ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 5 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 538.56 : 519.25

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕСТАЦИОНАРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Ю. Н. Барабаненков, В. Д. Озрин

На примере уравнения Шредингера рассматривается нестационарное многократное рассеяние волновых пакетов на ансамбле изменяющихся рассеивателей. Предполагается, что положение рассеивателей в пространстве и их моменты включения во времени распределены хаотически. С помощью метода мажорантного процесса формулируется предельное условие применимости уравнения переноса для спектральной плотности поля. Согласно этому условию, среднее число центров рассеивателей в сфере их действия должно быть мало по сравнению с единицей.

В настоящее время проблема статистического обоснования теории переноса излучения в рассеивающей среде окончательно не решена [1]. Это связано с тем, что обычно рассеиватели дискретной среды считаются постоянными во времени и ставится краевая задача о решении волнового уравнения Гельмгольца с граничными условиями излучения.

В данной работе рассеиватели дискретной среды предполагаются изменяющимися во времени, имея вид пространственно-временных импульсов. Как и в случае непрерывной среды [2], волновое поле описывается нестационарным уравнением Шредингера, для которого ставится задача с начальным условием о рассеянии волнового пакета. Методом мажорантного процесса [3] оценивается вклад совокупности всех диаграмм с повторным* рассеянием на одном и том же рассеивателе, отбрасывание которых приводит к уравнению переноса вида [4]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\boldsymbol{p}\,\nabla_{\boldsymbol{R}}\right)f(\boldsymbol{R},\boldsymbol{p},t)= \\ =-\int d^3p'\,\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')[f(\boldsymbol{R},\boldsymbol{p},t)-f(\boldsymbol{R},\boldsymbol{p}',t)]. \tag{1}$$

Здесь $f(\boldsymbol{R},\boldsymbol{p},t)$ — функция распределения пакетов по координатам $\boldsymbol{R}$ и волновым векторам $\boldsymbol{p}$ и $\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$ есть (ненормированная) плотность вероятностей перехода $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}'$ пакета при элементарном акте рассеяния на эффективной неоднородности среды. Уравнение переноса (1) выглядит так же, как и уравнение (11) из [2] в случае непрерывной среды. Отличие между моделями среды сказывается только на конкретном выражении для вероятности перехода $\sigma(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}')$ волнового пакета.

1. МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ СРЕДЫ

Волновое поле $u(\rho, t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(\rho,t)=[-\Delta+V(\rho,t)]u(\rho,t), \tag{2}$$

* Имеются в виду диаграммы, описывающие такие процессы рассеяния, когда волна, например, от рассеивателя 1 идет к рассеивателю 2 и после этого снова возвращается к рассеивателю 1.

которое записано в системе единиц работы [2]. Потенциал $V(\rho, t)$ дискретной рассеивающей среды равен сумме по всем ее рассеивателям:

$$V(\rho, t) = \sum_{j=1}^{N} V_0(\rho - \rho_j, t - t_j), \tag{3}$$

где $V_0(\rho - \rho_j, t - t_j)$ — потенциал j-го рассеивателя. Он расположен в точке ρ_j и «включается»* в момент t_j. Будем считать, что положения рассеивателей и их моменты включения статистически независимы между собой, так что совместная плотность вероятностей $w_N(\rho_1, t_1; \ldots; \rho_N, t_N)$ равна произведению:

$$w_N(\rho_1, t_1; \ldots, \rho_N, t_N) = w_\rho(\rho_1) w_t(t_1) \ldots w_\rho(\rho_N) w_t(t_N). \tag{4}$$

Относительно числа N рассеивателей предполагается, что оно распределено по закону Пуассона с вероятностью w_N, равной

$$w_N = \frac{\overline{N}^N}{N!} e^{-\overline{N}}, \tag{5}$$

где $\overline{N}$ — среднее число рассеивателей.

