легко попасть при симметричной чисто реактивной связи между одинаковыми осцилляторами [7].

** При этом мы полагаем $p \ll \omega$, так что система остается томсоновской.

Из последнего уравнения этой системы видно, что добавочной синхронизацией за счет изменения амплитуд (членами с $\sin 2\vartheta$) заведомо можно пренебречь, если

$$(\lambda_{21} - \lambda_{12})^2/2p \ll D_1 + D_2. \quad (4)$$

Считая это условие выполненным, проследим эволюцию спектров флюктуаций частоты и формы спектральных линий колебаний осцилляторов при введении «плохой» связи между ними ($K \rightarrow -1$). Для простоты всюду в дальнейшем будем полагать расстройку $\Delta = 0$ и интенсивности шумов, действующих на осцилляторы, равными: $D_1 = D_2 = D$. При выполнении этих условий можно показать, что у обоих осцилляторов спектральные линии будут иметь одинаковую форму.

Для свободного осциллятора спектральная плотность мощности частотных флюктуаций постоянна: $S_v^{cb}(\Omega) = D/2\pi$ (рис. 1, прямая 1), а спектральная линия выходного колебания представляет из себя пик резонансной формы [6]

$$W_i^{cb}(\Omega) = W^{cb}(\Omega) = \frac{R_0^2}{2\pi} \frac{D/2}{(D/2)^2 + \Omega^2} \quad (5)$$

шириной $\Delta\Omega^{cb} = \pi D/2$, рис. 2 а. При введении односторонней синхронизации, например вторым осциллятором первого ($\lambda_{12} = \lambda$, $\lambda_{21} = 0$), форма спектральных линий не изменяется. Дальнейшую перестройку связи будем осуществлять изменением λ_{21} от 0 до $-\lambda$, что приводит к постепенному уменьшению полосы синхронизации системы $\Omega_0 = \lambda_{12} + \lambda_{21}$ от λ до 0. При этом можно выделить две характерные области.

а) *Взаимная синхронизация сильная*, $\Omega_0 \gg D$. В этом случае перескоки фаз не наблюдаются, $\langle \vartheta \rangle \ll 1^*$. Уравнения (3) линеаризуются по флюктуациям разности фаз около стационарного значения $\vartheta_0 = 0$ и легко решаются. Спектральные плотности частотных флюктуаций осцилляторов запишем в виде

$$S_{vi}(\Omega) = S_v(\Omega) = S_v^{cb}(\Omega) + \tilde{S}_v(\Omega), \quad (6)$$

где $\tilde{S}_v(\Omega) = -\frac{2\lambda_{12}\lambda_{21}}{\Omega_0^2 + \Omega^2} \frac{D}{2\pi}$ — спектр добавочных флюктуаций, появившихся из-за взаимодействия осцилляторов. При отрицательных значениях коэффициента взаимной связи ($K < 0$) $\tilde{S}_v(\Omega) > 0$ и наблюдается увеличение флюктуаций частоты из-за «плохой» синхронизации. Заметим, что в этом случае, в силу линейности уравнений, флюктуации частоты осцилляторов $v_i(t)$ суть нормальные стационарные случайные процессы, и форму спектральных линий колебаний осцилляторов можно записать в виде свертки:

$$W_i(\Omega) = W(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(\zeta) W^{cb}(\Omega - \zeta) d\zeta, \quad (7)$$

где

$$\tilde{W}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2(\tau) \rangle \right] \cos \Omega\tau d\tau,$$

а $\langle \Delta\varphi^2(\tau) \rangle$ — средний квадрат дополнительного набега фаз осцилляторов из-за взаимодействия между собой.

* Синхронизация сильная по отношению к шумам, но с точки зрения динамики связь слабая.

Исследование формул (6), (7) при $\lambda_{21} \rightarrow -\lambda$ ($K \rightarrow -1$) показывает, что спектр частотных флуктуаций $S_{v_i}(\Omega)$ на низких частотах ($\Omega \leq \Omega_0$) монотонно увеличивается (см. рис. 1, кривые 2, 3), ширина спектральных линий $\tilde{W}(\Omega)$ при этом также возрастает. Причем для $\lambda \gg D$ всегда можно взять λ_{21} настолько близким к $-\lambda$, что будет выполняться цепочка неравенств

$$\left(\frac{\lambda}{\Omega_0} \right)^2 \gg \frac{\Omega_0}{D} \gg 1. \quad (8)$$

Первое неравенство в (8) дает нам условие на медленность дополнительных флуктуаций частоты, поскольку индекс модуляции $m = \pi S_{v_i}(0)/\Omega_0 = -D\lambda^2/\Omega_0^3 \gg 1$, а второе — условие сильной синхронизации. Таким образом, в этом случае в системе появляются медленные большие флуктуации частоты, и функцию $\tilde{W}(\Omega)$ можно считать приближенно совпадающей с одномерным вероятностным распределением $\tilde{W}_{v_i}(v) = \tilde{W}_v(v)$ дополнительных флуктуаций частоты $v_i(t) = v_t(t) - \xi_i(t)$, возникающих в каждом осцилляторе из-за «плохой» синхронизации:

$$\tilde{W}(\Omega) = \tilde{W}_v(\Omega). \quad (9)$$

Поскольку условие сильной синхронизации еще выполняется, то $v_t(t)$ — нормальный стационарный случайный процесс, и форма спектральных линий определяется как свертка (7) резонансного пика (5) с гауссовым:

$$\tilde{W}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2\langle v^2 \rangle}\right), \quad (10)$$

где $\langle v^2 \rangle = D\lambda^2/\Omega_0$ — дисперсия дополнительных флуктуаций частоты. Таким образом, при выполнении условий (8) форма спектральных линий оказывается приближенно гауссовой (10), но при больших Ω крылья линий спадают, как Ω^{-2} (рис. 2 б).

б) *Взаимная синхронизация произвольная.* При дальнейшем уменьшении Ω_0 (при $\lambda_{21} \rightarrow -\lambda$) нарушается условие сильной синхронизации,

и для нахождения статистических характеристик колебаний надо решать систему нелинейных уравнений (3). Однако использование того факта, что дополнительные флуктуации частоты, возникающие из-за синхронного взаимодействия, при такой связи являются медленными и уже в линейном приближении имеют большой индекс модуляции $m \gg 1$, значительно облегчает задачу нахождения формы спектральных линий. Действительно, в этом случае можно показать, что форма линий приближенно описывается сверткой (7), а для нахождения $\tilde{W}(\Omega)$ нам достаточно найти лишь одномерное стационарное распреде-

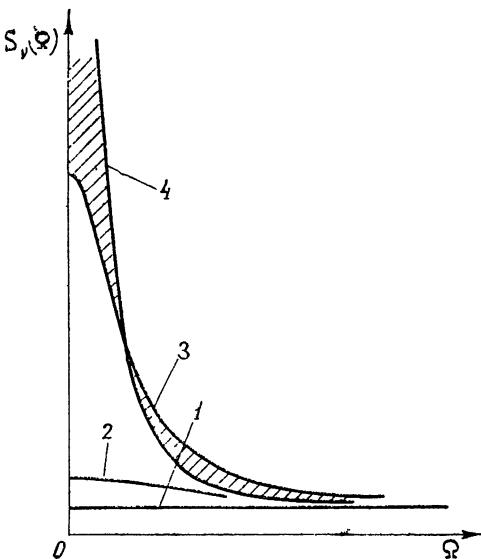


Рис. 1.

ление дополнительных флюктуаций частоты $\tilde{v}_i(t)$. Используя (4), из последнего уравнения (3) найдем одномерное стационарное распределение $\vartheta(t)$, а распределение дополнительных флюктуаций частоты $\tilde{W}_v(\Omega)$ получим из первых двух уравнений (3):

$$\tilde{W}_v(\Omega) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch} [\mu \sqrt{1 - (\Omega/\lambda)^2}]}{\pi I_0(\mu) \sqrt{\lambda^2 - \Omega^2}} & (|\Omega| < \lambda) \\ 0 & (|\Omega| \geq \lambda) \end{cases}, \quad (11)$$

где $I_0(\mu)$ — модифицированная функция Бесселя, $\mu = \Omega_0/D$ — коэффициент, характеризующий степень синхронизации. Таким образом, нахождение формы линий сводится к вычислению свертки (7) функции $\tilde{W}_v(\Omega)$ (см. (11)) и узкого резонансного пика (5) шириной $\pi D/2$. Поскольку $\lambda \gg D$, то форма спектральных линий осцилляторов при $\Omega < \lambda$ практически совпадает с вероятностным распределением дополнительных флюктуаций частоты (11), а при $\Omega > \lambda$ крылья спектральных линий спадают, как Ω^{-2} (рис. 2 в, г). Спектральная линия при больших μ имеет три максимума: центральный, $\Omega = 0$, и два боковых, $\Omega \approx \pm \lambda$. При увеличении μ боковые максимумы уменьшаются и $W(\Omega)$ стремится к нормальному распределению (рис. 2 в). С уменьшением μ боковые максимумы растут, центральный уменьшается, и при $\mu = \mu' \approx 1, 2$ центральный максимум исчезает совсем (точное значение находится из уравнения $\mu' = \operatorname{cth} \mu'$). Для $\mu = 0$ выражение (11) упрощается, а свертка (7) легко вычисляется. Форма спектральных линий осцилляторов в этом случае равна (рис. 2 д)

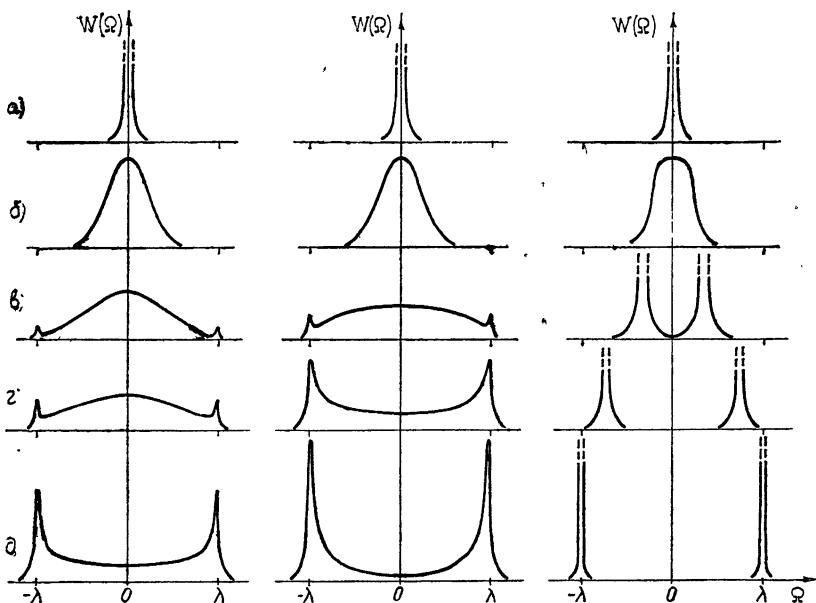


Рис. 2—4.

Изменение формы спектральных линий в системе двух взаимно связанных осцилляторов при подходе к режиму противофазной синхронизации $K \rightarrow -1$: а) $\lambda_{21}=0, \dots$, д) $\lambda_{21} = -\lambda$. Рис. 2 — осцилляторы находятся далеко за порогом самовозбуждения, $p \gg \lambda^2/D$, рис. 3 — промежуточный случай, $p \gtrsim 4\lambda^2/D$, рис. 4 — осцилляторы находятся вблизи порога самовозбуждения, $2D \ll p \ll 4\lambda^2/D$.

$$W(\Omega) = \left(\frac{DR_0^2}{4\sqrt{2}\pi} \sqrt{(D/2)^2 + (\Omega + \lambda)^2} + \sqrt{(D/2)^2 + (\Omega - \lambda)^2} \right) \times \\ \times \left\{ [((D/2)^2 + \Omega^2 - \lambda^2)^2 + D^2 \lambda^2] \times \right. \\ \left. \times \left[(D/2)^2 + \Omega^2 - \lambda^2 + \sqrt{((D/2)^2 + \Omega^2 - \lambda^2)^2 + D^2 \lambda^2} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (12)$$

Таким образом, используя тот факт, что при $\lambda \gg D$ «плохая» взаимная синхронизация резко увеличивает только медленные флюктуации частоты в системе, удалось довольно легко проследить эволюцию формы спектральных линий связанных осцилляторов от узкого резонансного пика (5) шириной порядка D свободных осцилляторов рис. 2 а до спектральных линий сложной формы (11), (12) шириной порядка 2λ (рис. 2 в, г, д).

Изменение спектральной плотности мощности частотных флюктуаций удается легко исследовать только в области сильной синхронизации, $\mu \gg 1$ (кривые 1—3 на рис. 1). Нахождение спектров флюктуаций частоты взаимно связанных осцилляторов для произвольной синхронизации ($\mu \approx 1$) упирается в отыскание нестационарного решения уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка (ЭФП) для исходной нелинейной системы (3) и является весьма сложной задачей. Для предельного случая слабой синхронизации ($\mu \ll 1$) задача снова упрощается. Действительно, предположим, что нам удалось добиться точной настройки на противофазный режим синхронизации ($\lambda_{12} = -\lambda_{21} = \lambda$, $\Omega_0 = 0$). Тогда уравнения для фаз (3) примут вид

$$\dot{\varphi}_i = \lambda \sin \vartheta + \xi_i(t), \quad \dot{\vartheta} = \xi(t). \quad (13)$$

Это случай свободной диффузии разности фаз ϑ . Из уравнений (13) нетрудно найти спектральные плотности частотных флюктуаций осцилляторов $S_v(\Omega)$ (см. рис. 1, кривая 4). В этом случае, как и для сильной синхронизации, спектральную плотность можно представить в виде суммы (6), где теперь

$$\tilde{S}_v(\Omega) = \frac{\lambda^2}{D^2 + \Omega^2} \frac{D}{2\pi}. \quad (14)$$

Из (6) и (14) видно, что при уменьшении μ индекс частотной модуляции m продолжает расти и при $\mu = 0$ равен $m = \lambda^2 / 2D^2 \gg 1$. Спектральные плотности мощности флюктуаций частоты при произвольных $\mu \approx 1$ лежат в заштрихованной области между кривыми 3 и 4 (рис. 1).

Полученным результатам можно дать следующее объяснение. Связав осцилляторы так, чтобы коэффициент взаимной связи $K \approx -1$, мы резко уменьшили полосу взаимной синхронизации Ω_0 и получили в пределе диффузионное блуждание разности фаз осцилляторов ϑ , которое переходит, согласно уравнениям (13), в случайное блуждание мгновенной частоты генерации $\nu_i(t) = \varphi_i(t)$ в ограниченной полосе $(-\lambda, \lambda)$.

3. Рассмотрим систему двух связанных осцилляторов при небольшом превышении порога самовозбуждения каждым из них. В этом случае прочности предельных циклов будут не слишком большими, и синхронизацией за счёт изменения амплитуд пренебрегать нельзя (неравенство (4) не выполняется). При подходе к областям противофазной синхронизации мы уже не получим свободной диффузии разности фаз ϑ , а появится синхронизирующая сила из-за изменения амплитуд (члены с $\sin 2\vartheta$ в (3)). При этом, как и в предыдущем разделе, удобно рассмотреть два случая.

а) Синхронизация за счет изменения амплитуд сильная ($\lambda^2/p \gg D$), отклонения ϑ от стационарных значений малы, и мы можем линеаризовать уравнения (1) (или (3) при $p \gg \lambda$) в окрестности стационарных режимов. Из линеаризованных уравнений нетрудно найти спектральные плотности флуктуаций амплитуд и фаз колебаний осцилляторов. Форма спектральных линий в этом случае может быть исследована стандартными методами [1, 6].

Качественное изменение формы спектральных линий системы при подходе к режиму противофазной синхронизации $K \rightarrow -1$, $r \rightarrow 0$ показано на рис. 4. При подходе к бифуркационному значению $|r| = 2\lambda/p$ спектральная линия уширяется (рис. 4 б), затем расщепляется на две довольно широкие линии (рис. 4 в), при дальнейшем уменьшении $|r|$ спектральные линии расходятся и ширина их уменьшается (см. рис. 4 г). Для точной настройки $r = 0$ расстояние между линиями достигает 2λ , а ширина их уменьшается до $\pi D/4 = \Delta\Omega^{cb}/2$ (рис. 4 д). За исключением малой области, вблизи бифуркационного значения параметра $|r| \approx 2\lambda/p$ синхронизация в системе сильная, перескоки между стационарными состояниями очень редкие и система практически стабильно работает на одной из двух возможных частот (2).

Строгая оценка условий применимости линейного приближения дает следующие ограничения на прочность предельных циклов:

$$2D \ll p \ll 4\lambda^2/D.$$

При больших p интенсивность флуктуаций ϑ возрастает, поскольку с увеличением p уменьшаются изменения амплитуд колебаний осцилляторов, которые ответственны в данном случае за синхронизацию. При $p \approx 2D$ увеличение интенсивности флуктуаций ϑ связано с быстрым ростом амплитудных флуктуаций в системе.

б) Синхронизация за счет изменения амплитуд слабая. При $p \geq 4\lambda^2/D$ отклонения ϑ от стационарных состояний порядка или больше единицы при любых ϑ_0 и линейное приближение становится неприемлемым для всей области $|r| < 2\lambda/p$. В системе начинаются перескоки разности фаз ϑ между двумя устойчивыми состояниями равновесия, а следовательно, и перескоки частоты. При довольно частых перескоках $p \geq 4\lambda^2/D$ ($p \gg \lambda \gg D$) происходит резкий рост медленных флуктуаций частоты в системе, и форму спектральных линий можно приближенно описывать сверткой вида (7). В качестве $\tilde{W}(\Omega)$ надо взять одномерные вероятностные распределения дополнительных флуктуаций частоты $\tilde{W}_v(\Omega)$, которые находятся из уравнений (3) (так как $p \gg \lambda$), но теперь уже с учетом слабой синхронизации за счет изменения амплитуд:

$$\tilde{W}_v(\Omega) = \begin{cases} \frac{Ce^{-\chi[1 - 2(\Omega/\lambda)^2]}}{\sqrt{\lambda^2 - \Omega^2}} \operatorname{ch}[\mu \sqrt{1 - (\Omega/\lambda)^2}] & (|\Omega| < \lambda) \\ 0 & (|\Omega| \geq \lambda) \end{cases}, \quad (15)$$

где $\chi = \lambda^2/pD < 1$ — коэффициент, характеризующий степень синхронизации за счет изменения амплитуд, а постоянная C находится из условия нормировки. Подставляя (5) и (15) в (7), получим выражение для формы спектральной линии системы. Изменение спектральной линии при переходе к режиму противофазной синхронизации ($K \rightarrow -1$, $r \rightarrow 0$) для этого случая показано на рис. 3. Как видно из рисунка, основным отличием этого случая от случая полного пренебрежения синхронизацией за счет изменения амплитуд (рис. 2) является более быстрое расплывание центрального максимума (рис. 3 в, г) и большая высота боковых максимумов при $r = 0$ (рис. 3 д).

Представленный выше анализ влияния слабых естественных шумов на систему двух взаимно связанных осцилляторов показывает, что форма и ширина спектральных линий колебаний будет различной в зависимости от степени превышения осцилляторами порога самовозбуждения. Для осцилляторов, находящихся недалеко за порогом самовозбуждения, наиболее вероятной является стабильная генерация узкой спектральной линии на одной частоте. В системах осцилляторов, находящихся далеко за порогом самовозбуждения, при определенных связях (например, чисто реактивных) могут наблюдаться колебания с глубокой случайной частотной модуляцией, занимающие довольно широкую полосу частот (порядка величины связи). Заметим, что в этом случае при достаточно большой величине взаимной связи в системе могут возбуждаться автомодуляционные режимы, рассмотренные в [9].

В заключение автор выражает благодарность А. Н. Малахову за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
2. K. Kiroya, Bell Syst. Techn. J., 48, № 6, 1937 (1969).
3. K. Schünemann, B. Schiek, Archiv der Elektrischen Übertragung, 26, № 7/8, 310 (1972).
4. N. D. Кепуоп, Bell Syst. Techn. J., 49, № 2, 255 (1970).
5. А. А. Мальцев, Радиотехника и электроника, 19, № 7, 1412 (1974).
6. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
7. И. М. Клибанова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 11, 1709 (1973).
8. Р. В. Хохлов, Докл. АН СССР, 97, № 3, 411 (1954).
9. С. Г. Зейгер, Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Э. Е. Фрадкин, Волновые и флуктуационные процессы в лазерах, изд. Наука, М., 1974.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
27 августа 1974 г.,
после доработки
16 июля 1976 г.

NOISE SPECTRA OF OSCILLATIONS OF MUTUALLY COUPLED NONLINEAR OSCILLATORS

A. A. Mal'tsev

The effect of increasing the spectral line width of the dynamic system consisting of two mutually coupled oscillators is theoretically investigated. It is shown that when only weak inherent noises in such a system is taken into account, the oscillations with a deep random frequency modulation occupying rather wide frequency band may be observed. The form of the spectrum of the output system oscillation is found.

УДК 517.5

К АНАЛИЗУ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА ДЛЯ СРЕДНЕЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

A. A. Дубков, O. B. Музичук

Производится сравнительный анализ двух методов построения высших приближений для среднего значения функции Грина стохастической линейной системы с гауссовыми флуктуациями параметров. Исследуется, в частности, «экцессное» приближение, являющееся в рассматриваемых методах следующим шагом по отношению к известному приближению Бурре; сопоставляются результаты «экцессного» приближения и приближения Крейчнана.

1. В литературе известен целый ряд методов (см., например, [1–5]) получения замкнутых уравнений для моментов решения стохастических линейных систем (динамических систем с флуктуирующими параметрами). Все они в той или иной мере используют предположение о быстроте (мелкомасштабности) флуктуаций по сравнению с характерными временами системы. При отыскании первого момента решения чаще всего ограничиваются диффузионным, или марковским приближением [2, 3], справедливым при δ -коррелированных случайных воздействиях, или приближением Бурре [1, 6], которое является достаточно эффективным также лишь в случае мелкомасштабных флуктуаций. Известное приближение Крейчнана [7] является более точным, однако его практическое использование и оценка условий применимости вызывают значительные затруднения.

В работе [8] был предложен новый подход к построению высших приближений уравнения Дайсона, основанный на последовательном учете отклонения от гауссности многомерного распределения совокупности флуктуаций параметров системы и ее решения. В [9] для построения высших приближений использовался метод, основанный на замыкании цепочки уравнений для средних значений вариационных производных решения [2, 3] на произвольном шаге.

В настоящей работе мы проанализируем результаты последнего метода с точки зрения селективного суммирования рядов теории возмущений. На основе этого покажем эквивалентность методов [8] и [9]; проведем также сравнение их результатов с результатами приближения Крейчнана.

2. Рассмотрим стохастическую линейную систему, описываемую дифференциальным оператором N -го порядка ($N > 1$) с одним флуктуирующим параметром, являющимся коэффициентом при нулевой производной. Функция Грина такой системы удовлетворяет уравнению

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) g(t, \theta_1) = \delta(t - \theta_1) - \alpha(t)g(t, \theta_1), \quad (1)$$

с нулевыми начальными условиями, где

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d^N}{dt^N} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k}{dt^k},$$

$\alpha(t)$ — флюктуации коэффициента $a_0(t) = \langle a_0(t) \rangle + \alpha(t)$, которые будем считать стационарным гауссовым процессом с заданной корреляционной функцией $\Phi_\alpha(\tau) = \langle \alpha(t) \alpha(t - \tau) \rangle$.

