

## СОДЕРЖАНИЕ

Аверьянихина Е. А. Исследование плотности вероятности огибающей модулированных флуктуаций солнечного радиоизлучения . . . . .	489
Крупина А. Е. О некоторых особенностях траекторий плазменных волн в ионосферной плазме вблизи резонанса на верхней гибридной частоте . . . . .	494
Блюх П. В., Галюк Ю. П., Гюннинен Э. М., Николаенко А. П., Рабинович Л. М. О резонансных явлениях в полости Земля—ионосфера . . . . .	501
Литвак А. Г., Фейгин А. М. Стабилизация распадных неустойчивостей нелинейным сдвигом частоты волн . . . . .	510
Марченко В. Ф. Частный случай взаимодействия двух волн в среде с нелинейностью релейного типа . . . . .	516
Горский С. М., Зверев В. А., Матвеев А. Л. О пространственной фильтрации с помощью когерентных оптических систем . . . . .	522
Креков Г. М., Крекова М. М., Макиенко Э. В., Наац И. Э. Оптическая локация микрофизических характеристик рассеивающих сред . . . . .	528
Маков Ю. Н., Хохлов Р. В. Применение функционала плотности вероятности в описании случайных волновых процессов . . . . .	538
Налбандян О. Г., Татарский В. И. Сопоставление диаграммных и аналитических методов приближенного решения линейных стохастических уравнений . . . . .	549
Кляцкин В. И. Динамические системы с флуктуациями параметров в виде процессов телеграфного типа . . . . .	562
Иванов Е. А., Гаврис И. Б. О поле сферической антенны в присутствии радиального электрического диполя . . . . .	576
Ваганов Р. Б. Нечетная волна диэлектрического слоя на частотах ниже критической . . . . .	581
Калмык В. А., Павловская Г. В., Раевский С. Б. Некоторые особенности распространения волн в волноводах с резистивной пленкой . . . . .	585
Алексахин Ю. И., Беляев А. П., Перельштейн Э. А. Продольная неустойчивость электронного пучка в канале в магнитодиэлектрике . . . . .	592
Нечаев В. Е. Неустойчивости нерелятивистских электронов в диафрагмированном волноводе. I. Общие положения. Малый объемный заряд . . . . .	598
Антаков И. И., Ергаков В. С., Засыпкин Е. В., Соколов Е. В. Стартовые условия МЦР-монотрона при наличии разброса скоростей электронов . . . . .	605
Ванке В. А., Зайцев А. А. Система нелинейных уравнений для численного анализа ЛБВ с поперечным полем . . . . .	612
Белянцев А. М., Валов В. А., Козлов В. А. Перераспределение носителей и взаимные эффекты в тонких полупроводниковых пленках . . . . .	623
Бабич Л. П., Лойко Т. В., Тарасова Л. В. Некоторые вопросы физики высоковольтных наносекундных разрядов в плотных газах . . . . .	637
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Горбачев А. А., Колданов А. П. О непараметрической проверке многих гипотез относительно случайного процесса . . . . .	646
Матушанский Г. У., Нежметдинов Т. К. Многомерное интервальное оценивание совокупности параметров . . . . .	648
Дрягин Ю. А., Лубяко Л. В. Смесь миллиметрового диапазона волн с селекцией зеркального канала при помощи интерферометра . . . . .	650

УДК 523.164.4

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ МОДУЛИРОВАННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ СОЛНЕЧНОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

*Е. А. Аверьянихина*

Проведено исследование плотности вероятности огибающей модулированных флуктуаций солнечного радиоизлучения.

Одним из методов исследования процессов, протекающих на Солнце, является изучение флуктуаций радиоизлучения. В первую очередь исследовались спектральные характеристики и было обнаружено существование квазипериодических компонентов (КПК) во флуктуациях солнечного радиоизлучения [1]. Наличие КПК является отражением периодической модуляции физических параметров (прежде всего плотности и магнитного поля) в областях генерации наблюдаемого радиоизлучения или выше их. Поэтому представляет интерес исследование одномерной плотности вероятности огибающей флуктуаций, которое может дать информацию о характере модуляции (амплитудной, частотной и т. д.), а также о типе процессов, обуславливающих наблюдаемые флуктуации.

Уже первая попытка показала информативность такой методики [2]. Учитывая различие периодов флуктуаций для различных участков поверхности Солнца, радиоизлучение от всего диска можно представить в виде

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{i=1}^n x_i(t) + \eta_0(t) + \eta_n(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n (1 + m_i \cos(\Omega_i t + \theta_i)) \xi_i(t) + \eta_0(t) + \eta_n(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_i(t)$  — амплитудно-модулированное колебание с шумовой несущей  $\xi_i(t)$ , распределенной по нормальному закону, от  $i$ -й области диска Солнца,  $\eta_0(t)$  — стационарный случайный процесс, характеризующий шум от всего диска Солнца и включающий шумы аппаратуры,  $\eta_n(t)$  — переменная компонента, характеризующая нестационарные процессы.

Наблюдаемые во флуктуациях солнечного радиоизлучения КПК адекватнее всего описываются членом

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) = \sum_{i=1}^n (1 + m_i \cos(\Omega_i t + \theta_i)) \xi_i(t).$$

В данной работе проводится исследование одномерной плотности вероятности огибающей и ее основных характеристик для модулированного случайного процесса  $x(t)$ , описываемого соотношением вида [3]

$$x(t) = s(t) \xi(t), \quad (2)$$

где  $\xi(t) = E(t) \cos(\omega t + \varphi(t))$  — узкополосный нормальный шум,  $E(t)$  и  $\varphi(t)$  — функции времени, медленные по сравнению с колебаниями

частоты  $\omega$ ,  $s(t) = 1 + m \cos(\Omega t + \theta)$  — гармоническое колебание со случайной начальной фазой  $\theta$ , равномерно распределенной в интервале  $(-\pi, \pi)$ ,  $\Omega \ll \omega$ ,  $m$  — коэффициент глубины модуляции.

Представим (2) в квазигармоническом виде [4]:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \psi(t)) = A(t) \cos \beta(t), \quad (3)$$

где изменения  $A(t)$  и  $\psi(t)$  за период высокой частоты  $T = 2\pi/\omega$  малы. Согласно [4],  $A(t)$  и  $\beta(t)$  определяются из соотношений вида

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad \operatorname{tg} \beta(t) = y(t)/x(t), \quad (4)$$

где процесс  $y(t)$ , сопряженный с  $x(t)$  в смысле преобразования Гильберта. Приближенно преобразование Гильберта сводится к дифференцированию исходной функции  $x(t)$  по  $\omega t$  [4]:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \frac{\dot{x}^2(t)}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\omega x(t)}. \quad (5)$$

Пренебрегая в первом приближении производными от  $E(t)$ ,  $\varphi(t)$  и  $(\Omega t + \theta)$ , получаем, что

$$A(t) = E(t)(1 + m \cos(\Omega t + \theta)), \quad (6)$$

т. е. в таком приближении мы имеем чисто амплитудную модуляцию. В случае если  $\Omega \gtrsim \omega$ , то модуляция будет происходить не только по амплитуде, но и по частоте, и вид функции распределения огибающей значительно усложнится.

Огибающая случайного процесса (3) —  $A(t)$  представляет собой произведение двух случайных величин  $E(t)$  и  $s(t)$ . Причем,  $E(t)$  является огибающей узкополосного нормального шума  $\xi(t)$  и распределена по рэлеевскому закону [5]:

$$\omega(E) = \frac{E}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7)$$

а гармоническое колебание  $s(t)$  имеет плотность вероятности [5]

$$\omega(s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{m^2 - (s-1)^2}. \quad (8)$$

Будем считать  $E(t)$  и  $s(t)$  статистически независимыми, тогда плотность вероятности их произведения  $A(t) = E(t)s(t)$  равна [5]

$$\omega(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(E) dE}{|E| \sqrt{m^2 - (A/E - 1)^2}}. \quad (9)$$

Решая (9), для  $0 < m < 1$  получаем

$$\omega(A) = \frac{A}{\sigma^2(1-m^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{A^2(1+m^2)}{2\sigma^2(1-m^2)^2}\right) \left[ I_0\left(\frac{mA^2}{\sigma^2(1-m^2)^2}\right) - \frac{m}{2} I_1\left(\frac{mA^2}{\sigma^2(1-m^2)^2}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{k+2}(2k+1)!!}{2^{k+2}(k+2)!} I_{k+2}\left(\frac{mA^2}{\sigma^2(1-m^2)^2}\right) \right], \quad (10)$$

где  $I_k$  — модифицированные функции Бесселя. При  $m = 0$  выражение (10) имеет вид

$$\omega(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right). \quad (11)$$

Для исследования зависимости  $\omega(A)$  от  $A$  для различных значений  $m$  была составлена программа на ЭВМ GE-400. График зависимости  $\omega(A)$  от  $A/\sigma$  приведен на рис. 1 (1 —  $m = 0,01$ ; 2 —  $m = 0,2$ ; 3 —  $m = 0,55$ ; 4 —  $m = 0,7$ ).

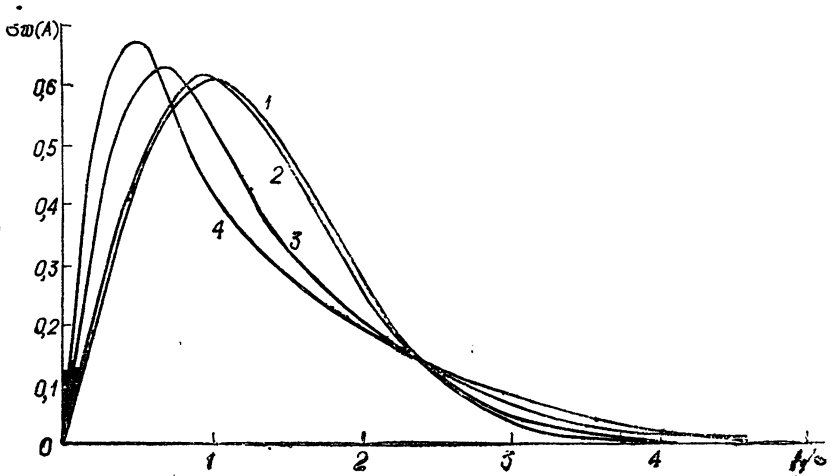


Рис. 1.

Найдем теперь основные характеристики огибающей нормального шума, модулированного гармоническим колебанием. Одномерные моменты огибающей равны:

$$\mu_k(A) = \int_0^\infty A^k \omega(A) dA. \quad (12)$$

Подставим (9) в (12):

$$\mu_k(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega(E) dE}{E} \int_{-\infty}^\infty \frac{A^k dA}{\sqrt{m^2 - (A/E - 1)^2}}. \quad (13)$$

Найдем пределы для внутреннего интеграла  $I(E)$  из условия, что

$$m^2 - \left(\frac{A}{E} - 1\right)^2 > 0. \quad (14)$$

Подставим их в (13) и сделаем в  $I(E)$  замену переменных:

$$\left(\frac{A}{E} - 1\right)^2 = m^2 \cos^2 \varphi,$$

$$I(E) = E^{k+1} \int_0^\pi (1 + m \cos \varphi)^k d\varphi = \pi E^{k+1} (1 - m^2)^{k/2} P_k \left( \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \right), \quad (15)$$

где  $P_k$  — полином Лежандра [6]. Подставим (15) в (13):

$$\mu_k(A) = (1 - m^2)^{k/2} P_k \left( \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \right) \int_0^\infty E^k \omega(E) dE. \quad (16)$$

Так как  $\int_0^\infty E^k \omega(E) dE = \mu_k(E)$ , то

$$\mu_k(A) = \frac{\mu_k(E)}{2} \sum_{n=0}^{E(k/2)} \frac{(-1)^n (2k-2n)!}{n!(k-n)!(k-2n)!} (1-m^2)^n. \quad (17)$$

Зная моменты распределения огибающей, можно определить глубину модуляции исследуемого процесса. Моменты рэлеевского распределения равны [7]

$$\mu_k(E) = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), получаем

$$\mu_k(A) = (2\sigma^2)^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) P_k\left(\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\right) (1-m^2)^{k/2}. \quad (19)$$

В (19) входит  $\sigma^2$  — дисперсия нормального шума  $\xi(t)$ , величина которой нам неизвестна. Чтобы исключить  $\sigma^2$ , необходимо перейти к нормированным моментам. В частности, найдем выражение для нормированного момента четвертого порядка. Обозначим его через  $K_4(A)$ :

$$K_4(A) = \frac{\mu_4(A)}{\mu_2(A)^2}. \quad (20)$$

Подставляя в (20) выражение для  $\mu_k(A)$  из (19), получаем, что

$$K_4(A) = \frac{2P_4(1/\sqrt{1-m^2})}{(P_2(1/\sqrt{1-m^2}))^2}. \quad (21)$$

После преобразований получаем

$$m = \sqrt{\frac{9 - 2K_4(A) \pm \sqrt{15 - K_4(A)}}{K_4(A) - 6}}. \quad (22)$$

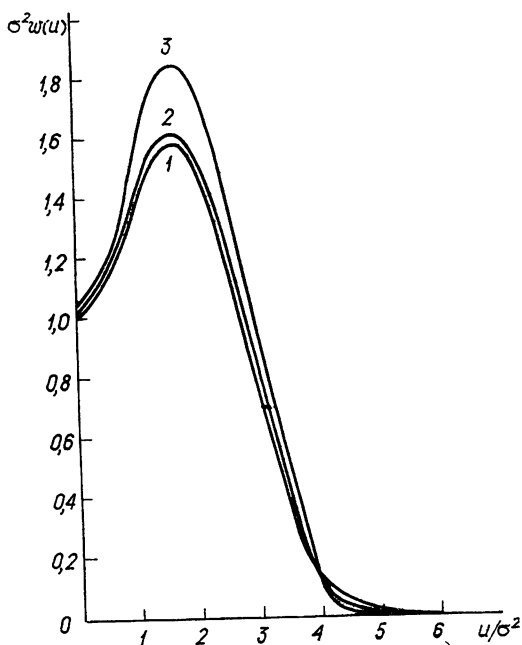


Рис. 2.

Таким образом, зная нормированный момент четвертого порядка, можно найти коэффициент глубины модуляции  $m$ . Вычисление через моменты более высокого порядка является нецелесообразным, так как на практике вычисление моментов порядка выше четвертого связано с большими погрешностями.

Поскольку в радиоастрономических измерениях на выходе приемника, как правило, регистрируется не огибающая, а квадрат огибающей флуктуаций солнечного радиоизлучения, то представляет интерес рассмотрение плотности вероятности квадрата огибающей. Для этого перейдем в формуле (10) к новой переменной  $u = A^2/2$ . Одномерная плотность вероятности квадрата огибающей нормального шума, модулированного гармоническим колебанием, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega(u) = & \frac{1}{\sigma^2(1-m^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u(1+m^2)}{\sigma^2(1-m^2)^2}\right) \left[ I_0\left(\frac{2mu}{\sigma^2(1-m^2)^2}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{m}{2} I_1\left(\frac{2mu}{\sigma^2(1-m^2)^2}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{k+2} (2k+1)!!}{2^{k+2} (k+2)!} I_{k+2}\left(\frac{2mu}{\sigma^2(1-m^2)^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

График зависимости  $\sigma^2 \omega(u)$  от  $u/\sigma^2$  приведен на рис. 2 ( $1 - m = 0,01$ ;  $2 - m = 0,1$ ;  $3 - m = 0,2$ ). Аналогично расчетам одномерных моментов огибающей, проведенных выше, получим одномерные моменты квадрата огибающей:

$$\mu_k(u) = \mu_{2k}(E) \frac{1}{2^{3k}} \sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l (4k-2l)!}{l! (2k-l)! (2k-2l)!} (1-m^2)^l. \quad (24)$$

Таким образом, в настоящей работе получены одномерные плотности вероятности огибающей и ее квадрата для нормального шума, модулированного гармоническим колебанием. Исследованы зависимости  $\omega(A)$  от  $A/\sigma$  и  $\sigma^2 \omega(u)$  от  $u/\sigma^2$  для различных значений коэффициента глубины модуляции  $m$ . Получены соотношения, позволяющие произвести количественную оценку модулированных флуктуаций, а именно: по их статистическим характеристикам определить коэффициент глубины модуляции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Кобрин, В сб. докладов сессии Научного Совета по компл. проблеме «Радиоастрономия», ИЗМИРАН, М., 1972, стр. 27.
2. Е. А. Аверьянихина, М. М. Кобрин, АЦ 834, 2 (1974).
3. И. А. Александров, В сб. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей, Труды II Всесоюзного симпозиума, Новосибирск, 1969.
4. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
5. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Физматгиз, М., 1960.
7. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1967.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
29 марта 1976 г.

Радиофизическая обсерватория АН Латв. ССР

#### INVESTIGATION OF THE PROBABILITY DENSITY OF THE ENVELOPE OF MODULATED FLUCTUATIONS OF THE SOLAR RADIO EMISSION

*E. A. Aver'yanichina*

The investigation has been made of the probability density of the envelope of modulated fluctuations of the solar radio emission.

УДК 621.371.25

## О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТРАЕКТОРИЙ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА НА ВЕРХНЕЙ ГИБРИДНОЙ ЧАСТОТЕ

*А. Е. Крупина*

В приближении геометрической оптики рассмотрена задача о рефракции плазменных волн в неоднородной плазме в области частот верхнего гибридного резонанса. Показано, что при квазипоперечном распространении возможны траектории петлеобразного типа, если верхняя гибридная частота меньше второй гармоники гирочастоты. Получены критерии возникновения таких траекторий в зависимости от параметров плазмы и характеристик волны. Если верхняя гибридная частота больше второй гармоники гирочастоты, то траектории имеют обычный «квази-параболический» вид. Результаты могут быть использованы для интерпретации резонансов, наблюдаемых при внешнем зондировании ионосферы на высокоширотных ионограммах.

Резонансные эффекты, наблюдаемые при внешнем зондировании ионосферы, обсуждались в многочисленных экспериментальных и теоретических работах (см., например, [1-7]). Ряд работ связан с необходимостью объяснения больших длительностей сигналов на резонансных частотах  $\omega_p$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_H$  и  $n\omega_H$  ( $\omega_p$  — ленгмюровская частота,  $\omega_r$  — верхняя гибридная частота,  $\omega_H$  — гирочастота электронов,  $n = 2, 3, \dots$ ). К настоящему моменту широкое распространение получила интерпретация этих длительностей с помощью рефракции пакетов электростатических волн в неоднородной плазме [2-7]. Впервые такая интерпретация была предложена Мак Афи в работе [3], где рассматривалось распространение плазменных волн при  $\omega \approx \omega_p$ . В [4, 5] и ряде других статей аналогичная задача была решена для продолжных волн вблизи верхнего гибридного резонанса  $\omega \approx \omega_r$ . В [4] в качественной форме анализируется возможность осуществления групповых траекторий с возвратом в окрестность излучателя после распространения в неоднородной ионосферной плазме. В работе [5] содержится аналитическое рассмотрение этой задачи. Однако полученные в [5] результаты могут быть использованы только для экваториальной области ионосферы, поскольку здесь предполагается, что распространение происходит строго перпендикулярно магнитному полю  $H_0$  и вектор  $\nabla\omega_r$  лежит в плоскости, перпендикулярной  $H_0$ . Известно, что резонанс  $\omega \approx \omega_r$  наблюдается и на средних и даже на высоких широтах, где модель, использованная в [5], не применима.

В данной работе будет рассмотрена рефракция плазменных волн в области частот  $\omega \approx \omega_r$  при квазипоперечном распространении. Использование простейшей геометрии задачи ( $\nabla\omega_r \parallel H_0$ ) позволяет получить аналитические выражения для групповых траекторий и времен группового запаздывания. Показано, что траектории имеют различный характер в зависимости от выполнения неравенства  $\omega_r > 2\omega_H$  или  $\omega_r < 2\omega_H$ . Полученные результаты можно использовать для интерпретации резонанса  $\omega \approx \omega_r$  на высокоширотных ионограммах.

1. Дисперсионное уравнение для электростатических волн, распространяющихся в плазме под углом  $\theta$  к магнитному полю  $\mathbf{H}_0$ , при учете теплового движения электронов впервые было получено в работе [8] (см. также монографию [9] или [10]). Так как резонанс  $\omega \approx \omega_r$  является поперечным, то мы будем рассматривать область углов  $\theta$ , близких к  $\pi/2$ , предполагая выполненным неравенство

$$\cos^2 \theta \ll 1. \quad (1)$$

Тогда дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в области частот  $\omega \approx \omega_r$ , может быть получено из формулы, приведенной в [9], стр. 225, с использованием неравенства (1) и примет вид

$$\frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} k_x^2 + \frac{\omega^2 - \omega_H^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} k_z^2 - 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \frac{v_t^2 k_x^4}{\omega^2 - 4\omega_H^2} = 0, \quad (2)$$

где  $k_x, k_z$  — компоненты волнового вектора,  $v_t$  — тепловая скорость электронов. Предполагается, что распространение происходит в плоскости  $xz$  и  $\mathbf{H}_0$  направлено вдоль оси  $z$ . Из (2) легко получить выражения для компонент групповой скорости

$$v_{грx} = \frac{\omega}{k_x} \left( 6 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_x^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} - \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} \right), \quad (3)$$

$$v_{гpz} = - \frac{k_z \omega}{k_x^2} \frac{\omega^2 - \omega_H^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2}.$$

Из соотношений (2) и (3) можно установить, что

$$k v_{гр} = \frac{3\omega}{k_x} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2}, \quad (4)$$

откуда следует, что волны вблизи  $\omega \approx \omega_r$  являются прямыми при условии  $\omega_r > 2\omega_H$  ( $k v_{гр} > 0$ ). Если параметры плазмы таковы, что  $\omega_r < 2\omega_H$ , то распространяются обратные волны ( $k v_{гр} < 0$ ).

2. Пусть среда является плоскослоистой, причем вектор  $\nabla\omega_r$  направлен параллельно  $\mathbf{H}_0$ , т. е. вдоль оси  $z^*$ . Тогда закон Снеллиуса принимает вид

$$k_x = k_{x0} = \text{const}. \quad (5)$$

Из (3) с учетом (5) получаем уравнение

$$k_z^2 = \left( 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^4}{\omega^2 - 4\omega_H^2} - \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} k_{x0}^2 \right) \left( \frac{\omega^2 - \omega_H^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Из (6) легко установить условия прозрачности для волн, распространяющихся в неоднородной среде в заданном направлении при  $\omega \approx \omega_r$  а именно:

$$\omega^2 - \omega_r^2 > 0, \quad \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} < 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} \quad (\omega > 2\omega_H); \quad (7)$$

\* Предположение о том, что  $\nabla\omega_r \parallel \mathbf{H}_0$ , справедливо только в высокоширотной области ионосферы.



$$\omega^2 - \omega_r^2 < 0, \quad \left| \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} \right| > 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{|\omega^2 - 4\omega_H^2|} \quad (\omega < 2\omega_H). \quad (8)$$

Координаты точки отражения находятся из условия  $k_z^2 = 0$ , т. е. согласно (6) из равенства

$$3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что точку отражения имеют волны, определяемые как условиями (7), так и (8).

Из соотношений (3) и (8) видно, что при  $\omega_r < 2\omega_H$  и  $k_z > 0$

$$v_{\text{гр}z} < 0, \quad v_{\text{гр}x} > 0,$$

если

$$3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{\omega^2} \left| \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} \right| < \left| \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} \right| < 6 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{\omega^2} \left| \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} \right|, \quad (10)$$

$$v_{\text{гр}z} < 0, \quad v_{\text{гр}x} < 0,$$

если

$$\left| \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} \right| > 6 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{\omega^2} \left| \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} \right|. \quad (11)$$

Кроме того, заметим, что  $v_{\text{гр}x} = 0$  при условии

$$\frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} = 6 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2}. \quad (12)$$

Соотношения (10), (11) и (12) означают, что для случая  $\omega_r < 2\omega_H$  при заданной расстройке  $\Delta = \omega - \omega_r$  существует некоторый критический угол выхода  $\theta_{\text{кр}}$ , при котором  $v_{\text{гр}x} = 0$ ; при углах, меньших  $\theta_{\text{кр}}$ ,  $v_{\text{гр}x} > 0$ , при углах, больших  $\theta_{\text{кр}}$ ,  $v_{\text{гр}x}$  становится отрицательной. Однако всюду в этом случае остается выполненным соотношение  $k v_{\text{гр}} < 0$ , т. е. волны обратные. Вид поверхностей показателя преломления  $N(\theta)$ , приведенный на рис. 1 для  $\omega_r < 2\omega_H$ , подтверждает вышесказанное. Действительно, групповая скорость направлена по нормали к поверхности  $N(\theta)$  [11], и при  $\theta \approx \theta_{\text{кр}}$  компонента  $v_{\text{гр}x}$  обращается в нуль.

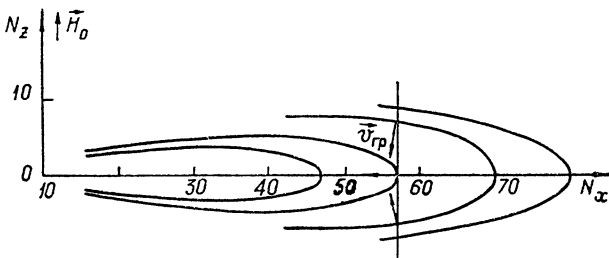


Рис. 1. Поверхности показателя преломления  $N(\theta)$  при  $\omega_r < 2\omega_H$  (параметры  $\omega_p = 4,5$  МГц,  $\omega_H = 3,9$  МГц,  $v_t \sim 3 \cdot 10^8$  км/с взяты из [2] (ионограмма на стр. 783, рис. 7)).

При  $\omega_r > 2\omega_H$  и  $k_z > 0$  из (3) и (7) следует

$$v_{\text{гр}z} < 0, \quad v_{\text{гр}x} > 0, \quad \text{если} \quad \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2} < 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v_t^2 k_{x0}^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2}, \quad (13)$$

т. е.  $v_{\text{гр}x} > 0, v_{\text{гр}z} < 0$  при любых углах выхода, удовлетворяющих условию прозрачности (7), причем волны являются прямыми. Поверхности показателя преломления для этого случая приведены на рис. 2.

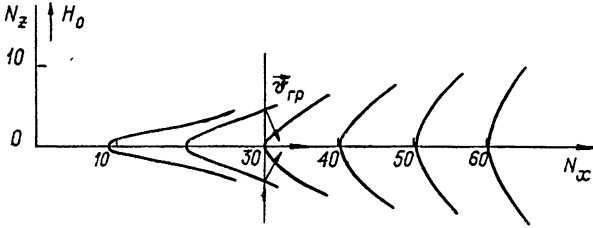


Рис. 2. Поверхности показателя преломления  $N(\theta)$  при  $\omega_r > 2\omega_H$  (параметры  $\omega_p = 7,2$  МГц,  $\omega_H = 3,0$  МГц,  $v_t \sim 3 \cdot 10^8$  км/с взяты из [1] (ионограмма на стр. 275, рис. 21)).

3. Рассмотрим случай, когда свойства среды меняются по линейному закону, а именно,

$$\omega_r^2 = \omega_{r0}^2 + \beta z, \quad (14)$$

где  $\omega_{r0}$  — значение гибридной частоты на уровне излучателя ( $z = 0$ ),

$\beta = \left( \frac{\partial \omega_r^2}{\partial z} \right)_{z=0}$ . Будем предполагать далее, что среда является плавно-

неоднородной, так что  $|\beta z| \ll \omega_{r0}^2$ .

Из соотношений (2), (3), (6) и (12) с учетом (14) следует, что компоненты групповой скорости  $v_{\text{гр}z}$  и  $v_{\text{гр}x}$  могут обратиться в нуль соответственно на уровнях  $z = z_{\text{max}}$  и  $z = z_1$ :

$$z_{\text{max}} = \frac{1}{\beta} \left[ (\omega^2 - \omega_{r0}^2) - 3 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} v_t^2 k_{x0}^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} \right]; \quad (15)$$

$$z_1 = \frac{1}{\beta} \left[ (\omega^2 - \omega_{r0}^2) - 6 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} v_t^2 k_{x0}^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4\omega_H^2} \right]. \quad (16)$$

Из (8), (10), (11), (15) и (16) следует, что  $|z_{\text{max}}| > |z_1|$ . Уравнение луча имеет вид

$$\frac{dx}{v_{\text{гр}x}} = \frac{dz}{v_{\text{гр}z}}. \quad (17)$$

Подставляя в (17) значения  $v_{\text{гр}x}$  и  $v_{\text{гр}z}$  из (3) при учете (6) и (14), после интегрирования получаем

\* Так как  $\frac{\partial \omega_r^2}{\partial z} = \frac{\partial \omega_p^2}{\partial z} + \frac{\partial \omega_H^2}{\partial z}$ , то можно считать, что  $\frac{\partial \omega_r^2}{\partial z} \approx \frac{\partial \omega_p^2}{\partial z}$ , т. е. гра-

диент магнитного поля можно не учитывать (имеется в виду ионосферная плазма).

$$x = \left[ \frac{2}{\beta} \sqrt{\beta z + b} \left( c - \frac{1}{3} \beta z \right) - d \right] \gamma^{-1}, \quad (18)$$

где

$$c = a + \frac{2}{3} b, \quad d = \frac{2\sqrt{b}}{\beta} \left( a + \frac{2}{3} b \right),$$

$$a = (\omega^2 - \omega_{r0}^2) - 6 \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} k_{x0}^2 v_i^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4\omega_{H0}^2},$$

$$b = 3 \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} v_i^2 k_{x0}^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 - 4\omega_{H0}^2} - (\omega^2 - \omega_{r0}^2),$$

$$\gamma = \left[ (\omega^2 - \omega_{H0}^2) \frac{\omega^2 - \omega_{p0}^2}{\omega^2} \right]^{1/2}.$$

Из уравнения траектории (18) можно найти координату  $x = x_{\max}$ , которая вместе с (15) дает положение точки отражения

$$x_{\max} = -d/\gamma. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что координате  $x_{\max}$  соответствует не только точка отражения  $z = z_{\max}$ , но и точка пересечения  $z = z_2$ , причем

$$z_2 = 3c/\beta. \quad (20)$$

Если  $|z_{\max}| > |z_2| > 0$ , то траектория имеет петлеобразный вид.

Используя соотношения (15), (16), (18), (19) и (20), можно получить критерии возникновения петлеобразных траекторий в зависимости от угла выхода. Введем параметр  $\psi$ , величина которого при заданных параметрах плазмы ( $\omega_{p0}$ ,  $\omega_{H0}$ ,  $\omega_{r0}$ ,  $v_i$ ) и фиксированной частоте волны зависит только от угла выхода, а именно,

$$\psi = \frac{(\omega^2 - \omega_{r0}^2)/\omega^2}{(\omega_{p0}^2/\omega^2)[v_i^2 k_{x0}^2/(\omega^2 - 4\omega_{H0}^2)]}. \quad (21)$$

Допустим, что удовлетворяется неравенство  $\omega_{r0} < 2\omega_{H0}$ . Тогда условие прозрачности (8) имеет вид  $\psi > 3$ . Координата точки отражения  $z_{\max} < 0$ . Если угол выхода будет увеличиваться, но параметр  $\psi$  меняется в пределах  $3 < \psi < 6$ , то траектория имеет обычный «квазипараболический» вид, поскольку  $z_{\max} < 0$ ,  $x_{\max} < 0$ ,  $z_1 > 0$  (см. рис. 3). При  $\psi = 6$ ,  $z_1 = 0$ , т. е. при угле выхода, удовлетворяющем условию  $\psi = 6$ , на уровне излучателя групповая скорость антипараллельна  $H_0$  (рис. 4). Если угол выхода таков, что  $6 < \psi < 12$ , то точка поворота  $z_1 < 0$ , точка пересечения  $z_2 > 0$ ,  $z_{\max} < 0$  и траектория имеет подковообразный вид (см. рис. 5). При  $\psi = 12$   $0 < |z_1| < |z_{\max}|$ , точка пересе-

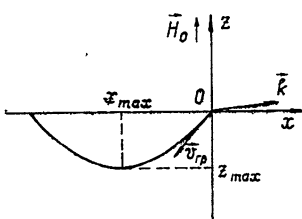


Рис. 3.

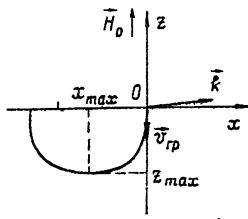


Рис. 4.

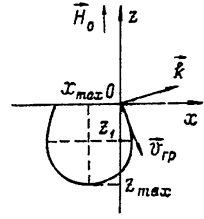


Рис. 5.

чения  $z_2 = 0$  и  $x_{\max} = 0$ ; точки выхода и входа луча совпадают (рис. 6). При дальнейшем увеличении угла выхода выполняется неравенство  $\psi > 12$ . При этом условии  $0 < |z_2| < |z_1| < |z_{\max}|$ ,  $x_{\max} < 0$  и траектория имеет петлеобразный вид (см. рис. 7).

В случае  $\omega_{r0} > 2\omega_{H0}$  условие прозрачности (7) имеет вид  $\psi < 3$ . При этом  $z_{\max} < 0$ , волна по-прежнему отражается от области, где концентрация электронов меньше, чем на уровне излучателя. Однако точки  $z_1$  и  $z_2$  лежат в области непрозрачности ( $|z_1|, |z_2| > |z_{\max}|$ ),  $x_{\max} > 0$ , поэтому возможны только обычные траектории «квазипараболического» типа.

Все изложенное выше относится к случаю  $k_{x0} > 0$ . При  $k_{x0} < 0$  траектории будут иметь вид, аналогичный приведенному на рис. 3—7, с заменой направления оси  $x$  на противоположное. Критерии существования различных типов остаются прежними. Если одновременно излучаются волны с  $k_{x0} > 0$  и  $k_{x0} < 0$ , то при  $\omega_r < 2\omega_H$  в точке приема могут оказаться два луча. (одна траектория петлеобразного типа, вторая — обычная). Этот результат может быть использован для интерпретации биений, наблюдаемых вблизи резонанса  $\omega \approx \omega_r$  при внешнем зондировании ионосферы [2, 4].

Из изложенного выше следует, что в случае  $\omega_r < 2\omega_H$  типы траекторий, возможных вблизи верхнего гибридного резонанса, аналогичны рассмотренным ранее в области частот  $\omega \approx \omega_p$ , если  $\omega_p > \omega_H$  [3, 12]. Существенной разницей является то, что при  $\omega \approx \omega_r$  и  $\omega_r < 2\omega_H$  распространяются обратные волны, а при  $\omega \approx \omega_p$  и  $\omega_p > \omega_H$  волны являются прямыми. Однако в обоих случаях возможны траектории петлеобразного типа [3, 7, 12] и критерии возникновения таких траекторий аналогичны.

В заключение автор благодарит Б. Н. Гершмана за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Proc. IEEE, 57, № 6, (1969) (русский перевод: Тематический выпуск. Зондирование ионосферы сверху, изд. Мир, М., 1969).
2. D. V. Muldrew, Radio Sci., 7, 779 (1972).
3. J. R. Mc Afee, J. Geophys. Res., 74, 802 (1969).
4. J. R. Mc Afee, J. Geophys. Res., 74, 6403 (1969).
5. Б. Н. Гершман, А. Е. Крупина, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 7, 981 (1973).
6. Б. Н. Гершман, А. Е. Крупина, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 10, 1461 (1974).
7. M. Petit, J. Bitoun, R. Feldstein, P. Graff and B. Higel, An. Telecom., 27 (1972).
8. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, 24, 659 (1953).
9. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
10. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
11. K. G. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, Cambridge Univ. Press., 1961.
12. А. Е. Крупина, В. А. Яшинов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 20, № 2, 183 (1977).

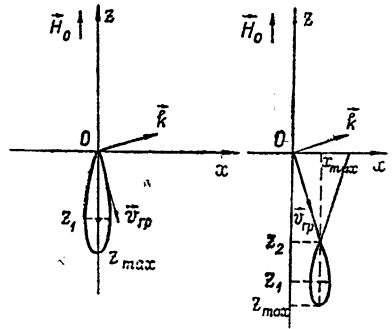


Рис. 6.

---

**SOME PECULIARITIES OF TRAJECTORIES OF PLASMA WAVES IN THE IONOSPHERIC PLASMA NEAR RESONANCE AT THE UPPER HYBRID FREQUENCY**

*A. E. Krupina*

In the geometrical optics approximation the problem of refraction of plasma in the inhomogeneous plasma in the frequency region of the upper hybrid resonance is considered. It is shown that in the case of quasi-transverse propagation the loop-like trajectories are possible when the upper hybrid frequency is less than the second harmonic of the gyro-frequency. The criteria of occurrence of such trajectories as a function of the plasma parameters and wave characteristics are obtained. When the upper hybrid frequency is larger than the second harmonic of the gyrofrequency, the trajectories have a usual „quasi—parabolic“ form. The results may be used to interpret the resonances observed on high-latitude ionograms in the topside sounding of the ionosphere.

---

УДК 621.371.25

## О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В ПОЛОСТИ ЗЕМЛЯ—ИОНОСФЕРА

*П. В. Блюх, Ю. П. Галюк, Э. М. Гюннинен,  
А. П. Николаенко, Л. М. Рабинович*

Рассмотрены собственные колебания электрического типа в полости Земля—ионосфера при учете высотных профилей плазменных параметров нижней ионосферы. Кроме известной ветви собственных частот, соответствующих шумановским резонансам (единицы и десятки герц), получены новые резонансные частоты в диапазоне единиц килогерц. В рамках той же модели ионосферы решена задача о вынужденных колебаниях полости. При учете подавления помех проведено сравнение резонансных параметров энергетических и взаимных спектров.

В широком диапазоне частот от единиц герц до единиц килогерц сферическая полость, образованная поверхностью Земли (проводимость порядка  $10^{10} \text{ с}^{-1}$ ) и нижней ионосферой (проводимость порядка  $10^4 \text{ с}^{-1}$ ), представляет собой электромагнитный резонатор.

Снизу резонансная полость ограничена сферой  $r = a$ , на которой скачок проводимости достигает значений порядка  $10^{10} \text{ с}^{-1}$ . Верхняя, диффузная граница образована плазмой нижней ионосферы, концентрация частиц которой возрастает с высотой. Ионосфера находится в постоянном магнитном поле Земли и представляет собой, вообще говоря, среду с двойным лучепреломлением [1, 2].

Решение задачи о собственных или вынужденных колебаниях резонатора при учете всех его особенностей наталкивается на непреодолимые трудности. Поэтому обычно используют упрощенные модели полости. Самой простой из них была модель идеального резонатора [3], в рамках которой Шуман получил следующий спектр собственных частот:

$$f_n = \frac{c}{2\pi a} \sqrt{n(n+1)}. \quad (1)$$

Здесь  $c$  — скорость света в вакууме,  $a$  — радиус Земли,  $n$  — номер резонансного мода. В частности,  $f_1 = 10,6$ ,  $f_2 = 18,3$ ,  $f_3 = 26,0 \text{ Гц}$  и т. д. Позднее был предложен целый ряд более сложных моделей, позволивших учесть те или иные особенности резонатора, например гиротропию его верхней стенки [4–10].

В настоящей работе мы не будем учитывать влияние геомагнитного поля и угловой неоднородности ионосферы, приводящих к снятию вырождения собственных частот. Основное внимание будет уделено колебаниям  $E$ -типа в резонаторе, ограниченном сверху изотропной и однородной по угловым координатам ионосферой, параметры которой изменяются с высотой.

Уже первые экспериментальные исследования показали, что наблюдаемые резонансные частоты 8, 14, 20, 26  $\text{Гц}$  [11–13] существенно отличаются от предсказанных в модели идеального резонатора. Указанное расхождение удалось устранить лишь при использовании моделей, учитывавших изменение проводимости ионосферы с высотой. Так, для

ступенчатых моделей [13, 14] удалось связать экспериментально наблюдаемые параметры с характеристиками профиля ионизации: высотами начала ступеней и их проводимостью. Параметры двухступенчатой модели можно определять по первым четырем резонансным частотам либо по резонансным частотам и добротностям первых двух модов колебаний [13]. Предпринимались попытки решить аналитически задачу о собственных значениях в рамках некоторого достаточно общего гладкого профиля нижней ионосферы. Параметры профиля предполагалось определять из сопоставления расчетных и экспериментальных данных. Первыми работами такого типа явились работы Галежа (см. [9] и библиографию к ней)\*.

Выбор модели того или иного типа при таком подходе, вообще говоря, произволен. Сопоставление результатов расчетов и эксперимента проводится по резонансным параметрам не более чем пяти мод, так как более высокие моды не наблюдаются устойчиво. Неудивительно, что «правильные» значения частот и добротностей могут быть получены в рамках самых не похожих друг на друга моделей. (В сферической системе координат при диэлектрической проницаемости  $\epsilon = \epsilon(r)$  для волн  $E$ -типа известны все высотные профили, позволяющие решить задачу в известных алгебраических или трансцендентных функциях [15].)

Очевидно, что требовать простого совпадения конечного числа расчетных и экспериментальных параметров недостаточно, необходимо также, чтобы выбранная модель правильно описывала известные из геофизики общие закономерности поведения  $\epsilon(r)$  при изменении высоты [10, 14, 19]. К сожалению, ни один из аналитических профилей [9, 15] этому условию не удовлетворяет.

В результате решение задачи о резонансных колебаниях полости Земля—ионосфера в рамках гладкого высотного профиля  $\epsilon(r)$  придется выполнять численно. Ниже мы опишем алгоритм такого решения при произвольном высотном профиле концентрации как электронов, так и ионов. В принципе, имея набор решений для различных профилей, основанных на тех или иных геофизических данных, и сопоставляя результаты расчетов с данными эксперимента, можно выбрать наиболее «реалистичный» профиль. Такой подход к решению поставленной задачи был впервые применен в работе [10], где резонатор Земля—ионосфера моделировался с помощью двумерной передающей линии.

Использование описываемого алгоритма в рамках одной из реалистичных моделей позволило, как будет показано в первой части настоящей работы, получить не только частоты шумановского резонанса, но и резонансные параметры колебаний высших типов.

Экспериментальные данные по шумановскому резонансу, с которыми сравниваются результаты расчетов, характеризуются некоторой погрешностью. Она связана не только с аппаратурой, но и с используемой экспериментальной методикой. Поэтому точность выбора высотного профиля ионосферы при использовании одной и той же экспериментальной установки существенным образом зависит от методики измерений и обработки данных. Во второй части работы с помощью моделирования на ЭВМ проводится сравнение различных методик измерений и указывается та, что дает наиболее достоверные результаты.

### СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ВОЛН $E$ -ТИПА

При решении задачи о собственных частотах свойства ионосферы будем учитывать с помощью комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon(r)$ , значения которой определяются электронной и ионной

\* Достаточно полное и подробное изложение результатов работ по шумановскому резонансу можно найти в монографии [28].

концентрациями и частотой соударений электронов с другими частицами. Для простоты задачу будем считать аксиально-симметричной, т. е.  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ . Тогда из системы уравнений Максвелла после введения

вектора Герца  $\Pi = \Pi e_r$ , где  $e_r$  — радиальный орт, получим [16]

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Pi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) + \left[ k^2 \varepsilon(r) - \sqrt{\varepsilon(r)} \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(r)}} \right) \right] \Pi = 0. \quad (2)$$

Здесь  $k = \omega/c$  — волновое число, предполагается зависимость от времени вида  $e^{-i\omega t}$ . Скалярная функция  $\Pi$  должна удовлетворять на нижней границе резонатора условию

$$\frac{\partial}{\partial r} \Pi = -ik \delta \Pi \Big|_{r=a}, \quad (3)$$

где  $\delta$  — приведенный поверхностный импеданс земной поверхности, а при  $r \rightarrow \infty$  — условию излучения.

Разделяя переменные в уравнении (2) и вводя сферический импеданс  $\delta_n(r)$  [17], равный

$$\delta_n(r) = \frac{1}{k \sqrt{\varepsilon^3(r)} \rho_n(r)} \frac{d}{dr} [\sqrt{\varepsilon(r)} r_n(r)], \quad (4)$$

приходим к уравнению вида

$$\frac{d}{dr} \delta_n(r) + ik \varepsilon(r) \delta_n^2(r) - ik - \frac{n(n+1)}{ikr^2 \varepsilon(r)} = 0. \quad (5)$$

Через  $\rho_n(r)$  обозначена радиальная функция, а величина  $n(n+1)$  — постоянная разделения. Индекс  $n$  — номер резонансного мода (зональное квантовое число [4–14]).

Граничные условия (3) принимают вид

$$\delta_n(a) = -\delta; \quad (6)$$

$$\delta_n(r_1) = \frac{1}{\varepsilon(r_1)} \sqrt{\varepsilon(r_1) - \frac{n(n+1)}{k^2 r_1^2}} \approx \sqrt{\frac{1}{\varepsilon(r_1)}}. \quad (7)$$

Условие (7) было получено на основе следующих физических соображений. Электромагнитные волны указанных частот проникают в ионосферу на глубины в несколько десятков километров. Поэтому естественно ожидать, что свойства плазмы на высотах, существенно больших толщины скин-слоя, не сказываются на резонансных частотах. Следовательно, начиная с некоторого  $r \geq r_1$ , можно положить  $\varepsilon(r) = \varepsilon(r_1) = \text{const}$ , тогда в этой области собственными функциями станут сферические функции Ханкеля первого рода (условие излучения), а так как их аргумент  $|kr \sqrt{\varepsilon(r)}| \gg 1$ , можно использовать асимптотическое представление и для интересующих нас не очень больших значений  $n$  получить (7).

Задача на собственные значения решалась численно методом последовательных приближений. Пусть  $k^l$  —  $l$ -е приближение к искомому собственному числу  $k$ , тогда  $l+1$ -е приближение, к Ньютону, равно

$$k^{l+1} = k^l - \frac{\delta_n(a; k^l) + \delta}{\frac{\partial}{\partial k} [\delta_n(a; k)]_{k=k^l}}. \quad (8)$$



Необходимое в (8) значение сферического импеданса  $\delta_n(a; k^l)$  на поверхности Земли находится из уравнения (5), которое интегрируется численно от высоты  $r = r_1$  до  $r = a$ . После определения  $k^{l+1}$  уравнение (5) опять интегрируется численно, в результате чего находится  $\delta_n(a; k^{l+1})$ , по которому строится  $k^{l+2}$  и т. д. Итерационный процесс останавливается, когда значения  $k^l$  и  $k^{l+1}$  отличаются на величину, меньшую заданной. Значения производной  $\frac{\partial}{\partial k} \delta_n(a; k)$  находятся точно так

же, как и значения  $\delta_n(a; k)$ , только дифференциальное уравнение и граничные условия для нее получают из (4), (6), (7) дифференцированием по  $k$ . Начальная высота  $r_1$  выбирается перебором, т. е. задача решается для нескольких  $r_1$ , а затем останавливаются на таком значении, при изменении которого результат решения в пределах заданной точности остается постоянным.

Прежде чем обсуждать результаты расчетов, приведенные в табл. 1, отметим, что частоты трехмерной полости Земля—ионосфера должны иметь три индекса  $\omega_{pnm}$ . Здесь  $m$  — азимутальное число, играющее существенную роль при отсутствии угловой симметрии резонатора [5–8].

В нашем случае  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$  и собственные числа не зависят от  $m$ , поэтому можно принять  $m = 0$ , а сам индекс опускать;  $n$  — зональное собственное число, равное числу волн колебаний, укладываемых вдоль земного экватора;  $p$  — «продольное» число, равное числу полуволн, укладываемых вдоль радиуса между точками  $a$  и эффективной точкой отражения радиоволн от ионосферы.

Для шумановских резонансных частот индекс  $p = 0$ , а индекс  $n$ , не равный нулю, называют номером мода. При этом радиальные функции  $\rho_n(r)$  очень медленно изменяются с  $r$ , поэтому волны называют нулевой  $E$ -волной или квази-ТЕМ-волной [10, 18]. Кроме решений с  $p = 0$  в полости Земля—ионосфера должны существовать и другие колебания. Наименьшей собственной частоте с  $p = 1$  соответствует половина длины волны, укладываемаяся вдоль высоты резонатора, порядка 100 км, откуда следует  $\omega_{1n}/2\pi = 3 \cdot 10^5/200 = 1500$  (Гц). По физической природе эти колебания отличаются от шумановских резонансов тем, что для них обегание вокруг Земли «необязательно». Резонансы носят «поперечный» характер, когда волны бегут вдоль радиуса и отражаются от Земли и ионосферы. В силу этого собственные числа  $\omega_{pn}$  при  $p \neq 0$  практически не зависят от  $n$  (см. табл. 1).

Изложенный метод расчета позволяет получить не только шумановские, но и частоты высших типов колебаний с  $p \neq 0$ , пока что не обнаруженных экспериментально\*.

Строго говоря, кроме резонансов волн типа  $E$ , в полости Земля—ионосфера должны наблюдаться резонансы  $H$ -волн, поляризация которых горизонтальна. Собственные частоты  $\tilde{\omega}_{pnm}$  этих волн также лежат в диапазоне килогерц, причем для них всегда  $p \neq 0$ . Полная последовательность резонансных частот полости Земля—ионосфера при фиксированных  $n$  и  $m$  удовлетворяет известному из электродинамики условию

$$\omega_{0nm} < \tilde{\omega}_{1nm} < \omega_{1nm} < \tilde{\omega}_{2nm} < \omega_{2nm} < \dots \quad (9)$$

\* Возможно, что такие резонансы были обнаружены в экспериментах НИРФИ (г. Горький) по нелинейным эффектам в нижней ионосфере, в которых на ионосферу падало мощное излучение КВ диапазона, модулированное частотой от 2 до 7 кГц [24]. Тогда максимум принятого НЧ сигнала на частоте 2,5 кГц может объясняться возбуждением «поперечных» резонаторов полости.

Таблица I

Результаты решения задачи о собственных частотах резонатора Земля—ионосфера  
и их сопоставление с экспериментальными данными

n	1		2		3		4		5		
	$f_{p1}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{p1}$	$f_{p2}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{p2}$	$f_{p3}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{p3}$	$f_{p4}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{p4}$	$f_{p5}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{p5}$	
0	7,80	4,63	13,79	5,96	19,73	6,55	25,68	6,83	31,67	6,95	
1	2005,70	9,04	2005,74	9,04	2005,81	9,04	2005,91	9,04	2006,02	9,04	
2	4063,87	9,30	4063,89	9,30	4063,93	9,30	4063,97	9,30	4064,04	9,30	
3	6116,76	10,37	6116,78	10,37	6116,80	10,37	6116,83	10,37	6116,88	10,37	
Ссылка		$f_{01}, \Gamma\text{ц}$	$f_{02}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{02}$	$f_{03}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{03}$	$f_{04}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{04}$	$f_{05}, \Gamma\text{ц}$	$Q_{05}$	
Эксперимент		7,8	14,1	4,5	20,3	5	26,4	5,5	32,5	6	
		8,0	14,0	5	20,0	5	26,5	6	—	—	
		7,96	14,1	—	20,2	—	26,1	—	—	32,7	—
		7,85	13,82	4,95	20,0	4,89	26,1	5,26	—	31,9	5,34

Теория

Эксперимент

Первая частота в этой последовательности соответствует шумановскому резонансу, а остальные — «поперечным» резонансам  $H$ - и  $E$ -волн.

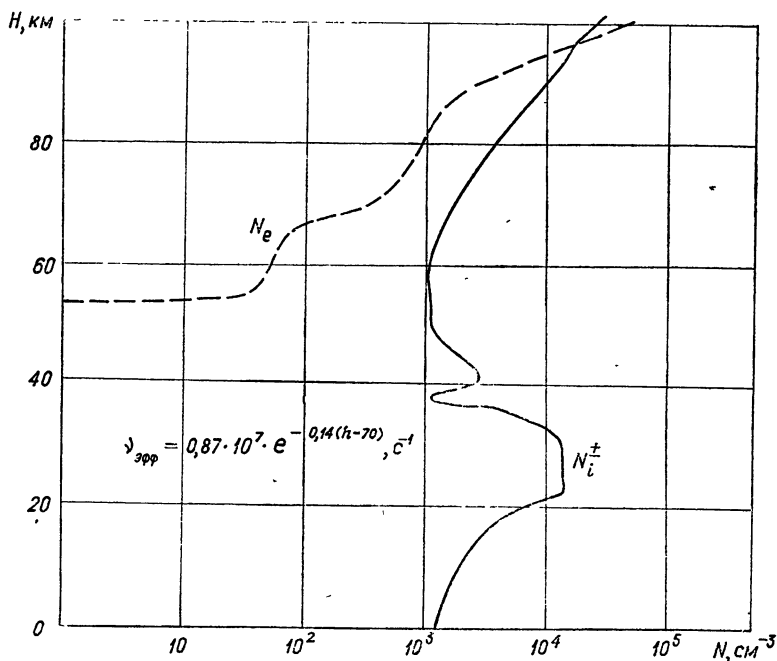


Рис. 1.

На рис. 1 приведены графики высотных профилей концентрации электронов и ионов нижней ионосферы, использованные нами в расчетах. С одной стороны, графики согласуются с известными моделями нижней ионосферы [1, 2, 10, 19], а с другой, — они дают значения частот и добротностей, близкие к экспериментальным [10–14] (см. табл. 1, где представлены результаты расчетов и экспериментальные данные).

#### ФИЛЬТРАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Из-за больших потерь в полости Земля—ионосфера периодические колебания резонансных частот не наблюдаются. Обычно резонансы обнаруживают по максимумам спектральной плотности естественных радишумов, возбуждаемых электромагнитным излучением грозových разрядов. При этом частоты максимумов в энергетическом спектре СНЧ шумов отождествляют с резонансными частотами, а относительную ширину резонансных пиков связывают с добротностью резонатора.

При таком определении параметров резонанса существенную роль могут сыграть помехи [10, 20, 21], т. е. естественные или искусственные СНЧ сигналы, не связанные с резонансными явлениями. К помехам относятся наводки от линий электропередач и телеграфных линий, колебания заряда антенны, вызванные ветром, различные электростатические наводки и т. п. [20, 21]. Помехи, попадая на вход приемника, регистрируются вместе с резонансным сигналом

$$S(t) = u(t) + n(t). \quad (10)$$

Здесь  $S(t)$  — регистрируемый сигнал,  $u(t)$  — резонансный сигнал,  $n(t)$  — помеха.

Легко видеть, что в этом случае энергетический спектр сигнала состоит из суммы спектров помехи и резонансного сигнала\*,

$$G(f) = G_{\text{рез}}(f) + N(f), \quad (11)$$

где энергетический спектр резонансного сигнала равен

$$G_{\text{рез}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t)u(t+\tau)} e^{2\pi i f \tau} d\tau, \quad (12)$$

а энергетический спектр помехи

$$N(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{n(t)n(t+\tau)} e^{2\pi i f \tau} d\tau. \quad (13)$$

Черта сверху означает усреднение по времени  $t$ .

Обычно помехи составляют от 0,5 до 0,8 уровня резонансного сигнала [6, 10, 20, 21]. На рис. 2 показаны расчетные спектры: резонансный спектр  $G_{\text{рез}}(f)$  — кривая 2, спектр помех  $N(f)$  — кривая 3 и результирующий спектр  $G(f)$  — кривая 4.