2. АМПЛИТУДА НЕСТАЦИОНАРНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ИЗОЛИРОВАННОГО РАССЕИВАТЕЛЯ

Рассмотрим решение уравнения Шредингера (2) с потенциалом $V_0(\rho, t)$ изолированного рассеивателя и с заданным начальным условием в момент t_0. Перейдем к эквивалентному интегральному уравнению, записывая его в представлении Фурье по координатам. Решение этого интегрального уравнения ищем в виде

$$\begin{gathered} u(p, t) = u_0(p, t) - \\ - i(2\pi)^{-3} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\tau' \int d^3p' K(p, t - \tau) T(p, \tau; p', \tau') u_0(p', \tau'). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $u(p, t)$, $u_0(p, t)$ и $K(p, t) = \exp(-ip^2t)$ — пространственные фурье-образы волнового поля $u(\rho, t)$, его невозмущенного значения $u_0(\rho, t)$ и функции Грина $K(\rho, t)$ нестационарного уравнения Шредингера (2) в свободном пространстве. Для ядра $T(p, t; p', t')$ может быть получено интегральное уравнение вида**

$$\begin{gathered} T(p, t; p', t') = (2\pi)^3 V_0(p - p', t)\,\delta(t - t' - 0) - \\ - i \int_{t'}^{t} d\tau \int d^3k\, V_0(p - k, t) K(k, t - \tau) T(k, \tau; p', t'), \end{gathered} \tag{7}$$

где $V_0(p, t)$ — пространственный фурье-образ потенциала рассеивателя,

$$V_0(\rho, t) = \int d^3p e^{i\rho p} V_0(p, t). \tag{8}$$

Допустим, что потенциал $V_0(\rho, t)$ рассеивателя имеет вид

* О включении рассеивателя в момент t_j здесь говорится лишь условно, т. е. не предполагается, что при $t < t_j$ потенциал j-го рассеивателя обязательно равен нулю.

** Уравнение (7) представляет собой нестационарный вариант известного в квантовой теории рассеяния уравнения Липпмана—Швингера для T-оператора рассеяния.

$$V_0(\rho, t) = V_0(\rho)\chi(t), \tag{9}$$

где безразмерная импульсная функция $\chi(t)$ обращается в нуль вне конечного интервала времени:

$$\chi(t) = 0, \qquad |t| > \tau_0^*/2. \tag{10}$$

Путем, например, представления решения уравнения (7) для ядра $T(\mathbf{p}, t; \mathbf{p}', t')$ в виде борновского ряда теории возмущений проверяем, что это ядро обращается в нуль, если хотя бы один из его аргументов t или t' выходит за пределы интервала времени действия потенциала рассеивателя:

$$T(\mathbf{p}, t; \mathbf{p}', t') = 0, \qquad |t| > \tau_0^*/2 \tag{11}$$

или $|t'| > \tau_0^*/2$.

Пусть в уравнении (6) начальный момент t_0 и момент наблюдения t выбраны соответственно до и после интервала времени действия потенциала рассеивателя. При этом можно записать

$$u(\mathbf{p}, t) = u_0(\mathbf{p}, t) + (2\pi)^{-3} K(p, t) \int d^3p' \, A(\mathbf{p}, \mathbf{p}') u_0(\mathbf{p}', 0), \tag{12}$$

$$t_0 < -\tau_0^*/2, \qquad t > \tau_0^*/2,$$

где через $A(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ обозначено выражение

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dt' K^*(p, t) T(\mathbf{p}, t; \mathbf{p}', t') K(p', t'). \tag{13}$$

Равенство (12) позволяет придать величине $A(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ смысл амплитуды нестационарного рассеяния волнового пакета на изменяющемся рассеивателе.

Определенная равенством (13) амплитуда нестационарного рассеяния $A(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ в первом борновском приближении выражается через пространственно-временной фурье-образ потенциала рассеивателя. Это поясняет физический смысл амплитуды (13), которая характеризует рассеяние плоской волны с изменением направления ее распространения и с изменением ее частоты.