Домножим уравнение (1) на произведение $g(\theta_1, \theta_2)g(\theta_2, \theta_3) \dots g(\theta_{n-1}, t_0)$, полагая $t > \theta_1 > \theta_2 > \dots > t_0$. Обозначив

$$B_n(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_{n-1} - t_0) = \langle g(t, \theta_1)g(\theta_1, \theta_2) \dots g(\theta_{n-1}, t_0) \rangle,$$

будем иметь после усреднения полученного уравнения

$$\begin{aligned} L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) B_n(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_{n-1} - t_0) = \\ = \delta(t - \theta_1) B_{n-1}(\theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_{n-1} - t_0) - \\ - \langle \alpha(t) g(t, \theta_1) g(\theta_1, \theta_2) \dots g(\theta_{n-1}, t_0) \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Для размыкания последнего статистического усреднения воспользуемся формулой Фуруцу—Новикова [10, 11]. Учитывая, что вариационная производная стохастической функции Грина представляет собой произведение [2]

$$\frac{\delta g(t, \theta_k)}{\delta \alpha(\tau)} = -g(t, \tau)g(\tau, \theta_k),$$

придем к цепочке уравнений для моментных функций

$$\begin{aligned} L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) B_n(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_{n-1} - t_0) = \\ = \delta(t - \theta_1) B_{n-1}(\theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_{n-1} - t_0) + \\ + \int \Phi_\alpha(t - \theta_n) n \{ B_{n+1}(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_n - t_0) \} d\theta_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n принимает значения 1, 2, ..., причем при $n = 1$ получаем интересующую нас среднюю функцию Грина $B_1(t - \theta_1) = g(t - \theta_1)$, а $B_0 = 1$; скобка $n \{ \dots \}$ есть скобка симметризации по индексу n , содержащая n членов:

$$\begin{aligned} n \{ B_{n+1}(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_n - t_0) \} = \\ = B_{n+1}(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_n - t_0) + B_{n+1}(t - \theta_1, \dots, \theta_{n-2} - \theta_n, \\ \theta_n - \theta_{n-1}, \theta_{n-1} - t_0) + \dots + B_{n+1}(t - \theta_n, \theta_n - \theta_1, \dots, \theta_{n-1} - t_0). \end{aligned}$$

Как показано в [9], цепочка (3) соответствует зацепляющейся системе уравнений для средних значений вариационных производных функции Грина, которая получается непосредственно путем усреднения (1) с последовательным использованием формулы Фуруцу—Новикова; однако используемый здесь прием быстрее приводит к цели.

Систему уравнений (3) можно замкнуть на $(n + 1)$ -м шаге, используя предположение о δ -коррелированности флюктуаций параметра $\alpha(t)$ в уравнении для функции B_{n+1} *. Поскольку $g(t, t) = 0$, то интегральный член в последнем уравнении системы (3) обратится в нуль и мы получим

$$B_{n+1}(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_n - t_0) = g_0(t - \theta_1) B_n(\theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_n - t_0). \quad (4)$$

Применяя «формулу размыкания» (4) на втором шаге, т. е. полагая

* При этом в первых n уравнениях остается настоящая корреляционная функция $\Phi_\alpha(\tau)$; ясно, что чем выше номер n , тем меньшее ограничение будет наложено на малость времени корреляции в первом уравнении (3).

$B_2(t - \theta, \theta - t_0) = \langle g(t, \theta)g(\theta, t_0) \rangle \approx g_0(t - \theta)\bar{g}(\theta - t_0)$,
приходим к приближению Бурре для средней функции Грина

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) \bar{g}(t - t_0) - \int \Phi_a(t - \theta) g_0(t - \theta) \bar{g}(\theta - t_0) d\theta = \delta(t - t_0). \quad (5)$$

Используя (4) на следующем шаге, т. е. взяв $B_3(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \theta_2 - t_0) \approx g_0(t - \theta_1)B_2(\theta_1 - \theta_2, \theta_2 - t_0)$, получим замкнутую систему уравнений для функций g и B_2 :

$$\mathbb{A}_0 \left(\frac{d}{dt} \right) \bar{g}(t - t_0) = \delta(t - t_0) + \int \Phi_a(t - \theta_1) B_2(t - \theta_1, \theta_1 - t_0) d\theta_1,$$

$$\mathbb{A}_0 \left(\frac{d}{dt} \right) B_2(t - \theta_1, \theta_1 - t_0) = \delta(t - \theta_1) \bar{g}(\theta_1 - t_0) + \quad (6)$$

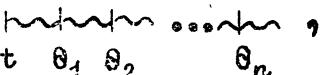
$$+ \int \Phi_a(t-\theta_2) [g_0(t-\theta_1)B_2(\theta_1-\theta_2, \theta_2-t_0) + g_0(t-\theta_2)B_2(\theta_2-\theta_1, \theta_1-t_0)] d\theta_2.$$

Исключив отсюда B_2 , можно прийти к некоторому приближению уравнения Дайсона:

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) \bar{g}(t - t_0) - \int q(t - \tau) \bar{g}(\tau - t_0) d\tau = \delta(t - t_0).$$

Здесь $q(t - \tau)$ — ядро массового оператора, соответствующего рассматриваемому приближению.

Покажем, что решение системы (6) представляет собой «экспесное» приближение уравнения Дайсона [8]. Обратимся для этого к символическим обозначениям, взяв за основу принятые в литературе фейнмановские диаграммы (см., например, [1]). Тонкой линией будем обозначать невозмущенную функцию Грина g_0 , жирной чертой — среднюю функцию Грина системы, флуктуации $\alpha(t)$ обозначим кружочком. а корреляционные связи между вершинами будем показывать дугами (по всем внутренним вершинам производится интегрирование). Для обозначения моментной функции $B_{n+1}(t - \theta_1, \theta_1 - \theta_2, \dots, \theta_n - t_0)$ введем диаграмму



содержащую $(n + 1)$ вертикальную черточку. В этих обозначениях интегральное представление системы (3) имеет вид

$$= \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} ,$$

$$h\bar{h}h\bar{h} = \text{---} + \text{---} + \text{---}$$

• • • • • • • • • • • • • •

$$\begin{aligned} \text{Diagram } \dots \text{ with } n &= \text{Diagram } \dots \text{ with } n-1 + \text{Diagram } \dots \text{ with } n+1 + \\ &\quad + \text{Diagram } \dots \text{ with } n+1, \\ &\quad \text{with } n+1 \end{aligned}$$

Замкнутая система (6) представляет собой

$$\text{---} = \text{---} + \text{---},$$

(6a)

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---}.$$

Итерируя последнее уравнение и подставляя полученный ряд в первую строку, нетрудно получить следующую форму уравнения Дайсона, соответствующую рассматриваемому приближению:

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} +$$

(7)

$$+ \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

Отсюда следует, что массовый оператор, соответствующий (7), суммирует подпоследовательность сильносвязных диаграмм минимальной связности*. Именно такой массовый оператор имеет «эксцессное» приближение [8]. Замкнув (3 а) на следующем (четвертом) шаге, итерируя уравнение для функции B_3 и последовательно подставляя в первые два, мы придем к следующему приближению уравнения Дайсона, массовый оператор которого суммирует две подпоследовательности диаграмм, соответствующих минимальному индексу связности ($s = n - 1$) и следующему за ним значению ($s = 2n - 3$). В частности, при этом будут учтены все 10 сильносвязных диаграмм массового оператора шестого порядка (четыре с индексом связности $s = 2$, учитываемые в (7), и шесть с $s = 3$); 32 диаграммы восьмого порядка из общего числа 74 (восемь с $s = 3$ и 24 с $s = 4$) и т. д.

Таким образом, процедура размыкания цепочки (3) на k -м шаге соответствует последовательному учету отклонения от гауссовости вероятностного распределения совокупности $\{\alpha(t_1), \alpha(t_2), \dots, \alpha(t_k)g(t_k, t_0)\}$, лежащему в основе метода построения высших приближений, предложенного в работе [8]. Анализ показывает, что полная эквивалентность рассмотренных методов имеет место и для стохастической системы с флуктуациями любого параметра $\alpha_s(t)$, являющегося коэффициентом при s -й производной в исходном уравнении (1), если $0 \leq s < N - 1$, а N — порядок системы.

3. Представляет интерес сопоставить полученные результаты с известным приближением Крейчнана или «нелинейным» приближением уравнения Дайсона. Последнее, как легко показать, можно получить путем искусственного размыкания моментной функции второго порядка.

$$B_2(t - \theta, \theta - t_0) \approx \bar{g}(t - \theta) \bar{g}(\theta - t_0). \quad (8)$$

Подставляя (8) в первое уравнение цепочки (3), получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для средней функции Грина

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) \bar{g}(t - t_0) - \int \Phi_\alpha(t - \theta) \bar{g}(t - \theta) \bar{g}(\theta - t_0) d\theta = \delta(t - t_0). \quad (9)$$

Диаграммное представление (9) имеет вид

* Индекс связности характеризует степень перепутанности корреляционных связей в диаграмме [8].

$$\begin{array}{c}
 \text{---} - \text{---} + \text{---} = \\
 \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots
 \end{array} \quad (9a)$$

Массовый оператор, соответствующий этому приближению, суммирует подпоследовательность «вложенных» диаграмм (заключенных под дугой, охватывающей начало и конец, причем внутренние дуги не пересекаются): Таким образом, приближение Крейчнана учитывает в массовом операторе только одну диаграмму 4-го порядка, две диаграммы 6-го порядка, пять—8-го и т. д., причем в каждом порядке представлены все возможные значения индекса связности.

Поскольку уравнение (9) нелинейно, ряд (9 а) в нетривиальных случаях не суммируется. Итерируя (9), полагая на первом шаге $\bar{g} = g_0$, получим приближение Бурре

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} .$$

Подставляя это решение в первую строчку (9 а), придем к следующей форме уравнения Дайсона:

$$\begin{array}{c}
 \text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \\
 + \text{---} + \dots
 \end{array} \quad (10)$$

Результат (10) напоминает эксцессное приближение (7) с той лишь разницей, что здесь суммируется по одной диаграмме минимальной связности в каждом порядке, в то время как (7) суммирует их все.

Сравним аналитическое решение уравнений Дайсона в «эксцессном» и «нелинейном» приближениях. Для преобразования Лапласа средней функции Грина $\bar{G}(p)$ (эффективной передаточной функции системы) уравнение Дайсона имеет вид

$$\bar{G}(p) = G_0(p)[1 - Q(p)G_0(p)]^{-1}, \quad (11)$$

где $Q(p)$ — преобразование Лапласа ядра массового оператора, $G_0(p)$ — невозмущенная передаточная функция системы. Пусть флюктуации параметра $\alpha(t)$ имеют функцию корреляции вида

$$\Phi_\alpha(\tau) = \langle \alpha^2 \rangle \exp(-\Pi |\tau|),$$

где $\langle \alpha^2 \rangle$ и Π — соответственно дисперсия и ширина спектра. Обозначив $Q_B(p)$, $Q_K(p)$, $Q_s(p)$ соответственно выражения для ядра $Q(p)$ в приближении Бурре, Крейчнана и «эксцессном», можно получить

$$Q_B(p) = \langle \alpha^2 \rangle G_0(p + \Pi); \quad (12)$$

$$Q_K(p) = \langle \alpha^2 \rangle \bar{G}(p + \Pi); \quad (13)$$

$$Q_s(p) = Q_B(p)[1 - 2 \langle \alpha^2 \rangle G_0(p + \Pi)G_0(p + 2\Pi)]^{-1}. \quad (14)$$

Подставляя (13) в (11), приходим к нелинейному разностному уравнению, в то время как (14) дает аналитическое решение для $G(p)$ ^{[8, 9]*}.

* Отметим, что для рассматриваемой корреляционной функции флюктуаций система (3) приводит к точному решению для $G(p)$, которое имеет вид цепной дроби [9]

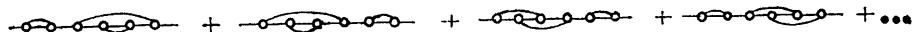
Решая систему (11), (13) с помощью итераций, полагая на первом шаге $Q_K^{(1)}(p)=0$, легко получить

$$Q_K^{(2)}(p) = Q_B(p), \quad (15)$$

$$Q_K^{(3)}(p) = Q_B(p)[1 - \langle \alpha^3 \rangle G_0(p + \Pi)G_0(p + 2\Pi)]^{-1}.$$

Таким образом, третий шаг итерации уравнения Крейчнана дает значение $Q(p)$, отличающееся от (14) отсутствием двойки в знаменателе. Это связано с тем, что здесь суммируются не все диаграммы эксцессного приближения.

4. Итерируя (7), нетрудно показать, что «эксцессное» приближение, помимо слабосвязных диаграмм ряда теории возмущений, учитываемых в приближении Бурре, суммирует все слабосвязные, распадающиеся на $(n-1)$ сильносвязную ($2n$ — порядок диаграммы, равный числу ее вершин), а также часть диаграмм, распадающихся на меньшее число сильносвязных частей. В частности, оно суммирует следующие члены 6-го порядка:



Как известно, слабосвязные диаграммы ряда теории возмущений, распадающиеся на сильносвязных частей, отличаются от сильносвязных диаграмм того же порядка множителем t^{s-1} . Это означает, что «эксцессное» приближение суммирует, помимо членов, пропорциональных t^{n-1} , учитываемых в приближении Бурре, все члены, пропорциональные t^{n-2} и часть «слабее растущих» слагаемых. В то же время приближение Крейчнана выбирает не самые существенные, пропуская, в частности, половину членов ряда теории возмущений, пропорциональных t^{n-2} .

Отметим в заключение, что рассмотренные здесь высшие приближения уравнения Дайсона и, в первую очередь, «эксцессное» позволяют оценивать условия применимости приближения Бурре для стохастических систем весьма общего вида, кроме того, иногда они содержат качественно новую информацию о параметрических взаимодействиях в системе. Так, для осциллятора, обладающего флуктуациями собственной частоты, они описывают влияние высших параметрических зон в спектре флуктуаций [8, 9].

Авторы благодарны А. Н. Малахову за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 570 (1974).
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, вып. 4, 499 (1973).
4. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
5. R. E. Collin, Radio Sci., 6, № 11, 991 (1971).
6. R. C. Voigget, Can. J. Phys., 40, 782 (1962).
7. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., 2, № 1, 124 (1961).
8. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 2, 202 (1976).
9. О. В. Музычук, Теор. и мат. физика, 28, № 3, 371 (1976).
10. K. Furutsu, J. Res. NBS, 67D, № 3, 303 (1963).
11. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, вып. 5 (11), 1919 (1964).

**THE ANALYSIS OF HIGHER APPROXIMATIONS OF DYSON EQUATION
FOR THE GREEN FUNCTION MEAN VALUE***A. A. Dubkov, O. V. Muzychuk*

A-comparative analysis is made of two methods of constructing the highest approximations for the Green function mean value of the stochastic linear system with Gaussian parameter fluctuations. In particular, the "excess" approximation being the next step with respect to the known Bourret approximation in the methods considered is investigated. The results of the "excess" approximation and Kraichnan approximations are compared.

УДК 621.396.677 : 537.874.4

ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ В ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА ОТРАЖЕННОГО НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

C. D. Кременецкий, A. A. Никаноров

Рассмотрена задача расчета электромагнитного поля, рассеянного неровной поверхностью, не имеющей участков затенения. Решение получено разложением интегралов рассеяния в быстроходящиеся ряды, благодаря чему характеристики отраженного электромагнитного поля выражаются через интегралы Френеля. Приведены результаты численного расчета конкретного примера.

В связи с возрастающим практическим интересом к определению полей излучающих систем, расположенных над реальными поверхностями, за последние годы разработан ряд подходов к решению этой задачи [1–5]. Для достаточно гладких поверхностей с заданным граничным импедансом проблему отражения электромагнитных волн можно считать принципиально решенной [2]. Однако при фактическом определении отраженного поля обязательно приходится сталкиваться с необходимостью вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. Для этого применяют методы стационарной фазы, быстрого преобразования Фурье, Филона и т. п. Но, к сожалению, эти методы не являются оптимальными, так как в ряде случаев не обеспечивают достаточной точности или требуют больших затрат машинного времени.

С другой стороны, интегралы задач рассеяния могут быть разложены в быстро сходящиеся асимптотические ряды. Используя указанное свойство, в настоящем сообщении показано, что характеристики отраженного электромагнитного поля можно выразить через табулированные интегралы Френеля, что существенно сокращает время решения на ЭВМ ряда задач рассеяния и делает их физически более прозрачными. Кроме того, это дает возможность выразить индикатрису рассеяния поверхности аналитически через специальные функции.

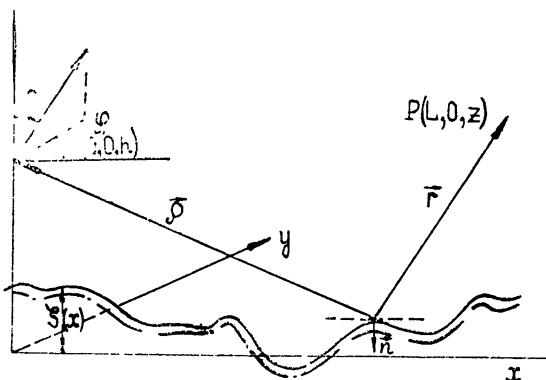


Рис. 1. Геометрия задачи рассеяния.

Пусть поверхность $z = \zeta(x)$ с проводимостью $\sigma(x)$ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x)$ облучается источником, излучающим горизонтально или вертикально поляризованную сферическую волну $D(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$, θ и φ — углы обычной сферической системы координат (рис. 1), $D(\theta, \varphi)$ — диаграмма направленности. В работе [5] показано, что в приближении Кирхгофа рассеянное поверхностью $z = \zeta(x)$ электромагнитное поле $E(P)$ при условии $k\rho \gg 1$ и $kr \gg 1$ описывается формулой

$$E(P) = -\frac{i}{2\lambda} \iint_{S_0} \left(\frac{rn}{r} + \frac{\rho n}{\rho} \right) \frac{e^{-ik(\rho+r)}}{\rho r} D(\theta, \varphi) V(\tilde{\theta}) dx dy, \quad (1)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (h - \zeta(x))^2}$, $r = \sqrt{(x - L)^2 + y^2 + (z - \zeta(x))^2}$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, n — внутренняя нормаль к поверхности $z = \zeta(x)$, S_0 — проекция поверхности на плоскость XOY , $V(\tilde{\theta})$ — комплексный коэффициент отражения Френеля, $\tilde{\theta}$ — локальный угол падения.

Предположим, что $D(\theta, \varphi) V(\tilde{\theta})$ мало меняется по переменной y в пределах первой существенной для отражения зоны Френеля [6]. Тогда к интегралу (1) по y можно применить метод стационарной фазы, который дает

$$E(P) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{rn}{r} + \frac{\rho n}{\rho} \right) \frac{e^{-ik(\rho+r)}}{\sqrt{\rho r(\rho+r)}} D(\theta) V(\tilde{\theta}) dx, \quad (2)$$

где векторы ρ и r лежат теперь в плоскости XOZ , а x_1 и x_2 — соответственно координаты начала и конца проекции кривой $z = \zeta(x)$ на ось OX .

Рассмотрим сначала частный случай, когда поверхность $z = \zeta(x)$ лежит на плоскости XOY . Тогда

$$E(P) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{\lambda}} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{z}{r} + \frac{h}{\rho} \right) \frac{e^{-ik(\rho+r)}}{\sqrt{\rho r(\rho+r)}} D(\theta) V(\tilde{\theta}) dx. \quad (3)$$

Вводя в (3) подстановкой $\rho + r = (t + 1)y_0$, где $y_0 = \sqrt{L^2 + (h + z)^2}$, новую переменную t , после громоздких преобразований получим

$$E(P) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \exp \left(i \frac{\pi}{4} - im \right) G(\alpha_1, \alpha_2), \quad (4)$$

где

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ \operatorname{sgn}(x_2 - x_0) \int_0^{\alpha_1} dt - \operatorname{sgn}(x_1 - x_0) \int_0^{\alpha_2} dt \right\} F(t) \frac{e^{-imt}}{\sqrt{t}} + \\ + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_1(t) e^{-imt} dt, \quad x_0 = \frac{Lh}{z + h}, \quad m = ky_0,$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sqrt{x_{1,2}^2 + h^2} + \sqrt{(L - x_{1,2})^2 + z^2}}{y_0} - 1,$$

$$F_1(t) = \frac{(z^2 - h^2)L(t+1)}{[(L/y_0)^2 - (t+1)^2]y_0^3} f(t),$$

$$F(t) = - \frac{4(t+1)U(t) + U'_t[(L/y_0)^2 - (t+1)^2]}{4(t+1)[(L/y_0)^2 - (t+1)^2] \sqrt{(t+2)(t^2+2t+4hz/y_0^2)}} f(t),$$

$$U(t) = (t+1)^2(t^2+2t)(t^2+2t+4hz/y_0^2), \quad f(t) = \frac{z\rho + hr}{\sqrt{(pr)^3(t+1)}} D(\theta) V(\tilde{\theta}),$$

ρ, r, θ и $\tilde{\theta}$ вычисляются с учетом замены переменных. Вычисляя в $G(\alpha_1, \alpha_2)$ интегралы по частям, получим следующий асимптотический ряд:

$$\begin{aligned} G(\alpha_1, \alpha_2) &= F(0) \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \left\{ \operatorname{sgn}(x_2 - x_0) \Phi\left(\sqrt{\frac{2m\alpha_2}{\pi}}\right) - \right. \\ &- \operatorname{sgn}(x_1 - x_0) \Phi\left(\sqrt{\frac{2m\alpha_1}{\pi}}\right) \left. \right\} - \frac{\operatorname{sgn}(x_2 - x_0)}{im} e^{-im\alpha_2} \frac{F(\alpha_2) - F(0)}{\sqrt{\alpha_2}} + \quad (5) \\ &+ \frac{\operatorname{sgn}(x_1 - x_0)}{im} e^{-im\alpha_1} \frac{E(\alpha_1) - F(0)}{\sqrt{\alpha_1}} - \frac{1}{im} [e^{-im\alpha_2} F_1(\alpha_2) - e^{-im\alpha_1} F_1(\alpha_1)] + O\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \exp\left(-i \frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau$ — интеграл Френеля. Из (5) следует, что при $x_1 \ll x_0 \ll x_2$, любых фиксированных α_1, α_2 и $m \rightarrow \infty$ главным членом разложения являются слагаемые, стоящие в фигурных скобках. Однако при $x_0 < x_1$ или $x_0 > x_2$ и $\alpha_1 m, \alpha_2 m \gg 1$ распределение поля $E(P)$, как видно из (5), будет определяться слагаемыми, стоящими в квадратных скобках (они имеют порядок $1/m$). Это означает, что в таких случаях нужно либо учитывать большее число членов, либо использовать вместо (5) другое разложение для $G(\alpha_1, \alpha_2)$.