При решении задачи о возбуждении резонатора была принята следующая модель. Параметры полости Земля—ионосфера — те же, что и для однородной задачи (см. рис. 1). В качестве источников электромагнитного излучения СНЧ диапазона были выбраны вертикальные взаимно независимые случайные грозовые разряды, равномерно распределенные по поверхности планеты. Спектр источников от частоты не зависел. Предполагалось, что спектр помех гладкий, а на резонансных частотах выполняется соотношение

$$N(f) \approx 0,8 \cdot G_{\text{рез}}(f). \quad (14)$$

Как видно из рис. 2, наличие помех «приподнимает» энергетический спектр резонансного сигнала  $G_{\text{рез}}(f)$  над осью частот, что приводит к ошибкам при определении добротностей  $Q_{0n}$  (см. табл. 2). Для подав-

Таблица 2

Резонансные параметры, найденные из спектров рис. 2.

Тип модели $p = 0$	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$	
	$f, \Gamma\mu$	$Q$	$f, \Gamma\mu$	$Q$	$f, \Gamma\mu$	$Q$	$f, \Gamma\mu$	$Q$	$f, \Gamma\mu$	$Q$
Исходная модель	7,8	4,63	13,8	5,96	19,7	6,56	25,7	6,83	31,7	6,95
Энергетический спектр без помех	7,8	4,30	13,8	5,35	19,9	5,80	25,9	6,27	32,0	6,03
Энергетический спектр с помехами	7,8	3,40	13,8	3,31	19,9	3,98	25,9	4,48	31,9	4,70
Взаимный спектр, помеха подавлена	7,8	4,73	13,8	5,40	20,0	5,72	25,9	6,30	32,0	6,35

ления помех и повышения достоверности экспериментальных результатов можно использовать различие в радиусах корреляции помех и резонансных сигналов [6, 10]. Действительно, резонансные сигналы имеют радиус корреляции, сравнимый с длиной земного экватора, а помехи, имеющие нерезонансную природу, обладают значительно меньшим радиусом корреляции. Поэтому при приеме сигналов на расстояниях,

\* Здесь и далее речь идет о шумановских резонансах.

больших радиуса корреляции помех, но меньших длины волны наивысшего исследуемого мода, получим

$$S_1(t) = u_1(t) + n_1(t); \quad (15)$$

$$S_2(t) = u_2(t) + n_2(t). \quad (16)$$

Здесь  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  — резонансные сигналы, а  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  — взаимно независимые помехи в первом и втором пунктах.

Проведя корреляционную обработку сигналов, т. е. строя их взаимный спектр [22], получим

$$G_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_1(t)S_2(t+\tau)} e^{2\pi i f \tau} d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_1(t)u_2(t+\tau)} e^{2\pi i f \tau} d\tau. \quad (17)$$

Из формулы (17) видно, что во взаимном спектре помехи полностью подавляются.

В отличие от энергетического спектра спектр взаимный является, вообще говоря, комплексной функцией частоты. В выбранной нами модели возбуждения он оказывается действительным, но не положительно определенным. Для разнеса пунктов наблюдения на 5000 км взаимный спектр имеет вид, показанный на рис. 2 (кривая 1). Перемена знака  $G_{12}(f)$  при  $f \approx 17$  Гц означает, что в выбранной модели на частотах, больших 17 Гц, колебания в первом и втором пунктах происходят в противофазе!

Приведенные данные позволяют сделать следующие выводы. В полости Земля—ионосфера могут существовать резонансные колебания нескольких типов. Наини́зшая ветвь собственных частот—это шумановские резонансы. Собственные частоты высших типов лежат в диапазоне единиц килогерц и практически не зависят от зонального квантового числа  $n$ .

При сопоставлении расчетных и экспериментальных данных по шумановскому резонансу следует учитывать искажающее влияние помех, которое может быть уменьшено за счет когерентного приема сигналов в далеко разнесенных пунктах и последующей корреляционной обработке.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. Я. Л. Альперт, Распространение электромагнитных волн и ионосфера, изд. Наука, М., 1972.

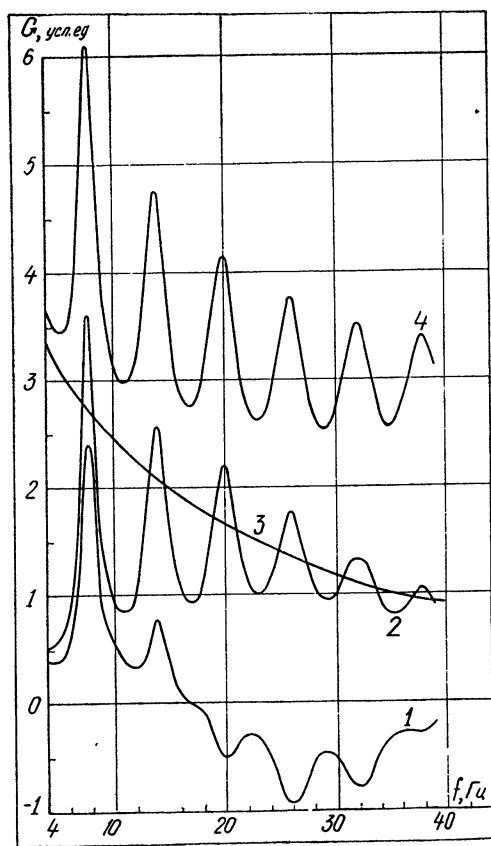


Рис. 2.

3. W. O. Schumann, *Z. Naturforsch.*, **7a**, 149 (1952).
4. D. B. Large and J. R. Wait, *Radio Sci.*, **2**, 695-(1967).
5. П. В. Блюх, А. П. Николаенко, Ю. Ф. Филиппов, *Геомagnetизм и аэрoнoмия*, **8**, 250 (1968).
6. П. В. Блюх, В. Н. Бормотов, В. М. Конторович, Б. В. Лазебный, А. П. Николаенко, Н. А. Сапогова, Ю. Ф. Филиппов, В. Ф. Шульга, *Препринт № 10, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1971.*
7. А. П. Николаенко, Л. М. Рабинович, *Препринт № 36, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1974.*
8. D. B. Large and J. R. Wait, *J. Geophys. Res.*, **72**, 5395 (1967).
9. J. Galejs, *J. Res. NBS*, **69D** (8), 1043 (1965).
10. T. Madden and W. Thompson, *Rev. Geophys.*, **3**, 211 (1965).
11. M. Balser and C. A. Wagner, *Nature*, **188**, 638 (1960).
12. M. Balser and C. A. Wagner, *J. Geophys. Res.*, **67** (10), 4081 (1962).
13. D. Li. Jones, *J. Geophys. Res.*, **69** (19), 4037 (1964).
14. D. Li. Jones, *J. Atm. Terr. Phys.*, **29**, 1037 (1967).
15. A. L. Sharaf, *Proc. Cambr. Phyl. Soc.*, **66**, 119 (1969).
16. H. Bremner, *Terrestrial Radio Waves*, *Elsvier Publ. Co.*, 1949.
17. Э. М. Гюннинен, Ю. П. Галюк, *Проблемы дифракции и распространения волн*, вып. 11, изд. ЛГУ, Л., 1972.
18. Дж. А. Стреттон, *Теория электромагнетизма*, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
19. *Геомagnetизм и высокие слои атмосферы*, т. 2, под ред. Н. П. Беньковой и А. Д. Дривинга, ВИНТИ, М., 1975.
20. J. E. Lokken and J. A. Shand, *Canad. J. Phys.*, **42**, 1902 (1964).
21. J. A. Shand, *Canad. J. Phys.*, **44**, 449 (1966).
22. Б. Р. Левин, *Теоретические основы статистической радиотехники*, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1969.
23. *Флуктуации электромагнитного поля Земли в диапазоне СНЧ*, под ред. М. С. Александрова, изд. Наука, М., 1972.
24. Н. А. Митяков, *Тезисы лекций IV Международной школы по физике ионосферы (Сочи, 1976 г.)*, ИЗМИРАН СССР, М., 1976.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
17 ноября 1975 г.

## ON RESONANCE PHENOMENA IN THE EARTH—IONOSPHERE CAVITY

*P. V. Bliokh, Yu. P. Galyuk, E. M. Hänninen, A. P. Nikolaenko,  
L. M. Rabinovich*

The natural TM oscillations of the Earth—ionosphere cavity are considered with an account of the height dependence of plasma parameters in the lower ionosphere. In addition to the known branch of eigen-values corresponding to ELF (Schumann) resonances some new resonance branches have been obtained in the lower VLF range. In the framework of the same ionospheric model excitation of the cavity at ELF is considered and a comparison is made of the resonance parameters as derived from power and cross spectra in the presence of local interferences.

УДК 533.951

## СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПАДНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ НЕЛИНЕЙНЫМ СДВИГОМ ЧАСТОТЫ ВОЛН

А. Г. Литвак, А. М. Фейгин

В приближении заданного поля волны накачки рассмотрена стабилизация параметрической распадной неустойчивости (обычной и модифицированной) колебаний с детерминированной фазой. Стабилизация происходит вследствие нарушения условий синхронизма взаимодействующих волн из-за нелинейного смещения частоты ленгмюровской волны. В качестве механизмов возникновения нелинейного сдвига частоты учитывались стрикционная нелинейность и взаимодействие плазменной волны с резонансными частицами.

Среди различных нелинейных факторов, определяющих уровень насыщения плазменных колебаний при параметрической неустойчивости, связанных с генерацией новых волн и перекачкой энергии по спектру, существенную роль может играть и такой фактор, как нарушение условий синхронизма взаимодействующих волн вследствие нелинейного сдвига частоты. Подобная стабилизация в случае параметрической неустойчивости колебаний со случайными фазами рассматривалась в [1, 2]. Ниже мы исследуем аналогичный процесс для распадной неустойчивости (обычной и модифицированной) волн с регулярной фазой. Ограничиваясь выяснением принципиальной возможности стабилизации такого типа, мы рассмотрим задачу в простейшем трехволновом приближении и в предположении заданной амплитуды волны накачки.

1. Исходные уравнения для случая модифицированной распадной неустойчивости представим в виде

$$-2i \frac{d\mathcal{E}_1}{d\tau} = n^* \mathcal{E}_0 \exp \left[ i \left( \Omega \tau - \int_0^\tau \delta \omega_1 dt' \right) \right] + 2i \gamma_l \mathcal{E}_1, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 n}{d\tau^2} + 2\gamma_s \frac{dn}{d\tau} + \Omega_s^2 n = -\Omega_s^2 \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* \exp \left[ i \left( \Omega \tau - \int_0^\tau \delta \omega_1 dt' \right) \right],$$

где  $\mathcal{E}_{0,1} = \frac{E_{0,1}}{E_{кр}}$ ,  $E_0$  — заданная амплитуда однородного поля накачки

$E_0 \exp(i\omega_0 t)$ ,  $E_1$  — медленная однородная амплитуда плазменной волны

$E_1(t) \exp[i(\omega_1 t - kx)]$ ,  $E_{кр}^2 = \frac{2(T_e + T_i)\omega_0 \omega_1 m}{e^2}$ ,  $\frac{\delta n}{N_0} = n e^{ikx}$ ,  $\delta n$  — малые

возмущения концентрации частиц плазмы,  $N_0$  — невозмущенная концентрация,  $\Omega = \omega_0 - \omega_1$ ,  $\delta \omega_1(|\mathcal{E}_1|)$  — нелинейный сдвиг частоты ленгмюровских колебаний; все частоты и декременты нормированы на частоту накачки  $\omega_0 \approx \omega_{pe}$ , и введено безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$ . В урав-

нениях (1) с помощью представления  $\mathcal{E}_1 = a_1(\tau) \exp(i\varphi_1(\tau))$ ,  $n = s(\tau) \exp(i\varphi_s(\tau))$ ,  $\mathcal{E}_0 = a_0$  перейдем к действительным амплитудам и фазам взаимодействующих волн. В результате, разделяя действительные и мнимые части (1), получим

$$\dot{a}_1 = -\frac{1}{2} s a_0 \sin \theta - \gamma_l a_1,$$

$$2a_1 \dot{\varphi}_1 = s a_0 \cos \theta,$$

$$\ddot{s} - s \dot{\varphi}_s^2 + 2\gamma_s \dot{s} + \Omega_s^2 s = -\Omega_s^2 a_0 a_1 \cos \theta, \quad (2)$$

$$2\dot{s} \dot{\varphi}_s + s \ddot{\varphi}_s + 2\gamma_s s \dot{\varphi}_s = -\Omega_s^2 a_0 a_1 \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = \Omega - \delta\omega_1 - \dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}_1.$$

Найдем стационарные состояния системы, для чего положим в (2)  $\dot{a}_1 = \dot{s} = \dot{\theta} = \ddot{\varphi}_s = 0$ . Разрешая полученные уравнения в предельном случае

$$\frac{\gamma_s^2}{\Omega_s^2} \frac{\gamma_n^2}{\gamma_l \gamma_s} \ll 1, \quad (3)$$

соответствующем распадному взаимодействию, имеем следующие выражения для стационарных значений амплитуд взаимодействующих волн и разности фаз колебаний:

$$\sin \theta_{\text{ст}} = \left( \frac{\gamma_s \gamma_l}{\gamma_n^2} \right)^{1/2},$$

$$\delta\omega_1(a_{1\text{ст}}) = -(\gamma_s + \gamma_l) \left( \frac{\gamma_n^2}{\gamma_s \gamma_l} - 1 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$s_{\text{ст}}^2 = \Omega_s^2 \frac{\gamma_l}{\gamma_s} a_{1\text{ст}}^2,$$

где  $\gamma_n = \frac{\Omega_s^{1/2} a_0}{2} = \frac{\omega_{pe}}{2} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/4} \left( \frac{E_0^2}{8\pi N_0 T_e} k d_e \right)^{1/2}$  — нелинейный инкремент

распадной неустойчивости,  $d_e$  — дебаевский радиус электронов.

В обратном предельном случае модифицированной распадной неустойчивости  $\left( \frac{\gamma_s^2}{\Omega_s^2} \frac{\gamma_n^2}{\gamma_s \gamma_l} \gg 1 \right)$  имеем

$$\sin^2 \theta_{\text{ст}} = \left( \frac{2\gamma_s}{\Omega_s} \frac{\gamma_l \gamma_s}{\gamma_n^2} \right)^{2/3},$$

$$\delta\omega_1(a_{1\text{ст}}) - \Omega = -(\gamma_l + 2\gamma_s) \left( \frac{\Omega_s}{2\gamma_s} \frac{\gamma_n^2}{\gamma_l \gamma_s} \right)^{1/3}, \quad (5)$$

$$s_{\text{ст}}^2 = \Omega_s \frac{\gamma_l}{\gamma_s} \left( \frac{\gamma_n^2}{\gamma_s \gamma_l} \sin^2 \theta_{\text{ст}} \right)^{-1} a_{1\text{ст}}^2.$$



2. Остановимся на характере выхода амплитуд колебаний на стационарный уровень в рассматриваемом случае стабилизации нелинейной расстройкой. Для распадной неустойчивости ленгмюровских колебаний со случайными фазами этот выход при стабилизации нелинейным сдвигом частоты происходит монотонно во времени [3]. В случае детерминированных фаз характер выхода на стационар определяется величинами

$$\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} = \frac{\gamma_n^2}{\gamma_l \gamma_s} \text{ и } \frac{\gamma_l}{\gamma_s}. \text{ Мы покажем это на примере распадной}$$

неустойчивости. Для этого линеаризуем систему уравнений (2) вблизи стационарного состояния (4) и учтем условие (3). Для большей наглядности рассмотрим наиболее простые предельные случаи  $\frac{\gamma_l}{\gamma_s} \approx 1$

и  $\left(\frac{\gamma_l}{\gamma_s}\right)^{\pm 1} \ll 1$ , хотя для распадной неустойчивости задача может быть

решена для произвольных значений  $\frac{\gamma_l}{\gamma_s}$ . В обоих предельных случаях найденное в фазовом пространстве  $(a_1, s, \theta)$  состояние равновесия (4) устойчиво. При близких значениях декрементов ленгмюровской и ионно-звуковой волн  $\gamma_s \approx \gamma_l = \gamma_n$  выход на стационар вблизи порога неустой-

чивости  $1 < \frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} < \frac{\alpha + 1/2}{\alpha}$  происходит аperiodически ((4) — устойчи-

вый узел), но уже при

$$\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} > \frac{\alpha + 1/2}{\alpha} \quad (6)$$

найденное состояние равновесия (4) превращается в устойчивый фокус и насыщение уровня происходит немонотонно. Период появившихся осцилляций

$$T = 2\pi \left( \frac{\alpha}{2} \delta \omega_{\text{ICT}}^2 - \gamma_n^2 \right)^{-1/2} = 2\pi \gamma_n^{-1} (2\alpha)^{-1/2} \left( \frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - \frac{\alpha + 1/2}{\alpha} \right)^{-1/2}, \quad (7)$$

а характерное время их затухания  $\tau_{\text{зат}} = 2\pi \gamma_n^{-1}$ , поэтому при

$$\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} \gg \frac{\alpha + 1}{\alpha} \quad (8)$$

осцилляции будут слабозатухающими. Здесь  $\alpha = \delta \omega_{\text{ICT}}^{-1} \left( a_1 \frac{d \delta \omega_1(a_1)}{da_1} \right)_{a_1 = a_{\text{ICT}}}$  или  $\delta \omega_1(a_1) \sim a_1^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

В случае сильно отличающихся декрементов уровень насыщается немонотонно при всех значениях  $E_0^2 > E_{\text{пор}}^2$ . Время затухания осцилляций  $\tau_{\text{зат}} = 2\pi (\max(\gamma_l, \gamma_s))^{-1}$ , их период

$$T = 2\pi \begin{cases} (\alpha + 1)^{-1/2} |\delta \omega_{\text{ICT}}|^{-1} = \gamma_l^{-1} \left[ (\alpha + 1) \left( \frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right) \right]^{-1/2} & (\gamma_l \gg \gamma_s) \\ |\delta \omega_{\text{ICT}}|^{-1} = \gamma_s^{-1} \left( \frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right)^{-1/2} & (\gamma_s \gg \gamma_l) \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, при  $E_0^2/E_{\text{пор}}^2 \gg \beta$  осцилляции амплитуд  $s$  и  $a_1$  будут слабозатухающими и в этом предельном случае. Здесь

$$\beta = \begin{cases} \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} & (\gamma_l \gg \gamma_s) \\ 2 & (\gamma_s \gg \gamma_l) \end{cases} \quad (10)$$

3. Чтобы получить выражение для стационарной амплитуды колебаний, необходимо рассмотреть конкретные механизмы появления нелинейной расстройки, такие, как перераспределение плотности плазмы под действием силы Миллера, сдвиг частоты из-за электронной нелинейности и взаимодействие продольной волны с резонансными частицами. Первый из них является, по-видимому, наиболее эффективным, но величина сдвига существенно зависит от структуры поля, так как связана с переносом плотности. Для оценок ограничимся стационарным выражением для сдвига частоты в поле ограниченного пучка плазменных волн:

$$\delta\omega_{\text{ст}} = -\omega_{pe} \frac{E_1^2}{8\pi N_0(T_e + T_l)}. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (4) дает выражение для стационарной амплитуды в случае распадной неустойчивости

$$\frac{E_1^2}{8\pi N_0 T_e} = \frac{\gamma_l + \gamma_s}{\omega_{pe}} \left( \frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (12)$$

из которого следует, что при  $\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \gg 1$  в неизотермической плазме

амплитуда плазменных колебаний может заметно превысить амплитуду волны накачки.

Как известно, электронная нелинейность в одномерном случае не приводит к сдвигу частоты монохроматических ленгмюровских колебаний [4], поэтому мы остановимся на рассмотрении эффектов, связанных с взаимодействием плазменных волн с резонансными частицами, которые могут играть заметную роль в случае достаточно коротковолновых колебаний, если размер области параметрической неустойчивости велик (не успевает произойти перераспределение плотности плазмы). Для оценки роли перестройки функции распределения резонансных частиц\* можно воспользоваться соотношением

$$\delta\omega_1 = - \left( \frac{2eE_1}{mk} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2} \right)_{v=\omega_1/k} \left( \frac{\partial \epsilon_l}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_1}^{-1}, \quad (13)$$

полученным в [6] для монохроматической плазменной волны с постоянной амплитудой. Условие применимости (13) в случае параметриче-

\* Как показывают некоторые машинные эксперименты (см., например, [5]), эффекты захвата частиц в потенциальные ямы плазменных колебаний играют определяющую роль при параметрической неустойчивости в сильном поле  $E_0^2/4\pi N_0 T_e \gg 1$ .

ской неустойчивости\* является требование медленности роста плазменной волны [7]:

$$\gamma_p \tau_b \ll 1, \quad (14)$$

$\gamma_p$  — инкремент неустойчивости,  $\tau_b = \left(\frac{m}{ekE_1}\right)^{1/2}$  — характерный период колебаний захваченных частиц, Подстановка (13) в (4) для случая максвелловской равновесной функции распределения  $f_0(v)$  дает

$$\frac{E_1^2}{8\pi N_0 T_e} = \pi^2 (kd_e)^{18} \exp\left[\frac{2}{(kd_e)^2}\right] \left(\frac{\nu}{2\omega_{pe}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} kd_e\right)^4 \left(\frac{E_0^2}{E_{пор}^2} - 1\right)^2, \quad (15)$$

где  $\nu$  — частота столкновений электронов с другими частицами и учтено, что при условии (14) затухание Ландау ленгмюровской волны на электронах плазмы  $\gamma_L = 0$ ,  $\gamma_l = \frac{\nu}{2}$ ,  $\gamma_s = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pe} \frac{m}{M} kd_e$ .

Соотношения для  $E_1^2$  в случае модифицированного распада могут быть получены аналогично:

$$\frac{E_1^2}{8\pi N_0 (T_e + T_l)} = \frac{\gamma_l + 2\gamma_s}{\omega_{pe}} \left(\frac{\Omega_s}{2\gamma_s} \frac{E_0^2}{E_{пор}^2}\right)^{1/3} - \frac{\Omega}{\omega_{pe}}; \quad (16)$$

$$\frac{E_1^2}{8\pi N_0 T_e} = 8\pi^2 (kd_e)^{18} \exp\left[\frac{2}{(kd_e)^2}\right] \left[\frac{\gamma_l + 2\gamma_s}{\omega_{pe}} \left(\frac{\Omega_s}{2\gamma_s} \frac{E_0^2}{E_{пор}^2}\right)^{1/3} - \frac{\Omega}{\omega_{pe}}\right]^4. \quad (17)$$

Выражение (16) соответствует стрикционному механизму возникновения нелинейной расстройки, а выражение (17) — взаимодействию продольной волны с резонансными электронами.

Сравнение выражений (12) и (15) показывает, что сдвиг частоты из-за перестройки функции распределения электронов, резонансно взаимодействующих с волной, играет заметную роль при неустойчивости плазменных колебаний в области близких к максимальным линейных расстройкам  $\omega_0 - \omega_1 = kv_s$  и декрементов ( $kd_e \geq 0,2$ ).

Вернемся к полученным в разд. 2 условиям немонотонного насыщения уровня взаимодействующих волн. Для нелинейной перестройки частоты из-за гидродинамических эффектов (как, например, в случае стрикционной нелинейности) в первом приближении по параметру нелинейности  $\frac{E_1^2}{4\pi N_0 T_e} \ll 1$   $\alpha=2$ , а если нелинейный сдвиг частоты обязан своим появлением кинетическим эффектам (типа взаимодействия плазменной волны с резонансными электронами), то  $\alpha = 1/2$ . Для обоих указанных значений  $\alpha$ , как это следует из условий (8) и (10), уже при незначительном превышении накачки порога неустойчивости,

$$E_0^2 > \left(\frac{4}{3} \mp 3\right) E_{пор}^2,$$

$\tau_{зат} \approx T$ , а при еще больших накачках колебания амплитуд ленгмюровской и ионно-звуковой волн вблизи стационарных значений становятся слабозатухающими:  $\tau_{зат} \gg T$ .

\* Заметим также, что однородное поле высокочастотной волны накачки при разумной величине поля плазменной волны не влияет на движение захваченных ленгмюровской волной электронов, так как для этого необходимо [8]  $\omega_0 \approx \omega_{pe} \lesssim \tau_b^{-1}$ .

Таким образом, проведенное в трехволновом приближении рассмотрение показывает, что нелинейный сдвиг частоты взаимодействующих волн, связанный со стрикционной нелинейностью или с захватом резонансных частиц электрическим полем ленгмюровских колебаний, может эффективно стабилизировать распадную и модифицированную распадную неустойчивости, приводя к выходу возбужденных колебаний из резонанса с накачкой. В однородной среде такой выход должен сопровождаться попаданием в область резонанса других, ранее устойчивых колебаний. Однако при динамической параметрической неустойчивости происходит дополнительная мелкомасштабная стратификация плазмы под действием силы Миллера, существенно затрудняющая возбуждение колебаний с пространственными масштабами, не кратными масштабу первоначально неустойчивых колебаний. Именно поэтому стабилизация нелинейным сдвигом должна играть существенную роль и на нелинейной стадии модуляционной неустойчивости, на что, в частности, обращается внимание в работах [9-11].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, Письма в ЖЭТФ, 16, 308 (1972).
2. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, ЖЭТФ, 65, 1880 (1973).
3. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, ЖЭТФ, 66, № 3 (1974).
4. J. Dawson, Phys. Rev., 113, 383 (1959).
5. W. L. Krueger and J. M. Dawson, Physics of Fluids, 15, 446 (1972).
6. G. J. Morales and T. O'Neil, Phys. Rev. Lett., 28, 417 (1972).
7. Д. Д. Рютов, В. Н. Худик, ЖЭТФ, 64, 1252 (1973).
8. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, изд. Наука, М., 1972.
9. K. Nishikawa, Y. C. Lee and P. K. Kaw, Physics of Fluids, 16, 1380 (1973).
10. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, Т. Н. Федосеева, Г. М. Фрайман, Письма в ЖЭТФ, 20, 544 (1974).
11. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Ю. С. Сигов, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Физика плазмы, 1, 10 (1975).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию  
12 декабря 1975 г.

#### STABILIZATION OF DECAY INSTABILITIES BY NONLINEAR SHIFT OF WAVE FREQUENCY

*A. G. Litvak, A. M. Feygin*

The stabilization of a parametric decay instability (ordinary and modified) of oscillations with the determined phase is considered under the approximation of the given field of the pump wave. The stabilization occurs due to violation of the synchronism conditions of interacting waves because of a nonlinear shift of the Langmuir wave frequency. The striction nonlinearity and interaction of a plasma wave with resonant particles was taken into account, as the mechanisms of occurrence of the nonlinear frequency shift.

УДК 538.56 : 519.25

## ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ВОЛН В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ РЕЛЕЙНОГО ТИПА

*В. Ф. Марченко*

Найдено решение стационарной задачи о генерации второй гармоники в среде с нелинейностью релейного типа. Основным предположением при несмещенной релейной характеристике является постоянство фаз взаимодействующих волн. Проанализированы случаи попутного и встречного синхронизма основной волны и гармоники.

Анализ взаимодействия волн (колебаний) двух и более частот в системе, нелинейность которой аппроксимируется отрезками ломаных кривых, представляет сложную задачу [1-3]. Применение метода медленно меняющихся амплитуд оказывается малоэффективным, поскольку в общем случае не удается получить укороченные уравнения в аналитической форме. Это связано с тем, что пределы интегралов, определяющих отклик нелинейных членов на соответствующей частоте, сами являются решениями алгебраических уравнений высокого порядка. Поясним ситуацию на примере системы, в которой взаимодействуют лишь две волны кратных частот  $\omega$  и  $2\omega$ . Пусть  $v_1$  — точка стыка двух ветвей функции, аппроксимирующей нелинейность среды. При интегрировании по быстрой переменной  $\theta$  необходимо знать те значения  $\theta_i$ , которые соответствуют переходу с одной ветви на другую, т. е. скачкам подынтегральной функции. Значения  $\theta_i$  определяются уравнением периодов, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$A_1 \cos \theta + A_2 \cos (2\theta + \Delta\varphi) = v_1, \quad (1)$$

$\theta = \omega t - k_1 x$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_2 - 2\varphi_1$ ,  $\omega$  и  $k_1$  — частота и волновое число, соответствующие приближению линейной среды.

При соизмеримых амплитудах  $A_1$  и  $A_2$  и произвольной разности фаз  $\Delta\varphi$  уравнение (1) сводится к уравнению 4-го порядка относительно  $\cos \theta$ , решение которого нельзя выразить в явном виде.

При анализе подобных задач успешно развиваются методы приближенных решений уравнений периодов [4]. Цель настоящего сообщения — обратить внимание на существование одного точного решения задачи о взаимодействии двух волн — основной волны и второй гармоники — в среде с нелинейностью релейного типа.

Рассмотрим в качестве примера одномерную линию передачи, в которой погонная емкость зависит от переменного напряжения следующим образом:  $C = C_0 + C_1(v)$ , где

$$C_1(v) = \begin{cases} \frac{\Delta C}{2} & (v > 0) \\ -\frac{\Delta C}{2} & (v < 0) \end{cases}, \quad (2)$$

$\Delta C$  — эффективный интервал изменения емкости  $\left(\frac{\Delta C}{C_0} < 1\right)$ . Характеристику подобного вида можно, например, рассматривать как предельную для МДП-варикапа [5] при условии, что амплитуды взаимодействующих волн существенно превышают интервал напряжений, соответствующий переходу нелинейной емкости с одной ветви на другую.

Поскольку нелинейная часть заряда  $q_1(v) = C_1(v)v$  является четной относительно точки стыка  $v_1 = 0$ , сделаем два принципиальных допущения при анализе взаимодействия двух волн: 1) выполняется точное условие синхронизма, 2) разность фаз двух волн остается постоянной. Последний случай, в частности, отвечает граничным условиям, когда амплитуда второй гармоники на входе линии равна нулю. При сделанных допущениях уравнение скачков (1) решается точно. Далее удобно воспользоваться разновидностью метода припасовывания, при котором шивание производится не на различных участках в пределах одного периода [4], а на границах областей существования укороченных уравнений. Рассмотрим отдельно процесс генерации второй гармоники для случаев попутного и встречного синхронизма в линии без потерь длиной  $l$ .

1. Попутный синхронизм  $\left(k_2 - 2k_1 = 0, A_1(0) = A_{10}, A_2(0) = 0, \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$ . Уравнение периодов

$$A_1 \cos \theta + A_2 \sin 2\theta = 0 \tag{3}$$

имеет два корня в области I ( $A_1 > 2A_2$ ):  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$  и четыре корня в области II ( $A_1 < 2A_2$ ):  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = \pi + \arcsin \frac{A_1}{2A_2}, \theta_4 = 2\pi - \arcsin \frac{A_1}{2A_2}$ . Графическая иллюстрация решений показана на рис. 1. Используя эти

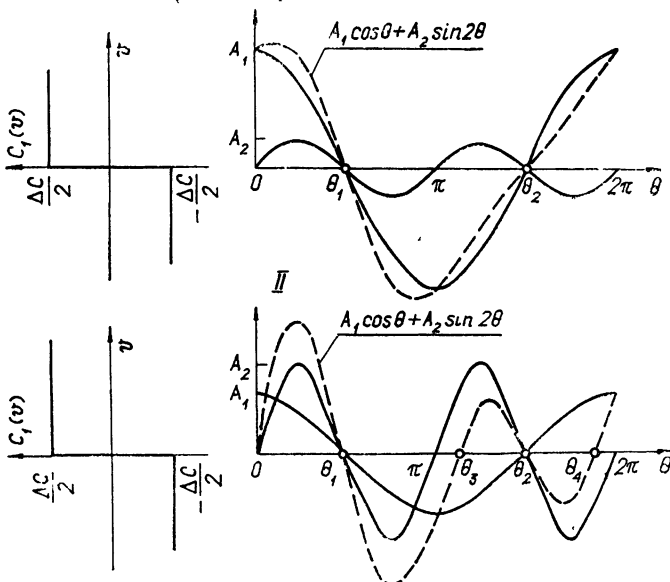


Рис. 1. Корни уравнения периодов в области I ( $A_1 > 2A_2$ ) и области II ( $A_1 < 2A_2$ ).

значения пределов интегрирования при нахождении коэффициентов разложения  $q_1(v)$  в гармонический ряд по  $\theta$ , получим укороченные уравнения для амплитуд взаимодействующих волн. В области I имеем

$$\frac{dA_1}{dx} = -\beta A_2, \quad (4)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \beta A_1,$$

где  $\beta = \frac{2}{3\pi} k_1 \frac{\Delta C}{C_0}$ . Решение системы (4) имеет вид

$$A_1 = A_{10} \cos \beta x \quad (0 \leq x \leq x_1). \quad (5)$$

$$A_2 = A_{10} \sin \beta x$$

Граница области определяется условием  $A_1 = 2A_2$  и равна

$$x_1 = \frac{\text{arctg}(1/2)}{\beta} \approx \frac{0,46}{\beta}.$$

В области II имеем

$$\frac{dA_1}{dx} = -\frac{3}{4} \beta A_1 \left(1 - \frac{A_1^2}{12A_2^2}\right), \quad (6)$$

$$\frac{dA_2}{dx} = \frac{3}{4} \beta \frac{A_1^2}{A_2} \left(1 - \frac{A_1^2}{12A_2^2}\right).$$

Решение (6) с помощью подстановки  $w = A_1/A_2$  может быть найдено точно:

$$\frac{w}{(1+w^2)^{6/13} (1-w^2/12)^{1/26}} = B \exp\left(-\frac{3}{4} \beta x\right). \quad (7a)$$

Поскольку  $w \leq 0,5$ , воспользуемся приближенным представлением (7a):

$$\frac{w}{(1+w^2)^{1/2}} = B \exp\left(-\frac{3}{4} \beta x\right). \quad (7b)$$

Найдем постоянную  $B$  из условия непрерывности решений (5) и (7b) в точке  $x = x_1$ :

$$B = \exp\left(\frac{3}{4} \beta x_1\right) \cos \beta x_1 \approx 1,25.$$

Таким образом, распределение амплитуды в области II описывается функциями

$$A_1 = A_{10} B \exp\left(-\frac{3}{4} \beta x\right) \quad (x_1 \leq x \leq l). \quad (8)$$

$$A_2 = A_{10} \left[1 - B^2 \exp\left(-\frac{3}{2} \beta x\right)\right]^{1/2}.$$

На рис. 2а показан ход кривых  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$ . Для сравнения пунктиром показано изменение амплитуд основной волны и гармоники для квадратичной среды [6]:

$$A_1 = A_{10} \operatorname{sech} \sigma A_{10} x, \tag{9}$$

$$A_2 = A_{10} \operatorname{th} \sigma A_{10} x.$$

При построении было выбрано  $\sigma A_{10} = \beta$ . В этом случае ход кривых для обеих сред оказывается практически совпадающим. Анализ модельных уравнений, не учитывающих динамику изменения фаз, не позволяет рассмотреть процесс периодической перекачки энергии из одной волны в другую для среды с нелинейностью релейного типа. В то же время, по-видимому, можно утверждать, что ход зависимостей  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  при произвольной граничной разности фаз  $\Delta\varphi(0)$  для обеих сред будет приблизительно одинаковым, если соответствующим образом «совместить» коэффициенты нелинейности сред. Напомним, что для квадратичной среды существует общее решение задачи о генерации второй гармоники, выражающееся через эллиптические функции [6].

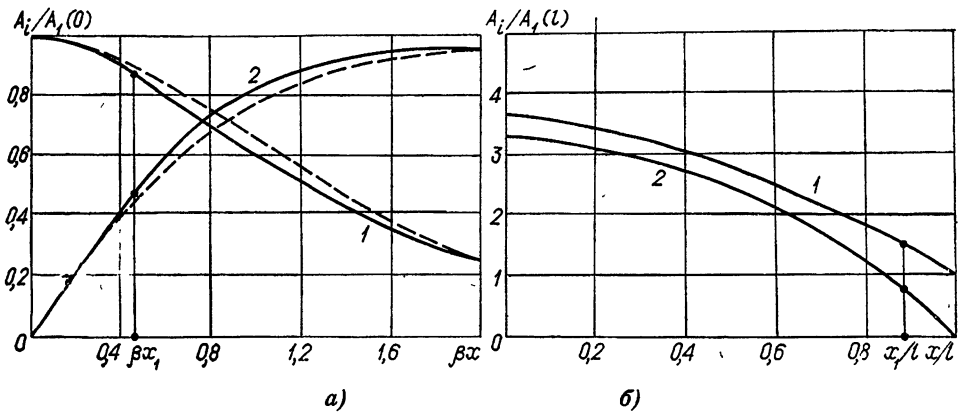


Рис. 2. а) Распределения амплитуд основной волны (кривая 1) и второй гармоники (кривая 2) вдоль линии для случая попутного синхронизма. Пунктиром показаны аналогичные кривые для квадратичной среды при  $\beta = \sigma A_{10}$ . б) Распределения амплитуд основной волны и второй гармоники вдоль линии для случая встречного синхронизма при  $\beta l = x$ .

2. Встречный синхронизм ( $k_2 + 2k_1 = 0$ ,  $A_1(0) = A_{10}$ ,  $A_2(l) = 0$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_2 + 2\varphi_1 = -\pi/2$ ). На интервале  $0 \leq x \leq x_1$  теперь имеем случай  $A_1 < 2A_2$  (область II на рис. 1), которому соответствуют укороченные уравнения:

$$\frac{dA_1}{dx} = -\frac{3}{4} \beta A_1 \left( 1 - \frac{A_1^2}{12A_2^2} \right), \tag{10}$$

$$\frac{dA_2}{dx} = -\frac{3}{4} \beta \frac{A_1^2}{A_2} \left( 1 - \frac{A_1^2}{12A_2^2} \right).$$

Приближенное решение этой системы (ср. (7б)) можно записать в виде

$$A_1 = U_0 \exp \left[ \frac{3}{4} \beta (l-x) \right] \tag{11}$$

$$A_2 = U_0 \left\{ \exp \left[ \frac{3}{2} \beta (l-x) \right] - 1 \right\}^{1/2} \quad (0 \leq x \leq x_1),$$

где постоянная  $U_0$  определяется интегралом энергии  $U_0^2 = A_1^2 - A_2^2 =$



$$= A_1^2(l), \text{ а граница интервала } x_1 = l - \frac{2 \ln(4/3)}{3\beta} \approx l - \frac{0,19}{\beta}.$$

На участке  $x_1 \leq x \leq l$  уравнения совпадают с (4), differing лишь знаком в правой части в уравнении для гармоники. Для этого интервала имеем решение в виде

$$A_1 = \frac{U_0}{\sin \beta (l-x_1)} \{ \exp [\beta (l-x_1)] \sin \beta (l-x) + \sin \beta (x-x_1) \},$$

$$A_2 = \frac{U_0 \exp [\beta (l-x_1)] \sin \beta (l-x)}{2 \sin \beta (l-x_1)}.$$
(12)

Ход кривых  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$  показан на рис. 2б.

Изложенным выше методом можно рассмотреть и процесс вырожденного параметрического усиления в линии с нелинейностью релейного типа. Например, для попутного синхронизма граничные условия следует задать в виде  $A_1(0) = A_{10}$ ,  $A_2(0) = A_{20}$  ( $A_{10} < A_{20}$ ),  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Далее следует последовательно рассмотреть решения в областях, следующих в порядке, обратном тому, который был принят в разд. 1. Используя приближенное решение системы (8), приведем конечный результат:

$$A_1 = A_{10} \exp\left(\frac{3}{4}\beta x\right)$$

$$(0 \leq x \leq x_1);$$
(13)

$$A_2 = \left[ A_{10}^2 \left( 1 - \exp\left(\frac{3}{2}\beta x\right) \right) + A_{20}^2 \right]^{1/2}$$

$$A_1 = A_{10} \exp\left(\frac{3}{4}\beta x_1\right) \cos \beta (x-x_1) + \left[ A_{10}^2 \left( 1 - \exp\left(\frac{3}{2}\beta x_1\right) \right) + \right.$$

$$\left. + A_{20}^2 \right]^{1/2} \sin \beta (x-x_1),$$

$$A_2 = \left[ A_{10}^2 \left( 1 - \exp\left(\frac{3}{2}\beta x_1\right) \right) + A_{20}^2 \right]^{1/2} \cos \beta (x-x_1) +$$
(14)

$$+ A_{10} \exp\left(\frac{3}{4}\beta x_1\right) \sin \beta (x-x_1) \quad (x_1 \leq x \leq x_2),$$

$$x_1 = \frac{2}{3\beta} \ln \frac{4(A_{10}^2 + A_{20}^2)}{5A_{10}^2}, \quad x_2 \text{ — точка, соответствующая максимуму функ-}$$

ции  $A_1(x)$ . Тот факт, что инкремент нарастания субгармоники на первом этапе (13) не зависит от амплитуды накачки, объясняется идеализацией вольт-фарадной характеристики емкости (линия с заданным коэффициентом модуляции емкости). При выполнении условия  $A_{10}^2 \ll A_{20}^2$  масштаб  $x_1$  характеризует длину, на которой 80% мощности накачки превращается в мощность субгармоники.

В заключение отметим, что рассмотренные выше случаи легко обобщаются на случай малых потерь, которые могут быть введены на этапе уже полученных укороченных уравнений. Соответствующие системы уравнений имеют точные решения, методика сшиваний остается прежней. В частном случае одинаковых затуханий на частотах  $\omega$  и  $2\omega$

( $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ) потери учитываются введением множителя  $e^{-\delta x}$  в правые части выражений (5) и (8), граничная точка  $x_1$  остается без изменений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Бруевич, С. И. Евтянов, Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии, изд. Сов. радио, М., 1965.
2. Е. Н. Попов, Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах, изд. Наука, М., 1973.
3. А. Н. Лагуткин, К. К. Лихарев, Вестник МГУ, физика, астрономия, № 1, 82 (1972).
4. Н. П. Ряшенцев, Ю. З. Ковалев, Динамика электромагнитных импульсных систем, изд. Наука, Новосибирск, 1974.
5. В. П. Мартынов, В. П. Мартынова, В. Ф. Марченко, И. И. Петручук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 3, 367 (1974).
6. Н. Бломберг, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
8 апреля 1976 г.

#### A PARTIAL CASE OF INTERACTION OF TWO WAVES IN A MEDIUM WITH RAYLEIGH-TYPE NONLINEARITY

*V. F. Marchenko*

The solution of the stationary problem of the second harmonic generation in the medium with the Rayleigh-type nonlinearity is found. The main assumption for the non-shifted Rayleigh characteristic is that the phases of interacting waves are constant. The cases of passing and opposite synchronism of the basic wave and harmonic are analysed.

---

УДК 535.317

## О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ КОГЕРЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. М. Горский, В. А. Зверев, А. Л. Матвеев

Проведено количественное сравнение оптических когерентных схем пространственной фильтрации путем расчета и измерения их частотных характеристик.

Преимущества оптических схем обработки информации (многоканальность, быстроедействие при обработке больших массивов информации) приводят ко все большему их использованию в практике научных исследований [1-5, 7, 8]. Однако практические возможности оптических систем пространственной фильтрации (несмотря на широкое применение) изучены недостаточно.

Информационный подход к описанию систем оптической обработки [7] дает возможность оценить их предельные параметры, не открывая пути к конкретному совершенствованию отдельных элементов систем.

Целью настоящей работы является исследование и сравнение возможностей схем пространственной фильтрации, изображенных на рис. 1 а и 1 б, одна из которых (1 а) наиболее часто рассматривается и используется. Основным параметром, который характеризует работу когерентных оптических схем и по которому необходимо провести сравнение, является частотная характеристика (ЧХ) [2]. От формы ЧХ зависит правильность передачи изображения, а от полосы пропускания — разрешение системы. Поэтому в дальнейшем под сравнением схем в первую очередь будем понимать исследование и сравнение их ЧХ.

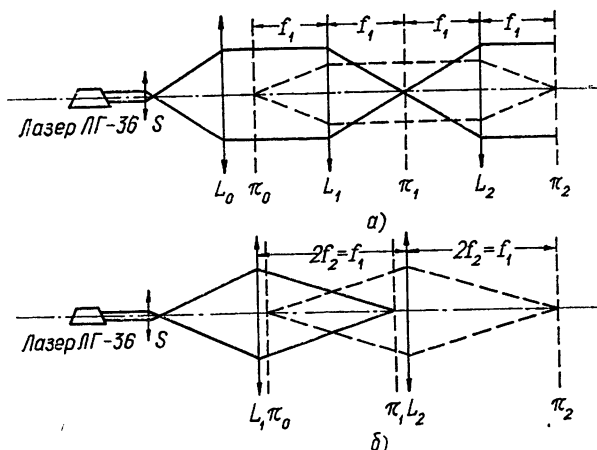


Рис. 1. Схемы пространственной фильтрации.

Рассмотрим и сравним представленные на рис. 1 схемы пространственной фильтрации. В схеме (а) свет от точечного источника  $S$  коллимуруется линзой  $L_0$ . Предназначенный для фильтрации сигнал в виде

транспаранта с изменяющимся амплитудным коэффициентом пропускания  $t(x)$  помещается в плоскости  $\pi_0$ . Линза  $L_1$  выполняет фурье-преобразование  $t(x)$ , создавая в плоскости  $\pi_1$  распределение комплексной амплитуды [2] (для простоты рассматривается одномерный случай):

$$P_1^{(a)}(x_1) = i \sqrt{\frac{k}{2\pi f_1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u') C_1\left(\frac{k}{f_1} x_1 - u'\right) \times \\ \times \exp\left[ix_1\left(\frac{k}{f_1} x_1 - u'\right)\right] du', \quad (1)$$

где

$$g(u') = \int_{-\infty}^{\infty} t(x_0) e^{-iu'x_0} dx_0, \\ C_{1,2}(u') = \int_{-\infty}^{\infty} M_{L_1, L_2}(x) e^{-iu'x} dx, \\ M_{L_1, L_2} = \begin{cases} M_{L_1, L_2}(x) & (2|x| \leq D_{1,2}) \\ 0 & (2|x| > D_{1,2}) \end{cases},$$

где  $M_{L_1, L_2}(x)$  — апертурный множитель линзы  $L_1(L_2)$ , учитывающий ее aberrации [2],  $D_{1,2}$  — соответственно диаметры линз  $L_1$  и  $L_2$ .

Рассмотрение схем фильтрации проводится в приближении Гюйгенса—Френеля, т. е. считаются выполненными следующие условия:

$$kr \gg 1, \\ x \ll f_1. \quad (2)$$

Линза  $L_2$  преобразует распределение поля  $P_1$  и дает в плоскости изображения  $\pi_2$  распределение комплексной амплитуды:

$$P_2^{(a)}(x_2) = -\frac{k}{2\pi f_1'} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_0) \exp\left[\frac{ikx_2}{f_1}(x_2 - x_0)\right] \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_1(\xi) C_2\left[-\frac{ik}{f_1}(x_2 - x_0) - \xi\right] \exp[i\xi(x_2 + x_0)] d\xi dx_0. \quad (3)$$

Чтобы воздействовать на амплитуду и фазу спектра  $P_1$ , в плоскость  $\pi_1$  можно поместить фильтр с некоторым коэффициентом пропускания  $t_1(x_1)$ .

Рассмотрим систему 1 б. Для простоты соответствующие друг другу в обеих схемах линзы и плоскости обозначены одинаково. Для того, чтобы масштабы спектров в плоскости  $\pi_1$  в обеих схемах были равными, фокусные расстояния линз  $f_2$  в схеме (б) будем считать равными половине  $f_1$ . С учетом этого соотношения между  $f_1$  и  $f_2$  все распределения в схеме (б) будем записывать также через  $f_1$ . При этом апертурные множители соответствующих друг другу в обеих схемах линз считаются одинаковыми. Распределение в плоскости  $\pi_1$  в этом случае описывается соотношением

$$P_1^{(b)}(x_1) = \sqrt{\frac{k}{2\pi f_1}} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{ikx_1^2}{2f_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} g(u) C_1\left(\frac{k}{f_1} x_1 - u\right) du, \quad (4)$$

а в плоскости изображения  $\pi_2$  [3, 5]

$$P_2^{(6)}(x_1) = \frac{ik}{2\pi f_1} \exp\left(\frac{ikx_2^2}{2f_1}\right) \int_{-\infty}^{\infty} t(x_0) C_2 \left[ \frac{k}{f_1} (x_0 - x_2) \right] dx_0. \quad (5)$$

Можно показать, что для случая идеальных линз, т. е. не искажающих и имеющих бесконечные размеры, (1) и (4) принимают вид

$$P_1(x_1) \sim \int_{-\infty}^{\infty} t(x_0) \exp\left\{-\frac{ik}{f_1} x_0 x_1\right\} dx_0 = g\left(\frac{k}{f_1} x_1\right), \quad (6)$$

а выражения (2) и (5) переписываются так:

$$P_2(x_2) \sim t(x_2). \quad (7)$$

Таким образом, в случае идеальных линз схемы работают одинаково. Однако из сравнения приведенных формул следует, что в реальных случаях искажения, вносимые линзами, в этих схемах различны. Хотя 1 а — наиболее часто используемая схема, тем не менее она, как будет показано ниже, имеет существенные, по сравнению со схемой рис. 1 б, недостатки.

Описать работу системы при помощи ЧХ можно только в том случае, если система выполняет операцию типа свертки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (8)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  — соответственно входной и выходной сигналы,  $h(\tau)$  — импульсная переходная характеристика [6], связанная с частотной характеристикой  $K(j\omega)$  соотношением

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9)$$

Возвращаясь к выражению (5), можно заметить, что в его правой части стоит интеграл свертки, т. е. схему (6) можно описать путем введения частотной характеристики. Воспользовавшись формулой (9), можно записать ее вид в этой схеме:

$$K^{(6)}(u) = M_2 \left( \frac{f_1}{k} u \right), \quad (10)$$

где  $u = \frac{2\pi}{d}$  — пространственная частота объекта.

Соотношение (3), описывающее работу схемы (а), не является сверткой, поэтому здесь в общем случае частотную характеристику ввести не представляется возможным. Но если выполнены условия

$$D_{1,2} \gg N_{1,2} \Delta x_0; \quad (11a)$$

$$D_{1,2}^2 \gg N_{1,2}^2 \lambda f_1, \quad (11b)$$

где  $\Delta x_0$  — размер объекта,  $N_{1,2}$  — число отсчетных точек функций  $M_{1,2}(x)$  на апертурах линз  $L_{1,2}$ ,  $x_0(\bar{x}_2)$  — расстояние от центра объекта (изображения) до оптической оси системы, то (3) примет вид

$$P_2^{(a)}(x_2) = \frac{-k}{2\pi f_1} \int_{-\infty}^{\infty} t(x_2 - y) \exp\left(\frac{ik\bar{x}_2}{f_1}\right) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_1(\xi) C_2\left(-\frac{k}{f_1} y - \xi\right) \exp(2i\xi\bar{x}_2) d\xi dy. \quad (12)$$

В правой части (12) стоит интеграл свертки, т. е. в этих предположениях и в схеме (а) можно ввести частотную характеристику. Используя и в этом случае (9) для частотной характеристики в схеме (а), получаем

$$K^{(a)}(u) = M_1\left(\bar{x}_0 + \frac{f_1}{k} u\right) M_2\left(-\bar{x}_0 + \frac{f_1}{k} u\right). \quad (13)$$

Из (13) следует, что в схеме (а) имеет место зависимость частотной характеристики от расстояния объекта до оптической оси. Если функции  $M_1$  и  $M_2$  ограничены симметрично относительно нуля (что чаще всего и имеет место), то смещение объекта от оптической оси системы приводит к деформации (обужению)  $K^{(a)}(u)$ . Соотношение (13) позволяет также сделать вывод о качестве изображения «большого» объекта, т. е. такого, размер которого не удовлетворяет условию (11 а). «Большой» объект можно представить в виде суммы маленьких, каждый из которых уже удовлетворяет условию (11 а). Получение изображения от каждого из этих маленьких объектов можно описать с помощью ЧХ (13). Если такой маленький объект расположен на оптической оси, то он будет преобразован системой с более широкой  $K(u)$ , чем если он смещен на некоторое  $\bar{x}_0$ . Поэтому на участке изображения около оптической оси может присутствовать более мелкая структура, чем по краям. Учитывая (10), можно сказать, что ЧХ схемы (б) не зависит от смещений объекта относительно оптической оси и эффект, имеющийся в схеме (а), в ней не будет иметь места. Зависимость ЧХ от положения объекта на оптической оси будет иметь место для любой схемы фильтрации, в которой спектральная плоскость не совпадает с плоскостью линзы  $L_2$ .

Экспериментальное исследование ЧХ схем заключалось в измерении пространственных спектров сигналов, прошедших через части схем, производящих фурье-преобразование (участок схем от  $S$  до  $\pi_1$ ). Замена ЧХ полных схем на ЧХ отдельных участков справедлива, если: а) линза  $L_2$  в схеме (а) не искажает изображение и, следовательно, не дает вклада в ЧХ; б) в плоскости  $\pi_1$  схемы (б) помещена диафрагма, моделирующая апертурный множитель линзы  $L_2^{(6)}$ , а aberrации этой линзы малы и не дают определяющего вклада в ЧХ.

В качестве тест-сигналов использовались щелевая диафрагма и дифракционные решетки. Поскольку спектр дифракционной решетки не был известен, то при сравнении схем в этом случае использовались относительные ЧХ, определяемые соотношением  $K_0(u) = K(u)/K_{\infty}^{(6)}(u)$ , где  $K_{\infty}^{(6)}(u)$  — коэффициент передачи системы (б) при бесконечных размерах линзы  $L_2^{(6)}$ . Теоретически коэффициент передачи схемы (б) при этом условии для всех частот равен единице, что оправдывает выбор вида  $K_0(u)$ . Для измерения были профотометрированы распределения интенсивности в плоскости  $\pi_1$ :  $J_1(u) = K^2(u)g^2(u)$  в обеих схемах, причем в схеме (б) при учете  $K^{(6)}$  и без учета  $K_{\infty}^{(6)}$  диафрагмы в фурье-плоскости, а затем вычислены соответствующие отношения  $K_0^2(u) =$

$$= \frac{I_1(u)}{I_{1\infty}^{(6)}(u)}.$$

Измерения проводились при выполнении условия (11 а), для чего дифракционные решетки диафрагмировались; все использованные линзы и диафрагмы в плоскости  $\pi$ ; схемы (б) имели одинаковый диаметр  $D$  (хотя размер  $L_1^{(б)}$  не влияет на ЧХ (10) и определяет лишь максимальные размеры исследуемого транспаранта и разрешение в фурье-плоскости).

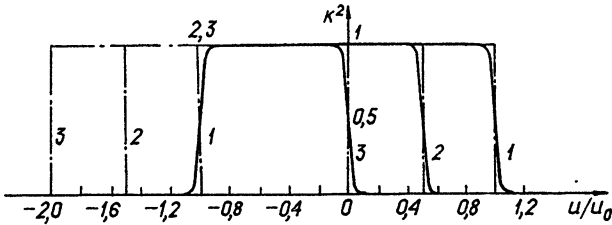


Рис. 2. Частотные характеристики.

