ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 5 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 535.31

О ФЛУКТУАЦИЯХ ФАЗЫ ВОЛНЫ В ОБЛАСТИ СИЛЬНЫХ МЕРЦАНИЙ

С. Н. Молодцов, А. И. Саичев

В малоугловом приближении геометрической оптики исследуется статистика фазы световой волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде. Показано, что в области сильных мерцаний дисперсия фазы вдоль луча за счет его искривления растет быстрее, а дисперсия фазы первоначально плоской волны—медленнее, чем это предсказывается теорией, развитой для случая слабых мерцаний.

В настоящее время теоретический анализ фазовых флуктуаций волн достаточно полно проведен лишь для случая слабых мерцаний (см., например, [1]). В то же время известно [2–6], что в случае сильных мерцаний статистика фазы не описывается выражениями, найденными в предположении слабых мерцаний.

В данной работе в малоугловом приближении геометрической оптики подробно исследуются флуктуации фазы в области сильных мерцаний. Показано, в частности, что дисперсия фазы вдоль луча за счет его искривления растет быстрее, а дисперсия фазы первоначально плоской волны — медленнее, чем это предсказывается теорией, развитой для случая слабых мерцаний [1].

1. ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ВДОЛЬ ЛУЧА

1. При анализе флуктуаций фазы и других параметров волны в качестве исходных возьмем уравнения малоуглового приближения геометрической оптики. Флуктуации фазы волны в этом приближении описываются уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2k}(\nabla_\perp S)^2=\frac{k}{2}\varepsilon(x,\rho).$$

Здесь x — продольная, ρ — поперечные координаты. Если неоднородности среды $\varepsilon(x,\rho)$ можно аппроксимировать гауссовым полем с корреляционной функцией

$$\langle\varepsilon(x_1,\rho_1)\varepsilon(x_1+x,\ \rho_1+\rho)\rangle=A[\rho]\delta(x),$$

$$A[\rho]=A-D\rho^2+\frac{B}{4}\rho^4-\ldots,$$

то, как показано в [7], удается вывести уравнение для вероятностного распределения фазы и других параметров фиксированной лучевой трубки (уравнение (3.4 *) работы [7]) *.

---

* Здесь и далее ссылки на формулы работы [7] отмечены звездочкой*.

2. Интересуясь только флуктуациями фазы вдоль луча, перейдем от (3.4*) к более простому уравнению для $\Phi_2(S, \theta; x)$ — совместного вероятностного распределения фазы и углов прихода луча:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{k}{2} \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial S} = \frac{k^2}{8} A \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial S^2} + D \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right). \tag{1.1}$$

Считая, что на плоскость $x = 0$ луч падает перпендикулярно, дополним (1.1) граничным условием

$$\Phi_2 (S, \theta; 0) = \delta (S) \delta (\theta). \tag{1.2}$$

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\Phi_2(S, \theta; x) = g(S; x) \oplus f_2(S, \theta; x). \tag{1.3}$$

Здесь и ниже значком $\oplus$ будем обозначать свертку по S. Входящее в (1.3) распределение

$$g(S; x) = \frac{2}{k\sqrt{Ax}} g_0\left(\frac{2S}{k\sqrt{Ax}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi k^2 Ax}} \exp \left(- \frac{2S^2}{k^2 Ax} \right) \tag{1.4}$$

— известное [1] вероятностное распределение флуктуаций фазы, найденное в предположении слабых мерцаний.

Подставляя (1.3) в (1.1) и учитывая (1.4), получим следующее уравнение для вероятностного распределения $f_2[S, \theta; x]$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{k}{2} \theta \frac{\partial f_2}{\partial S} = D \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right). \tag{1.5}$$

Граничное условие для f_2 совпадает, очевидно, с условием (1.2) для Φ_2:

$$f_2(S, \theta; 0) = \delta(S)\delta(\theta). \tag{1.6}$$

Равенство (1.3) означает, что флуктуации фазы вдоль луча можно представить в виде суммы двух статистически независимых слагаемых:

$$S(x) = S_0(x) + S_1(x). \tag{1.7}$$

Первое из них — $S_0(x)$ — описывает набег фазы за счет флуктуаций оптической длины луча, но не учитывает искривления лучей. Его вероятностное распределение задается известным выражением (1.4). Второе слагаемое — $S_1(x)$ — характеризует флуктуации фазы, обусловленные изменением геометрической длины луча. Его можно представить в виде $S_1 = k[l(x) - x]$, где $l(x)$ — геометрическая длина луча в промежутке между плоскостями $x = 0$ и $x = x$. Таким образом, это слагаемое учитывает вклад искривления лучей в статистику фазы.