Рассмотрим теперь случай произвольной, но не имеющей участков затенения, поверхности $z = \zeta(x)$. Разобьем кривую $\zeta(x)$ на ряд прямолинейных отрезков и применим к вычислению отраженного от каждого из них поля формулу (4). Тогда суммарное поле, рассеянное поверхностью $z = \zeta(x)$, очевидно, определится соотношением

$$E(P) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_j \sqrt{m_j} e^{-im_j} G(\alpha_1^j, \alpha_2^j),$$

где для каждого j -го отрезка величины $m_j, \alpha_{1,2}^j$ вычисляются по аналогичным формулам:

$$m_j = k \sqrt{\tilde{L}^2 + (\tilde{h} + \tilde{z})^2},$$

$$\alpha_{1,2}^j = [\sqrt{\tilde{x}_{1,2}^2 + \tilde{h}^2} + \sqrt{(\tilde{L} - \tilde{x}_{1,2})^2 + \tilde{z}^2}] [\tilde{L}^2 + (\tilde{z} + \tilde{h})^2]^{-0.5} - 1.$$

Величины $\tilde{z}, \tilde{h}, \tilde{L}, \tilde{x}_{1,2}$ берутся в прямоугольной системе координат $\tilde{X}\tilde{O}\tilde{Z}$, в которой отрезок лежит на оси \tilde{OX} , а источник — на оси \tilde{OZ} . Для вычисления G применяется асимптотическое разложение (5).

Максимально допустимый размер l отрезка можно найти, например, с помощью критерия Рэлея [6], который дает следующую формулу: $l \leq (0.5 \lambda \rho \cos^{-1} \theta_l)^{0.5}$, где ρ — радиус кривизны поверхности, а θ_l —

средний локальный угол падения. Естественно, что параметры $\tilde{\theta}_l$ и ρ должны удовлетворять, кроме того, и неравенству $\rho \gg \lambda\pi^{-1}\cos^{-3}\tilde{\theta}_l$, гарантирующему возможность применения метода Кирхгофа к рассматриваемой задаче [6].

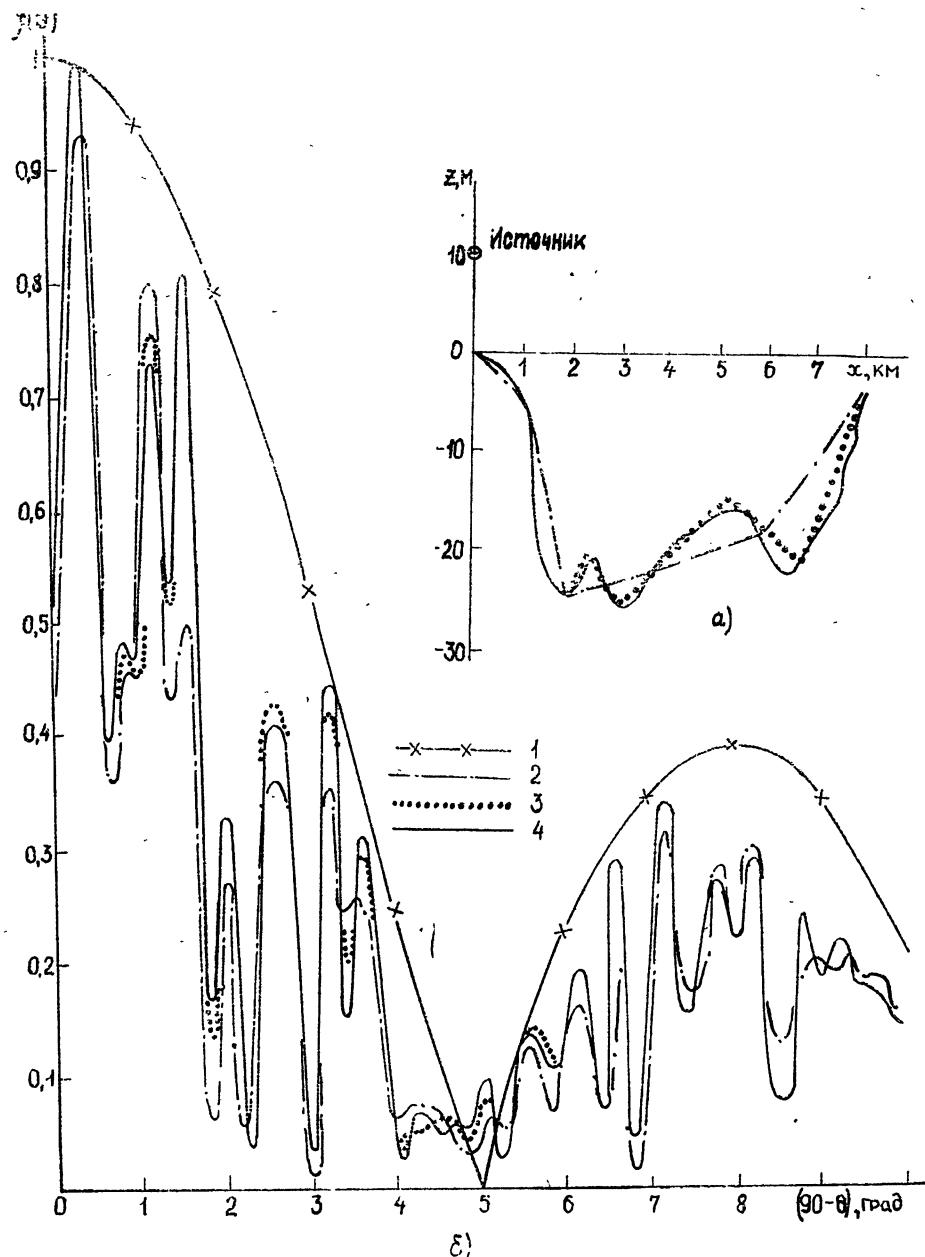


Рис. 2. Результаты расчета относительной амплитуды поля над отражающей поверхностью: а) рельеф отражающей поверхности; б) распределение относительной амплитуды поля:

кривая 1—в пространстве, кривые 2, 3, 4—над отражающей поверхностью при ее аппроксимации: 2—ломаной из 4 звеньев, 3—ломаной из 7 звеньев, 4—ломаной из 15 звеньев.

В заключение рассмотрим пример расчета электромагнитного поля горизонтально поляризованного источника ($\lambda = 1 \text{ м}$), расположенного на высоте $h = 10 \text{ м}$ над проводящей поверхностью ($60\pi\lambda \gg \epsilon$). Рельеф поверхности показан на рис. 2 а, а исходная диаграмма направленности на рис. 2 б (кривая 1).

Для иллюстрации устойчивости и сходимости процесса расчета поля по приведенным формулам проводилась аппроксимация плавного профиля ломаной с различным числом звеньев. Результаты расчета функции $f(\theta) = |E(\theta) + E_0(\theta)| |E(\theta) + E_0(\theta)|_{\max}^{-1}$ для ломаных с числом звеньев 4, 7 и 14 показаны на рис. 2 б (кривые 2, 3, 4). Видно, что кривые 2 и 4 значительно отличаются друг от друга, тогда как кривые 3 и 4 уже практически совпадают. Весь расчет занял на ЭВМ М-220 15 мин.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 P. Beckmann and A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Oxford, Pergamon Press, 1963.
- 2 E. Bahar, IEEE Trans., AP-20, № 3, 354 (1972).
- 3 V. Schejbal, Slaboproud obzor, 34, № 12, 541 (1973).
- 4 W. C. Meecham, J. Acoust. Soc. Amer., 28, № 3, 370 (1956).
- 5 Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности*, изд. Наука, М., 1972
- 6 Ф. Б. Черный, *Распространение радиоволны*, изд. Сов. радио, М., 1972.

Поступила в редакцию
10 марта 1976 г.,
после доработки
27 сентября 1976 г.

FRESNEL'S INTEGRALS IN THE PROBLEM OF CALCULATING THE ELECTROMAGNETIC FIELD REFLECTED BY A ROUGH SURFACE

S. D. Kremenetskit, A. A. Nikanorov

The problem of calculating the electromagnetic field scattered by a rough surface which has no shadow regions is considered. The solution is obtained by expanding the scatter integrals into rapidly-converging series. Due to this the characteristics of the reflected electromagnetic field are expressed through Fresnel's integrals. The results of numerical calculation of the concrete example are presented.

УДК 537.86 + 621.371

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРЕ С МАГНИТНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

К. П. Черкасова, М. И. Ломоносов, Н. А. Хижняк

Изучается дифракция плоской электромагнитной волны на ферритовом шаре в неограниченном пространстве. Для решения задачи используется аппарат векторных сферических гармоник. Рассмотрен случай, когда магнитная анизотропия мала (большие частоты, малая намагниченность насыщения). Получены выражения для электрического и магнитного полей вне и внутри шара. Найдена асимптотика полей в волновой зоне в случае линейно-поляризованной падающей волны

Вопросы рассеяния плоских волн на сфере давно интересовали специалистов математической физики конца XIX и начала XX веков [1]. Наибольшую известность приобрели статьи Ми [2] и Дебая [3]. В этих работах диэлектрический шар предполагался изотропным, а размеры его не считались малыми по сравнению с длиной падающей волны. Рассеяние электромагнитных волн на эллипсоиде с произвольной магнитной и электрической анизотропией в длинноволновом приближении было изучено одним из авторов при помощи аппарата интегральных уравнений [4]. Однако до сих пор не была рассмотрена дифракция электромагнитной волны на анизотропном шаре при произвольном соотношении между его диаметром и длиной волны. Настоящая работа посвящена исследованию дифракции плоской электромагнитной волны на ферритовом шаре.

Задача ставится следующим образом. На шар падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль направления постоянного магнитного поля H_0 , подмагничивающего феррит. Требуется определить рассеянное поле и поле внутри шара.

Будем считать, что зависимость всех величин от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$, где ω — частота падающей волны, и в дальнейшем этот множитель будем опускать.

Внутри шара (область I) уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} H_{\text{внутр}} = -ik\varepsilon_1 E_{\text{внутр}}, \quad \operatorname{rot} E_{\text{внутр}} = ik\overset{\wedge}{\mu} H_{\text{внутр}}, \quad (1)$$

где ε_1 — диэлектрическая проницаемость феррита, $\overset{\wedge}{\mu}$ — тензор магнитной проницаемости. В декартовых координатах с осью Oz , направленной вдоль магнитного поля H_0 , этот тензор имеет вид [5]

$$\overset{\wedge}{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu' & 0 \\ -i\mu' & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где величины μ и μ' без учета потерь вещественны и зависят от частоты ω , величины подмагничивающего поля H_0 и намагниченности насыщения M_0 следующим образом:

$$\mu = 1 + \frac{|\gamma| 4 \pi M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad (3)$$

$$\mu' = \frac{|\gamma| 4 \pi M_0 \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (4)$$

Здесь γ — гиромагнитное отношение для спина электрона, резонансная частота $\omega_0 = |\gamma| H_0$.

Вне шара (область 2) в неограниченной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и магнитной μ_2 уравнения Максвелла записутся в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_{\text{внешн}} = -ik \epsilon_2 \mathbf{E}_{\text{внешн}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{внешн}} = ik \mu_2 \mathbf{H}_{\text{внешн}}. \quad (5)$$

Решение в области 2 для рассеянной волны должно удовлетворять условию излучения Зоммерфельда.

Границные условия на сфере ($r = R$) вытекают из равенства тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{\text{внутр}})_\tau |_{r=R} &= (\mathbf{E}_{\text{внешн}})_\tau |_{r=R}, \\ (\mathbf{H}_{\text{внутр}})_\tau |_{r=R} &= (\mathbf{H}_{\text{внешн}})_\tau |_{r=R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения уравнений удобно использовать аппарат векторных сферических гармоник, описанных, например, в книге Ньютона [6], обозначений которой мы будем придерживаться. Введем векторы χ_ν ($\nu = -1, 0, +1$):

$$\chi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_y \pm ie_x), \quad \chi_0 = ie_z. \quad (7)$$

При помощи этих векторов и скалярных сферических гармоник $Y_l^m(r)$ строятся две полные ортонормированные системы векторных гармоник: $Y_J^M(r)$ ($J = |J-1|, J, J+1; -J \leq M \leq J; r = r/r$) и $Y_M^\lambda(r)$ ($\lambda = e, m, 0$). При фиксированных J и M эти гармоники связаны между собой линейными соотношениями. Вторая система удобна тем, что гармоники, отвечающие значениям $\lambda = e, m$, поперечны относительно орта \hat{r} , а гармоники, отвечающие $\lambda = 0$, — продольны.

Разложение падающей волны, поляризованной по кругу, в ряд по гармоникам $Y_M^\lambda(r)$ в случае, когда волновой вектор \mathbf{k}_2 направлен вдоль оси Oz , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{пад}}(r) = \chi_{\pm 1} e^{ik_2 r} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2 r} \sum_{J=1}^{\infty} \sqrt{2J+1} \left[u_J(k_2 r) Y_{J,\pm 1}^{(e)} \mp \right. \\ &\mp u_J(k_2 r) Y_{J,\pm 1}^{(m)} + \left. \frac{\sqrt{J(J+1)}}{k_2 r} u_J(k_2 r) Y_{J,\pm 1}^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где $u_J(k_2 r)$ — функции Риккати—Бесселя. Очевидно, что искомое решение как для рассеянной волны, так и для поля внутри сферы будет содержать гармоники с теми же номерами $M = \pm 1$, что и падающая волна.

Решение задачи для области вне сферы сводится к решению векторного уравнения Гельмгольца и имеет вид

$$H_{\text{пacc}}(r) = \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2 r} \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{l=\lfloor J-1 \rfloor}^{J+1} w_l^{(+)}(k_2 r) B_{Jl, \pm 1} Y_{Jl}^{\pm 1}(r), \quad (9)$$

где $w_l^{(+)}(k_2 r)$ — функции Риккати—Ганкеля, обеспечивающие нужную асимптотику рассеянной волны при $r \rightarrow \infty$.

Отметим, что в разложении векторной плоской волны (8) каждое слагаемое суммы по J является соленоидальным вектором. Естественно потребовать, чтобы и для рассеянной волны это условие выполнялось. Отсюда следует соотношение между коэффициентами $B_{Jl, \pm 1}$:

$$B_{J, J-1, \pm 1} = \sqrt{\frac{J+1}{J}} B_{J, J+1, \pm 1}. \quad (10)$$

Используя (10) и переходя к системе векторов $Y_{J, \pm 1}^{(e)}$, получим

$$H_{\text{пacc}}(r) = \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2 r} \sum_{J=1}^{\infty} \left[-\sqrt{\frac{2J+1}{J}} w_J^{(+)*}(k_2 r) B_{J, J+1, \pm 1} Y_{J, \pm 1}^{(e)} + \right. \\ \left. + w_J^{(+)}(k_2 r) B_{J, J, \pm 1} Y_{J, \pm 1}^{(m)} - \frac{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}{k_2 r} w_J^{(+)}(k_2 r) B_{J, J+1, \pm 1} Y_{J, \pm 1}^{(0)} \right]. \quad (11)$$

Электрическое поле рассеянной волны определяется из первого уравнения системы (5) и имеет вид

$$E_{\text{пacc}}(r) = \frac{i \sqrt{2\pi}}{k_2 r} \sum_{J=1}^{\infty} \left[-B_{J, J, \pm 1} w_J^{(+)*}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(e)} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2J+1}{J}} B_{J, J+1, \pm 1} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(m)} - \frac{\sqrt{J(J+1)}}{k_2 r} B_{J, J, \pm 1} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(0)} \right]. \quad (12)$$

Перейдем к решению уравнений Максвелла внутри шара. Известно, что тензор (2) диагонализуется на векторах χ_v , (7):

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu + \mu' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \mu' \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Поэтому решение для магнитного поля внутри шара следует искать в виде

$$H_{\text{внутр}}(r) = \sum_v h_v(r) \chi_v \equiv \sum_v H_v(r). \quad (14)$$

Подставляя (14) в уравнение для магнитного поля, получим

$$\text{rot rot } H_{\text{внутр}} = k^2 \epsilon_1 \sum_v \mu_v H_v, \quad (15)$$

где $\mu_{\pm 1} = \mu \pm \mu'$, $\mu_0 = 1$.

Нужное решение удается построить при помощи гармоник Y_{lmv} ^[6] параллельных векторам χ_v и связанных с гармониками Y_{Jl}^M при помощи коэффициентов Клебша—Гордана. Исходным является разложение

$$H_{\text{внутр}}(r) = \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{l=|J-1|}^{J+1} \frac{f_{Jl, \pm 1}(r)}{r} Y_{Jl}^{\pm 1}(r). \quad (16)$$

После ряда преобразований получим

$$\stackrel{\wedge}{\mu} H_{\text{внутр}}(r) = \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{l=|J-1|}^{J+1} \sum_{J'=|l-1|}^{l+1} \frac{f_{J', l, \pm 1}(r)}{r} \alpha_{JlJ'}^{\pm 1} Y_{Jl}^{\pm 1}(r), \quad (17)$$

где

$$\alpha_{JlJ'}^{\pm 1} = \sum_{\nu} C(l \mid J, \pm 1 - \nu \nu \pm 1) \mu_{\nu} C(l \mid J', \pm 1 - \nu \nu \pm 1). \quad (18)$$

Здесь $C(l \mid J, M - \nu \nu M)$ — коэффициенты Клебша—Гордана:

В разложениях (16) и (17) перейдем к гармоникам $Y_{J, \pm 1}^{(\lambda)}$:

$$H_{\text{внутр}}(r) = \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{\lambda} \frac{T_{J, \pm 1, \lambda}(r)}{r} Y_{J, \pm 1}^{(\lambda)}; \quad (19)$$

$$\stackrel{\wedge}{\mu} H_{\text{внутр}}(r) = \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{\lambda} \frac{T_{J, \pm 1, \lambda}(r)}{r} Y_{J, \pm 1}^{(\lambda)} - \frac{1}{r} \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{\lambda} \gamma_{J, \pm 1, \lambda}(r) Y_{J, \pm 1}^{(\lambda)}, \quad (20)$$

где

$$T_{J, \pm 1, e} = \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} f_{J, J-1, \pm 1} - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} f_{J, J+1, \pm 1},$$

$$T_{J, \pm 1, m} = f_{J, J, \pm 1}, \quad (21)$$

$$T_{J, \pm 1, 0} = \sqrt{\frac{J}{2J+1}} f_{J, J-1, \pm 1} + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} f_{J, J+1, \pm 1};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{J, \pm 1, e} = & - \left\{ \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} [(\alpha_{J, J-1, J}^{\pm} - 1) f_{J, J-1, \pm 1} + \right. \\ & + \sum_{J' \neq J} \alpha_{J, J-1, J'}^{\pm} f_{J', J-1, \pm 1}] - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} [(\alpha_{J, J+1, J}^{\pm} - 1) f_{J, J+1, \pm 1} + \\ & \left. + \sum_{J' \neq J} \alpha_{J, J+1, J'}^{\pm} f_{J', J+1, \pm 1}] \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\gamma_{J, \pm 1, m} = - [(\alpha_{J, J, J}^{\pm} - 1) f_{J, J, \pm 1} + \sum_{J' \neq J} \alpha_{J, J, J'}^{\pm} f_{J', J, \pm 1}],$$

$$\gamma_{J, \pm 1, 0} = - \left\{ \sqrt{\frac{J}{2J+1}} [(\alpha_{J, J-1, J}^{\pm} - 1) f_{J, J-1, \pm 1} + \right.$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{J' \neq J} \alpha_{J, J-1, J'}^{\pm} f_{J', J-1, \pm 1}] + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} [(\alpha_{J, J+1, J}^{\pm} - 1) f_{J, J+1, \pm 1} + \\ & \left. + \sum_{J' \neq J} \alpha_{J, J+1, J'}^{\pm} f_{J', J+1, \pm 1}] \right\}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить уравнения для радиальных функций $T_{J, \pm 1, \lambda}(r)$, подставим (19) и (20) в уравнение (15) и приравняем нулю коэффициенты при $Y_{J, \pm 1}^{(\lambda)}$:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} T_{J, \pm 1, e} - \sqrt{J(J+1)} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{T_{J, \pm 1, 0}}{\rho} \right) + T_{J, \pm 1, e} = \gamma_{J, \pm 1, e}; \quad (23)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} T_{J, \pm 1, m} - \frac{J(J+1)}{\rho^2} T_{J, \pm 1, m} + T_{J, \pm 1, m} = \gamma_{J, \pm 1, m}; \quad (24)$$

$$\frac{\sqrt{J(J+1)}}{\rho} \left[\frac{d}{d\rho} T_{J, \pm 1, e} - \frac{\sqrt{J(J+1)}}{\rho} T_{J, \pm 1, 0} \right] + T_{J, \pm 1, 0} = \gamma_{J, \pm 1, 0}, \quad (25)$$

где $\rho = k_1 r$, $k_1 = k \sqrt{\epsilon_1}$, $J = 1, 2, \dots$

В общем случае, при произвольных частотах ω , уравнения (23)–(25) представляют собой бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка. Если рабочая частота $\omega \gg \omega_0$, то с точностью до членов, линейных по ω_0/ω , получим

$$\mu \pm \mu' = 1 \pm \frac{|\gamma| 4\pi M_0}{\omega} = 1 \pm \alpha,$$

где $\alpha = \frac{|\gamma| 4\pi M_0}{\omega}$. Если, кроме того, выполняется условие $\omega \gg |\gamma| 4\pi M_0$,

то $\alpha \ll 1$. Допущение о малости параметра α является вполне оправданным для широкого диапазона СВЧ и ферритов с достаточно малой намагниченностью насыщения. Так, для $4\pi M_0 = 400 \text{ Гс}$, $\lambda = 3 \text{ см}$ ($\omega = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$) получаем $\alpha = 0,11$. Предположение о малости α позволяет решать систему (23)–(25) методом итераций.

