ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 5 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 538.56 : 519.25

О ВОЗМОЖНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ГАУССОВА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА В НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

О. Г. Налбандян

Рассмотрен класс стохастических уравнений с квадратичной нелинейностью, решение которых можно выразить через решение соответствующих линейных уравнений. На примере одномерного уравнения обсуждена возможность аппроксимации гауссова случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией δ-коррелированным (марковское приближение) или телеграфным (приближение Бурре) случайными процессами.

В большинстве задач статистической физики, описываемых модельными стохастическими уравнениями, входящий в уравнение случайный процесс $\xi(t)$ принимается гауссовым. При нахождении решения* в случае гауссова процесса даже линейное стохастическое уравнение переходит в нелинейное уравнение для усредненных величин. Вместе с тем, при аппроксимации случайного процесса $\xi(t)$ телеграфным уравнение для усредненных величин содержит то же количество переменных, что и первоначальное стохастическое уравнение. Подобная аппроксимация широко применяется для линейных стохастических уравнений (приближение Бурре) и при определенных условиях оказывается достаточно точной, поэтому можно ожидать, что она окажется приемлемой и для нелинейных стохастических уравнений.

В настоящей работе предпринята попытка проследить правомочность аппроксимации гауссова случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией

$$B(t, t') = \sigma^2 \exp(-\alpha \mid t - t' \mid) \tag{1}$$

случайным телеграфным процессом, а также δ-коррелированным процессом в некоторых нелинейных стохастических уравнениях.

ЛИНЕЙНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$-i\frac{dx}{dt} = \lambda\xi(t)\,x(t), \qquad x(0) = 1. \tag{2}$$

Если $\xi(t)$ — гауссов случайный процесс и $\langle \xi(t) \rangle = 0$, то решение уравнения (2) имеет вид [1]

$$\bar{x} = \exp[-\mu(\tau - 1 + e^{-\tau})], \tag{3}$$

* Под решением стохастического уравнения будем понимать стохастическое решение, усредненное по ансамблю реализаций случайного процесса. При этом решение, соответствующее гауссову случайному процессу с экспоненциальной корреляционной функцией, будем называть точным решением.

где

$$\mu = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{\alpha^2}, \qquad \tau = \alpha t.$$

Если случайный процесс $\xi(t)$ аппроксимировать δ-коррелированным вдоль t процессом, то решение уравнения (2) получим в так называемом [1] первом марковском приближении:

$$\bar{x}_м = e^{-\mu\tau}, \tag{4}$$

которое оказывается близким к точному решению при $\mu \ll 1$ и $\tau \gg 1$.

В случае аппроксимации $\xi(t)$ случайным телеграфным процессом, что соответствует приближению Бурре [2], решение уравнения (2) имеет вид [3]

$$\bar{x}_т = \frac{1+M}{2M} \exp\left(-\frac{1-M}{2}\tau\right) - \frac{1-M}{2M} \exp\left(-\frac{1+M}{2}\tau\right),$$
$$M = \sqrt{1-4\mu}. \tag{5}$$

В работах [3–5] утверждается, что для линейного уравнения (2) такая аппроксимация является достаточно точной при $\mu \ll 1$. В частности, можно показать [5], что для уравнения (2) второе марковское приближение соответствует такой аппроксимации в случае корреляционной функции

$$B_т(t, t') = \sigma^2 \exp\left[-\alpha \mid t - t' \mid (1+\mu)\right].$$

Близость решения, полученного во втором марковском приближении, к точному решению показана в работе [1].

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрим интегральное стохастическое уравнение для функции Грина $G(t, t_0)$, имеющее вид

$$G(t, t_0) = g(t, t_0) + \int G(t, t')\,\xi(t')\,G(t', t_0)\,d^k t'. \tag{6}$$

Уравнение (6) не сводится к дифференциальному и является довольно общим, так как вид функции $g(t, t_0)$ и статистические характеристики процесса $\xi(t)$ не оговорены, а переменная t может быть многомерной. Нас будет интересовать поведение функции $\bar{U}(t) = \bar{G}(t, 0)$.

