ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 4 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 621.372.825.2

НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ДИАФРАГМИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

I. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. МАЛЫЙ ОБЪЕМНЫЙ ЗАРЯД

В. Е. Нечаев

Исследованы малые волновые возмущения моноскоростных пучков релятивистских электронов в замедляющих волноводах. Развита общая методика получения дисперсионных уравнений при заданном продольном волновом числе. Для случаев, когда можно пренебречь нерезонансным полем (малый объемный заряд), найдены области неустойчивости и рассчитаны инкременты симметричных и несимметричных колебаний при различных величинах фокусирующего магнитостатического поля.

Вопрос о раскачке колебаний в релятивистских электронных пучках (РЭП) внутри замедляющих волноводов имеет важное значение для оценок возможностей различных систем ускорения заряженных частиц и излучения электромагнитной энергии. Обычно в первую очередь рассматриваются черенковские неустойчивости, как обладающие наибольшим инкрементом. Этому вопросу посвящены разделы работ [1, 2], где рассчитаны инкременты колебаний РЭП в периодически диафрагмированном волноводе с сильным осевым магнитным полем H_{0z} и в условиях ионной компенсации заряда пучка при $H_{0z} = 0$. Здесь будет изложено решение задачи в аналогичной [1, 2] постановке, но с использованием более строгой методики расчета, позволяющей избежать некоторых неточностей [1, 2] (см. ниже) и получить более полные результаты относительно неустойчивостей РЭП.

Рассмотрим малые колебания РЭП с произвольным распределением концентрации $N(r)$ по радиусу, полагая невозмущенное движение вдоль оси моноскоростным ($v_{0z} = v$)*. В отличие от [1, 2] величину магнитостатического поля H_{0z} будем считать произвольной. Кроме того, при получении дисперсионных уравнений не будем с самого начала пренебрегать потенциальной частью поля, поскольку такое пренебрежение не всегда корректно, особенно для сильноточных пучков.

1. Основные соотношения для высокочастотных полей и токов. Пусть волновод с проводящими стенками радиуса $\overline{R}$ периодически нагружен бесконечно тонкими проводящими дисками с внутренним радиусом R (канал для пучка). Период системы существенно меньше длины волны, так что между дисками поле практически не зависит от осевой z-координаты. Будем считать заданным пространственный период $2\pi/h$ волны $f(r)\exp[j(n\theta + hz - \omega t)]$. Тогда в волноводе без пучка собственное колебание с частотой $\omega_s = \omega_s(n, h)$ описывается уравнениями для комплексных амплитуд вихревых полей:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_s = -jk_s\boldsymbol{E}_s, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_s = jk_s\boldsymbol{H}_s, \tag{1}$$

* Здесь не затрагивается вопрос о диокотронных неустойчивостях, порождаемых неоднородностью угловых скоростей дрейфа (см., например, [3]).

где $k_s = \omega_s/c$. Для колебаний самосогласованных полей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ на частоте $\omega = \omega(n, h) \neq \omega_s$ в волноводе с потоком электронов будем искать решение из уравнений

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} - jk\boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = jk\boldsymbol{H}, \tag{2}$$

полагая $\boldsymbol{E} = \sum A_s \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_p$, $\quad \boldsymbol{H} = \sum B_s \boldsymbol{H}_s$, где $\boldsymbol{E}_p$ — потенциальная часть полного поля, а $\boldsymbol{J}$ — плотность индуцированного в пучке тока. Суммирование производится по всем видам колебаний для данного h. Из (1) и (2) найдем

$$B_s = \frac{\omega_s}{\omega} A_s, \quad \sum\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right) A_s \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_p = -j\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{J}. \tag{3}$$