3. Проанализируем статистические свойства $S_1(x)$. Зная их, легко найдем и статистику полной фазы. Кроме того, определение статистических свойств непосредственно связанной с S_1 длины луча $l(x)$ может представлять и самостоятельный интерес.

Запишем вначале статистически эквивалентную (1.5) систему стохастических уравнений. Нетрудно показать, что к уравнению Эйнштейна—Фоккера—Планка (1.5) приводят уравнения

$$\frac{dS_1}{dx} = \frac{k}{2} \theta(x), \qquad \theta(x) = u^2(x) + v^2(x),$$

$$\frac{du}{dx} = \xi(x), \qquad \frac{dv}{dx} = \eta(x),$$

где $\xi(x)$ и $\eta(x)$ — дельта-коррелированные гауссовы функции:

$$\langle \xi(x)\xi(x')\rangle = \langle \eta(x)\eta(x')\rangle = \frac{D}{2}\delta(x-x'), \qquad \langle \xi(x)\eta(x')\rangle = 0.$$

Таким образом, статистические свойства S_1 полностью совпадают со свойствами интеграла от суммы квадратов независимых винеровских процессов

$$S_1(x) = \frac{k}{2}\int [u^2(t) + v^2(t)]\,dt$$

и могут быть определены способами, известными в теории нелинейных функционалов (см., например, [8, 9]). Здесь мы найдем их, решая вытекающее из (1.5) уравнение для функции

$$\Psi_2[\Omega, \omega; x] = \langle \exp[-\Omega S_1(x) + \omega\theta(x)]\rangle.$$

Уравнение для Ψ_2 имеет вид

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \frac{k}{2}\Omega\frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega} = D\,\omega^2\frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega} + D\omega\Psi_2.$$

Это уравнение в частных производных первого порядка легко решается методом характеристик. Его решение с граничным условием

$$\Psi_2[\Omega, \omega; 0] = 1,$$

соответствующим условию (1.6), таково:

$$\Psi_2[\Omega, \omega; x] = (\operatorname{ch} z - y \operatorname{sh} z)^{-1},$$

где $y \equiv \sqrt{\frac{2D}{k\Omega}\omega^2}$, $z \equiv \sqrt{\frac{k}{2}D\,\Omega x^2}$. Отсюда следует выражение для преобразования Лапласа вероятностного распределения $S_1(x)$:

$$\Psi_1[\Omega; x] = \langle \exp(-\Omega S_1(x))\rangle = (\operatorname{ch} z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n D^n x^{2n}}{2^n(2n)!}E_{2n}\Omega^n. \tag{1.8}$$

Зная $\Psi_1[\Omega; x]$, легко определить моменты $\langle S_1^n\rangle$ и кумулянты $\varkappa_n^1$ фазы $S_1(x)$:

$$\begin{aligned} \langle S_1^n\rangle &= \frac{k^n D^n x^{2n}}{2^{2n}(2n-1)!!}|E_{2n}|,\\ \varkappa_n^1 &= \frac{(2^{2n}-1)k^n D^n x^{2n}}{2n(2n-1)!!}|B_{2n}|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь E_n и B_n — соответственно числа Эйлера и Бернулли [10].

Отметим, что все кумулянты $\varkappa_n^1$, кроме второго, являются вместе с тем и кумулянтами полной фазы. Дисперсия же полной фазы равна согласно (1.3), (1.4), (1.7) сумме дисперсий $S_0(x)$ и $S_1(x)$:

$$\varkappa_2 = \frac{k^2}{4}Ax + \frac{k^2}{24}D^2x^4. \tag{1.10}$$

4. Обсудим некоторые свойства вероятностных распределений $S_1(x)$ и полной фазы (1.7). По своему смыслу $S_1(x) \geqslant 0$, и, следовательно, вероятностное распределение $S_1 - f_1(S; x) = 0$ при $S < 0$. Как видно из (1.8), $f_1(S; x)$ — автомодельное распределение, т. е. допустимо представление в виде

$$f_1[S; x] = \frac{4}{kDx^2} f_0\left[\frac{4S}{kDx^2}\right],$$

где

$$f_0[S] = \frac{1}{S\sqrt{S}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{2S}\right] \quad (S \geqslant 0). \tag{1.11}$$