Объект—щелевая диафрагма шириной 0,32 мм; 1—схемы (а) при  $z=0$  и схемы (б) при всех  $z$ , 2—схемы (а) при  $z=0,5$ , 3—схемы (а) при  $z=1$ .

Результаты измерений приведены на рис. 2 и 3. На рис. 2 изображены графики, отражающие зависимость квадрата коэффициента передачи от нормированной на  $u_0 = \frac{kD}{2f_1}$  пространственной частоты объекта (щелевой диафрагмы). Там же приведены расчетные ЧХ (штрих-пунктирные линии), построенные в соответствии с формулами (10) и (13). Величина смещения описывается нормированным параметром  $z = \frac{2\bar{x}_0}{D}$ ,

линейно связанным со смещением  $\bar{x}_0$  центра объекта относительно оптической оси. Максимальное значение  $K(u)$  принято равным единице. Относительная погрешность измерений составляла 10%.

На рис. 3 представлены зависимости от частоты относительных коэффициентов передачи  $K_0(u)$ . Рассчитанные по формулам (10) и (13) теоретические зависимости изображены штрих-пунктиром.

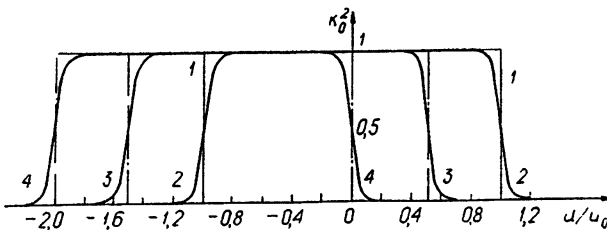


Рис. 3. Относительные частотные характеристики.

Объект—диафрагмированные дифракционные решетки; 1—схемы (б) при всех смещениях (теоретическая и экспериментальная), 2—схема (а) при  $z=0$ , 3—схема (а) при  $z=0,5$ , 4—схема (а) при  $z=1$ .

Приведенные на рис. 2 и 3 графики показывают, что в пределах погрешности эксперимента (10%) имеется совпадение рассчитанных и экспериментально снятых ЧХ. Более плавный, чем дает формула (13), спад от 1 до 0 экспериментальных кривых объясняется конеч-

ностью размеров объекта. Из графиков следует, что в схеме имеется существенная зависимость ЧХ от смещения объекта. Так, например, при  $f_1 = 440$  мм смещение объекта на 5 мм приводит к смещению частотной характеристики на 18 лин/мм. Такое смещение ЧХ нежелательно, поскольку в сочетании с регистрацией поля при помощи квадратичного детектора (например, на фотопленку) приводит к уменьшению вдвое амплитуды переменной составляющей сигнала, половина спектра которого обрезается ЧХ, нелинейным искажениям, вследствие которых появляются частоты, кратные имеющимся в спектре объекта. В схеме (б), как и следовало ожидать, ЧХ (10) не зависит от смещения объекта.

В результате сравнения, например ЧХ 3 и 1 на рис. 3, при  $D = 40$  мм можно заметить, что в схеме (а) без упомянутых искажений будет получено изображение объекта, радиуса не более 10 мм, в спектре которого нет частот выше 40 лин/мм, в то время как в схеме (б) объект может иметь диаметр 40 мм и спектр пространственных частот в пределах 75 лин/мм.

Кроме лучшей ЧХ у схемы (б) можно отметить еще несколько достоинств. При равных со схемой (а) размерах она имеет вдвое больший масштаб спектра в фурье-плоскости, что весьма существенно при проведении экспериментов по пространственной фильтрации. В отличие от схемы (а), во второй схеме между плоскостями  $\pi_0$  и  $\pi_1$  нет линз, а изображение объекта в плоскости  $\pi_2$  формирует только одна линза  $L_2$ , что заметно уменьшает искажения из-за aberrаций.

Проведенное рассмотрение позволяет сделать следующие выводы:

1. В схеме (б) возможна обработка транспаранта существенно больших размеров и имеющего более широкий спектр. Количественно возможности систем по передаче различных пространственных частот можно оценить из графиков, приведенных на рис. 2 и 3.

2. Применение схемы рис. 1 а необходимо лишь в том случае, если в плоскости  $\pi_2$  производится регистрация не только модуля, но и фазы комплексной амплитуды поля, так как схема (б) вносит фазовые искажения, которые не имеют значения в случае регистрации только интенсивности (например, на фотопленку).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Гудмен, Введение в фурье-оптику, изд. Мир, М., 1970.
2. В. А. Зверев, Радиооптика, изд. Сов. радио, М., 1975.
3. С. Ловенталь, И. Бельво, Пространственная фильтрация и голография—новое в когерентной оптике, изд. Энергия, М., 1970.
4. Г. Р. Иваницкий, А. С. Куниский, Исследование микроструктуры объективов методами когерентной оптики, изд. Энергия, М., 1974.
5. S. Lowenthal, Opt. Acta, 12 (1965).
6. И. С. Гоноровский, Радиотехнические цепи и сигналы, изд. Сов. радио, М., 1967.
7. A. Wander Lugt, Appl. Optics, 14, 1081 (1975).
8. A. Marechal and P. Croce, Compt. Rend., 237, 667 (1953).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
17 ноября 1975 г.

## SPATIAL FILTRATION USING COHERENT OPTICAL SYSTEMS

S. M. Gorsky, V. A. Zverev, A. L. Matveyev

A quantitative comparison of optical coherent schemes of spatial filtration has been made by calculating and measuring their frequency characteristics.



УДК 621.371.22

## ОПТИЧЕСКАЯ ЛОКАЦИЯ МИКРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД

*Г. М. Креков, М. М. Крекова, Э. В. Макиенко, И. Э. Наац*

Методом оптимальной параметризации производится восстановление микрофизических характеристик из результатов многочастотной лазерной локации облаков. Проводится анализ влияния систематических и случайных ошибок измерения, фона многократного рассеяния, а также априорного выбора параметров на точность восстановления концентрации водности и микроструктуры рассеивающих частиц.

Одной из актуальных задач дистанционного лазерного зондирования природных рассеивающих сред является определение параметров микроструктуры и физических характеристик аэрозольных образований в атмосфере. В настоящем сообщении рассматривается методика восстановления микрофизических параметров облаков по данным оптической локации на нескольких частотах. При зондировании облачного аэрозоля решение обратной задачи в большинстве случаев может быть выполнено в более простой форме, поскольку возможно априори предположить известными аналитическую форму распределения частиц по размерам, которая, как правило, соответствует гамма-распределению, и величину показателя преломления. В данном случае обратная задача может быть решена методом оптимальной параметризации. Он основан на аппроксимации измеренной на нескольких длинах волн  $\lambda_i$  оптической характеристики (например, коэффициента ослабления  $\beta_{ext}$ ) некоторым модельным значением  $\beta_m(z)$ . Значение  $\beta_m(z)$  определяется видом распределения частиц по размерам  $n(r, a_i)$  и значением его параметров  $a_i$ . Информация о величине коэффициента ослабления извлекается из решения уравнения локации:

$$P(z) = AP_0 z^{-2} \beta_\pi(z) \exp \left[ -2 \int_0^z \beta_t(z') dz' \right],$$

где  $P(z)$  — отраженный сигнал, амплитуда которого пропорциональна световому потоку, приходящему от элементарного рассеивающего объема, находящегося на высоте  $z$ ,  $P_0$  — энергия начального зондирующего импульса,  $A$  — аппаратная функция, определяемая характеристиками прямо-передающих систем,  $\beta_\pi(z) = \beta_s(z) g_\pi(z)$  — объемный коэффициент обратного рассеяния,  $\beta_s(z)$  и  $\beta_t(z)$  — соответственно объемные коэффициенты рассеяния и ослабления,  $g_\pi(z)$  — индикатриса рассеяния для угла  $180^\circ$ .

Форма рассеивающих частиц в случае облачного аэрозоля близка к сферической, и, следовательно, применение теории Ми [1] вполне правомерно для математического описания светорассеяния в зондируемой среде. В результате основные методические вопросы восстановления спектра частиц по спектральному ходу коэффициента ослабления (или обратного рассеяния) путем оптимальной параметризации при зондиро-

вании водных облаков можно свести к оценке влияния различного рода ошибок (и, в первую очередь, за счет фона многократного рассеяния) в измеренных характеристиках на точность восстановления.

### 1. МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ МНОГОЧАСТОТНОГО ЛАЗЕРНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Метод оптимальной параметризации для обращения оптических измерений заключается в определении параметров априори заданной аналитической формы распределения по минимуму оптической невязки. Соответствующие алгоритмы для обращения оптических измерений подробно описаны в [2] и применительно к лазерной локации атмосферного аэрозоля в работе [3]. В связи с этим мы ниже остановимся кратко на особенностях реализации метода оптимальной параметризации для гамма-распределения частиц по размерам, имеющего непосредственное отношение к оптической локации облачного аэрозоля. Согласно [1] модифицированное гамма-распределение частиц по размерам имеет вид

$$n(r) dr = ar^\alpha \exp(-\mu r^\gamma) dr, \quad (1)$$

где  $\alpha, \gamma, \mu, a$  — параметры распределения, связанные с такими характеристиками модельного распределения, как модальный радиус  $r_c$ , средний радиус  $r_n$ , общее число частиц в единице объема  $N$ , собственный объем частиц в единице объема среды  $V$  (величина  $V$  определяет водность облака  $Q$ ). Соответствующие выражения имеют вид

$$\mu = \alpha/\gamma r_n^\gamma,$$

$$N = a \int_0^\infty r^\alpha \exp(-\mu r^\gamma) dr = a \gamma^{-1} \mu^{-(\alpha+1)/\gamma} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right), \quad (2)$$

$$V = \frac{4}{3} a \pi \int_0^\infty r^{\alpha+3} \exp(-\mu r^\gamma) dr = \frac{4}{3} a \pi \mu^{-(\alpha+4)/\gamma} \gamma^{-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+4}{\gamma}\right).$$

Оптические свойства полидисперсной рассеивающей среды определяются не только концентрацией, но и геометрическим сечением частиц. Вместо распределения  $n(r)$  удобно рассматривать поэтому распределение геометрического сечения частиц  $B(r) = \pi r^2 n(r)$  в единичном объеме с модальным радиусом  $r_s$  [4]. Соотношения связи величин  $S, r_s$  и  $N, r_n$  и выражение для  $V$  в новой системе параметров имеют вид

$$S = N \pi r_s^2 \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right)} \left(\frac{\gamma}{\alpha+2}\right)^{2/\gamma}, \quad r_s = r_n \left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)^{1/\gamma}, \quad (3)$$

$$V = \frac{4}{3} S r_s \left(\frac{\gamma}{\alpha+2}\right)^{1/\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+4}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\gamma}\right)}.$$

Выразим коэффициент ослабления через полное геометрическое сечение рассеивающих частиц в единичном объеме и полидисперсный фактор эффективности ослабления  $\bar{K}(\lambda)$ , записав его в виде

$$\beta(\lambda) = S \bar{K}(\lambda) = S \int_0^\infty K(r, \lambda) \varphi(r) dr, \quad (4)$$

где

$$\varphi(r) = \frac{\gamma \left(\frac{\alpha+2}{\gamma}\right)^{(\alpha+3)/\gamma}}{r_S \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\gamma}\right) \left(\frac{r}{r_S}\right)^{(\alpha+2)}} \exp\left[-\frac{\alpha+2}{\gamma} \left(\frac{r}{r_S}\right)^\gamma\right]$$

и 
$$\int_0^\infty \varphi(r) dr = 1.$$

Минимизируемую функцию, определяющую степень близости измеренной  $\beta(\lambda_i)$  и модельной  $\beta_m(\lambda_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) характеристик представим в виде

$$F(S, r_S, \alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^n [\beta(\lambda_i) - \beta_m(\lambda_i)]^2. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что  $F(S, r_S, \alpha, \gamma)$  по параметру  $S$  представляет собой параболу, и поэтому при любых фиксированных значениях параметров  $r_S^*, \alpha^*, \gamma^*$  значение  $S$ , доставляющее минимум  $F(S, r_S^*, \alpha^*, \gamma^*)$ , определяется выражением

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n \beta(\lambda_i) \bar{K}(\lambda_i, r_S^*, \alpha^*, \gamma^*)}{\sum_{i=1}^n \bar{K}^2(\lambda_i, r_S^*, \alpha^*, \gamma^*)}. \quad (6)$$

Поэтому для данной системы параметров целесообразно вначале оценить параметры  $r_S, \alpha, \gamma$ , а затем определить  $S$  согласно (6). С этой целью перейдем к относительным значениям измеренной оптической характеристики, а именно,  $\beta(\lambda_i)/\beta(\lambda_m)$ , где  $\lambda_m$  соответствует наибольшему измеренному значению оптической характеристики. В качестве минимизируемой функции будем рассматривать выражение

$$F_1(r_S, \alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\beta(\lambda_i)}{\beta(\lambda_m)} - \frac{\beta_m(\lambda_i)}{\beta_m(\lambda_m)} \right], \quad (7)$$

которое не зависит от  $S$  (нормирующий множитель). Следовательно, (7) можно переписать в виде

$$F_1(r_S, \alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\beta(\lambda_i)}{\beta(\lambda_m)} - \frac{\bar{K}(\lambda_i, r_S, \alpha, \gamma)}{\bar{K}(\lambda_m, r_S, \alpha, \gamma)} \right]^2. \quad (8)$$

Такое представление минимизируемой функции позволяет построить алгоритм вычисления оптимальных параметров распределения следующим образом.

Методом скорейшего координатного спуска минимизируется  $F_1(r_S, \alpha, \gamma)$  и определяются  $r_S^*, \alpha^*, \gamma^*$ . Затем для данных  $r_S^*, \alpha^*, \gamma^*$  из выражения (6) вычисляется  $S^*$ . По найденным значениям параметров вычисляется функция  $n(r)$  и затем определяются все характеристики распределения.

Приведем некоторые результаты численного исследования алгоритмов оценки параметров распределения  $B(r)$  применительно к зондированию облачного аэрозоля. Рис. 1 а, б, в иллюстрирует обращение модельной характеристики  $\beta(\lambda_i)$ , заданной на длинах волн 2,36; 3,51; 5,3; 10,6 мкм при осциллирующем и систематическом возмущении

исходных данных на уровне 10%. Величина осциллирующего возмущения определялась следующими выражениями:

$$\delta\beta(\lambda_i) = (-1)^{i+1} \beta(\lambda_i) \varepsilon, \quad \delta\beta(\lambda_i) = (-1)^i \beta(\lambda_i) \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — относительная ошибка измерений.

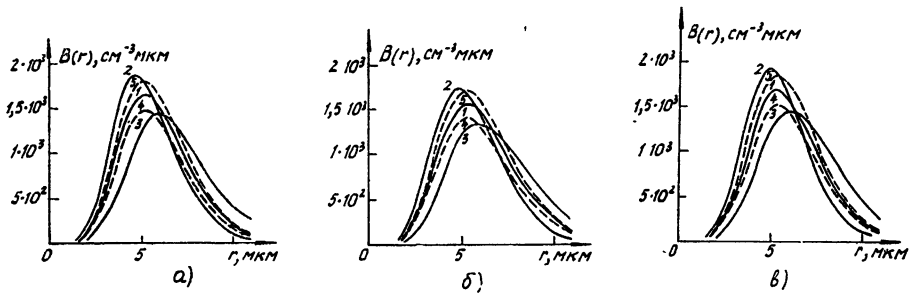


Рис. 1. Восстановление распределения  $B(r)$  по характеристике  $\beta(\lambda)$  минимизацией по параметрам:

а)  $S$ ,  $r_S$ ,  $\gamma = \gamma_{\text{mod}}$ ,  $\alpha = \alpha_{\text{mod}}$ ; б)  $S$ ,  $r_S$ ,  $\gamma = \gamma_{\text{mod}}$ ,  $\alpha = 5$ ; в)  $S$ ,  $r_S$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma = \gamma_{\text{mod}}$ . Кривые 1—точное решение; 2, 3—решение при осциллирующем возмущении ( $\varepsilon = 0,1$ ); 4, 5—при систематическом возмущении ( $\varepsilon = 0,1$ ).

В качестве модели распределения частиц по размерам для расчета исходной оптической характеристики  $\beta(\lambda_i)$  было выбрано облако С1 [1] с концентрацией частиц  $N = 100 \text{ см}^{-3}$ , водностью  $Q = 6,255 \cdot 10^{-8} \text{ г/см}^3$ , полным геометрическим сечением рассеивающих частиц в единице объема  $S = 7,819 \text{ км}^{-1}$  и значением параметров  $r_S = 5,33 \text{ мкм}$ ,  $\alpha = 6$ ,  $\gamma = 1$ .

В примере на рис. 1 а, б при восстановлении распределения  $B(r)$  оценивались параметры  $S$ ,  $r_S$  для фиксированных  $\alpha$ ,  $\gamma$ , причем, на рис. 1 б эти параметры соответствовали модельным ( $\alpha_{\text{mod}} = 6$ ,  $\gamma_{\text{mod}} = 1$ ). Выбор именно этих параметров определяется предполагаемым уровнем ошибок оптических измерений [2, 3]. В примере на рис. 1 а параметр  $\alpha$  значительно отличается от модельного ( $\alpha = 5$ ). Расчетные кривые рис. 1 а, б дают возможность оценить влияние ошибок в априорном выборе параметра  $\alpha$  на точность решения обратной задачи. Рис. 1 в иллюстрирует восстановление спектра размеров минимизацией по трем параметрам  $S$ ,  $r_S$ ,  $\alpha$  ( $\gamma = \text{const}$ ). В связи с этим численным экспериментом отметим, что восстановление  $B(r)$  по трем параметрам целесообразно в тех случаях, когда погрешность измерений достаточно мала, например, на уровне 5%.

Из анализа результатов, приведенных в табл. 1 и 2, видно, что удовлетворительную точность восстановления спектра размеров, концентрации и водности облачного аэрозоля при ошибке в измерениях больше 10% можно получить путем оценки параметров  $r_S$ ,  $S$ , априори выбирая  $\alpha$  и  $\gamma$ . Это объясняется сравнительно слабым влиянием параметра  $\alpha$  на коэффициент ослабления. Значение параметра  $\gamma$  при описании микроструктуры водных облаков  $\gamma$ -распределением можно принять равным единице. Результаты, приведенные в табл. 1 и 2, по влиянию априорного выбора некоторых параметров распределения (в частности,  $\alpha$  и  $\gamma$ ) на точность решения обратной задачи позволяют определить физические параметры, совместная оценка которых может быть эффективно выполнена при данной точности оптических измерений без увеличения информативности экспериментального материала. Значения средней невязки на одно измерение  $(F_1/n)^{1/2}$ , приведенные в табл. 1 и 2 для различных значений осциллирующего возмущения, в точке минимума функционала (8) соответствуют величине ошибки в измерениях.

Таблица 1

Результаты восстановления микроструктуры и водности облака С1 минимизаций по S и  $r_S$ ;  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 5$

Параметры	Систематическое возмущение				Осциллирующее возмущение			
	$\varepsilon < 0,01$		$\varepsilon = -0,1$		$\varepsilon = 0,1$		$\varepsilon = 0,1$	
	$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^j \beta(\lambda_j) \varepsilon$		$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^{j+1} \beta(\lambda_j) \varepsilon$		$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^j \beta(\lambda_j) \varepsilon$		$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^{j+1} \beta(\lambda_j) \varepsilon$	
$r_S$ , МКМ	5,3	5,3	5,3	5,3	5,6	6,0	5,1	4,9
S, КМ <sup>-1</sup>	7,84	7,05	8,63	8,63	7,77	7,7	7,94	8,02
N, с.М <sup>-3</sup>	103	93	114	114	92	79	114	125
Q, з.с.М <sup>-3</sup>	$6,36 \cdot 10^{-8}$	$5,71 \cdot 10^{-8}$	$6,98 \cdot 10^{-8}$	$6,98 \cdot 10^{-8}$	$6,64 \cdot 10^{-8}$	$7,08 \cdot 10^{-8}$	$6,14 \cdot 10^{-8}$	$5,96 \cdot 10^{-8}$
$(F_1/n)^{1/2}$	0,014	0,011	0,014	0,014	0,059	0,12	0,055	0,1

Таблица 2

Результаты восстановления микроструктуры и водности облака С1 минимизаций по S и  $r_S$ ;  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 6$

Параметры	Систематическое возмущение				Осциллирующее возмущение			
	$\varepsilon < 0,01$		$\varepsilon = -0,1$		$\varepsilon = 0,1$		$\varepsilon = 0,1$	
	$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^j \beta(\lambda_j) \varepsilon$		$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^{j+1} \beta(\lambda_j) \varepsilon$		$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^j \beta(\lambda_j) \varepsilon$		$\delta \beta(\lambda_j) = (-1)^{j+1} \beta(\lambda_j) \varepsilon$	
$r_S$ , МКМ	5,3	5,3	5,3	5,3	5,7	6,1	5,1	4,9
S, КМ <sup>-1</sup>	7,82	7,04	8,61	8,61	7,76	7,69	7,92	7,99
N, с.М <sup>-3</sup>	100	90	110	110	88	76	112	123
Q, з.с.М <sup>-3</sup>	$6,26 \cdot 10^{-8}$	$5,6 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-8}$	$6,6 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$5,8 \cdot 10^{-8}$
$(F_1/n)^{1/2}$	0,001	0,003	0,001	0,001	0,057	0,12	0,052	0,1

При обращении реальных измерений это в определенной степени может служить критерием соответствия аналитической модели реальному распределению.

## 2. ВЛИЯНИЕ ФОНА МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ТОЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МИКРОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОБЛАКА

Наряду с систематическими и случайными ошибками измерения  $\beta(z, \lambda_r)$  важную роль в формировании сигнала обратного рассеяния и его корректной интерпретации играет фон многократного рассеяния. Влияние фона многократного рассеяния на точность восстановления микрофизических параметров облака будет проявляться косвенным путем за счет смещения рассчитываемых профилей  $\beta(z)$  от реально существующих. Уменьшение этого смещения достигается, в первую очередь, путем оптимального выбора метода решения уравнения локации. С этой целью проводился численный эксперимент, в котором отраженный сигнал находился путем решения уравнения переноса методом Монте-Карло. Не останавливаясь на специфических деталях численного моделирования, выполняемого методом Монте-Карло (поскольку они обсуждались ранее в [5, 6], в том числе для целей многочастотного зондирования [7, 8]), отметим лишь некоторые особенности оптической модели рассеивающей среды.

Вопрос выбора длин волн и их минимального количества для оптического зондирования класса облаков, удовлетворяющих обобщенному гамма-распределению, рассматривался нами ранее с общих позиций информативности лидарных измерений [3]. В данном случае расчет сигнала обратного рассеяния был выполнен для трех длин волн: 2,36; 3,51; 5,3 мкм. В целом же алгоритм оптимальной параметризации разрабатывается в плане перспективного использования лидаров с перестраиваемой частотой. Поэтому используемый набор длин волн может быть другим, но с учетом выводов, сделанных в [3]. Оптические свойства облачного слоя с плоскопараллельными границами задавались в форме кусочно-постоянной модели по вертикальной координате  $z$  (интервалы стробирования  $\Delta z = 10$  м), совпадающей с направлением зондирующего луча

$$\beta_i(z_i) = \beta_{ii}, \quad \beta_s(z_i) = \beta_{si}$$

при  $z_{i-1} < z < z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Расчет оптических сечений и функций рассеяния для указанных длин волн был произведен по формулам дифракционной теории Ми для модели жидкокапельного облака типа (1) с параметрами  $\alpha = 6,0$ ,  $b = 1,5$ ,  $a = 1,0$ ,  $a = a(z)$ . Модельный профиль счетной концентрации частиц  $N(z)$  и водности  $Q(z)$ , заданный в соответствии с рекомендацией [9], показан на рис. 4 а. Этот же рисунок качественно иллюстрирует поведение параметра распределения  $a(z)$ , однозначно связанного с  $N(z)$  соотношением (2). Отсчет высоты на рис. 2, 3, 4 производится от нижней границы рассеивающего слоя  $z_0 = 200$  м.

Профили сигналов обратного рассеяния, рассчитанные для граничных условий, близких к экспериментально реализуемым, использовались далее для построения высотных профилей коэффициента ослабления.

Сравнительный анализ методов решения уравнения локации, проведенный нами ранее [11], показал, что наиболее приемлемым методом решения при зондировании облаков является метод, предложенный в работе [10]. Он основан на измерении отношения функционалов вида

$$I(\Delta z_i) = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{P(z)}{P_0} z^2 dz \quad (9)$$

для элементов стробирования  $\Delta z_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и полубесконечного отрезка трассы зондирования

$$I_M(z_i) = \frac{Ag_{\pi M} T_{i-1}^2}{2} \left\{ 1 - \exp \left[ -2 \int_{z_i}^{z_M} \beta_t(z') dz' \right] \right\}, \quad (10)$$

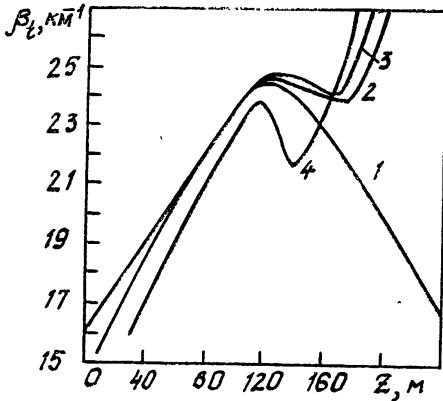


Рис. 2.

Рис. 2. Высотные профили коэффициента ослабления  $\beta_t(z)$  для  $\lambda = 3,51$  мкм, полученные из замкнутого численного эксперимента в условиях фона многократного рассеяния для углов приемной апертуры  $\varphi_d = 3', 20'$  и  $1^\circ$  (кривые 2, 3, 4). Кривая 1 — модельный профиль.

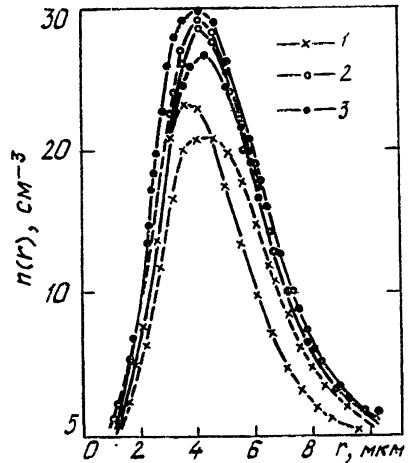


Рис. 3.

Рис. 3. Спектр распределения частиц по размерам, восстановленный по величинам  $\beta_t(z)$  для трех длин волн в различных участках зондируемого облака. Результаты приведены для угла  $\varphi_d = 20'$ .

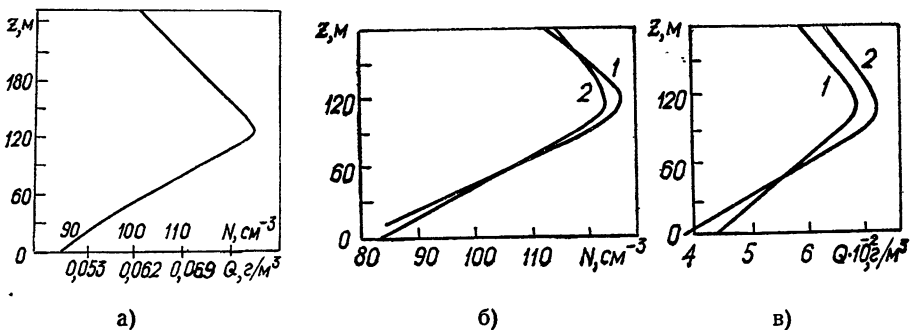


Рис. 4. Профили концентрации  $N(z)$  и влажности  $Q(z)$  в облачном слое: а) модельный; б) восстановленный профиль концентрации  $N(z)$ , восстановленный по величине  $\beta_t(z)$  (кривая 2) для угла  $\varphi_d = 20'$  (кривая 1 — результат восстановления по сигналу однократного рассеяния); в) распределение влажности  $Q(z)$  (получены по тем же данным, что и  $N(z)$ ).

где  $\overline{g_{\pi M}}$  — среднее значение индикатрисы на участке  $[z_i, z_M]$ . При достаточно больших значениях  $z_M$

$$I_M(z_i) = \frac{Ag_{\pi M} T_{i-1}^2}{2}, \quad (11)$$

так как экспоненциальный член  $T_M^2 = \exp \left[ -2 \int_z^{z_M} \beta_t(z') dz' \right]$  и отношение сигналов приводит к безразмерной функции

$$U(\Delta z_i) = \frac{I(\Delta z_i)}{I_M(z_i)} = [1 - \exp(-2 \Delta z_i \beta_{ii})] \frac{g_{\pi i}}{g_{\pi M}}, \quad (12)$$

весьма удобной для практического использования. Хотя в общем случае  $g_{\pi i} \neq g_{\pi M}$ , это неравенство достаточно слабое в случае жидкокапельных аэрозольных сред, поэтому с достаточной степенью точности можно использовать выражение (12) в упрощенной форме:

$$U(\Delta z_i) = 1 - \exp(-2 \Delta z_i \beta_{ii}). \quad (13)$$

Функция  $T_M(z)$  достаточно быстро стремится к нулю, например, при  $\beta_t \Delta z = 3$   $T_M = 0,05$ , при  $\beta_t \Delta z = 4$   $T_M = 0,018$  и т. д. Так как реальные рассеивающие среды всегда имеют конечную протяженность, то по мере продвижения процедуры обработки к внешней (от лидара) границе возникает ситуация, когда измеренный функционал  $I_M(z)$  начинает заметно отличаться от теоретически необходимого асимптотического сигнала, что приводит к смещению в оценке коэффициента ослабления. Этот эффект может быть устранен простой модификацией, разработанной авторами.

Величину  $I_M(z)$  измеряем один раз для элемента  $\Delta z_1$ , затем ведем расчет по следующей итерационной схеме, использующей соотношение (13):

а) измеряем дискретную последовательность функционалов вида  $I(\Delta z_i)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) и асимптотический опорный сигнал

$$I_M(z_1) = I(\Delta z_i) / I_M,$$

где  $z_M$  — расстояние до верхней границы облака;

б) в цикле по индексу стробирования вычисляем

$$U_M(\Delta z_i) = I(\Delta z_i) / I_M;$$

в) находим величину двухлучевого пропускания в  $i$ -м интервале

$$T^2(\Delta z_i) = 1 - U_M(\Delta z_i);$$

г) получаем искомую оптическую характеристику

$$\beta_t(\Delta z_i) = - \frac{1}{2 \Delta z_i} \ln T^2(\Delta z_i); \quad (14)$$

д) пересчитываем асимптотический сигнал для следующего элемента  $\Delta z_{i+1}$  по формуле

$$I_M(\Delta z_{i+1}) = I_M(\Delta z_i) T^2(\Delta z_i), \quad (15)$$

циклически возвращаемся к пункту б) и т. д.

При необходимости алгоритм оценки  $\beta_t(z)$  может быть сформулирован и для дифференциальной формы измеряемого сигнала. Запишем соотношение (13) для интервала  $[0, z]$  в форме

$$T^2(z) = 1 - \frac{\int_0^z \frac{P(z') z'^2}{P_0 A} dz'}{\int_0^{z_M} \frac{P(z') z'^2}{P_0 A} dz'} = \frac{\int_z^{z_M} S(z') dz'}{\int_0^{z_M} S(z') dz'}, \quad (16)$$



откуда непосредственным дифференцированием, с учетом того, что  $\beta_i(z) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \ln T^2(z)$  и того факта, что  $S(z_M) \rightarrow 0$ , получаем

$$\beta_i(z) = \frac{1}{2} \frac{S(z)}{\int_z^{z_M} S(z') dz'} \quad (17)$$

Процедура обработки временной развертки сигнала обратного рассеяния выполняется, как правило, по дискретным отсчетам  $S(z_i) = P(z_i)z_i^2$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Пусть интервалы  $\Delta z$  достаточно малы, чтобы  $T^2(\Delta z) \approx \exp[-2\beta_i(z_{i-1})\Delta z]$ . Тогда соотношение (17) будет реализовываться по следующей схеме:

а) измеряем асимптотический опорный сигнал

$$I_M(z_i) = \int_{z_i}^{z_M} P(z) z^2 dz; \quad (18)$$

б) в цикле по индексу стробирования вычисляем

$$\beta_i(z_i) = \frac{S(z_i)}{2I_M(z_i)}; \quad (19)$$

в) пересчитываем асимптотический сигнал для следующей точки  $z_{i+1}$  по формуле

$$I_M(z_{i+1}) = I_M(z_i) T^2(\Delta z_i), \quad (20)$$

при этом  $T^2(\Delta z_1) = 1$ ;

г) возвращаемся к пункту б) и т. д.

Для более точной оценки функционала (18) полезным может оказаться наличие вспомогательной юстировочной трассы с известным пропуском  $T^2(z_1, z^*)$ . В этом случае

$$I_M(z_1) = \frac{I(z^* - z_1)}{1 - T^2(z_1, z^*)}. \quad (21)$$

Результаты обработки по указанной выше схеме, полученные для длин волн  $\lambda = 2,36; 3,51$  и  $5,3$  мкм, значительно различаются; на рис. 2 они показаны для  $\lambda = 3,51$  мкм.

Достигнутая с удовлетворительной точностью оптическая глубина зондирования  $\tau \approx 3,5$  может рассматриваться, на наш взгляд, как достаточная. Дальнейшее увеличение проникающей способности лидарных методов изучения облаков следует связывать с совершенствованием технологических свойств лазерных систем локации (направленности действия, чувствительности фотоприемной аппаратуры и т. п.).

На следующем этапе численного эксперимента значения коэффициентов ослабления, полученные для выбранных спектральных интервалов, использовались для восстановления микрофизических параметров рассеивающей среды с помощью метода оптимальной параметризации (формулы (6)–(8)).

Окончательные результаты решения обратной задачи, полученные в условиях фона многократного рассеяния, показаны на рис. 3, 4. На рис. 3 представлены функции распределения частиц по размерам для трех элементов трассы:  $\Delta z_1 = 0 \div 10$  м,  $\Delta z_2 = 80 \div 90$  м,  $\Delta z_3 = 140 \div 15$  м. При  $z > 180$  м алгоритм обращения расходится. Наилучшее

совпадение с модельными спектрами (они показаны пунктиром) оказалось в интервале 60—100 м, где невязка восстановленных и модельных профилей  $\beta_1(z)$  была минимальна.

На рис. 4 б, в приведены, соответственно, высотные профили счетной концентрации частиц  $N(z)$  и влажности  $Q(z)$ , полученные по сигналу обратного рассеяния в угле приема 20' (кривая 2) и в приближении однократного рассеяния. До высот  $z \leq 180$  м эти физические характеристики также находятся в хорошем соответствии с модельными значениями (рис. 4 а).

Приведенные результаты иллюстрируют широкие возможности разработанного алгоритма оптимальной параметризации для восстановления основных микрофизических характеристик облачной среды и его достаточную устойчивость к помехе измерения как фоновому, так и аппаратурного характера. Ограничения метода, связанные с априорным предположением о правомерности обобщенного гамма-распределения (1), не являются жесткими. Действительно, анализ экспериментальных данных о спектре облачных капель, выполненный в работах [1, 9], показывает, что в подавляющем большинстве случаев жидкокапельных облаков мы имеем дело с одновершинными распределениями, удовлетворяющими (1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Дейрменджан, Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами, изд. Мир, М., 1971, стр. 375.
2. Э. В. Макиенко, И. Э. Наац, сб. Атмосферная оптика, изд. Наука, М., 1974, стр. 186.
3. Э. В. Макиенко, И. Э. Наац, в кн. Лазерное зондирование атмосферы, изд. Наука, М., 1976.
4. И. Э. Наац, сб. Распространение оптических волн в атмосфере, изд. Наука, Новосибирск, 1975, стр. 202.
5. В. Е. Зуев, Г. М. Креков, А. И. Попков, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 10, 126 (1973).
6. В. Е. Зуев, Г. М. Креков, М. М. Крекова, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 8, 13 (1974).
7. В. Е. Зуев, Г. М. Креков, М. М. Крекова, Э. В. Макиенко, И. Э. Наац, в кн. Распространение оптических волн в атмосфере, изд. Наука, Новосибирск, 1975, стр. 251.
8. V. E. Zuev, G. M. Krekov et al., Fifth-Conference on Laser Radar Studies of the Atmosphere, Conference Abstracts, June 4—6, 1973, Williamsburg Virginia, p. 100.
9. А. М. Боровиков, И. И. Гайворонский, Е. Г. Зак и др., Физика облаков, Гидрометеиздат, Л., 1961, стр. 458.
10. В. А. Ковалев, Труды ГГО, вып. 312, 128 (1973).
11. Г. М. Креков, М. М. Крекова, Э. В. Макиенко, И. Э. Наац, Лазерное зондирование облаков, Препринт ИОА СО АН СССР, Томск, 1975.

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
4 января 1976 г.

#### OPTICAL LOCATION OF MICRO-PHYSICAL CHARACTERISTICS OF SCATTERING MEDIA

G. M. Krekov, M. M. Krekova, E. V. Makienko, I. E. Naats

The restoration of micro-physical characteristics is made by the optimal parametrization method from the results of multy-frequency laser cloud location. The analysis is made of the effect of regular and random measurement errors, background of multiple scattering, as well as a priori choice of the parameters upon the accuracy of restoration of the water content and the micro-structure of scattering particles.

УДК 538.56 : 519.25

## ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ В ОПИСАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Ю. Н. Маков, Р. В. Хохлов

На примере задач о распределенном нелинейном усилителе, привносящем в сигнал свои собственные шумы, рассмотрено использование функционала плотности вероятности для описания случайных волновых процессов. Проведено обобщение на континуум переменных многомерного уравнения Фоккера—Планка. Найден класс решений этого уравнения, описывающих процесс преобразования статистических характеристик сигнала при его распространении в нелинейных активных средах.

### ВВЕДЕНИЕ

Большое многообразие задач статистической радиофизики и радиотехники, теории информации и связи привело к необходимости использования различных методов и подходов в описании случайных процессов. Более традиционным является описание случайных процессов с помощью «дискретных» вероятностных характеристик (конечномерные функции распределения, характеристические функции, моменты и т. п.). Менее традиционным и реже используемым (но более естественным) является «непрерывное» («континуальное») описание случайных процессов с помощью функциональных характеристик. Например, ряд задач статистической гидродинамики и теории распространения света в случайно-неоднородных средах успешно решается с помощью характеристического функционала [1, 2]. Другая возможность континуального описания случайных процессов заключена в применении функционала плотности вероятности или, более кратко, функционала вероятности (ФВ), являющегося предельным случаем  $n$ -мерной функции плотности вероятности. Такое описание эффективно применяется в статистической теории связи для решения задач оптимальной фильтрации и оценки параметров полезных сигналов в шумах [3–6].

Однако до самого последнего времени подобные задачи рассматривались лишь для случайных процессов, зависящих от одной переменной (в большинстве случаев — от времени). При этом для решения указанных задач конструируется ФВ, описывающий конкретный тип случайного процесса (гауссов, пуассоновский и т. п.), и все дальнейшие вычисления ведутся с этим функционалом, вид которого остается неизменным. В последнее время все большее внимание, стимулируемое практическими приложениями, уделяется процессам, зависящим от нескольких переменных. Так, например, в теории приема и обработки сигналов сверхвысокочастотного и оптического диапазонов во многих случаях необходимо рассматривать элементы приемника (усилитель, детектор) как распределенные элементы, а значит, необходимо вести описание случайных сигналов как по временной, так и по пространственной координате. Следовательно, при рассмотрении вопросов прохождения сигнала через распределенные усилители, а также в теории пере-

дачи информации лазерным излучением приходится решать задачи оптимальной фильтрации для случайных волновых процессов, т. е. процессов, эволюционирующих в пространстве и во времени и поэтому описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных (в общем случае стохастическими). В данном случае также удобно описывать случайные волновые процессы с помощью ФВ. Однако при этом возникает задача о трансформации в пространстве функционала, описывающего временные реализации случайного волнового процесса\*. Трансформация ФВ отражает преобразование статистических свойств входных возмущений при их прохождении через протяженные, вообще говоря, нелинейные среды с флуктуирующими параметрами. Примерами таких сред является лазерный усилитель и турбулентная атмосфера. Необходимо отметить, что постановка подобной задачи и подход к ее решению впервые даны в работе одного из авторов [7].

В данной работе рассматривается задача о преобразовании ФВ случайного волнового процесса, проходящего через протяженную активную среду. При этом воздействующие на сигнал флуктуационные силы дельта-коррелированы в пространстве, вследствие чего данный случайный процесс является марковским. Используемый математический аппарат — обобщенное на континуум переменных многомерное уравнение Фоккера—Планка. В работе найден класс решений этого уравнения, описывающих процесс преобразования статистических характеристик сигнала при его распространении в нелинейных активных средах. Все последующее рассмотрение для конкретности отнесено к случаю распределенного усилителя, привносящего в сигнал свои собственные внутренние шумы.

### 1. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В РАСПРЕДЕЛЕННОМ УСИЛИТЕЛЕ

Рассмотрим распределенный одномерный усилитель, в котором действуют распределенные дельта-коррелированные в пространстве случайные силы. Процессы в таком усилителе описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial t} + G(u) = f(u, x, t), \quad (1)$$

где  $V$  — скорость распространения сигнала в усилителе,  $G(u)$  — детерминированная функция, определяющая класс усилителя (линейный или нелинейный),  $f(u, x, t)$  — гауссова случайная функция трех переменных со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \langle f(u, x, t) \rangle &= 0, \\ \langle f(u, x, t) f(u', x', t') \rangle &= K(u, u', x) \delta(t - t') \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (1) вследствие случайного члена в правой части является стохастическим дифференциальным уравнением для случайного процесса  $u(x, t)$ . Статистические характеристики этого процесса будем описывать с помощью ФВ  $W[u(t), x]$ , который является функционалом от временных реализаций рассматриваемого случайного процесса  $u(t)$  и функцией от координаты  $x$ . Данный функционал получается в результате предельного перехода от соответствующей многомерной функции плотности вероятности:

\* Можно также рассматривать трансформацию во времени функционала, описывающего пространственные реализации случайного волнового процесса.



$$\begin{aligned} \frac{\partial W_n}{\partial x} = & \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u_i} \left\{ \left[ G(u_i) - \frac{\partial K[u_i, \tilde{u}, x]}{\partial u_i} \Big|_{\tilde{u}=u_i} x(0) \right] W_n \right\} \Delta + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \{ K[u_i, u_j, x] x(\tau_i - \tau_j) W_n \} \Delta^2, \end{aligned} \quad (7)$$

в котором с целью дальнейших вычислений слагаемые в правой части умножены и поделены на одну и ту же величину, причем  $\Delta = \tau_k - \tau_{k-1}$ .

Переходя в (7) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  и принимая во внимание предельный переход (3), превращение интегральных сумм в интегралы, переход оператора  $\frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial u}$  в оператор функциональной производной

$\frac{\delta}{\delta u(\tau)}$ , мы получаем функциональное уравнение Фоккера—Планка, определяющее трансформацию ФВ  $W$  вдоль оси  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = & \int \frac{\delta}{\delta u(\tau)} \left\{ \left[ G(u(\tau)) - x(0) \frac{\partial K[u(\tau), \tilde{u}, x]}{\partial u(\tau)} \Big|_{\tilde{u}=u(\tau)} \right] W \right\} d\tau + \\ & + \iint \frac{\delta^2}{\delta u(\tau_1) \delta u(\tau_2)} \{ x(\tau_1 - \tau_2) K[u(\tau_1), u(\tau_2), x] W \} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Характерной особенностью уравнения (8) является действие оператора функциональной производной не только на функционал  $W$ , но и на функции от  $u(\tau)$ , например,  $\frac{\delta G(u(\tau))}{\delta u(\tau)}$ ,  $\frac{\delta^2 K[u(\tau_1), u(\tau_2)]}{\delta u(\tau_1) \delta u(\tau_2)}$  и т. д. Как показано в Приложении, при этом в уравнении (8) появляются слагаемые с особенностями вида  $\frac{1}{\Delta}$ ,  $\frac{1}{\Delta^2}$  ( $\Delta \rightarrow 0$ ).

В дальнейшем рассмотрим случай, когда

$$K[u(\tau_1), u(\tau_2), x] = k[u(\tau_1), x] k[u(\tau_2), x].$$

## 2. РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УСИЛИТЕЛЯ

В общем случае задача о нахождении решения функционального уравнения (8) является крайне сложной. Однако в одном частном случае, включающем в себя широкий класс решений, уравнение (8) может быть решено.

Будем искать решение уравнения (8) в виде функционала, являющегося обобщенным видом квадратичного (например, гауссова) функционала:

$$\begin{aligned} W[u(\tau), x] = & \psi(x) e^{\frac{1}{\Delta} \int A[u(\tau), x] d\tau} \exp \left\{ -\varphi(x) \iint \theta(\tau_1, \tau_2) \times \right. \\ & \left. \times \Phi[u(\tau_1), x] \Phi[u(\tau_2), x] d\tau_1 d\tau_2 \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A(u, x)$ ,  $\Phi(u, x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\varphi(x)$  — неизвестные функции, подлежащие определению. Функция  $\theta(\tau_1, \tau_2)$  находится из соотношения [4]

$$\int x(\tau_1, \tau) \theta(\tau, \tau_2) d\tau = \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (10)$$

Функциональный множитель  $e^{\frac{1}{\Delta} \int A(u) d\tau}$  введен в решение для «компенсации» членов уравнения (8), включающих в себя особенности.

После подстановки (9) в уравнение (8) или эквивалентное ему (П.2) получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{\dot{\psi}}{\psi} + \frac{1}{\Delta} \int A d\tau - \dot{\varphi} \iint \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi_1 \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2 - 2\varphi \iint \theta(\tau_1, \tau_2) \times \\
 & \times \dot{\Phi}_1 \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{\Delta} \int G' d\tau - \frac{x(0)}{\Delta} \int (k'k)' d\tau + \frac{1}{\Delta} \int G(u) A' d\tau - \\
 & - \frac{x(0)}{\Delta} \int k'k A' d\tau - 2\varphi \int G(u(\tau_1, x)) \Phi' \int \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi_2 d\tau_2 d\tau_1 + \\
 & + 2x(0)\varphi \int k'k \Phi_1' \int \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi_2 d\tau_2 d\tau_1 + \frac{x(0)}{\Delta} \int k''k d\tau + \\
 & + \frac{1}{\Delta^2} \iint x(\tau_1 - \tau_2) k_1' k_2' d\tau_1 d\tau_2 + \frac{x(0)}{\Delta} \int k'^2 d\tau + \frac{x(0)}{\Delta} \int k k'' d\tau + \\
 & + \frac{2}{\Delta^2} \iint k_1' k_2 x(\tau_1 - \tau_2) A_2' d\tau_1 d\tau_2 + 2 \frac{x(0)}{\Delta} \int k k' A' d\tau - \\
 & - 4\varphi x(0) \int k_1 k_1' \Phi_1' \int \theta(\tau_2, \tau_1) \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2 - \frac{4\varphi}{\Delta} \iint k_1' k_2 x(\tau_1 - \tau_2) \times \\
 & \times \Phi_2' \int \theta(\tau_3, \tau_2) \Phi_2 d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \frac{x(0)}{\Delta} \int k^2 A'' d\tau + \frac{1}{\Delta^2} \iint x(\tau_1 - \tau_2) \times \\
 & \times k_1 k_2 A_1' A_2' d\tau_1 d\tau_2 - \frac{4\varphi}{\Delta} \int x(\tau_1 - \tau_2) k_1 k_2 A_1' \Phi_2' \int \theta(\tau_3, \tau_2) \times \\
 & \times \Phi_3 d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 - 2x(0)\varphi \int \Phi_1'' k_1^2 \int \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi_2 d\tau_2 d\tau_1 - \\
 & - 2\varphi \iint x(\tau_1 - \tau_2) k_1 k_2 \Phi_1' \Phi_2' \theta(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \\
 & + 4\varphi^2 \iint x(\tau_1 - \tau_2) k_1 k_2 \Phi_1' \Phi_2' \iint \theta(\tau_1, \tau_2) \theta(\tau_2, \tau_4) \Phi_3 \Phi_4 d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \\
 & (\Delta \rightarrow 0).
 \end{aligned} \tag{11}$$

В уравнении (11) и далее точкой и штрихом обозначены производные по  $x$  и  $u$  соответственно. Индексы у функций соответствуют переменной интегрирования, например,  $\Phi_1 = \Phi[u(\tau_1), x]$  и т. п.

Громоздкость уравнения (11) усугубляется еще и тем, что в разные слагаемые входят особенности разного порядка — от нулевого до второго. Поэтому в искомом решении должны взаимно уничтожаться слагаемые с особенностью одного порядка. Эти две существенные трудности, связанные с решением уравнения (11), эффективно преодолеваются введением следующих двух соотношений:

$$k[u(\tau), x] = \frac{\eta(x)}{\Phi'[u(\tau), x]} \quad (\eta(x) \text{ — произвольная функция}), \tag{12}$$

$$k[u(\tau), x] A'[u(\tau), x] = -k'[u(\tau), x],$$

или, что то же самое,  $A = -\ln k = \ln \Phi' - \ln \eta$ .

Условия (12) упрощают уравнение (11), взаимно уничтожая все слагаемые с бесконечностью второго порядка, почти все слагаемые с бесконечностью первого порядка и часть слагаемых с бесконечностью нулевого порядка. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\psi}}{\psi} + \frac{1}{\Delta} \int \frac{1}{\Phi'} (\dot{\Phi})' d\tau - \frac{\dot{\eta}}{\eta \Delta} \int d\tau - \dot{\varphi} \iint \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi_1 \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2 - \\ - 2\varphi \iint \theta(\tau_1, \tau_2) \dot{\Phi}_1 \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{\Delta} \int \frac{1}{\Phi'} [G(u)\Phi']' d\tau - \\ = 2\varphi \int G(u)\Phi_1' \int \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2 - \frac{2\varphi\eta^2}{\Delta} \int d\tau + 4\varphi^2\eta^2 \times \\ \times \iint \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi_1 \Phi_2 d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (13)$$

При выводе уравнения (13) использовались следующие очевидные соотношения, вытекающие из (12) и (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} A. = \frac{\partial}{\partial x} (\ln \Phi' - \ln \eta) = \frac{1}{\Phi'} (\dot{\Phi})' - \frac{\dot{\eta}}{\eta}, \\ k' = -\eta\Phi''/\Phi'^2 = -k^2\Phi''/\eta, \\ \iint \theta(\tau_1, \tau_3) \theta(\tau_2, \tau_4) \kappa(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \theta(\tau_3, \tau_4), \\ \int \kappa(\tau_1 - \tau_2) \theta(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 = \delta(0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta}. \end{aligned}$$

Интегральное уравнение (13) естественным образом распадается на четыре уравнения для неизвестных функций:

$$\begin{aligned} G\Phi' - \dot{\Phi} &= 0, \\ (G\Phi' - \dot{\Phi})' &= 0, \\ \dot{\varphi} + 4\varphi^2\eta^2 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\dot{\psi}}{\psi} + 2\varphi\eta^2 N - \frac{\dot{\eta}}{\eta} N = 0,$$

причем решение первого уравнения будет и решением второго. В последнем уравнении  $N = \frac{\tau_k - \tau_H}{\Delta} \rightarrow \infty$ , где  $\tau_k - \tau_H$  — временной интервал интегрирования в функционале вероятности.

Из последних двух уравнений (14) находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{4 \left( \int \eta^2 dx + \sigma_1 \right)}, \quad \psi(x) = \frac{\eta^N \sigma_2^{N/2}}{\left( \int \eta^2 dx + \sigma_1 \right)^{N/2}}, \quad (15)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  — произвольные постоянные. Таким образом, в соответствии с (9) решение записывается в следующем виде:



$$W[u(\tau), x] = \frac{1}{\left(\int \eta^2 dx + \sigma_0\right)^{N/2}} e^{\frac{1}{\Delta} \int \ln \Phi' d\tau} \times \quad (16)$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{\iint \theta(\tau_1, \tau_2) \Phi[u(\tau_1), x] \Phi[u(\tau_2), x] d\tau_1 d\tau_2}{2 \left(2 \int \eta^2 dx + \sigma_0\right)} \right\},$$

где при заданном  $G(u)$  функция,  $\Phi(u, x)$  находится из первого уравнения (14).

Отметим, что наше решение (16) получено при определенной связи между  $k[u(\tau), x]$  и  $G(u, x)$ , имеющей согласно (12) и второму уравнению (14) вид дифференциального уравнения:

$$G'k - Gk' + \dot{k} - \frac{\dot{\eta}}{\eta} k = 0. \quad (17)$$

В этом смысле пары функций  $G(u, x)$  и  $k(u, x)$ , удовлетворяющие (17), можно назвать сопряженными.

В качестве примера рассмотрим прохождение сигнала через нелинейный усилитель, для которого  $G(u) = -\gamma u + \beta u^3$ . Как известно, задача о преобразовании статистических характеристик нелинейными системами решается лишь приближенными методами [9]. Однако в случае сопряженной пары  $G(u, x)$  и  $k(u, x)$  можно точно найти преобразование ФВ. В рассматриваемом случае усилителя с кубической нелинейностью решением первого уравнения (14) является

$$\Phi[u(\tau), x] = e^{-\gamma x u(\tau)} \left[ 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau) \right]^{-1/2}.$$

Сопряженное значение  $k[u, x]$  находим из (12):

$$k[u(\tau), x] = \eta(x) e^{\gamma x} \left[ 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau) \right]^{3/2}.$$

Полагая, например,  $\eta(x) = \alpha e^{-\gamma x}$ , из (16) получаем решение для ФВ:

$$W[u(\tau), x] = \frac{\exp \left[ -N\gamma x + \frac{1}{\Delta} \int \ln \left[ 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau) \right] d\tau \right]}{\left[ \frac{\alpha}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) + \sigma_0 \right]^{N/2}} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{\iint \theta(\tau_1, \tau_2) \left\{ e^{-\gamma x u(\tau_1)} \left[ 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau_1) \right]^{-1/2} - g(\tau_1) \right\}}{2 \left[ \frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) + \sigma_0 \right]} \right\} \times \quad (18)$$

$$\times \left[ e^{-\gamma x u(\tau_2)} \left( 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau_2) \right)^{-1/2} - g(\tau_2) \right] d\tau_1 d\tau_2,$$

где  $g(\tau)$  — произвольная функция, определяемая граничными условиями.

Этот функционал, как видно из его структуры, является гауссовым относительно

$$\Phi[u(\tau), x] = e^{-\gamma x} u(\tau) \left[ 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau) \right]^{-1/2}.$$

Кроме того, из (18) следует, что полученное решение описывает изменение в усилителе входных сигналов с функционалом вида

$$W_{x=0} = \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_0} \iint \theta(\tau_1, \tau_2) [u(\tau_1) - g(\tau_1)] [u(\tau_2) - g(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2, \right.$$

который является обычным гауссовым функционалом.