Умножая (3) на $\boldsymbol{E}_{s'}^*$ и интегрируя по поперечному сечению волновода, включая область между диафрагмами, получим выражения для B_s и A_s, сходные с известными [4] из теории резонаторов*:

$$\begin{gathered} A_s = \frac{\omega}{\omega_s} B_s = -\frac{j\,\omega\, 4\pi}{(\omega^2 - \omega_s^2) W_s} \int\limits_0^R (\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}_s^*) r\,dr, \\ W_s = \int\limits_0^{\overline{R}} |\boldsymbol{E}_s|^2 r\,dr, \end{gathered} \tag{4}$$

поскольку $\int\limits_0^{\overline{R}} (\boldsymbol{E}_p \boldsymbol{E}_{s'}^*) r\,dr = 0$, $\quad \int\limits_0^{\overline{R}} (\boldsymbol{E}_s \boldsymbol{E}_{s'}^*) r\,dr = \delta_{ss'} W_s$, где W_s — норма поля s-вида колебаний (учетверенное значение погонной запасенной энергии). Связь (4) отражает первую из двух частей самосогласованной задачи. Другая часть связана с определением индуцированных в пучке токов, как функций вихревых полей, так как их подстановка в (4), очевидно, приводит к дисперсионному уравнению задачи. Согласно (3) имеем

$$\boldsymbol{E} = \sum A_s \boldsymbol{E}_s + \boldsymbol{E}_p = \sum \frac{\omega_s^2}{\omega^2} A_s \boldsymbol{E}_s - j\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{H} = \sum \frac{\omega_s}{\omega} A_s \boldsymbol{H}_s. \tag{5}$$

Используя (5) в уравнениях движения и непрерывности, можно найти токи в виде бесконечных сумм. Например, в случае сильного магнитостатического поля, подавляющего поперечные качания электронов, оказывается

$$4\pi J_z = \frac{j\,\omega\omega_b^2}{\Omega^2} E_z = \frac{j\,\omega\omega_b^2}{\Omega^2 - \omega_b^2} \sum \frac{\omega_s^2}{\omega^2} A_s E_{sz}, \tag{6}$$

где $\Omega = \omega - hv$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, $\omega_b^2 = \dfrac{4\pi e^2 N}{m\gamma^3}$ — квадрат про-

* Нельзя, как в [1], отбрасывать E_p и таким путем сводить волновое уравнение к скалярному виду (3) [1]: $\Delta E_z + k^2 E_z = -j\dfrac{4\pi k}{c} J_z$. В конечном итоге такая некорректная процедура приводит к неточным выражениям для инкрементов колебаний в областях неустойчивости.

дольной ленгмюровской (плазменной) частоты пучка. Из (4) и (6) следует дисперсионное уравнение в виде бесконечного определителя. Однако ниже воспользуемся более удобным приближенным методом, достаточно апробированным в задачах электроники [5]. В областях неустойчивости пучок, как правило, резонирует с одним из собственных видов колебаний ($s=n$), например, при синхронизме $hv \approx \omega_n$. Введя функцию распределения тока $\psi(r)$, такую, что $J_z=\psi(r)I_z$, где I_z — полный конвекционный ток, представим амплитуду резонансной части поля (4) в виде

$$A_n = -\frac{2j\,\omega\, I_z \widetilde{E}^*_{nz}}{(\omega^2-\omega_n^2)W_n}. \qquad (7)$$

Здесь $\widetilde{E}^*_{nz}$ — усредненное поле в смысле $\widetilde{P}=2\pi\int P\psi\, rdr$. С учетом (7) полное поле (5), усреднив с весом ψ, представим в виде суммы резонансной и нерезонансной частей:

$$\widetilde{E}_z = \left[-\frac{2j\,\omega_n^2\,|\widetilde{E}_{nz}|^2}{\omega(\omega^2-\omega_n^2)W_n} + \frac{4\pi\Gamma}{j\,\omega\, S_{\text{эфф}}}\right] I_z, \qquad (8)$$

