ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1977*

УДК 538.574.5

О СВЯЗИ ЗАТУХАНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ С ДИСПЕРСИОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СРЕДЫ

С. А. Ермаков, Е. Н. Пелиновский, В. В. Тамойкин

Показано, что затухание среднего поля в среде с пространственно-временными флуктуациями определяется поведением дисперсионного уравнения в окрестности волновых чисел и частот, удовлетворяющих известным условиям трехволнового синхронизма. В результате такого резонансного характера затухания возможно упрощение исходных уравнений при вычислении декремента среднего поля.

Как известно, среднее поле в случайно-неоднородной среде можно описать с помощью эффективного показателя преломления или эффективной диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_{эфф}$. Задаче о вычислении $\varepsilon_{эфф}$ посвящено большое число работ (см., например, обзор [1]). Интерес к этой проблеме особенно возрос в последнее врмя в связи с решением ряда задач о нелинейных статистических волновых процессах, в частности, задач о поведении среднего поля [2–4]. В нелинейных уравнениях для средних полей в статистически неоднородной среде появляются линейные слагаемые, отвечающие дополнительной дисперсии и затуханию волны, что, как отмечается в [2], на языке эффективной диэлектрической проницаемости соответствует ее реальной и мнимой частям. Вычисления эффективной диэлектрической проницаемости, особенно в средах с пространственно-временными флуктуациями, обычно связаны с большими трудностями. При этом, как правило, действительные добавки в $\varepsilon_{эфф}$ слабо изменяют показатель преломления (дисперсию) среды и основной интерес представляет лишь мнимая часть $\varepsilon_{эфф}$. Так, в [2–4] были получены уравнения для средних полей, описывающих акустические, ионно- и магнитно-звуковые волны и волны в дискретной линии передачи (на рис. 1 приведены дисперсионные характеристики для волн в этих средах). Нетрудно заметить, что найденные при этом выражения для коэффициентов затухания в низкочастотной области оказываются сходными в том отношении, что они не зависят от вида дисперсии. Это позволяет сделать вывод о слабом влиянии вида дисперсионных характеристик на величину мнимой части $\varepsilon_{эфф}$.

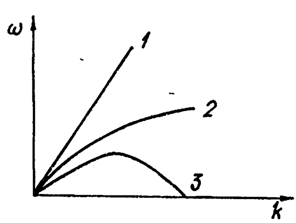

Рис. 1. Дисперсионные кривые акустических (*1*), ионно-звуковых (*2*) волн и волн в дискретной линии передачи (*3*).

В настоящем сообщении будет показано, что для вычисления мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{эфф}$ достаточно знать дисперсионное уравнение лишь в окрестности волновых чисел, удовлетворяющих «условиям синхронизма», аналогичным резонансным условиям нелинейного взаимодействия трех волн [5, 6]. При этом изменения дисперсионной кривой в других областях не повлияют (в рамках приближения Бурре) на величину затухания (или усиления) среднего поля. Физический механизм, определяющий такое поведение мнимой части $\varepsilon_{эфф}$, состоит в том, что затухание среднего поля обусловлено лишь «резонансными» неоднородностями.

Рассмотрим для простоты скалярное волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon u) = 0,$$

$$\varepsilon = 1 + \varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t), \quad \varepsilon_1 \ll 1, \quad \langle\varepsilon_1\rangle = 0. \tag{1}$$

1. Исследуем сначала случай чисто пространственных флуктуаций $\varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_1(\boldsymbol{r})$. Следуя [7], получим для среднего поля вида $\exp[i(\omega_0 t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})]$

$$\varepsilon_{эфф} - 1 = -k_0^2 \int B_\varepsilon(\rho) G(\rho) e^{ik_0\rho} d\rho, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{эфф} = \boldsymbol{k}^2/\boldsymbol{k}_0^2$, $k_0 = \omega_0/c$, $G(\rho)$ — функция Грина скалярного волнового уравнения при $\varepsilon = 1$, $B_\varepsilon(\rho) = \langle\varepsilon_1(\boldsymbol{r}+\rho)\,\varepsilon_1(\boldsymbol{r})\rangle$ — функция корреляции неоднородностей.

Перепишем (2) в более удобной для дальнейшего анализа форме. Интеграл (2), очевидно, представляет собой свертку спектра $G(\varkappa)$ функции Грина со спектром функции корреляции $W_\varepsilon(\varkappa)$, т. е.

$$\varepsilon_{эфф} - 1 = -\boldsymbol{k}_0^2 \int G(\varkappa)\, W_\varepsilon(\boldsymbol{k}_0 - \varkappa)\, d\varkappa. \tag{2'}$$

Спектр $W_\varepsilon(\varkappa)$ не имеет полюсов на действительной оси, тогда как функция $G(\varkappa)$ всегда имеет особенности при значениях $\varkappa$, соответствующих корням дисперсионного уравнения, в данном случае при $|\varkappa| = k_0$. Поэтому величина интеграла складывается из действительной части, равной его главному значению, и мнимой части, равной сумме полувычетов в особых точках. Из (2′), вычисляя полувычет в точке $\varkappa = k_0$, нетрудно получить

$$\operatorname{Im} \varepsilon_{эфф} = -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\, k_0^3 \int\limits_{4\pi} d\Omega\, W_\varepsilon\left(\boldsymbol{k}_0 - k_0 \frac{\varkappa}{\varkappa}\right) \tag{3}$$

($d\Omega$ — элемент телесного угла в пространстве $\varkappa$).