Как уже было отмечено ранее, решение (18) содержит бесконечный множитель, структурно зависящий от пространственной координаты  $x$  и от самой реализации случайного волнового процесса  $u(\tau)$ . Последняя зависимость характерна для нелинейного распределенного усилителя, а сам бесконечный множитель, зависящий от  $u(\tau)$ , ответствен за перенормировку функционального пространства, на котором определены реализации данного случайного процесса, при его нелинейном преобразовании.

Определенные трудности, возникающие при работе с ФВ, содержащим бесконечные множители, устраняются при решении задач статистической радиотехники и теории связи по оптимальному обнаружению сигнала в шумах. В таких задачах фигурирует отношение правдоподобия, которое само является функционалом, но не содержащим бесконечных множителей. Например, для рассмотренного нелинейного усилителя на основе решения (18) получаем следующее отношение правдоподобия:

$$L[u(\tau), x] = \exp \left\{ \frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) + \sigma_0} \left[ -\frac{1}{2} \int g(\tau) h(\tau) d\tau + \int e^{-\gamma x} u(\tau) \left( 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau) \right)^{-1/2} h(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (19)$$

где  $h(\tau) = \int \theta(\tau, \xi) g(\xi) d\xi$ ,  $g(\tau) = \int x(\tau, \xi) h(\xi) d\xi$ .

Согласно критерию Неймана—Пирсона решение о наличии сигнала принимается при

$$L[u(\tau), x] > l.$$

После логарифмирования это условие приводится к виду

$$J = \int e^{-\gamma x} u(\tau) \left[ 1 - \frac{\beta}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) u^2(\tau) \right]^{-1/2} h(\tau) d\tau > l_0, \quad (20a)$$

где

$$l_0 = \left[ \frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) + \sigma_0 \right] \ln l + \frac{1}{2} \int g(\tau) h(\tau) d\tau. \quad (20б)$$

За счет произвольной функции  $l(x)$ , входящей в (20 б), зависимость  $l_0$  от  $x$  в конечном итоге определяется не выражением (20 б), а наиболее оптимальными характеристиками обнаружителя. Мы будем выбирать функцию  $l_0(x)$  такой, чтобы при любом  $x$  вероятность ложной тревоги была бы равна заданному значению. В свою очередь вероятность ложной тревоги равна

$$F_1 = \int_{l_0(x)}^{\infty} \omega_0(J) dJ, \quad (21)$$

где  $\omega_0(J)$  — плотность вероятности случайной величины  $J$  в отсутствие сигнала.

Поскольку  $J = \int \Phi[u(\tau), x] h(\tau) d\tau$ , где согласно сделанному выше замечанию  $\Phi[u(\tau), x]$  распределена по нормальному закону, то и сама  $J$  представляет собой нормальную случайную величину, в отсутствие сигнала имеющую нулевое среднее и дисперсию

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= \iint \left[ \frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) + \sigma_0 \right] x(\tau_1, \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \left[ \frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) + \sigma_0 \right] \int g(\tau) h(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (21) находим

$$F_1 = 1 - \Phi \left( \frac{l_0(x)}{\sigma(x)} \right), \quad (23)$$

где  $\Phi(y)$  — интеграл вероятности.

По заданному значению ложной тревоги  $F_1$  из (22), (23) получаем зависимость  $l_0(x)$ :

$$l_0(x) = \left\{ \left[ \frac{\alpha}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma x}) + \sigma_0 \right] \int g(\tau) h(\tau) d\tau \right\}^{1/2} \Phi^{-1}(1 - F_1). \quad (24)$$

Выражение (24) показывает, что для обеспечения заданного значения вероятности ложной тревоги  $F_1$  в любой точке координаты  $x$  необходимо изменять порог  $l_0$ , причем согласно (24), двигаясь в сторону возрастания координаты  $x$ , следует повышать  $l_0$ .

Таким образом, рассмотрение в данной работе задачи о прохождении сигнала через распределенный усилитель показывает, что аппарат функциональных уравнений Фоккера—Планка позволяет эффективно исследовать трансформацию статистических свойств сигнала при распространении через протяженные нелинейные среды с флуктуирующими параметрами. Найденный явный вид отношения правдоподобия (19) позволяет использовать его для синтеза оптимального обнаружителя сигналов.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим результат действия оператора функциональной производной на функцию  $K[u(\tau_1), u(\tau_2)] = k[u(\tau_1)]k[u(\tau_2)]$ , входящую в функциональное уравнение Фоккера—Планка (8).

Основываясь на определении функциональной производной от функции

$$\frac{\delta F[u(t)]}{\delta u(\xi)} = \frac{\partial F}{\partial u} \delta(t - \xi),$$

имеем

$$\frac{\delta \{k[u(\tau_1)]k[u(\tau_2)]\}}{\delta u(\tau_1)} = k'[u(\tau_1)]k[u(\tau_2)]\delta(0) + k[u(\tau_1)]k'[u(\tau_2)]\delta(\tau_1 - \tau_2),$$

$$\frac{\delta^2 \{k[u(\tau_1)]k[u(\tau_2)]\}}{\delta u(\tau_1) \delta u(\tau_2)} = k''[u(\tau_1)]k[u(\tau_2)]\delta(0)\delta(\tau_1 - \tau_2) + \quad (\text{П.1})$$

$$+ k'[u(\tau_1)]k'[u(\tau_2)]\delta(0)\delta(0) + k'[u(\tau_1)]k'[u(\tau_2)]\delta(\tau_1 - \tau_2) +$$

$$+ k[u(\tau_1)]k''[u(\tau_2)]\delta(0)\delta(\tau_1 - \tau_2),$$

где  $\delta(0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta}$ .

Определяя формальное соотношение между операторами функциональной и обычной производной  $\frac{\delta}{\delta u(\tau)} = \frac{1}{\Delta} \frac{d}{du}$ , а также между  $\delta$ -функцией и символом Кронекера  $\delta(t_i - t_j) = \frac{\delta_{ij}}{\Delta}$ , можно получить из (П.1):

$$\frac{d\{k[u(\tau_i)]k[u(\tau_j)]\}}{du(\tau_i)} = k'[u(\tau_i)]k[u(\tau_j)] + k[u(\tau_i)]k'[u(\tau_j)]\delta_{ij}.$$

Подставляя (П.1) в уравнение (8), получим функциональное уравнение Фоккера—Планка в развернутом виде:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int \{G - x(0)k'k\} \frac{\delta W}{\delta u(\tau)} d\tau + W \frac{1}{\Delta} \int G'(u(\tau)) d\tau +$$

$$+ W \frac{x(0)}{\Delta} \int k k'' d\tau + W \frac{1}{\Delta^2} \iint k'[u(\tau_1), x] k'[u(\tau_2), x] \times$$

$$\times x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \frac{2}{\Delta} \iint x(\tau_1 - \tau_2) k'[u(\tau_1), x] \times \quad (\text{П.2})$$

$$\times k[u(\tau_2), x] \frac{\delta W}{\delta u(\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 + 2x(0) \int k k' \frac{\delta W}{\delta u(\tau)} d\tau +$$

$$+ \iint x(\tau_1 - \tau_2) k[u(\tau_1), x] k[u(\tau_2), x] \frac{\delta^2 W d\tau_1 d\tau_2}{\delta u(\tau_1) \delta u(\tau_2)}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. II, изд. Наука, М., 1967.
2. В. И. Клячкин, В. И. Татарский, УФН, 110, № 4 (1973).
3. И. Н. Амиантов, Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделение сигналов из шумов, изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, М., 1958.
4. И. Н. Амиантов, Избранные вопросы статистической теории связи, изд. Сов. радио, М., 1971.
5. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. В. И. Федосеев, Ф. В. Широков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 246 (1975).
7. Р. В. Хохлов, О марковских волновых процессах, Доклад на III Всесоюзной конференции по физическим основам передачи информации лазерным излучением, Киев, 1973.
8. Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд. Мир, М., 1968.
9. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

APPLICATION OF THE FUNCTIONAL OF PROBABILITY  
DENSITY IN DESCRIPTION OF THE RANDOM WAVE PROCESSES*Yu. N. Makov, R. V. Khokhlov*

By the example of the problem of the distributed non-linear amplifier which introduces its own noises into a signal, application of the functional of the probability density to describe the random wave processes is considered. The continuum of variables of the Fokker—Plank multidimensional equation has been generalized. A class of solutions of this equations which describe the process of transformation of statistic signal characteristics in its propagation in non-linear active media is found.

---

УДК 538.56 : 519.25

## СОПОСТАВЛЕНИЕ ДИАГРАММНЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*О. Г. Налбандян, В. И. Татарский*

Рассмотрены линейные стохастические уравнения, под решением которых понимается нахождение усредненного значения стохастического решения. Известно, что искомая функция может быть описана либо бесконечной цепочкой зацепляющихся уравнений, либо уравнением Дайсона, массовый оператор которого содержит бесконечное число диаграмм. В настоящей работе прослежена связь между способом замыкания бесконечной цепочки и диаграммным видом получающегося при этом массового оператора, введены понятия индексов связности и сложности диаграмм. Описан диаграммный вид первого и второго марковских приближений. Предложен новый метод последовательных приближений — метод кратных подстановок, на основе которого введено понятие кратных приближений Бурре. В качестве примера рассмотрено одномерное линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим интегральное стохастическое уравнение для функции Грина  $G(x, x_0)$  с произвольным ядром

$$G(x, x_0) = g(x, x_0) + \int g(x, x') \varepsilon(x') G(x', x_0) d^n x', \quad (1)$$

где  $\varepsilon(x)$  — гауссово случайное поле. Не снижая общности задачи, можно предположить, что  $\langle \varepsilon \rangle = 0$ , где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайного поля  $\varepsilon$ .

Проинтегрировав уравнение (1) по переменной  $x_0$  с некоторой весовой функцией  $\varphi(x_0)$ , приходим к уравнению

$$U(x) = U_0(x) + \int g(x, x') \varepsilon(x') U(x') d^n x'. \quad (2)$$

Здесь

$$U(x) = \int G(x, x_0) \varphi(x_0) d^n x_0, \quad U_0(x) = \int g(x, x_0) \varphi(x_0) d^n x_0.$$

Следует заметить, что к уравнению (2) сводятся произвольные линейные дифференциальные уравнения вида

$$\hat{L} U(x) = \varepsilon(x) U(x), \quad (3)$$

при этом  $g(x, x_0)$  представляет собой функцию Грина уравнения (3) при  $\varepsilon(x) \equiv 0$ .

Под решением стохастической задачи мы будем понимать нахождение усредненного значения функции  $\langle U(x) \rangle \equiv \bar{U}(x)$ , либо усредненного значения функции  $\langle G(x, x_0) \rangle \equiv \bar{G}(x, x_0)$ ,

Проитерлируем и усредним уравнение (2). Будем иметь

$$\bar{U}(x) = U_0(x) + \iint g(x, x') g(x', x'') \langle \varepsilon(x') \varepsilon(x'') U(x'') \rangle d^n x' d^n x''. \quad (4)$$

Для нахождения корреляции  $\langle \varepsilon(x') \varepsilon(x'') U(x'') \rangle$  воспользуемся соотношением Фурутцу—Новикова [1, 2]. Получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x') \varepsilon(x'') U(x'') \rangle &= \int B(x', x_1) \left\langle \frac{\delta [\varepsilon(x'') U(x'')]}{\delta \varepsilon(x_1)} \right\rangle d^n x_1 = \\ &= B(x', x'') \bar{U}(x'') + \iint B(x', x_1) B(x'', x_2) \times \\ &\quad \times \left\langle \frac{\delta^2 U(x'')}{\delta \varepsilon(x_1) \delta \varepsilon(x_2)} \right\rangle d^n x_1 d^n x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив полученное выражение в (4), имеем

$$\begin{aligned} \bar{U}(x) &= U_0(x) + \iint g(x, x') g(x', x'') B(x', x'') \times \\ &\quad \times \bar{U}(x'') d^n x' d^n x'' + \iiint g(x, x') g(x', x'') B(x', x_1) \times \\ &\quad \times B(x'', x_2) S_2(x'', x_1, x_2) d^n x' d^n x'' d^n x_1 d^n x_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где введено обозначение

$$S_n(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\delta^n U(x)}{\delta \varepsilon(x_1) \delta \varepsilon(x_2) \dots \delta \varepsilon(x_n)} \right\rangle.$$

Нетрудно получить уравнение и для функции  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_2(x, y, z) &= S_2^0(x, y, z) + \\ &+ g(x, y) \iint g(y, x') B(x', x_1) S_2(x', x_1, z) d^n x' d^n x_1 + \\ &+ g(x, z) \iint g(z, x') B(x', x_1) S_2(x', x_1, y) d^n x' d^n x_1 + \\ &+ \iint g(x, x') g(x', y) B(x', x_1) S_2(y, x_1, z) d^n x' d^n x_1 + \\ &+ \iint g(x, x') g(x', z) B(x', x_1) S_2(z, x_1, y) d^n x' d^n x_1 + \\ &+ \iint g(x, x') g(x', x_1) B(x', x_1) S_2(x_1, y, z) d^n x' d^n x_1 + \\ &+ \iiint g(x, x') g(x', x'') B(x', y) B(x'', y'') S_4(x'', y, z, y', y'') \times \\ &\quad \times d^n x' d^n x'' d^n y' d^n y'', \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$S_2^0(x, y, z) = g(x, y) g(y, z) \bar{U}(z) + g(x, z) g(z, y) \bar{U}(y).$$

Из (7) следует, что функция  $S_2$  выражается через функцию  $S_4$ . Для нахождения точного решения необходимо разрешить бесконечную

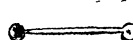




(11)

Замыкание цепочки (8) однозначно связано с диаграммным видом получающегося при этом массового оператора. Для выяснения этой связи введем понятие индекса связности элемента диаграммы.

Элементом диаграммы будем называть графическую запись

 функции  $g(x_i, x_{i+1})$ . Индексом связности элемента диа-

граммы назовем число пунктирных линий, соответствующих корреляционным функциям, простирающихся над данным элементом. При этом мы предполагаем, что корреляционные функции рисуются только над элементами диаграммы. Отдельная диаграмма или совокупность диаграмм характеризуются максимальным индексом связности входящих в диаграммы элементов. Например, вторая диаграмма в выражении (11) имеет максимальный индекс связности, равный двум, а четвертая диаграмма, равно как и вся совокупность приведенных диаграмм, имеет максимальный индекс связности, равный трем.


В дальнейшем нам понадобится также понятие индекса сложности диаграммы. Среди пунктирных линий диаграммы существует одна (или несколько) имеющая максимальное число пересечений с линиями других корреляционных функций. Это число пересечений назовем индексом сложности диаграммы. Совокупность диаграмм характеризуется максимальным индексом сложности входящих в нее диаграмм.

Замкнем систему (8), приравняв нулю величину  $S_{2n}$ . Тогда в массовом операторе уравнения, соответствующего такому приближению, точно учитываются все диаграммы с максимальным индексом связности, не большим  $2n - 1$ . Если, например, положить  $S_2 = 0$ , что соответствует предположению

$$\langle \varepsilon(x') \varepsilon(x'') U(x'') \rangle = B(x', x'') \bar{U}(x''), \quad (12)$$

то мы получим приближение Бурре [4]:

$$\bar{U}(x) = U_0(x) + \iint g(x, x') g(x', x'') B(x', x'') \bar{U}(x'') d^n x' d^n x'', \quad (13)$$

Массовый оператор в приближении Бурре содержит единственную одно-  
связную несложную диаграмму  . Решение уравнения

(13) может быть записано в виде суммы диаграммы:

$$\begin{aligned}
 \text{thick line} &= \text{solid line} + \text{solid line with one dashed arc} + \text{solid line with two dashed arcs} \\
 &+ \text{solid line with three dashed arcs} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Предположим, что по одной из переменных  $(x_1, \dots, x_n)$ , которую мы обозначим через  $t$ , выполняется условие динамической причинности. Это означает, что при  $t' > t$

$$g(x, x') \equiv g(t, \rho; t', \rho') = 0.$$

Если в этом случае в уравнении для  $S_{2n}$  цепочки (8) сделать предположение о дельта-коррелированности  $\epsilon$  по переменной  $t$ , то легко показать, что последнее слагаемое  $gBBgS_{2n+2}$  тождественно обращается в нуль и тем самым цепочка обрывается. Если такое предположение сделать в первом уравнении цепочки (8), т. е. в уравнении (6), то мы получим, пользуясь терминологией работы [5], первое марковское приближение:

$$U(x) = U_0(x) + \iint g(x, x') g(x', x'') B_{\text{эфф}}(x', x'') \bar{U}(x'') d^n x' d^n x'', \tag{15}$$

где

$$B_{\text{эфф}}(x', x'') = \delta(t' - t'') A(\rho', \rho''), \quad A(\rho', \rho'') = \int_{-\infty}^{\infty} B(t', \rho'; t'', \rho'') dt''.$$

Дельта-коррелированную вдоль динамической переменной корреляционную функцию будем изображать пунктирным треугольником. Тогда уравнение (15) примет следующий диаграммный вид:

$$\text{thick line} = \text{solid line} + \text{solid line with one dashed triangle}
 \tag{15}$$

а его решение, соответственно, представится в виде суммы диаграмм:

$$\begin{aligned}
 \text{thick line} &= \text{solid line} + \text{solid line with one dashed triangle} + \text{solid line with two dashed triangles} \\
 &+ \text{solid line with three dashed triangles} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Если предположить дельта-коррелированность  $\epsilon$  во втором уравнении цепочки (8), т. е. в уравнении (7), не предполагая таковой в первом, то получится третье марковское приближение. Второе же марковское приближение

$$\begin{aligned}
 \bar{U}(x) &= U_0(x) + \iint g(x, x') g(x', x'') B(x', x'') \bar{U}(x'') d^n x' d^n x'' + \\
 &+ \iiint g(x, x') g(x', x'') B(x', x_1) B_{\text{эфф}}(x'', x_2) S_2(x'', x_1, x_2) \times \\
 &\times d^n x' d^n x'' d^n x_1 d^n x_2
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

имеет следующий диаграммный вид:

$$\text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \quad (18)$$

или

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---}, \quad (19)$$

где — функция Грина (16) уравнения (15), соответствующего первому марковскому приближению. Другими словами, второе марковское приближение есть приближение Бурре, в массовом операторе которого вместо исходной функции Грина представлена функция Грина, найденная в первом марковском приближении. Подобная процедура построения массового оператора на функциях Грина, найденных в том или ином приближении, и составляет основу предлагаемого метода кратных подстановок.

### МЕТОД КРАТНЫХ ПОДСТАНОВОК

Рассмотрим этот метод в наиболее общем виде. Пусть мы имеем уравнение Дайсона (9). Оно является нелинейным, его массовый оператор  $Q$  содержит бесконечное число диаграмм. Максимальные индексы связности и сложности массового оператора также бесконечны. Выразим решение уравнения для вершинной части (10) в виде бесконечного ряда, содержащего только простые (точечные) вершины и искомые функции  $\bar{G}$ , и оборвем ряд на  $N$ -м члене:

$$\Delta_{A1} = \left( \bullet + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \right) \quad N \text{ членов} \quad (20)$$

Массовый оператор уравнения Дайсона (9) с укороченным рядом для вершинной части состоит из бесконечного числа диаграмм, имеет бесконечный максимальный индекс связности и конечный максимальный индекс сложности  $k$ . Такое уравнение по-прежнему трудно решить. Например, даже если в выражении (20) оставить всего один член в виде точечной вершины, то уравнение Дайсона переходит в приближение Крейкнана [6]:

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---}, \quad (21)$$

общих методов решения которого не существует.

Для решения уравнения Дайсона с, вообще говоря, укороченным рядом для вершинной части линеаризуем его:

$$\bar{G}_1 = \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} = \text{---} + \text{---} \triangle \text{---} \quad (22)$$

Здесь вершинную часть  $\triangle$ , удовлетворяющую уравнению

$$\triangle = \bullet + \triangle + \triangle + \dots, \quad (23)$$

мы вновь представили в виде диаграммного ряда и вновь оборвали ряд на  $N$ -м члене:

$$\triangle_N = \left( \bullet + \triangle + \triangle + \dots \right) \cdot \quad (24)$$

Массовый оператор уравнения (22) с укороченным рядом для вершинной части содержит уже конечное число диаграмм, имеет конечный максимальный индекс связности  $J$ . Максимальный индекс сложности массового оператора равен прежнему значению  $k$ . Число диаграмм  $N$ , учитываемых в (24), выбирается так, чтобы мы могли решить линейное уравнение (22).

Решив уравнение (22), подставим полученную функцию Грина  $\bar{G}_1$  вместо функций  $g$  массового оператора уравнения (22). Вновь получим линейное уравнение

$$\bar{G}_2 = \text{---} + \text{---} \triangle_N \text{---}, \quad \text{---} = \bar{G}_1,$$

$$\triangle_N = \left( \bullet + \triangle + \triangle + \dots \right) \quad \text{N членов:} \quad (25)$$

с массовым оператором того же вида, что и в (22). Заметим, что функция Грина  $\bar{G}_1$ , представляющая собой бесконечную сумму несвязных комбинаций диаграмм массового оператора  $Q_1$ , имеет максимальный индекс связности  $J$  и максимальный индекс сложности  $k$ . После подстановки оказывается, что массовый оператор  $Q_2$  уравнения (25) уже содержит бесконечное число диаграмм, причем максимальный индекс связности равен  $2J$ , а максимальный индекс сложности по-прежнему равен  $k$ . Таким образом, подобная подстановка позволяет, не усложняя топологическую структуру массового оператора, просумми-



В пределе, при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n$ -кратное приближение Бурре переходит в приближение Крейкнана (21).

Интересно сравнить предлагаемый метод кратных подстановок с другим методом, идея которого восходит к работам [7-9]. Запишем уравнение Дайсона (9) в операторном виде

$$\bar{G} = g_1^* + g Q \bar{G} \quad (28)$$

с произвольным массовым оператором  $Q$ . Предположим, что это уравнение трудно решить ввиду сложности, высокой связности и большого числа диаграмм в массовом операторе  $Q$ . Теперь запишем уравнение (28) в некотором, легко решаемом приближении

$$\bar{G}_1 = g + g Q_1 \bar{G}_1^*, \quad (29)$$

где массовый оператор  $Q_1$  представляет собой некоторую совокупность, как правило, наиболее простых диаграмм из  $Q$ . Выразив  $g$  из (29) и подставив в (28), имеем

$$\bar{G} = (E + Q_1 \bar{G}_1)^{-1} \bar{G}_1 (E + Q \bar{G}), \quad (30)$$

где  $EA = AE = A$ . После несложных преобразований получается уравнение, выражающее искомую функцию  $\bar{G}$  через  $\bar{G}_1$  и  $Q - Q_1$ :

$$\bar{G} = \bar{G}_1 + \bar{G}_1 (Q - Q_1) \bar{G}. \quad (31)$$

Таким образом, в результате перехода от уравнения (28) к уравнению (31) в массовом операторе пропадают диаграммы, учтенные в (29). Поскольку в  $Q_1$  были сосредоточены наиболее простые диаграммы, то преимущество уравнения (31) перед уравнением (28) представляется сомнительным. Максимальные индексы связности и сложности уравнения для  $\bar{G}$  остались прежними. Метод же кратных подстановок позволяет свести задачу с произвольным массовым оператором  $Q$  к последовательному решению задач с массовым оператором меньшего числа диаграмм, меньшей связности и того же максимального индекса сложности. Кроме того, в методе кратных подстановок подставляемая функция Грина может быть получена каким угодно приближенным методом, в том числе не сводящимся к диаграммной технике.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу

$$\frac{dU(t)}{dt} = i \varepsilon(t) U(t), \quad U(0) = U_0 = 1, \quad (32)$$

где  $\varepsilon(t)$  — гауссов случайный процесс, причем  $\langle \varepsilon \rangle = 0$ ,

$$\langle \varepsilon(t) \varepsilon(t') \rangle = B(t, t') = \sigma_\varepsilon^2 f(\alpha t, \alpha t'), \quad f(\alpha t, \alpha t) = 1.$$

Решение уравнения (32) в переменных

$$\tau = \alpha t, \quad \mu = \sigma_\varepsilon^2 / \alpha^2$$

имеет вид

$$\bar{U}(\tau) = \exp \left[ -\mu \int_0^\tau \int_0^{\tau'} f(\tau', \tau'') d\tau' d\tau'' \right]. \quad (33)$$

При  $\tau \ll 1$ , когда все корреляционные функции можно считать константами, точность приближенного решения определяется количеством учтенных диаграмм. Так как в точном решении присутствует  $(2m - 1)!!$



диаграмм, содержащих  $m$  корреляционных функций, то точное решение вблизи нуля представляется рядом

$$\bar{U}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\mu\tau^2)^m}{[(2m)!]} (2m-1)!! = \exp\left(\frac{-\mu\tau^2}{2}\right). \quad (34)$$

В однократном приближении Бурре каждому  $m$  соответствует всего одна диаграмма и решение, полученное в однократном приближении Бурре, вблизи нуля имеет вид

$$\bar{U}_1(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\mu\tau^2)^m}{(2m)!} = \cos \sqrt{\mu} \tau. \quad (35)$$

Если систему (8) замкнуть на  $n$ -м уравнении цепочки, тем самым точно учитывая все диаграммы с индексом связности, не большим  $2n-1$ , то разложение решения такой замкнутой системы в окрестности нуля будет совпадать с разложением точного решения вплоть до членов с  $\mu^{2n-1}$ . Легко видеть, что приближение Бурре любой кратности, равно как и приближение Крейкнана, имеет ошибку порядка  $\mu^2$ , так как уже начиная с членов, пропорциональных  $\mu^2$ , в точном решении присутствуют диаграммы со сложной (не точечной) вершинной частью. Так, диа-

граммы  и , про-

порциональные  $\mu^2$ , не учитываются однократным приближением Бурре. Однако, в то время как первая диаграмма учитывается двукратным приближением Бурре, вторая диаграмма не может быть учтена приближением Бурре любой кратности, а следовательно, и приближением Крейкнана.

Рассматриваемый пример позволяет сравнить различные методы приближений. Запишем уравнение для  $\bar{U}(\tau)$  в приближении Бурре и продифференцируем по  $\tau$ . Получим так называемое уравнение Бурре [10]:

$$\frac{d\bar{U}(\tau)}{d\tau} = -\mu \int_0^{\tau} f(\tau, \tau') \bar{U}(\tau') d\tau'. \quad (36)$$

При условии малости радиуса корреляции поля  $\epsilon$  по сравнению с масштабом искомой функции  $\bar{U}(\tau)$  уравнение Бурре (36) может быть, в свою очередь, записано в приближенном виде:

$$\frac{d\bar{U}(\tau)}{d\tau} = -\mu \bar{U}(\tau) \int_0^{\tau} f(\tau, \tau') d\tau'. \quad (37)$$

Как ни странно, решение приближенного уравнения (37) совпадает с точным решением (33) уравнения (32). Это совпадение обусловлено лишь видом уравнения (32), однако оно показывает, что приближение локализации (переход от уравнения (36) к уравнению (37)) вносит ошибку того же порядка, что и приближение Бурре. Для рассматриваемого примера эти ошибки взаимно уничтожались.

В случае, когда корреляционная функция случайного процесса  $\epsilon$  имеет экспоненциальный вид:

$$B(t, t') = \sigma_s^2 \exp(-\alpha |t - t'|), \tag{38}$$

для решения уравнения (32) в приближении Бурре получим

$$\bar{U}_1(\tau) = \frac{1+M}{2M} \exp\left(-\frac{1-M}{2} \tau\right) - \frac{1-M}{2M} \exp\left(-\frac{1+M}{2} \tau\right) \quad (M = \sqrt{1-4\mu}). \tag{39}$$

Из (39) следует, что условие перехода от уравнения (36) к уравнению (37) соответствует требованию  $\mu \ll 1$ . Так как уравнение (37) оказалось точным, то для данной задачи условие  $\mu \ll 1$  является условием применимости приближения Бурре.

Решение уравнения (32) в приближении Бурре любой кратности можно найти преобразованием Лапласа

$$\check{F}(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} F(\tau) d\tau.$$

С учетом (38) легко получить рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \check{U}_1(p) &= \frac{1}{p + \mu \check{f}(p)} = \frac{1}{p + (\mu/(p+1))}, \\ \check{U}_n(p) &= \frac{1}{p + \mu \check{U}_{n-1}(p+1)}. \end{aligned} \tag{40}$$

Отсюда видно, что преобразование Лапласа решения, найденного в приближении Крейкнана, можно записать в виде бесконечной цепной дроби

$$\check{U}_{кр}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{U}_n(p) = \frac{1}{p + \frac{\mu}{p+1 + \frac{\mu}{p+2 + \frac{\mu}{p+3 + \dots}}}} \tag{41}$$

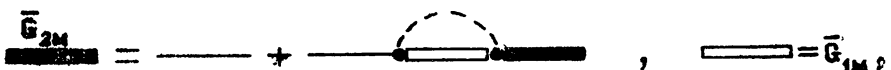
### МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Как показано в работе [11], расщепление корреляции

$$\langle \varepsilon(t) \varepsilon(t') U(t') \rangle = B(t, t') \bar{U}(t') \quad (t > t'),$$

соответствующее переходу к приближению Бурре, является точным, если  $\varepsilon(t)$  представляет собой случайный телеграфный процесс, корреляционная функция которого, как известно, имеет экспоненциальный вид. Таким образом, в случае экспоненциальной корреляционной функции переход к приближению Бурре соответствует замене истинного случайного процесса случайным телеграфным процессом. Аналогично, переход к первому марковскому приближению соответствует замене дельта-коррелированным процессом. К сожалению, остальные, описанные в работе, приближения не имеют столь простых аналогий замены истинного случайного процесса моделью. Метод кратных подстановок, однако, позволяет несколько искусственно провести такую аналогию.

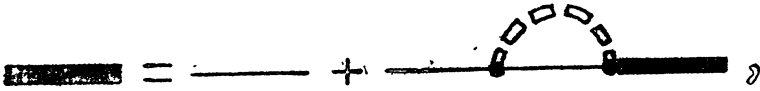
Рассмотрим, например, уравнение (19), соответствующее второму марковскому приближению:





$$\bar{G}_{2M}(t, t_0) = g(t, t_0) + \int g(t, t') \bar{G}_{1M}(t', t'') B(t', t'') \bar{G}_{2M}(t'', t_0) dt' dt''. \quad (42)$$

Это уравнение можно формально записать в виде уравнения, соответствующего приближению Бурре:



$$\bar{G}_{2M}(t, t_0) = g(t, t_0) + \int g(t, t') g(t', t'') \tilde{B}(t', t'') \bar{G}_{2M}(t'', t_0) dt' dt'', \quad (43)$$

где

$$\tilde{B}(t', t'') = g^{-1}(t', t'') \bar{G}_{1M}(t', t'') B(t', t''). \quad (44)$$

Таким образом, второе марковское приближение есть приближение Бурре с корреляционной функцией вида (44). Действительно, если уравнение (32) решить в приближении Бурре с корреляционной функцией вида

$$\tilde{B}(t', t'') = \sigma_2^2 \exp[-(1 + \mu)|\tau' - \tau''|], \quad (45)$$

то получим

$$\bar{U}_{2M}(\tau) = \frac{1}{1 - \mu} e^{-\mu\tau} - \frac{\mu}{1 - \mu} e^{-\tau}. \quad (46)$$

Выражение (46) в точности совпадает с результатом, полученным во втором марковском приближении [5]. Корреляционная функция (45) имеет экспоненциальный вид, поэтому можно прийти к выводу: в одномерном случае второе марковское приближение также соответствует замене истинного случайного процесса телеграфным процессом.

Авторы выражают глубокую признательность В. И. Кляцкину за многочисленные полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. Furutsu, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1963).
2. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, 1919 (1964).
3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
4. R. Bourret, Nuovo Cimento, 26, 1 (1962).
5. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).
6. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., 2, 124 (1961).
7. В. Н. Алексеев, В. М. Комиссаров, Флуктуации звукового поля в случайно-неоднородной среде, VI Всесоюзная акустическая конференция, М., 1968.
8. В. Н. Алексеев, В. М. Комиссаров, Тр. Акуст. ин-та, № 4, 27 (1968).
9. В. Н. Алексеев, В. М. Комиссаров, Распространение волн в среде с мелкомасштабными флуктуациями..., VI Всесоюзная акустич. конференция, М., 1968.
10. A. Brissaud, U. Frish, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974).
11. R. Bourret, U. Frish, A. Pouquet, Physica, 65, 303 (1973).

COMPARISON BETWEEN DIAGRAM AND ANALYTICAL METHODS  
OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF LINEAR STOCHASTIC EQUATIONS*O. G. Nalbandyan, V. I. Tatarsky*

The linear stochastic equations by the solution of which finding of the averaged value of the stochastic solution is implied are considered. It is known that the function to be desired may be described either by the infinite set of connected equations or by the Dyson equation the mass operator of which contains an infinite number of diagrams. In the present paper the relation between the method of closing the infinite set and the diagram form of the mass operator obtained. The notions of continuity and complexity indices of the diagrams are introduced. The diagram form of the first and the second Markov approximations is described. A new method of successive approximations—the multiple substitution method is suggested on the basis of which the notion of multiple Burre approximations is introduced. As an example, a one-dimensional linear 1-st order differential equation is considered.

---

УДК 538.56 : 519.25

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ В ВИДЕ ПРОЦЕССОВ ТЕЛЕГРАФНОГО ТИПА

В. И. Кляцкин

Рассматривается статистическое описание динамических систем, у которых флуктуирующие параметры являются либо телеграфным, либо обобщенным телеграфным случайными процессами. Выводятся общие формулы для расщепления корреляции процесса с функционалами от него, применение которых позволяет описать статистические характеристики систем замкнутым образом. Получено стационарное распределение вероятностей решения одномерных нелинейных динамических систем в случае телеграфного процесса и операторное уравнение для этой плотности вероятностей в случае обобщенного телеграфного процесса.

1. В работе [1] (см. также [2]) изучались динамические системы с флуктуирующими параметрами вида

$$\dot{\xi}_i(t) = v_i(\xi, t) + \int dy g_{ik}(\xi, y, t) f_k(y, t), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (1)$$

где  $v_i(x, t)$  и  $g_{ik}(x, y, t)$  — детерминированные функции, а  $f(y, t)$  — случайное поле, статистические характеристики которого описываются характеристическим функционалом

$$\Phi_t[v(x', \tau)] = \left\langle \exp \left[ i \int_0^t d\tau \int dx' f_k(x', \tau) v_k(x', \tau) \right] \right\rangle.$$

Здесь и далее усреднение производится по множеству реализаций случайного поля  $f$ . Для динамической системы (1) плотность вероятностей решения задачи, т. е. функция  $P_t(x) = \langle \delta(\xi(t) - x) \rangle$ , удовлетворяет операторному уравнению

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} [v_i(x, t) P_t(x)] + \left\langle \dot{\theta}_t \left[ \frac{\delta}{i \delta f(x', \tau)} \right] \delta(\xi(t) - x) \right\rangle \quad (2)$$

с начальным условием  $P_0(x) = \delta(x - \xi_0)$ , где функционал

$$\dot{\theta}_t[v(x', \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \Phi_t[v(x', \tau)].$$

В общем случае вариационные производные  $\delta \xi_i(t) / \delta f_k(x', \tau)$  функционально зависят от решения уравнения (1)  $\xi(t')$  при  $t' \leq t$ , и уравнение (2) оказывается не замкнутым. В случае дельта-коррелированности во времени поля  $f$ , для которого выполняется равенство  $\dot{\theta}_t[v(x', \tau)] = \dot{\theta}_t[v(x', t)]$ , уравнение (2) принимает замкнутую форму операторного уравнения для функции  $P_t(x)$ , описывающей все одновременные статистические характеристики решения уравнения (1). При этом, как показано в [1], функция  $\xi(t)$  является марковским случайным процессом. Возможны, однако, и другие случаи, когда действие оператора

$\partial_t \left[ \frac{\delta}{i \delta f(x', \tau)} \right]$  на функцию  $\delta(\xi(t) - x)$  может привести к выражениям, среднее значение которых выражается, например, через функцию  $P_\tau(x)$  при  $\tau \leq t$ . В этих случаях уравнение (2) также будет иметь вид замкнутого уравнения (вообще говоря, интегро-дифференциального) относительно функции  $P_t(x)$  и решение задачи (1) не будет марковским процессом. Это имеет место, как показано в работе [3] на примерах линейных уравнений, в случае, когда поле  $f(x, t)$  является одномерным телеграфным случайным процессом. Аналогичный результат имеет место и для обобщенного телеграфного случайного процесса.

2. Телеграфный случайный процесс  $z(t)$  определяется формулой\*

$$z(t) = a(-1)^{n(0, t)} \quad (z(0) = a, z^2(t) \equiv a^2), \quad (3)$$

где  $n(t_2, t_1)$  — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на отрезке  $(t_2, t_1)$ . При этом количество скачков на неперекрывающихся интервалах считается статистически независимым, распределенным по закону Пуассона  $P_{n(t_2, t_1)} = \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n})$ , где  $\bar{n}(t_2, t_1) = \nu |t_1 - t_2|$  (для простоты рассматривается стационарный случайный процесс  $n(t_2, t_1)$ ,  $\nu$  — среднее число скачков за единицу времени). Величину  $a$  будем пока считать детерминированной. На рис. 1 представлена одна из возможных реализаций процесса  $z(t)$ . Процесс  $z(t)$  является марковским случайным процессом.

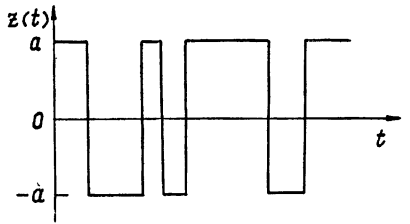


Рис. 1.

Рассмотрим моментные функции процесса  $z(t)$ . Учитывая при этом соотношение  $n(0, t) = n(0, t_1) + n(t_1, t)$ , справедливое для любых  $t_1 \leq t$ , получаем равенства

$$M_1(t) = \langle z(t) \rangle = a \sum_{n(0, t)=0}^{\infty} (-1)^{n(0, t)} P_{n(0, t)} = a \exp(-2\bar{n}(0, t)),$$

$$\begin{aligned} M_2(t_1, t_2) &= \langle z(t_1) z(t_2) \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(0, t_1) + n(0, t_2)} \rangle = \\ &= a^2 \langle (-1)^{2n(0, t_2) + n(t_2, t_1)} \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(t_2, t_1)} \rangle = a^2 \exp(-2\bar{n}(t_2, t_1)) \end{aligned}$$

$(t_1 \geq t_2),$

$$\begin{aligned} M_k(t_1, t_2, \dots, t_k) &= \langle z(t_1) z(t_2) \dots z(t_k) \rangle = a^k \langle (-1)^{n(0, t_1) + \dots + n(0, t_k)} \rangle = \\ &= a^k \langle (-1)^{2n(0, t_2) + n(t_2, t_1) + n(0, t_3) + \dots + n(0, t_k)} \rangle = \\ &= a^k \langle (-1)^{n(t_2, t_1)} \rangle \langle (-1)^{n(0, t_3) + \dots + n(0, t_k)} \rangle = \\ &= M_2(t_1, t_2) M_{k-2}(t_3, \dots, t_k) \quad (t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k). \end{aligned} \quad (4)$$

Из формул (4) следует равенство

$$\langle z(t_1) z(t_2) R[z(\tau)] \rangle = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau)] \rangle, \quad (5)$$

\* Такая форма записи телеграфного процесса используется, например, в книге Каца [4].

справедливое для производных функционалов  $R[z(\tau)]$ , для которых  $t_1 \geq t_2 \geq \tau$ . Для доказательства (5) следует разложить функционал  $R[z(\tau)]$  в функциональный ряд Тейлора по  $z(\tau)$  и использовать (4). Равенство (5) было получено ранее в работе [3], где было также показано, как использовать его для анализа стохастических линейных динамических систем.

Получим уравнение для характеристического функционала процесса  $z(t)$ :

$$\Phi_t^a[v(\tau)] = \left\langle \exp\left(i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau)\right) \right\rangle$$

(индекс « $a$ » у  $\Phi_t^a$  показывает, что величина  $a$  — детерминирована).

Согласно формуле (5), имеет место равенство

$$\begin{aligned} \left\langle z(t) z(t_1) \exp\left(i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau)\right) \right\rangle = \\ = a^2 \exp[-2\nu(t-t_1)] \Phi_{t_1}^a[v(\tau)] \quad (t_1 \leq t). \end{aligned} \quad (6)$$

Умножая (6) на  $iv(t_1)$  и интегрируя по  $t_1$  от 0 до  $t$ , получаем

$$\Psi_t^a[v(\tau)] = ae^{-2\nu t} + ia^2 \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \Phi_{t_1}^a[v(\tau)] v(t_1), \quad (7)$$

где функционал  $\Psi_t^a[v(\tau)]$  определяется по формуле

$$\Psi_t^a[v(\tau)] = \left\langle z(t) \exp\left(i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau)\right) \right\rangle = \frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi_t^a[v(\tau)].$$

Следовательно, равенство (7) соответствует интегро-дифференциальному уравнению для  $\Phi_t^a[v(\tau)]$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_t^a[v(\tau)] = iv(t) ae^{-2\nu t} - \\ - a^2 v(t) \int_0^t dt_1 v(t_1) \exp[-2\nu(t-t_1)] \Phi_{t_1}^a[v(\tau)], \end{aligned} \quad (8)$$

которое эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi_t^a + \left[ 2\nu - \frac{1}{v(t)} \frac{dv(t)}{dt} \right] \frac{d\Phi_t^a}{dt} + a^2 v^2(t) \Phi_t^a = 0.$$

Уравнение (8) в общем случае решить не удается.

Пусть теперь величина  $a$  будет случайной с плотностью распределения вероятностей  $p(a)$ . Для получения характеристического функционала процесса  $z(t)$  в этом случае требуется усреднить уравнение (8) по случайной величине  $a$ . Это в общем случае также не удастся осуществить. И только для случайной величины  $a$  с распределением  $p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a-1) + \delta(a+1)]$ , для которой  $\langle a \rangle = 0$ ,  $a^2 \equiv 1$  (собственно именно этот случай и называется обычно телеграфным процессом), можно усреднить уравнение (8). В этом случае выражение (7) принимает вид

$$\Psi_t[v(\tau)] = i \int_0^t dt_1 v(t_1) \exp[-2\nu(t-t_1)] \Phi_{t_1}[v(\tau)], \quad (9)$$

где

$$\langle \Phi_t^a \rangle_a = \Phi_t, \quad \langle \Psi_t^a \rangle_a = \Psi_t.$$

Отметим, что в этом случае имеет место равенство, полученное в [3],

$$\langle F[z(\tau_1)] z(t_1) z(t_2) R[z(\tau_2)] \rangle = \langle F[z(\tau_1)] \rangle \langle z(t_1) z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau_2)] \rangle + \langle F[z(\tau_1)] z(t_1) \rangle \langle z(t_2) R[z(\tau_2)] \rangle, \quad (5')$$

справедливое для любых  $\tau_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau_2$ . В самом деле, разложение функционала  $R[z(\tau_2)]$  в ряд Тейлора по  $z$  можно записать в виде  $R[z] = \sum_{2k} + \sum_{2k+1}$ , где первая сумма содержит четное число сомножителей  $z(\tau)$ , а вторая — нечетное. Учитывая далее формулы (4) и равенства  $\langle R \rangle = \langle \sum_{2k} \rangle$ ,  $\langle zR \rangle = \langle z \sum_{2k+1} \rangle$ , мы получаем (5').

Далее мы подробно рассмотрим этот случай, а общий случай вкратце обсудим в конце данного раздела работы.

При  $\nu \rightarrow \infty$  для достаточно гладких функций  $v(t)$  формула (9) переходит в формулу

$$\Psi_t[v(\tau)] = \frac{i}{2\nu} v(t) \Phi_t[v(\tau)], \quad (9')$$

соответствующую гауссовому дельта-коррелированному процессу  $z(t)$ . Конечно, это не означает, что при  $\nu \rightarrow \infty$  телеграфный процесс перестает быть телеграфным. Так, при  $\nu \rightarrow \infty$  одноточечное распределение вероятностей  $z(t)$  будет по-прежнему соответствовать телеграфному процессу, т. е. процессу с двумя возможными состояниями. Что касается корреляционной функции и моментных функций более высокого порядка, то они при  $\nu \rightarrow \infty$  обладают всеми свойствами  $\delta$ -функций, так как

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu e^{-2\nu|\tau|} = \begin{cases} \infty & \text{при } \tau = 0 \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0 \end{cases}, \quad \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-2\nu|\tau|} = 1.$$

Такие моментные функции следует считать обобщенными функциями, и их дельта-образный характер будет проявляться в интегралах, связанных с ними. При этом формула (9') показывает, что предельный переход при  $\nu \rightarrow \infty$  для таких величин эквивалентен замене процесса  $z(t)$  на гауссов, дельта-коррелированный процесс. Эта ситуация совершенно аналогична аппроксимации гауссова случайного процесса с конечным радиусом корреляции  $l_0$  на дельта-коррелированный процесс при  $l_0 \rightarrow 0$ .

Формулу (9) можно использовать для расщепления корреляций процесса  $z(t)$  с функционалом от него. В самом деле, для любого функционала  $R_t[z(\tau)]$ , где  $\tau \leq t$ , имеет место цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \langle z(t) R_t[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle &= \left\langle z(t) \exp\left(\int_0^t d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)}\right) \right\rangle \times \\ &\times R_t[\eta(\tau)] = \Psi_t\left[\frac{\delta}{i \delta \eta(\tau)}\right] R_t[\eta(\tau)] = \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\delta}{\delta \eta(t_1)} \left\langle \exp \left( \int_0^{t_1} d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right) R_t[\eta(\tau)] \right\rangle = \quad (10)$$

$$= \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \frac{\delta}{\delta \eta(t_1)} \langle R_t[\eta(\tau) + z(\tau)\theta(t_1-\tau)] \rangle,$$

где  $\eta(t)$  — произвольная детерминированная функция, а  $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ . Полагая теперь  $\eta(\tau) \equiv 0$ , получаем окончательное выражение:

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)] \rangle = \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}_t[z(\tau)] \right\rangle, \quad (11)$$

где функционал  $\tilde{R}_t[z(\tau)]$  определяется по формуле

$$\tilde{R}_t[z(\tau)] = R_t[z(\tau)\theta(t_1-\tau+0)]. \quad (12)$$

Формулу (11) можно использовать для анализа стохастических уравнений, содержащих процесс  $z(t)$  линейным образом. Пусть функционал  $R_t[z(\tau)]$  — решение некоей системы дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при  $t=0$ .

Тогда для  $t > t_1$  функционал  $\tilde{R}_t[z(\tau)] = R_t[0]$  и описывается этой же системой уравнений при  $z(t) \equiv 0$  с начальным условием  $\tilde{R}_{t_1}[z(\tau)] = R_{t_1}[z(\tau)]$ . Следовательно, функционал  $\tilde{R}_t[z(\tau)]$  имеет структуру

$$\tilde{R}_t[z(\tau)] = \tilde{R}_t(t, t_1; R_{t_1}[z(\tau)]) \quad (\tilde{R}_{t_1}[z(\tau)] = R_{t_1}[z(\tau)]).$$

В этом случае выражение (11) принимает вид

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)] \rangle = \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \left\langle \frac{\partial \tilde{R}_t}{\partial R_{t_1}} \frac{\delta R_{t_1}[z(\tau)]}{\delta z(t_1)} \right\rangle. \quad (13)$$

Учитывая теперь, что для описанной выше задачи вариационная производная  $\frac{\delta R_{t_1}[z(\tau)]}{\delta z(t_1)}$  выражается через сам функционал  $R_{t_1}[z(\tau)]$ , мы видим, что среднее значение величины в правой части (13) связано с одновременными средними функционалами  $R_{t_1}[z(\tau)]$ .

Формула (13) существенно упрощается для линейных систем.

В этом случае функционал  $\tilde{R}_t[z(\tau)]$  линейно зависит от  $R_{t_1}[z(\tau)]$

и величина  $\frac{\partial \tilde{R}_t}{\partial R_{t_1}}$  является функцией Грина для системы уравнений

в случае отсутствия флуктуаций, т. е. при  $z(t) = 0$ . При этом мы получаем замкнутое уравнение для  $\langle R_{t_1}[z(\tau)] \rangle$ . Это уравнение было получено ранее в работе [3].

В качестве первого примера применения методики, изложенной выше, рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - z(t)x, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (14)$$

Усредняя (14), получаем с учетом (11) систему уравнений

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle,$$

$$\langle \dot{y} \rangle = - \langle x \rangle - \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{x}(t) \right\rangle. \quad (15)$$

Функция  $\tilde{x}(t)$  в (15) описывается системой уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = -\tilde{x}; \quad \tilde{y}(t_1) = y(t_1), \quad \tilde{x}(t_1) = x(t_1), \quad (16)$$

решение которой имеет вид

$$\tilde{x}(t) = y(t_1) \sin(t-t_1) + x(t_1) \cos(t-t_1).$$

Учитывая далее равенства  $\frac{\delta y(t_1)}{\delta z(t_1)} = -x(t_1)$ ,  $\frac{\delta x(t_1)}{\delta z(t_1)} = 0$ , вытекающие из характера динамической системы (14), можно переписать (15) в виде замкнутой интегро-дифференциальной системы уравнений:

$$\langle \dot{x} \rangle = \langle y \rangle,$$

$$\langle \dot{y} \rangle = - \langle x \rangle + \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \sin(t-t_1) \langle x(t_1) \rangle. \quad (15')$$

Рассмотрим теперь пример нелинейного уравнения:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + z(t)g(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (17)$$

где  $f(x, t)$  и  $g(x, t)$  — детерминированные функции. Введем функцию  $\varphi_t(x) = \delta(x(t) - x)$ . Тогда  $\varphi_t(x)$  удовлетворяет линейному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) \varphi_t(x)] - \frac{\partial}{\partial x} [g(x, t) z(t) \varphi_t(x)]. \quad (18)$$

Усредним уравнение (18). Функция  $P_t(x) = \langle \varphi_t(x) \rangle$  является плотностью вероятностей для решения задачи (17). Используя формулу (11), для нее получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) P_t(x)] - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \int_0^t dt_1 \times \\ & \times \exp[-2\nu(t-t_1)] \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{\varphi}_t(x) \right\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

где функция  $\tilde{\varphi}_t(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) \tilde{\varphi}_t(x)] \quad (t > t_1),$$

$$\tilde{\varphi}_{t_1}(x) = \varphi_{t_1}(x),$$

решение которого можно записать в операторном виде:

$$\tilde{\varphi}_t(x) = \exp \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_1}^t d\tau f(x, \tau) \right] \varphi_{t_1}(x). \quad (20)$$



Следовательно, уравнение (19) принимает вид

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) P_t(x)] - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \int_0^t dt_1 \times \quad (19')$$

$$\times \exp \left[ -2\nu(t - t_1) - \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_1}^t d\tau f(x, \tau) \right] \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \varphi_{t_1}(x) \right\rangle.$$

Если теперь учесть, что  $\frac{\delta \varphi_{t_1}(x)}{\delta z(t_1)} = - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t_1) \varphi_{t_1}(x)$ , то уравнение (19') можно переписать в замкнутой форме операторного уравнения:

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) P_t(x)] + \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \int_0^t dt_1 \times \quad (19'')$$

$$\times \exp \left[ -2\nu(t - t_1) - \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_1}^t d\tau f(x, \tau) \right] \frac{\partial}{\partial x} g(x, t_1) P_{t_1}(x).$$

Стационарное распределение вероятностей при этом удовлетворяет уравнению (если оно существует)

$$f(x, \infty) P_\infty(x) = g(x, \infty) \int_0^\infty d\tau \exp \left\{ -\tau \left[ 2\nu + \frac{d}{dx} f(x, \infty) \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{d}{dx} g(x, \infty) P_\infty(x)$$

или, после интегрирования по  $\tau$ , уравнению

$$f(x, \infty) P_\infty(x) = g(x, \infty) \left[ 2\nu + \frac{d}{dx} f(x, \infty) \right]^{-1} \frac{d}{dx} g(x, \infty) P_\infty(x). \quad (21)$$

Уравнение (21) можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\left[ 2\nu + \frac{d}{dx} f(x, \infty) \right] \frac{f(x, \infty)}{g(x, \infty)} P_\infty(x) = \frac{d}{dx} g(x, \infty) P_\infty(x),$$

решение которого имеет вид ( $f(x, \infty) = \tilde{f}(x)$ ,  $g(x, \infty) = g(x)$ )

$$P_\infty(x) = \frac{C |g(x)|}{g^2(x) - \tilde{f}^2(x)} \exp \left[ 2\nu \int \frac{dx \tilde{f}(x)}{g^2(x) - \tilde{f}^2(x)} \right] \quad (21')$$

$$(|\tilde{f}(x)| < |g(x)|),$$

где положительная постоянная  $C$  определяется из условия нормировки.

Чтобы посмотреть, как может влиять конечность радиуса корреляции процесса  $z(t)$  на динамику стохастических систем, рассмотрим простейший пример, для которого  $\tilde{f}(x) = -x$ ,  $g(x) = 1$ . В этом случае для стационарного распределения вероятностей получаем распределение вида

$$P_\infty(x) = \frac{1}{B(\nu, 1/2)} (1 - x^2)^{\nu-1} \quad (x^2 < 1),$$

где  $B(\nu, 1/2)$  — бета-функция\*. Это распределение вероятностей имеет существенно разный вид в случаях  $\nu > 1$  и  $\nu < 1$ \*\* . На рис. 2 схематически изображено распределение  $P_\infty(x)$  в этих двух случаях. Из вида распределения следует, что в случае  $\nu > 1$  система проводит основное время вблизи состояния  $x=0$ , а в случае  $\nu < 1$  поведение системы сосредоточено в окрестностях точек  $x = \pm 1$ . В случае же  $\nu = 1$  получаем равномерное распределение на отрезке  $[-1, 1]$ .

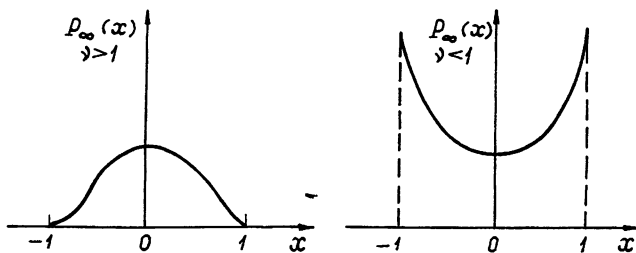


Рис. 2.

Отметим, что при  $\nu \rightarrow \infty$  из (21') следует распределение

$$P_\infty(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left[ 2\nu \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)} \right],$$

соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу  $z(t)$ , в согласии со сказанным выше.