Если время действия τ_0^* рассеивателя достаточно велико, так что выполняется условие квазистатичности (см. разд. 5), то частота волны при рассеянии практически остается неизменной. В этом можно убедиться, предполагая, что функция $\chi(t)$ в равенствах (9) и (10) имеет вид единичного импульса. Тогда из уравнения (7) следует, что ядро $T(\mathbf{p}, t; \mathbf{p}', t')$ при $-\tau_0^*/2 < t' < t < \tau_0^*/2$ принимает вид $T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t - t')$, т. е. зависит только от разности $(t - t')$. Новое ядро $T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t)$ удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения (7), если в нем положить $t' = 0$ и заменить пространственный фурье-образ $V_0(\mathbf{p}, t)$ переменного потенциала $V_0(\rho, t)$ на пространственный фурье-образ $V_0(\mathbf{p})$ статического потенциала $V_0(\rho)$. С помощью этого уравнения, относящегося к статическому потенциалу, нетрудно проверить, что преобразование Лапласа $T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; k_0^2 + i0)$ по времени от ядра $T(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t)$ представляет собой пространственный фурье-образ ядра оператора рассеяния [1] плоской волны $\exp(ik_0 \mathbf{s}_0 \rho)$ на статическом потенциале, где k_0 — волновое число и $\mathbf{s}_0$ — единичный вектор направления падения волны. При условии квазистатичности потенциала рассеивателя получается приближенное равенство вида*

* В книгах по квантовой механике формула вида (14) обычно выводится в первом борновском приближении и служит для определения вероятности перехода в единицу времени.

$$|A(p,\,p')|^2 \approx 2\pi\tau_0^*|T(p,\,p';\;p^2+i0)|^2\delta(p^2-p'^2). \tag{14}$$

Амплитуда (13) нестационарного рассеяния удовлетворяет соотношению

$$A(p,\,p')+A^*(p',\,p) = -(2\pi)^{-3}\int d^3p''A(p'',\,p)A^*(p'',\,p'), \tag{15}$$

а также сопряженному соотношению, которое получается из равенства (15) путем замены подынтегрального выражения в его правой части на $A(p,\,p'')\,A^*(p',\,p'')$. Здесь звездочка указывает на переход к комплексно-сопряженной величине. Соотношение (15) обобщает оптическую теорему [1] на случай изменяющегося во времени рассеивателя, когда происходит изменение частоты рассеиваемой волны.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗ УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА В ОДНОГРУППОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Перейдем к рассмотрению вопроса о выводе уравнения переноса (1) из статистической теории рассеяния волновых пакетов на ансамбле изменяющихся рассеивателей.

Исходим из уравнения Дайсона (7) из [3] для приближенного значения $\gamma_D(\rho_1,\,\rho_2,\,t)$ функции взаимной пространственной когерентности $\overline{\gamma}(\rho_1,\,\rho_2,\,t) = \overline{u(\rho_1,\,t)u^*(\rho_2,\,t)}$ поля, где черта означает усреднение по статистическому ансамблю рассеивателей. Это уравнение в представлении Фурье имеет вид

$$\begin{gathered}\left(i\frac{\partial}{\partial t}-p_1^2+p_2^2\right)\gamma_D(p_1,\,p_2,\,t) = \\ =(2\pi)^{-6}\int\limits_0^t dt'\int d^3p_1'd^3p_2'\hat{M}(p_1,\,p_2,\,t;\;p_1',\,p_2',\,t')\gamma_D(p_1',\,p_2',\,t').\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь через $\hat{M}$ обозначен массовый оператор, который берется в одногрупповом приближении и равен сумме ряда типа (8) из [3]. Члены этого ряда линейны по кумулянтным функциям $g_s(\rho_1,\,t_1;\,\ldots;\,\rho_s,\,t_s)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ потенциала (3) ансамбля рассеивателей. Эти кумулянтные функции с учетом условных плотностей вероятностей (4) и вероятности (5) числа рассеивателей легко вычисляются с помощью характеристического функционала для потенциала ансамбля рассеивателей, и их пространственные фурье-образы равны

$$\begin{gathered}g_s(p_1,\,t_1;\,\ldots;\,p_s,\,t_s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,w_t(t)\int d^3\rho n(\rho)\,\times \\ \times\exp[-i\rho(p_1+\ldots+p_s)]V_0(p_1,\,t_1-t)\ldots V_0(p_s,\,t_s-t),\quad n(\rho) = \overline{N}w_\rho(\rho).\end{gathered} \tag{17}$$