Заметим, что уравнение (24) с правой частью, равной нулю, есть уравнение Бесселя. Уравнения (23) и (25) также преобразуются к неоднородному уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} (\rho \tilde{T}_{J, \pm 1, 0}) - \frac{J(J+1)}{\rho^2} (\rho \tilde{T}_{J, \pm 1, 0}) + \rho \tilde{T}_{J, \pm 1, 0} = \Gamma_{J, \pm 1}, \quad (26)$$

где

$$\tilde{T}_{J, \pm 1, 0} = T_{J, \pm 1, 0} - \gamma_{J, \pm 1, 0} \quad (27)$$

$$\Gamma_{J, \pm 1} = \frac{J(J+1)}{\rho} \gamma_{J, \pm 1, 0} - \sqrt{J(J+1)} \frac{d}{d\rho} \gamma_{J, \pm 1, e}. \quad (28)$$

Функция $T_{J, \pm 1, e}$ находится следующим образом:

$$T_{J, \pm 1, e} = \gamma_{J, \pm 1, e} + \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}} \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{T}_{J, \pm 1, 0}). \quad (29)$$

Таким образом, нахождение радиальных функций сводится к решению системы (24), (26). Введем функции Грина $G_J(\rho', \rho)$:

$$G_J(\rho', \rho) = \begin{cases} u_J(\rho') v_J(\rho) & (\rho' < \rho) \\ u_J(\rho) v_J(\rho') & (\rho' > \rho) \end{cases}, \quad (30)$$

где $v_J(\rho)$ — функции Риккати—Неймана. С помощью функций (30) перейдем от дифференциальных уравнений (24), (26) к интегральным:

$$T_{J, \pm 1, m}(\rho) = C_{J, \pm 1, m} u_J(\rho) + \int_0^{x_1} G_J(\rho', \rho) \gamma_{J, \pm 1, m}(\rho') d\rho', \quad (31)$$

$$\rho \tilde{T}_{J, \pm 1, 0}(\rho) = C_{J, \pm 1, 0} u_J(\rho) + \int_0^{x_1} G_J(\rho', \rho) \Gamma_{J, \pm 1}(\rho') d\rho',$$

где $x_1 = k_1 R$. Для решения уравнений (31) методом итераций представим функции $T_{J, \pm 1, \lambda}$, $\gamma_{J, \pm 1, \lambda}$ и коэффициенты $C_{J, \pm 1, \lambda}$ в виде разложений в ряды по степеням α :

$$T_{J, \pm 1, \lambda}(\rho) = T_{J, \pm 1, \lambda}^{(0)}(\rho) + \alpha T_{J, \pm 1, \lambda}^{(1)}(\rho) + \dots$$

и так далее. Подставим эти разложения в (31). Из формул (22) и соотношений ортогональности для коэффициентов Клебша — Гордана следует, что

$$\gamma_{J, \pm 1, \lambda}^{(0)} = 0, \quad \Gamma_{J, \pm 1}^{(0)} = 0. \quad (32)$$

Поэтому в нулевом приближении имеем

$$T_{J, \pm 1, m}^{(0)} = C_{J, \pm 1, m}^{(0)} u_J(\rho), \quad T_{J, \pm 1, 0}^{(0)} = C_{J, \pm 1, 0}^{(0)} \frac{u_J'(\rho)}{\rho}, \quad (33)$$

$$T_{J, \pm 1, \epsilon}^{(0)} = C_{J, \pm 1, 0} \frac{u_J'(\rho)}{\sqrt{J(J+1)}}.$$

Соответственно

$$f_{J, J-1, \pm 1}^{(0)} = C_{J, \pm 1, 0}^{(0)} \frac{u_{J-1}(\rho)}{\sqrt{J(2J+1)}}, \quad f_{J, J, \pm 1}^{(0)} = C_{J, \pm 1, m}^{(0)} u_J(\rho), \quad (34)$$

$$f_{J, J+1, \pm 1}^{(0)} = C_{J, \pm 1, 0}^{(0)} \frac{u_{J+1}(\rho)}{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}.$$

После того как радиальные функции для внутреннего поля определены, решение задачи о рассеянии сводится к нахождению коэффициентов разложения из граничных условий. При этом коэффициенты $B_{J, l, \pm 1}$ для рассеянного поля также предварительно представляются в виде ряда по степеням α .

Нулевое приближение представляет собой известное решение задачи о рассеянии электромагнитной волны на изотропной диэлектрической сфере (см., например, [7]). Приведем это решение:

$$H_{\text{пад}}(r) + H_{\text{пacc}}^{(0)}(r) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2 r} \sum_j \left\{ \sqrt{2J+1} \left[\mp i \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} u'_J(k_2 r) - \frac{1}{\sqrt{J}} B_{J, J+1, \pm 1}^{(0)} w_J^{(+)}(k_2 r) \right] \times \right.$$

$$\times Y_{J, \pm 1}^{(e)} + \left[i \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{2J+1} u_J(k_2 r) + B_{J, J, \pm 1}^{(0)} w_J^{(+)}(k_2 r) \right] Y_{J, \pm 1}^{(m)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}{k_2 r} \left[\mp i \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sqrt{J} u_J(k_2 r) - B_{J, J+1, \pm 1}^{(0)} w_J^{(+)}(k_2 r) \right] Y_{J, \pm 1}^{(0)},$$

$$E_{\text{пад}}(r) + E_{\text{пacc}}^{(0)}(r) = \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2 r} \sum_J \left\{ \left[V \sqrt{2J+1} u'_J(k_2 r) - i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} B_{J,J,\pm 1}^{(0)} w_J^{(+)}(k_2 r) \right] Y_{J,\pm 1}^{(e)} + \right. \\
 &+ V \sqrt{2J+1} \left[\mp u_J(k_2 r) + i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \frac{1}{\sqrt{J}} B_{J,J+1,\pm 1}^{(0)} w_J^{(+)}(k_2 r) \right] Y_{J,\pm 1}^{(m)} + \\
 &\left. + \frac{\sqrt{J(J+1)}}{k_2 r} \left[V \sqrt{2J+1} u_J(k_2 r) - i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} B_{J,J,\pm 1}^{(0)} w_J^{(+)}(k_2 r) \right] Y_{J,\pm 1}^{(0)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по всему аргументу, а

$$B_{J,J+1,\pm 1}^{(0)} = \mp i \tau_2 \sqrt{J} \frac{(\tau_1/\tau_2) u'_J(x_1) u_J(x_2) - u_J(x_1) u'_J(x_2)}{(\tau_1/\tau_2) u'_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - u_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2)} = \pm B_{J,J+1}^{(0)}, \quad (36)$$

$$B_{J,J,\pm 1}^{(0)} = -i \tau_2 \sqrt{2J+1} \frac{u'_J(x_1) u_J(x_2) - (\tau_1/\tau_2) u_J(x_1) u'_J(x_2)}{u'_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - (\tau_1/\tau_2) u_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2)} = B_{J,J}^{(0)},$$

$$\tau_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad \tau_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}, \quad x_{1,2} = k_{1,2} R.$$

Внутри сферы

$$\begin{aligned}
 H_{\text{внутр}}^{(0)}(r) &= \frac{1}{r} \sum_J \left\{ \frac{C_{J,\pm 1,0}^{(0)}}{\sqrt{J(J+1)}} u'_J(k_1 r) Y_{J,\pm 1}^{(e)} + C_{J,\pm 1,m}^{(0)} u_J(k_1 r) \times \right. \\
 &\times Y_{J,\pm 1}^{(m)} + C_{J,\pm 1}^{(0)} \frac{u_J(k_1 r)}{k_1 r} Y_{J,\pm 1}^{(0)} \right\}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{внутр}}^{(0)}(r) &= -\frac{i}{\sqrt{\varepsilon_1} r} \sum_J \left\{ C_{J,\pm 1,m}^{(0)} u'_J(k_1 r) Y_{J,\pm 1}^{(e)} + \right. \\
 &+ \left. \frac{C_{J,\pm 1,0}^{(0)}}{\sqrt{J(J+1)}} u_J(k_1 r) Y_{J,\pm 1}^{(m)} + C_{J,\pm 1,m}^{(0)} \sqrt{J(J+1)} \frac{u_J(k_1 r)}{k_1 r} Y_{J,\pm 1}^{(0)} \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$C_{J,\pm 1,0}^{(0)} = \mp i(-1)^J \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2} \tau_1 \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \left[\frac{\tau_1}{\tau_2} u'_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - u_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2) \right]^{-1}. \quad (38)$$

$$C_{J,\pm 1,m}^{(0)} = i(-1)^J \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2} \tau_1 \sqrt{2J+1} \left[u'_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - \frac{\tau_1}{\tau_2} u_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2) \right]^{-1}.$$

После того как решение в нулевом приближении найдено, можно перейти к первому приближению, т. е. найти поправки первого порядка по α к рассеянному и внутреннему полю. Для этого найдем сначала функции $T_{J,\pm 1,\lambda}^{(1)}$. После подстановки функций (34) в формулы (22) и (28) получим

$$T_{J,\pm 1,m}^{(1)} = C_{J,\pm 1,m}^{(1)} u_J(\rho) + \int_0^{x_1} G_J(\rho', \rho) \gamma_{J,\pm 1,m}^{(1)}(\rho') d\rho', \quad (39)$$

$$\rho T_{J,\pm 1,0}^{(1)} = C_{J,\pm 1,0}^{(1)} u_J(\rho) + \int_0^{x_1} G_J(\rho', \rho) \Gamma_{J,\pm 1}^{(1)}(\rho') d\rho' + \rho \gamma_{J,\pm 1,0}^{(1)}(\rho),$$

$$T_{J, \pm 1, e}^{(1)} = \gamma_{J, \pm 1, e}^{(1)}(\rho) + \frac{C_{J, \pm 1, 0}^{(1)}}{\sqrt{J(J+1)}} u_J'(\rho) + \frac{1}{\sqrt{J(J+1)}} \frac{d}{d\rho} \int_0^{\infty} \times \\ \times G_J(\rho', \rho) \Gamma_{J, \pm 1}^{(1)}(\rho') d\rho',$$

где

$$\gamma_{J, \pm 1, m}^{(1)}(\rho) = -q_{JJ}^{\pm} u_J(\rho),$$

$$\gamma_{J, \pm 1, 0}^{(1)}(\rho) = -\left\{ \sqrt{\frac{J}{2J+1}} q_{J, J-1}^{\pm} u_{J-1}(\rho) + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} q_{J, J+1}^{\pm} u_{J+1}(\rho) \right\}, \quad (40)$$

$$\gamma_{J, \pm 1, e}^{(1)}(\rho) = -\left\{ \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} q_{J, J-1}^{\pm} u_{J-1}(\rho) - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} q_{J, J+1}^{\pm} u_{J+1}(\rho) \right\},$$

$$\Gamma_{J, \pm 1}^{(1)}(\rho) = -\left\{ (J+1) \sqrt{\frac{J}{2J+1}} q_{J, J-1}^{\pm} + J \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} q_{J, J+1}^{\pm} \right\} u_J(\rho); \\ q_{JJ}^{\pm} = \mp \frac{C_{J, \pm 1, 0}^{(0)}}{J(J+1)} + \frac{J+1}{J} \sqrt{\frac{J-1}{J(2J-1)(2J+1)}} C_{J-1, \pm 1, 0}^{(0)} + \\ + \frac{J}{J+1} \sqrt{\frac{J+2}{(2J+1)(J+1)(2J+3)}} C_{J+1, \pm 1, 0}^{(0)},$$

$$q_{J, J-1}^{\pm} = \mp \frac{C_{J, \pm 1, 0}^{(0)}}{J\sqrt{J(2J+1)}} + \frac{J-1}{J} \sqrt{\frac{J+1}{2J-1}} C_{J-1, \pm 1, m}^{(0)}, \quad (41)$$

$$q_{J, J+1}^{\pm} = \pm \frac{C_{J, \pm 1, 0}^{(0)}}{(J+1)\sqrt{(J+1)(2J+1)}} + \frac{J+2}{J+1} \sqrt{\frac{J}{2J+3}} C_{J+1, \pm 1, m}^{(0)}.$$

Коэффициенты $C_{J, \pm 1, m}^{(1)}$, $C_{J, \pm 1, 0}^{(1)}$, $B_{J, J+1, \pm 1}^{(1)}$ и $B_{J, J, \pm 1}^{(1)}$ определяются из граничных условий (6) в первом приближении и равны

$$C_{J, \pm 1, 0}^{(1)} = \frac{(\tau_1/\tau_2) A_{J, J+1, \pm 1}^{(1)}(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - D_{J, J+1, \pm 1}^{(1)}(x_1) w_J^{(+)}'(x_2)}{(\tau_1/\tau_2) u_J'(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - u_J(x_1) w_J^{(+)}'(x_2)}, \quad (42)$$

$$C_{J, \pm 1, m}^{(1)} = \frac{A_{J, J, \pm 1}^{(1)}(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - (\tau_1/\tau_2) D_{J, J, \pm 1}^{(1)}(x_1) w_J^{(+)}'(x_2)}{u_J'(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - (\tau_1/\tau_2) u_J(x_1) w_J^{(+)}'(x_2)};$$

$$B_{J, J+1, \pm 1}^{(1)} = -\frac{k_2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (J+1) \sqrt{\frac{J}{2J+1}} q_{J, J-1}^{\pm} \left[\frac{x_1}{2} (u_J^2 - u_{J-1} u_{J+1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + u_{J-1} u_J \right] + J \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} q_{J, J+1}^{\pm} \left[\frac{x_1}{2} (u_J^2 - u_{J-1} u_{J+1}) - u_{J+1} u_J \right] \right\} \times \quad (43)$$

$$\times \{ \sqrt{(J+1)(2J+1)} [(\tau_1/\tau_2) u_J'(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - u_J(x_1) w_J^{(+)}'(x_2)] \}^{-1},$$

$$B_{J, J, \pm 1}^{(1)} = \frac{k_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\tau_1/2) (u_J^2 - u_{J-1} u_{J+1}) q_{J, J}^{\pm}}{u_J'(x_1) w_J^{(+)}(x_2) - (\tau_1/\tau_2) u_J(x_1) w_J^{(+)}(x_2)},$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{J, J+1, \pm 1}^{(1)}(x_1) &= -V\sqrt{J(J+1)}\gamma_{J, \pm 1, e}^{(1)}(x_1) - \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} G(\rho', \rho) \right]_{\rho=x_1} \times \\
 &\quad \times \Gamma_{J, \pm 1}^{(1)}(\rho') d\rho', \\
 D_{J, J+1, \pm 1}^{(1)}(x_1) &= - \int_0^{x_1} G(\rho', x_1) \Gamma_{J, \pm 1}^{(1)}(\rho') d\rho', \\
 A_{J, J, \pm 1}^{(1)}(x_1) &= - \int_0^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} G_J(\rho', \rho) \right]_{\rho=x_1} \gamma_{J, \pm 1, m}^{(1)}(\rho') d\rho', \\
 D_{J, J, \pm 1}^{(1)}(x_1) &= - \int_0^{x_1} G_J(\rho', x_1) \gamma_{J, \pm 1, m}^{(1)}(\rho') d\rho'.
 \end{aligned}$$

В чисителях формул (43) опущены аргументы функций $u_l(x_1)$ ($l = |J-1|, J, J+1$).

Отметим, что из соотношений четности коэффициентов Клебша — Гордана вытекает, что

$$B_{J, J+1}^{(1)} = -B_{J, J-1}^{(1)} \equiv B_{JJ}^{(1)}, \quad B_{J, J+1, +1}^{(1)} = B_{J, J+1, -1}^{(1)} \equiv B_{JJ+1}^{(1)}.$$

Таким образом, поправки первого порядка к рассеянному полю равны

$$\begin{aligned}
 H_{\text{пacc}}^{(1)}(r) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2 r} \sum_J \left\{ \sqrt{\frac{2J+1}{J}} B_{JJ+1}^{(1)} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(e)} \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm B_{JJ}^{(1)} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(m)} - \frac{\sqrt{(J+1)(2J+1)}}{k_2 r} B_{JJ+1}^{(1)} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(0)} \right\}; \tag{44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{пacc}}^{(1)}(r) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{k_2 r} i \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \sum_J \left\{ \mp B_{JJ}^{(1)} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(e)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{2J+1}{J}} B_{JJ+1}^{(1)} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(m)} \mp \frac{\sqrt{J(J+1)}}{k_2 r} B_{JJ}^{(1)} w_J^{(+)}(k_2 r) Y_{J, \pm 1}^{(0)} \right\}. \tag{45}
 \end{aligned}$$

Представляет интерес случай, когда падающая волна линейно поляризована и ее электрическое поле направлено вдоль оси $0x$:

$$E_{\text{пад}} = E_0 e_x e^{ik_x r}.$$

Поле рассеянной волны может быть вычислено как суперпозиция полей, рассеянных на сфере при падении электромагнитной волны с круговой поляризацией:

$$E_{\text{пacc}} = \frac{i}{\sqrt{2}} [(E_{\text{пacc}})_+ - (E_{\text{пacc}})_-],$$

где индексы «+» или «—» соответствуют поляризации падающей волны вдоль x_{+1} или x_{-1} . Пользуясь асимптотикой функций $w_J^{(+)}(k_2 r)$ при $r \rightarrow \infty$, для рассеянных полей в волновой зоне в первом приближении получим

$$E_{\text{пacc}} = iE_0 \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} [(A_{||}^{(0)}(\theta) \cos \varphi + i\alpha A_{||}^{(1)}(\theta) \sin \varphi) e_\theta - \\ - (A_{\perp}^{(0)}(\theta) \sin \varphi - i\alpha A_{\perp}^{(1)}(\theta) \cos \varphi) e_\varphi], \quad (46)$$

$$H_{\text{пacc}} = iE_0 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r}} [(A_{\perp}^{(0)}(\theta) \sin \varphi - i\alpha A_{\perp}^{(1)}(\theta) \cos \varphi) e_\theta + \\ + (A_{||}^{(0)}(\theta) \cos \varphi + i\alpha A_{||}^{(1)}(\theta) \sin \varphi) e_\varphi],$$

где

$$A_{||}^{(0,1)}(\theta) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sum_J (-1)^{J+1} \frac{\sqrt{2J+1}}{J(J+1)} \left[B_{JJ}^{(0,1)} \frac{d}{d\theta} P_J^1(\theta) + \sqrt{\frac{2J+1}{J}} B_{J+1}^{(0,1)} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{cosec} \theta P_J^1(\theta) \right], \quad (47)$$

$$A_{\perp}^{(0,1)}(\theta) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sum_J (-1)^{J+1} \frac{\sqrt{2J+1}}{J(J+1)} \left[B_{JJ}^{(0,1)} \operatorname{cosec} \theta P_J^1(\theta) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2J+1}{J}} B_{J+1}^{(0,1)} \frac{d}{d\theta} P_J^1(\theta) \right].$$

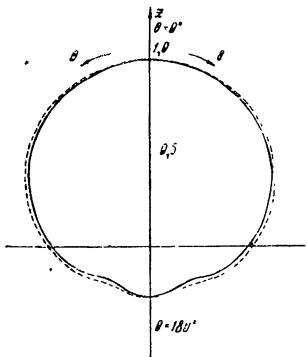


Рис. 1.

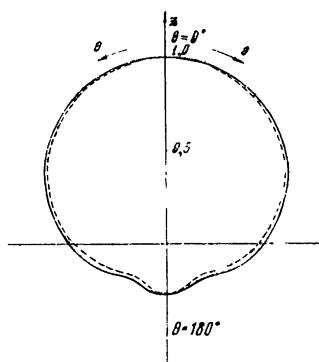


Рис. 2.

Амплитуды полей $A_{||, \perp}^{(0,1)}(\theta)$ представляют собой суммы бесконечных рядов, поэтому расчет и анализ диаграмм направленности рассеянного излучения [8] сложен и составит предмет отдельной работы. Для малого шара ($x_2 \ll 1$) расчет упрощается, так как можно ограничиться дипольным приближением. На рис. 1—3 показаны диаграммы направленности для случая, когда также $x_1 \ll 1$. Рис. 1, 2 представляют диаграммы направленности в сечениях $\varphi = \text{const}$. Рис. 1 соответствует значениям $\varphi = \pi/4$ (правая полуплоскость), $5(\pi/4)$ (левая полуплоскость); рис. 2 — значениям $\varphi = 3(\pi/4)$ (правая полуплоскость), $7(\pi/4)$ (левая полуплоскость). Сплошные линии соответствуют изотропному шару, пунктирные — ферритовому. В сечениях $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3(\pi/2)$ диа-

граммы направленности для изотропного и ферритового шаров совпадают. На рис. 3 представлена диаграмма направленности в сечении плоскостью $\theta = \pi/2$. Из графиков видно, что анизотропия феррита приводит к искажению диаграмм направленности рассеянного излучения, однако в рассматриваемом приближении эти изменения невелики.

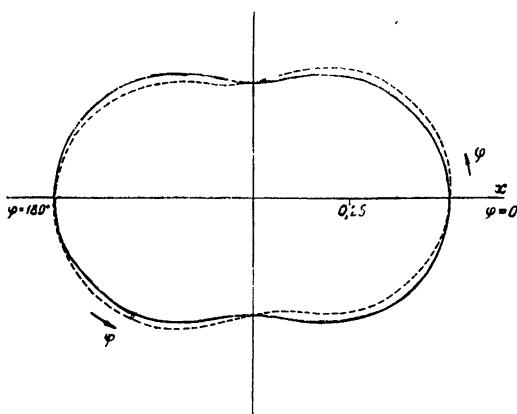


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Логан, ТИИЭР, № 8, 895 (1965).
2. G. Mie, Ann. der Phys., 25, 377 (1908).
3. P. Debye, Ann. der Phys., 30, 57 (1909).
4. Н. А. Хижняк, Труды радиофизического факультета ХГУ, 2, 13 (1957).
5. D. Polder, Phil. Mag., 40, № 300, 99 (1949).
6. Р. Ньютона, Теория рассеяния волн и частиц, изд. Мир, М., 1969.
7. Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М—Л., 1948.
8. В. В. Никольский, Электродинамика и распространение радиоволн, Физматгиз, М., 1973.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 июля 1974 г.,
после переработки
23 августа 1976 г.

DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY A SPHERE WITH MAGNETIC ANISOTROPY

K. P. Cherkasova, M. I. Lomonosov, N. A. Khizhnyak

The diffraction of a plane electromagnetic wave by a ferrite sphere in an unbounded space is studied. To solve the problem, the apparatus of vector spherical harmonics is used. The case is considered when the magnetic anisotropy is small (high frequencies, small magnetization of saturation). Expressions are obtained for electric and magnetic fields inside and outside the sphere. The field asymptotics in the wave zone is found in the case of a linearly-polarized wave.

УДК 621.391.245 : 533.216 2

**О ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАЗРЕШЕНИИ ТЕПЛОВОГО СПОСОБА
ЗАПИСИ МОДУЛИРОВАННОГО ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ
НА ПЛЕНОЧНЫХ СТРУКТУРАХ**

Б. И. Власов

Теоретически и экспериментально определяется разрешающая способность теплового способа записи при регистрации пульсирующих температурных рельефов в зависимости от теплофизических параметров пленочных структур и частоты модуляции потока излучения

В настоящее время для исследования пространственного распределения потока мощности излучения СВЧ и ИК диапазонов при юстировке и настройке аппаратуры, изучении модовой структуры излучения квантовых генераторов, получении СВЧ голограмм и визуализации радиоизображений и т. п. широко используется тепловой способ записи на металло-полупроводниковые (МП) пленочные структуры [¹⁻³]. Возникающий под действием излучения температурный рельеф вдоль МП структуры приводит к локальному тушению люминофора [³] или изменению пропускания полупроводникового слоя [¹], которое наблюдается, как яркостное термоизображение сечения потока либо записывается на запоминающее устройство с помощью пленочных термодатчиков [³]. Отклонение температурного рельефа, а при линейной зависимости эффектов в полупроводниках от температуры — рельефа прозрачности (яркости свечения люминофора, потенциала) от закона распределения плотности потока определяется конечным значением теплопроводности МП структуры [⁴] и может быть приемлемым в качественных экспериментах по визуализации СВЧ и ИК полей.

Необходимость значительного повышения температурной разрешающей способности (сверх предела, обусловленного оптимальной технологией изготовления МП структуры) возникает при исследовании пространственных вариаций плотности потока излучения. В работе [³] повышение степени адекватности температурного рельефа закону распределения потока достигается введением временной модуляции потока и регистрацией пульсирующих температурных рельефов. Локальные пульсации температуры определяются как бесконтактным способом, например методом фотометрирования на переменной составляющей тока при сканировании «точечным» фотоприемником рельефа прозрачности (яркости свечения люминофора) МП структуры, так и контактным способом — измерением переменной составляющей сигналов термодатчиков мозаики [³].

Представляет интерес анализ пространственной разрешающей способности теплового способа записи с регистрацией пульсирующих температурных рельефов в зависимости от теплофизических параметров металло-полупроводниковых пленочных структур и частоты модуляции потока.