где $S_{\text{эфф}} = [2\pi\int\psi^2 rdr]^{-1}$ — эффективное сечение пучка, а Γ — коэффициент дисперсии*:

$$\Gamma = 1 + \frac{j\,\omega\, S_{\text{эфф}}}{I_z}\sum_{s\neq n}\frac{\omega_s^2}{\omega^2}A_s\widetilde{E}_{sz}, \qquad (9)$$

показывающий, как ослабляется нерезонансное взаимодействие электронов в пучке для различных видов волноводов (диафрагмированных, гладких, спирально проводящих и т. д.) по сравнению со случаем однородного поперечного распределения полей и токов, когда $S_{\text{эфф}}=S$, а $\Gamma=1$. Из (8) и усредненного (6) следует дисперсионное уравнение в удобной для анализа форме.

2. *Дисперсионное уравнение при малом пространственном заряде.* Для не слишком больших токов, когда можно пренебречь высокочастотным самовоздействием пучка и ограничиться одноволновым приближением с заданной структурой вихревого поля, токи равны

$$4\pi J_r = \frac{\omega_{b\perp}^2 A_n}{\Omega^2-\omega_H^2}\left[j\Omega(E_r-\beta H_\theta)_n + \omega_H(E_\theta+\beta H_r)_n\right],$$

$$4\pi J_\theta = \frac{\omega_{b\perp}^2 A_n}{\Omega^2-\omega_H^2}\left[j\Omega(E_\theta+\beta H_r)_n - \omega_H(E_r-\beta H_\theta)_n\right], \qquad (10)$$

$$4\pi J_z = \frac{j\,\omega\omega_b^2}{\Omega^2}A_n E_{nz} + \frac{v}{j\Omega}\operatorname{div}_\perp(4\pi J_\perp),$$

где $\omega_{b\perp}^2=\omega_b^2\gamma^{-2}$, а $\omega_H=\dfrac{eH_{0z}}{m\gamma c}$ — гирочастота. Во всех случаях, кроме сильной замагниченности ($\omega_H^2 \gg \omega_{b\perp}^2$), существен учет группировки элект-

* Заметим, что введенный здесь коэффициент депрессии отличается от общепринятого в теории ЛБВ [5], где задана частота ω (см. часть II).

ронов, обусловленной поперечным градиентом концентрации $\left(\text{или } \dfrac{\partial \omega_{b\perp}^2}{\partial r}\right)$, а при $\omega_{b\perp}^2 \approx \text{const}$ нужно учитывать колебания границы пучка. Вклад соответствующих членов в (10) и (4) иногда может быть определяющим.

Подставляя (10) в (4), интегрируя по частям с учетом $J_r(R)=0$ и равенств

$$
\begin{aligned}
E_r - \beta H_\theta &= \omega^{-1}\left(\Omega E_r - jv\frac{dE_z}{dr}\right) = jF_r, \\
E_\theta + \beta H_r &= \omega^{-1}\left(\Omega E_\theta + \frac{nv}{r}E_z\right) = F_\theta,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

получим дисперсионное уравнение в виде

$$
W_n\left(1-\frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right) = \int\limits_0^R \left[\frac{\omega_b^2}{\Omega^2}E_z^2 + \frac{\omega_{b\perp}^2}{\Omega^2-\omega_H^2}\left(F_r^2+F_\theta^2 - 2\,\frac{\omega_H}{\Omega}F_rF_\theta\right)\right] r\,dr. \tag{12}
$$

Здесь и далее в записи полей будем опускать индекс основного вида колебания (n), а под E_z, F_r, F_θ будем понимать поперечные структуры полей (11) — действительные величины. Заметим еще, что первое слагаемое под интегралом (12) не пропорционально $(J_z E_z^*)$, так как согласно (10) часть $J_z \sim \operatorname{div}_\perp \boldsymbol{J}_\perp$ «использована» в слагаемых с $(\Omega^2-\omega_H^2)^{-1}$.