Подставляя кумулянты (17) в члены ряда типа (8) из [3] для массового оператора $\hat{M}$, убеждаемся, что этот ряд сворачивается в конечное выражение вида

$$\begin{gathered}\hat{M}(p_1,\,p_2,\,t;\;p_1',\,p_2',\,t') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\,w_t(\tau)\int d^3\rho\,n(\rho)\,\times \\ \times\exp[-i\rho(p_1-p_2-p_1'+p_2')]\hat{T}(p_1,\,p_2,\,t-\tau;\;p_1',\,p_2',\,t'-\tau).\end{gathered} \tag{18}$$

Через $\hat{T}(p_1, p_2, t; p_1', p_2', t')$ здесь обозначено ядро, которое появляется при решении задачи о нахождении билинейной комбинации поля $\gamma(p_1, p_2, t) = u(p_1, t)u^*(p_2, t)$ с заданным начальным условием в случае изолированного рассеивателя. Решение этой задачи выражается через ядро $\hat{T}(p_1, p_2, t; p_1', p_2', t')$ и невозмущенное значение $\gamma_0(p_1, p_2, t)$ соотношением, аналогичным формуле (6), которая связывает поле $u(p, t)$ с невозмущенным значением $u_0(p, t)$ через ядро $T(p, t; p', t')$.

Ядро $\hat{T}$ математически определено настолько же хорошо, как и T. Так, например, для ядра $\hat{T}$ может быть получено интегральное уравнение, аналогичное уравнению (7). Однако ядро $\hat{T}$ не имеет, в отличие от T, прямого физического смысла. Поэтому важно найти выражение, связывающее эти величины. Искомое соотношение действительно существует и имеет вид

$$\hat{T} = \hat{T}^{(1)} + \hat{T}^{(2)}, \tag{19}$$

где слагаемые в правой части равны

$$\begin{aligned}\hat{T}^{(1)}(p_1, p_2, t; p_1', p_2', t') = (2\pi)^3 T(p_1, t; p_1', t') \times \\ \times K^*(p_2, t-t')\,\delta^{(3)}(p_2 - p_2') - (2\pi)^3 T^*(p_2, t; p_2', t') \times \\ \times K(p_1, t-t')\,\delta^{(3)}(p_1 - p_1');\end{aligned} \tag{19а}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}^{(2)}(p_1, p_2, t; p_1', p_2', t') = i\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2 [T(p_1, t; p_1', t_1) \times \\ \times K(p_1', t_1 - t')K^*(p_2, t-t_2)\,T^*(p_2, t_2; p_2', t') + \\ + T^*(p_2, t; p_2', t_1)K^*(p_2', t_1 - t')K(p_1, t-t_2) \times \\ \times T(p_1, t_2; p_1', t')] + i\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 [T(p_1, t; p_1', t') \times \\ \times K^*(p_2, t-t_1)T^*(p_2, t_1; p_2', t_2)K^*(p_2', t_2 - t') + \\ + T^*(p_2, t; p_2', t')K(p_1, t-t_1)T(p_1, t_1; p_1', t_2)K(p_1', t_2 - t')].\end{aligned} \tag{19б}$$

Соотношение (19) может быть получено путем сравнения рядов теории возмущений по степеням потенциала рассеивателя для ядер T и $\hat{T}$.