1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим воздействие на МП структуру модулированного во времени меандром с частотой повторения Ω потока излучения, пространственное распределение которого в плоскости x, y имеет вид однородно облучаемых и необлучаемых, равных по ширине бесконечных полос (мира Фуко).

Интенсивность выделения тепловой энергии в единице объема МП структуры с приведенными [5] теплофизическими параметрами равна

$$P(x, y) = \varphi \left\{ 1 + C_1 \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \left\{ 1 + C_2 \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m]}{m} \sin m\Omega t \right\},$$

где φ — интенсивность выделения тепла в $Bt \cdot cm^{-3}$, $2L$ — период функции в направлении x , C_1 — контраст миры, C_2 — коэффициент временной модуляции.

Составляя уравнение теплового баланса для элемента приведенной пленки толщиной d_0 , не учитывая краевых эффектов и полагая, что выделение тепла однородно по толщине, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u + p(x, t), \quad (1)$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$, $b^2 = \frac{\eta}{d_0 c \rho}$, $p(x, t) = \frac{P(x, t)}{c\rho}$, λ — коэффициент теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, η — коэффициент теплообмена, $T(x, t) - T_0 = u$ — перепад температуры пленки относительно температуры окружающей среды T_0 .

Линейное неоднородное уравнение (1), описывающее распределение температуры пленки в нормальном к нагреваемым и ненагреваемым бесконечным полосам направлении, при краевых условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\frac{n}{2}[1-(-1)^n]\frac{L}{2}} = 0 \quad (2)$$

будет иметь решение

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\varphi d_0}{\eta} [1 - \exp(-b^2 t)] + C_1 \frac{\varphi d_0}{\eta} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n][1 - \exp[-(\pi n a/L)^2 t - b^2 t]]}{\pi n [1 + (\pi n/L k)^2]} \sin(\pi n x/L) + \\ & + C_2 \frac{\varphi d_0}{\eta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^m]}{\pi m} \left\{ \frac{\sin(m\Omega t - \varphi_m)}{[(1 + (m\Omega/b^2)^2)^{1/2}]^2} + \frac{(m\Omega/b^2)\exp(-b^2 t)}{1 + (m\Omega/b^2)^2} \right\} + \quad (3) \\ & + C_1 C_2 \frac{\varphi d_0}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{\pi^2 mn} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sin(m\Omega t - \psi_{mn})}{[(1 + \pi^2 n^2/L^2 k^2)^2 + (m\Omega/b^2)^2]^{1/2}} + \frac{(m\Omega/b^2)\exp[-(\pi n a/L)^2 t - b^2 t]}{[1 + (\pi n/L k)^2]^2 + (m\Omega/b^2)^2} \right\} \sin(\pi n x/L), \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{m\Omega}{b^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_{mn} = \left(\frac{m\Omega}{b^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\pi n}{L k} \right)^2 \right]^{-1}, \quad k = b/a.$$

Здесь $\frac{\varphi d_0}{\eta}$ — температура единицы объема пленки, находящейся в тепловом равновесии с окружающей средой, в котором выделяется тепловая мощность φd_0 в отсутствие теплопередачи от соседних участков.

Выражение (3) описывает процесс установления теплового состояния облучаемой пленочной структуры.

Представляет интерес случай установившегося теплового режима, наступающего при длительном ($t \rightarrow \infty$) воздействии. Выделяя гармоническую зависимость от времени, из (3) получим

$$u(x, t) = u_0(x, k, L) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{m\omega}(x, k, b^2, L) \sin[m\Omega t - \chi_m(x, \Omega, k, b^2, L)]. \quad (4)$$

Последнее соотношение указывает, что на МП структуре наряду с температурным рельефом нулевого порядка $u_0(x, k, L)$ формируются убывающие с частотой пульсирующие рельефы первого $u_{1\omega}(x, k, b^2, L) \times \sin(\Omega t - \chi_1)$, третьего $u_{3\omega}(x, k, b^2, L) \sin(3\Omega t - \chi_3)$ и т. д. нечетных порядков. Пространственную огибающую амплитуд температурных пульсаций одинаковой частоты вдоль МП структуры назовем пульсирующим термоизображением миры соответствующего порядка.

Обычно разрешающая способность регистрирующей среды определяется числом разрешимых линий на единицу длины сформированного изображения миры Фуко с контрастом, равным некоторому фиксированному значению, обусловленному считывающим устройством и принятому за критерий различимости.

Вводя по аналогии с оптикой понятие температурного контраста непульсирующего термоизображения миры (4) в виде

$$K_0 = \frac{u_0(L/2) - u_0\left(3\frac{L}{2}\right)}{u_0(L/2) + u_0\left(3\frac{L}{2}\right)} = C_1 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(kL/2)} \right] \quad (5)$$

и принимая величину минимального регистрируемого термоконтраста $K_{0\min} = K'_{\min}/(K'_{\min} + 2) = 1/21$ (где $K'_{\min} = 0,1$ — минимально регистрируемый термоконтраст, вводимый авторами [5]), из (5) получим максимальное число разрешимых линий (предел разрешения):

$$N_{0\max} = \frac{1}{2L_{\min}} = \frac{k}{4} \left(\operatorname{Arch} \frac{1}{1 - K_{0\min}/C_1} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Выражения для K_0 и $N_{0\max}$ по сравнению с аналогичными формулами (8), (9) из [5] упрощаются, а графики и численные результаты [5] могут использоваться без поправок лишь при значении величины $K_{0\min} = 1/21$.

Введем понятие температурного контраста для пульсирующего с частотой Ω термоизображения миры (4):

$$K_\Omega = \frac{u_\Omega(L/2) - u_\Omega\left(3\frac{L}{2}\right)}{u_\Omega(L/2) + u_\Omega\left(3\frac{L}{2}\right)} = \frac{1 - B_\Omega(k, b^2, L)}{1 + B_\Omega(k, b^2, L)}, \quad (7)$$

где

$$B_\Omega(k, b^2, L) = \left| 1 - \left\{ 4C_1 \sum_{n=1}^{\infty} 2[1 - (-1)^n][1 + (\pi n/Lk)^2 + (\Omega/b^2)^2] \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin \frac{\pi n}{2} [(1 + (\pi n/Lk)^2)^2 + (\Omega/b^2)^2]^{-1} \pi^{-1} n^{-1} \left\{ 1 + 2C_1 \times \right. \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n]}{\pi n} \frac{[1 + (\pi n/Lk)^2 + (\Omega/b^2)^2] \sin(\pi n/2)}{[1 + (\pi n/Lk)^2]^2 + (\Omega/b^2)^2} + \\
& + C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left[4(1 - (-1)^n)(1 - (-1)^{n_1})((1 + (\pi n/Lk)^2)(1 + (\pi n_1/Lk)^2) + \right. \\
& \left. + (\Omega/b^2)^2)(1 + (\Omega/b^2)^2) \sin \frac{\pi n}{2} \sin \frac{\pi n_1}{2} \right] [\pi^2 nn_1 ((1 + (\pi n/Lk)^2)^2 + \\
& \left. + (\Omega/b^2)^2)((1 + (\pi n_1/Lk)^2)^2 + (\Omega/b^2)^2)]^{-1} \left\}^{-1} \right|^{1/2}.
\end{aligned}$$

С ростом частоты модуляции ($\Omega \rightarrow \infty$) отношение минимального значения огибающей температурных пульсаций к максимальному $B_\Omega(k, b^2, L)$ стремится к выражению $(1 - C_1)/(1 + C_1)$, а термоконтраст K_Ω — к значению C_1 , т. е. пульсирующее термоизображение миры воспроизводит в пределе пространственное распределение потока без искажения.

В последнее время при исследовании разрешающей способности регистрирующих сред широко применяют поток излучения с пространственным распределением плотности по закону $P_0[1 + C'_1 \sin(\pi x/L)]$, который получают в результате интерференции когерентных пучков с плоскими фазовыми фронтами [6]. Гибкость моделирования произвольного контраста C'_1 и периода $2L$ полос с синусоидальным распределением интенсивности путем изменения углов падения и интенсивности каждого пучка в ходе эксперимента обусловили преимущественное использование на практике такого распределения в качестве миры. Вводя временную модуляцию по закону $(1 + C'_2 \sin \Omega t)$, интенсивность выделения тепла в пленочной структуре в линейном приближении можно представить в виде

$$P(x, t) = \varphi [1 + C'_1 \sin(\pi x/L)] (1 + C'_2 \sin \Omega t). \quad (8)$$

Решение уравнения теплопроводности (1) при краевых условиях (2) и распределенных источниках тепла (8) в установившемся тепловом режиме ($t \rightarrow \infty$), используя (4) и полагая $m = n = 1$, можно записать так:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = u_0(x, k, L) + u_\Omega(x, k, b^2, L) \sin[\Omega t - x_1] = \frac{\varphi d_0}{\eta} \times \\
\times \left[1 + C'_1 \frac{\sin(\pi x/L)}{1 + (\pi/Lk)^2} \right] + C'_2 \frac{\varphi d_0}{\eta} \left\{ 1 + 2C'_1 \frac{[1 + (\pi/Lk)^2 + (\Omega/b^2)^2] \sin(\pi x/L)}{[1 + (\pi/Lk)^2]^2 + (\Omega/b^2)^2} + \right. \\
\left. + C'_1^2 \frac{[1 + (\Omega/b^2)^2] \sin^2(\pi x/L)}{[1 + (\pi/Lk)^2]^2 + (\Omega/b^2)^2} \right\}^{1/2} \frac{\sin(\Omega t - x_1)}{[1 + (\Omega/b^2)^2]^{1/2}},
\end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\operatorname{tg} x_1 = 2 \frac{\sin^2 \varphi_1 + C'_1 \sin(\pi x/L) \sin^2 \psi_{11}}{\sin 2\varphi_1 + C'_1 \sin(\pi x/L) \sin 2\psi_{11}}.$$

Выражение (9) описывает пространственное распределение температуры на пленочной структуре в виде суммы непульсирующего и пульсирующего с частотой Ω рельефов.

Контраст (5) непульсирующего термоизображения миры (9) с синусоидальным распределением интенсивности можно определить как

$$K'_0 = \frac{C'_1}{1 + (\pi/Lk)^2}, \quad (10)$$

а задаваясь значением минимального регистрируемого контраста $K'_{0\min} = 1/21$, из (10) найдем максимальное число разрешимых линий:

$$N'_{0\max} = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{C'_1}{K'_{0\min}} - 1 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Устанавливая из (6) и (11) линейную зависимость $N_{0\max}/N'_{0\max} = G(K_{0\min}, K'_{0\min}, C_1, C'_1)$ и вычисляя коэффициент пропорциональности G (например, если $K_{0\min} = K'_{0\min} = 1/21$ и $C_1 = C'_1 = 1$, то $G = 1,115$), получаем поправку к графику рис. 1 в [6] для характеристики $N'_{0\max}$ в зависимости от параметра k .

Для контраста (7) пульсирующего термоизображения миры (9) с синусоидальным распределением интенсивности получим

$$K'_2 = \frac{1 - B'_2(k, b^2, L)}{1 + B'_2(k, b^2, L)}, \quad (12)$$

где

$$B'_2 = \frac{u_\Omega \left(3 \frac{L}{2} \right)}{u_\Omega (L/2)} = \frac{\left\{ [(\pi/Lk)^2 + 1 - C'_1]^2 + (\Omega/b^2)^2 (1 - C'_1)^2 \right\}^{1/2}}{\left\{ [(\pi/Lk)^2 + 1 + C'_1]^2 + (\Omega/b^2)^2 (1 + C'_1)^2 \right\}^{1/2}}.$$

Определяя величину минимального регистрируемого контраста пульсирующего термоизображения $K'_{2\min}$ и анализируя решения биквадратного уравнения (12) относительно $N = 1/2L$, найдем максимальное число разрешимых линий

$$N'_{2\max} = \frac{k}{2\pi} \left(\frac{C'_1}{K'_{2\min}} - 1 \right)^{1/2} \{ D + E[1 + (\Omega/b^2)^2 F]^{1/2} \}^{1/2} \quad (13)$$

где

$$D = \frac{C'_1 - 2K'_{2\min} + C'_1 K'^2_{2\min}}{2(C'_1 - K'_{2\min})}, \quad E = \frac{C'_1 (1 - K'^2_{2\min})}{2(C'_1 - K'_{2\min})},$$

$$F = \frac{4K'_{2\min}(C'_1 - K'_{2\min})(1 - C'_1 K'^2_{2\min})}{C'^2_1 (1 - K'^2_{2\min})^2}.$$

На рис. 1 представлена зависимость пространственной разрешающей способности $N'_{2\max}$ (13) от частоты модуляции Ω на уровне термоконтраста $K'_{2\min} = 1/21$ для двух структур различной толщины ($k_1 = 10,43 \text{ см}^{-1}$ и $b_1^2 = 0,73 \text{ см}^{-1}$ — кривые 1, $k_2 = 20,86 \text{ см}^{-1}$ и $b_2^2 = 2,92 \text{ см}^{-1}$ — кривые 2) при регистрации пульсирующего термоизображения миры с контрастом C'_1 , равным 0,5 и 1.

С ростом частоты Ω наблюдается монотонное увеличение разрешающей способности от значений $N'_{2\max} = N'_{0\max}$, характеризующих разрешение структур при регистрации немодулированного потока. На высоких частотах ($\Omega/b^2 \gg 1$) имеет место асимптотическое приближе-

ние $N'_{\Omega \max} \sim A(EF^{1/2})^{1/2} \left(\frac{\Omega}{a^2} \right)^{1/2}$, где a^2 — температуропроводность структуры, $A(EF^{1/2})^{1/2}$ — константа, определяемая контрастом C'_1 миры и минимально измеряемым контрастом $K'_{\Omega \min}$ термоизображения.

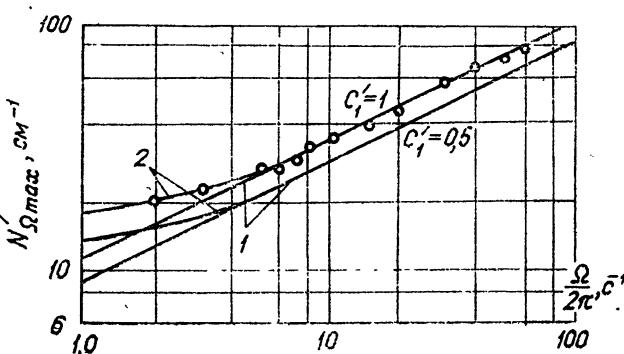


Рис. 1.

Таким образом, заключение авторов [7] о «недостаточной эффективности» метода увеличения разрешающей способности за счет модуляции потока и регистрации пульсирующих температурных рельефов, предложенного в работе [3], является некорректным, поскольку оно основано на анализе выражения суммарного температурного контраста γ (обозначение авторов [7]). Действительно, при одновременной регистрации пульсирующего и непульсирующего термоизображений миры, когда $\Omega \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \gamma_0 = K'_0$, так как вклад пульсирующего рельефа падает согласно (9) и существует экстремум зависимости разрешающей способности [7] от частоты модуляции.

Здесь, как и в работе [3], исследуется увеличение разрешающей способности термочувствительных структур в режиме регистрации только пульсирующего термоизображения. Естественно, ограниченные возможностичитывающего устройства измерять убывающие с возрастанием Ω (см. (9)) пульсации температуры на фоне температурных флюктуаций и собственных шумов [8] не позволяют реализовать случай бесконечного разрешения.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для экспериментального исследования пространственного разрешения теплового способа записи модулированных потоков излучения при регистрации пульсирующего температурного рельефа была изготовлена МП структура, представляющая собой слюдяную подложку ($50 \times 60 \text{ мм}^2$) с напыленным термическим испарением в вакууме никромовым слоем, являющимся поглотителем СВЧ излучения. На противоположную сторону подложки напылялись два германиевых пленочных болометра ($1 \times 0.2 \text{ мм}^2$) с сопротивлением $R_b = 5 \div 10 \text{ кОм}$. Измерительный болометр напылялся в центре структуры и при измерениях находился в температурном поле СВЧ излучения. Компенсирующий температурные флюктуации окружающей среды болометр напылялся на краю структуры и экранировался от СВЧ излучения и его теплового воздействия. Болометрическая мостовая схема позволяла измерять температуру с точностью 0.001°C . Закрепленная в прямоугольном ($30 \times 40 \text{ мм}^2$) отверстии листа СВЧ поглотителя структура помещалась

в область интерференции двух когерентных пучков и с помощью механической системы могла перемещаться в нормальном к интерференционным полосам направлении. Отсчет по лимбу микровинта осуществлялся с точностью до 0,01 мм. Максимальный перепад температуры структуры относительно температуры окружающей среды не превышал 5°C.

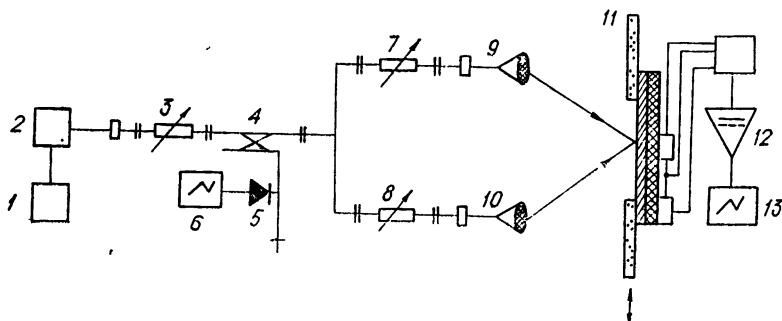


Рис. 2. Блок-схема экспериментальной установки.

Синусоидальное распределение модулированного потока СВЧ ($\lambda \approx 2$ мм) моделировалось на установке, изображенной на рис. 2. Здесь генератор модулирующего напряжения (1), генератор СВЧ (2), схема контроля постоянства уровня средней мощности и глубины модуляции на различных частотах Ω — ответвитель (4), детекторная головка (5), осциллограф (6), схема формирования двух когерентных пучков с плоскими фронтами — аттенюаторы (7, 8), корректирующие линзы (9, 10), МП структура с механизмом перемещения и мостовой измерительной схемой (11), схема измерения постоянной и переменной составляющих напряжения разбаланса моста — УПТ (12), осциллограф (13).

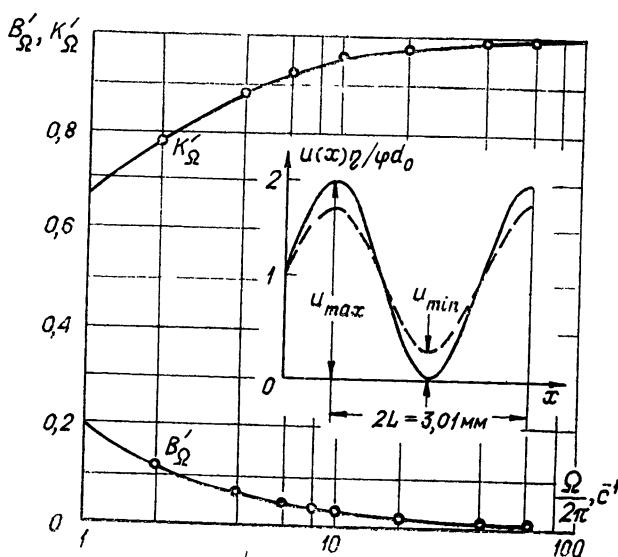


Рис. 3. Экспериментальные кривые зависимости видимости B'_Ω и контраста K'_Ω полос от частоты Ω .

В режиме непрерывного излучения пучков равной интенсивности путем перемещения структуры относительно интерференционных полос потока СВЧ регистрировался температурный рельеф. Измерения пространственной частоты $N = 1/2 L$ и четкость $\frac{u_{\Omega \min}}{u_{\Omega \max}}$ термоизображения позволили на основе (10) оценить приведенный параметр k структуры, который составил величину $k = 20 \pm 1 \text{ cm}^{-1}$.

В режиме модулированного излучения фиксировалась амплитуда пульсаций в максимуме и минимуме термоизображения. Значения $B'_{\Omega} = \frac{u_{\Omega \min}}{u_{\Omega \max}}$ в зависимости от частоты модуляции представлены на рис. 3. Предельная разрешающая способность структуры ($b^2 \approx 3 \text{ c}^{-1}$) рассчитывалась согласно выражению

$$N'_{\Omega \max} = N \left(\frac{C'_1/K'_{\Omega \min} - 1}{C'_1/K'_{\Omega} - 1} \right)^{1/2} \left\{ \frac{D + E[1 + (\Omega/b^2)^2 F]^{1/2}}{D_{K'_{\Omega}} + E_{K'_{\Omega}}[1 + (\Omega/b^2)^2 F_{K'_{\Omega}}]^{1/2}} \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

где K'_{Ω} , $K'_{\Omega \min}$ — измеренный в соответствии (12) и предельный контрасты, и наносилась в виде кружков на рис. 1. Таким образом, в пределах возможности измерительной аппаратуры и точности эксперимента наблюдается монотонное увеличение разрешающей способности с ростом частоты модуляции потока, следующее зависимостью (13).

1. Проведено теоретическое и экспериментальное исследование разрешающей способности теплового способа записи при регистрации пульсирующего температурного рельефа в зависимости от теплофизических параметров пленочной структуры и частоты модуляции потока.

2. Показано, что число разрешимых линий монотонно увеличивается с ростом частоты модуляции.

3. Показана возможность оценки приведенных теплофизических параметров слоистых структур при изменениях на СВЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Балашов, И. А. Хрипченко, Е. А. Чернов, ПТЭ, № 5, 181 (1975).
2. А. П. Бажулин, Е. А. Виноградов, Н. А. Ирисова, С. А. Фридман, ПТЭ, № 6, 152 (1970).
3. Б. И. Власов, Н. В. Котосонов, Б. Д. Корчагин, Ю. М. Пьяных, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1222 (1969).
4. Н. В. Котосонов, Б. И. Власов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 2, 311 (1968).
5. Б. И. Власов, Н. В. Котосонов, Ю. М. Пьяных, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 446 (1970).
6. М. Бори, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
7. О. В. Свиридова, И. А. Хрипченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 929 (1974).
8. Р. Смит, Ф. Джонс, Р. Чесмер, Обнаружение и измерение инфракрасного излучения, ИЛ, М., 1959.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
26 марта 1976 г.

SPATIAL RESOLUTION OF A THERMAL WAY OF THE RECORD OF MODULATED EMISSION FLUX BY FILM STRUCTURES

B. I. Vlasov

The resolving power of the thermal way of the recording pulsating temperature relieves as a function of thermal-physical parameters of film structures and modulation frequency of the emission flux is theoretically and experimentally determined.

УДК 533.09

О РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВАХ НЕОДНОРОДНОГО ПЛАЗМЕННОГО СТОЛБА

B. C. Бажанов, B. A. Исаев, Г. А. Марков

Исследовано влияние бесстолкновительного затухания на резонансные характеристики неоднородного плазменного столба и показаны возможности управления его высокочастотными свойствами с помощью зондирующего СВЧ сигнала.

Спектр высокочастотных колебаний неоднородного плазменного столба, тонкого по сравнению с длиной волны λ возбуждающего поля, содержит, как известно [1], квазистатический («основной») и плазменно-волновые («вторичные») дипольные резонансы. Ширина резонансных линий в случае достаточно малых частот столкновений электронов ($v \ll \omega$) определяется затуханием Ландау [2, 3] и, как показывают расчеты [2, 4], существенно зависит от характера распределения плотности плазмы на неоднородном участке.