Многократно интегрируя уравнение (6), легко видеть, что функцию $G(t, t_0)$ можно записать в виде суммы:

$$G(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, g(t, t_1)\,\xi(t_1)\,g(t_1, t_2)\,\xi(t_2) \ldots g(t_n, t_0), \tag{7}$$

где в правой части равенства подразумевается интегрирование по переменным $t_1\, t_2, \ldots, t_n$. Для нахождения коэффициентов A_n рассмотрим алгебраическое уравнение

$$y = y_0 + y\,\varepsilon\,y, \tag{8}$$

диаграммная структура которого соответствует уравнению (6). Решение уравнения (8), обращающееся в y_0 при стремлении ε к нулю, имеет вид

$$y = \left(1 - \sqrt{1 - 4 y_0 \varepsilon}\right)/2\varepsilon.$$

Разложение полученного решения по степеням ε соответствует разложению в сумму типа (7) с теми же коэффициентами A_n:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y_0^{n+1} \varepsilon^n. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что

$$A_n = 2^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} B\left(n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right). \tag{10}$$

Входящая в (10) бэта-функция $B(\gamma, \delta)$ определяется интегралом

$$B(\gamma, \delta) = \int_0^1 p^{\gamma-1}(1-p)^{\delta-1} dp,$$

и, следовательно,

$$A_n = \frac{4}{\pi} \int_0^1 (4p)^{n-1/2}(1-p)^{1/2} dp. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (7), получим

$$G(t, t_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-p}{p}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} g^{n+1} (4p\xi)^n \right] dp =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-p}{p}}\, G_1(t, t_0)\, dp, \tag{12}$$

где функция $G_1(t, t_0)$ удовлетворяет линейному стохастическому уравнению

$$G_1(t, t_0) = g(t, t_0) + \int g(t, t') 4p\xi(t') G_1(t', t_0) d^k t'. \tag{13}$$

Усредним выражение (12). Для функции $\overline{G}(t, t_0)$ будем иметь

$$\overline{G}(t, t_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-p}{p}}\, \overline{G}_1(t, t_0)\, dp \tag{14}$$

и для искомой функции $\overline{U}(t)$ соответственно

$$\overline{U}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-p}{p}}\, \overline{U}_1(t)\, dp, \tag{15}$$

где $\overline{G}_1(t, t_0)$ — решение уравнения (13), а $\overline{U}_1(t)$ — решение линейного стохастического уравнения

$$U_1(t) = U_0(t) + \int g(t, t') 4p\xi(t') U_1(t') d^k t', \quad U_0(t) = g(t, 0). \tag{16}$$

Таким образом, решение нелинейной задачи выразилось через решение соответствующей линейной задачи в виде интеграла с весовой функцией $\sqrt{(1-p)/p}$. Условия применимости того или иного приближения для уравнения (6) могут быть найдены из условий применимости того же приближения для уравнений (13) и (16).

Если в качестве функции $g(t, t_0)$ подставить функцию Грина, соответствующую оператору $-i\frac{d}{dt}$, то

$$G(t, t_0) = U_0 \theta(t-t_0) + \int G(t, t') \xi(t') G(t', t_0) dt' \tag{17}$$

и уравнение (16) перейдет в уравнение (2) с $\lambda = 4pU_0$. Для этого уравнения аппроксимация δ-коррелированным процессом приемлема при $\tau \gg 1$ и $p^2 U_0^2 \sigma^2/\alpha^2 \ll 1$. Так как в (15) значения p ограничены сверху единицей, то для нелинейной задачи (17) условия применимости аппроксимации δ-коррелированным процессом выглядят следующим образом:

$$\tau \gg 1, \quad U_0^2 \sigma^2/\alpha^2 \ll 1.$$

Аналогично аппроксимация процесса $\xi(t)$ телеграфным процессом приемлема для нелинейной задачи (17) при $U_0^2 \sigma^2/\alpha^2 \ll 1$.