Воспользовавшись, например, формулой Пуассона [11], перепишем (1.11) в другой эквивалентной форме:

$$f_0[S] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \exp\left[-\frac{\pi^2}{8} S (2n+1)^2\right] \quad (S > 0). \tag{1.12}$$

Как видно отсюда, при $S \to \infty$ $f_0[S]$ экспоненциально убывает:

$$f_0[S] \approx \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{8} S\right) \qquad (S \to \infty),$$

а при $S \to 0$, как следует из (1.11),

$$f_0[S] \approx \frac{1}{S} \sqrt{\frac{2}{\pi S}} e^{-1/2S}$$

стремится к нулю настолько быстро, что существуют обратные моменты фазы $S_1(x)$. Так

$$\left\langle \frac{1}{S_1(x)} \right\rangle = \frac{8}{kDx^2} G,$$

где $G = 0{,}916\ldots$ — постоянная Каталана [10].

Предыдущий анализ показывает, что вероятностное распределение полной фазы является сверткой двух автомодельных распределений, описывающих разные механизмы флуктуаций фазы:

$$\Phi_1(S; x) = g(S; x) \oplus f_1(S; x). \tag{1.13}$$

На малых расстояниях x $f_1(S; x)$ в (1.13) играет роль дельта-функции и распределение фазы определяется известным [1] выражением (1.4). На расстояниях x_0, на которых оба слагаемых в выражении для дисперсии (1.10) одного порядка, ни один из механизмов флуктуаций фазы не является преобладающим. Оценки x_0, следующие из (1.10) для случая изотропных неоднородностей среды,

$$x_0^3 \frac{D^2}{6A} \sim \langle \varepsilon^2 \rangle \left(\frac{x_0}{l}\right)^3 \sim 1,$$

где l — радиус корреляции $\varepsilon(x, \rho)$, показывают, что область, где флуктуации $S_1(x)$ сравнимы с $S_0(x)$, совпадает с началом области сильных мерцаний. На расстояниях $x \gg x_0$ флуктуации фазы за счет искривления лучей преобладают над $S_0(x)$ и

$$\Phi_1[S; x] \approx \frac{4}{kDx^2} f_0\left(\frac{4S}{kDx^2}\right).$$

5. До сих пор мы рассматривали флуктуации фазы, пользуясь уравнениями геометрической оптики. Для учета дифракционных эффектов необходимо прибавить к фазе $S(x)$ величину $\frac{\pi}{2} N(x)$, где $N(x)$ — число касаний луча каустических поверхностей на интервале $[0, x]$. Статистика $N(x)$ и, следовательно, влияние дифракции на статистические свойства фазы могут быть в принципе определены в рамках геометрической оптики. Однако это очень сложная задача. Кроме того, как известно (см., например, [3]), вклад дифракционных скачков в статистику фазы несуществен. Поэтому здесь и ниже мы будем им пренебрегать.

2. ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

1. Пусть на полупространство $x > 0$, заполненное случайно-неоднородной средой, перпендикулярно падает плоская волна единичной интенсивности. Рассмотрим статистические свойства фазы этой волны в фиксированной точке пространства (x, ρ).

Заметим вначале, что найденное выше вероятностное распределение фазы вдоль луча описывает некоторые статистические характеристики фазы плоской волны в фиксированной точке. А именно, как показано в [7], $\Phi_1(S; x)$ может быть интерпретирована следующим образом:

$$\Phi_1(S; x) = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x) \sum_{n=1}^{N} \langle I_n(x, \rho)\delta[S - S_n(x, \rho)] \rangle_N . \tag{2.1}$$

Здесь $P(N; x)$ — вероятность того, что в точку (x, ρ) под разными углами приходит N волн, а $I_n(x, \rho)$, $S_n(x,\rho)$ — соответственно интенсивность и фаза n-й из N волн, приходящих в данную точку. На расстояниях $x \leqslant x_0$, где мерцания уже могут быть сильными, но каустические поверхности встречаются еще редко и в каждую точку приходит практически одна волна, равенство (2.1) имеет вид

$$\Phi_1(S; x) = \langle I(x, \rho)\delta [S - S(x, \rho)] \rangle . \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) следует, что моменты фазы вдоль фиксированного луча равны смешанным моментам интенсивности и фазы в фиксированной точке пространства. Так, например, вычисленный в работе [5] момент $\langle I(x, \rho) S(x, \rho) \rangle$ совпадает со средней фазой $\langle S_1(x) \rangle$ и определяется статистикой геометрической длины фиксированного луча, момент $\langle I(x, \rho)S^2(x, \rho) \rangle$, найденный в [6], равен среднему квадрату полной фазы $\langle S^2(x) \rangle$ и т. д.