В качестве другого примера нелинейной системы рассмотрим задачу о влиянии конечности временного радиуса корреляции случайных сил на движение частицы в потенциальном поле  $U(x)$ . Движение частицы будем описывать стохастической системой уравнений:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} - \lambda y + \mu z(t) \quad (x_1(0) = x_0, \quad y(0) = y_0),$$

где функцию  $z(t)$  будем считать по-прежнему телеграфным процессом. Проводя выкладки, аналогичные выводу уравнения (21), получаем операторное уравнение для совместной стационарной плотности вероятностей координаты частицы  $x$  и ее скорости  $y$  вида

$$\hat{L} P_\infty(x, y) = \mu^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2\nu + \hat{L}} \frac{\partial}{\partial y} P_\infty(x, y), \quad (22)$$

где оператор  $\hat{L} = y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial U(x)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \lambda \frac{\partial}{\partial y} y$  (оператор Лиувилля).

При  $\nu \rightarrow \infty$  уравнение (22) переходит в стационарное уравнение Эйнштейна—Фоккера:

$$\hat{L} P_\infty(x, y) = \frac{\mu^2}{2\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_\infty(x, y), \quad (22')$$

решение которого соответствует распределению Гиббса:

\* Отметим, что это распределение вероятностей было получено ранее более громоздким и искусственным путем в монографии [5].

\*\* Так как для этой задачи динамическое уравнение записано в безразмерном времени, то и величина  $\nu$  будет безразмерной величиной.

$$P_{\infty}(x, y) = \text{const} \exp \left\{ -\beta \left[ \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} U(x) \right] \right\} \quad \left( \beta_2^* = \frac{2\nu\lambda}{\mu^2} \right). \quad (23)$$

В общем же случае уравнение (22) описывает искажение распределения (23) за счет конечности времени корреляции  $\tau_0 = 1/2\nu$  процесса  $z(t)$ .

Уравнение (22) можно переписать в виде дифференциального уравнения в частных производных

$$\left[ (2\nu + \hat{L})^2 \hat{L} - \mu^2 (2\nu + \hat{L}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda (2\nu + \hat{L}) \hat{L} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \hat{L} \right] P_{\infty}(x, y) = 0, \quad (22')$$

обобщающего уравнение (22'). Уравнение (22'') имеет достаточно сложный вид и, по-видимому, решить его для произвольного поля  $U(x)$  затруднительно. Легко видеть, однако, что его решение уже не будет являться функцией одной только энергии частицы, как это имеет место в (23), а также то, что координата и скорость частицы будут уже статистически зависимыми величинами.

Вернемся теперь к общему случаю процесса  $z(t)$  вида (3), где  $a$  — случайная величина с заданным распределением вероятностей  $p(a)$ . Как указывалось выше, в этом случае, вообще говоря, невозможно получить замкнутое уравнение для характеристического функционала, и, следовательно, невозможно провести замкнутое описание динамических систем. Остается единственная возможность решения задачи, заключающаяся в том, чтобы рассматривать величину  $a$  как детерминированную. Если при этом удастся написать явное решение такой задачи (условное среднее), то окончательный результат получается последующим усреднением по случайной величине  $a^*$ . В качестве примера такой задачи рассмотрим динамическую систему (17). Предполагаем сначала величину  $a$  детерминированной. Учитывая формулу для расщепления корреляции процесса  $z(t)$  с функционалом от него  $R\{z(\tau)\}$ , вытекающую из (7),

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)] \rangle = ae^{-2\nu t} \langle R_t[0] \rangle + a^2 \int_0^t dt_1 \exp[-2\nu(t-t_1)] \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}_t[z(\tau)] \right\rangle, \quad (11')$$

где функционал  $\tilde{R}_t[z(\tau)]$ , как и ранее, определяется по формуле (12), можно записать выражение для стационарного распределения вероятностей решения задачи (17) в виде

$$P_{\infty}^a(x) = \frac{C^a |g(x)|}{a^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp \left[ 2\nu \int \frac{dx f(x)}{a^2 g^2(x) - f^2(x)} \right] \theta(a^2 g^2(x) - f^2(x)), \quad (21'')$$

где величина  $C^a$  определяется из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} dx P_{\infty}^a(x) = 1$ .

\* Отметим, что в этом случае вместо (5) получаем формулу

$$\langle \langle z(t_1) z(t_2) R[z(\tau)] \rangle \rangle_n = \langle \langle z(t_1) z(t_2) \rangle \rangle_n \langle \langle R[z(\tau)] \rangle \rangle_n a,$$

которая переходит в (5) только в случаях  $p(a) = \delta(a - a_0)$  и  $p(a) = \frac{1}{2} \delta(a - a_0) + \frac{1}{2} \delta(a + a_0)$ .

Окончательное решение задачи получаем затем путем усреднения формулы (21'') по величине  $a$ , т. е.  $P_\infty(x) = \int_{-\infty}^{\infty} da p(a) P_\infty^a(x)$ .

3: Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс, описываемый формулой

$$z(t) = a_{n(0,t)}.$$

Здесь  $n(0, t)$  — случайная последовательность чисел, описанная выше, а случайные величины  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  считаются статистически независимыми с распределением вероятностей  $p(a)$ . Процесс  $z(t)$  — марковский процесс. На рис. 3 представлена одна из возможных реализаций этого процесса. Для процесса  $z(t)$

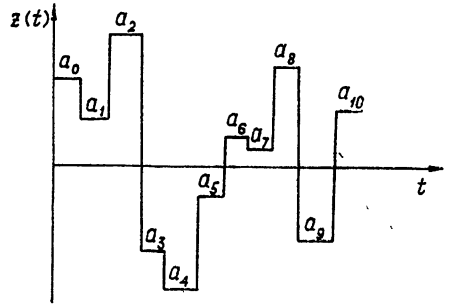


Рис. 3.

$$\begin{aligned} \langle z(t) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle a_k \delta_{k, n(0, t)} \rangle = \langle a \rangle, \\ \langle z(t_1) z(t_2) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle a_k a_l \rangle \langle \delta_{k, n(0, t_1)} \delta_{l, n(0, t_2)} \rangle = \\ &= \langle a^2 \rangle \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k, n(0, t_1)} \delta_{k, n(0, t_2)} \rangle + \langle a \rangle^2 \sum_{k \neq l} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k, n(0, t_1)} \times \\ &\times \delta_{l, n(0, t_2)} \rangle = \langle a^2 \rangle \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k, n(0, t_2)} \rangle \langle \delta_{0, n(t_2, t_1)} \rangle + \langle a \rangle^2 \times \\ &\times \left[ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k, n(0, t_2)} \rangle \langle \delta_{0, n(t_2, t_1)} \rangle \right] = \langle a^2 \rangle \exp[-\nu(t_1 - t_2)] + \\ &\times \langle a \rangle^2 \{ 1 - \exp[-\nu(t_1 - t_2)] \} \quad (t_1 \geq t_2) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Для такого процесса не удается получить соотношение, аналогичное формуле (5), и приходится исходить непосредственно из уравнения для характеристического функционала  $\Phi_t[v(\tau)] = \left\langle \exp \left[ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right] \right\rangle$ , которое было выведено в работе [6] и имеет вид\*

$$\begin{aligned} \Phi_t[v(\tau)] &= \left\langle \exp \left( ia \int_0^t d\tau v(\tau) \right) \right\rangle e^{-\nu t} + \\ &+ \nu \int_0^t dt_1 \exp[-\nu(t - t_1)] \left\langle \exp \left( ia \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right) \right\rangle \Phi_{t_1}[v(\tau)]. \end{aligned} \tag{24}$$

\* Отметим, что если величина  $a$  имеет распределение вероятностей  $p(a) = \frac{1}{2} \delta(a-1) + \frac{1}{2} \delta(a+1)$ , то уравнение (24) можно записать в виде уравнения, соответствующего телеграфному процессу с заменой  $\nu$  на  $\nu/2$ . Это естественно, так как для этого процесса в момент времени наступления скачка, в отличие от телеграфного процесса, величина  $z(t)$  с вероятностями 1/2 либо не изменит своего значения, либо изменит знак. Это приводит к удвоению среднего времени между скачками процесса  $z(t)$ .

Следовательно, функционал  $\Psi_t[v(\tau)] = \left\langle z(t) \exp \left[ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right] \right\rangle$  будет связан с функционалом  $\Phi_t[v(\tau)]$  по формуле

$$\Psi_t[v(\tau)] = \left\langle a \exp \left( ia \int_0^t d\tau v(\tau) \right) \right\rangle e^{-\nu t} + \nu \int_0^t dt_1 \exp[-\nu(t-t_1)] \left\langle a \exp \left( ia \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right) \right\rangle \Phi_{t_1}[v(\tau)]. \quad (25)$$

Отметим, что при  $\nu \rightarrow \infty$  для достаточно гладких функций  $v(t)$  формула (25) переходит в формулу

$$\Psi_t[v(\tau)] = i \frac{\langle a^2 \rangle}{\nu} v(t) \Phi_t[v(\tau)]$$

(для простоты считаем, что  $\langle a \rangle = 0$ ), соответствующую гауссовому дельта-коррелированному процессу  $z(t)$ , аналогично случаю телеграфного процесса.

Далее, действуя аналогично случаю телеграфного процесса, для корреляции процесса  $z(t)$  с функционалом от него  $R_t[z(\tau)]$  ( $\tau \leq t$ ) можно получить выражение

$$\langle z(t) R_t[z(\tau)] \rangle = \langle a R_t[a] \rangle e^{-\nu t} + \nu \int_0^t dt_1 \exp[-\nu(t-t_1)] \langle \tilde{a} \tilde{R}_t[\tilde{a}, z(\tau)] \rangle, \quad (26)$$

где случайная величина  $\tilde{a}$  в правой части (26) статистически независима от процесса  $z(\tau)$ , а функционал  $\tilde{R}_t[\tilde{a}, z(\tau)]$  определяется выражением

$$\tilde{R}_t[\tilde{a}, z(\tau)] = R_t^*[\tilde{a} \theta(\tau-t_1) + z(\tau) \theta(t_1-\tau)]. \quad (27)$$

Формулу (26) можно использовать для анализа стохастических уравнений, содержащих линейным образом процесс  $z(t)$ , аналогично формуле (11). В самом деле, если  $R_t[z(\tau)]$  — решение системы уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при  $t=0$ , то функционал  $\tilde{R}_t[\tilde{a}, z(\tau)]$  будет представлять собой решение той же задачи, в которой величина  $z(t)$  заменена на величину  $\tilde{a}$  для интервала времен  $t > t_1$ . Начальным условием для этой задачи будет  $\tilde{R}_{t_1}[\tilde{a}, z(\tau)] = R_{t_1}[z(\tau)]$ . Следовательно, средняя величина в правой части (26) будет выражаться через величины, содержащие только одновременные средние функционала  $R_t[z(\tau)]$ . Для линейных же систем правая часть (26) будет просто выражаться через  $\langle R_t[z(\tau)] \rangle$ .

Так, например, для задачи (14) величина  $\tilde{x}(t)$  будет определяться системой уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = -\tilde{x} - \tilde{a}\tilde{x}, \quad \tilde{x}(t_1) = x(t_1), \quad \tilde{y}(t_1) = y(t_1),$$

решение которой имеет вид

$$\tilde{x}(t) = y(t_1) \frac{\sin \sqrt{1 + \tilde{a}} (t - t_1)}{\sqrt{1 + \tilde{a}}} + x(t_1) \cos \sqrt{1 + \tilde{a}} (t - t_1).$$

Следовательно, усредненная система уравнений (14), где  $z(t)$  — обобщенный телеграфный процесс, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \langle \dot{x} \rangle &= \langle y \rangle, \\ \langle y \rangle &= -\langle x \rangle - e^{-\nu t} \left[ y(0) \left\langle a \frac{\sin \sqrt{1 + a} t}{\sqrt{1 + a}} \right\rangle + x(0) \langle a \cos \sqrt{1 + a} t \rangle \right] - \\ &- \nu \int_0^t dt_1 \exp[-\nu(t - t_1)] \left[ \langle y(t_1) \rangle \left\langle a \frac{\sin \sqrt{1 + a} (t - t_1)}{\sqrt{1 + a}} \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle x(t_1) \rangle \langle a \cos \sqrt{1 + a} (t - t_1) \rangle \right]. \end{aligned}$$

В случае же задачи (17) величина  $\tilde{\varphi}_t(x)$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{ [f(x, t) + \tilde{a}g(x, t)] \tilde{\varphi}_t(x) \}, \quad \tilde{\varphi}_t(x) = \varphi_t(x), \quad (28)$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\varphi}_t(x) = \exp \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t d\tau [f(x, \tau) + \tilde{a}g(x, \tau)] \right\} \varphi_t(x). \quad (29)$$

Следовательно, уравнение для плотности вероятностей решения задачи (17) принимает замкнутую операторную форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P_t(x) &= -\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) P_t(x)] - e^{-\nu t} \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \times \\ &\times \left\langle a \exp \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t d\tau [f(x, \tau) + ag(x, \tau)] \right\} \right\rangle P_0(x) - \\ &- \nu \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \int_0^t dt_1 \exp[-\nu(t - t_1)] \left\langle a \exp \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t d\tau [f(x, \tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ag(x, \tau)] \right\} \right\rangle P_{t_1}(x). \end{aligned} \quad (30)$$

Стационарное же распределение вероятностей, если оно существует, удовлетворяет операторному уравнению ( $f(x, \infty) = f(x)$ ,  $g(x, \infty) = g(x)$ )

$$f(x) P_\infty(x) = -\nu g(x) \left\langle \frac{a}{\nu + \frac{d}{dx} [f(x) + ag(x)]} \right\rangle P_\infty(x). \quad (31)$$

При  $\nu \rightarrow \infty$  можно разложить среднюю величину в правой части (31) в ряд по  $1/\nu$  и мы получаем уравнение ( $\langle a \rangle = 0$ )

$$f(x) P_{\infty}(x) = \frac{\langle a^2 \rangle}{\nu} g(x) \frac{d}{dx} g(x) P_{\infty}(x),$$

соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу  $z(t)$ .

В общем случае, чтобы перейти от уравнения (31) к дифференциальному уравнению, требуется знать конкретное распределение вероятностей случайной величины  $a$ . Если, например, интенсивность флуктуаций величины  $a$  достаточно мала и  $\langle a \rangle = 0$ , то можно разложить оператор в правой части (31) в ряд по  $a$ . Ограничиваясь членами порядка  $\langle a^2 \rangle$ , получаем при этом уравнение

$$f(x) P_{\infty}(x) = \nu \langle a^2 \rangle g(x) \left( \nu + \frac{d}{dx} f(x) \right)^{-1} \frac{d}{dx} g(x) \left( \nu + \frac{d}{dx} f(x) \right)^{-1} P_{\infty}(x), \quad (31')$$

которое сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка по  $x$ .

4. Как хорошо известно, решение задачи Коши с флуктуирующими параметрами в виде марковских процессов является компонентой многомерного марковского процесса. Если при этом интересоваться только статистическим описанием самого решения задачи, то в общем случае для него невозможно построить замкнутого описания. Под замкнутым описанием имеется в виду возможность ограничиться только динамическими переменными без привлечения новых дополнительных переменных, таких, как сами флуктуирующие переменные. Так, например, для флуктуаций параметров в виде гауссова марковского процесса такое замкнутое описание построить не удастся. Для рассмотренных выше телеграфного и обобщенного телеграфного процессов, которые также являются марковскими процессами, замкнутое описание динамических систем, содержащих линейным образом эти процессы в качестве флуктуирующих параметров, в принципе, удастся построить аналогично случаю дельта-коррелированных во времени флуктуаций параметров. Это обусловлено конкретным видом уравнений для характеристических функционалов этих марковских процессов. Однако изложенный метод может быть достаточно эффективен только в том случае, когда удастся явным образом выразить функционал  $\tilde{R}_t$  через  $R_t$ .

В общем случае произвольного марковского процесса  $z(t)$  получить уравнение для его характеристического функционала не представляется возможным. Можно, однако, получить интегральное уравнение для функционала (см., например, [7]):

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = \left\langle \delta(z(t) - z) \exp \left[ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right] \right\rangle, \quad (32)$$

которое имеет вид

$$\Psi_t[z, v(\tau)] = P_t(z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 p(z, t | z_1, t_1) z_1 \Psi_t[z_1, v(\tau)], \quad (33)$$

где  $R_t(z)$  — одновременная плотность вероятностей процесса  $z(t)$ , а  $p(z, t | z_1, t_1)$  — плотность вероятностей перехода. Характеристический функционал процесса  $z(t)$  получается из (32) интегрированием по  $z$ . Рассмотренные выше процессы телеграфного типа являются марковскими процессами, плотности вероятностей перехода которых описываются простейшими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_1, t_1) = -\nu [p(z, t | z_1, t_1) - p(-z, t | z_1, t_1)]$$

(телеграфный процесс),

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_1, t_1) = -\nu [p(z, t | z_1, t_1) - p_a(z)] \quad (34)$$

(обобщенный телеграфный процесс).

И именно простота этих уравнений и выделяет процессы телеграфного типа из общего класса марковских процессов.

При предельном переходе  $\nu \rightarrow \infty$  воздействие обоих рассмотренных процессов на динамическую систему эквивалентно воздействию гауссова дельта-коррелированного процесса, что позволяет проследить влияние конечности времени корреляции процессов  $\tau_0 = 1/\nu$  на статистические характеристики решения задачи.

В заключение благодарю В. И. Татарского за полезное обсуждение рассмотренных выше вопросов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 10, 1454 (1975).
2. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
3. R. C. Bourret, U. Frisch and A. Rouquet, Physica, 65, 303 (1973).
4. М. Кац, Несколько вероятностных задач физики и математики, изд. Наука, М., 1967.
5. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, книга первая, изд. Сов. радио, М., 1974, стр. 241.
6. A. Brissaud and U. Frisch, J. Math. Phys., 15, 524 (1974).
7. Теория связи, сб: переводов, Связьиздат, М., 1972, стр. 89.

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
15 июля 1975 г.

#### DYNAMIC SYSTEMS WITH PARAMETER FLUCTUATIONS AS TELEGRAPH PROCESSES

V. I. Klyatskin

A statistical description of dynamic systems which fluctuating parameters are either telegraph or generalized telegraph random processes is considered. General formulas are deduced for splitting the process correlation with its functionals which application makes it possible to give a complete description of the statistical characteristics of the systems. A stationary probability distribution of the solution of one-dimensional nonlinear dynamic systems is obtained in the case of the telegraph process and the operator equation for this probability density in the case of the generalized telegraph process.



УДК 621.396 67

## О ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В ПРИСУТСТВИИ РАДИАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

*Е. А. Иванов, И. Б. Гаврис*

Приводятся некоторые из результатов численного решения задачи о поле излучающей сферической антенны, нагруженной на круговую щель, в присутствии электрического диполя с моментом, направленным перпендикулярно плоскости расположения щели. Нагрузка на щель определяется исходя из требования: мощность излучения рассматриваемой системы, состоящей из антенны и диполя, должна быть максимальной. Результаты представлены диаграммами направленности и графиками активной и реактивной составляющих нагрузки на щели, обеспечивающих выполнение указанного выше требования.

В [1] решалась задача об отыскании выражений, определяющих такую величину нагрузки на щель, при которой мощность суммарного поля излучающей системы «радиальный электрический диполь + нагруженная на щель сфера» была бы оптимальной для заданных значений параметров задачи  $ka$ ,  $kb$ ,  $\theta_0$ , где  $k$  — волновое число,  $a$  — радиус сферы,  $b$  — расстояние от центра сферы до диполя ( $b > a$ ),  $\theta_0$  — угол, определяющий положение центра щели на поверхности сферы (рис. 1). Предполагалось, что диполь находится в точке  $A$  полярной оси сферы, совпадающей с осью  $O_z$ , и что его момент  $P$  направлен вдоль этой оси. Щель шириной  $\delta$  занимает область  $\theta_0 - \delta/2 \leq \theta \leq \theta_0 + \delta/2$  ( $ka\delta \ll 1$ ) и расположена в плоскости, нормальной полярной оси сферы. Предполагалось также, что на поверхности сферы

$$E_{\theta}^{(2)} = \begin{cases} -V/\delta a & (|\theta - \theta_0| \leq \delta/2) \\ 0 & (|\theta - \theta_0| > \delta/2) \end{cases},$$

где  $E_{\theta}^{(2)}$  — составляющая поля  $E^{(2)}$ ,  $H^{(2)}$  излучения сферической антенны. Оно отвечает некоторому напряжению  $V$  в щели. Полное поле представлялось суперпозицией полей  $E^{(0)}$ ,  $H^{(0)}$  (поле диполя в свободном пространстве),  $E^{(1)}$ ,  $H^{(1)}$  (поле, переизлученное ненагруженной сферой, возбуждаемой диполем) и  $E^{(2)}$ ,  $H^{(2)}$  (поле сферической антенны с некоторым напряжением  $V$  в щели) и имело вид  $E = \{E_r, E_{\theta}, 0\}$ ,  $H = \{0, 0, H_{\varphi}\}$ , где

$$E_{\theta} = E_{\theta}^{(0)} + E_{\theta}^{(1)} + E_{\theta}^{(2)}$$

(выражения для  $E_{\theta}^{(0)}$ ,  $E_{\theta}^{(1)}$ ,  $E_{\theta}^{(2)}$  даны в [1];  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  — сферические координаты).

В приближении волновой зоны ( $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ )

$$E_{\theta} = H_{\varphi} = \frac{ip}{b^2} \frac{e^{ikr}}{r} S_{\theta},$$

где комплексная амплитуда суммарного поля



ние диполя на изменение формы диаграммы направленности сферической антенны начинает заметно сказываться по мере приближения щели в том либо в другом направлении, к полюсам сферы. Оно не столь существенно для антенны со щелью, расположенной на экваторе (см., например, при  $ka = 4$ , рис. 2 б), а при  $ka = 3$  для положения щели, отвечающего значению  $\theta_0 = 120^\circ$  (рис. 2 а).

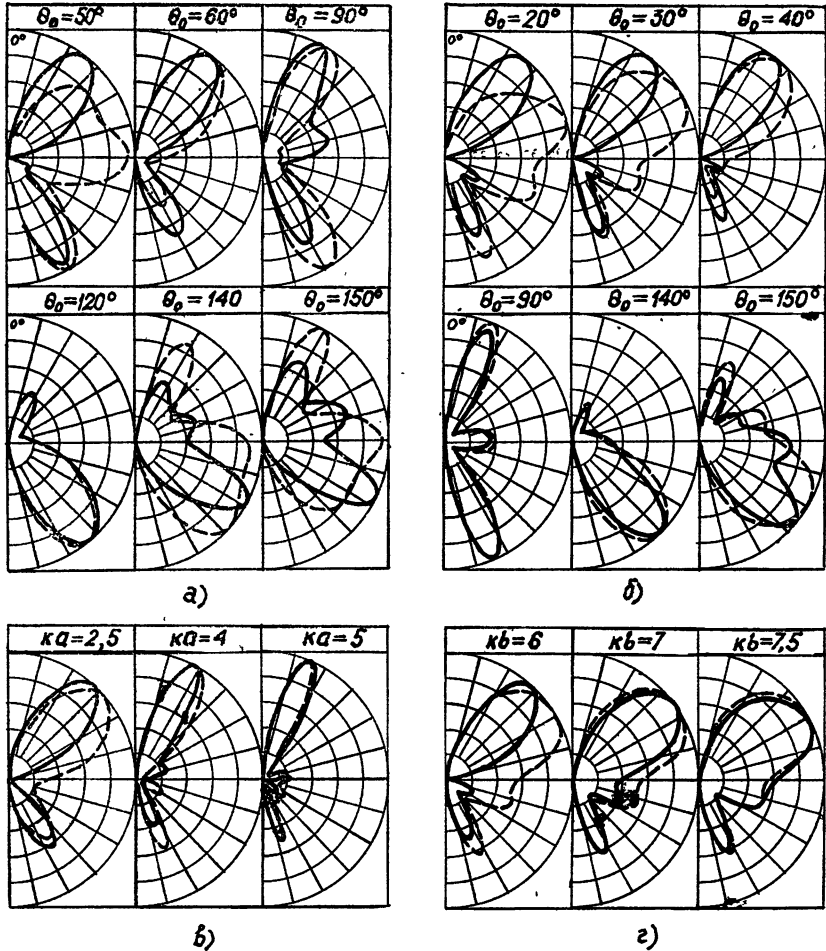


Рис. 2.

Из рис. 2 г видно, что влияние диполя на диаграмму направленности сферической антенны для значений  $ka = 4$  и  $\theta_0 = 30^\circ$  уменьшается по мере его удаления от поверхности сферы. Так уже при  $kb = 7,5$  (что соответствует удаленности диполя от поверхности сферы на расстояние, равное примерно 1,2 длины волны) диаграмма направленности суммарного поля почти не отличается от диаграммы направленности сферической антенны в отсутствие диполя.

Влияние поля дипольного источника на диаграмму направленности сферической антенны по-разному сказывается и в случае, когда он удален на одно и то же расстояние от поверхности сферы, но ее электрические размеры изменяются. Этому случаю отвечает рис. 2 в. На нем изображены диаграммы направленности для случая  $b/a = 1,5$ ,  $\theta_0 = 60^\circ$

и разных  $ka$ . Из него видно, что по мере возрастания  $ka$  влияние диполя уменьшается.

Как мы уже отмечали, расчет диаграмм направленности осуществлялся при условии, что в каждом случае задаваемая на щель нагрузка обеспечивает максимальную для рассматриваемой системы мощность излучения. На рис. 3 построены графики изменения нагрузки на щели. Сплошной линией изображена активная составляющая нагрузки

$$Y = Y_l + Y_r \tag{4}$$

на щели, пунктирной—ее реактивная составляющая. По горизонтали на верхних двух графиках откладывались значения  $\theta_0$ , а на двух нижних—соответственно значения  $ka$  и  $kb$ .

Графики рис. 3 отвечают тем значениям  $ka$ ,  $kb$  и  $\theta_0$ , при которых строились диаграммы направленности на рис. 2.

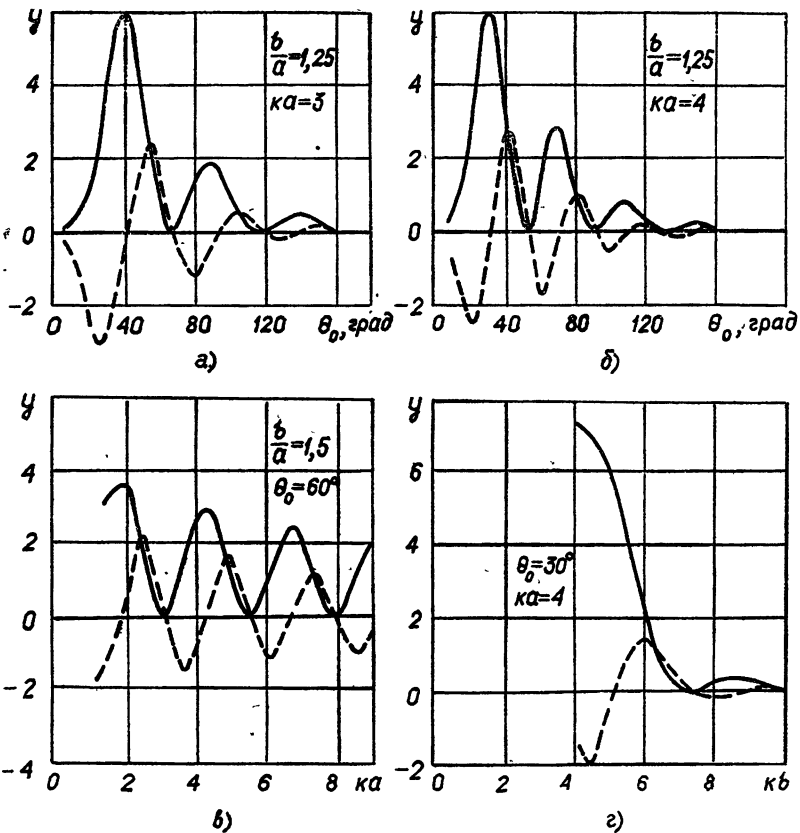


Рис. 3.

Из рисунка видно, что во всех случаях как активная, так и реактивная составляющие нагрузки носят осциллирующий характер. При этом значения активной составляющей нагрузки остаются положительными, в то время как реактивная часть, изменяясь, принимает как положительные, так и отрицательные значения. В местах, где составляющие нагрузки (4) приближаются к нулю, как это можно видеть из рис. 2 а ( $\theta_0 = 120^\circ$ ) и 2 б ( $\theta_0 = 90^\circ$ ), преимущественное влияние на формирование диаграммы оказывает поле сферической антенны.

Проводимость нагрузки на щели  $Y_l$ , как это следует из (2), для заданной частоты  $\omega$  и ширины щели  $\delta$  является функцией, зависящей от всех трех параметров задачи: радиуса сферы  $a$ , расстояния диполя от центров сферы  $b$  и угла  $\theta_0$ , определяющего положение щели на сфере. Входная проводимость сферической антенны  $Y_r$ , при тех же условиях, является функцией только параметров  $ka$  и  $\theta_0$ . Вместе с тем следует отметить (рис. 3), что при изменении одного из трех параметров (при фиксированном значении двух других) в местах, где активная составляющая нагрузки принимает минимальные значения (близкие к нулю), реактивная составляющая нагрузки всегда равна нулю при одном и том же значении изменяющегося параметра. Это значит, что в рассматриваемых нами пределах изменения параметров всегда можно путем соответствующего выбора одного из трех параметров добиться такого режима работы сферической антенны (рис. 2 а,  $\theta_0 = 120^\circ$ ), при котором влиянием дипольного источника можно пренебречь.

В заключение отметим, что путем выбора значений параметров  $ka$ ,  $kb$  и  $\theta_0$ , а через них и  $Y_l$ ,  $Y_r$ , можно осуществлять управление излучением системы «диполь + сферическая антенна», обеспечивая в каждом случае максимальную мощность излучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Иванов, И. Б. Гаврис, Изв. АН БССР, серия физико-математических наук, № 5, 1973.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию  
13 апреля 1976 г.

#### THE FIELD OF A SPHERICAL ANTENNA IN THE PRESENCE OF A RADIAL ELECTRIC DIPOLE

*E. A. Ivanov, I. B. Gavrís*

Some results are given of numerical solution of the problem of the field of a radiating spherical antenna loaded on a circular slot in the presence of the electric dipole with the moment directed perpendicular to the orientation plane of a slot. The slot load is determined based upon the requirement for the radiation power of the considered system consisting of antenna and dipole to be maximum. The results are represented as the antenna patterns and plots of active and reactive components of the slot load providing the above requirement to be satisfied.

УДК 621.372.825.2

## НЕЧЕТНАЯ ВОЛНА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ЧАСТОТАХ НИЖЕ КРИТИЧЕСКОЙ

*Р. Б. Ваганов*

Экспериментально исследована зависимость первой нечетной (дипольной) волны однородного диэлектрического слоя от продольной координаты. Опыт проводился методом биений волн: нечетная волна возникает из четной поверхностной волны на двух несимметричных нерегулярностях, причем нерегулярности двигаются одна относительно другой. Зависимость от  $z$  оказалась неэкспоненциальной.

1. Вовсе не обязательно одновременно использовать для записи поля внутри открытого слоистого волновода и дискретные волны (ряд по поверхностным волнам) и волны непрерывного спектра (интеграл). Можно, как и в закрытых волноводах, ограничиться рядом по дискретным волнам, соответствующим всем корням дисперсионного уравнения. Только несколько волн в этой последовательности — поверхностные, остальные волны находятся в условиях закритических. В предлагаемой работе определена зависимость от  $z$  одной из волн диэлектрического слоя на частотах ниже критической.

Опыт состоит в том, что четная поверхностная волна падает на локальное одностороннее уширение слоя. Условия эксперимента обеспечивают отсутствие в поле дифракции нерегулярности как поверхностных, так и вытекающих волн, имеющих экспоненциальную зависимость от  $z$ . Исследуемое поле интерпретируется как первая нечетная волна слоя; оно спадает вдоль оси  $z$  по экспоненте. Удалось показать, что наблюдаемая зависимость совпадает с одной из возможных функций, введенных А. Д. Шатровым для описания поля внутри и вблизи слоистого волновода.

2. Работа проводилась с прямоугольным диэлектрическим волноводом из плексигласа с поперечными размерами  $3 \times 70$  мм и длиной 400 мм, в диапазоне длин волн от 7,5 до 13,0 мм. В слое возбуждалась четная поверхностная волна низшего порядка, других поверхностных волн волновод не поддерживал. Действительно, следующая поверхностная волна, которую ведет волновод-слой при увеличении частоты, есть первая нечетная волна, но ее критическая длина волны 7,4 мм, т. е. короче самой короткой волны диапазона. Два рупора обеспечивали переход от стандартного прямоугольного волновода сечением  $3,4 \times 7,2$  мм к размерам  $3,4 \times 92$  мм; они служили возбудителем и приемником поверхностной волны. Диэлектрический волновод был вставлен в оба рупора так, что этого было достаточно для его крепления. Небольшой столбик из пенопласта поддерживал снизу волновод, устраняя его прогиб. Для лучшего согласования каждый конец слоя был сведен на клин длиной 60 мм. Слой обладает свойством самофльтрации, так что на некотором расстоянии от рупора из всего излучения рупора остается единственная поверхностная волна.

На пути этой волны ставилась нерегулярность, наложенная на слой полоска плексигласа сечением  $2 \times 13$  мм и длиной 120 мм. Она располагалась перпендикулярно оси системы, концы ее выступали за слой. На некотором расстоянии  $L$  находилась другая такая полоска (нерегулярность), причем дифрагированное на первой нерегулярности поле на второй частично снова превращалось в поверхностную волну. Электродвигатель за ниточки, прикрепленные к выступающим концам полоски (нерегулярности), двигал вторую полоску вдоль оси  $z$ , причем на ленте самописца наблюдались биения выходного сигнала\*, результат интерференции поверхностной волны, прошедшей весь слой, и той же волны, возникшей после двойного преобразования. Амплитуда первой волны не зависит от расстояния  $L$ , амплитуда второй пропорциональна амплитуде дифрагированного на первой полоске поля в месте расположения второй полоски. Таким образом, размах биений есть функция  $L$ , определяемая характером зависимости дифрагированного поля от продольной координаты.

3. Слой отфильтровывает и поле, которое возникает на нерегулярности. На некотором расстоянии от нее должна остаться незатухающая поверхностная волна, пришедшая от возбудителя, и наименее затухающая составляющая из состава дифрагированного поля. Такой составляющей могла бы быть поверхностная волна. Тогда амплитуда биений не зависела бы от  $L$ . Однако, как уже было сказано, других поверхностных волн слой не поддерживает. Такой составляющей могла бы быть вытекающая волна. Тогда амплитуда биений экспоненциально зависела бы от  $L$ . Этот эффект наблюдался в работе [1], где был проведен аналогичный эксперимент с прямоугольным диэлектрическим волноводом и найдена комплексная постоянная распространения вытекающей волны. Следует отметить, что в [1] соотношение сторон в поперечном сечении волновода было 1:2; свойства такого волновода весьма далеки от свойств двумерного слоя, в частности, возникающая на нерегулярности, односторонней диэлектрической накладке дипольная волна является вытекающей.

Для уяснения поведения дифрагированного поля от продольной координаты удобно построить график логарифмической производной амплитуды биений. Если бы эта амплитуда была пропорциональна экспоненте  $\exp(-h''z)$ , то логарифмическая производная не зависела бы от  $z$ . В нашем опыте амплитуда дифрагированного поля не константа и не экспонента, что видно из экспериментальных данных, приведенных на рисунке: логарифмическая производная сильно зависит от  $z$ .

4. Обратимся за объяснением результатов опыта к теории Шатрова [2], по которой поле  $u(x, z)$  внутри диэлектрического слоя может быть представлено в виде дискретной суммы волн, соответствующих всем корням дисперсионного уравнения

$$u(x, z) = \sum A_n \varphi_n(x) [\exp(-ih_n z) + F(x_n, z)] + \sum A_n \varphi_n(x) F(x_n, z), \quad (1)$$

где  $x$  — поперечная координата, перпендикулярная поверхности слоя,  $x_n = (k^2 - h_n^2)^{1/2}$  — поперечное волновое число в пространстве вне слоя,  $\varphi_n(x)$  — поперечное распределение поля каждого слагаемого, которое строится таким же образом, как и для обычной поверхностной волны:  $\varphi_n(x) = \begin{cases} \cos g_n x \\ \sin g_n x \end{cases}$  соответственно для четной и нечетной волн,  $g_n = [k^2(\epsilon - 1) + x_n^2]^{1/2}$ . В первую сумму входят все волны, у которых

\* Число биений невелико — от шести при  $\lambda = 8$  мм до двух при  $\lambda = 13$  мм.

корни  $x_n$  дисперсионного уравнения лежат в комплексной плоскости  $x = x' + ix''$  ниже кривой

$$x'' = \frac{kx'}{(k^2 + x'^2)^{1/2}} \quad (2)$$

причем для случая однородного двумерного слоя эти волны либо поверхностные ( $h_n$ —вещественное,  $x_n$ —мнимое, отрицательное), либо вытекающие ( $h_n$  и  $x_n$ —комплексные). Во вторую сумму входят волны с  $x_n$  выше этой кривой. Зависимость от  $z$  всех этих волн неэкспоненциальная. Функции  $F(x_n, z)$  имеют вид произведения  $\exp(-ikz)$  на медленную функцию от  $z$ .

В составе полного поля на некотором расстоянии от первой нерегулярности наряду с четной поверхностной волной (припишем ей индекс нуль) есть и первая нечетная волна (индекс единица). Для этой волны критическая длина волны в данном слое такова, что она не может быть поверхностной. Это обстоятельство уже отмечалось. На она и не вытекающая. Соответствующий ей корень дисперсионного уравнения  $x_1$  при уменьшении частоты переходит через начало координат, а затем продолжает подниматься по той же оси, не сходя с нее. Волна не становится вытекающей, корень  $x_n$  ( $n = 1$ ) на всех частотах ниже критической остается выше кривой (2), так что первая нечетная волна входит во вторую сумму (1).

Мы предположим, что после нерегулярности остаются только две волны:

$$u(x, z) = A_0 \cos g_0 x \exp(-ih_0 z) + A_1 \sin g_1 x F(x_1, z), \quad (3)$$

так что амплитуда биений должна зависеть от  $z$ , как  $F(x_n, z)$ ,  $n = 1$ . Опыт подтвердил, что наше предположение правильно.

Но какую функцию  $F(x_n, z)$  следует взять? Сложность состоит в том, что теория [2] позволяет построить бесконечное множество систем функций  $F(x_n, z)$ . Эксперимент показал, что одна из возможных систем

$$F(x_n, z) = i \frac{\exp(-ikz)}{\pi x_n} \int_0^{\infty} \frac{(ik + \alpha) \sqrt{2ik\alpha + \alpha^2}}{x_n^2 - 2ik\alpha - \alpha^2} e^{-\alpha z} d\alpha \quad (4)$$

обладает следующим замечательным свойством: всего одна функция из (4), именно  $F(x_1, z)$ , описывает с достаточной точностью дифрагированное поле после полосы (нерегулярности). Действительно, экспериментальные точки\* хорошо легли на кривую, проведенную на рисунке и представляющую логарифмическую производную модуля функции (4),  $n = 1$ . Выбрав функции другого вида, мы представили бы, разумеется, дифрагированное поле в виде (1), но членов разложения пришлось бы взять значительно больше. Этот результат—центральный в предлагаемой работе.

Несколько рискованно было сравнивать результаты трехмерного эксперимента, в котором использовался прямоугольный диэлектрический волновод, с теорией двумерного слоя, но, по-видимому, ширина волновода оказалась настолько больше его толщины, что отличия его свойств от свойств слоя практически не заметно. Не оказали существенного влияния на положение экспериментальных точек и не учтенные в расчете волны более высоких порядков с  $n \neq 1$ .

\* Получены они так: находились амплитуды биений и рисовался график зависимости логарифма амплитуды от  $z$ . Найденные графическим путем производные этой функции и нанесены в виде крестиков и кружочков на приведенный рисунок.



Итак, при падении четной поверхностной волны на нерегулярность диэлектрического однородного слоя — несимметричное относительно средней плоскости локальное утолщение — внутри слоя возникает, в частности, первая нечетная волна, зависимость которой от  $z$  на частотах ниже критической имеет вид неэкспоненциальной функции (4). Этот результат говорит в пользу целесообразности представлять поле внутри открытого волновода в виде ряда по функциям именно этого типа.

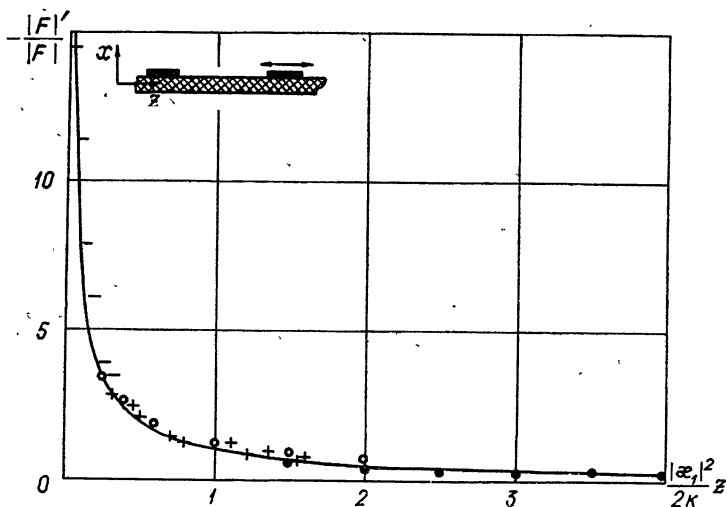


Рис. 1. Логарифмическая производная зависимости от  $z$  амплитуды запердельной нечетной волны слоя (сплошная линия); результаты экспериментов на разных длинах волн—8,5, 9,3, 10,4, 13,0 мм.

Автор благодарен Б. З. Каценеленбауму и А. Д. Шатрову за полезные обсуждения, И. И. Барскому и Л. В. Соколовской за помощь в проведении эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Агаян, В. Ф. Взятыйшев, Б. И. Рябов, Межвузовский сборник научных трудов, серия 17, Ереван, вып. 1, 1974.
2. А. Д. Шатров, Радиотехника и электроника, 17, 1153 (1972).

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 ноября 1975 г.

#### AN ODD WAVE OF DIELECTRIC LAYER AT THE FREQUENCIES BELOW THE CRITICAL ONE

*R. B. Vaganov*

The dependence of the first odd (dipole) wave of the homogeneous dielectric layer on the longitudinal coordinate has experimentally been investigated. The experiment was carried out by the wave beat method: an odd wave arises from the even surface wave by two asymmetrical irregularities, one irregularity moving with respect to another. The dependence on  $z$  appeared to be nonexponential.

УДК 621.372.8.09

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ С РЕЗИСТИВНОЙ ПЛЕНКОЙ

В. А. Калмык, Г. В. Павловская, С. Б. Раевский

Рассмотрены дисперсионные свойства и распределение поля волны  $HE_{11}$  в прямоугольном волноводе, перегороденном тонкой резистивной пленкой. Объяснены некоторые особенности распространения волн в волноводах, имеющих резистивные включения.

Волноводы с резистивными пленками используются при создании фильтров [1], широкодиапазонных СВЧ аттенуаторов [2, 3], вентиляльных устройств с полупроводниковыми включениями [4-6] и т. п. Свойства волн, распространяющихся в таких волноводах, имеют свои особенности.

Поскольку толщина резистивных пленок, вводимых в волноводы, обычно меньше толщины скин-слоя, в [7] был использован приближенный метод исследования дисперсионных свойств таких волноводов — метод поверхностного тока, сводящийся к записи разрывного граничного условия для магнитного поля на резистивной пленке. Этим методом были исследованы дисперсионные свойства некоторых волн в круглом [7, 8] и прямоугольном [9] волноводах.

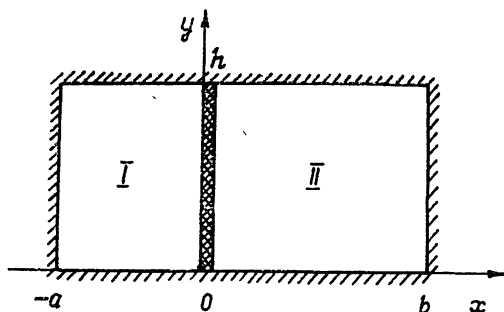


Рис. 1.

В настоящей работе рассматриваются дисперсионные свойства и распределение поля волны  $HE_{11}$  в прямоугольном волноводе, перегороденном резистивной пленкой (рис. 1) (пленка расположена вдоль волновода в плоскости  $x = 0$ ). В общем случае поле в таком волноводе имеет гибридный характер. Записав векторы Герца для областей I и II в виде

$$\Pi_{z1,2}^I = A_{1,2} \sin k_x (x \pm a) \sin \frac{\pi n}{h} y e^{-i\beta z},$$

$$\Pi_{z1,2}^m = B_{1,2} \cos k_x (x \pm a) \cos \frac{\pi n}{h} y e^{-i\beta z}$$

и воспользовавшись отмеченным выше методом [7], получаем дисперсионное уравнение волн  $HE_{mn}$  ( $EH_{mn}$ ):

$$\begin{aligned} & (\omega \varepsilon k_x \operatorname{ctg} k_x a + \omega \varepsilon k_x \operatorname{ctg} k_x b + i \Delta \sigma \alpha^2) \times \\ & \times (\alpha^2 \cos k_x a + \alpha^2 \sin k_x a \operatorname{ctg} k_x b + i \Delta \sigma \mu \sin k_x a) + \\ & + i \Delta \sigma \beta^2 \left( \frac{\pi n}{h} \right)^2 (\cos k_x a + \sin k_x a \operatorname{ctg} k_x b) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Delta \sigma$  — удельная поверхностная проводимость пленки,  $\alpha$  — поперечное волновое число ( $\alpha^2 = k_x^2 + k_z^2$ ).

Численный анализ дисперсионных свойств в настоящей работе производился для волновода с симметрично расположенной пленкой ( $a=b$ ). В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} & (2 \omega \varepsilon k_x \operatorname{ctg} k_x a + i \Delta \sigma \alpha^2) (2 \alpha^2 \cos k_x a + \\ & + i \Delta \sigma \mu k_x \sin k_x a) + 2 i \Delta \sigma \beta^2 \left( \frac{\pi n}{h} \right)^2 \cos k_x a = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя метод, предложенный Каценеленбаумом [10, 11], можно показать существование двух ветвей решений уравнения (2), одна из которых соответствует волне  $HE_{mn}$ , другая —  $EH_{mn}$ .

Действительно, решая (2) относительно  $\cos k_x a$ , получаем

$$\begin{aligned} \cos k_x a = & - \frac{i \Delta \sigma (\varepsilon \mu \omega^2 + k_x^2) \sin k_x a}{\omega k_x [4 \varepsilon + \mu (\Delta \sigma)^2]} \pm \\ & \pm \left\{ \frac{-(\Delta \sigma)^2 (\varepsilon \mu \omega^2 + k_x^2)^2 \sin^2 k_x a}{\omega^2 k_x^2 [4 \varepsilon + \mu (\Delta \sigma)^2]^2} + \frac{\mu (\Delta \sigma)^2}{4 \varepsilon + (\Delta \sigma)^2 \mu} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от слоистых волноводов [12, 13] произвести классификацию волн (определить, какой знак перед радикалом в (3) соответствует волне  $HE_{mn}$ , какой —  $EH_{mn}$ ) на основании предельного перехода в рассматриваемой системе не удастся. Поэтому вопрос о классификации будет решен позднее при рассмотрении распределения поля.

Фазовые характеристики и характеристики затухания, соответствующие первому порядковому корню уравнения (2), приведены на рис. 2. Отметим общие закономерности в ходе этих характеристик. Исследуемая волна, так же как и волны, рассмотренные в [7–9], не имеет критической частоты. При этом ее дисперсионные характеристики, в отличие от обычных волноводов с потерями [14], имеют плавный характер (отсутствует скачок фазовой постоянной и коэффициента затухания при переходе через частоту, соответствующую критической частоте идеального волновода). Для всех случаев (различных  $\Delta \sigma$ ) характерно нарастание  $\beta$  с увеличением частоты. Это легко объясняется с помощью закона сохранения энергии:

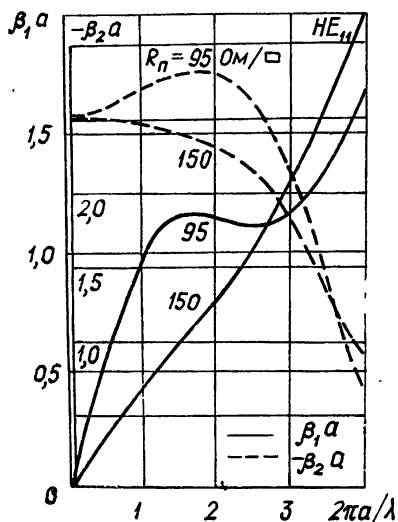


Рис. 2.

$$\frac{d\tilde{\Sigma}}{dz} + \tilde{P} = -2i\omega\tilde{W}, \quad (4)$$

где  $\tilde{\Sigma}$  — колеблющаяся мощность, переносимая через поперечное сечение волновода;  $\tilde{W}$  и  $\tilde{P}$  — колеблющиеся погонные энергия поля и мощность потерь.

Из (4) получаем формулу для постоянной распространения

$$\beta = \frac{2\omega\tilde{W} - i\tilde{P}}{2\tilde{\Sigma}}, \quad (5)$$

из которой видно, что  $\beta_1 \sim \omega$ .

Векторы Герца в рассматриваемом волноводе могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Pi'_{z1,2} = & -\frac{1}{4} A_{1,2} [\exp(-ik_{01}r_1) \exp(\pm ik_x a) - \\ & - \exp(-ik_{02}r_2) \exp(\mp ik_x a) - \exp(-ik_{03}r_3) \exp(\pm ik_x a) + \\ & + \exp(-ik_{04}r_4) \exp(\mp ik_x a)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Pi''_{z1,2} = & \frac{1}{4} B_{1,2} [\exp(-ik_{01}r_1) \exp(\pm ik_x a) + \exp(-ik_{02}r_2) \exp(\mp ik_x a) + \\ & + \exp(-ik_{03}r_3) \exp(\pm ik_x a) + \exp(-ik_{04}r_4) \exp(\mp ik_x a)], \end{aligned}$$

где верхний знак перед  $k_x$  соответствует области I, нижний — области II;

$$\begin{aligned} k_{01} & \left[ -(\gamma + i\delta), -\frac{\pi n}{h}, \beta_1 + i\beta_2 \right], \\ k_{02} & \left[ (\gamma + i\delta), -\frac{\pi n}{h}, \beta_1 + i\beta_2 \right], \\ k_{03} & \left[ -(\gamma + i\delta), \frac{\pi n}{h}, \beta_1 + i\beta_2 \right], \quad k_{0i} \uparrow \uparrow r_i, \\ k_{04} & \left[ (\gamma + i\delta), \frac{\pi n}{h}, \beta_1 + i\beta_2 \right]. \end{aligned}$$

Исходя из представления полей (6), а также учитывая соотношения

$$\epsilon\mu\omega^2 = -\gamma^2 - \delta^2 + \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2, \quad \gamma\delta = -\beta_1\beta_2,$$

приходим к выводу, что поле в каждой из областей рассматриваемого волновода образуется четырьмя парами плоских волн с волновыми векторами  $k_0$  (рис. 3), образующими с осью  $z$  угол

$$\theta = \pm \arccos \frac{\sqrt{\beta_1^2 - \beta_2^2}}{\omega \sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Обе плоские волны (внутри каждой пары) распространяются в направлении  $k_0$ , но имеют различную поляризацию. Из рис. 3 видно, что направление плоских волн, образующих поле в волноводе, определяется параметрами пленки (зависит от  $\delta$  и  $\beta_2$ , характеризующих затухание).

Поскольку распространение плоских волн происходит в среде без потерь, их постоянная распространения  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$ , естественно, действительная величина.

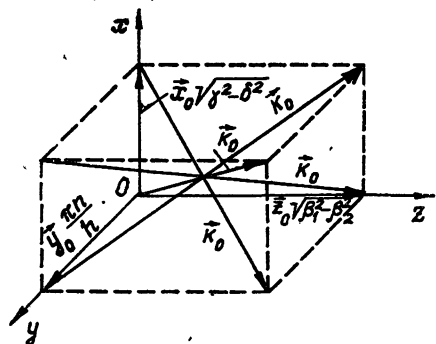


Рис. 3.

С ростом частоты, как было отмечено выше,  $\beta_1$  увеличивается, причем быстрее, чем по закону  $\beta_1 = \alpha\omega$ . Отсюда следует, что с ростом частоты угол  $\theta$  уменьшается. Это приводит к уменьшению поперечного потока мощности, переносимого плоскими волнами, в результате чего увеличивается продольный поток мощности, т. е. уменьшается затухание. Характеристика загугания, приведенная на рис. 2, соответствует этому выводу.

Групповая скорость, записываемая для волновода с потерями [14] в виде

$$v_{гр} = \bar{\Sigma} / \bar{W} \quad (7)$$

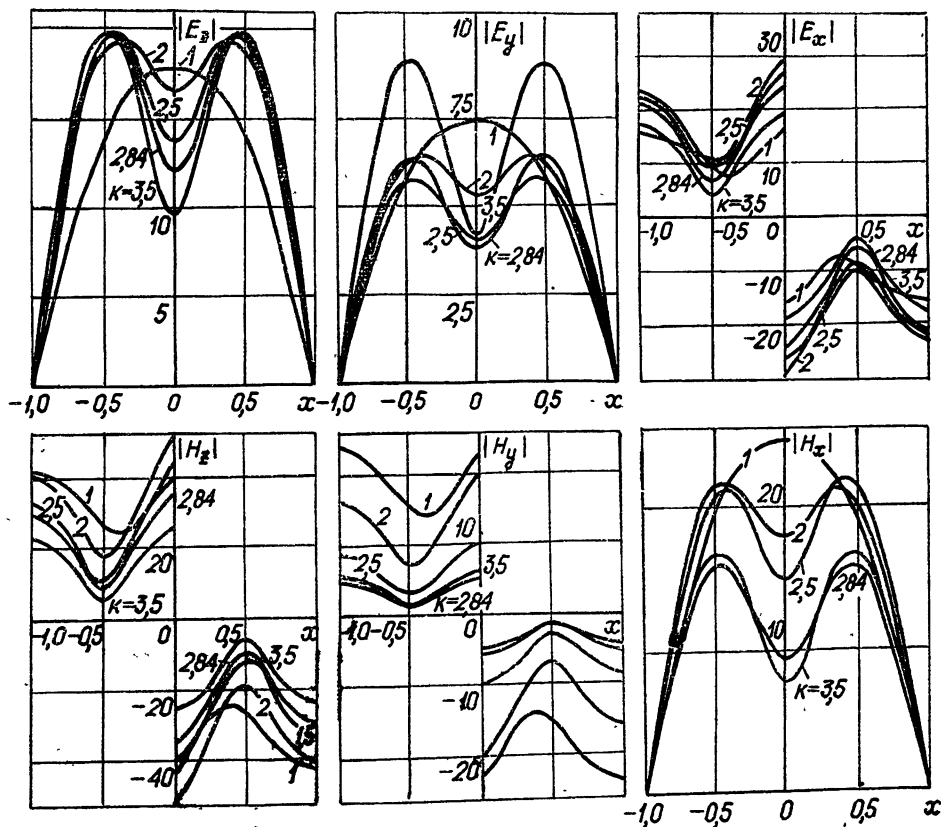


Рис. 4.