В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования влияния размытия границ плазмы и низкопороговых, связанных с искажением распределения электронной плотности в пространстве скоростей и координат, нелинейных эффектов на резонансные свойства плазменного столба. Как и ожидалось [2, 5], в результате размытия границы плазмы и связанного с этим увеличения затухания продольных волн на периферии существенно обеднялся спектр собственных высокочастотных колебаний столба. При увеличении мощности зондирующей плазму СВЧ волны выше некоторого порогового уровня ($W_0 \sim 0,3 \text{ Bt}$) наблюдалось заметное увеличение относительного поглощения на резонансных частотах и появление (при $W_0 > 2,5 \text{ Bt}$) нового резонансного пика.

Для анализа спектра высокочастотных колебаний неоднородного плазменного шнура было исследовано резонансное поглощение волны TE_{01} прямоугольного волновода положительным столбом газового разряда, пересекающим волновод перпендикулярно его узким стенкам. На расстоянии четверти длины волны за разрядной трубкой волновод закорачивался металлическим поршнем. Разряд зажигался в гелии, рабочий диапазон давлений $p \approx 10^{-1} \div 10^{-3} \text{ torr}$. Изменение распределения плотности плазмы по радиусу столба осуществлялось изменением давления газа p и радиуса разрядной трубы a и контролировалось по поперечному распределению разрядного тока, снимаемому с помощью секционного анода [5]. Кроме того, распределение плотности оценивалось по данным работ [6, 7]. В экспериментах использовались стеклянные трубы с внутренними диаметрами $d = 4; 9; 15$ и 25 mm . На анод трубы подавалось переменное напряжение частотой 50 Гц и амплитудой до 2 kV . Частота зондирующего сигнала $\omega = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$, его мощность W_0 можно было менять от единиц милливатт до 20 Bt .

Резонансы наблюдались в виде пиков поглощения на осциллографмах, изображающих зависимость поглощаемой столбом высокочастотной

мощности W ($W = W_0 - W_r$, W_r — мощность отраженной волны) от разрядного тока I . На рис. 1 и 2 приведены осциллограммы $W(I)$, снятые для трубок разного диаметра при $p = 5 \cdot 10^{-2}$ тор (рис. 1: а) — 4 мм, б) — 9 мм, в) — 15 мм, г) — 25 мм) и для трубы диаметром $d = 9$ мм при разных значениях давления газа (рис. 2: а) — $p = 3 \cdot 10^{-3}$ тор, б) — $3 \cdot 10^{-2}$ тор, в) — $6 \cdot 10^{-2}$ тор, г) — 0,15 тор, д) — 0,6 тор). Распределение плотности разрядного тока j по радиусу показано для этих случаев на рис. 3 и 4. Там же сплошными кривыми построены радиальные распределения плотности электронов в столбе $n(r)$ относительно концентрации на оси n_0 . Кривые $\frac{n}{n_0}(r)$ были рассчитаны согласно бесстолкновительной теории газового разряда [6] для тонких трубок ($d = 4$; 9 мм) при $p \leq 5 \cdot 10^{-2}$ тор, $T_e \geq 13$ эВ и диффузационной теории [7] для толстой трубы ($d = 25$ мм, $T_e \sim 10$ эВ, $l_e/d \sim 0,5$, $l_i/d \sim 0,1$, l_e и l_i — длины свободного пробега соответственно электронов и ионов), а также для трубы с $d = 9$ мм в случае высокого давления ($p \approx 0,6$ тор, $T_e \sim 6$ эВ, $l_e/d \sim 0,2$, $l_i/d \sim 0,04$).

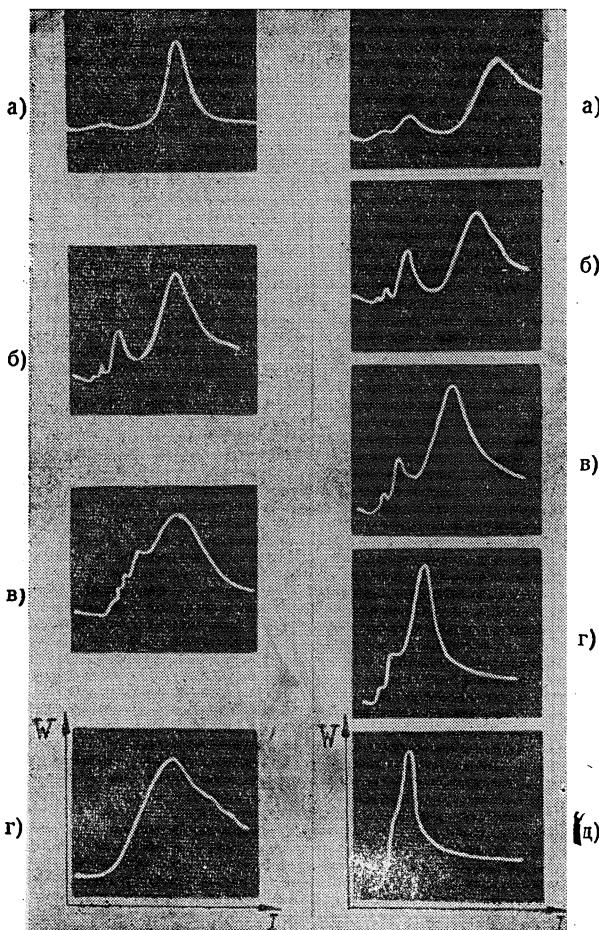


Рис. 1.

Рис. 2.

Осциллограммы рис. 1 б и 2 б—2 г отражают типичную картину резонансов Тонкс—Даттнера [1]: большой (электростатический) и серия небольших (плазменно-волновых или вторичных) резонансных пиков.

Максимальная добротность вторичных резонансов соответствует взаимодействию зондирующей волны с разрядом в трубке диаметром $d \sim 9$ мм при $p \sim 10^{-2}$ тор. По-видимому, в этом случае в положительном столбе устанавливается такое распределение плотности плазмы (см. рис. 3 и 4), когда эффективная трансформация падающей волны в продольные плазменные волны сопровождается их сравнительно слабым затуханием, поскольку резкий перепад плотности электронов вблизи границы плазмы со стеклом [6] препятствует их проникновению в область сильного затухания Ландау. Для трубок малого ($l_e \gg d$, $l_i > d$, $r_D/d \geq 10^{-2}$, r_D — дебаевский радиус, соответствующий плотности плазмы в центре трубы n_0^*) и большого ($l_e < d$, $l_i \ll d$) диаметра радиальное распределение электронной плотности в разряде характеризуется плавным и монотонным спаданием от центра столба к периферии. В этих случаях, как и предсказывает теория [2], возбуждение плазменно-волновых резонансов затруднено (см. рис. 1 а, г и 2 а, г, д) из-за большого затухания продольных волн на периферии. Кроме того, с увеличением диаметра разрядной трубы значительно ($\sim d^2/\lambda^2$) растут радиационные потери. В результате добротность как основного, так и вторичных резонансов заметно убывает с увеличением d больше 10 мм. При повышении давления газа растут потери, обусловленные столкновениями электронов с нейтралами и затуханием Ландау, которое заметно возрастает при $p > 5 \cdot 10^{-2}$ тор из-за расплывания границы плазменного столба (см. рис. 4). Как показывает сравнительная оценка параметров v/ω и $(r_D/a)^{2/3}$ [8], потери энергии на столкновения электронов в области плазменного резонанса становятся одного порядка с потерями на трансформацию только при сравнительно больших давлениях $p \geq 0,6$ тор ($v/\omega \sim (r_D/a)^{2/3} \sim 0,1$). Следовательно, уменьшение добротности резонансов при понижении давления (см. рис. 2 а) можно объяснить только увеличением затухания продольных волн на периферии столба (при $p \leq 3 \cdot 10^{-3}$ тор $(r_D/a)^2 \sim 2 \cdot 10^{-3}$ и перепад плотности плазмы на гра-

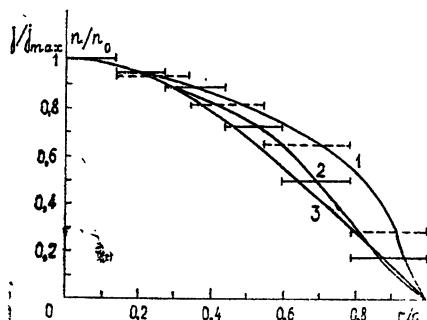


Рис. 3.

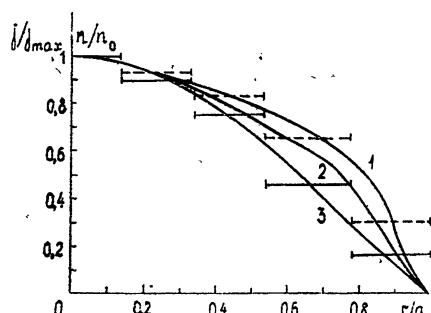


Рис. 4.

Рис. 3. Распределение плотности разрядного тока (j/j_{\max}) и концентрации плазмы (n/n_0) по сечению столба при $p=0,05$ тор для трубок с разными диаметрами: — экспериментальные значения j/j_{\max} при $d=9$ мм; — экспериментальные значения j/j_{\max} при $d=25$ мм.
1 — теоретическая кривая n/n_0 при $d=9$ мм, 2 — теоретическая кривая n/n_0 при $d=4$ мм, 3 — теоретическая кривая n/n_0 при $d=25$ мм.

1 — теоретическая кривая n/n_0 при $d=9$ мм, 2 — теоретическая кривая n/n_0 при $d=25$ мм.

Рис. 4. Распределение плотности разрядного тока (j/j_{\max}) и концентрации плазмы (n/n_0) по сечению столба для трубы диаметром 9 мм при разных давлениях: — экспериментальные значения j/j_{\max} при $p=0,03$ тор, — экспериментальные значения j/j_{\max} при $p=0,6$ тор;
1 — теоретическая кривая n/n_0 при $p=0,03$ тор, 2 — теоретическая кривая n/n_0 при $p=0,003$ тор, 3 — теоретическая кривая n/n_0 при $p=0,6$ тор.

* Для основного резонанса $n_0 \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, для первого плазменно-волнового резонанса $n_0 \approx 1,3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$.

нице со стеклом размывается, см. [6] и рис. 4). Аналогично, расплыванием границ плазменного столба следует, по-видимому, объяснить результаты работы [3], полученные при сравнительно высоком давлении ($I_e/d \sim 1$), а также результаты наблюдений радиоэха от метеорных следов [9], в которых вообще не было обнаружено плазменно-волновых резонансов.

Влияние нелинейных эффектов на резонансные характеристики неоднородного плазменного столба показано на рис. 5—7. Осциллограммы $W(I)$ (рис. 5) снимались для разряда в тонкой трубке ($d = 4$ мм) при нескольких значениях мощности падающей волны W_0 (а) — $W_0 = 0,6$ Вт, (б) — 1,2 Вт, (в) — 2,8 Вт, (г) — 4,5 Вт, (д) — 7 Вт, (е) — 9 Вт) и обратном ходе горизонтальной развертки, когда величина разрядного тока убывала от своего максимального значения до нуля. Параметры разряда ($p = 8 \cdot 10^{-2}$ тор, $d = 4$ мм, $T_e \sim 14$ эВ) были выбраны таким образом, чтобы ширина резонансных линий определялась затуханием Ландау ($\gamma/\omega \sim 5 \cdot 10^{-3} \ll (r_D/a)^{2/3} \sim \sim 0,15$). Результаты измерений относительного поглощения в плазме на частоте (1) основного ($\tilde{\omega}_{pl}^2/\omega^2 \sim 3$ [1]) и первого (2) плазменного ($\tilde{\omega}_{pl}^2/\omega^2 \leq 2$)* резонансов приведены на рис. 6 в виде зависимости $\frac{W}{W_0}(W_0)$. На рис. 7 показаны изменения относительной ширины резонансных пиков $\frac{\Delta I}{I_{res}}$ с ростом W_0 (1 — основной

и 2 — первый плазменно-волновой резонанс). Ширина пиков ΔI определялась по осциллограммам $W(I)$ на уровне 0,5 от соответствующего резонансного значения поглощения $W(I_{res})$. Заметное уменьшение ширины резонансных линий и увеличение, из-за лучшего согласования на резонансах, относительного поглощения в столбе падающей волны наблюдается при $W_0 \geq 0,25$ Вт для основного и $W_0 \geq 0,6$ Вт для вторичного резонансов. Отношение осцилляторной скорости электрона $v_\infty = \frac{eE}{m\omega}$ (амплитуда

электрического поля в плазме E оценивалась через амплитуду падающей волны E_0 и «добротность» соответствующего резонансного пика

$Q = 4 \frac{I_{res}}{\Delta I}$, e и m — заряд и масса электрона) к тепловой скорости

$v_e = \left(\frac{2\pi T_e}{m} \right)^{1/2}$ вблизи «пороговых» значений W порядка 10^{-1} . Максимальное увеличение «добротности» резонансных пиков в наших экспериментах сравнительно невелико ($\sim 40\%$). В то же время относительное поглощение на частоте квазистатического резонанса растет в 1,5

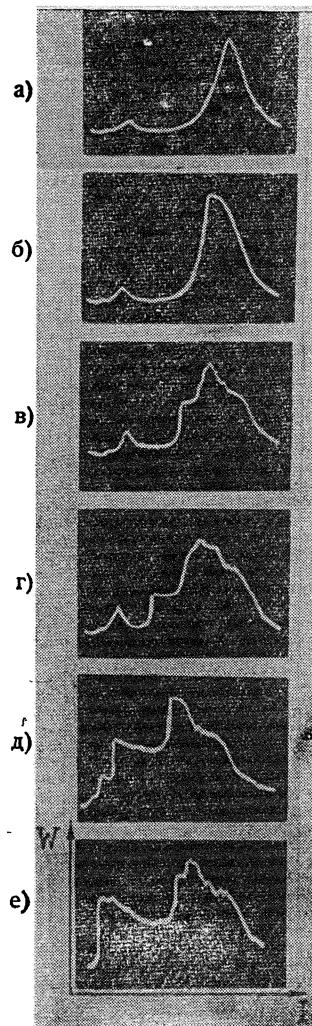


Рис. 5.

* $\tilde{\omega}_{pl}^2$ — среднее по сечению трубы значение квадрата плазменной частоты.

раза, а на частоте первого плазменно-волнового резонанса увеличивается примерно в 3 раза.

При $W_0 > 1,2 \text{ Вт}$ на осциллограммах $W(I)$ наблюдается гистерезисная деформация основного резонансного пика (см. рис. 5 б) и величина $\left(\frac{\Delta I}{I_{\text{res}}}\right)$ уже не может характеризовать ширину резонансной линии.

Для значений $W_0 > 2,5 \text{ Вт}$ на осциллограммах $W(I)$ появляется новый пик поглощения (см. рис. 5 в — 5 е), который, по-видимому, связан либо с отсосом энергии падающей волны в поверхностную волну дипольного типа [10], либо с нелинейной деформацией пространственного распределения плотности плазмы в области плазменного резонанса $\left(n = n_c = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2}\right)$

и возбуждением в этой области стоячих плазменных волн [11]. Возбуждение поверхностной волны в условиях наших экспериментов возможно, когда из-за сильного возмущения поля падающей волны неоднородным плазменным столбом и отверстиями в волноводе появляются значительные компоненты электрического поля, направленные вдоль столба ($E_\parallel \sim E_\perp$). Эффективность поглощения падающей волны на новом резонансе порядка 60%, однако попытки обнаружить поверхностную волну вне волновода оказались неудачными, а уменьшение зазора между стенкой волновода и поверхностью разрядной трубы до нуля не повлияло на резонансную зависимость $W(I)$. Деформация пространственного распределения плазмы вполне возможна в условиях эксперимента ($l_e > d$, $W_0 > 1 \text{ Вт}$) из-за стрикционного воздействия на плазму СВЧ поля, имеющего резкий максимум радиальной компоненты поля в области $n = n_c$ [8, 11]. Параметр стрикционной нелинейности

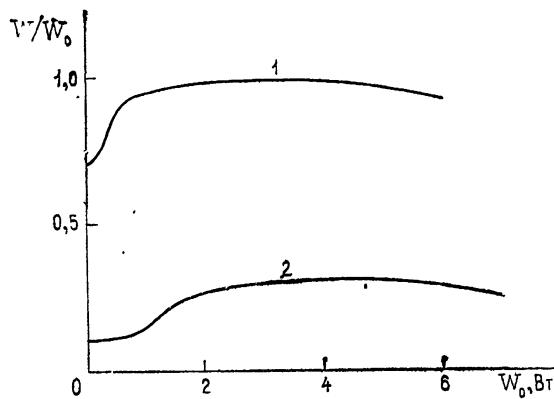
$$\eta = \left(\frac{v_\infty - a}{v_e r_D}\right)^2$$
 [8] больше единицы при $W_0 \geq 1 \text{ Вт}$. Влиянием СВЧ ионизации и нагрева электронов на распределение плотности плазмы можно пренебречь ввиду сильной нелокальности этих процессов при $l_e > d$.


Рис. 6,

Наблюдаемые изменения ширины резонансных линий и относительного поглощения на резонансных частотах можно объяснить только зависимостью бесстолкновительного затухания продольных волн от величины СВЧ поля. Уменьшение потерь, обусловленных затуханием Ландау, при значениях W_0 в интервале от 0,3 до 1,2 Вт (см. рис. 7) может быть связано либо с деформацией пространственного распределения плотности плазмы в области $n \sim n_c$ [8], ответственной за погло-

щение и добротность резонансов, либо с деформацией [12–14] функции распределения электронов по скоростям $f(v)$. К сожалению, конструкция установки не позволила исследовать изменения $f(v)$ и $n(r)$ прямыми способами. Из сравнительной оценки величины волновых полей, необходимых для заметной деформации $f(v)$ ($v_{\sim}/v_{\phi} > v^2/\omega^2$ [14], v_{ϕ} —фазовая скорость плазменной волны), и полей, необходимых для деформации $n(r)$ ($\frac{v_{\sim}}{v_e} \frac{a}{r_D} > 1$), можно установить, что в наших условиях возможна при мощностях ($W_0 \sim 0,1 \text{ Bt}$), существенно меньших по сравнению с мощностями $W_0 \sim 1 \text{ Bt}$, при которых искажение области плазменного резонанса $n \sim n_c$ может заметно изменить добротность резонансных пиков. При $W_0 \sim 0,1 \text{ Bt}$ время $1/v$ восстановления невозмущенного распределения $f(v)$ за счет соударений больше времени $\tau = \left(\frac{mv_{\phi}}{eE_{\omega}} \right)^{1/2}$, необходимого для искажения полем волны распределения электронов в области резонансных значений скоростей ($v_e \sim v_{\phi}$), и на $f(v)$ возможно образование «плато» [14]. Увеличение относительной ширины вторичного резонанса пика при $W_0 > 3 \text{ Bt}$ (см. рис. 7) связано, по-видимому, с увеличением бесстолкновительного затухания, которое возможно при развитии в плазме параметрической неустойчивости [15].

Таким образом, можно отметить, что результаты, представленные в настоящей работе, являются новым экспериментальным подтверждением теории бесстолкновительного затухания [14] и показывают возможности управления высокочастотными свойствами неоднородных плазменных объектов с помощью зондирующего плазму СВЧ сигнала.

Авторы благодарны В. Б. Гильденбургу за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Dattner, Ericsson Tecnics, 13, 309 (1957); 19, 3 (1963).
2. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 45, 1978 (1963).
3. R. W. Huggins and M. Raether, Phys. Rev. Lett., 17, 745 (1966).
4. G. Dorman, J. Plasma Phys., 4, 127 (1970).
5. В. Б. Гильденбург, Г. А. Марков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, 780 (1968).
6. J. V. Parkes, Phys. Fluids, 6, 1657 (1963).
7. В. Л. Грановский, Электрический ток в газах, изд. Наука, М., 1971.
8. В. Б. Гильденбург, Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Иркутск, секция 1, изд. Наука, М., 1972, стр. 488.
9. R. L. Closs, J. A. Clegg and T. R. Kaiser, Philos. Mag., 44, 313 (1953).
10. В. В. О'Брайен, J. Plasma Phys., 9, 369 (1967).
11. В. Б. Гильденбург, Г. М. Фрайман, ЖЭТФ, 69, № 5 (1.1) (1975).
12. J. F. Decker and C. W. Mendel, J. Phys. Rev., A3, 471 (1971).
13. Г. М. Батанов, К. А. Сарксян, В. А. Силин, Диагностика плазмы, вып. 3, 513 (1973).

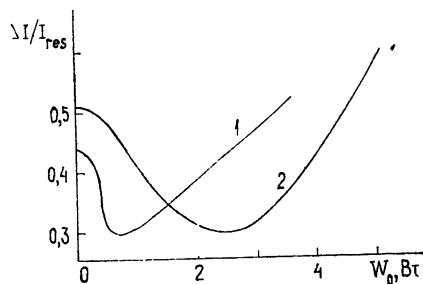


Рис. 7.

14. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967; Б. Кадомцев, УФН, 95, 111 (1968).
15. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 января 1976 г.

RESONANCE PROPERTIES OF INHOMOGENEOUS PLASMA COLUMN

V. S. Bazhanov, V. A. Isaev, G. A. Markov

The influence of collisionless attenuation upon the resonance characteristics of an inhomogeneous plasma column has been investigated. The possibilities of controlling its high-frequency properties using a probing UHF signal are shown.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 551.510.535

**ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ВЫСОТНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ
МОЩНЫМ КОРОТКОВОЛНОВЫМ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕМ**

Э. Е. Митякова, Е. Н. Мясников, А. В. Рахлин

Известно, что при нагреве ионосферы в поле мощных радиоволн могут возникать неоднородности электронной концентрации различных масштабов [1]. Первые измерения высот индуцированных неоднородностей с масштабами $100 \text{ м} \lesssim l \lesssim 1 \text{ км}$ были выполнены в работе [2], где показано, что такие неоднородности могут занимать широкий интервал высот $h_0 \sim (200 \div 450) \text{ км}$, хотя нагрев ионосферы происходил в основном около высоты $h_0 \approx 300 \text{ км}$.

В период времени декабрь 1975 г.—апрель 1976 г. в Горьком был проведен эксперимент по измерению высот ионосферных неоднородностей, возбуждаемых мощным коротковолновым радиоизлучением. Измерение высот производилось методом пространственно-разнесенного приема сигналов ИСЗ в диапазоне частот 136—137 МГц. Для измерений использовались сигналы американских орбитальных спутников (NIMBUS-5, NOAA-2), имеющих полярную орбиту, близкую к круговой, высота которой составляла $h_c \approx 1000 \text{ км}$. Нагрев области F ионосферы осуществлялся мощным коротковолновым радиопередатчиком в Зименках (Горьковская обл.) на частоте 4,6 МГц (выходная мощность радиопередатчика составляла $P_h \approx 130 \text{ кВт}$, сигнал излучался на антенну с усилением $G \approx 100$). Сигналы спутников принимались также в Зименках на две пространственно-разнесенные антенны с базой $d \approx 200 \text{ м}$ в направлении север—юг. Возмущающий радиопередатчик включался за 10—15 минут до пролета спутника и работал все время в течение сеанса наблюдений.