Таким образом, для нахождения затухания среднего поля достаточно проинтегрировать по всему телесному углу спектр неоднородностей, взятый при значении волнового вектора $\boldsymbol{q}$, удовлетворяющего известному условию брэгговского отражения [8], $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_0 - k_0 \dfrac{\varkappa}{\varkappa}$.

В частности, в одномерном случае

$$\operatorname{Im} \varepsilon_{эфф} \sim W_\varepsilon(2k_0) + W_\varepsilon(0).$$

Отсюда следует хорошо известный результат: затухание волны при распространении в среде с мелкомасштабными неоднородностями одинаково из-за рассеяния как вперед, так и назад, поскольку $W_\varepsilon(2k_0) \approx W_\varepsilon(0)$, в среде же с крупными неоднородностями поле затухает в основном из-за рассеяния вперед, так как в этом случае $W_\varepsilon(0) \gg W_\varepsilon(2k_0)$.

Процесс рассеяния на флуктуациях показателя преломления может быть наглядно интерпретирован на языке резонансного взаимодействия трех волн, если рассматривать пространственные флуктуации ε как волны с частотой, равной нулю. В рассматриваемом случае закон дисперсии падающей и рассеянной волн выражается в виде $\omega = \pm kc$, а дисперсионной кривой «волн» флуктуаций является ось k. Из простого графического построения (см. рис. 2) видно, что рассеянное «назад» поле генерируется при взаимодействии волны с волновым числом k_0 и «волны» неоднородности с волновым числом — $2k_0$. В трехмерном случае, как показывают аналогичные построения, рассеяние волны под углом θ обусловлено неоднородностями с волновым числом $2k_0 \sin\theta/2$, что согласуется с (3). Таким образом, затухание среднего поля связано только с резонансными «волнами» флуктуаций, масштабы которых определяются условиями Брэгга, в данном случае и представляющими собой условие синхронизма при взаимодействии трех волн.

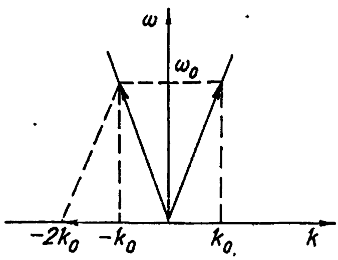

Рис. 2. Диаграмма взаимодействия между „волнами" флуктуаций, прямой и отраженной.

2. Пусть теперь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\boldsymbol{r}, t)$. Нетрудно получить, что $\varepsilon_{эфф}$ выражается сверткой пространственно-временных спектров, а именно:

$$\varepsilon_{эфф} - 1 = -k_0^2 \int\int \frac{\omega^2}{\omega_0^2} W_\varepsilon(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{\varkappa}, \omega_0 - \omega)\, G(\boldsymbol{\varkappa}, \omega)\, d\boldsymbol{\varkappa}\, d\omega. \quad (4)$$

Рассмотрим более подробно случай «замороженных» флуктуаций, когда

$$W_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa}, \omega) = \sqrt{2\pi}\, \overline{W}_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})\, \delta(\omega - \boldsymbol{\varkappa} \boldsymbol{V}),$$

где $\boldsymbol{V}$ — скорость движения неоднородностей.

Записывая (4), как и раньше, в виде интегралов по телесному углу и по модулю волнового вектора $\boldsymbol{\varkappa}$ и вычисляя мнимую часть интеграла по $\varkappa$ как полувычет в точке $\varkappa = \omega/c$, получаем

$$\operatorname{Im} \varepsilon_{эфф} = -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} k_0^3 \int_{4\pi} d\Omega \frac{[1-\beta\cos(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{V})]^3}{[1-\beta\cos(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{V})]^4} \overline{W}_\varepsilon\left(\boldsymbol{k}_0 - \frac{\omega_1}{c}\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\varkappa}\right), \quad (5)$$

где $\beta = V/c$, $\omega_1 = \omega_0 \dfrac{1-\beta\cos(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{V})}{1-\beta\cos(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{V})}$.

Таким образом, для вычисления $\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}$ опять получили интеграл по углам, спектр неоднородностей в котором берется в точках

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{k}_0 - \frac{\omega_1}{c}\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\varkappa}. \quad (6)$$

То же самое можно получить на языке трехволнового взаимодействия. Действительно, записывая условие синхронизма в виде

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_0 - \frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{\varkappa}}{\varkappa},$$

$$\omega_q = \omega_0 - \omega,$$

где закон дисперсии флуктуаций ε есть $\omega_q = \boldsymbol{q}\boldsymbol{V}$, сразу же получаем для $\boldsymbol{q}$ выражение (6).