2. Перейдем к анализу чисто фазовых флуктуаций первоначально плоской волны. Их статистика не совпадает со статистикой фазы вдоль фиксированного луча, так как флуктуации интенсивности и фазы волны в той же точке пространства статистически зависимы и средние в (2.1), (2.2) не распадаются на произведения соответствующих средних. Некоторые статистические свойства флуктуаций фазы и углов прихода волны в фиксированную точку пространства могут быть описаны функцией [7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |J| \, \Phi_3[S, \theta, J; x] dJ = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x) \sum_{n=1}^{N} w_n[S, \theta; x | N] , \tag{2.3}$$

равной сумме вероятностных распределений фазы и углов прихода случайного числа волн, приходящих под разными углами в данную точку, усредненной по случайному числу слагаемых в сумме. Здесь $w_n[S,\theta;x|N|$ — совместное распределение n-й из волн, приходящих в точку (x, ρ), при условии, что всего их приходит N. Таким образом, функция в правой части (2.3) не является вероятностным распределением, однако, в принципе может быть измерена экспериментально. В области $x \leqslant x_0$, где в каждую точку приходит практически всегда одна волна, равенство (2.3) можно с достаточной степенью точности переписать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |J|\,\Phi_3[S, \theta, J; x]dJ = w_2[S, \theta; x], \tag{2.4}$$

выражающем вероятностное распределение фазы и углов прихода волны в фиксированной точке через статистические характеристики фиксированного луча.

3. Вычисление (2.3) представляет чрезвычайно трудную задачу. Гораздо проще определить функцию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} J\,\Phi_3[S, \theta, J; x]dJ = W_2[S, \theta; x]\,. \tag{2.5}$$

В общем случае это знакопеременная функция, допускающая интерпретацию, аналогичную (2.3). В области же, где существованием каустик можно пренебречь и практически всегда $|J| = J$, W_2 совпадает с вероятностным распределением (2.4). Поэтому ниже при исследовании чисто фазовых флуктуаций волны мы будем использовать функцию W_2. Заметим, что, домножая уравнение (3.4*) на J, мы получим замкнутое уравнение для $W = J\,\Phi$, эквивалентное кинетическому уравнению, найденному в работе [12].

Функцию W_2 можно представить в виде свертки:

$$W_2 = \Phi_2[S, \theta; x] \oplus w[S; x]\,, \tag{2.6}$$

где Φ_2 — найденное выше вероятностное распределение фазы и углов прихода фиксированного луча, а $w[S; x]$ — функция, удовлетворяющая, как следует из анализа (3.4*), уравнению

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 2kD\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial S} \tag{2.7}$$

с граничными условиями

$$w[S;0] = \delta(S), \qquad \left.\frac{\partial w(S;\,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 w(S;x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \frac{k}{2}\,D\delta'(S)\,. \tag{2.8}$$

Решая уравнения (2.7), (2.8), воспользовавшись (2.6) и формулами предыдущего раздела, нетрудно показать, что

$$\langle e^{-\Omega S(x,\,\rho)} \rangle = \exp\left(\frac{k^2}{8}\Omega^2 A x\right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{k}{2} D\,\Omega\, x^2}\,. \tag{2.9}$$

Таким образом, все кумулянты $S(x, \rho)$, кроме второго, равны кумулянтам S_1 (1.9), взятым с обратным знаком, а дисперсия $S(x, \rho)$ есть

$$\tilde{\varkappa}_2(x) = \frac{k^2}{4} A x - \frac{k^2}{24} D^2 x^4\,. \tag{2.10}$$