Для наблюдений выбирались пролеты ИСЗ, для которых сигнал в точку приема проходил через возмущенную область ионосферы (зенитный угол $\theta \geqslant 75 \div 77^\circ$), последняя в основном определяется диаграммой направленности антенны возмущающего радиопередатчика [1].

Оценки высот неоднородностей проводились путем измерения временных сдвигов Δt между подобными флюктуациями на записях сигналов в двух пространственно-разнесенных «точках» приема по известному соотношению, которое с учетом малого отклонения направления ИСЗ от направления базы и малых угловых размеров возмущенной области имеет вид $h_n = h_c v_g / (v_g + v_c)$, (где h_c — высота орбиты спутника, v_c — скорость спутника, $v_g = d/\Delta t$ — измеряемая скорость перемещения дифракционной картины в направлении север—юг). На рис. 1 а, б, в представлены полученные экспериментально по единичным измерениям временных сдвигов Δt разрезы возмущенной области в плоскости орбиты спутника для трех пролетов, соответствующих различным значениям максимального зенитного угла (вертикальными отрезками указаны погрешности измерений). Там же для каждого пролета пунктирной линией указано значение высоты максимума F -слоя (по данным ионосферной станции в Зименках). Из рисунка видно, что неоднородности, ответственные за мерцания сигналов ИСЗ, распределены в широком высотном интервале от $h_n \approx 250 \text{ км}$ до $h_n \approx 400 \text{ км}$. Этот факт говорит о том, что искусственные неоднородности могут находиться как на высотах вблизи максимума F -слоя, так и на высотах, существенно его превышающих. Отметим, что наши данные о высотном распределении неоднородностей согласуются с первыми измерениями [2].

Так как известно, что неоднородности возбуждаются нагревной волной вблизи уровня ее отражения [1], то существование их на высотах, существенно больших, является неожиданным и должно говорить о процессах «переноса» неоднородностей, протекающих в возмущенной области, возможно, вдоль геомагнитного поля.

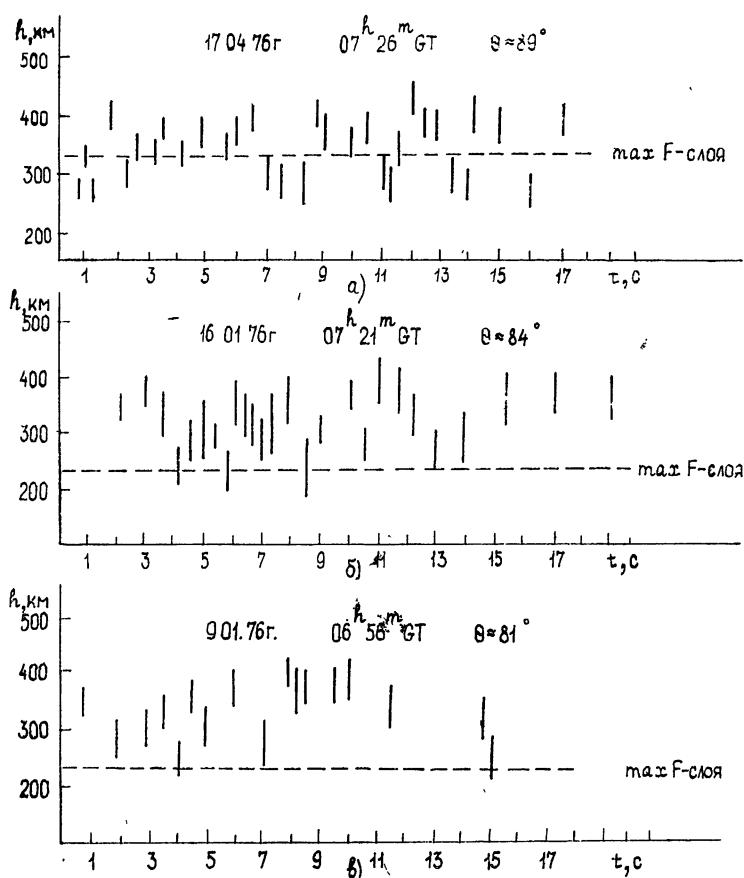


Рис. 1.

Более детальный анализ высотного распределения неоднородностей требует накопления данных, а также проведения измерений на нескольких частотах, что предполагается сделать в дальнейшем.

Авторы благодарят Л. М. Ерухимова за помощь в постановке эксперимента и обсуждение результатов и Ю. П. Пиманкина за помощь в настройке аппаратуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 19, № 1, 33 (1976).
2. S. A. Bowhill, Radio Sci., 9, № 11 (1976).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
1 июля 1976 г.

МАГНИТОСФЕРНЫЙ ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ЧАСТОТАХ НИЖЕ ПРОТОННОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ЧАСТОТЫ

C. C. Сажин

Зарегистрированные на спутнике Эксплорер-45 вне плазмосферы во время бури электростатические волны в интервале частот 20—500 Гц в [1] связывались с развитием в магнитосфере электростатической неустойчивости, обусловленной наличием энергичных протонов с функцией распределения типа конуса потерь, теория которой рассмотрена в [2]. В последней работе неявно предполагалось, что наблюдаемые волны возникают за счет усиления слабых электростатических волн (вызванных, например, тепловыми флуктуациями) при их однократном прохождении через область развития неустойчивости в магнитосфере Земли. В предлагаемой работе показано, что в условиях рассмотренной в [2] модели эти волны могут оказаться захваченными в приэкваториальной области магнитосферы, аналогично тому, как это имеет место для свистов [3], а также для электростатических электронно-циклотронных волн [4]. В условиях подобного захвата электростатические волны получают возможность многократного прохождения области развития неустойчивости, что значительно увеличит эффективность их усиления.

Предположим, следуя [2], что магнитосферные протоны состоят из холодной компоненты и горячей компоненты, характеризуемой функцией распределения типа конуса потерь, аппроксимируемой функцией

$$f_p(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{N(1-r)}{2\pi^{3/2} a^3} \left(\frac{v_{\perp}}{a}\right)^4 \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{a^2}\right),$$

где N — плотность плазмы, a — тепловая скорость протонов, r — отношение плотности холодных протонов к N , v_{\parallel} , v_{\perp} — соответственно параллельная и перпендикулярная магнитному полю составляющие скорости протонов, а функция распределения электронов имеет вид

$$f_e = \frac{N}{\pi^{3/2} b^3} \exp\left(-\frac{v^2}{b^2}\right),$$

где b — тепловая скорость электронов. Полагая, кроме этого, что частота электростатической волны ω удовлетворяет неравенству

$$\Omega_p \ll \omega \ll \Omega_e,$$

где $\Omega_{p(e)}$ — гирочастота протона (электрона), а также, что волна распространяется под углом θ к магнитному полю, запишем дисперсионное соотношение в виде [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{\Pi_e^2}{k^2 c^2} \right) - \frac{\Pi_e^2}{k^2 b^2} Z^{(1)} \left(\frac{\omega}{k_{\parallel} b} \right) - \frac{\Pi_p^2 r}{\omega^2} - \\ - \frac{\Pi_p^2 (1-r)}{k^2 a^2} \left[Z^{(1)} \left(\frac{\omega}{ka} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{2} Z^{(3)} \left(\frac{\omega}{ka} \right) + \frac{\sin^4 \theta}{32} Z^{(5)} \left(\frac{\omega}{ka} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где k_{\parallel} (\perp) — параллельная (перпендикулярная) составляющая волнового вектора, $Z(s)$ — плазменная дисперсионная функция, индекс которой означает соответствующую производную по s , $\Pi_{p(e)}$ — протонная (электронная) плазменная частота.

Численное решение (1) для значений параметров $\cos \theta = (m_e/m_p)^{1/2}$, $m_p a^2 / m_e b^2 = 25$ и переменного r , проведенное в [2], показало, что в условиях рассмотренной модели неустойчивость развивается на частотах, меньших $0,5 \Pi_p$, инкрементом, достигающим величины $10^{-2} \Pi_p$. Ниже нас будет интересовать лишь характер распространения неустойчивых волн, который определяется вещественной частью (1). Полагая $\omega/k_{\parallel} b \gg 1$, $\omega/ka \ll 1$, что согласуется с численными оценками [2], θ , близким к $\pi/2$, переходя от параметра θ к $\alpha \equiv \pi/2 - \theta$, используя разложения

$$\operatorname{Re} Z(s) = -2s \left(1 - \frac{2}{3} s^2 + \frac{4}{15} s^4 - \frac{8}{105} s^6 + \dots \right) \quad (s \ll 1),$$

$$\operatorname{Re} Z(s) = -\frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{2s^2} + \dots \right) \quad (s \gg 1)$$

и приравнивая нулю вещественную часть ϵ , нетрудно получить квадратное, относительно n^2 ($n = ck/\omega$), уравнение, решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} n_{1,2}^2 = & \left\{ \left[-\frac{\Pi_e^4}{\Omega_e^2} (1-\alpha^2) \right] \pm \left[\frac{\Pi_e^8}{\Omega_e^4} (1-\alpha^2)^2 - 32 \left(\omega \left[1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} \right] - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \Pi_p^2 r - \left[\frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} \omega^2 + \Pi_e^2 \right] \alpha^2 \right) \frac{\Pi_p^2 (1-r) c^4 \alpha^2}{\alpha^4} \right]^{1/2} \right\} \times \\ & \times \left\{ 2 \left[\omega^2 \left(1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} \right) - \Pi_p^2 r - \left(\frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} \omega^2 + \Pi_e^2 \right) \alpha^2 \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Как уже было отмечено в [1], распространение волны вблизи экваториальной плоскости магнитосферы в зависимости от ее дисперсионной характеристики может происходить двумя принципиально различными путями. Во-первых, при удалении от этой плоскости волна, первоначально распространявшаяся под углом α , по мере своего распространения может его увеличивать. В этом случае захват волны оказывается невозможным. При второй возможной ситуации происходит уменьшение этого угла по мере удаления волны от экваториальной плоскости. В этом случае захват возможен по крайней мере для волн, распространяющихся под достаточно малыми углами α к экваториальной плоскости. Если предположить постоянство плотности плазмы в приэкваториальной области магнитосферы [5] и увеличение Ω_e по мере удаления от экваториальной плоскости, то, предполагая справедливость геометрической оптики и используя закон Снеллиуса, нетрудно показать, что увеличение угла распространения волны по мере удаления от экваториальной плоскости и соответственно возможность приэкваториального захвата волны имеет место в двух случаях [4]:

1) $n(\alpha)$ уменьшается при отклонении α от нуля (кривая $n(\alpha)$ симметрична относительно $\alpha = 0$) и $n(\alpha = 0)$ уменьшается при увеличении Ω_e ,

2) $n(\alpha)$ увеличивается при отклонении α от нуля и $n(\alpha = 0)$ увеличивается при увеличении Ω_e .

Вернемся к рассматриваемой нами электростатической волне, распространение которой описывается (2). Нетрудно заметить, что при

$$\omega^2 (1 + \Pi_e^2 / \Omega_e^2) > \Pi_p^2 r \quad (3)$$

решение (2) при $\alpha = 0$ либо вырождается в нуль, либо является чисто мнимым, т. е. в этом случае захват невозможен. В случае выполнения неравенства, обратного (3), одно из решений (2), отвечающее знаку «—», оказывается вещественным и отличным от нуля. Для него нетрудно показать выполнимость первого условия захвата, что и означает возможность захвата рассматриваемых нами электростатических волн в приэкваториальной магнитосфере.

Существенно заметить, что, как следует из (3), в отсутствие холодных протонов ($r = 0$) захват волн оказывается невозможным.

Учитывая, что для магнитосферы $\Pi_e^2 \Omega_e^{-2} \gg 1$ [2], условие захвата волн можно переписать в виде

$$\omega < \sqrt{\Omega_e \Omega_p}. \quad (4)$$

Полагая $\Omega_e = 10 \text{ кГц}$, $r = 0,5$ [2], имеем из (4)

$$\omega < 160 \text{ Гц}. \quad (4')$$

Частоты, удовлетворяющие неравенству (4'), входят в диапазон волн, фактически наблюдаемых на спутниках [1].

Автор признателен М. И. Пудовкину за детальное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. R. Anderson and D. A. Gurnett, J. Geophys. Res., 78, № 22, 4756 (1973).
2. F. V. Coroniti, R. W. Fredricks and R. White, J. Geophys. Res., 77, № 31, 6243 (1972).

3. R. A. Helliwell, in „Physics of the magnetosphere“, ed. by R. L. Carolliano D. Reidel, Dordrecht (Holland), 1968, p. 106.
4. C. C. Сажин, Геомагнетизм и аэрономия, 16, № 3, 564 (1976).
5. R. A. Helliwell, in „Particles and fields in the magnetosphere“, ed. by B. M. McCormac, D. Reidel, Dordrecht (Holland), 1970, p. 292.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
3 мая 1976 г.

УДК 535.853

О РАБОТЕ РАДИОСПЕКТРОСКОПОВ В УСЛОВИЯХ НАСЫЩЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

A. B. Буренин, A. F. Крупнов

1. Работа газовых радиоспектроскопов в условиях насыщения спектральных линий, позволяет реализовать некоторые дополнительные возможности спектроскопических измерений. Данный вопрос ранее рассматривался для штартковских радиоспектроскопов, сигналом от спектральной линии в которых является изменение прошедшей через исследуемый образец мощности излучения (спектроскопы первого класса согласно проведенной в [2] классификации) [1]. Однако в настоящее время лучшими параметрами в наиболее перспективных для исследования вращательных спектров молекул миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн обладают радиоспектроскопы второго класса (сигналом от линии является изменение состояния исследуемого образца под действием излучения) [2,3], причем весьма важным обстоятельством с точки зрения достижения условий насыщения является возможность применения в них значительно больших мощностей излучения. Поскольку поведение сигнала при насыщении спектральных линий меняется в зависимости от класса спектроскопа, в настоящей заметке кратко проводится соответствующий анализ для радиоспектроскопов второго класса.

2. Рассмотрим величину сигнала в радиоспектроскопе второго класса, связанную с электродипольным взаимодействием линейно-поляризованного по оси z электромагнитного поля с чисто вращательным движением молекулы. Учитывая, что типичным является исследование одиночных однородно уширенных линий при малой оптической толще образца и равномерном распределении интенсивности поля излучения по сечению поглощающей ячейки, можно написать:

$$A = LP_c(\nu, P_0); \quad (1)$$

$$P_c(\nu, P_0) = \pi \frac{(\hbar\nu)^2}{kT} \Delta\nu_1 N f S l \sum \frac{\chi_M \Delta\nu_2^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \Delta\nu_2^2(1 + \chi_M)}. \quad (2)$$

Здесь A — величина сигнала; L — константа, характеризующая прибор; ν и P_0 — частота и мощность электромагнитного излучения, проходящего через ячейку с поперечным сечением S и длиной l^* ; P_c — мощность, поглощаемая на частоте ν одиночной спектральной линией, образованной совокупностью электродипольных вращательных переходов $\sum_M (|J_1 \tau_1 M\rangle \rightarrow |J_2 \tau_2 \pm M\rangle)$ (M — магнитное квантовое число, определяющее

ориентацию молекулы в пространстве относительно поля; суммирование проводится в пределах $|M| < J = \min(J_1, J_2)$); ν_0 — центральная частота спектральной линии; $\Delta\nu_1 = 1/2\pi T_1$ и $\Delta\nu_2 = 1/2\pi T_2$ связаны с временами продольной T_1 и поперечной T_2 релаксации, причем для вращательного спектра молекул в газовой фазе обычно $T_1 = T_2$ [4]; N — число молекул в единице объема; f — доля молекул, находящаяся в энергетическом состоянии $|J_1 \tau_1 M\rangle$; $\chi_M = P_0/P_M$, где

* Для радиоспектроскопа второго класса РАД рабочий диапазон длин волн $\lambda \sim 1,5 \pm 0,30$ мкм, $S \sim 1 \text{ см}^2$, $l \sim 10$ см, что позволяет поместить ячейку для равномерности ее освещения в область геометрической оптики без существенных потерь мощности электромагнитного излучения за счет расширения сечения пучка.

$$P_M = \frac{3}{8\pi} \frac{ch^2 \Delta\nu_1 \Delta\nu_2}{|\mu_{12}|_M^2(g)} \quad (3)$$

характеризует мощность, необходимую для насыщения перехода $|J_1 \tau_1 M\rangle \rightarrow |J_2 \tau_2 M\rangle$
 g — индекс главной вращательной оси молекулы.

Для дальнейшего удобно ввести следующие величины:

$$\chi = \frac{\sum \chi_M}{\sum M} = \frac{8\pi}{3} \frac{\mu_g^2}{ch^2 \Delta\nu_1 \Delta\nu_2} \frac{P_0}{S} \frac{S_{J_1 \tau_1, J_2 \tau_2}(g)}{\sum M} \quad (4)$$

$$\varepsilon = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_2; \quad (5)$$

$$P_c^{\max} \approx P_c(\varepsilon = 0, \chi \rightarrow \infty) = \pi \frac{(h\nu_0)^2}{kT} \Delta\nu_1 N f S l \sum M, \quad (6)$$

где μ_g — компонента дипольного момента молекулы вдоль главной оси g ,
 $S_{J_1 \tau_1, J_2 \tau_2}(g) = \frac{1}{\mu_g^2} \sum_M |\mu_{12}|_M^2(g)$ — сила спектральной линии. В результате

$$P_c \approx P_c^{\max} \varphi(\varepsilon, \chi); \quad (7)$$

$$\varphi(\varepsilon, \chi) = (\sum M)^{-1} \sum_M \frac{\chi_M}{\varepsilon^2 + 1 + \chi_M}; \quad (8)$$

$$\chi_M = 3\chi \begin{cases} \frac{J_1^2 - M^2}{J_1(2J_1+1)}, & -J_1+1 \leq M \leq J_1-1 \quad (P\text{-ветвь}) \\ \frac{M^2}{J_2(2J_2+1)}, & -J_2 \leq M \leq J_2 \quad (Q\text{-ветвь}), \\ \frac{J_2^2 - M^2}{J_2(2J_2+1)}, & -J_2+1 \leq M \leq J_2-1 \quad (R\text{-ветвь}) \end{cases} \quad (9)$$

Вид функции $\varphi(\varepsilon, \chi)$ для P - и R -ветвей совпадает с точностью до замены $J_1 \leftrightarrow J_2$. Поэтому достаточно рассматривать спектральные линии только Q - и R -типа. При $\chi \rightarrow 0$ $\varphi(\varepsilon, \chi) \rightarrow \chi/(\varepsilon^2 + 1)$, т. е. получается обычная лоренцева линия поглощения.

Для переходов между вращательными термами с большими значениями квантового числа полного момента количества движения, что типично для субмиллиметрового диапазона длин волн, вместо (8) удобно использовать следующее приближенное выражение:

$$\varphi^*(\varepsilon, \chi) = \lim_{J \rightarrow \infty} \varphi(\varepsilon, \chi) = \begin{cases} 1 - \delta \operatorname{artg} 1/\delta & (Q\text{-ветвь}) \\ 1 - (\delta' - 1/\delta') \operatorname{arth} 1/\delta' & (R\text{-ветвь}) \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $\delta = \left(\frac{\varepsilon^2 + 1}{3\chi}\right)^{1/2}$, $\delta' = (2\delta^2 + 1)^{1/2}$. Численный расчет (проведенный в пределах $10^{-2} \leq \chi \leq 10$, $0 \leq \varepsilon \leq 10$, $1 \leq J \leq 25$) показал, что максимальное различие между точным (8) и приближенным (10) выражениями, наблюдавшееся, естественно, при малых значениях J , не превышает нескольких процентов. Отметим, что при $\chi \rightarrow 0$ $\varphi^*(\varepsilon, \chi) \rightarrow \frac{\chi}{\varepsilon^2 + 1}$,

т. е. переходит в точное выражение.

3. Рассмотрим возможности использования эффекта насыщения спектральных линий в радиоспектроскопах второго класса. При больших значениях параметра насыщения ($\chi \gg 1$) амплитуда сигнала в центре линии пропорциональна заселенности нижнего уровня (с учетом вырождения), а также $\Delta\nu_1$ и ν_0^2 , и не зависит от проходящей через ячейку мощности. Напротив, ширина наблюдающейся линии определяется параметрами $\Delta\nu_2$ и χ и при $\chi \gg 1$ ширина линии пропорциональна $\chi^{1/2} \sim P_0^{1/2} |\mu_{12}|$.

В результате в радиоспектроскопах второго класса:

а) возможно раздельное определение насыщенности нижнего уровня и матричного элемента перехода, которые в спектроскопах первого класса входят в выражение для интенсивности наблюдающейся линии в виде произведения [1].

б) появляется возможность существенного облегчения идентификации линий (особенно на широких записях спектра [3]) при использовании выравнивания при $\chi \gg 1$ интенсивности наблюдающихся линий, имеющих одинаковую населенность. Отметим, что при этом формы линий Q -ветви и P , R -ветвей близки к лоренцевой и имеющейся между ними (согласно (10)) различие является довольно слабым;

в) возможна абсолютная калибровка чувствительности спектроскопов второго класса, т. е. определение постоянной L в (1) или интенсивности наблюдающихся линий путем регистрации при $\chi \gg 1$ максимального сигнала (6) от линий и некоторых вспомогательных исследований, включающих в принципе лишь частотные измерения (для определения статистической суммы, т. е. структуры уровней молекулы, ширины и частоты спектральной линии) и измерение давления газа в ячейке. При использовании, например, линий, соответствующих одинаковым переходам молекул в различных колебательных состояниях (матричные элементы дипольного момента которых весьма близки), такая калибровка может производиться при самых различных уровнях мощности, поглощенной газом

ЛИТЕРАТУРА

- H. W. Harrington, J. Chem Phys., 46, 3698 (1967); 49, 3023 (1968).
 2. С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. В. Королихин, А. Ф. Крупнов, Оптика и спектроскопия, 35, 295 (1973).
 3. С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. П. Казаков, Е. Н. Каракин, А. Ф. Крупнов, Письма в ЖЭТФ, 18, 285 (1973).
 4. H. A. Dijkgraaf, Power Saturation of Microwave Absorption Lines, Bramer Offset, Rotterdam (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 мая 1976 г.

УДК 538.574.2

К ТЕОРИИ СИСТЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

Ю. А. Рыжов

Кинетические уравнения, осуществляющие описание эволюции динамических систем, подчиняющихся системам обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений, являются чрезвычайно мощным аппаратом решения статистических задач [1-3]. В настоящей заметке рассматривается вопрос о приближенных решениях обобщенных кинетических уравнений для систем, находящихся под действием не дельта-коррелированных случайных сил. В приближении Бурре применительно к стохастическому уравнению Лиувилля эти уравнения получены в [4].