Окончательное решение задачи связано с заданием конкретного вида спектра $\overline{W}_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})$ и вычислением интеграла (5). Однако не производя вычислений, можно сделать некоторые качественные выводы. Подынтегральная функция в (5) положительна, и знак мнимой части $\varepsilon_{эфф}$ определяется знаком разности $1-\beta\cos(\boldsymbol{k}_0\,\boldsymbol{V})$. При

$$\beta\cos(\boldsymbol{k}_0\,\boldsymbol{V})=1 \tag{7}$$

происходит переход от затухания среднего поля к его усилению. Условие (7) совпадает с условием излучения Черенкова, а усиление поля происходит за счет излучения волн неоднородностями, движущимися со скоростью, большей фазовой скорости волн (или, иначе, за счет параметрического распада волн флуктуаций).

Можно пытаться найти выражение для $\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}$ и в случае, когда неоднородности имеют разброс по скорости около ее среднего значения. Однако вычисление среднего значения

$$\langle\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}\,w(\beta)\,d\beta,$$

где $w(\beta)$ — функция распределения неоднородностей по скоростям, а $\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}$ дается выражением (5), оказывается сложным. Мы рассмотрим более простой одномерный случай, когда функция $w(\beta)$ имеет вид ступеньки, равной $1/\beta^*$ при $0\leqslant\beta\leqslant\beta^*$ и нулю — при $\beta>\beta^*$. При этом в случае крупномасштабных неоднородностей усиление среднего поля возможно, когда $\beta^*>2$, т. е. затухание на неоднородностях со скоростями $0<\beta<1$ полностью компенсируется усилением в области $1<\beta<2$. В случае мелкомасштабных неоднородностей зависимость $\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}$ от β более сложная и $\beta^*\approx 2{,}25$.

В заключение отметим, что результаты, полученные для достаточно простого уравнения (1), носят более общий характер. Их легко обобщить, например, на случай векторного волнового уравнения, описывающего волны в изотропной или анизотропной среде, в которой возможно существование нескольких типов нормальных волн $k=k_i(\omega,\ \theta,\ \varphi)$. В этом случае $\varepsilon_{эфф}$ представляет собой тензор и интеграл, аналогичный (2'), может быть записан для каждой его компоненты. При этом для вычисления $\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}$ также не требуется функция Грина, а дисперсионное уравнение (и спектр неоднородностей) достаточно знать лишь в точках, определяемых условиями резонанса. Отличие от (3) состоит лишь в том, что затухание представляется как сумма полувычетов во всех полюсах спектра функции Грина $k_i(\omega,\theta,\varphi)$. Это соответствует рассеянию среднего поля в различные нормальные волны (с которыми возможен синхронизм). Действительная же часть $\varepsilon_{эфф}$ вычисляется как главное значение интеграла (2'), обусловлена всеми масштабами неоднородностей и определяет лишь изменение показателя преломления однородной среды.

То обстоятельство, что затухание среднего поля носит резонансный характер, может значительно упростить отыскание мнимой части $\varepsilon_{эфф}$. Если исходные уравнения весьма громоздки и дисперсионная характеристика среды сложная — содержит несколько ветвей (нормальных волн), а резонанс имеет место лишь с частью из них, то остальные ветви при вычислении $\operatorname{Im}\varepsilon_{эфф}$ могут не приниматься во внимание. Отбрасывая «лишние» нормальные волны, можно понизить порядок исходных уравнений. Более того, поскольку на дисперсионных кривых важны лишь резонансные точки, то в нерезонансных областях кривые можно произвольным образом деформировать, упрощая тем самым уравнения для оставшихся нормальных волн. Этим и объясняется упоминавшееся во введении слабое влияние вида дисперсионных характеристик на величину мнимой части $\varepsilon_{эфф}$ [2–4]. Указанные обстоятельства, как нам представляется, могут оказаться весьма полезными при решении различных задач, в особенности нелинейных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 356 (1970).
2. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 64, № 2, 505 (1973); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 8, 1120 (1974).
3. Е. Н. Пелиновский, А. И. Саичев, В. Е. Фридман, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 17, № 6, 875 (1974).
4. Ю. К. Богатырев, С. М. Файнштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 6, 888 (1975).
5. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
6. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, № 2, 193 (1971).
7. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, № 5, 827 (1959).
8. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
3 февраля 1976 г.

THE RELATION OF ATTENUATION OF THE MEAN FIELD WITH DISPERSION MEDIUM CHARACTERISTICS

S. A. Ermakov, E. N. Pelinovsky, V. V. Tamoykin

It is shown that the mean field attenuation in the medium with spatial-time fluctuations are determined by the behaviour of the dispersion equation in the vicinity of the three-wave synchronism. As a result of such a resonant attenuation, the initial equations may be simplified in calculation of the mean field decrement.