Рассмотрим в качестве примера нелинейную задачу, соответствующую распространению волн в одномерной нелинейной случайно-неоднородной среде,

$$-i \frac{d}{dt} U(t) = \xi(t) U^2(t), \qquad U(0) = U_0, \tag{18}$$

решение которой также может быть выражено через решение соответствующего линейного уравнения. Стохастическое решение уравнения (18) имеет вид

$$U(t) = U_0 \Big/ \left(1 - iU_0 \int_0^t \xi(t')\,dt'\right) = U_0 \int_0^\infty e^{-p} \exp\left(ipU_0 \int_0^t \xi(t')\,dt'\right) dp.$$

После усреднения получим выражение, аналогичное (15):

$$\overline{U}(t) = U_0 \int_0^\infty e^{-p}\, \overline{U}_1(t)\, dp. \tag{19}$$

Здесь функция $\overline{U}_1(t)$ представляет собой решение уравнения (2) с $\lambda = pU_0$. Таким образом, решение нелинейной задачи снова выразилось через решение соответствующего линейного уравнения, но уже с другой весовой функцией e^{-p}.

Точное решение уравнения (18) имеет вид

$$\overline{U}(t) = U_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu X} \exp\left(\frac{1}{4\nu^2 X^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2\nu X}\right)\right], \qquad \nu = U_0^2 \sigma^2/\alpha^2, \quad X = (\tau - 1 + e^{-\tau})^{1/2}. \tag{20}$$

Если случайный процесс $\xi(t)$ аппроксимировать δ-коррелированным, то, подставляя в (19) вместо $\overline{U}_1(t)$ выражение (4), получим

$$\overline{U}_м(t) = U_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu\sqrt{\tau}} \exp\left(\frac{1}{4\nu^2\tau}\right)\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2\nu\sqrt{\tau}}\right)\right]. \tag{21}$$

Из (21) видно, что для (18), как и для (17), аппроксимация гауссова случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией δ-коррелированным является достаточно точной при условиях

$$\tau \gg 1, \quad U_0^2 \sigma^2/\alpha^2 \ll 1. \tag{22}$$

Заметим, что в выражении (19) значения p ограничиваются сверху весовым множителем e^{-p}, так что условия применимости различных аппроксимаций можно получить так же, как это сделано для случая (17). Для аппроксимации δ-коррелированным случайным процессом вновь получим условия (22), а для аппроксимации телеграфным процессом — условие $U_0^2 \sigma^2/\alpha^2 \ll 1$. Это условие является общим как для аппроксимации δ-коррелированным, так и для аппроксимации телеграфным процессом. При $\tau \gg 1$ удобнее ипользовать аппроксимацию δ-коррелированным процессом (первое марковское приближение) ввиду ее большей простоты; аппроксимация телеграфным процессом (приближение Бурре) приемлема при произвольных значениях τ.

Автор благодарит В. И. Кляцкина и В. И. Татарского за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 9, 1400 (1971).
2. R. Bourret, U. Frish and A, Pouquet, Physica, **65**, 303 (1973).
3. Л. А. Апресян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 165 (1974).
4. A. Brissaud and U. Frish, J. Math. Phys., **15**, № 5, 524 (1974).
5. О. Г. Налбандян, В .И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **20**, № 4, 549 (1977).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
29 декабря 1975 г.

POSSIBLE APPROXIMATIONS OF THE GAUSSIAN RANDOM PROCESS IN SOME NONLINEAR STOCHASTIC PROBLEMS

O. G. Nalbandyan

A class of stochastic equations with a quadratic nonlinearity the solution of which may be expressed through the solution of the corresponding linear equations is considered. By the example of the one-dimensional equation, the possibility of approximation of the Gaussian random process with the exponential correlation function by δ-correlated (Markov's approximation) or telegraph (Burre approximation) random processes is discussed.