Основное уравнение для функции распределения решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi^l}{dt} = v^l(\xi, t), \quad \xi(t_0) = \xi_0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^l} \int_{-\infty}^{\xi} dt' \left. \frac{\partial B^{lj}(x, y; t, t') W(y, t')}{\partial y^j} \right|_{y=x}. \quad (2)$$

Для простоты мы положили $\langle v \rangle = 0$. Здесь $W(x, t)$ — плотность вероятности для случайного вектора $\xi(t)$, $B^{lj}(x, y; t_1, t_2) = \langle v^l(x, t_1) v^j(y, t_2) \rangle$ — корреляционный тензор скоростей. Решение интегродифференциального уравнения (2) предполагается известным в начальный момент времени t_0 ,

$$W(x, t_0) = W_0(x), \quad (3)$$

и равным нулю при $t < t_0$, так что интегрирование в (2) фактически ведется по интервалу $[t_0, t]$. В том случае, когда процесс $v^i(x, t)$ однороден по времени ($B^{ij}(x, y; t_1, t_2) = B^{ij}(x, y, t_1 - t_2)$), уравнение (2) с помощью преобразования Лапласа сводится к дифференциальному уравнению в частных производных относительно пространственных координат. Условие отсутствия потока вероятности через границу области допустимых значений обеспечивает, как правило, единственность решения этого уравнения и всей задачи в целом. В тех случаях, когда рассмотренный путь неприемлем (из-за неоднородности процесса $v^i(x, t)$ или из-за фактических вычислительных трудностей), можно использовать следующий приближенный метод.

Запишем (2) в интегральной форме:

$$W(x, t) = W_0(x) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial}{\partial y^j} \int_{t_0}^t dt' W(y, t') \tilde{B}^{ij}(x, y; t, t') \right] \Big|_{y=x}. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{B}^{ij}(x, y; t, t') = \int_{t'}^t dt_1 B^{ij}(x, y; t_1, t')$. Если $B^{ij}(x, y; t, t') = F^{ij}(x, y, t) \delta(t-t')$

(т. е. процесс $v^i(\xi, t)$ является δ -коррелированным по времени), то уравнение (4) переходит в диффузионное уравнение (ЭФПК). При решении уравнения (4) мы будем опираться на решение некоторого вспомогательного уравнения ЭФПК, в котором в ка-

честве тензора $F^{ij}(x, y, t)$ взят тензор $F^{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} B^{ij}(x, y; t, t') dt'$. Решение этого уравнения обозначим через $W_s(x, t)$. Оно удовлетворяет граничным условиям и условиям нормировки.

Уравнение (4) будем решать методом итераций, беря в качестве нулевого приближения $W_s(x, t)$:

$$W_1(x, t) = W_0(x) + \frac{\partial}{\partial x^i} \int_{t_0}^t dt' \left[\frac{\partial}{\partial y^j} W_s(y, t') \tilde{B}^{ij}(x, y; t, t') \right] \Big|_{y=x}. \quad (5)$$

Мы покажем, что первое приближение (5) при выполнении определенных условий ближе к истинному решению W уравнения (4) нежели нулевое приближение W_s . Разность $W - W_1$ удовлетворяет соотношению

$$W - W_1 = \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{\partial}{\partial y^j} \int_{t_0}^t dt' \tilde{W}(y, t') \tilde{B}^{ij}(x, y; t, t') \right] \Big|_{y=x}, \quad (6)$$

где $W - W_s = \widetilde{W}$.

Пусть $\xi = \frac{t - t_0}{\tau} = T/\tau \ll 1$, где τ — характерный временной масштаб корреляции процесса $v^i(x, t)$. Тогда $\tilde{B}^{ij}(x, y; t, t') \approx B^{ij}(x, y; t, t) (t - t')$ и по теореме о среднем

$$W - W_1 = \frac{T^2}{2} \frac{\partial^2 B^{ij}(x, y; t, t) \tilde{W}(y, \tilde{t})}{\partial x^i \partial y^j} \Big|_{y=x}. \quad (7)$$

Если пространственный масштаб функции $B^{ij}(x, y; t_1, t_2)$ обозначить через l , а масштаб функций распределения — через L , то из (7) следует оценка

$$\left| \frac{W - W_1}{W - W_s} \right| \approx \frac{T^2}{2} \frac{\langle v^2 \rangle}{\min(l^2, L^2, lL)} = \frac{D_s \xi}{4 \min(l^2, L^2, lL)}. \quad (8)$$

$D_s = 2T\tau\langle v^2 \rangle$, $\xi = T/\tau$. При $\xi \gg 1$ из (6) следует

$$\left| \frac{W - W_1}{W - W_s} \right| \approx \frac{D_s}{2 \min(l^2, L^2, lL)}. \quad (9)$$

По поводу полученных неравенств следует заметить следующее. Пространственный масштаб, характеризующий функцию распределения, является функцией времени. Обычно при $\xi \gg 1$ $L \sim \sqrt{D_s}$, $W \approx W_s \approx W_1$. Если же $\xi \ll 1$, то ситуация зависит от среднего масштаба функции распределения на рассматриваемом интервале времени. Исходное уравнение (2) само справедливо при выполнении неравенства [4]

$$\sqrt{\frac{D_0}{4 \min(l^2, L^2, lL)}} \ll \xi^{1/2} \text{ или } \frac{\tau \langle v^2 \rangle^{1/2}}{2 \min(l, L, \sqrt{lL})} \ll 1. \quad (10)$$

Это неравенство также накладывает некоторое ограничение на масштабы l, L в рассматриваемом интервале. Наконец, заметим, что приближенное решение W_1 автоматически удовлетворяет условию нормировки, если последнему удовлетворяют функции $W_0(x)$ и $W_0(x, t)$.

На простейшем примере: $\frac{dx}{dt} = f(t)$, $\langle f(t) \rangle = 0$, $f(t)$ — однородный нормальный процесс с гауссовой функцией корреляции $B(t_1 - t_2) = \frac{2 \langle v^2 \rangle}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{t_1 - t_2}{\tau}\right)^2\right]$, убедимся в том, что неравенства (8) — (10), несмотря на их грубость, контролируют степень близости решения W_1 к точному решению W , которое имеет вид

$$W(x, t) = \frac{1}{2r_0} \left\{ \Phi \left[\frac{x}{\sqrt{2D(t, t_0)}} \right] - \Phi \left[\frac{x - r_0}{\sqrt{2D(t, t_0)}} \right] \right\}. \quad (11)$$

При $t = t_0$ это распределение имеет вид

$$W_0(x) = \begin{cases} r_0^{-1} & (0 \leq x \leq r_0) \\ 0 & (x \text{ вне } [0, r_0]) \end{cases},$$

$$\Phi(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-z^2} dz, \quad D(t, t_0) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t B(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = D_0 F(\xi),$$

$F(\xi) = \Phi(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi} (e^{-\xi^2} - 1)$. Функция $F(\xi)$ асимптотически приближается к единице при $\xi \gg 1$ ($F(40) = 0,986$).

Приближение ЭФПК получается из (11) заменой $D(t, t_0)$ на D_0 . В данном примере при $\xi \gg 1$ $L^2 \approx D(t, t_0) \rightarrow D_0$, так что $|W - W_1| \rightarrow 1$. Приближенное решение W_1 имеет вид

$$W_1(x, t) = W_0(x) [1 - \Phi(\xi)] + \frac{1}{r_0 \sqrt{\pi}} \int_0^\xi dz e^{-z^2} \left\{ \Phi \left[\frac{x}{\sqrt{2D_0(1 - z/\xi)}} \right] - \Phi \left[\frac{x - r_0}{\sqrt{2D_0(1 - z/\xi)}} \right] \right\}.$$

В области $\xi \lesssim 1$ $|W - W_1| \sim D_0 \xi$ ($r_0 = 1$).

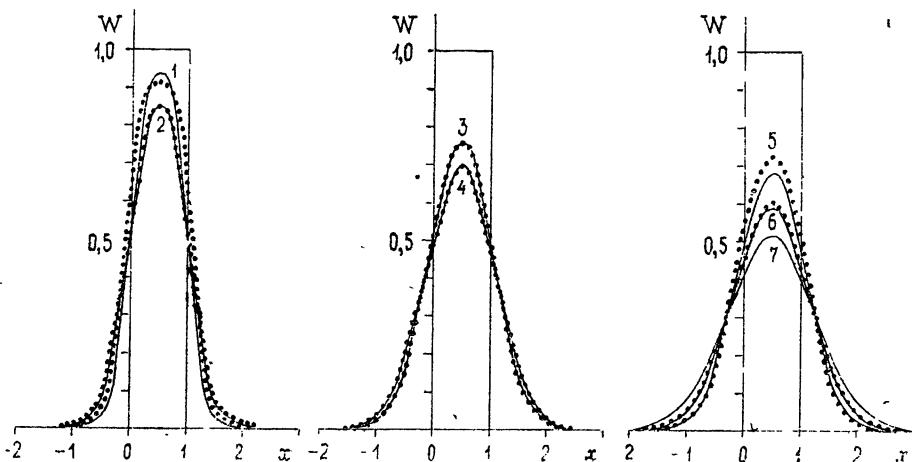


Рис. 1. Кривые 1—4: $D_0 = 0,25$, $\xi = 0,5$ (1), 1 (2), 2 (3), 10 (4); кривые 5—7: $D_0 = 0,5$, $\xi = 1$ (5), 2 (6), $\xi \gg 1$ (7). Сплошные линии — точное решение W , точки — приближенное решение W_1 .

Следовательно, можно ожидать, что при $D_0 \xi \ll 1$ и $D_0 \ll 4\xi$, $\xi \ll 1$ решение W_1 будет близко к истинному, но значительно отличаться от W_0 (кривая 7 на рис. 1). На рис. 1 приведены распределения W_1 и W при фиксированных ξ и D_0 . Сравнение W_1 и W показывает, что указанные неравенства в рассматриваемом примере являются слишком сильными. Параметры $D_0 \xi$ и $D_0/4 \xi$ могут стать порядка единицы, и тем не менее решение W_1 близко к точному.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, № 4, 499 (1973).
4. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 7, 1001 (1976).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
23 января 1976 г.

УДК 538.574.4

О РОЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ИЗЛУЧЕНИИ И РАССЕЯНИИ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

Г. А. Бегишвили, В. Г. Гавриленко, Г. В. Джандиери

Известно, что многие вопросы электродинамики хаотически неоднородных сред могут быть решены с использованием тензора эффективной диэлектрической проницаемости, связывающего среднюю индукцию со средним электрическим полем [1]. Случай пространственных неоднородностей в настоящее время рассмотрен достаточно подробно [1].

В данной заметке обсуждаются некоторые особенности, возникающие из-за временных флуктуаций и связанные с наличием энергетического обмена между средой и волной.

1. Рассмотрим безграничную недиспергирующую среду, в которой диэлектрическая проницаемость имеет вид $\epsilon(r, t) = \epsilon_0 + \epsilon_1(r, t)$. Причем, $\epsilon_0 = \text{const}$, $|\epsilon_1| \ll \epsilon_0$; $\epsilon_1(r, t)$ — статистически однородная изотропная и стационарная случайная функция с нулевым средним значением ($\langle \epsilon_1 \rangle = 0$).

Методом возмущений [2] можно найти продольную и поперечную части тензора эффективной диэлектрической проницаемости. Для гауссовой функции корреляции

$$B_\epsilon(\rho, \tau) = \langle \epsilon_1^2 \rangle \exp(-\rho^2/l^2 - \tau^2/T^2), \quad (1)$$

где l — масштаб пространственных неоднородностей, T — характерное время флуктуаций, в мелкомасштабном случае

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} l_1 \ll 1 \quad (2)$$

получаем*

$$\begin{aligned} \text{Im } \epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k) &= \text{Im } \epsilon_{\text{эфф}}^{\text{tr}}(\omega, k) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\langle \epsilon_1^2 \rangle}{\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} l_1 \right) \frac{l_1^2 \epsilon_0}{c^2 T^2} \left[3 \left(1 - \frac{l_1^2 \epsilon_0}{c^2 T^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{l_1^2 \epsilon_0}{c^2 T^2} k^2 l_1^2 \right] \times \\ &\times \exp \left(-\frac{k^2 l_1^2}{4} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{\langle \epsilon_1^2 \rangle}{\epsilon_0} \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} l_1 \right)^3 \exp \left(-\frac{k^2 l_1^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

* Отметим, что в работе [2] при выводе соотношения, аналогичного (3), допущена ошибка.

Здесь $I_1 = I/\sqrt{1 + l^2 \epsilon_0/c^2 T^2}$ — эффективный масштаб неоднородностей [2]. Отличием действительной части $\epsilon_{\text{эфф}}^l$ и $\epsilon_{\text{эфф}}^{\text{tr}}$ от ϵ_0 в интересующих нас задачах можно пренебречь.

2. Одним из вопросов, который можно решить, используя тензор эффективной диэлектрической проницаемости, является вопрос о средних потерях энергии тяжелой частицы, равномерно движущейся в хаотически неоднородной среде. Методом, аналогичным изложенному в [1,3], можно, используя (3), подсчитать средние потери на единицу длины пути заряда s , вызванные силой радиационного трения:

$$\left\langle \frac{dw}{ds} \right\rangle = \beta \frac{q^2 \langle \epsilon_1^2 \rangle}{l^2 \epsilon_0^{5/2}} (1 + \xi) \left[\frac{4}{5} \epsilon_0 \beta^2 + \frac{\xi(\xi + 4)}{(1 + \xi)^2} \right], \quad (4)$$

где $\beta = v/c$, v — скорость частицы, q — ее заряд, c — скорость света, $\xi = l^2 \epsilon_0/c^2 T^2$. Формула (4) выведена в предположении нерелятивистского движения заряда $\beta^2 \ll 1$, когда основной вклад в силу торможения дает излучение частицы на частотах, удовлетворяющих неравенству (2).

Из (4) видно, что с уменьшением временного масштаба флюктуаций (с ростом ξ) потери увеличиваются. При $\xi \sim 1$ происходит увеличение по сравнению с чисто пространственным случаем в $1/\beta^2$ раз. Отметим, что при $T_\omega \ll 1$ формула (4) описывает и случай крупных неоднородностей.

Известно, что при движении заряда в среде с чисто пространственными неоднородностями потери его энергии однозначно связаны с мощностью излучения [1,3]. Наличие временных флюктуаций приводит к нарушению указанного баланса, так как параметрическая среда не является замкнутой системой [4]. Поэтому, используя тензор эффективной диэлектрической проницаемости, не удается уже вычислить поток энергии излучения. Непосредственный подсчет последней величины предполагается провести в дальнейшем.

3. Аналогичная особенность имеется и при вычислении интегрального сечения рассеяния (коэффициента экстинкции) в среде с временными флюктуациями. Здесь затухание среднего поля определяется не только рассеянием, но и параметрическим обменом энергией между волной и средой [5]. Поэтому однозначная связь между коэффициентом экстинкции и $n_{\text{эфф}}^{\text{tr}} = V \epsilon_{\text{эфф}}^{\text{tr}}$ [1] нарушается. Вычисляя обе последние величины независимо, можно оценить эффективность параметрического энергообмена в различных случаях. Наиболее интересным является случай достаточно быстрых мелкомасштабных флюктуаций

$$kl \ll 1, \quad T_\omega \ll 1, \quad l \ll cT, \quad (5)$$

где k и ω — волновое число и частота волны. Применяя обычный метод расчета [6], получим коэффициент экстинкции в этом приближении:

$$h = \sqrt{\pi} \langle \epsilon_1^2 \rangle \frac{l^3}{c^4 T^4} \left(1 + \frac{1}{4} \epsilon_0^4 \omega^2 T^2 \right). \quad (6)$$

Из (3) нетрудно найти мнимую часть показателя преломления поперечной волны среднего поля:

$$\text{Im } n_{\text{эфф}}^{\text{tr}} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \langle \epsilon_1^2 \rangle \frac{l^3}{c^4 T^3} T_\omega. \quad (7)$$

Уравнение переноса интенсивности среднего поля [1] можно в данном случае записать так:

$$\frac{dJ}{ds} = (\mu - h) J, \quad (8)$$

где коэффициент μ характеризует в среднем энергообмен волны с флюктуирующей средой.

Из (6), (7), (8) находим

$$\mu = h - \frac{2\omega}{c} \text{Im } n_{\text{эфф}}^{\text{tr}} = \langle \epsilon_1^2 \rangle \frac{l^3}{c^4 T^4} \left[1 + \frac{1}{4} T^2 \omega^2 (\epsilon_0 - 6\pi) \right]. \quad (9)$$

Таким образом, для выбранной модели флюктуирующей среды $\mu > 0$, и, следовательно, происходит передача энергии от среды к волне, что согласуется с результатами работы [5]. Авторы выражают благодарность Ю. А. Кравцову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 356 (1970).
2. В. Г. Гавриленко, Я. М. Дорфман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 249 (1972).
3. V. V. Tamoykin, Astrophys. Space Sci., 16, 120 (1972).
4. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
5. В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 69 (1973).
6. Электродинамика плазмы (под ред. А. И. Ахиезера), изд. Наука, М., 1974.

Горьковский государственный университет

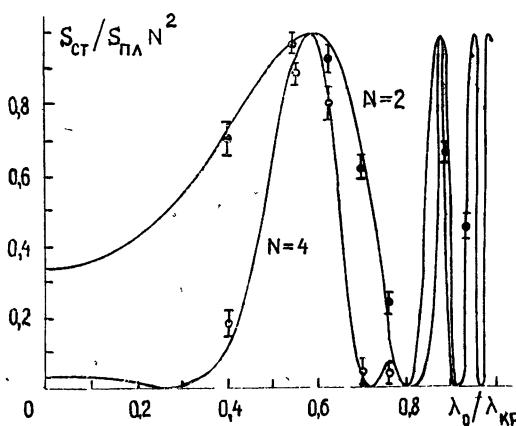
Поступила в редакцию
24 мая 1976 г.

УДК 621.372.8

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ СГУСТКОВ, ПРОЛЕТАЮЩИХ СКВОЗЬ СТОПКУ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН В ВОЛНОВОДЕ

Э. М. Лазиев, Г. Г. Оксузян, Э. С. Погосян

Хорошо известно параметрическое излучение, которое возникает при аксиальном пролете заряженной частицы через бесконечную слоистую среду, заполняющую волновод [1]. Конечные размеры среды (стопка диэлектрических пластин) накладывает ряд характерных особенностей. Ниже приводятся экспериментальные результаты характеристик излучения, возникающего при пролете релятивистских заряженных сгустков через стопку диэлектрических пластин в волноводе. Экспериментальная установка, методика измерений и параметры сгустков приведены в [2]. Источником электронных сгустков служил линейный ускоритель с энергией пучка ~ 50 МэВ. Измерялась зависимость излученной энергии от дисперсии волновода и числа периодов слоистой среды, составленной из чередующихся слоев воздуха и фторопластика. Представляло интерес измерение указанной зависимости в полосах прозрачности и непрозрачности слоистой среды. В полосе прозрачности при выполнении условия параметрического резонанса [1] потери энергии в стопке из N пластин превышают потери в одной пластине в N^2 раз, полоса параметрического резонанса обратно пропорциональна N . Это хорошо иллюстрируется результатами эксперимента, приведенными на рис. 1, 2. В первом случае (рис. 1) условие прозрачности стопки удовлетворяется, если $\gamma d = \Gamma a = \pi$ (d — толщина диэлектрического слоя, a — воздушного промежутка). На рис. 2 приведена зависимость потерь в стопке от периода структуры $L = 2\gamma d = 2\Gamma a$ на длине волны $\lambda_0/\lambda_{kp} = 0.8198$,

Рис. 1. Зависимость мощности излучения от дисперсии волновода для стопки, состоящей из N диэлектрических пластин с оптическими длинями $\gamma d = \Gamma a = \pi$.

соответствующей условию прозрачности стопки $\epsilon\Gamma = \gamma$, где $\Gamma = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{kp}}\right)^2}$, $\gamma = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{kp}}\right)^2}$. Это условие для волновода эквивалентно условию Брюстера в свободном пространстве. Для непрозрачной стопки, когда $\gamma d = \Gamma a = \pi/2$, потери энергии на излучение в широком интервале значений λ_0/λ_{kp} примерно равны излученной энергии в одной пластине, за исключением области, лежащей между критической частотой волновода и частотой, определяемой условием $\epsilon\Gamma = \gamma$, т. е. для тех значений λ_0/λ_{kp} , где резко растет коэффициент отражения от стопки, пропорциональной отношению $\gamma/\epsilon\Gamma$ (рис. 3). Этот случай можно интерпретировать как случай запертого излучения в пластине [3], где часть стопки играет роль резонатора.

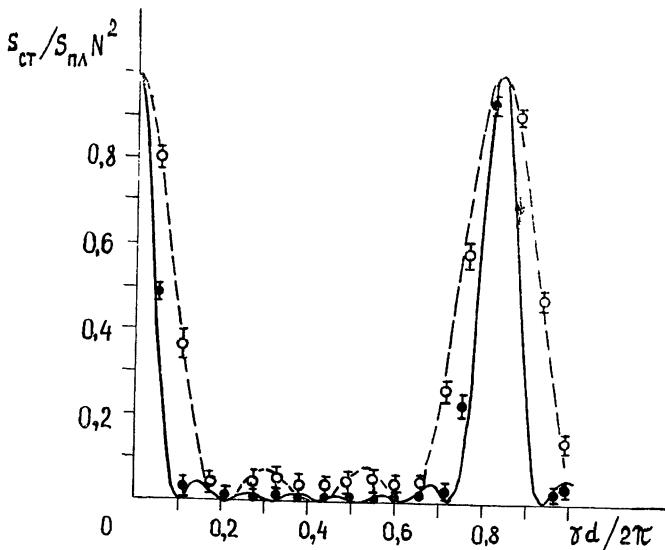


Рис. 2. Мощности излучения как функция оптической длины пластины ($\gamma d = \Gamma a$).

Мощность излучения на рис. 1, 2, 3 нормирована на мощность излучения в одной пластине, умноженной на квадрат числа пластин.

В заключение отметим, что квадратичная зависимость потерь энергии от числа пластин позволяет отбирать значительные мощности от пучка на частоте параметрического резонанса.

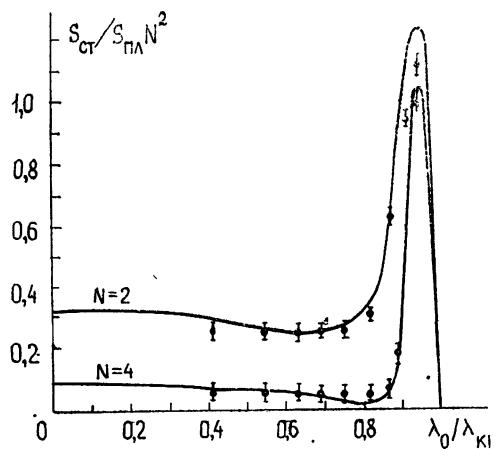


Рис. 3. Зависимость потерь энергии на излучение от дисперсии волновода и числа N пластин в стопке в полосе непропускности ($\gamma d = \Gamma a = \pi/2$).

Максимальное значение измеренной мощности на частоте ускоряющего поля составило $\sim 10 \text{ кВт}$ для $N = 10$ (ср. с [4]) при числе частиц в сгустке $2 \cdot 10^7$ и фазовой ширине сгустка $\sim 5^\circ$ на частоте группирования.

Авторы признательны Э. Д. Газазяну и Э. А. Бегляну за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ, 32, № 4, 883 (1957).
2. Э. М. Лазиев, Г. Г. Оксузян, Изв. АН Арм. ССР — Физика, 6, 467 (1971).
3. К. А. Барсуков, ЖТФ, 30, № 9, 1337 (1960).
4. Э. М. Лазиев, Г. Г. Оксузян, В. Л. Серов, Радиотехника и электроника, 17, № 4, 1335 (1972).

Поступила в редакцию
9 февраля 1976 г.