( $\bar{\Sigma}$  и  $\bar{W}$  — средние за период продольный поток мощности и погонная энергия), должна увеличиваться с ростом частоты, поскольку затухание

хание (рис. 2) уменьшается. Расчеты, произведенные для случая  $\Delta\sigma = 4$  ( $R_n = 95 \text{ Ом}/\square$ ), приведены в табл. 1. Как видно из таблицы, резистивные пленки с большим поверхностным сопротивлением приводят к значительному уменьшению групповой скорости.

Таблица 1

$2\pi/\lambda$	1,5	2	2,5	2,84
$v_{гр}$	0,009182 <i>c</i>	0,02928 <i>c</i>	0,04476 <i>c</i>	0,06475 <i>c</i>

*c* — скорость света.

На рис. 4 приведены результаты расчета распределения по поперечному сечению волновода поля исследуемой волны при различных частотах ( $k = 2\pi a/\lambda$ ). Из рисунков видно, что доминирующей компонентой магнитного поля является  $H_z$ , электрического —  $E_x$ . Таким образом, распределение поля позволяет классифицировать рассмотренную волну (ей соответствовал знак «—» перед радикалом в (3)) как волну  $HE_{11}$ . Кроме того, зависимость распределения поля от частоты дает возможность объяснить двузначные участки характеристик, соответствующих  $R_n = 95 \text{ Ом}/\square$  (рис. 2).

Как видно из рис. 4, в области двузначного участка ( $1 < k < 2,5$ ) вблизи пленки увеличивается концентрация полей  $H_z$ ,  $H_y$ ,  $E_z$ , возрастает скачок тангенциальных компонент магнитного поля  $H_z$  и  $H_y$ . Это приводит к возрастанию тока в пленке, к увеличению энергии потерь, к росту затухания (рис. 2). Увеличение энергии потерь, в свою очередь, приводит к уменьшению колеблющейся энергии  $\tilde{W}$ , запасенной в волноводе вне пленки, что, в конечном итоге (при достаточно быстром уменьшении  $\tilde{W}$  с частотой), вызывает, как следует из (5), увеличение фазовой скорости.

Уменьшение  $\beta_1$  на участке  $1,5 < k < 2,5$  можно объяснить и с позиции волн Бриллюэна. Возрастание продольных компонент поля, (рис. 4) в области этого участка говорит о том, что плоские волны, образующие волну в волноводе, становятся менее пологими — угол  $\theta$  увеличивается. Увеличение же угла  $\theta$  говорит о возрастании фазовой скорости волны в волноводе.

В распределении полей (рис. 4) можно отметить следующие общие закономерности. С ростом частоты увеличивается (при  $x = 0$ ) провал в распределении компонент, непрерывных на пленке. В конечном итоге, когда  $\omega \rightarrow \infty$ , пленка должна разделить волновод в плоскости ( $y, z$ ) на две части, в каждой из которых будет (по оси  $x$ ) полная вариация поля. Из рис. 5, на котором показана зависимость распределения поля от проводимости пленки, видно, что с ростом  $\Delta\sigma$  разрыв тангенциальных компонент магнитного поля на пленке возрастает.

Некоторые из отмеченных особенностей волны  $HE_{11}$  в прямоугольном волноводе, перегороженном резистивной пленкой, являются общими для волн в волноводах, имеющих резистивные включения [7–9]. К ним можно отнести отсутствие критических частот, непрерывность дисперсионных характеристик и характеристик затухания, существование на этих характеристиках двузначных участков, природа которых объясняется аномальной концентрацией вблизи пленки тангенциальных компонент магнитного поля.

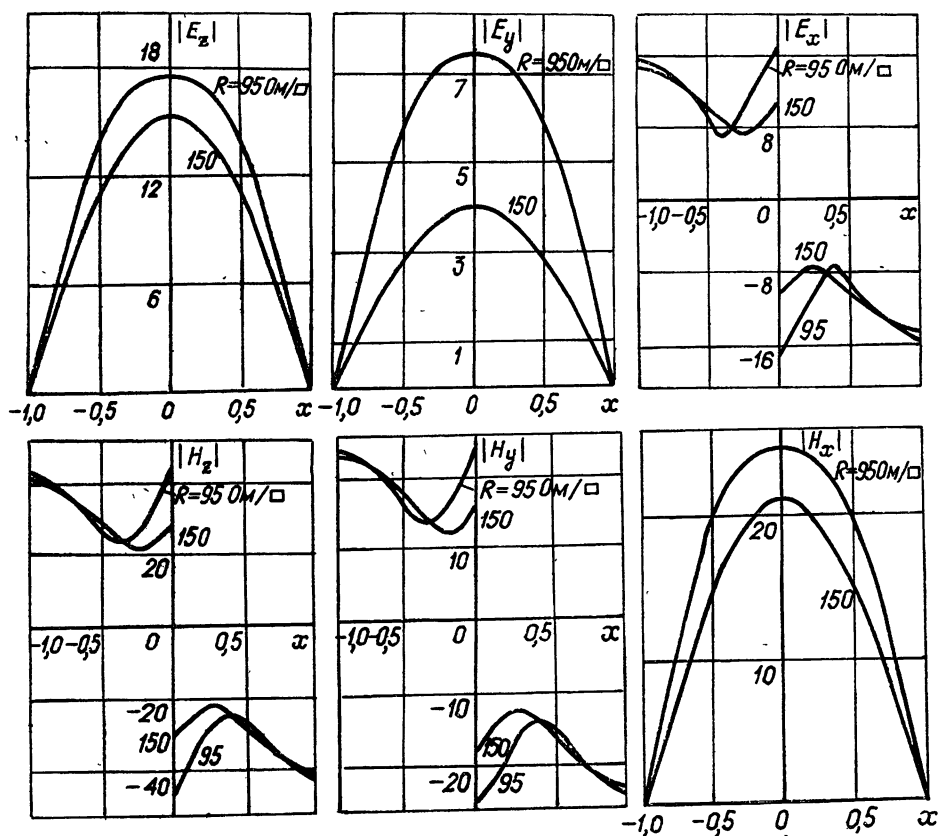


Рис. 5.

Интересную особенность волн в волноводах с резистивными пленками можно обнаружить, сравнивая характеристики, приведенные в работе [8], с характеристиками работ [9] и настоящей. Как видно из [8], в круглом двухслойном волноводе с резистивной пленкой между слоями затухание волны  $E_{01}$  возрастает с увеличением поверхностного сопротивления пленки, в прямоугольном волноводе с пленкой затухание волн  $H_{10}$  и  $HE_{11}$ , наоборот, с увеличением сопротивления уменьшается. Это объясняется тем, что в первом случае в пленке существуют лишь продольные токи, в то время как во втором—либо только поперечные (волна  $H_{10}$ ), либо поперечные, как видно из распределения поля, доминируют (волна  $HE_{11}$ ) над продольными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Shimada, IEEE Trans., MTT-14, № 3, 159 (1966).
2. Ю. А. Горячев, Вопросы радиоэлектроники, серия Радиоизмерительная техника, вып. 2, 91 (1969).
3. Ю. А. Горячев, Вопросы радиоэлектроники, серия Радиоизмерительная техника, вып. 3, 90 (1969).
4. K. Suzuki and R. Hirota, IEEE Trans., ED-18, № 7, 408 (1971).
5. R. M. Arnold and F. I. Rosenbaum, IEEE Trans., MTT-19, № 1, 57 (1971).
6. Д. А. Усанов, Л. Н. Кабанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 18, № 2, 37 (1975).
7. С. Б. Раевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 11, 1703 (1974).

8. В. А. Калмык, С. А. Маркова, С. Б. Раевский, Радиотехника и электроника, 20, № 7, 1496 (1975).
9. В. А. Калмык, С. Б. Раевский, Радиотехника и электроника, 20, № 10, 2183 (1975).
10. Б. З. Каценеленбаум, Докл. АН СССР, 58(7), 1317 (1947).
11. Б. З. Каценеленбаум, Сб. научных трудов, изд. Сов. радио, М., вып. 11, 1948, стр. 111.
12. Г. И. Веселов, Л. А. Любимов, Радиотехника и электроника, 8, № 9, 1530 (1963).
13. С. Б. Раевский, В. Я. Сморгонский, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 941 (1971).
14. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
25 декабря 1975 г.

### SOME PECULIARITIES OF WAVE PROPAGATION IN WAVEGUIDES WITH A RESISTIVE FILM

*V. A. Kalmyk, G. V. Pavlovskaya, S. B. Raevskii*

The dispersion properties and field distribution of the wave  $HE_{11}$  in a rectangular waveguide partitioned off by a thin resistive film are considered. Some peculiarities of wave propagation in waveguides having a resistive switching are clarified.

---



УДК 621.318.15

## ПРОДОЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В КАНАЛЕ В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКЕ

Ю. И. Алексахин, А. П. Беляев, Э. А. Перельштейн

Рассмотрены вопросы продольной устойчивости бесконечного замагниченного сильноточного пучка, движущегося в канале в магнитодиэлектрике. Найдены величины инкрементов неустойчивостей в зависимости от параметров пучка, геометрии и характеристик магнитодиэлектрика.

Впервые на возможность неустойчивости пучка заряженных частиц, движущихся через диэлектрик, указали в 1951 г. Ахиезер и Файнберг [1]. Использование этого эффекта для усиления дециметровых и сантиметровых радиоволн анализировалось в работах [2, 3]. Неустойчивость пучка в канале в магнитодиэлектрике рассматривалась в последнее время [4] в связи с разработкой линейных индукционных ускорителей [5]. Это явление представляет интерес также с точки зрения генерации СВЧ полей и коллективного ускорения ионов сильноточными электронными пучками [6].

В данной работе проведен последовательный анализ устойчивости малых продольных колебаний релятивистского моноэнергетического электронного пучка, движущегося по оси канала в изотропном феррите с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$ . Нелинейные процессы в феррите и пучке не исследовались, хотя они, так же как и анизотропность феррита, могут играть существенную роль при возбуждении волн сильноточным пучком.

Мы рассмотрим два случая:

- а) неограниченную среду с внутренним каналом радиуса  $d$ ,
- б) среду, ограниченную внешним радиусом  $b > d$ .

Предполагается, что изменением радиуса пучка (который для простоты считается равным  $d$ ) по длине канала можно пренебречь (например, пучок замагничен).

Интересуясь относительными инкрементами, большими по сравнению с относительным энергетическим разбросом, мы используем одномерную гидродинамическую модель [2], приводящую к связи между возмущением плотности заряда  $\rho_1(r, z, t) = \rho_1(r) \exp(ik_z z - i\omega t)$  и продольным электрическим полем:

$$\rho_1 = i \frac{e\rho_0}{m\gamma_0^3} \frac{E_z}{(v_\Phi - v_0)^2 k_z},$$

где  $v_0, \rho_0$  — невозмущенные скорость и плотность пучка,  $v_\Phi = \omega/k_z$ ,  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_0 = v_0/c$ . Возмущение плотности тока определяется

из уравнения непрерывности:  $j_{z1} = \frac{\omega}{k_z} \rho_1$ .

Находя совместно с граничными условиями решение волнового

уравнения для  $E_z$  с источником  $4\pi i \left( k_z \rho_1 - \frac{k j_{z1}}{c} \right)$ , получаем дисперсионное уравнение\*:

$$x \frac{J_1(x)}{J_0(x)} = -\kappa \alpha D, \quad (1)$$

где

$$x = \kappa \left[ \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z v_0)^2} - 1 \right]^{1/2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e \rho_0}{m \gamma_0^3}, \quad \kappa = \frac{k_z d}{\gamma_\Phi},$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\gamma_\Phi \sqrt{n^2 \beta_\Phi^2 - 1}}, \quad \gamma_\Phi = (1 - \beta_\Phi^2)^{-1/2}, \quad \beta_\Phi = \frac{v_\Phi}{c}, \quad n^2 = \varepsilon \mu,$$

$J_n(x)$  — функция Бесселя. Коэффициент  $D$  для безграничной среды имеет вид

$$D = \frac{H_1^{(1)}(k_r d)}{H_0^{(1)}(k_r d)}, \quad (2)$$

где  $k_r = k_z \sqrt{n^2 \beta_\Phi^2 - 1}$ ,  $H_n^{(1)}(x)$  — функция Ганкеля первого рода\*\*. В случае ограниченной среды, в зависимости от граничных условий при  $r = b$ :

$$D = \frac{J_0(k_r b) Y_1(k_r d) - J_1(k_r d) Y_0(k_r b)}{J_0(k_r b) Y_0(k_r d) - J_0(k_r d) Y_0(k_r b)} \quad (3)$$

— для границы диэлектрик—металл и

$$D = \frac{Y_1(k_r d) - J_1(k_r d) D'}{Y_0(k_r d) - J_0(k_r d) D'}, \quad (4)$$

где

$$D' = \frac{K_1(x(b/d)) Y_0(k_r b) + \alpha K_0(x(b/d)) Y_1(k_r b)}{K_1(x(b/d)) J_0(k_r b) + \alpha K_0(x(b/d)) J_1(k_r b)},$$

— для границы диэлектрик—вакуум. Здесь  $Y_n(x)$  и  $K_n(x)$  — функции Неймана и Макдональда порядка  $n$ .

1. Рассмотрим сначала случай  $b \rightarrow \infty$ . Ограничимся длинами волн в среде, намного меньшими радиуса канала, т. е. положим  $k_r d \gg 1$ . Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$x \frac{J_1(x)}{J_0(x)} = i \kappa \alpha. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет бесчисленное множество решений, из которых интерес представляет минимальное (по модулю) решение, соответствующее наименьшему изменению  $E_z$  по сечению пучка  $\left( E_z(r) \propto J_0\left(x \frac{r}{d}\right) \right)$ :

Считая  $(v_\Phi - v_0)/v_0$  малым параметром\*\*\*, положим  $v_\Phi = v_0$  в выражениях для  $\kappa$  и  $\alpha$ , тогда  $\kappa = \frac{k_z d}{\gamma_0}$  и  $\alpha = \varepsilon / (\gamma_0 \sqrt{n^2 \beta_0^2 - 1})$ .

\* Мы рассматриваем (1) как уравнение относительно  $\omega$  при заданном  $k_z$ .

\*\* При  $r > d$   $E_z \propto H_0^{(1)}(k_r r) \exp[i(k_z z - \omega t)]$  в соответствии с условием излучения на бесконечности, так что резонансного взаимодействия пучка со средой в данном случае нет.

\*\*\* Это предположение, как показывает решение уравнения (5), справедливо при  $\omega_p/k_z v_0 \ll 1$ .

При  $\kappa\alpha \ll 1$  для наименьшего решения ( $|x| \ll 1$ ) имеем  $x^2 = 2i\kappa\alpha$ , или

$$\Gamma^2 = \frac{\omega_p^2}{1 + 2i\kappa/x}, \quad (6)$$

где  $\Gamma = \omega - k_z v_0 = k_z (v_\Phi - v_0)$ .

Дальше примем, что в интересующем нас диапазоне частот дисперсией  $\varepsilon$  и  $\mu$  можно пренебречь.

Если  $\alpha \ll 1$ , то инкремент  $\text{Im } \Gamma^*$ , как функция  $x$ , имеет максимум [2] при  $x = x_{\max}(\alpha) = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$ , равный

$$\text{Im } \Gamma_{\max} = \frac{\omega_p}{2\sqrt{2}}. \quad (7)$$

С увеличением отношения  $\frac{\varepsilon}{\mu} \left( \alpha \approx \frac{1}{\beta_0 \gamma_0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right.$  для  $n^2 \beta_0^2 \gg 1$ ) частота,

на которой инкремент максимален, увеличивается  $\left( \omega_{\max} \approx \frac{2c}{\sqrt{3}d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right)$  до тех пор, пока выполняется условие  $\alpha \leq 1$ . Само максимальное значение инкремента (7) остается при этом практически неизменным.

Рассмотрим теперь случай  $\alpha \gg 1$ . При  $x \ll 1/\alpha$  по-прежнему работает формула (6), из которой получаем

$$\Gamma/\omega_p \approx -\frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{x}{\alpha}}. \quad (8)$$

В этом интервале длин волн ( $\kappa\alpha \ll 1$ ) инкремент растет с уменьшением длины волны.

Для волн, настолько коротких, что  $\kappa\alpha \gg 1$ , минимальное решение уравнения (5) приблизительно равно  $x \approx \mu_{01} (1 + i/\kappa\alpha)$ , или

$$\Gamma/\omega_p \approx - \left[ 1 + \frac{\mu_{01}^2}{x^2} \left( 1 + \frac{2i}{\alpha x} \right) \right]^{-1/2}, \quad (9)$$

где  $\mu_{01} \approx 2,4$  — первый нуль функции  $J_0(x)$ . Согласно формуле (9) инкремент  $\text{Im } \Gamma$  с уменьшением длины волны убывает как  $x^{-3}$ . Таким образом, при  $\alpha \gg 1$  инкремент как функция  $x$  должен иметь максимум при  $x = x_{\max}(\alpha) \sim 1/\alpha$ . Формулы (8) и (9) при подстановке  $x = 1/\alpha$  действительно дают приблизительно равные значения  $-\text{Re } \Gamma \approx \text{Im } \Gamma \approx \frac{\omega_p}{2\alpha}$ .

Результаты численного решения уравнения (5) с использованием ЭВМ подтверждают сделанные выводы. На рис. 1 показана величина  $x_{\max}(\alpha)$ , соответствующая максимуму инкремента (или, что то же, коэффициента усиления) при фиксированном  $\alpha$ . Для  $\alpha \gg 1$   $x_{\max}(\alpha) \approx \frac{2,2}{\alpha}$ .

На том же рисунке показана зависимость максимального значения  $\gamma = \frac{\text{Im } \Gamma_{\max}}{\omega_p}$  от параметра  $\alpha$ . При больших  $\alpha$  в согласии с приближенным анализом  $\gamma \approx 1/2\alpha$ .

\* Знак корня при вычислении  $\Gamma$  выбирается так, чтобы  $\text{Re } \Gamma < 0$ , что соответствует медленной волне  $\text{Re } v_\Phi < v_0$ .

Таким образом, для усиления СВЧ невыгодно иметь значения  $\alpha > 1,35$  ( $\alpha = 1,35$  соответствует максимуму кривой  $x_{\max}(\alpha)$ ), так как при дальнейшем увеличении  $\alpha$  длина волны, на которой коэффициент усиления максимален, возрастает, а само максимальное значение коэффициента усиления падает. Поэтому представляется целесообразным использование канала в феррите вместо канала с поглощающим покрытием, рассмотренным в [2]. Сравнение с расчетами [2] показывает, что такой канал при тех же параметрах пучка позволяет получить максимум усиления на длине волны, почти на порядок меньшей, при этом коэффициент усиления в 2,5 раза больше (если последний выражен в дБ/м).

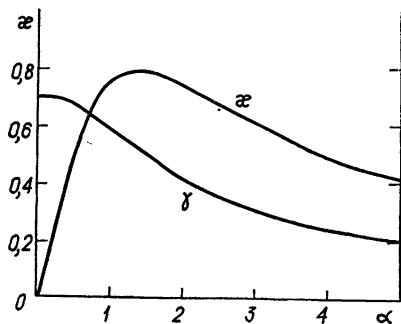


Рис. 1.

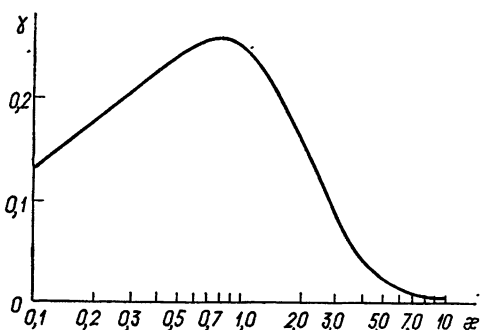


Рис. 2.

На рис. 2 показана зависимость  $\gamma = \text{Im } \Gamma/\omega_p$  от  $x$  при  $\alpha = 1,35$ .

2. Обратимся теперь к случаю ограниченной по радиусу среды. Рассмотрим длинные волны, такие, что  $k_z b/\gamma_0 \ll 1$ , но все же  $k_r d \gg 1$  (что, очевидно, возможно, если  $\beta_0 \gamma_0 n(d/b) \ll 1$ ). Тогда как для (3), так и для (4) приближенно имеем  $D \approx \text{ctg}(k_r \Delta)$ ,  $\Delta = b - d$ . В среде с затуханием  $\text{Im } k_r > 0$  и при достаточно большой толщине, когда  $\exp(2\Delta \text{Im } k_r) \gg 1$  и  $D \approx -i$ , можно пренебречь отражением волн от наружной границы и считать среду безграничной. В дальнейшем будем предполагать, что среда прозрачна ( $\text{Im } k_r = 0$ ); кроме того, будем считать выполненным условие  $n^2 \beta_0^2 \gg 1$ .

В интересном для приложений к теории индукционных ускорителей случае  $\alpha \ll 1$ ,  $x \ll 1$  дисперсионное уравнение (1) можно заменить приближенным:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Gamma^2 (1 - (2\alpha/x) \text{ctg } k_r \Delta)}. \quad (10)$$

Рассмотрим следующие возможности.

1) Дорезонансная область  $k_r \Delta \ll 1$  (очевидно, это условие совместно с  $k_r d \gg 1$  только при  $\Delta/d \ll 1$ ).

Решение уравнения (10) имеет вид

$$\Gamma = i\omega_p \left( \frac{\mu\beta_0^2 k_z^2 \Delta d}{2} \frac{1}{1 - \frac{\mu\beta_0^2 k_z^2 \Delta d}{2}} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Неустойчивость в этом случае носит квазистатический характер ( $\text{Re } v_\phi = v_0$ ) и не связана с излучением. Продольная группировка электронов объясняется тем, что потенциальное электрическое поле ослаб-

лено в  $\epsilon$  раз, а вихревое, приводящее к стягиванию, в  $\mu$  раз увеличено. С уменьшением длины волны, т. е. с увеличением  $k_z$ , по мере приближения к первому резонансу инкремент (11') растет.

2) Резонансная область  $k_r \Delta \gg 1$ . Резонансные частоты определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg}(nk_m \Delta) = \frac{k_m d}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

В случае очень тонкой диэлектрической трубы  $\left(\frac{2\epsilon\Delta}{d} \ll 1\right)$  первая резонансная частота приблизительно равна

$$\omega_1 = ck_1 \approx c \sqrt{\frac{2}{\mu\Delta d}}.$$

Во всех остальных случаях

$$\text{а) } k_m \approx \frac{\pi(2m-1)}{2n\Delta} \left(1 - \frac{d}{2\epsilon\Delta}\right) \quad (m \ll \epsilon\Delta/d),$$

$$\text{б) } k_m \approx \frac{\pi(m-1)}{n\Delta} \left[1 + \frac{2\epsilon\Delta}{\pi^2(m-1)^2 d}\right] \quad (m-1 \gg \epsilon\Delta/d).$$

В окрестности резонанса  $|k - k_m| \ll \pi/n\Delta$  уравнение (10) приводится к виду

$$1 = \frac{\omega_p^2 \omega_m}{\Gamma^2 (\omega - \omega_m)} \left\{ 1 + \frac{2\epsilon\Delta}{d} \left[ 1 + \frac{\mu}{\epsilon} \left( \frac{k_m d}{2} \right)^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что инкремент, как функция «расстройки»  $\delta = k_z \beta_0 - k_m$ , максимален при  $\delta = 0$ . Решение уравнения (12), соответствующее медленной волне, в этом случае есть

$$\Gamma = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{\omega_p^2 \omega_m}{1 + \frac{2\epsilon\Delta}{d} \left[ 1 + \frac{\mu}{\epsilon} \left( \frac{k_m d}{2} \right)^2 \right]} \right\}^{1/3}. \quad (13)$$

При малой толщине диэлектрика ( $2\epsilon\Delta/d \ll 1$ ) инкремент максимален на длине волны, соответствующей первой резонансной частоте, и равен

$$\operatorname{Im} \Gamma_{\max} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{c\omega_p^2}{\sqrt{2\mu\Delta d}} \right)^{1/3}.$$

Если же  $2\epsilon\Delta/d \gg 1$ , то максимум инкремента

$$\operatorname{Im} \Gamma_{\max} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{c\omega_p^2}{2n\Delta}} \quad (14)$$

достигается на резонансной частоте

$$\omega_m \approx \frac{2c}{d} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}, \quad (15)$$

так что длины наиболее неустойчивых волн приблизительно одинаковы как для неограниченной, так и для ограниченной по радиусу среды.

Для иллюстрации приведем численную оценку. Пусть  $\Delta = d = 5$  см,  $\mu = 100$ ,  $\epsilon = 10$ ,  $\gamma_0 = 3$  и ток пучка  $I_0 = 500$  А. Тогда, согласно (14) и (15),  $(\text{Im}\Gamma)^{-1} \approx 5$  нс,  $\omega_m \approx 3,8 \cdot 10^9$  с<sup>-1</sup>.

3. Линейные индукционные ускорители обычно используются в тех случаях, когда необходим высокоэнергетический моноэнергетический пучок [5]. Поэтому энергетический разброс является важнейшей характеристикой таких ускорителей. Развитие неустойчивости приводит к модуляции энергии электронов по длине пучка. Воспользовавшись уравнением непрерывности, можно найти связь между амплитудами модуляции скорости ( $v_1$ ) и тока пучка ( $I_1$ ):

$$\frac{v_1}{v_0} = \left| \frac{\Gamma}{\omega} \right| \frac{I_1}{I_0}.$$

Считая  $\omega \approx k_z v_0$  и подставляя  $k_z$  и  $\Gamma$  для волны с максимальным инкрементом (7), получим  $\frac{v_1}{v_0} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\nu}{\gamma_0^3} \frac{\mu}{\epsilon} \frac{I_1}{I_0}$ , где  $\nu = \frac{eI_0}{mc^2 v_0}$ . Для

приведенных выше параметров  $v_1/v_0 \approx 0,7 \cdot I_1/I_0$ . В то же время относительная модуляция продольного импульса существенно выше:

$$\frac{p_{z1}}{p_{z0}} \approx \gamma_0^2 \frac{v_1}{v_0}.$$

Например, энергетическому разбросу в три процента соответствует 0,5-процентная модуляция тока на длине волны  $\sim 1$  м. Поэтому требование малости энергетического разброса приводит к жестким требованиям на начальную модуляцию тока даже при малых длинах ускорения.

Авторы благодарны В. С. Александрову за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахизер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, 21, 1265 (1951).
2. В. А. Лопухин, А. А. Веденов, УФН, 53, 69 (1954).
3. Ю. И. Юрьев, Радиотехника и электроника, 5, 1458 (1960).
4. В. К. Гришин, ЖТФ, 42, 9 (1972).
5. Ю. П. Вахрушин, И. М. Матора, УФН, 110, 117 (1973).
1. А. И. Ахизер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, 21, 1265 (1951).

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию  
30 декабря 1975 г.

#### LONGITUDINAL INSTABILITY OF AN ELECTRON BEAM IN A CHANNEL OF A MAGNETO-DIELECTRIC

*Yu. I. Aleksakhin, A. P. Belyaev, E. A. Perel'shteyn*

The problems of longitudinal stability of the infinite magnetized strong-current beam moving in the channel in a magneto-dielectric are considered. The instability increments as a function of the beam parameters, the geometry and characteristics of a magneto-dielectric are found.

УДК 621.372.825.2

## НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ДИАФРАГМИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

### 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. МАЛЫЙ ОБЪЕМНЫЙ ЗАРЯД

*В. Е. Нечаев*

Исследованы малые волновые возмущения моноскоростных пучков релятивистских электронов в замедляющих волноводах. Развита общая методика получения дисперсионных уравнений при заданном продольном волновом числе. Для случаев, когда можно пренебречь перерезонансным полем (малый объемный заряд), найдены области неустойчивости и рассчитаны инкременты симметричных и несимметричных колебаний при различных величинах фокусирующего магнитоэстатического поля.

Вопрос о раскачке колебаний в релятивистских электронных пучках (РЭП) внутри замедляющих волноводов имеет важное значение для оценок возможностей различных систем ускорения заряженных частиц и излучения электромагнитной энергии. Обычно в первую очередь рассматриваются черенковские неустойчивости, как обладающие наибольшим инкрементом. Этому вопросу посвящены разделы работ [1, 2], где рассчитаны инкременты колебаний РЭП в периодически диафрагмированном волноводе с сильным осевым магнитным полем  $H_{oz}$  и в условиях ионной компенсации заряда пучка при  $H_{oz} = 0$ . Здесь будет изложено решение задачи в аналогичной [1, 2] постановке, но с использованием более строгой методики расчета, позволяющей избежать некоторых неточностей [1, 2] (см. ниже) и получить более полные результаты относительно неустойчивостей РЭП.

Рассмотрим малые колебания РЭП с произвольным распределением концентрации  $N(r)$  по радиусу, полагая невозмущенное движение вдоль оси моноскоростным ( $v_{oz} = v$ )\*. В отличие от [1, 2] величину магнитоэстатического поля  $H_{oz}$  будем считать произвольной. Кроме того, при получении дисперсионных уравнений не будем с самого начала пренебрегать потенциальной частью поля, поскольку такое пренебрежение не всегда корректно, особенно для сильноточных пучков.

#### 1. Основные соотношения для высокочастотных полей и токов.

Пусть волновод с проводящими стенками радиуса  $\bar{R}$  периодически нагружен бесконечно тонкими проводящими дисками с внутренним радиусом  $R$  (канал для пучка). Период системы существенно меньше длины волны, так что между дисками поле практически не зависит от осевой  $z$ -координаты. Будем считать заданным пространственный период  $2\pi/h$  волны  $f(r) \exp[j(n\theta + hz - \omega t)]$ . Тогда в волноводе без пучка собственное колебание с частотой  $\omega_s = \omega_s(n, h)$  описывается уравнениями для комплексных амплитуд вихревых полей:

$$\operatorname{rot} H_s = -jk_s E_s, \quad \operatorname{rot} E_s = jk_s H_s, \quad (1)$$

\* Здесь не затрагивается вопрос о диокотронных неустойчивостях, порождаемых неоднородностью угловых скоростей дрейфа (см., например, [3]).

где  $k_s = \omega_s/c$ . Для колебаний самосогласованных полей  $E, H$  на частоте  $\omega = \omega(n, h) \neq \omega_s$  в волноводе с потоком электронов будем искать решение из уравнений

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} J - jkE, \quad \operatorname{rot} E = jkH, \quad (2)$$

полагая  $E = \sum A_s E_s + E_p$ ,  $H = \sum B_s H_s$ , где  $E_p$  — потенциальная часть полного поля, а  $J$  — плотность индуцированного в пучке тока. Суммирование производится по всем видам колебаний для данного  $h$ . Из (1) и (2) найдем

$$B_s = \frac{\omega_s}{\omega} A_s, \quad \sum \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right) A_s E_s + E_p = -j \frac{4\pi}{\omega} J. \quad (3)$$

Умножая (3) на  $E_s^*$  и интегрируя по поперечному сечению волновода, включая область между диафрагмами, получим выражения для  $B_s$  и  $A_s$ , сходные с известными [4] из теории резонаторов\*:

$$A_s = \frac{\omega}{\omega_s} B_s = -\frac{j\omega 4\pi}{(\omega^2 - \omega_s^2) W_s} \int_0^R (J E_s^*) r dr, \quad (4)$$

$$W_s = \int_0^{\bar{R}} |E_s|^2 r dr,$$

поскольку  $\int_0^{\bar{R}} (E_p E_s^*) r dr = 0$ ,  $\int_0^{\bar{R}} (E_s E_s^*) r dr = \delta_{ss'} W_s$ , где  $W_s$  — норма

поля  $s$ -вида колебаний (учетверенное значение погонной запасенной энергии). Связь (4) отражает первую из двух частей самосогласованной задачи. Другая часть связана с определением индуцированных в пучке токов, как функций вихревых полей, так как их подстановка в (4), очевидно, приводит к дисперсионному уравнению задачи. Согласно (3) имеем

$$E = \sum A_s E_s + E_p = \sum \frac{\omega_s^2}{\omega^2} A_s E_s - j \frac{4\pi}{\omega} J, \quad H = \sum \frac{\omega_s}{\omega} A_s H_s. \quad (5)$$

Используя (5) в уравнениях движения и непрерывности, можно найти токи в виде бесконечных сумм. Например, в случае сильного магнито-статического поля, подавляющего поперечные качания электронов, оказывается

$$4\pi J_z = \frac{j\omega\omega_b^2}{\Omega^2} E_z = \frac{j\omega\omega_b^2}{\Omega^2 - \omega_b^2} \sum \frac{\omega_s^2}{\omega^2} A_s E_{sz}, \quad (6)$$

где  $\Omega = \omega - hv$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\beta = v/c$ ,  $\omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m \gamma^3}$  — квадрат про-

\* Нельзя, как в [1], отбрасывать  $E_p$  и таким путем сводить волновое уравнение к скалярному виду (3) [1]:  $\Delta E_z + k^2 E_z = -j \frac{4\pi k}{c} J_z$ . В конечном итоге такая некорректная процедура приводит к неточным выражениям для инкрементов колебаний в областях неустойчивости.



дольной ленгмюровской (плазменной) частоты пучка. Из (4) и (6) следует дисперсионное уравнение в виде бесконечного определителя. Однако ниже воспользуемся более удобным приближенным методом, достаточно апробированным в задачах электроники [5]. В областях неустойчивости пучок, как правило, резонирует с одним из собственных видов колебаний ( $s = n$ ), например, при синхронизме  $hv \approx \omega_n$ . Введя функцию распределения тока  $\psi(r)$ , такую, что  $J_z = \psi(r)I_z$ , где  $I_z$  — полный конвекционный ток, представим амплитуду резонансной части поля (4) в виде

$$A_n = - \frac{2j \omega I_z \tilde{E}_{nz}^*}{(\omega^2 - \omega_n^2) W_n}. \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{E}_{nz}^*$  — усредненное поле в смысле  $\tilde{P} = 2\pi \int P \psi r dr$ . С учетом (7) полное поле (5), усреднив с весом  $\psi$ , представим в виде суммы резонансной и нерезонансной частей:

$$\tilde{E}_z = \left[ - \frac{2j \omega_n^2 |\tilde{E}_{nz}|^2}{\omega(\omega^2 - \omega_n^2) W_n} + \frac{4\pi \Gamma}{j \omega S_{\text{эфф}}} \right] I_z, \quad (8)$$

где  $S_{\text{эфф}} = [2\pi \int \psi^2 r dr]^{-1}$  — эффективное сечение пучка, а  $\Gamma$  — коэффициент дисперсии\*:

$$\Gamma = 1 + \frac{j \omega S_{\text{эфф}}}{I_z} \sum_{s \neq n} \frac{\omega_s^2}{\omega^2} A_s \tilde{E}_{sz}, \quad (9)$$

показывающий, как ослабляется нерезонансное взаимодействие электронов в пучке для различных видов волноводов (диафрагмированных, гладких, спирально проводящих и т. д.) по сравнению со случаем однородного поперечного распределения полей и токов, когда  $S_{\text{эфф}} = S$ , а  $\Gamma = 1$ . Из (8) и усредненного (6) следует дисперсионное уравнение в удобной для анализа форме.

## 2. Дисперсионное уравнение при малом пространственном заряде.

Для не слишком больших токов, когда можно пренебречь высокочастотным самовоздействием пучка и ограничиться одноволновым приближением с заданной структурой вихревого поля, токи равны

$$4\pi J_r = \frac{\omega_{b\perp}^2 A_n}{\Omega^2 - \omega_H^2} [j \Omega (E_r - \beta H_\theta)_n + \omega_H (E_\theta + \beta H_r)_n],$$

$$4\pi J_\theta = \frac{\omega_{b\perp}^2 A_n}{\Omega^2 - \omega_H^2} [j \Omega (E_\theta + \beta H_r)_n - \omega_H (E_r - \beta H_\theta)_n], \quad (10)$$

$$4\pi J_z = \frac{j \omega \omega_b^2}{\Omega^2} A_n E_{nz} + \frac{v}{j \Omega} \text{div}_\perp (4\pi J_\perp),$$

где  $\omega_{b\perp}^2 = \omega_b^2 \gamma^{-2}$ , а  $\omega_H = \frac{e H_{0z}}{m \gamma c}$  — гирочастота. Во всех случаях, кроме сильной замагниченности ( $\omega_H^2 \gg \omega_{b\perp}^2$ ), существен учет группировки элект-

\* Заметим, что введенный здесь коэффициент депрессии отличается от общепринятого в теории ЛБВ [5], где задана частота  $\omega$  (см. часть II).

ронов, обусловленной поперечным градиентом концентрации (или  $\frac{\partial \omega_{b\perp}^2}{\partial r}$ ), а при  $\omega_{b\perp}^2 \approx \text{const}$  нужно учитывать колебания границы пучка.

Вклад соответствующих членов в (10) и (4) иногда может быть определяющим.

Подставляя (10) в (4), интегрируя по частям с учетом  $J_r(R) = 0$  и равенств

$$\begin{aligned} E_r - \beta H_\theta &= \omega^{-1} \left( \Omega E_r - j\nu \frac{dE_z}{dr} \right) = jF_r, \\ E_\theta + \beta H_r &= \omega^{-1} \left( \Omega E_\theta + \frac{n\nu}{r} E_z \right) = F_\theta, \end{aligned} \quad (11)$$

получим дисперсионное уравнение в виде

$$W_n \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \right) = \int_0^R \left[ \frac{\omega_b^2}{\Omega^2} E_z^2 + \frac{\omega_{b\perp}^2}{\Omega^2 - \omega_H^2} \left( F_r^2 + F_\theta^2 - 2 \frac{\omega_H}{\Omega} F_r F_\theta \right) \right] r dr. \quad (12)$$

Здесь и далее в записи полей будем опускать индекс основного вида колебания ( $n$ ), а под  $E_z, F_r, F_\theta$  будем понимать поперечные структуры полей (11) — действительные величины. Заметим еще, что первое слагаемое под интегралом (12) не пропорционально ( $J_z E_z^*$ ), так как согласно (10) часть  $J_z \sim \text{div}_\perp J_\perp$  «использована» в слагаемых  $c (\Omega^2 - \omega_H^2)^{-1}$ .

Из (12) видно, что неустойчивости имеют место вблизи резонансов, когда  $\Omega \approx 0$  (синхронизм пучка с волной) и  $\Omega \approx \pm \omega_H$  (доплеровские циклотронные резонансы). Циклотронная раскачка колебаний существует только в области аномального эффекта Доплера, когда  $\omega \approx h\nu - \omega_H$ :

$$W_n(\omega - \omega_n)^2 = - \frac{\omega_n}{4\omega_H} \int_0^R (F_r + F_\theta)^2 \omega_{b\perp}^2 r dr. \quad (13)$$

3. Симметричные колебания. Если  $n = 0$ , поперечные структуры вихревых полей в канале ( $r \ll R$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} E_z &= I_0(pr), & E_r &= -j \frac{h}{\rho} I_1(pr), & H_\theta &= -j \frac{k_0}{\rho} I_1(pr), \\ E_\theta &= H_z = H_r = 0, & & & & \text{где } \rho^2 = h^2 - k_0^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Частота собственных колебаний  $\omega_0$  находится из условия шивки полей при  $r = R$  (см., например, [1]). Частота самосогласованных симметричных колебаний в волноводе с РЭП согласно (12) и (14) определяется из уравнения

$$W_0 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = \int_0^R \left[ \frac{\omega_b^2}{\Omega^2} I_0^2(pr) + \frac{\omega_{b\perp}^2}{\Omega^2 - \omega_H^2} \frac{(h - \beta k_0)^2}{\rho^2} I_1^2(pr) \right] r dr. \quad (15)$$

Вблизи синхронизма, когда  $\omega_0(h) = hv$  (т. е.  $\Omega = \omega - \omega_0$ ), в отсутствие магнитостатического поля ( $\omega_H = 0$ ) инкремент равен

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \frac{\omega_0}{2W_0} \int_0^R \omega_b^2 [I_0^2(pr) + I_1^2(pr)] r dr \right\}^{1/3}. \quad (16)$$

При сильной замагниченности, когда  $\omega_H^2 \gg \Omega^2$ , инкремент несколько меньше (исчезает член с  $I_1^2$ ). В случае  $p^2 R^2 \approx \left(\frac{2\pi R}{\lambda \beta \gamma}\right)^2 \ll 1$ , типичном для систем с релятивистскими пучками, эта разница не существенна. Поэтому можно считать, что инкремент синхронных симметричных колебаний имеет величину

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}\omega_0}{2\gamma} \left( \frac{i}{k_0 W_0 \beta} \right)^{1/3}, \quad (17)$$

где  $i = \frac{eI}{mc^3} = \frac{I(ka)}{17,04}$  — приведенный ток пучка. Заметим, что  $i/\beta = \nu$ ,

где  $\nu$  — хорошо известный в теории мощных пучков «погонный электрон».

В отличие от [1, 2] инкременты содержат интеграл от  $(JE^*)$ , а не  $J_z E_z^*$ ; в норму поля также входит  $|E|^2$ , а не  $|E_z|^2$ . Легко понять, что эти различия не существенны, только когда  $E_{\perp} \ll E_z$ , а  $J_{\perp} \ll J_z$ , т. е. для симметричных синхронных (черенковских) колебаний при  $p^2 R^2 \ll 1$ . Только в этом случае справедливы соответствующие результаты [1, 2] и при записи инкрементов допустимо употреблять  $\int Nrdr$  вместо  $\int NE_z^2 r dr$  (см. (6) в [1]).

Вблизи циклотронного резонанса  $\omega_0(h) = hv - \omega_H$  раскачка колебаний определяется величиной поперечной силы на пучке:

$$-F_r = \frac{(h - \beta k_0)}{\rho} I_1(pr) \approx \left( \frac{\omega_0}{\gamma^2} + \omega_H \right) \frac{r}{2v}. \quad (18)$$

Для пучка с однородным заполнением в границах  $b \gg r \gg a$  согласно (13) инкремент таких колебаний равен

$$\omega_i = \frac{1}{4\beta} \left( \frac{\omega_0}{\gamma^2} + \omega_H \right) \left[ \frac{\omega_0(a^2 + b^2)i}{\omega_H W_0 \gamma \beta} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

При обычных параметрах релятивистских пучков циклотронная раскачка медленнее синхронной, особенно для приосевых пучков с небольшой  $b$ .

4. *Несимметричные колебания.* Рассмотрим волны с  $n = \pm 1$  (при  $|n| > 1$  инкременты меньше). В предположении  $p^2 R^2 \ll 1$  ( $p^2 = h^2 - k_1^2$ ) структуры вихревых полей в канале ( $r \leq R$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} E_z &= k_1 r, & E_\theta &= \pm \frac{hk_1}{4} (R^2 - r^2), \\ H_z &= \pm jhr, & H_\theta &= j \left[ 1 - \frac{h^2 R^2}{4} - (3k_1^2 - h^2) \frac{r^2}{8} \right], \\ E_r &= -j \frac{hk_1}{4} (r^2 + R^2), & H_r &= \pm \left[ 1 - \frac{h^2 R^2}{4} + (3h^2 - k_1^2) \frac{r^2}{8} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Дисперсионное уравнение собственных колебаний (без пучка) следует из условия непрерывности тангенциальных полей при  $r = R$ :

$$\frac{N_1(k_1\bar{R})J_1'(k_1R) - J_1(k_1\bar{R})N_1'(k_1R)}{N_1(k_1\bar{R})J_1(k_1R) - J_1(k_1\bar{R})N_1(k_1R)} = \frac{1}{k_1R} - \frac{k_1R}{2}. \quad (21)$$

На релятивистские электроны в поперечном направлении действуют силы в основном со стороны высокочастотного магнитного поля. При синхронизме ( $h\nu = \omega_1$ ) оказывается:

$$F = -\beta \left( 1 + \frac{3p^2r^2}{8} \right), \quad F_\theta = \pm \beta \left( 1 + \frac{p^2r^2}{8} \right), \quad p = \frac{k_1}{\beta\gamma}. \quad (22)$$

Согласно (12), (20) и (22) частота самосогласованных колебаний определяется из уравнения

$$W_1(\omega - \omega_1) \approx \frac{\omega_1}{2} \int_0^R \left[ \frac{\omega_b^2 k_1^2 r^2}{\Omega^2} + \frac{2\omega_{b\perp}^2 \beta^2}{\Omega(\Omega \mp \omega_H)} \right] r dr. \quad (23)$$

В отсутствие магнитостатического поля ( $\omega_H = 0$ ) членом с  $k_1^2 r^2$  в (23) можно пренебречь с принятой точностью  $p^2 r^2 \ll 1$ , и тогда инкремент равен

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\omega_1 \beta^2}{W_1} \int_0^R \omega_{b\perp}^2 r dr \right)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}\omega_1}{2\gamma} \left( \frac{2\gamma^2 \beta i}{k_1^2 W_1} \right)^{1/3}. \quad (24)$$

Видно, что при  $H_{0z} = 0$  инкремент несимметричных колебаний медленнее убывает с ростом  $\gamma$ , чем инкремент симметричных колебаний (17), и вообще может его превосходить. В случае же больших магнитостатических полей колебания нарастают значительно медленнее:

$$\omega_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\omega_1 k_1^2}{2W_1} \int_0^R \omega_b^2 r^3 dr \right)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}\omega_1}{2\gamma} \left[ \frac{(a^2 + b^2)i}{2W_1\beta} \right]^{1/3}, \quad (25)$$

особенно в пучках с небольшим  $b^2$  (приосевых). Для такого подавления несимметричной раскачки требуются значительные магнитостатические поля:

$$\omega_H \gg \frac{2\Omega\beta^2\gamma^2}{k_1^2 b^2} \sim \frac{\omega_1 \beta^2 \gamma}{k_1^2 b^2} \left( \frac{b^2 i}{W_1 \beta} \right)^{1/3}. \quad (26)$$

Циклотронная неустойчивость при  $h\nu = \omega_1(h) + \omega_H$  согласно (13) характеризуется суммой поперечных сил, которая при  $n = -1$  оказывается заметно большей, чем при  $n = 1$ :

$$F_r + F_\theta = \frac{k^2 r^2}{8} \beta \left( \frac{\omega_H^2}{\omega^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (n = 1), \quad (27)$$

$$F_r + F_\theta = -2\beta + \frac{k^2 R^2}{2\beta} \left( \frac{\omega_H^2}{\omega^2} + \frac{\omega_H}{\omega} \right) \quad (n = -1),$$

т. е.  $F_r + F_\theta \approx -2\beta$ , если  $\omega_H$  не слишком велико ( $F_r \approx -\beta$ ,  $F_\theta \approx \pm\beta$ )  
Согласно (13) и (27) инкремент циклотронных симметричных колебаний равен

$$\omega_i = \left( \frac{\omega_1 \beta^2}{\omega_H W_1} \int_0^R \omega_b^2 r dr \right)^{1/2} \approx \omega_1 \left( \frac{2\omega_1 \beta i}{\omega_H k_1^2 W_1} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Сравнивая (28) с (19), можно видеть, что при некоторых параметрах системы несимметричные циклотронные колебания раскачиваются значительно быстрее симметричных. В первую очередь это относится к приосевым пучкам, поскольку для  $n = -1$   $F_r + F_\theta \approx -2\beta$  (см. (27)), независимо от удаленности электронов от оси волновода. При симметричных колебаниях поперечная сила (18) меньше.

**5. Заключение.** Выше найдены временные инкременты волновых колебаний при заданных волновых числах, или длинах волн. При этом могут возбуждаться, строго говоря, непрерывные спектры колебаний с различными  $h$  вблизи резонанса, т. е. волновые пакеты. Почти всюду в разобранных здесь случаях неустойчивость имеет сносовый характер, т. е. энергия пакета волн нарастает во времени в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью, а в лабораторной системе отсчета, несмотря на временную раскачку «квазимонохроматической» волны с одним  $h$ , поле всего пакета может нарастать в пространстве, а не во времени. Не разбирая подробно этих вопросов, подчеркнем лишь, что установление факта временной нестабильности волн согласно известным критериям является достаточным признаком того, что волновые поля отбирают энергию у электронов, т. е. разрушают пучок.

Из результатов анализа следует, что сильное осевое магнитное поле существенно стабилизирует пучок, при этом в первую очередь снимаются несимметричные разрушения. Однако всегда остается сносовая черенковская неустойчивость. Скорость ее развития при различных токах будет оценена в части II, посвященной учету нерезонансных полей в колебаниях сильноточных РЭП.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Курилко, Ю. В. Ткач, В. А. Шендрик, Препринт ФТИ АН УССР, ХФТИ, 73-38, Харьков, 1973.
2. В. И. Курилко, Ю. В. Ткач, В. А. Шендрик, ЖТФ, 49, 956 (1974).
3. Б. Н. Брейзман, Д. Д. Рютов, Препринт ИЯФ СО АН СССР 119-74, Новосибирск, 1974.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
22 декабря 1975 г.

#### INSTABILITY OF RELATIVISTIC ELECTRON BEAM IN A DIAPHRAGMIZED WAVEGUIDE. I. GENERAL CONSIDERATIONS. A SMALL VOLUME CHARGE

V. E. Nechaev

Small wave perturbations of multi-velocity beams of relativistic electrons in slow-down waveguides have been investigated. A general method is developed to obtain the dispersion equations at the given longitudinal wave number. The instability regions are found and the increments of symmetric and asymmetric oscillations are calculated at different values of focusing magnetostatic field, for the cases when the nonresonant field (a small volume charge may be neglected).

УДК 621.385.6

## СТАРТОВЫЕ УСЛОВИЯ МЦР-МОНОТРОНА ПРИ НАЛИЧИИ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

*И. И. Антаков, В. С. Ергаков, Е. В. Засыпкин, Е. В. Соколов*

Приведены расчет и экспериментальное исследование влияния разброса скоростей электронов на стартовые условия МЦР-монотрона при различных параметрах электронного пучка и резонатора. Расчетные данные и результаты измерений находятся в удовлетворительном соответствии.

В мощных электронных пучках мазеров на циклотронном резонансе (МЦР) [1] разброс скоростей электронов практически неизбежен. Наличие разброса снижает эффективность взаимодействия электронного потока с высокочастотным полем и приводит к изменению характеристик прибора [2, 3]. В настоящей работе изложены результаты теоретического и экспериментального исследования влияния разброса скоростей на стартовые условия МЦР-монотрона с аксиально-симметричной электродинамической системой и трубчатым электронным пучком. Расчеты основаны на линейной теории МЦР-монотрона со слабо релятивистским электронным пучком, взаимодействующим на частоте циклотронного резонанса с одной из высокочастотных ТЕ-мод резонатора.

### 1. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Условие самовозбуждения МЦР-монотрона, определяющее стартовый ток, записывается в виде [4]

$$1 - 4\pi Q\chi'' = 0, \quad (1)$$

где  $Q$  — добротность резонатора,  $\chi''$  — мнимая часть электронной восприимчивости  $\chi = \chi' + i\chi''$ .

При наличии разброса скоростей, невозмущенных высокочастотным полем вращательного и поступательного движения электронов, и, в общем случае, разброса координат ведущих центров электронных орбит восприимчивость равна

$$\chi = \int \chi_0 f(v_{\perp}, v_{\parallel}, r) dv_{\perp} dv_{\parallel} dr. \quad (2)$$

Здесь  $f(v_{\perp}, v_{\parallel}, r)$  — стационарная, нормированная на единицу, функция распределения электронов по скоростям и координатам ведущих центров на входе в пространство взаимодействия,

$$\chi_0 = \frac{i\hat{l}}{2\pi Q\mu^4} \left(1 + \mu \frac{d}{d\theta}\right) \left[ \int_0^{\mu} F(\zeta) e^{-\theta\zeta/\mu} \int_0^{\zeta} F(\zeta') \exp(i\theta\zeta'/\mu) d\zeta' d\zeta \right] \quad (3)$$

— восприимчивость односкоростной группы электронов, имеющих общую ось вращения. В (3)  $\mu = \pi(\beta_{\perp}^2/\beta_{\parallel}) (L/\lambda)$ ,  $L$  — длина резонатора,

$\lambda = 2\pi c/\omega$ ,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ ,  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$  — отношение скоростей вращательного и поступательного движения к скорости света  $c$ ;  $\theta = (\omega - \omega_H) \Delta/v_{\parallel}$ ,  $F(\zeta)$  — функция распределения ВЧ поля по продольной координате, отсчитываемой от входного сечения резонатора,  $\zeta = \pi(\beta_{\perp}^2/\beta_{\parallel})(z/\lambda)$ ,  $\omega_H$  —

циклотронная частота электронов,  $\hat{I}$  — безразмерный параметр, пропорциональный току пучка, добротности резонатора и геометрическому фактору, определяемому местом встраивания электронов и рабочим типом колебаний резонатора.

Винтовые электронные пучки, формируемые адиабатическими магнетронно-инжекторными пушками, обычно используемыми в МЦР, имеют незначительный радиальный разброс ведущих центров электронных траекторий и равномерное распределение их по азимутальной координате [5]. Кроме того, в стартовом режиме (при малых точках пучка) можно пренебречь влиянием пространственного заряда и считать, что невозмущенные высокочастотным полем электроны пучка имеют одинаковую энергию. В этом случае условие (1) для  $TE_{mpq}$ -типа колебаний с синусоидальным продольным распределением ВЧ поля в цилиндрическом резонаторе преобразуется к виду

$$I_{st}(a) = \frac{\pi \bar{\beta}_{\parallel}^2 \alpha}{0,24 \bar{\beta}_{\parallel}^2 Q(L/\lambda)} \left( \frac{\bar{\beta}_{\parallel}}{\beta} \right)^2 \frac{[(xR_p)^2 - m^2] J_m^2(xR_p)}{J_{m-1}^2(xR_e)} V(\kappa B); \quad (4a)$$

$$\alpha^{-1} = \left( \frac{\bar{\beta}_{\parallel}}{\beta} \right)^{-1} \int_0^1 (1 - \gamma^2)^{-1/2} \left( 1 + \nu_0 \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2} \frac{d}{d\theta_0} \right) \tilde{\chi} f(\gamma) d\gamma; \quad (4б)$$

$$\tilde{\chi} = - \frac{\pi^4 q^2}{2} \frac{1 + (-1)^{q+1} \cos \theta}{[(\pi q)^2 - \theta^2]^2}; \quad (4в)$$

$$\frac{\bar{\beta}_{\parallel}}{\beta} = \int_0^1 (1 - \gamma^2)^{1/2} f(\gamma) d\gamma, \quad (4г)$$

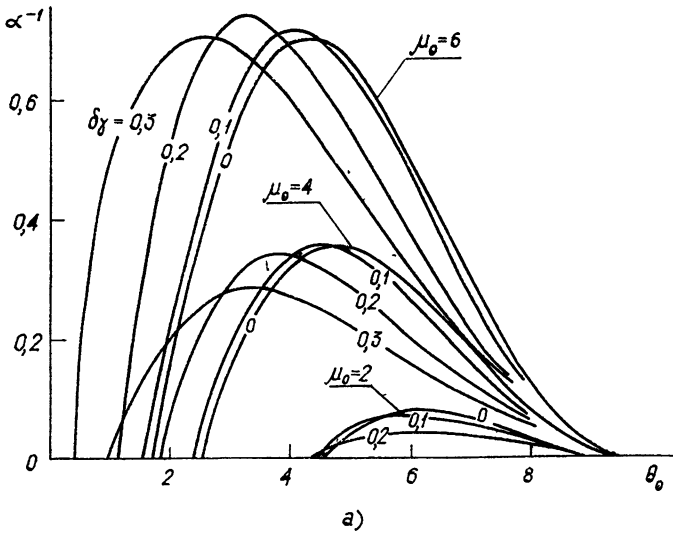
где  $I_{st}$  — стартовый ток в амперах,  $V$  — ускоряющее напряжение в киловольтках,  $R_e$  и  $R_p$  — радиусы пучка и резонатора,  $\gamma = v_{\perp}/v$ ,  $v$  — полная скорость электронов,  $x$  — поперечное волновое число,  $m$  и  $q$  — азимутальный и продольный индексы рабочего типа колебаний,  $J_m$  — функция Бесселя первого рода. Индексом «0» здесь и в дальнейшем обозначены величины, определяемые при параметрах электронного пучка, соответствующих максимуму функции  $f(\gamma)$ .