Уравнение Дайсона (16) с массовым оператором $\hat{M}$, равным (18), и соотношения (19) между ядрами T и $\hat{T}$ приводят после некоторых преобразований к уравнению переноса (1). С физической точки зрения представляет интерес рассмотреть вывод этого уравнения для задачи о рассеянии волнового пакета на ограниченной рассеивающей среде. Однако в данной работе будет рассмотрен более простой случай, когда волновой пакет на протяжении всего времени наблюдения остается внутри среды и ее границы практически не сказываются на поведении пакета. В этом случае среду можно считать неограниченной и в среднем однородной. Кроме того, будем интересоваться только распределением пакета по волновым векторам, оставляя в стороне вопрос о положении его центра тяжести. Для этого достаточно лишь иметь дело с диагональной частью* $f(p, t) = \overline{\gamma}(p, p, t)$ функции взаимной когерентности.

Уравнение Дайсона (16) в случае однородной рассеивающей среды с постоянной плотностью $n(\rho) = n = \text{const}$ рассеивателей, записанное для диагональной части $f_D(p, t) = \gamma_D(p, p, t)$ функции взаимной когерентности, принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f_D(p, t) = -i(2\pi)^{-3} n \int\limits_0^t dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\, w_t(\tau) \times \\ \times \int d^3p' \hat{T}(p, p, t-\tau; p', p', t'-\tau) f_D(p', t'). \tag{20}$$

Не выходя за границы точности (см. разд. 4) уравнения (20), в нем можно пренебречь эффектом запаздывания, вынося в его правой части функцию $f_D(p', t')$ из-под знака интеграла по t' в точке $t' = t$ и устремляя верхний предел интегрирования по t' к бесконечности. Кроме того, выносим плотность вероятностей включения $w_t(\tau)$ рассеивателя из-под знака интеграла по τ в точке $\tau = t$, пренебрегая ее изменением на интервале времени τ_0^* действия рассеивателя.

После перечисленных аппроксимаций в правой части уравнения Дайсона (20) интегрированию по времени подвергается только ядро $\hat{T}$. Двойной интеграл от него может быть с помощью соотношения (19), а также оптической теоремы в виде равенства, сопряженного (15), записан следующим образом:

$$-i \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int\limits_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \hat{T}(p, p, \tau_1; p', p', \tau_2) = \\ = |A(p, p')|^2 - \delta^{(3)}(p - p') \int d^3p'' |A(p, p'')|^2 d^3p''. \tag{21}$$

В результате уравнение Дайсона (20) принимает вид уравнения переноса:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_D(p, t) = -(2\pi)^{-3} n\, w_t(t) \int d^3p' \, |A(p, p')|^2 [f_D(p, t) - f_D(p', t)]. \tag{22}$$

Интегрируя феноменологическое уравнение переноса (1) по координатам $\boldsymbol{R}$ центра тяжести волнового пакета и сравнивая с полученным уравнением (22), находим конкретное выражение для вероятности перехода $\sigma(p, p')$ волнового пакета.

4. УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Главное условие применимости уравнения переноса (22) получается из оценки погрешности, возникающей при использовании уравнения Дайсона (16) с массовым оператором $\hat{M}$ в одногрупповом приближении (18). Такая оценка в виде неравенства получена в [3] для произвольного закона флуктуаций потенциала рассеивающей среды. В рассматриваемом случае дискретной среды, состоящей из статистически независимых переменных рассеивателей, эта оценка допускает существенное упро-

* Функция распределения $f(\boldsymbol{R}, p, t)$ волновых пакетов в уравнении переноса (1) имеет смысл, согласно формуле (8) из [2], пространственной спектральной плотности поля. Функция $f(p, t)$ равна интегралу от $f(\boldsymbol{R}, p, t)$ по $\boldsymbol{R}$.