Из (12) видно, что неустойчивости имеют место вблизи резонансов, когда $\Omega \approx 0$ (синхронизм пучка с волной) и $\Omega \approx \pm\omega_H$ (допплеровские циклотронные резонансы). Циклотронная раскачка колебаний существует только в области аномального эффекта Допплера, когда $\omega \approx hv - \omega_H$:

$$
W_n(\omega-\omega_n)^2 = -\frac{\omega_n}{4\omega_H}\int\limits_0^R (F_r+F_\theta)^2\omega_{b\perp}^2\, r\,dr. \tag{13}
$$

3. Симметричные колебания. Если $n=0$, поперечные структуры вихревых полей в канале $(r \ll R)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&E_z = I_0(pr), \qquad E_r = -j\frac{h}{p}I_1(pr), \qquad H_\theta = -j\frac{k_0}{p}I_1(pr), \\
&E_\theta = H_z = H_r = 0, \qquad \text{где } p^2 = h^2 - k_0^2.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Частота собственных колебаний ω_0 находится из условия сшивки полей при $r=R$ (см., например, [1]). Частота самосогласованных симметричных колебаний в волноводе с РЭП согласно (12) и (14) определяется из уравнения

$$
W_0\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \int\limits_0^R \left[\frac{\omega_b^2}{\Omega^2}I_0^2(pr) + \frac{\omega_{b\perp}^2}{\Omega^2-\omega_H^2}\,\frac{(h-\beta k_0)^2}{p^2}\,I_1^2(pr)\right] r\,dr. \tag{15}
$$

Вблизи синхронизма, когда $\omega_0(h) = hv$ (т. е. $\Omega = \omega - \omega_0$), в отсутствие магнитостатического поля ($\omega_H = 0$) инкремент равен

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{\omega_0}{2W_0}\int_0^R \omega_b^2\,[I_0^2(pr) + I_1^2(pr)]\,rdr\right\}^{1/3}. \tag{16}$$

При сильной замагниченности, когда $\omega_H^2 \gg \Omega^2$, инкремент несколько меньше (исчезает член с I_1^2). В случае $p^2R^2 \approx \left(\frac{2\pi R}{\lambda\beta\gamma}\right)^2 \leqslant 1$, типичном для систем с релятивистскими пучками, эта разница несущественна. Поэтому можно считать, что инкремент синхронных симметричных колебаний иеет величину

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2\gamma}\left(\frac{i}{k_0^2 W_0\beta}\right)^{1/3}, \tag{17}$$

где $i = \frac{eI}{mc^3} = \frac{I(ka)}{17{,}04}$ — приведенный ток пучка. Заметим, что $i/\beta = \nu$, где ν — хорошо известный в теории мощных пучков «погонный электрон».

В отличие от [1, 2] инкременты содержат интеграл от (JE^*), а не $J_zE_z^*$; в норму поля также входит $|E|^2$, а не $|E_z|^2$. Легко понять, что эти различия несущественны, только когда $E_\perp \ll E_z$, а $J_\perp \leqslant J_z$, т. е. для симметричных синхронных (черенковских) колебаний при $p^2R^2 \ll 1$. Только в этом случае справедливы соответствующие результаты [1, 2] и при записи инкрементов допустимо употреблять $\int N rdr$ вместо $\int NE_z^2\, rdr$ (см. (6) в [1]).

Вблизи циклотронного резонанса $\omega_0(h) = hv - \omega_H$ раскачка колебаний определяется величиной поперечной силы на пучке:

$$-F_r = \frac{(h - \beta k_0)}{p} I_1(pr) \approx \left(\frac{\omega_0}{\gamma^2} + \omega_H\right)\frac{r}{2v}. \tag{18}$$

Для пучка с однородным заполнением в границах $b \geqslant r \geqslant a$ согласно (13) инкремент таких колебаний равен

$$\omega_i = \frac{1}{4\beta}\left(\frac{\omega_0}{\gamma^2} + \omega_H\right)\left[\frac{\omega_0(a^2 + b^2)i}{\omega_H W_0\gamma\beta}\right]^{1/2}. \tag{19}$$

При обычных параметрах релятивистских пучков циклотронная раскачка медленнее синхронной, особенно для приосевых пучков с небольшим b.