Функция распределения электронов по скоростям в рабочих режимах МЦР близка к симметричной [6]. Симметрия нарушается лишь электронами с относительно большими продольными скоростями, не влияющими существенно на взаимодействие пучка с ВЧ полем резонатора. Поэтому при вычислении стартового тока распределение электронов по скоростям может быть аппроксимировано с достаточной степенью точности двухпараметрической функцией, в частности функцией вида

$$f(\gamma) = \begin{cases} a(\gamma - \gamma_0 + 0,5 \delta\gamma) & (\gamma_0 - 0,5 \delta\gamma \leq \gamma \leq \gamma_0) \\ a(-\gamma + \gamma_0 + 0,5 \delta\gamma) & (\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_0 + 0,5 \delta\gamma) \end{cases}. \quad (5)$$

Здесь  $a$  — нормировочный множитель,  $\delta\gamma = \delta v_{\perp} g_0 (1 + g_0^2)^{-1/2}$ ,  $\delta v_{\perp}$  — относительный разброс поперечных скоростей электронов,  $g_0$  — отношение поперечной и продольной скоростей электронов в максимуме функции распределения.

На рис. 1—3 приведены результаты расчетов параметра  $\alpha$ , определяющего стартовый ток (4 а) резонатора с пучком, распределение электронов по скоростям в котором описывается функцией (5), при различных значениях параметров системы  $\delta v_{\perp}$ ,  $q$ ,  $\mu_0$  и  $g_0$ .



Разброс скоростей электронов вызывает расширение зоны отрицательного поглощения ( $\chi'' > 0$ ) в полосе циклотронного резонанса и смещение минимального значения стартового параметра  $\alpha_{\min}$  в сторону меньших по абсолютной величине углов пролета электронов  $\theta$  (рис. 1). Смещение зоны  $\chi'' > 0$  обусловлено влиянием электронов с относительно малыми продольными скоростями ( $\beta_{\parallel} < \beta_{\parallel}^{(0)}$ ), наиболее эффективно взаимодействующих с ВЧ полем резонатора. Если разброс скоростей электронов невелик, так что углы пролета всех электронов пучка не выходят за пределы зоны отрицательного поглощения, то с возрастанием разброса скоростей величина  $\alpha_{\min}$  уменьшается (рис. 1 а, 2), соответственно уменьшается и стартовый ток. Большой разброс скоростей приводит к увеличению  $\alpha_{\min}$  и стартового тока, так как углы пролета части медленных электронов оказы-

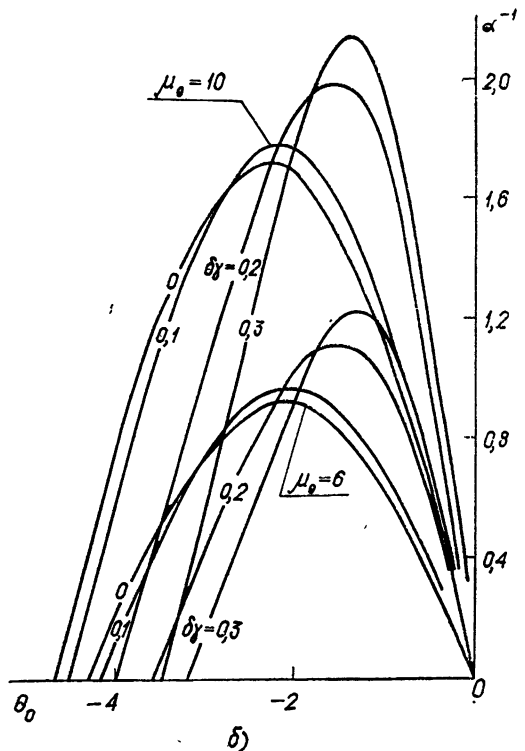


Рис. 1. Зоны отрицательного поглощения электронного потока при  $g_0=2$ ; а)  $q=1$ , б)  $q=2$ .



ваются в зоне поглощения. При увеличении  $g_0$ ,  $q$  и уменьшении  $\mu_0$  относительная ширина зоны отрицательного поглощения сужается и влияние разброса скоростей возрастает (рис. 2, 3).

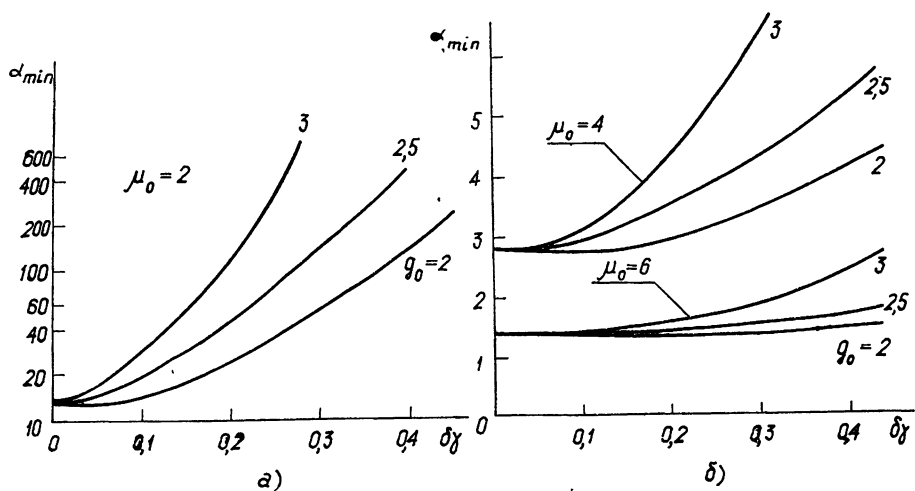


Рис. 2. Зависимость стартового параметра  $\alpha_{min}$  от разброса скоростей электронов при  $q = 1$ .

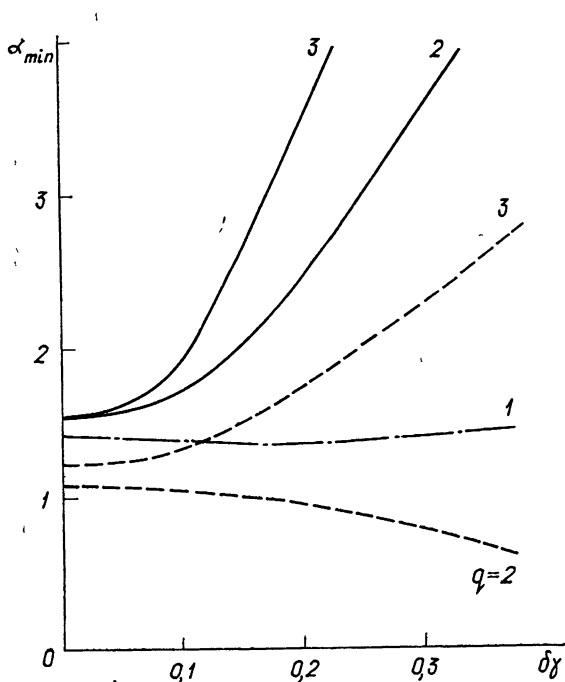


Рис. 3. Зависимость  $\alpha_{min}$  от величины разброса скоростей электронов. Сплошные и штриховые кривые соответствуют областям резонансного взаимодействия с электронным потоком попутных и встречных волн ( $g_0 = 2$ ,  $\mu_0 = 6$ ).

Аномальное поведение зависимости  $\alpha_{\min}$  в случае резонатора с двумя продольными вариациями поля ( $q=2$ ) от величины относительного разброса скоростей в области, соответствующей резонансному взаимодействию пучка со встречной волной ( $\theta_0 \leq 0$ ), обусловлено тем, что медленные электроны при увеличении разброса скоростей не выходят из зоны отрицательного поглощения, ограниченной значением  $\theta_0 = 0$ , и не попадают в зону  $\chi'' < 0$ .

Для оценки пределов изменения параметров электронного пучка и резонатора, в которых влияние разброса скоростей не существенно, приведем соотношение, полученное в предположении, что разброс углов пролета электронов, связанный с разбросом их скоростей, не превышает полуширины зоны  $\chi'' \geq 0$ ,

$$\delta v_{\text{гр}} = \frac{1}{2g_0^2} \frac{\theta_{\min}^{(0)} [\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}]}{\theta_1^{(0)} \theta_2^{(0)}}. \quad (6)$$

Здесь  $\delta v_{\text{гр}}$  — граничное значение разброса поперечных скоростей,  $\theta_1^{(0)}$  и  $\theta_2^{(0)}$  — граничные значения углов пролета области  $\chi'' \geq 0$  при  $\delta v_{\perp} = 0$ ,  $\theta_{\min}^{(0)}$  — угол пролета электронов, соответствующий  $\alpha_{\min}$  при  $\delta v_{\perp} = 0$ . Для резонаторов с одной продольной вариацией поля ( $q=1$ ) значения углов пролета, входящих в (6), в интервале изменения  $\mu_0$  от 2 до 10 определяются приближенными выражениями:  $\theta_1^{(0)} \approx 3\pi\mu_0^{-1}$ ,  $\theta_2^{(0)} \approx 3\pi$  и  $\theta_{\min}^{(0)} \approx 3\pi\mu_0^{-1/2}$ . В этом случае соотношение (6) преобразуется к виду

$$\delta v_{\text{гр}} = \frac{1}{2g_0^2} \frac{\mu_0 - 1}{\sqrt{\mu_0}}.$$

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальный МЦР-монотрон, который использовался при измерениях стартового тока, конструктивно аналогичен описанному в [7]. Резонатором в нем является отрезок цилиндрического волновода, ограниченный диафрагмой вывода энергии и запредельным для рабочего типа колебаний сужением. В таком резонаторе длина области локализации высокочастотного поля несколько превышает длину его цилиндрического участка. Правильное же определение длины пространства взаимодействия весьма существенно при расчете стартовых токов, поскольку  $I_{\text{st}} \sim (\lambda/L)^3$ . Как показали измерения, продольное распределение ВЧ поля в резонаторах, использованных в эксперименте, близко к распределению поля в закрытом с торцов резонаторе, собственная частота и радиус которого совпадают с частотой и радиусом исследуемого резонатора. Такая аппроксимация реального распределения поля обеспечивает необходимую точность при сопоставлении экспериментальных и теоретических значений стартового тока.

Параметры исследуемых МЦР-монотронов удовлетворяют условию мягкого режима возбуждения колебаний, что позволило определять стартовые токи по графикам экспериментальных зависимостей мощности выходного излучения от тока электронного пучка. Этот способ определения стартовых токов позволяет также контролировать в ходе эксперимента частоту и тип возбуждающихся колебаний.

Экспериментально находились зависимости стартового тока от величин магнитостатического поля в пространстве взаимодействия  $H_0$  и отношения магнитных полей в резонаторе и на катоде электронной пушки  $H_0/H_K$  (рис. 4, 5). Параметры  $\delta v_{\perp}$  и  $g_0$ , характеризующие функ-

цию распределения скоростей электронов, зависят от тока электронного пучка и величины  $H_0/H_K$ . Поэтому необходимые для расчета стартовых токов значения этих параметров определялись в режимах, соответствующих стартовым режимам, с помощью электронно-оптических измерений методом, описанным в [6]. Полученные величины  $\delta v_{\perp}$  и  $g_0$  приведены также на рис. 4, 5.

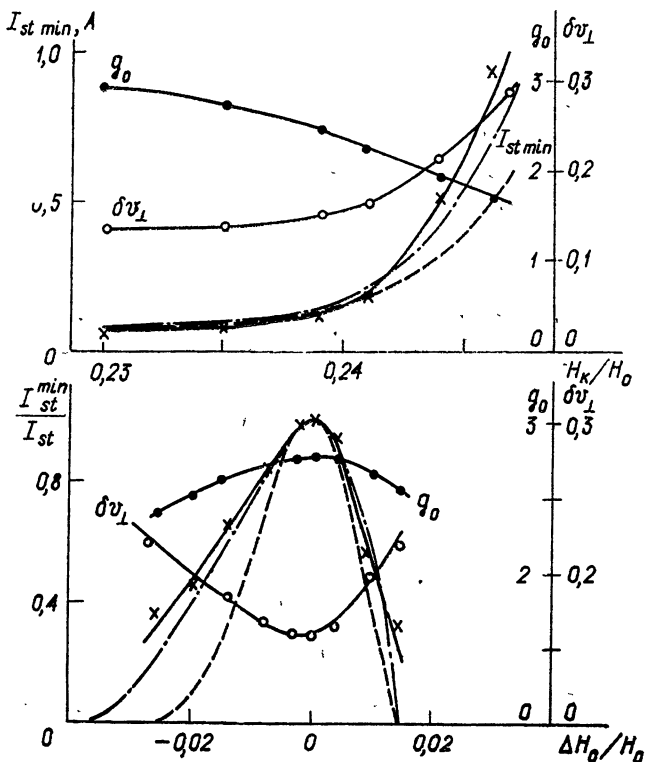


Рис. 4, 5.

Рис. 4. Зависимость минимального стартового тока резонатора ( $Q=1000$ ,  $L=2,5\lambda$ ) и параметров  $g_0$  и  $\delta v_{\perp}$  от величины отношения магнитных полей на катоде и в резонаторе.

Сплошная кривая — эксперимент, штриховая — расчет без учета разброса скоростей электронов, штрих-пунктирная — расчет с учетом разброса электронов по скоростям.

Рис. 5. Зависимость стартового тока резонатора ( $Q=700$ ,  $L=2\lambda$ ) и параметров  $g_0$  и  $\delta v_{\perp}$  от величины магнитного поля в пространстве взаимодействия.

Сплошная кривая — экспериментальные кривые, штрих-пунктирная и штриховая — расчетные кривые с учетом и без учета разброса электронов по скоростям.

В области малых  $H_K/H_0$  (большие значения  $g_0$ ) и малых стартовых токов разброс скоростей электронов невелик и измеренные значения  $I_{st\ min}$  совпадают с рассчитанными по соотношениям моноскоростной теории. С увеличением  $H_K/H_0$  и уменьшением  $g_0$ , при больших токах электронного пучка, возрастает величина разброса скоростей электронов и его влияние на стартовый ток становится существенным. Учет разброса скоростей электронов позволяет получить хорошее совпадение расчетных значений  $I_{st\ min}$  с измеренными. Небольшое их различие обусловлено неточностью аппроксимации реальной функции распределения электронов по скоростям.

Приведенные на рис. 5 графики зависимости  $I_{st}^{min}/I_{st}$  от расстройки магнитного поля в резонаторе характеризуют изменение  $I_{st}$  в полосе циклотронного резонанса. Величина расстройки магнитного поля  $\Delta H_0$  связана с изменением угла пролета  $\Delta\theta$  следующим соотношением:

$$\frac{\Delta H_0}{H_0} = - \frac{\beta_{\parallel}^{(0)} \Delta\theta (\lambda/\Delta)}{2\pi - \theta_{min} \beta_{\parallel}^{(0)} (\lambda/L)},$$

где  $H_0$  и  $\theta_{min}$  — магнитное поле и угол пролета, при которых  $I_{st} = I_{st}^{min}$ . Расчетная зависимость с учетом разброса скоростей электронов и в этом случае, как видно из рисунка, достаточно хорошо совпадает с измеренной.

Приведенные результаты позволяют, таким образом, оценить влияние разброса электронов по скоростям на стартовые условия МЦР-монотрона при различных параметрах электронного пучка и резонатора. Основными эффектами, связанными с наличием разброса, являются увеличение стартового тока и расширение полосы возбуждения резонатора. Учет этих эффектов необходим при расчете и конструировании мощных МЦР и, в особенности, МЦР, в которых возможно возбуждение конкурирующих (паразитных) видов колебаний [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. В. П. Тараненко, В. Н. Глушенко, С. В. Кошечая, К. Я. Лиждвой, В. А. Прус, В. А. Трапезон, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 12, 47 (1974).
3. Е. М. Демидович, И. С. Ковалев, А. А. Кураев, Ф. Г. Шевченко, Радиотехника и электроника, 18, № 10, 2097 (1973).
4. М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 290 (1975).
5. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 141 (1973).
6. И. И. Антаков, В. А. Гинцбург, Е. В. Засыпкин, Е. В. Соколов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 8, 1196 (1975).
7. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 280 (1975).
8. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1709 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
21 ноября 1975 г.

#### STARTING CONDITIONS OF CRM-MONOTRON IN THE PRESENCE OF ELECTRON VELOCITY SCATTER

*I. I. Antakov, V. S. Ergakov, E. V. Zasyphin, E. V. Sokolov*

Calculation and experimental investigation have been made of the scatter effect at different parameters of the electron beam and resonator. The estimated data and the results of measurements are in good agreement.

УДК 621.385.6

## СИСТЕМА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ЛБВ С ПОПЕРЕЧНЫМ ПОЛЕМ

*В. А. Ванке, А. А. Зайцев*

Качественно рассмотрен механизм группировки в ЛБВ с синхронной волной электронного потока. Выведены основные уравнения нелинейной теории взаимодействия электронного потока с бегущей циркулярно поляризованной электромагнитной волной с учетом поперечных скоростей электронов и неоднородного аксиально-симметричного постоянного магнитного поля. Получены выражения для поля пространственного заряда.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Важным классом электронно-лучевых приборов СВЧ «О»-типа являются приборы, в которых используются волны поперечных скоростей и смещений электронов. В приборах с поперечным взаимодействием с успехом реализованы параметрический и электростатический принципы усиления, позволившие получить весьма низкие значения коэффициента шума  $F < 1,5$  дБ [1, 2]. Менее изучена пригодность подобных устройств для генерирования и усиления мощных СВЧ колебаний. Нелинейная теория таких приборов, по существу, только развивается [3, 4]. Трудности нелинейного анализа физических явлений в системах с поперечным взаимодействием связаны прежде всего с довольно сложным трехмерным характером движения электронов.

В рамках линейной теории, основанной на нитевидной модели электронного потока, показано, что перспективной, с точки зрения получения высокого КПД, является ЛБВ, в которой осуществляется взаимодействие циркулярно поляризованной волны замедляющей структуры с медленной синхронной волной электронного потока. Вследствие нулевой дисперсии фазовой скорости медленной синхронной волны такой прибор может быть также широкополосным и обладать высокой линейностью фазочастотной характеристики.

Экспериментально осуществлено взаимодействие бегущей циркулярно поляризованной волны электродинамической системы с электронным пучком [5], а существующий нелинейный анализ, построенный в дрейфовом приближении и без учета поперечных скоростей электронов, предсказывает довольно высокие значения результирующего КПД  $\sim 80\%$  [4].

Все это говорит о целесообразности более глубокого изучения физических явлений в таких системах с целью выявления их потенциальных возможностей и недостатков.

В данной работе приведена качественная иллюстрация механизма взаимодействия и сформулирована система уравнений, позволяющая более полно описать процессы взаимодействия электронного пучка с полем бегущей циркулярно поляризованной волны замедляющей системы.

## 2. МЕХАНИЗМ РАБОТЫ ЛБВ С ПОПЕРЕЧНЫМ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННЫМ ПОЛЕМ

Для иллюстрации принципа действия ЛБВ с синхронной волной электронного потока рассмотрим структуру электрического поля циркулярно поляризованной медленной волны электродинамической системы. Поперечное электрическое поле будем считать однородным, что справедливо вблизи оси реальных замедляющих структур. В системе координат, ось  $z$  которой совпадает с осью замедляющей системы, поперечные составляющие электрического поля циркулярно поляризованной волны можно записать в виде

$$E = E_x + jE_y = E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (1)$$

где  $\omega$  — круговая частота сигнала,  $\beta$  — постоянная распространения.

Такое электрическое поле присутствует, например, в качестве одной из пространственных гармоник в скрученной, противофазно возбуждаемой двухрядной гребенке (рис. 1), а также в двухзаходной спирали.



Рис. 1. Скрученная двухрядная гребенка в цилиндрическом волноводе.

Для медленных электромагнитных волн ( $\beta \gg \omega/c$ )  $\operatorname{rot} E \approx 0$ . Полагая, что поле  $E_z = 0$  на оси замедляющей системы, и используя равенство  $\operatorname{rot} E \approx 0$ , получим

$$E_z = \operatorname{Re} \left( r^* \frac{\partial E}{\partial z} \right), \quad (2)$$

где  $r = x + jy$  — комплексная поперечная координата. На рис. 2 схематически изображено распределение электрического поля (1) и (2) при  $t = 0$  для некоторых фиксированных значений  $z$ .

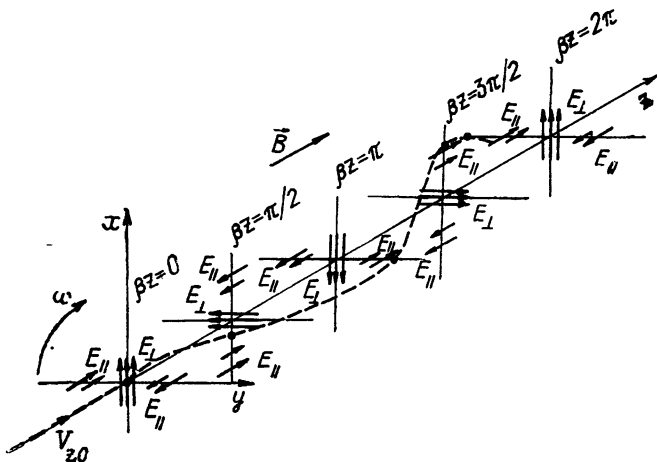


Рис. 2. Распределение электрического поля циркулярно поляризованной волны и форма нитевидного электронного потока в момент времени  $t = 0$ .

Пусть электронный поток нитевидной формы поступает в область взаимодействия ( $z \geq 0$ ) точно по оси замедляющей структуры. Будем

считать, что продольная скорость электронов  $V_{z0}$  равна фазовой скорости электромагнитной волны. Тогда каждый электрон в движущейся со скоростью  $V_{z0}$  вдоль оси  $z$  системе координат находится в статических полях. При выбранном направлении постоянного магнитного поля электроны дрейфуют в область тормозящего продольного электрического поля (рис. 3). На рис. 3 показана структура статических полей, в которых движется электрон, влетевший в область взаимодействия в момент времени  $t = 0$ . Для других электронов структура полей и траектория движения поворачиваются около оси  $z'$  на угол  $\varphi = \omega t$  из-за вращения вектора поперечного электрического поля на входе замедляющей системы.

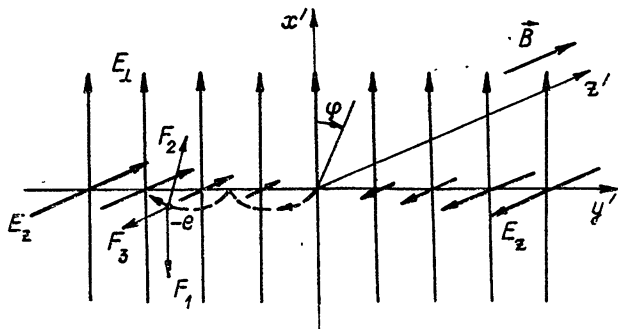


Рис. 3. Распределение электрического поля циркулярно поляризованной волны и траектория движения электрона в системе координат, связанной с электроном, влетевшим в область взаимодействия в момент времени  $t = 0$ ;  $F_1$ ,  $F_3$ ,  $F_2$  — силы, действующие на электрон соответственно со стороны поперечного электрического поля  $E_{\perp}$ , продольного электрического поля  $E_z$  и магнитного поля  $B$ .

В результате такого взаимодействия нитевидный электронный поток приобретает форму раскручивающейся вдоль оси  $z$  спирали, каждый электрон которой находится в области тормозящего продольного электрического поля. Таким образом, группировка электронов пучка осуществляется уже не путем образования электронных сгустков, а за счет искривления пучка. Важно подчеркнуть, что все электроны нитевидного пучка тормозятся одинаковым для каждого электрона продольным электрическим полем, и, следовательно, разброс электронов по скоростям на выходе из области взаимодействия здесь может принципиально отсутствовать.

Для электронных пучков конечного диаметра механизм взаимодействия и группировки существенно не меняется, однако неоднородность продольного электрического поля по сечению пучка приводит к появлению разброса по скоростям [4].

Из рассмотренного механизма взаимодействия видно, что нарастание усиления вдоль лампы связано с возрастанием радиуса синхронной спирали. В реальных приборах это может привести к ограничению усиления из-за преждевременного оседания электронов на замедляющую систему.

Поэтому далее целесообразно анализировать случай, позволяющий выбором подходящего профиля магнитного поля вдоль оси  $z$  формировать приемлемую степень отклонения пучка от оси электродинамической системы.

### 3. МОДЕЛЬ ПУЧКА. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для описания и численного анализа физических процессов в ЛБВ с поперечным циркулярно поляризованным полем удобно использовать модель моноскоростного равномерно заряженного по сечению, аксиально-симметричного электронного потока, разбивая его на совокупность элементарных нитевидных пучков, радиусы-векторы которых на входе в область взаимодействия ( $z = 0$ ) не зависят от времени и могут быть определены следующими выражениями (рис. 4):

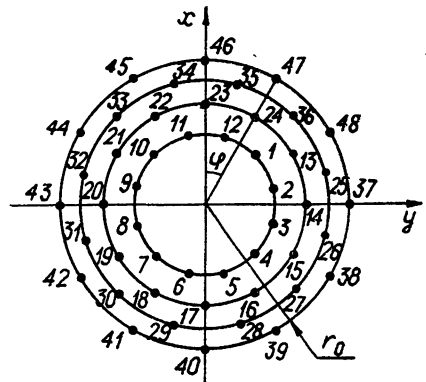


Рис. 4. Расположение электронных пучков на входе в область взаимодействия ( $N_r = 4$ ,  $N_\varphi = 12$ ).

$$r_i(z, t)|_{z=0} = r_0 \sqrt{\frac{k}{N_r}} \exp \left[ j \frac{\pi}{N_\varphi} (2l + k) \right],$$

$$i = (k - 1) N_\varphi + l, \quad k = 1, 2, \dots, N_r, \quad (3)$$

$$l = 1, 2, \dots, N_\varphi, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N = N_r N_\varphi,$$

где  $N_r$ ,  $N_\varphi$  — соответственно число колец и число пучков, расположенных на каждом кольце,  $r_0$  — радиус внешнего кольца,

$$r_i(z, t) = x_i(z, t) + jy_i(z, t), \quad (4)$$

$x_i$ ,  $y_i$  — поперечные координаты  $i$ -го пучка.

Уравнение движения электрона в нерелятивистском случае имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\eta \left( \mathbf{E} + \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{B} \right] \right), \quad (5)$$

где  $\mathbf{r} = \{x(t), y(t), z(t)\}$  — радиус-вектор электрона,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $\eta$  — удельный заряд электрона.

В случае аксиально-симметричного магнитного поля удобно использовать разложение вида [6]

$$B_r(z, r) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} B^{(2n+1)}(z) \left( \frac{r}{2} \right)^{2n+1}, \quad (6)$$

$$B_z(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} B^{(2n)}(z) \left( \frac{r}{2} \right)^{2n},$$

где  $B_r$  и  $B_z$  — соответственно радиальная и  $z$ -я составляющие магнитной индукции в цилиндрической системе координат,  $B(z)$  — распределение магнитной индукции на оси  $z$ . Для медленно меняющейся функции  $B(z)$  можно ограничиться первыми членами разложения (6):



$$B_r(z, r) \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B(z)}{\partial z}, \quad B_\varphi \approx 0, \quad B_z \approx B(z).$$

В декартовых координатах это дает

$$B_x \approx -\frac{x}{2} \frac{\partial B(z)}{\partial z}, \quad B_y \approx -\frac{y}{2} \frac{\partial B(z)}{\partial z}, \quad B_z \approx B(z). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{r}}{dt^2} &= -\eta E + j \omega_c(z) \frac{d\hat{r}}{dt} + j \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_c(z)}{\partial z} V_z \hat{r}, \\ \frac{dV_z}{dt} &= -\eta E_z + \frac{y}{2} \frac{dx}{dt} \frac{\partial \omega_c(z)}{\partial z} - \frac{x}{2} \frac{dy}{dt} \frac{\partial \omega_c(z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\hat{r} = x + jy$  — комплексная поперечная координата электрона,  $V_z = \frac{dz}{dt}$  — продольная скорость электрона,  $\omega_c(z) = \eta B(z)$  — значение циклотронной частоты на оси  $z$ .

Для описания движения элементарного нитевидного пучка электронов, характеризующегося значением поперечных координат пучка  $x(z, t)$  и  $y(z, t)$  и значением продольной скорости электронов пучка  $V_z(z, t)$  как функций  $z$  и  $t$ , необходимо в (8)  $\hat{r}$ ,  $V_z$  и оператор  $\frac{d}{dt}$  заменить соответственно на  $r_i(z, t) = x_i(z, t) + jy_i(z, t)$ ,  $V_{zi}(z, t)$   $\left( \frac{\partial}{\partial t} + V_{zi}(z, t) \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , где  $V_{zi}(z, t)$  — продольная скорость электронов  $i$ -го пучка.

Таким образом, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} + V_{zi}^2 \frac{\partial^2 r_i}{\partial z^2} + 2V_{zi} \frac{\partial^2 r_i}{\partial z \partial t} + \left( \frac{\partial V_{zi}}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial V_{zi}}{\partial z} \right) \frac{\partial r_i}{\partial z} - \\ - j \omega_c \left( \frac{\partial r_i}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial r_i}{\partial z} \right) - j \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_c}{\partial z} V_{zi} r_i = -\eta E, \\ \frac{\partial V_{zi}}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial V_{zi}}{\partial z} - \frac{y_i}{2} \frac{\partial \omega_c}{\partial z} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial x_i}{\partial z} \right) + \\ + \frac{x_i}{2} \frac{\partial \omega_c}{\partial z} \left( \frac{\partial y_i}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial y_i}{\partial z} \right) = -\eta E_z, \end{aligned} \quad (9)$$

Система уравнений движения (9) позволяет учесть обгон электронов, находящихся в разных элементарных пучках. Обгон электронов одного и того же элементарного пучка уравнения (9) не описывают. Однако есть основания полагать, что в наиболее интересных режимах работы ЛБВ с синхронной волной, когда разброс скоростей электронов на выходе из области взаимодействия мал, обгон электронов одного и того же элементарного пучка отсутствует [4].

Интегрирование системы уравнений (9) в частных производных численными методами в общем случае затруднительно. Однако процедура решения может быть значительно упрощена. Действительно, при повороте вектора поперечного электрического поля на входе прибора

на угол  $\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}$  (см. рис. 4) в системе координат, повернутой на тот же угол  $\varphi$  вокруг оси  $z$ , и при соответствующем изменении номеров элементарных пучков граничные условия при  $z = 0$  будут такими же, как и в исходной системе координат в предшествующий момент времени. Таким образом, систему уравнений (9) в случае стационарного, аксиально-симметричного электронного потока, поступающего на вход области взаимодействия, можно интегрировать при любом фиксированном значении времени  $t$ , в том числе и при  $t = 0$ . Временные характеристики каждого отдельного пучка, включая частные производные по времени в (9), можно определить по результатам однократного интегрирования при любом значении  $z$ , используя поворот системы координат и соответствующую перенумерацию элементарных пучков. Количество учитываемых временных гармоник при таком определении временных зависимостей может быть сколь угодно большим при  $\varphi \rightarrow 0$ , т. е. при увеличении числа элементарных пучков на одном кольце.

Для решения системы уравнений (9) наряду с граничными условиями (3) для векторов  $r_i$  необходимо задать значения  $\frac{\partial r_i}{\partial z}$  в точке  $z = 0$ . Учитывая, что электронный поток на входе в область взаимодействия вращается вокруг оси  $z$  под действием кулоновских сил и постоянного магнитного поля с частотой

$$\omega_r = \omega_p^2 / 2 \omega_{c0}, \tag{10}$$

где  $\omega_p$  — значение плазменной частоты в пучке при  $z = 0$ ,  $\omega_{c0}$  — значение циклотронной частоты при  $z = 0$ , при выбранном направлении постоянного магнитного поля граничные условия для  $\frac{\partial r_i}{\partial z}$  имеют следующий вид:

$$\left. \frac{\partial r_i}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{r_0 \sqrt{\frac{k}{N_r}} \omega_p^2}{2 V_{z0} \omega_{c0}} j \exp \left[ j \frac{\pi}{N_\varphi} (2l + k) \right]. \tag{11}$$

#### 4. УРАВНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

В [7] решена задача о возбуждении электрического поля в волноводе заданным монохроматическим током:

$$\dot{E} = \sum_{s=0}^{\infty} (C_s \dot{E}_s + C_{-s} \dot{E}_{-s}) - \frac{1}{j \omega \epsilon_0} \dot{i}_z \tag{12}$$

(где точка означает комплексную амплитуду вектора на частоте  $\omega$ , временная зависимость  $\sim e^{j\omega t}$ ),  $\dot{E}_s$  и  $\dot{E}_{-s}$  — собственные волны волновода,

$$C_s = \frac{1}{N_s} \int_{z_1}^z \int_{S_p} \dot{E}_{-s} i dS_p d\xi, \quad C_{-s} = \frac{1}{N_s} \int_z^{z_2} \int_{S_p} \dot{E}_s i dS_p d\xi, \tag{13}$$

$i$  — вектор плотности тока,  $N_s$  — норма собственных волн волновода,  $S_p$  — поперечное сечение электронного потока.

При выводе уравнения возбуждения будем учитывать только синхронную с электронным потоком часть поля, возбуждаемую первой гар-

моникой тока, и поле пространственного заряда. В этом случае поле  $E$ , действующее на электроны, можно представить в виде [8]

$$E = \operatorname{Re}(\dot{E}_c e^{j\omega t}) + E_s, \quad (14)$$

где  $\dot{E}_c$  — синхронная часть возбуждаемого поля,  $E_s$  — поле пространственного заряда. В соответствии с (12) полем  $\dot{E}_c$  представим в виде

$$\dot{E}_c = C_0 \dot{E}_{c0}; \quad (15)$$

$$C_0 = \frac{1}{N_0} \int_{z_1}^z \int_{S_p} \dot{E}_{-c0} i dS_p d\xi, \quad (16)$$

где  $N_0$  — норма рабочей собственной волны,  $\dot{E}_{-c0}$  — поле обратной волны. Выделяя зависимость полей  $\dot{E}_{c0}$  и  $\dot{E}_{-c0}$  от  $z$ ,

$$\dot{E}_{c0} = \dot{E}_{c0}(x, y) e^{-j\beta z}, \quad \dot{E}_{-c0} = \dot{E}_{c0}^*(x, y) e^{j\beta z}, \quad (17)$$

из (15) и (16) для  $\dot{E}_c$  получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \dot{E}_c}{\partial z} = -j\beta \dot{E}_c + \frac{\dot{E}_{c0}(x, y)}{N_0} \int_{S_p} i \dot{E}_{c0}^*(x, y) dS_p. \quad (18)$$

Для волны с полями (1) и (2) имеем

$$\dot{E}_{c0}(x, y) = \{E_0, -jE_0, -j\beta r^* E_0\}. \quad (19)$$

Согласно (15) поле  $\dot{E}_c$  запишем в виде

$$\dot{E}_c = \{\hat{E}, -j\hat{E}, -j\beta r^* \hat{E}\}, \quad (20)$$

где  $\hat{E} = E_0(z) e^{-j\beta z}$ . Компоненты возбужденного поля  $E_{xc}$ ,  $E_{yc}$  выражаются через  $\hat{E}$  следующим образом:

$$E_{xc} + jE_{yc} = \hat{E} e^{j\omega t}. \quad (21)$$

Из (18) и (19) получаем уравнение для возбуждаемого циркулярно поляризованного поля  $\hat{E}$ :

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial z} + j\beta \hat{E} = \beta^2 k_t \int_{S_p} (\dot{I}_x + j\dot{I}_y + j\beta r \dot{I}_z) dS_p, \quad (22)$$

где  $N_0 = 2P$ ,  $P = E_0^2/2\beta^2 k_t$  — мощность, переносимая рабочей собственной волной,  $k_t$  — сопротивление связи,  $\dot{I}_x$ ,  $\dot{I}_y$ ,  $\dot{I}_z$  — компоненты первой гармоники плотности тока. Уравнение (22) для рассматриваемой модели электронного потока можно переписать в виде

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial z} + j\beta \hat{E} = \beta^2 k_t \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \left[ \rho_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial r_i}{\partial z} \right) + j\rho_i V_{zi} \beta r_i \right] e^{-j\omega t} d\omega t, \quad (23)$$

где  $\rho_i$  — линейная вдоль оси  $z$  плотность заряда  $i$ -го пучка,

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial r_i}{\partial z} = V_{xi} + jV_{yi}$$

— комплексная поперечная скорость электронов  $i$ -го пучка. Сумма, стоящая в подынтегральном выражении в случае аксиально-симметричного электронного пучка на входе в область взаимодействия, зависит от времени как  $e^{j\omega t}$  в любом фиксированном сечении  $z = \text{const}$ , т. е. все подынтегральное выражение не зависит от времени и (23) можно переписать:

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial z} + j\beta \hat{E} = \beta^2 k_t \sum_{i=1}^N \left[ \rho_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial t} + V_{zi} \frac{\partial r_i}{\partial z} \right) + j\rho_i V_{zi} \beta r_i \right] e^{-j\omega t}. \quad (24)$$

Уравнение (24) уже пригодно для численного интегрирования в любой фиксированный момент времени.

Для того, чтобы система уравнений (9) и (24) была замкнутой, необходимо записать уравнение непрерывности для линейной плотности заряда вдоль оси  $z$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} I_{zi} + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, \quad (25)$$

$I_{zi}$  —  $z$ -я составляющая полного тока  $i$ -го пучка. Подставляя в (25) выражение для  $I_{zi}$ ,

$$I_{zi} = \rho_i V_{zi},$$

окончательно получаем

$$V_{zi} \frac{\partial \rho_i}{\partial z} + \rho_i \frac{\partial V_{zi}}{\partial z} + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0, \quad (26)$$

$\rho_i|_{z=0} = \rho_0$  — линейная плотность заряда на входе в область взаимодействия.

## 5. ПОЛЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Вычисление поля пространственного заряда в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу. В настоящей работе для вычисления этих полей используется подход, связанный со следующими упрощающими предположениями:

а) запаздывание и влияние замедляющей структуры не учитываются;

б) на каждом шаге интегрирования системы нелинейных уравнений пространственно слабоискривленный  $i$ -й пучок заменяется равномерно заряженным прямолинейным стержнем, касательным к  $i$ -му пучку с линейной плотностью заряда вдоль оси  $z$ , равной соответствующей плотности заряда  $i$ -го пучка в рассматриваемой точке.

В системе координат  $\{x', y', z'\}$  (рис. 5), ось  $z'$  которой совпадает со стержнем, электростатическое поле, создаваемое равномерно заряженным стержнем с линейной плотностью заряда  $\sigma$ , определяется простым выражением:

$$E_s = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{r'}{|r'|^2}, \quad (27)$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $r'$  — вектор, нормальный к стержню. Для вычисления поля, создаваемого  $k$ -м стержнем в  $i$ -й точке лабораторной системы координат, необходимо найти координаты этой точки в системе координат  $\{x', y', z'\}$ , связанной с  $k$ -м стержнем, вычислить поле, пользуясь формулой (27), а затем пересчитать это поле в лабораторную систему координат  $\{x, y, z\}$ . Электростатическое поле для

заданной точки  $x_i, y_i$  определится как сумма полей всех стержней, кроме стержня с номером  $k = i$ :

$$E_{xi}^s = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq k)}}^N \sigma_k [W_{1k}(x_i - x_k) - W_{2k}(y_i - y_k)] / (R_{ik}^2 + \delta r_0^2),$$

$$E_{yi}^s = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq k)}}^N \sigma_k [W_{3k}(y_i - y_k) - W_{2k}(x_i - x_k)] / (R_{ik}^2 + \delta r_0^2), \quad (28)$$

$$E_{zi}^s = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ (i=k)}}^N \sigma_k [W_{4k}(y_i - y_k) - W_{5k}(x_i - x_k)] / (R_{ik}^2 + \delta r_0^2),$$

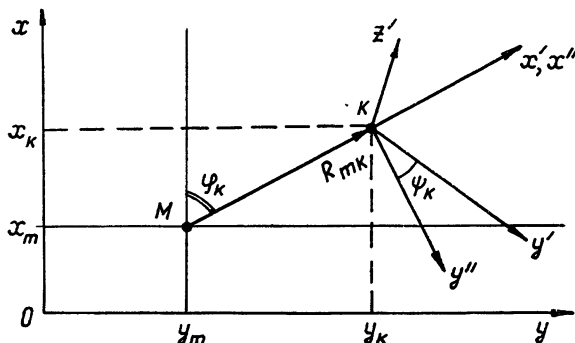


Рис. 5. Система координат  $\{x', y', z'\}$ , связанная с  $k$ -м стержнем. Ось  $z'$  совпадает по направлению с осью  $z$  исходной системы координат. Система координат  $\{x', y', z'\}$  получена из вспомогательной системы координат  $\{x'', y'', z''\}$  путем поворота последней вокруг оси  $x''$  на угол  $\psi_k$ .

где  $R_{ik}^2 = W_{1k}(x_i - x_k)^2 + W_{3k}(y_i - y_k)^2 - 2W_{2k}(x_i - x_k)(y_i - y_k)$  — квадрат минимального расстояния от  $i$ -й точки до  $k$ -го стержня,

$$W_{1k} = A_{1k}^2 A_{4k}^2 + A_{2k}^2, \quad W_{2k} = A_{1k} A_{2k} (A_{4k}^2 - 1),$$

$$W_{3k} = A_{2k}^2 + A_{2k}^2 A_{4k}^2, \quad W_{4k} = A_{2k} A_{3k} A_{4k}, \quad W_{5k} = A_{1k} A_{2k} A_{4k},$$

где (см. рис. 5)

$$A_{1k} = \sin \varphi_k = \frac{R_{yk}}{R_{mk}}, \quad A_{2k} = \cos \varphi_k = \frac{R_{xk}}{R_{mk}},$$

$$A_{3k} = \sin \psi_k, \quad A_{4k} = \cos \psi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{\partial r_k}{\partial z} \right|^2}},$$

$R_{mk}, R_{yk}, R_{xk}$  — соответственно модуль мгновенного радиуса вращения следа  $k$ -го пучка в плоскости  $z = \text{const}$  и его проекции,  $\sigma_k = \rho_k \cos \psi_k$  — линейная плотность заряда  $k$ -го стержня.

Следует отметить, что выражения (28) справедливы только при слабой зависимости  $R_{mk}$  от  $z$ , что имеет место в случае медленного нарастания усиления вдоль оси лампы.

Малая добавка  $\delta r_0^2$  в знаменателях выражений (28) введена для устранения особенностей при  $R_{ik} \rightarrow 0$ . Ее можно выбрать равной чет-

верти квадрата минимального расстояния между стержнями в невозмущенном пучке [9].

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс группировки электронов в поле бегущей циркулярно поляризованной волны замедляющей системы не связан принципиально с возбуждением в потоке разброса по продольным скоростям и осуществляется за счет пространственного искривления пучка относительно оси электродинамической структуры. Как следствие этого, тонкий (нитевидный) электронный поток может оставаться моноэнергетичным в процессе усиления.

Поток конечного сечения, поступающий на вход области взаимодействия, является, по существу, суммой смещенных от оси нитевидных пучков. Смещение элементарного пучка от оси системы в терминах поперечных волн [1, 2] интерпретируется как появление синхронной волны на частоте  $\omega \equiv 0$ . Такие волны далеки от синхронизма с полем замедляющей системы и не могут обусловить какой-либо накапливающийся эффект. По этой причине разброс скоростей, возникающий в пучках конечного диаметра, сравнительно невелик [4] и связан с проявлением неоднородности напряженности продольного электрического поля по сечению потока.

Стационарность и аксиальная симметрия граничных условий, с одной стороны, циркулярная поляризация рабочего компонента в поле волны — с другой, позволяют упростить решение нелинейной трехмерной задачи, сформулировав ее в приемлемом для численного анализа виде.

Полученная система уравнений пригодна как для пространственного резонанса  $\beta \approx \beta_e = \omega/V_{z0}$ , качественно проиллюстрированного на рис. 2, так и для случая  $\beta \approx \beta_e \pm \beta_c$  ( $\beta_c = \omega_c/V_{z0}$ ), когда синхронизм осуществляется с медленной (быстрой) циклотронной волной электронного пучка.

Авторы признательны В. М. Лопухину и В. И. Канавцу за внимание к работе и ее полезное обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Лопухин, А. С. Рошаль, Электронно-лучевые параметрические усилители, изд. Сов. радио, М., 1968.
2. В. М. Лопухин, В. Б. Магалинский, В. П. Мартынов, А. С. Рошаль, Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот, изд. Наука, М., 1965.
3. R. J. Briggs, J. Appl. Phys., 42, 7 (1971).
4. В. А. Ванке, С. К. Лесота, В. М. Лопухин, У. А. Нигматулин, В. Л. Саввин, А. М. Хапаев, В. И. Юрьев, Радиотехника и электроника, 21, № 1, 149 (1976).
5. В. И. Юрьев, В. Н. Добрыньченко, У. А. Нигматулин, В. А. Шестиперов, Радиотехника и электроника, 17, № 4, 830 (1972).
6. А. Рустерхольц, Электронная оптика, ИЛ, М., 1952.
7. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
8. И. А. Манькин, А. М. Кац, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, № 11, 48 (1966).
9. К. А. Сукач, Вестник КПИ, серия Радиотехника и электроакустика, № 7, 32 (1970).

---

A SET OF NONLINEAR EQUATIONS FOR NUMERICAL ANALYSIS  
OF TWT WITH A TRANSVERSE FIELD

*V. A. Vanke, A. A. Zaytsev*

The mechanism of grouping in TWT with a synchronous wave of the electron beam is qualitatively considered. The basic equations of the nonlinear theory of interaction of an electron beam with a traveling circularly polarized electromagnetic wave are deduced, the transverse electron velocities and inhomogeneous axially-symmetric constant magnetic field being taken into account. Expressions are obtained for the spatial charge field.

---

УДК 539.216.2

## ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОСИТЕЛЕЙ И НЕВЗАИМНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТОНКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛЕНКАХ

А. М. Белянцев, В. А. Валов, В. А. Козлов

В гидродинамическом приближении проведено рассмотрение эффектов, связанных с перераспределением носителей под действием силы Лоренца, по толщине тонких полупроводниковых пленок, помещенных в сильные скрещенные электрическое и магнитное поля. Показано, что перераспределение носителей оказывает существенное влияние на гальваномагнитные эффекты в пленках, в частности интегральные характеристики пленок с неоднородным распределением параметров меняются при смене знака  $E \times H$ . В сильных электрическом и магнитном полях возможно стягивание носителей в приповерхностную область, размеры которой много меньше дебаевского радиуса. Найдены вольт-амперные и гаусс-амперные характеристики пленок, а также структура холловского поля и распределение носителей в неоднородных полупроводниковых пленках.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что при наложении на полупроводниковый образец скрещенных электрического и магнитного полей возникает сила Лоренца, вызывающая перераспределение свободных носителей тока по образцу. Это перераспределение носителей является причиной возникновения холловского поля в образце соответствующей геометрии (см. рис. 1).

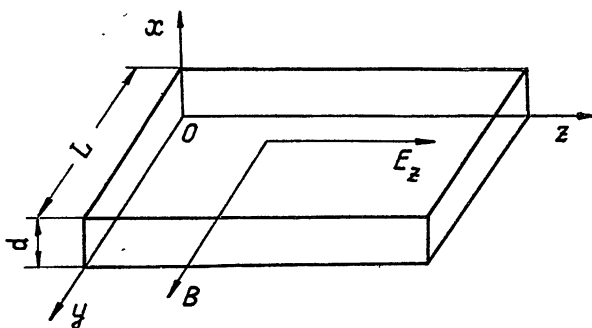


Рис. 1. Расположение образца и ориентация тянущего электрического и магнитного полей.

В массивных образцах относительное перераспределение носителей обычно невелико: вблизи границ, на характерном расстоянии порядка дебаевского радиуса экранирования, концентрация электронов отличается от равновесной. Это позволяет рассматривать отклонение концентрации носителей как поверхностный заряд. Из-за небольших размеров областей, где сосредоточен поверхностный заряд, его вкладом в ток можно пренебречь, концентрацию носителей в образце считать равновесной, а холловское поле однородным.



В тонких полупроводниковых пленках возможна противоположная ситуация, когда носители стянуты силой Лоренца к одной из поверхностей пленки, а возмущающее при этом холловское поле неоднородно и недостаточно для компенсации силы Лоренца. В этом случае перераспределение носителей не может рассматриваться как поверхностный заряд и ток, текущий в пленке, зависит от структуры распределения концентрации свободных носителей по толщине пленки. Например, в неоднородных по толщине пленках, в которых подвижность и концентрация свободных носителей зависит от координаты  $x$  (см. рис. 1), будет проявляться своеобразная невзаимность, т. е. изменение характеристик пленки при смене направления магнитного поля на противоположное [1, 2]. Причиной возникновения нелинейных невзаимных эффектов является стягивание носителей в разные по свойствам области пленки при смене знака магнитного поля.

Характерные порядки полей, при которых происходит существенное перераспределение носителей по толщине пленки, легко оценить, например, для чистой эпитаксиальной пленки  $n$ -GaAs толщиной  $d \sim 1 \text{ мк}$  и концентрацией носителей  $n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$  с подвижностью  $\mu \sim 10^5 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$  при  $T = 77 \text{ К}$  максимальное холловское поле  $E_{\text{max}}$ , которое может возникнуть в образце, когда все носители стянуты к одной поверхности пленки, составляет около  $150 \text{ В/см}$ . Поэтому в такой пленке при магнитном поле  $H \sim 10^4 \text{ Э}$  ( $\mu H/c = 10$ ) носители будут стянуты к одной поверхности пленки уже при тянущем поле  $E_z \sim 15 \text{ В/см}$ . В этом случае дрейфовая скорость носителей будет иметь величину порядка  $1,5 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ , т. е. далека от насыщения.

Невзаимные эффекты, связанные с перераспределением носителей в сильных  $E$ -и  $H$ -полях, наблюдались в двухслойных пленках  $n$ -GaAs [1, 2]. В настоящей работе перераспределение носителей по толщине пленки и связанное с этим изменение вольт-амперных и гаусс-амперных характеристик описывается в гидродинамическом приближении в предположении постоянства температуры газа свободных электронов. Это приближение позволяет наиболее просто рассмотреть свойства пленок, определяемые пространственным перераспределением носителей тока. Предположение о постоянстве температуры оправдывается тем обстоятельством, что характерное разогреванное поле не зависит от толщины пленки  $d$  и концентрации свободных носителей тока  $n$ , в то время как характерное поле, при котором наступает перераспределение носителей, зависит от  $n$  и  $d$ .

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве основных уравнений, описывающих движение носителей заряда в пленке, будем использовать следующие:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nu p + (V \nabla) p + \frac{kT}{n} \nabla n = q \left( E + \frac{1}{c} [VB] \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (nV) = 0; \quad (2)$$

$$\text{div} E = \frac{4\pi}{\epsilon_0} q (n - n_0); \quad (3)$$

$$I(x) = L \int_0^x j_z dx. \quad (4)$$

Здесь использованы обозначения:  $p$  — квазиимпульс свободного носителя,  $V = p/m^*$  — скорость,  $n$  — концентрация,  $n_0 = n_0(x)$  — концентрация ионизованных примесей,  $v = v(x)$  — частота столкновений,  $q$  — заряд носителя,  $E$  — электрическое поле,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $j = qnV$  — плотность тока,  $I(x)$  — величина тока в слое пленки, расположенном от 0 до  $x$  (см. рис. 1), так что  $I(d)$  представляет собой полный ток, текущий в пленке,  $L$  — размер пленки в направлении оси  $y$ , причем считаем, что  $L \gg d$ , где  $d$  — толщина пленки, так что пленку можно считать безграничной вдоль координат  $y$  и  $z$ . Будем считать, что все величины зависят только от  $x$ , а поле  $E_z$  однородно. Уравнения (1)–(4) необходимо дополнить граничными условиями, которые легко получаются из условия электронейтральности образца

$$\epsilon_0 (E_x(p) - E_x(0)) = 4\pi q \left( \int_0^d (n(x) - n_0(x)) dx \right), \quad (5)$$

откуда  $E_x(0) = E_x(d) = 0$ .

Характерными величинами в данной задаче будут следующие. Циклотронная частота  $\omega_B = qB/m^*c$ , плазменная частота  $\omega_0 = (4\pi q^2 \bar{n}_0 / \epsilon_0 m^*)^{1/2}$ , где  $\bar{n}_0$  — максимальное значение концентрации ионизованных примесей; характерное поле  $E_0 = 4\pi q \bar{n}_0 p / \epsilon_0$ , параметр диффузии  $\kappa = kT/qE_0 d$ . В частном случае  $n_0(x) = \bar{n}_0 = \text{const}$ ,  $E_0 = E_{\text{max}}$ , а параметр диффузии  $\kappa = D^2/d^2$ , где  $D = (kT\epsilon_0/4\pi q^2 \bar{n}_0)^{1/2}$  — радиус Дебая.

В дальнейшем будем рассматривать только статические свойства пленок, связанные с пространственным перераспределением носителей по координате  $x$ , в этом случае ток в пленке течет вдоль координаты  $z$  (холловская геометрия) и уравнения (1)–(4) вместе с граничными условиями примут вид

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} = \eta - \eta_0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \kappa^{-1} \eta (\epsilon - \mu \beta \zeta); \quad (7)$$

$$J(\xi) = \zeta \int_0^\xi \eta^\mu d\xi; \quad (8)$$

$$\epsilon(0) = \epsilon(1) = 0. \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\xi = x/d$ ,  $\eta = n/\bar{n}_0$ ,  $\eta_0 = n_0(x)/\bar{n}_0$ ,  $\epsilon = E_x/E_0$ ,  $\zeta = E_z/E_0$ ,  $\beta = \omega_B/\omega_0$ ,  $\mu = \omega_0/v(x)$ ,  $J(\xi) = I/I_0$ , где  $I_0 = Ld^2 q n_0 \omega_0$ ; причем заметим, что при смене знака магнитного поля  $\beta$  меняет знак.