щение. Не останавливаясь на подробностях вычислений, приведем окончательный результат. Он имеет вид неравенства:

$$\sup_{p_1, p_2} |\overline{\gamma}(p_1, p_2, t) - \gamma_D(p_1, p_2, t)| \leqslant \leqslant \frac{4\tau_0 t}{\tau_{\text{м}}^2} \exp\left(\frac{2t}{\tau_{\text{м}}}\right) \sup_{p_1, p_2} |\gamma_0(p_1, p_2)|. \quad (23)$$

Здесь слева стоит знак верхней грани* по волновым векторам p_1, p_2 от разности между точным значением $\overline{\gamma}(p_1, p_2, t)$ функции взаимной когерентности в представлении Фурье и ее приближенным значением $\gamma_D(p_1, p_2, t)$, удовлетворяющим уравнению Дайсона (16) с массовым оператором $\hat{M}$ в одногрупповом приближении (18). Через τ_0 и $\tau_{\text{м}}$ обозначены временной масштаб флуктуаций потенциала среды и марковское время релаксации. Они определяются посредством введенной в [3] функции $\hat{m}(t, t') = \hat{m}(t-t')$ равенствами

$$\tau_0 = \int_0^\infty t\hat{m}(t)dt \Big/ \int_0^\infty \hat{m}(t)dt, \qquad 2/\tau_{\text{м}} = \int_0^\infty \hat{m}(t)dt. \quad (24)$$

Правые части равенств (24) могут быть оценены сверху простыми выражениями вида

$$\tau_0 \leqslant \tau_0^*; \quad (25)$$

$$2/\tau_{\text{м}} \leqslant n\overline{w}_t \int d^3\rho \left[\exp\left(2\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{V}_0(\rho, t)|dt\right) - 2\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{V}_0(\rho, t)|dt - 1\right]. \quad (26)$$

В них $\overline{w}_t$ — максимальное значение плотности вероятностей $w_t(t)$ включения рассеивателя. Функция $\hat{V}_0(\rho, t)$ равна фурье-оригиналу от модуля пространственного фурье-образа потенциала изолированного рассеивателя:

$$\hat{V}_0(\rho, t) = \int d^3p e^{ip\rho} |V_0(p, t)|. \quad (27)$$

Согласно оценке (25), масштаб τ_0 флуктуаций потенциала среды имеет порядок времени действия τ_0^* потенциала изолированного рассеивателя. Из (26) по порядку величины получаем

$$\frac{\tau_0^*}{\tau_{\text{м}}} \sim n\rho_0^3 \overline{w}_t \tau_0^* (V_0 \tau_0^*)^2 \exp(V_0 \tau_0^*), \quad (28)$$

где ρ_0 и V_0 — радиус действия и амплитуда потенциала изолированного расссеивателя. В правой части оценки (28) выступают три характерные безразмерные величины. Первая из них $n\rho_0^3$ дает среднее число центров рассеивателей в сфере их действия. Вторая величина $\overline{w}_t \tau_0^*$ имеет смысл вероятности действия рассеивателя. Наконец, смысл

---

* На самом деле, в [3] получена оценка для разности между $\overline{\gamma}(\rho_1, \rho_2, t)$ и $\gamma_D(\rho_1, \rho_2, t)$ по норме квадратично интегрируемых функций от координат ρ_1, ρ_2. Оценка (23) по норме непрерывных и ограниченных функций от волновых векторов p_1, p_2 получается аналогично, если исходить из ряда теории возмущений для функции взаимной когерентности в представлении Фурье.

третьей величины $V_0\tau_0^*$ состоит в том, что если она мала по сравнению с единицей,

$$V_0\tau_0^* \ll 1, \tag{29}$$

то амплитуду (13) нестационарного рассеяния для изолированного рассеивателя можно взять в первом борновском приближении.