4. *Несимметричные колебания.* Рассмотрим волны с $n = \pm 1$ (при $|n| > 1$ инкременты меньше). В предположении $p^2R^2 \ll 1$ ($p^2 = h^2 - k_1^2$) структуры вихревых полей в канале ($r \leqslant R$) имеют вид

$$E_z = k_1 r, \qquad E_\theta = \pm\frac{hk_1}{4}(R^2 - r^2),$$

$$H_z = \pm jhr, \qquad H_\theta = j\left[1 - \frac{h^2R^2}{4} - (3k_1^2 - h^2)\frac{r^2}{8}\right], \tag{20}$$

$$E_r = -j\frac{hk_1}{4}(r^2 + R^2), \qquad H_r = \pm\left[1 - \frac{h^2R^2}{4} + (3h^2 - k_1^2)\frac{r^2}{8}\right].$$

Дисперсионное уравнение собственных колебаний (без пучка) следует из условия непрерывности тангенциальных полей при $r = R$:

$$\frac{N_1(k_1\overline{R})J_1'(k_1R) - J_1(k_1\overline{R})N_1'(k_1R)}{N_1(k_1\overline{R})J_1(k_1R) - J_1(k_1\overline{R})N_1(k_1R)} = \frac{1}{k_1R} - \frac{k_1R}{2}. \tag{21}$$

На релятивистские электроны в поперечном направлении действуют силы в основном со стороны высокочастотного магнитного поля. При синхронизме ($hv = \omega_1$) оказывается:

$$F = -\beta\left(1 + \frac{3p^2r^2}{8}\right), \qquad F_\theta = \pm\beta\left(1 + \frac{p^2r^2}{8}\right), \qquad p = \frac{k_1}{\beta\gamma}. \tag{22}$$

Согласно (12), (20) и (22) частота самосогласованных колебаний определяется из уравнения

$$W_1(\omega - \omega_1) \approx \frac{\omega_1}{2}\int_0^R \left[\frac{\omega_b^2 k_1^2 r^2}{\Omega^2} + \frac{2\omega_{b\perp}^2\beta^2}{\Omega(\Omega \mp \omega_H)}\right] rdr. \tag{23}$$

В отсутствие магнитостатического поля ($\omega_H = 0$) членом с $k_1^2r^2$ в (23) можно пренебречь с принятой точностью $p^2r^2 \ll 1$, и тогда инкремент равен

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_1\beta^2}{W_1}\int_0^R \omega_{b\perp}^2 rdr\right)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}\omega_1}{2\gamma}\left(\frac{2\gamma^2\beta i}{k_1^2 W_1}\right)^{1/3}. \tag{24}$$

Видно, что при $H_{0z}=0$ инкремент несимметричных колебаний медленнее убывает с ростом γ, чем инкремент симметричных колебаний (17), и вообще может его превосходить. В случае же больших магинитостатических полей колебания нарастают значительно медленнее:

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\omega_1 k_1^2}{2W_1}\int_0^R \omega_b^2 r^3 dr\right)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}\,\omega_1}{2\gamma}\left[\frac{(a^2 + b^2)i}{2W_1\beta}\right]^{1/3}, \tag{25}$$

особенно в пучках с небольшим b^2 (приосевых). Для такого подавления несимметричной раскачки требуются значительные магнитостатические поля:

$$\omega_H \gg \frac{2\Omega\beta^2\gamma^2}{k_1^2b^2} \sim \frac{\omega_1\beta^2\gamma}{k_1^2b^2}\left(\frac{b^2 i}{W_1\beta}\right)^{1/3}. \tag{26}$$