Выражение (2.9) не является, строго говоря, характеристической функцией некоторого вероятностного распределения. В частности, правая часть равенства (2.10) при $x > x_0 = \sqrt[3]{\frac{6A}{D^2}}$ теряет смысл дисперсии, так как становится отрицательной. Однако можно надеяться, что в области, где второе слагаемое в (2.10) уже сравнимо с первым, но $x < x_0$, выражение (2.10) достаточно правильно описывает поведение дисперсии фазы волны. Далее мы приведем для подтверждения этого простой пример волны за одномерным фазовым экраном, допускающий более детальный анализ. Здесь же отметим, что в то время как искривление лучей приводит к более быстрому, чем $k^2Ax/4$, росту дисперсии фазы вдоль луча (1.10), рост дисперсии фазы волны в фиксированной точке (2.10) замедляется. Это связано с тем, что за счет фокусировки и дефокусировки лучей области с бо́льшими значениями фазы в среднем сжимаются, а с меньшими — расширяются. При этом уменьшение дисперсии фазы из-за эффектов фокусировки преобладает над ростом дисперсии из-за искривления лучей.

4. Покажем на простом примере, что в области, где каустики отсутствуют и равенства типа (2.4), (2.5) определяют истинную плотность вероятности фазы и других параметров волны в фиксированной точке, эффекты искривления и фокусировки лучей могут существенно влиять на статистику фазы волны.

Пусть на прямой $x = 0$ в плоскости x, y расположен фазовый экран, состоящий из идеальных линз, так что вносимые им фазовые искажения имеют вид $S_0(y + h)$, где $S_0(y)$ — периодическая функция с периодом $4a$:

$$S_0(y) = \begin{cases} S_0\left[\left(\dfrac{y+a}{a}\right)^2 - 1\right] & (-2a < y < 0) \\ S_0\left[1 - \left(\dfrac{y-a}{a}\right)^2\right] & (0 < y < 2a) \end{cases},$$

h — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-2a,\ 2a]$. Непосредственно или с помощью уравнения (3.4*) нетрудно вычислить следующую величину для падающей на экран плоской волны на расстоянии x за экраном:

$$\langle JS^2 \rangle - [\langle JS \rangle]^2 = \frac{8}{15} S_0^2 \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{S_0 x}{ka^2}\right)^2\right]. \qquad (2.11)$$

На расстояниях, не превышающих фокусного расстояния линз $L = \dfrac{ka^2}{2S_0}$, каустик нет и волна в каждую точку приходит под одним направлением. На этих расстояниях равенства (2.4), (2.5) эквивалентны и определяют плотность вероятности параметров и, в частности, фазы волны в фиксированной точке. Следующее из них выражение для дисперсии фазы волны (2.11) имеет на таких расстояниях строгий смысл дисперсии. Как видно из (2.11), фокусировка лучей и отклонение их от направления оси x, аналогичное искривлению лучей в случайно-неоднородной среде, приводит к уменьшению дисперсии фазы по сравнению с дисперсией фазы непосредственно за экраном. Так на расстоянии $x = L$, где (2.11) еще имеет смысл дисперсии, дисперсия фазы волны на 1/3 меньше вносимых экраном фазовых искажений. В то же время, как нетрудно показать, дисперсия фазы фиксированного луча на этом расстоянии увеличилась на 1/3, т. е. на величину, сравнимую с дисперсией фазы на экране.

Авторы благодарны Ю. Е. Кузовлеву за полезные обсуждения и помощь в расчетах, а также А. Н. Малахову за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, УФН, **114**, вып. 3, 415 (1974).
3. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, **102**, вып. 1, 3 (1971).
4. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, 620 (1967).
5. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 6, 897 (1972).
6. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 12, 1817 (1974).
7. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **19**, № 9, 1368 (1976).
8. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1969.
9. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, УМН, **11**, вып. 1 (67), 77 (1956).
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.
11. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, изд. Мир, М., 1967.
12. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, **67**, вып. 12, 2080 (1974).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 18 ноября 1975 г.

PHASE FLUCTUATIONS OF A WAVE IN THE REGION OF STRONG SCINTILLATIONS

S. N. Molodtsov, A. I. Saichev

The statistics of the phase of a light wave propagating in a rondomly-inhomogeneous medium is investigated in a small-angular geometrical optics approximation. It is shown that in the region of strong scintillations the phase dispersion along the ray due to its distortion grows rapidly and the phase dispersion of the originally plane wave grows more slowly than it is predicted by the theory developed for the case of weak scintillations.