Вернемся к основному неравенству (23) для абсолютной погрешности применения уравнения Дайсона (16) с массовым оператором $\hat{M}$ в одногрупповом приближении. Эта погрешность стремится к нулю, когда при ограниченном сверху отношении $t^*/\tau_м$ интервала времени наблюдения $0 \leqslant t \leqslant t^*$ к марковскому времени $\tau_м$ релаксации отношение $\tau_0^*/\tau_м$ времени действия τ_0^* потенциала изолированного рассеивателя к марковскому времени релаксации стремится к нулю:

$$\tau_0^*/\tau_м \to 0, \quad t^*/\tau_м < \text{const}. \tag{30}$$

Такому условию можно удовлетворить, например, устремляя к нулю среднее число $n\rho_0^3$ центров рассеивателей в сфере их действия.

5. СЛУЧАЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Если время действия τ_0^* изолированного рассеивателя достаточно велико, то для квадрата модуля его амплитуды нестационарного рассеяния можно воспользоваться приближенным равенством (14). В этом случае уравнение переноса (22) записывается как

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} f_D(ps,\, t) = -\frac{1}{8\pi^2} n w_t(t)\tau_0^* p \times \\ \times \int d^2s' \,|T(ps,\, ps';\, p^2 + i0)|^2 \,[f_D(ps,\, t) - f_D(ps',\, t)].\end{gathered} \tag{31}$$

В таком виде оно отличается от линеаризованного кинетического уравнения Больцмана, описывающего упругое рассеяние волнового пакета на ансамбле статических рассеивателей, только тем, что в правой части уравнения (31) стоит плотность действующих рассеивателей, равная $nw_t(t)\tau_0^*$.

Условия применимости уравнения переноса (31) для квазистатических рассеивателей могут быть оценены тем же способом, что и в случае непрерывной среды с квазистатическими флуктуациями ее потенциала [2], если амплитуда нестационарного рассеяния изолированного рассеивателя берется в первом борновском приближении. При этом безразмерным параметром квазистатичности рассеивателей является величина $\omega_{\rho_0}\tau_0^*$, которая должна быть велика по сравнению с единицей:

$$\omega_{\rho_0}\tau_0^* \gg 1. \tag{32}$$

Здесь $\omega_{\rho_0} \sim 1/\rho_0^2$ — частота плоской волны в свободном пространстве с длиной волны порядка радиуса ρ_0 действия потенциала изолированного рассеивателя. Условие квазистатичности (32) означает, что за время прохождения волны (длины порядка ρ_0) через сферу действия потенциала изолированного рассеивателя он не успевает заметно измениться.

Уравнение Больцмана (31) имеет свое время релаксации $\tau_Б$, которое в борновском приближении по порядку величины превосходит марковское время релаксации $\tau_м$ в отношении параметра квазистатичности к единице:

$$\tau_Б/\tau_м \sim \omega_{p_e}\tau_0^* \gg 1. \tag{33}$$

Так как параметр квазистатичности не зависит от плотности рассеивателей, то в условии (30) применимости уравнения Дайсона (16) с массовым оператором $\hat{M}$ в одногрупповом приближении можно заменить отношение $t^*/\tau_м$ интервала t^* времени наблюдения к марковскому времени $\tau_м$ релаксации на отношение $t^*/\tau_Б$ этого интервала к больцмановскому $\tau_Б$ времени релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, УФН, **117**, № 1, 49 (1975).
2. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 2, 253 (1975).
3. Ю. Н. Барабаненков, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 8, 1249 (1973).
4. К. Кейз, П. Цвайфель, Линейная теория переноса, изд. Мир, М., 1972.

Поступила в редакцию
16 марта 1976 г.

STATISTICAL THEORY OF NONSTATIONARY RADIATIVE TRANSFER IN A MEDIUM OF VARIABLE SCATTERING

Yu. N. Barabanenkov, V. D. Ozrin

By the example of Schrödinger equation, the nonstationary multiple scattering of wave packets by an ensemble of varying scatters is considered. The position of scatters in space and their time actions are chaotically distributed. Using the method of majorant process, the applicability condition of the transfer equation is formulated for the spectral density of the field. According to this condition, the mean value of the scatter centers in the sphere of their action is to be smaller than unity.