Циклотронная неустойчивость при $hv = \omega_1(h) + l\omega_H$ согласно (13) характеризуется суммой поперечных сил, которая при $n = -1$ оказывается заметно большей, чем при $n = 1$:

$$\begin{aligned} F_r + F_\theta &= \frac{k^2r^2}{8}\beta\left(\frac{\omega_H^2}{\omega^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right) \qquad (n = 1), \\ F_r + F_\theta &= -2\beta + \frac{k^2R^2}{2\beta}\left(\frac{\omega_H^2}{\omega^2} + \frac{\omega_H}{\omega}\right) \qquad (n = -1), \end{aligned} \tag{27}$$

т. е. $F_r + F_\theta \approx -2\beta$, если ω_H не слишком велико ($F_r \approx -\beta$, $F_\theta \approx \pm\beta$) Согласно (13) и (27) инкремент циклотронных симметричных колебаний равен

$$\omega_i = \left(\frac{\omega_1\beta^2}{\omega_H W_1}\int_0^R \omega_{b\perp}^2 r dr\right)^{1/2} \approx \omega_1 \left(\frac{2\omega_1\beta i}{\omega_H k_1^2 W_1}\right)^{1/2}. \qquad (28)$$

Сравнивая (28) с (19), можно видеть, что при некоторых параметрах системы несимметричные циклотронные колебания раскачиваются значительно быстрее симметричных. В первую очередь это относится к приосевым пучкам, поскольку для $n = -1$ $F_r + F_\theta \approx -2\beta$ (см. (27)) независимо от удаленности электронов от оси волновода. При симметричных колебаниях поперечная сила (18) меньше.

5. *Заключение.* Выше найдены временные инкременты волновых колебаний при заданных волновых числах, или длинах волн. При этом могут возбуждаться, строго говоря, непрерывные спектры колебаний с различными h вблизи резонанса, т. е. волновые пакеты. Почти всюду в разобранных здесь случаях неустойчивость имеет сносовый характер, т. е. энергия пакета волн нарастает во времени в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью, а в лабораторной системе отсчета, несмотря на временную раскачку «квазимонохроматической» волны с одним h, поле всего пакета может нарастать в пространстве, а не во времени. Не разбирая подробно этих вопросов, подчеркнем лишь, что установление факта временной нестабильности волн согласно известным критериям является достаточным признаком того, что волновые поля отбирают энергию у электронов, т. е. разрушают пучок.

Из результатов анализа следует, что сильное осевое магнитное поле существенно стабилизирует пучок, при этом в первую очередь снимаются несимметричные разрушения. Однако всегда остается сносовая черенковская неустойчивость. Скорость ее развития при различных токах будет оценена в части II, посвященной учету нерезонансных полей в колебаниях сильноточных РЭП.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Курилко, Ю. В. Ткач, В. А. Шендрик, Препринт ФТИ АН УССР, ХФТИ, 73-38, Харьков, 1973.
2. В. И. Курилко, Ю. В. Ткач, В. А. Шендрик, ЖТФ, **49**, 956 (1974).
3. Б. Н. Брейзман, Д. Д. Рютов, Препринт ИЯФ СО АН СССР 119-74, Новосибирск, 1974.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 декабря 1975 г.

INSTABILITY OT RELATIVISTIC ELECTRON BEAM IN A DIAPHRAGMIZED WAVEGUIDE. I. GENERAL CONSIDERATIONS. A SMALL VOLUME CHARGE

V. E. Nechaev

Small wave perturbations of multi-velocity beams of relativistic electrons in slow-down waveguides have been investigated. A general methods is developed to obtain the dispersion equations at the given longitudinal wave number. The instability regions are found and the increments of symmetric and asymmetric oscillations are calculated at different values of focusing magnetostatic field, for the cases when the nonresonant field (a small volume charge may be neglected).