Рассмотрим несколько следствий из уравнений (6)–(8). Проинтегрировав уравнение (7) по  $\xi$ , получим распределение потенциала по толщине пленки:

$$\varphi(\xi) = - \int_0^\xi \epsilon d\xi = -\beta \zeta \int_0^\xi \mu d\xi - \kappa \ln \frac{\eta(\xi)}{\eta(0)}, \quad (10)$$

откуда при нулевом тянущем поле ( $\zeta = 0$ ) или нулевом магнитном поле ( $\beta = 0$ ) получаем

$$\varphi_0(\xi) = - \kappa \ln \frac{\eta(\xi)}{\eta(0)}, \quad (11)$$

что является прямым следствием постоянства уровня Ферми для системы носителей.

Из уравнений (6)—(8) также легко получить следующие интегральные соотношения для тока:

$$J(\xi) = \zeta \left\{ \int_0^{\xi} \mu \eta_0 d\xi + \int_0^{\xi} \mu \frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi \right\}; \quad (12)$$

$$J(\xi) = \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon^2(\xi) - \kappa [\eta(\xi) - \eta(0)] + \int_0^{\xi} \eta_0 \varepsilon d\xi \right\}. \quad (13)$$

Полученные выражения будут проиллюстрированы на примере скачкообразного изменения подвижности и распределения концентрации ионизированных примесей, что, например, может быть реализовано в случае резкого  $n^+n$ -перехода. В этом случае функции  $\mu$  и  $\eta_0$  имеют вид

$$\mu(\xi) = \begin{cases} \mu_l & (\xi < \xi') \\ \mu_r & (\xi > \xi') \end{cases}; \quad (14)$$

$$\eta_0(\xi) = \begin{cases} \eta_{0l} & (\xi < \xi') \\ \eta_{0r} & (\xi > \xi') \end{cases}. \quad (15)$$

При скачкообразном изменении  $\mu$  и  $\eta_0$  интегралы в (12), (13) берутся элементарно и полный ток в пленке можно определить через поле  $\varepsilon(\xi)$  в точке перехода  $\xi$  или через концентрации на границах пленки  $\eta(1)$ ,  $\eta(0)$  и в точке  $\xi'$ :

$$J(1) = \zeta [\mu_l \eta_{0l} \xi' + \mu_r \eta_{0r} (1 - \xi')] + \zeta (\mu_l - \mu_r) \varepsilon(\xi'); \quad (16)$$

$$J(1) = \zeta [\eta_{0l} \mu_l \xi' + \eta_{0r} \mu_r (1 - \xi')] + \frac{\kappa}{\beta} (\eta(0) - \eta(1)) + \quad (17)$$

$$+ \frac{\kappa}{\beta} [\eta_{0r} \ln \eta(1) + (\eta_{0l} - \eta_{0r}) \ln \eta(\xi') - \eta_{0l} \ln \eta(0)].$$

Хотя в (16) магнитное поле явно не входит, очевидно, что при смене знака магнитного поля будет меняться электрическое поле  $\varepsilon(\xi')$ , а следовательно, ток  $J(1)$  будет различным при противоположных направлениях силы Лоренца. Уравнения (16) и (17) дают также связь между полем  $\varepsilon(\xi')$  в точке скачка и концентрациями  $\eta(0)$ ,  $\eta(\xi')$ ,  $\eta(1)$ . При  $\beta\zeta = 0$  поле  $\varepsilon(\xi')$  и концентрация  $\eta(\xi')$  в точке перехода легко найдутся из (17) и (13):

$$\varepsilon^2(\xi') = 2 \eta_{0l} \varphi_0(\xi') + 2 \kappa \eta(0) \{ \exp(-\kappa^{-1} \varphi_0(\xi')) - 1 \}, \quad (18)$$

где

$$\varphi_0(\xi') = -\kappa \ln \frac{\eta(\xi')}{\eta(0)} = \kappa \left[ \frac{\eta(0) - \eta(1)}{\eta_{0l} - \eta_{0r}} + \frac{\eta_{0r}}{\eta_{0l} - \eta_{0r}} \ln \frac{\eta(1)}{\eta(0)} \right]. \quad (19)$$

Для толстой пленки с удаленными от области перехода границами можно считать  $\eta(0) \approx \eta_{0l}$ ,  $\eta(1) = \eta_{0r}$ . В этом случае уравнения (18), (19) аналогичны хорошо известным соотношениям для резкого  $p$ — $n$ -перехода [3].

### 3. СЛАБОЕ ПОЛЕ

В том случае, когда тянущее поле  $E_z$  является слабым по сравнению с  $E_0$ , так что  $\zeta \ll 1$ , и перераспределение концентрации носителей невелико, уравнения (6)—(8) могут быть решены в линейном по  $\zeta$  приближении с помощью стандартной теории возмущений. (Аналогичные решения могут быть получены и при слабом магнитном поле, когда  $\beta \ll 1$ .) Представим функции  $\eta$  и  $\varepsilon$  в виде

$$\eta = \eta_i + u, \quad \varepsilon = \varepsilon_i + v, \quad (20)$$

где  $\eta_i$  и  $\varepsilon_i$  — решение уравнений (6)—(8) при  $\zeta = 0$ , а  $u$  и  $v$  — линейные относительно  $\beta\zeta$  малые величины. В этом случае для возмущений  $u$  и  $v$  получим уравнения

$$\frac{du}{d\xi} = x^{-1} \varepsilon_i u + x^{-1} \eta_i v - x^{-1} \eta_i \mu \beta \zeta; \quad (21)$$

$$\frac{dv}{d\xi} = u, \quad (22)$$

которые являются неоднородными линейными уравнениями с переменными коэффициентами. Далее, в приближении слабого поля ограничимся рассмотрением однородного распределения концентрации примесей  $\eta_0 = \text{const}$  и неоднородного распределения подвижности ( $\mu = \mu(\xi)$ ). В этом случае невозмущенные функции  $\eta_i$  и  $\varepsilon_i$  определяются тривиально, а именно  $\eta_i = \eta_0 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_i = 0$  и уравнения (21), (22) при учете граничных условий  $v(0) = v(1) = 0$  легко могут быть решены:

$$v = \beta\zeta\Psi(\xi), \quad u = \beta\zeta\Phi(\xi). \quad (23)$$

Здесь функции  $\Psi(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$  имеют вид

$$\Psi(\xi) = C \operatorname{sh}(\delta\xi) + \delta \int_0^\xi \mu(\tau) \operatorname{sh}(\delta(\tau - \xi)) d\tau; \quad (24)$$

$$\Phi(\xi) = C \operatorname{ch}(\delta\xi) - \delta^2 \int_0^\xi \mu(\tau) \operatorname{ch}(\delta(\tau - \xi)) d\tau, \quad (25)$$

$$C = -\delta \operatorname{sh}^{-1} \delta \int_0^1 \mu(\tau) \operatorname{sh}(\delta(\tau - 1)) d\tau,$$

где

$$\delta = (\eta_0/x)^{1/2},$$

а выражение для полного тока примет вид

$$J(1) = \zeta \int_0^1 \eta_0 \mu(\xi) d\xi + \beta\zeta^2 \int_0^1 \mu(\xi) \Phi(\xi) d\xi. \quad (26)$$

Первое слагаемое в (26) описывает ток, который тёк бы в пленке в отсутствие перераспределения концентрации по толщине пленки. Эта составляющая тока при смене знаков электрического и магнитного полей ведет себя подобно току, текущему в однородной среде, а именно: при смене знака магнитного поля первое слагаемое не изменяется,

а при смене знака электрического поля оно меняет знак. Второе слагаемое в выражении (26) обусловлено перераспределением концентрации носителей под действием силы Лоренца по толщине пленки, оно меняет знак при смене знака магнитного поля, так как в этом случае носители тока начинают перетягиваться к противоположной стороне пленки, где подвижность другая. Поскольку второе слагаемое квадратично по тянущему полю  $\zeta$ , то при смене знака электрического поля оно не меняет знака. Это обусловлено тем обстоятельством, что если до смены знака электрического поля носители были перетянуты, например, в область с более высокой подвижностью и это давало дополнительное увеличение тока, то после смены знака электрического поля носители будут стягиваться в область с более низкой подвижностью, что дает уменьшение тока, поэтому при смене знака первого слагаемого второе слагаемое знака не меняет.

При резком скачке подвижности, когда функция  $\mu(\xi)$  имеет вид (14), интегралы в выражениях (24) — (26) могут быть элементарно вычислены, однако соответствующие формулы для приращения концентрации и тока имеют громоздкий вид и поэтому их приводить не

Рис. 2. Функция  $\Phi(\xi) = \Delta\eta/\beta\zeta$  при  $\mu_l = 1$ ,  $\mu_r = 10$ ,  $\xi' = 0,5$ ,  $1 - \alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $2 - \alpha = 10^{-2}$ ,  $3 - \alpha = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $4 - \alpha = 10^{-1}$ .

будем. Обратим лишь внимание на следующие особенности в распределении концентрации  $\eta(x)$  для толстых пленок. Эти особенности сразу следуют из вида функции  $\Phi(\xi)$ , причем для определенности будем считать  $\xi' = 1/2$ . В толстой пленке  $\alpha \ll 1$ , поэтому  $\delta = (\eta_0/\alpha)^{1/2}$  — большой параметр. В этом случае в функции  $\Phi(\xi)$  можно выделить главные члены вблизи характерных точек  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1/2$  и  $\xi = 1$ :

$$\Phi_0(\xi) = \delta \mu_l \exp(-\delta\xi) \quad \text{при } \xi \ll 1, \quad (27)$$

$$\Phi_{1/2}(\xi) = \frac{1}{2} \delta (\mu_r - \mu_l) \left\{ \left[ 1 - Z\left(\xi - \frac{1}{2}\right) \right] e^{\delta\left(\xi - \frac{1}{2}\right)} + Z\left(\xi - \frac{1}{2}\right) e^{-\delta\left(\xi - \frac{1}{2}\right)} \right\}$$

при  $\left| \xi - \frac{1}{2} \right| \ll 1$ ,

$$\Phi_1(\xi) = \delta \mu_r \exp(-\delta(1-\xi)) \quad \text{при } 1 - \xi \ll 1,$$

которые описывают распределение приращения концентрации, вызванное силой Лоренца, вблизи границ раздела.

Вид функции  $\Phi(\xi)$  для нескольких параметров  $\alpha$  и  $\mu_l = 1$ ,  $\mu_r = 10$  приведен на рис. 2. Таким образом, в толстой пленке с однородной концентрацией и со скачком подвижности имеют место три особенности в распределении объемного заряда носителей по толщине пленки:

а именно особенности вблизи границ пленки и вблизи скачка подвижности. Характерным расстоянием спадаения концентрации в этих случаях является, естественно, дебаевский радиус  $\xi_D = (x/\eta_0)^{1/2} = \delta^{-1}$  (на этом же расстоянии нарастает холловское поле). Если мы интересуемся длинами, существенно большими  $\xi_D$ , то можно считать, что вблизи границ и вблизи скачка сосредоточены поверхностные заряды величиной

$$\rho_0 = \beta\zeta \int_0^{\infty} \Phi_0(\xi) d\xi = \beta\zeta \mu_l \quad \text{при } \xi = 0,$$

$$\rho_{1/2} = \beta\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{1/2}(\xi) d\xi = \beta\zeta (\mu_r - \mu_l) \quad \text{при } \xi = \frac{1}{2},$$

$$\rho_1 = \beta\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\xi) d\xi = -\beta\zeta \mu_r \quad \text{при } \xi = 1.$$

Оценим, до каких полей  $\zeta$  справедливо приближение слабого поля. Теория возмущений применима при условии  $\beta\zeta \Phi(\xi) \ll 1$ , откуда для скачкообразного изменения  $\mu$  получим простое ограничение на величины полей:  $\beta\zeta \mu \delta \ll 1$ .

#### 4. СИЛЬНОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь противоположное приближение, когда сила Лоренца велика, т. е.  $\mu\beta\zeta \gg 1$ . Для решения уравнений (6)—(8) воспользуемся тем обстоятельством, что холловское поле ограничено сверху величиной  $E_{\max}$ , а величина силы Лоренца возрастает с ростом тянущего поля и величины магнитного поля, так что в тонких полупроводниковых пленках с высокой подвижностью носителей и малой их концентрацией в сильном электрическом и магнитном полях сила Лоренца может существенно превышать холловское поле. В этом случае распределение носителей по толщине пленки определяется балансом между диффузией носителей от поверхности пленки, где их концентрация повышена, и стягиванием носителей к этой поверхности за счет силы Лоренца. Вкладом в этот баланс движения носителей за счет холловского поля можно пренебречь ввиду малости силы, действующей на носители со стороны холловского поля по сравнению с силой Лоренца\*.

В неоднородных пленках максимальная величина холловского поля  $\varepsilon_{\max}$  в безразмерных переменных равна по величине

$$\rho_l = \int_0^1 \eta_0(\xi) d\xi = \int_0^1 \eta(\xi) d\xi, \quad (28)$$

здесь  $\rho_l$  представляет собой полный заряд носителей одного знака, а равенство обоих интегралов следует из условия электронейтральности. Условие применимости приближения сильного поля имеет вид  $\varepsilon_{\max} \ll \mu\beta\zeta$ . При этом уравнение (7) упрощается:

$$\frac{d \ln \eta}{d\xi} = x^{-1} \mu\beta\zeta, \quad (29)$$

\* В собственном полупроводнике с одинаковой подвижностью электронов и дырок при перераспределении носителей под действием силы Лоренца холловского поля не возникает, поэтому уравнения, описывающие такой полупроводник и аналогичные (6)—(8), легко решаются без всяких приближений.

откуда

$$\eta = C_2 \exp(-x^{-1} \beta \zeta K(\xi)). \quad (30)$$

Здесь

$$K(\xi) = \int_0^{\xi} \mu(\xi) d\xi, \quad C_2 = \frac{\rho_t}{\int_0^1 \exp(-x^{-1} \beta \zeta K(\xi)) d\xi}.$$

Холловское поле в этих условиях легко может быть получено интегрированием уравнения (6), если взять  $\eta$  в виде (30).

Для тока в пленке имеем

$$J(1) = \zeta C_2 \int_0^1 \mu(\xi) \exp(-x^{-1} \beta \zeta K(\xi)) d\xi. \quad (31)$$

Из (31) видно, что ток в пленке будет невязимен, т. е. существенно несимметричен по отношению к  $\beta \zeta$ . Действительно, при  $\beta \zeta > 0$  носители сосредоточены преимущественно около границы пленки  $\xi = 0$  и ток определяется значением подвижности  $\mu$  в окрестности  $\xi = 0$ ; при смене знака  $\beta \zeta$  носители будут сосредоточены преимущественно около  $\xi = 1$  и ток будет определяться значением  $\mu$  в окрестности  $\xi = 1$ . Когда значения  $\mu$  около противоположных поверхностей существенно различны, то величина тока в пленке будет сильно меняться при смене знака  $\beta \zeta$ .

Проиллюстрируем полученные выражения для распределения концентрации и для тока на примере скачкообразного распределения концентрации (15) и подвижности (14) по толщине пленки. Для такого вида функций  $\mu$  и  $\eta_0$  получаются следующие выражения для тока и распределения концентрации по толщине образца:

$$J(1) = x \beta^{-1} C_2 [1 - \exp[-(x^{-1} \beta \zeta \mu_l \xi' + x^{-1} \beta \zeta \mu_r (1 - \xi'))]]; \quad (32)$$

$$\eta = C_2 \exp(-x^{-1} \beta \zeta K(\xi)), \quad (33)$$

где

$$C_2 = \frac{\beta \zeta x^{-1} (\eta_{0l} \xi' + \eta_{0r} (1 - \xi'))}{\mu_l^{-1} [1 - \exp(-x^{-1} \beta \zeta \mu_l \xi')] + \mu_r \exp(-x^{-1} \beta \zeta \mu_l \xi') [1 - \exp(-x^{-1} \beta \zeta \mu_r (1 - \xi'))]},$$

$$K(\xi) = \begin{cases} \mu_l \xi, & \text{если } \xi < \xi' \\ \mu_l \xi' + \mu_r (\xi - \xi'), & \text{если } \xi > \xi' \end{cases}.$$

Для чистых и тонких пленок в области не очень низких температур  $x \gg 1$ . В этом случае в (32), (33) можно оставить лишь главные члены, тогда

$$J(1) = \zeta \mu_l [\eta_l \xi' + \eta_r (1 - \xi')] \quad \text{при } \beta \zeta > 0,$$

$$J(1) = \zeta \mu_r [\eta_l \xi' + \eta_r (1 - \xi')] \quad \text{при } \beta \zeta < 0.$$

Следовательно, в сильных полях при  $x \gg 1$  полный ток определяется значением подвижности около соответствующей границы пленки и при большом различии  $\mu_l$  и  $\mu_r$  будет наблюдаться сильная невязимность при смене знака  $\beta \zeta$ .

Отметим следующие особенности в распределении концентрации по толщине пленки. Если в случае слабого поля спадание концентрации происходит на дебаевском радиусе  $\xi_D$  и не зависит от величины тянущего поля  $\zeta$ , то в случае сильного тянущего поля спадание зависит от  $\zeta$  и происходит на расстоянии  $\xi_k = x/\mu \beta \zeta$ , так что отношение  $\xi_k/\xi_D =$

$= \sqrt{x/\mu\beta\zeta}$  может быть сделано много меньше единицы. Здесь считается, что  $\eta_0 = 1$ , а значение  $\mu$  берется в том месте, в котором интересуемся спаданием концентрации. Тот факт, что характерная длина спадания концентрации  $\xi_k$  обратно пропорциональна  $\mu\beta\zeta$ , связан с тем обстоятельством, что с увеличением силы Лоренца носители начинают сильнее прижиматься к границе пленки. Возможность стягивания носителей в область, меньшую дебаевского радиуса, объясняется тем, что величины силы Лоренца значительно превышают максимальное холловское поле, поэтому характерная длина спадания концентрации определяется из равенства силы Лоренца и «силы диффузии», действующей на свободные носители тока.

В размерных переменных характерная толщина слоя, в которую стягиваются носители, в сильном поле равна  $l_k = kT\nu/qE_z\omega_B$ , а распределение концентрации носителей по толщине пленки имеет вид  $n(x) = n(0)\exp(-qE_z\omega_B x/kT\nu)$ . Если учесть, что в рассматриваемой модели функция распределения считается максвелловской, то можно

ввести «потенциал»  $\varphi_L = E_z \int_0^x (\omega_B/\nu(x)) dx$ , связанный с силой Лоренца,

при этом распределение носителей по энергиям

$$f(\epsilon) \sim \exp[(\epsilon - q\varphi_L)/kT].$$

Стягивание носителей сильными полями в узкую проповерхностную область, гораздо меньшую радиуса Дебая, открывает новые возможности для изучения свойств поверхности полупроводников, например для исследования приповерхностных уровней, поверхностных механизмов рассеяния и т. д.

Приведем оценки для пленки с параметрами  $n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $\mu \sim 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$  ( $T=77 \text{ К}$ ),  $d \sim 1 \text{ мк}$  при тянущем поле  $E_z = 1,5 \cdot 10^2 \text{ В/см}$  и магнитном поле  $H = 10^4 \text{ Э}$ . Величина  $l_k$  при этих условиях порядка  $5 \cdot 10^{-7} \text{ см}$ , а концентрация носителей вблизи поверхности пленки порядка  $2 \cdot 10^{14} \text{ см}^3$ , что более чем на порядок превышает равновесную концентрацию в отсутствие поля\*.

Заметим, что при применении приближения сильного тянущего поля к конкретным полупроводникам надо соблюдать известную осторожность, например, необходимо принимать во внимание то обстоятельство, что максимально достижимая скорость носителей в полупроводниках ограничена сверху либо пробоем, либо насыщением тока. Для ряда полупроводников эта максимальная величина лежит в пределах от  $10^6 \text{ см/с}$  до  $10^8 \text{ см/с}$ .

## 5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Наибольший интерес представляет получить решение уравнений (6)—(8) во всем интервале полей, не ограничиваясь предельными случаями, рассмотренными в разд. 3 и 4, поскольку это позволяет рассмотреть перераспределение концентрации носителей с ростом поля, а также найти характерный вид вольт-амперных и гаусс-амперных характеристик. Нахождение аналитического решения при этом весьма затруднительно, поэтому уравнения (6)—(8) интегрировались численно на ЭВМ методом Рунге — Кутта четвертого порядка. Нахождение решения уравнений (6)—(8) с граничными условиями  $\epsilon(0) = \epsilon(1) = 0$  осуществлялось путем подбора такого начального условия  $\eta(0)$ , при котором

\* Для выбранных параметров  $l_k$  сравнима с гирорадиусом и длиной волны де Бройля, при этом в «потенциальной яме» вблизи поверхности пленки могут возникнуть уровни квантования.



$\epsilon(1) = 0$ . Интегрирование уравнений проводилось при следующих значениях параметров:  $\eta_{or} = 1$ ,  $\eta_{or} = 0,1$ ,  $\mu_l = 2,3 \cdot 10^{-1}$ ,  $\mu_r = 2,3$ ,  $\alpha = 0,005$ , скачок в распределении  $\eta_0$  и  $\mu$  взять в точке  $\xi' = 0,5$ , причем этот скачок сглаживается кубичным полиномом на характерной толщине  $\Delta\xi = 0,2$ .

В случае эпитаксиальной пленки  $n$  — GaAs эти параметры соответствуют  $T = 77$  К,  $n_l = 10^{14}$  см<sup>-3</sup> и  $n_r = 10^{13}$  см<sup>-3</sup>,  $\mu_l = 10^4$  см<sup>2</sup>/В·с,  $\mu_r = 10^5$  см<sup>2</sup>/В·с,  $d = 3$  мк, причем для  $B = 10^4$  Гс значение  $\beta = 4,35$ .

На рис. 3 а приведено несколько характерных графиков, иллюстрирующих эволюцию перераспределения носителей тока по толщине пленки с ростом тянущего поля  $\zeta$ , когда сила Лоренца стягивает носители в область с меньшей подвижностью и более высокой концентрацией ( $\xi < 0,5$ ), а на рис. 3 б — эволюцию распределения электрического поля  $\epsilon$  в образце. При нулевом тянущем поле (или нулевом магнитном поле) носители (которые считаются для определенности положительными) заходят за счет диффузии в область с меньшей концентрацией и большей подвижностью ( $\xi > 0,5$ ), электрическое поле  $\epsilon$  в области скачка концентрации отрицательно (кривая 1). При отличных от нуля полях носители начинают вытягиваться силой Лоренца из области  $\xi > 0,5$ , так что в этой области возникает превышение заряда ионизованных примесей над зарядом, созданным носителями, электрическое поле  $\epsilon$  в обедненных местах образца становится положительным (кривая 2). Однако при слабых полях, в области скачка, диффузия носителей из области с высокой концентрацией преобладает над стягиванием носителей силой Лоренца, поэтому в области перехода электрическое поле остается отрицательным. С повышением величины силы Лоренца носители начинают сосредотачиваться около поверхности пленки и в области перехода. При этом электрическое поле  $\epsilon$  всюду положительно и оно возрастает с ростом силы Лоренца (кривые 3, 4). При больших полях значительная часть носителей располагается около границы пленки  $\xi = 0$ , причем носители почти полностью покидают область с высокой подвижностью (кривые 5, 6). Это происходит при тянущем поле  $\zeta = 5 \cdot 10^{-2}$  и  $\beta = 4,35$ , что для пленки  $n$ -GaAs соответствует полю  $E_z = 200$  В/см и магнитному полю  $H = 10^4$  Э.

В случае  $\beta\zeta < 0$ , когда носители стягиваются силой Лоренца в область с высокой подвижностью и малой концентрацией ( $\xi > 0,5$ ), поле  $\epsilon$  будет всегда отрицательным. На рис. 3 в приведено несколько характерных кривых, описывающих перераспределение концентрации по толщине пленки, а на рис. 3 г — соответствующие распределения поля  $\epsilon$  в образце. В слабых полях диффузия носителей в области скачка концентрации и стягивание носителей под действием силы Лоренца происходит в одну сторону в область  $\xi > 0,5$ , что ведет к расширению области перехода (кривые 2, 3). При увеличении  $|\beta\zeta|$  значительная часть носителей в области  $\xi > 0,5$  начинает сосредотачиваться около границы пленки  $\xi = 1$ , так как по сравнению с носителями, находящимися в области  $\xi < 0,5$ , на них действует большая величина силы Лоренца из-за высокой подвижности (кривые 4, 5). И, наконец, при  $\beta\zeta > 0,4$  все носители стянуты к границе пленки  $\xi = 1$  (кривая 6). Характерный размер области, в которой сосредоточены носители вблизи  $\xi = 1$ , может быть найден из условий баланса между диффузией носителей от границы  $\xi = 1$  и стягиванием носителей к границе под действием силы Лоренца. Интересно отметить, что возможна такая ситуация, когда носители сосредоточены в основном в области с низкой подвижностью и около границы  $\xi = 1$ , а центральная часть области высокой подвижности обеднена свободными носителями. В отличие от случая, когда носители стягиваются в область с плохой подвижностью, при  $\beta\zeta < 0$  сосредоточение носителей полностью около границы наступает в гораздо меньших тянущих полях из-за высокой подвижности носи-

телей в слое ( $\xi > 0,5$ ) и происходит при поле  $\zeta \sim 10^{-1}$  для магнитного поля  $\beta = 4,35$ .

На рис. 4 а приведены вольт-амперные кривые для разных значений магнитного поля. В более сильных, чем изображено на графике, электрических полях кривые выйдут на прямые линии. Это обусловлено тем, что носители полностью перейдут в один слой пленки. Гаусс-амперные кривые для разных значений тянущего поля  $\zeta$  приведены на рис. 4 б, все кривые на этом рисунке должны выйти на константу при больших магнитных полях из-за того, что носители будут сосредоточены в одном слое пленки. Из этих рисунков видно, что в рассмотренных условиях имеет место сильная невзаимность в полупроводниковых пленках с неоднородным распределением параметров по толщине, причем невзаимные свойства проявляются в тянущих полях, значительно меньших  $E_{\max}$ .

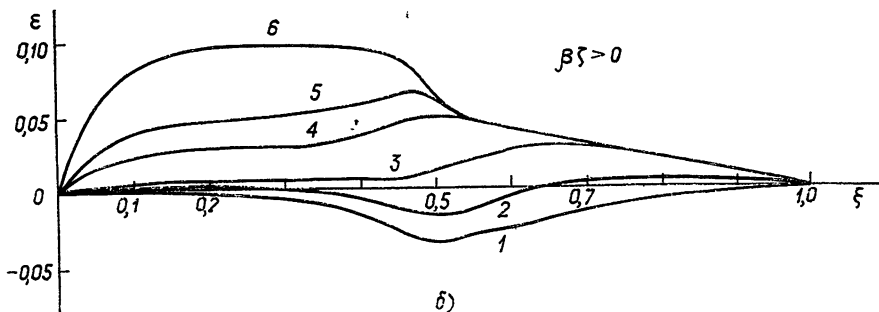
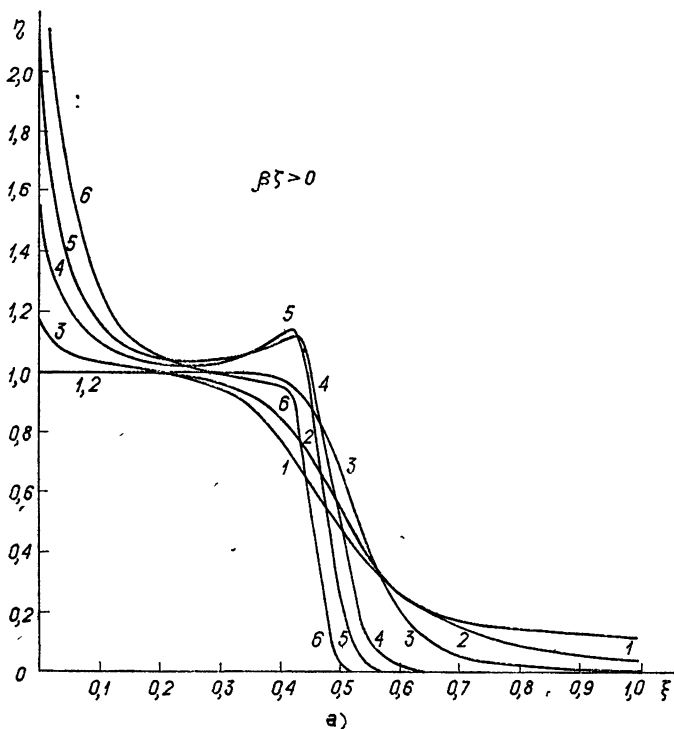
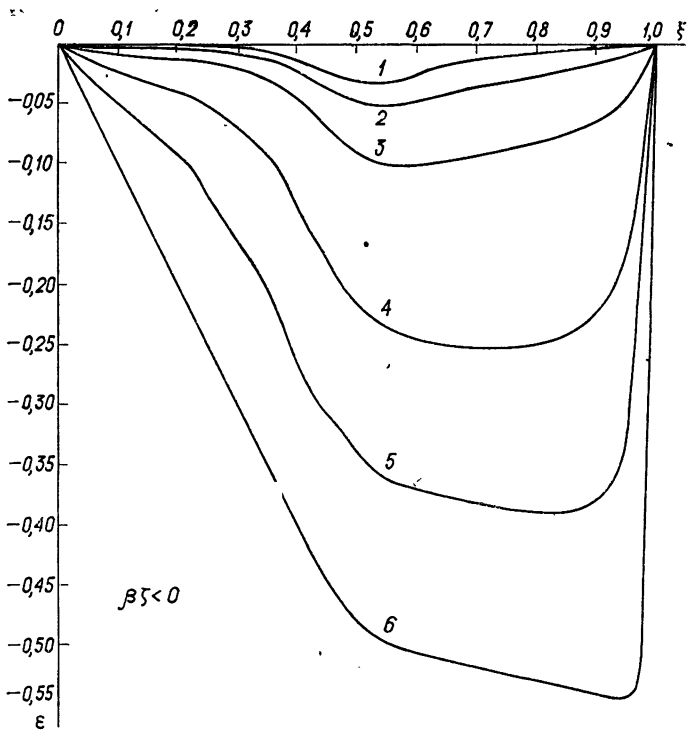
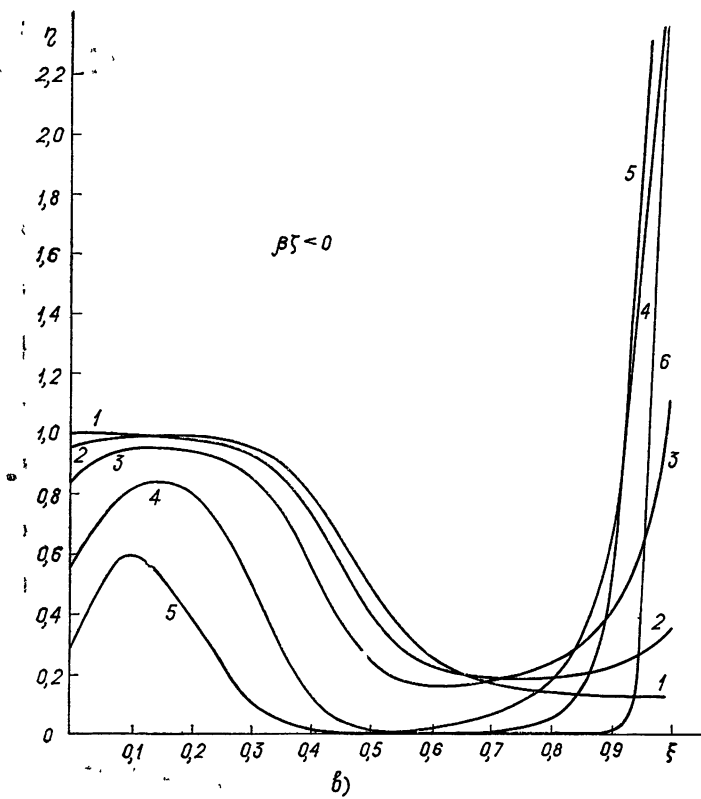


Рис 3 а, б. Перераспределение концентрации (а) и холловское поле (б) в пленке при следующих значениях  $\beta\zeta > 0$ :

- 1 —  $\beta\zeta = 0$ , 2 —  $\beta\zeta = 1,305 \cdot 10^{-2}$ , 3 —  $\beta\zeta = 4,35 \cdot 10^{-2}$ , 4 —  $\beta\zeta = 1,305 \cdot 10^{-1}$ ,  
5 —  $\beta\zeta = 2,175 \cdot 10^{-1}$ , 6 —  $\beta\zeta = 4,35 \cdot 10^{-1}$ .



г)

Рис. 3 в, г. Перераспределение концентрации (в) и холловское поле (г) в пленке при следующих значениях  $\beta z \zeta < 0$ :

1 —  $\beta z \zeta = 0$ , 2 —  $\beta z \zeta = -1,305 \cdot 10^{-2}$ , 3 —  $\beta z \zeta = -4,35 \cdot 10^{-2}$ , 4 —  $\beta z \zeta = -1,305 \cdot 10^{-1}$ ,  
5 —  $\beta z \zeta = -2,175 \cdot 10^{-1}$ , 6 —  $\beta z \zeta = -4,35 \cdot 10^{-1}$ .

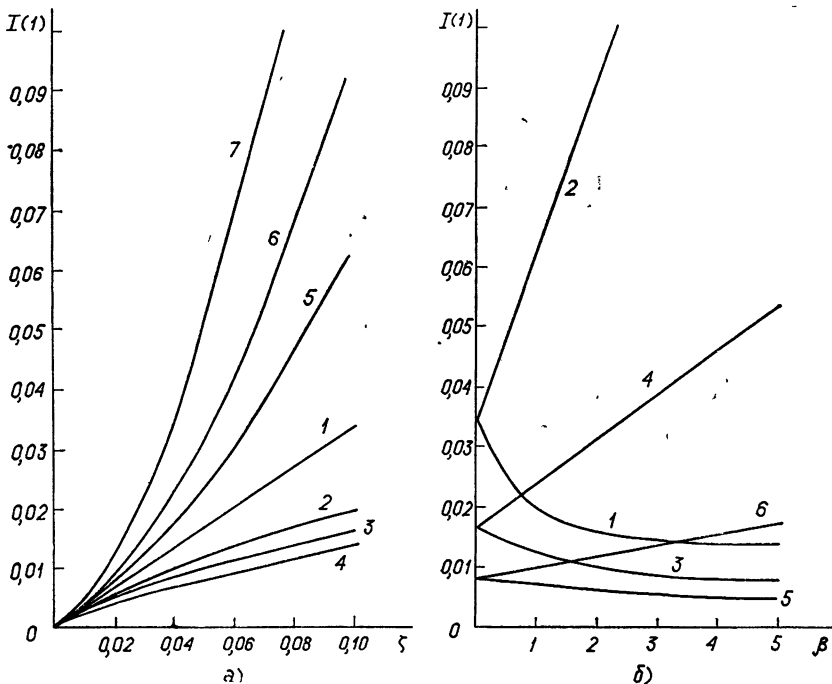


Рис. 4 а) Вольтамперные характеристики при разных значениях магнитного поля:  
 1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $\beta = 1$ , 3 —  $\beta = 2$ , 4 —  $\beta = 4,35$ , 5 —  $\beta = -1$ , 6 —  $\beta = -2$ ,  
 7 —  $\beta = -4,35$ .  
 б) Гаусс-амперные характеристики при разных значениях тянущего поля.  
 1 —  $\beta > 0$ , 2 —  $\beta < 0$ ,  $\zeta = 0,1$ , 3 —  $\beta > 0$ , 4 —  $\beta < 0$ ,  $\zeta = 0,05$ ,  
 5 —  $\beta > 0$ , 6 —  $\beta < 0$ ,  $\zeta = 0,025$ .

Перераспределение носителей под действием силы Лоренца может привести к особенностям в поведении таких полупроводниковых пленок в сильных скрещенных электрическом и магнитном полях, параллельных поверхности пленки. В пленках с неоднородным распределением подвижности по толщине из-за перераспределения носителей меняются гальваномагнитные свойства, изменяются вольт-амперные и гаусс-амперные характеристики и появляется невзаимность относительно направления силы Лоренца\*. Характерные порядки полей  $E_n$  и  $H_n$ , при которых распределение носителей в пленке коренным образом отличается от равновесного, могут быть определены из равенства между силой Лоренца, действующей на носитель, и силой со стороны максимального холловского поля. Однако, как это видно из выполненных выше расчетов, заметное перераспределение носителей и существенное изменение вольт-амперных и гаусс-амперных характеристик неоднородных пленок происходит в полях, значительно меньших  $E_n$  и  $H_n$ . Интересно, что в пленках с резким перепадом параметров вблизи границы раздела в скрещенных  $E$ - и  $H$ -полях появляется «поверхностный» заряд, определяемый величиной скачка подвижности.

\* В отличие от работ [4,5], где появление членов порядка  $H$  связывается с неоднородным разогревом [4] и с различием скоростей поверхностной рекомбинации [5], в нашем случае невзаимность обусловлена асимметрией в распределении подвижности по толщине пленки. Такая асимметрия естественна, например, в эпитаксиальных пленочных структурах, распределенных  $p-n$ ,  $-n-n^+$ -переходах, гетеропереходах и т. д.

В сильных скрещенных полях (порядка  $E_n$  и  $H_n$ ) носители в пленке стягиваются силой Лоренца в приповерхностную область, толщина которой может быть значительно меньше дебаевского радиуса, а концентрация носителей существенно выше равновесной. Такое стягивание свободных носителей к одной из поверхностей пленки представляет возможность изучать (как и в эффекте поля) поверхностные свойства пленок по вольт-амперным и гаусс-амперным характеристикам.

Авторы весьма признательны А. А. Андронову за плодотворные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. M. Belyantsev, V. A. Kozlov and V. A. Valov, *Physica Status Solidi (a)*, **28**, 279 (1975).
2. А. М. Белянцев, В. А. Власов, В. А. Козлов, *ЖЭТФ*, **70**, вып. 2, 569 (1976).
3. J. В. Гупп, *J. Electron. and Control*, **4**, № 1, 17 (1958).
4. В. С. Бочков, А. И. Ваксер, Ю. Г. Гуревич, *Письма в ЖЭТФ*, **18**, № 11, 661 (1973).
5. Г. Е. Пикус, *ЖТФ*, **26**, вып. 1, 22; 36 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
20 ноября 1975 г.

#### CARRIER RE-DISTRIBUTION AND NONRECIPROCAL EFFECTS IN THIN SEMICONDUCTOR FILMS

*A. M. Belyantsev, V. A. Valov, V. A. Kozlov*

The effects connected with the carrier re-distribution across the thin semiconductor film placed in strong crossed electric and magnetic fields have been considered in the hydrodynamic approximation. It is shown that the carrier re-distribution exert influence on galvanomagnetic effects in semiconductor films, in particular, the integral characteristics of the films with a nonuniform parameter distribution vary when the sign of  $E \times H$  is changed. In strong electric and magnetic fields the carriers which bunches in the surface region dimensions less than the Debye radius. The volt-ampere and Gauss-ampere characteristics of films are found, as well as the structure of Hall's field and the carrier distribution in inhomogeneous semiconductor films.

УДК 537.523

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ ВЫСОКОВОЛЬТНЫХ НАНОСЕКУНДНЫХ РАЗРЯДОВ В ПЛОТНЫХ ГАЗАХ

*Л. П. Бабич, Т. В. Лойко, Л. В. Тарасова*

Изложены результаты экспериментальных исследований наносекундных электрических разрядов в воздухе при атмосферном давлении в полях с напряженностью порядка  $10^5$  В/см. Получена информация об импульсах напряжения, реализующегося во время разряда, о токах проводимости в разрядном промежутке и световом излучении различных областей разряда. Показано, что электроны с энергией, превышающей приложенное напряжение, генерируются согласованно с ростом тока проводимости. Делается вывод об определяющей роли «убегающих» электронов в развитии разрядов.

Наносекундные газовые разряды (НГР) при больших перенапряжениях и давлениях газа  $p$  порядка десятков и сотен тор характеризуются высокой скоростью коммутации тока, а их внешний вид отличается многоканальными и диффузными формами. Развитие НГР не описывается в рамках классических таунсендовского и стримерного механизмов. После обнаружения рентгеновского излучения НГР [1-6] был предложен механизм развития НГР, основанный на гипотезе об «убегании» электронных лавин в газовом промежутке с поддержанием эмиссии с катода тормозным излучением лавин, тормозящихся в материале анода [6]. При достижимых в настоящее время напряженностях электрического поля ( $E \sim 10^5$  В/см) лавинообразование «убегающих» электронов в воздухе реально, если давление газа не превышает десятков тор. Однако оно представляется маловероятным в области сотен тор (см. кривые энергетических потерь электронов в  $N_2$  и  $O_2$  [7]).

Была выдвинута также гипотеза о непрерывном ускорении небольшого количества электронов до энергий, при которых сечение взаимодействия с атомами падает в результате предускорения в зоне действия пространственного заряда первичных дрейфующих лавин [8] или статистически [9]. При объяснении в [8] высоких скоростей коммутации тока в НГР роль «убегающих» электронов и сопутствующего тормозного излучения сводилась к генерации в газовом промежутке большого количества заправочных центров ионизации, из которых развивались электронные лавины, определяющие согласно [8] весь ток в промежутке. Быстрые электроны при НГР зарегистрированы в [5, 10], причем, энергия  $\epsilon$  электронов оказалась значительно превышающей энергию  $eU_0$ , соответствующую приложенному напряжению  $U_0$ . Происхождение столь энергичных электронов связывается со стохастическим ускорением части эмиссионных электронов в прикатодной турбулентной плазме разрядов [5, 11]. Допускается также возможность ускорения до больших энергий вследствие перенапряжений на ускоряющем промежутке [12]. В [10] показано, что рентгеновское излучение НГР является тормозным излучением электронов с  $\epsilon > eU_0$ , и указано на возможность той же природы рентгеновского излучения, описанного в предшествующих сооб-

щениях  $[1^{-6}]$ . В настоящее время «убегающие» электроны большой энергии ( $\epsilon \leq eU_0$ ) непосредственно не регистрировались, и в связи с результатами работы  $[10]$  все механизмы, основанные на явлении «убегания» электронов, являются, по существу, гипотезами. Не лишено основания предположение о генерации затравочных центров ионизации в промежутке электронами с энергиями  $\epsilon > eU_0$ .

В настоящей работе показано, что генерация быстрых электронов с энергией, превышающей  $eU_0$ , относится к той стадии разряда, когда уже существует прикатодная плазма. Представлены также некоторые аргументы в пользу определяющей роли «убегающих» электронов при коммутации тока НГР.

1. Эксперименты проводились в воздухе при атмосферном давлении в разрядной камере с массивным цилиндрическим стальным катодом, имевшим полусферическую рабочую поверхность радиусом  $r_k \approx 6$  мм, и анодом из алюминиевой фольги толщиной 8 мк. Межэлектродное расстояние составляло  $d \approx 15$  мм. Для генерации наносекундных импульсов напряжения использовалась схема, подобная  $[13, 14, 5]$ . На разрядный промежуток подавался импульс напряжения с амплитудой  $U_r \approx 135$  кВ и с длительностью переднего фронта  $\tau_f < 1$  нс. Разрядная емкость составляла  $C_r \approx 55$  пФ. Для регистрации напряжения, полного тока в разрядном промежутке  $I$  и тока быстрых ( $\epsilon > eU_0$ ) электронов  $J_6$  использовался осциллограф ОК-31. Осциллографирование напряжения производилось с помощью омического делителя, ток  $I$  регистрировался малоиндуктивным шунтом, собранным из сопротивлений ТВО. Ток  $J_6$  быстрых электронов, прошедших поглотитель (с плотностью порядка  $100$  мг/см<sup>2</sup>), измерялся электронным умножителем 14-ЭЛУ-10  $[15]$ .

2. Характерный внешний вид разряда демонстрируется на рис. 1 (масштаб 1:1). Видны яркие сгустки плотной прикатодной плазмы размером  $d_p \approx 0,1$  см и область относительно слабого диффузного свечения, отделенная от плазмы «темным» пространством. Для выделения наиболее сильно ионизованной части прикатодной плазмы проводилось фотографирование газоразрядного промежутка с различными относительными отверстиями объектива. Светосила объектива уменьшалась до предела, при котором исчезало диффузное свечение и на фотографиях регистрировалось только яркое изображение плотной части плазменного сгустка (дальнейшее снижение светосилы не изменяло размера этой области). Определенное таким образом значение размера плотной части сгустка составляло  $h \approx 3 \cdot 10^{-2}$  см.

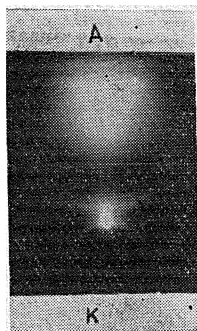


Рис. 1.

3. На рис. 2 приведены осциллограммы напряжения  $U_r$ , подаваемого на исследуемый промежуток (а), напряжения  $U$ , реализующегося на промежутке при разряде (б), полного тока  $I$  в промежутке (в) и тока быстрых электронов  $J_6$  (г). Метки времени  $f = 100$  МГц (рис. 2з). Согласно рис. 2в ток  $I$  достигает амплитудного значения  $J_0 \approx 2$  кА за время  $\tau \leq 1,5$  нс, что фактически является разрешающим временем аппаратуры. На рис. 3 представлены распределения в промежутке напряженности электрического поля  $E(x)$  (кВ/см) (кривая 1)  $[16]$ , газоразрядного параметра  $E/p$  (В/см·тор) (2), первого ионизационного коэффициента Таунсенда  $10^{-1} \alpha_T$  (см<sup>-1</sup>) (3)  $[17-19]$  и  $10^3 v \cdot t$  (см) (4), где  $v$  — дрейфовая скорость электронов  $[17, 20]$ ,  $t = 1$  нс. Видно, что в области диффузного свечения за время  $t \approx 1$  нс заметного развития

электронных лавин не происходит. Следовательно, ток  $J$ , регистрируемый в промежутке, объясняется наличием электронов с энергией, гораздо большей, чем энергия электронов в лавинах, равновесных полю в данной точке промежутка, а также большой интенсивностью вторичных ионизационных процессов в газе.

Методика регистрации позволяла определить момент появления токов  $J$  и  $J_6$  относительно момента приложения импульса напряжения с точностью порядка  $1 \text{ нс}$ . В наших экспериментах токи  $J$  и  $J_6$  начинаются на фронте импульса напряжения (рис. 2 а, в, г). Длительность тока  $J_6$  на рис. 2 г определяется разрешающим временем 14-ЭЛУ-10. В действительности, импульс быстрых электронов короче [5].

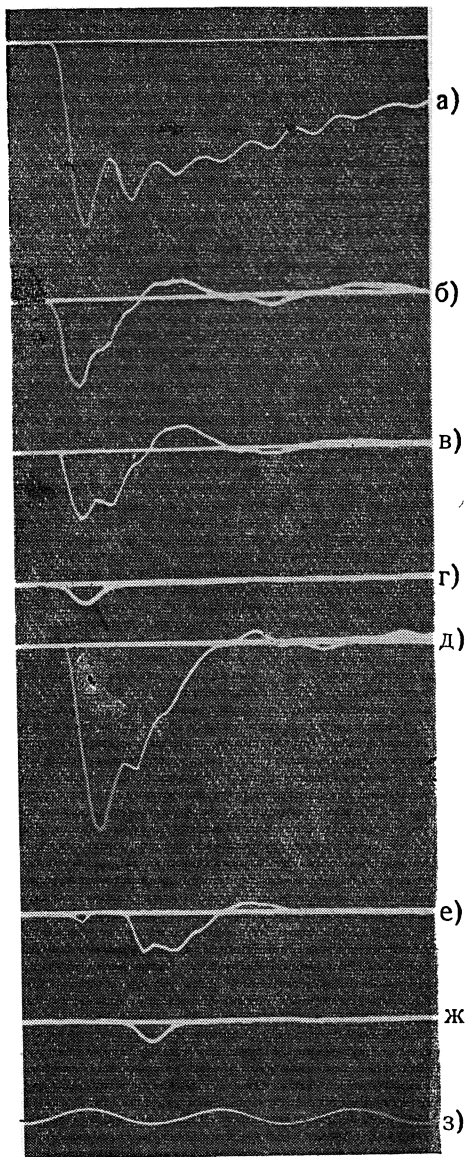


Рис. 2.

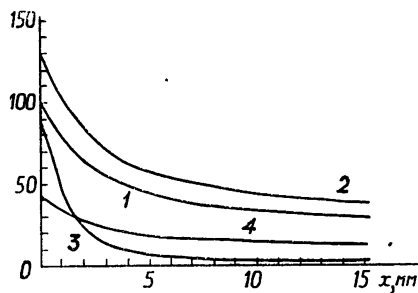


Рис. 3.

4. Для определения момента появления плазмы в газовом промежутке и качественной оценки ее характеристик проводилось исследование светового излучения различных областей разряда. Время запаздывания свечения разряда относительно момента приложения импульса напряжения при регистрации излучения фотоэлементом ФЭК с увиолиевым стеклом ( $\tau_{1/2} = 1,8 \text{ нс}$ ), имеющим область спектральной чувствительности  $\Delta\lambda = 220 \div 680 \text{ нм}$ , оказалось равным  $\sim 2 \text{ нс}$ . Следовательно, уже к этому времени в промежутке достигается высокая степень

ионизации газа. Часть спектра излучения разряда, регистрировавшаяся ФЭКом, лежала в области длин волн  $\Delta\lambda = 220 \div 380 \text{ нм}$ . При регистрации свечения фотоумножителем 7-ЭЛУ-Ф9 запаздывание свечения отсутствует. Отношение интенсивности излучения прикатодной плазмы к суммарной интенсивности излучения всего газового промежутка составляет 10% при регистрации с уровня  $\lambda = 320 \text{ нм}$  и 25% при реги-



страции с уровня  $\lambda = 220$  нм. Таким образом, прикатодная плазма излучает в более коротковолновой части спектра, чем плазма в области диффузного свечения. По-видимому, в спектре прикатодной плазмы присутствует и более коротковолновое излучение, что свидетельствует о высокой температуре этой области разряда. Наличие высокоионизованной горячей плазмы в прикатодной области разряда в высоковольтной стадии позволяет связывать генерацию быстрых электронов со стохастическим ускорением.

5. Чтобы задержать эмиссию с катода и затормозить развитие ионизационных процессов в прикатодной области, рабочая поверхность катода была смазана трансформаторным маслом. Осциллограммы  $U$ ,  $J$ ,  $J_6$  приведены на рис. 2 д, е, ж соответственно. Небольшой пик в левой части осциллограммы тока  $J$  (рис. 2 е) обусловлен током смещения при зарядке емкости межэлектродного промежутка. Задержка в начале тока проводимости относительно момента приложения напряжения  $\tau_{J-U}$  составляет около 4 нс. Начало генерации быстрых ( $\epsilon > eU_0$ ) электронов совпадает с появлением тока проводимости в промежутке. Существование задержки в начале генерации быстрых электронов относительно момента приложения напряжения указывает на то, что их природа не связана с перенапряжением на промежутке, а обусловлена физическими процессами (такими, как пучковая неустойчивость, развитие турбулентности в плазме, стохастическое ускорение) в ионизованном газе прикатодной области [5].

6. Можно предложить следующую картину развития прикатодной плазмы в проведенных экспериментах.

Согласно общепринятой концепции инициирование разряда осуществляется с микровыступов на катоде [21, 22]. Коэффициент усиления прикатодного макрополя ( $E_K = E(x=0) \approx 100$  кВ/см) вблизи вершины полуэллипсоидального [23] выступа

$$\mu = \frac{h_m}{\rho_m} \frac{2}{\ln(h_m/\rho_m) - 1}, \quad (1)$$

где  $\rho_m = r_m^2/h_m$  — радиус кривизны у вершины эллипсоида,  $r_m$ ,  $h_m$  — малая и большая полуоси эллипсоида;  $\mu$  достигает величины порядка 100, необходимой для появления иницирующих автоэлектронов, при отношении высоты микровыступа к ширине  $h_m/2r_m \approx 10$  [24, 25].

В силу большой скорости ионизации первичная электронная лавина становится критической по Петеру [26] непосредственно вблизи иницировавшего ее микровыступа на пути  $x_{кр} \approx \frac{\ln N_e^{(кр)}}{\alpha_T (E_K/p)} \approx 2 \cdot 10^{-2}$  см, где  $N_e^{(кр)} \ll$

$\ll \exp(20)$  — число электронов в критической лавине [26, 21], за время  $t_{кр} \approx x_{кр}/v_- (E_K/p) \approx 0,5$  нс. Пространственный заряд ионов, остающихся по следу лавины, усиливает поле у катода, интенсифицируя эмиссию с микровыступа, иницировавшего лавину, и приводя к образованию новых центров эмиссии в непосредственной близости к нему. По мере развития ионизации в прикатодной области образуется «квазианод» из облака ионов аналогично вакуумным разрядам [27]. Процессы инициирования и развития новых лавин, расширения поверхности «квазианода», образования новых центров эмиссии и ее усиления оказываются самоогласованными.

Так как поле вблизи головки развивающихся лавин усилено из-за кривизны их поверхности (для критической лавины со сферической поверхностью коэффициент усиления  $f = 3$ ), то скорость ионизации газа вырывающимися вперед электронами увеличивается, скорость

дрейфа становится равной примерно  $10^8$  см/с [20] и за  $t \sim 1$  нс размер области слабоионизованного газа достигает  $\sim 0,1$  см, что соответствует размеру прикатодного плазменного сгустка.

7. Таким образом, за время порядка 1 нс вблизи катода образуется область расширяющейся слабоионизованной плазмы, плотность которой возрастает со временем, особенно вблизи микронеровностей, так как пространственный заряд ионов усиливает автоэлектронную эмиссию с их поверхности. Вблизи эмиссионных центров создаются области ионизованного газа с высокой степенью ионизации по ходу автоэлектронных пучков и ионизованных продуктов взрыва тех микровыступов, на которых достигается критическая плотность эмиссионного тока ( $j_{кр}^2 t_3 \approx 4,5 \cdot 10^{17}$  А/м<sup>4</sup>·с [28], где  $t_3$  — длительность задержки взрыва относительно момента появления эмиссии).  $j_{кр}$  реализуется на значительном количестве  $N_m$  микровыступов без заметных токов проводимости в промежутке вне прикатодного плазменного образования. Пусть к моменту  $t_3$  внешняя граница плазмы является полусферой радиуса  $r_p(t_3)$  (рис. 4). Окружим плазму полусферической поверхностью  $S_2$  радиусом  $r_p(t_3) + x_{кр}$ . Тогда, полагая в уравнении непрерывности тока для полусферы

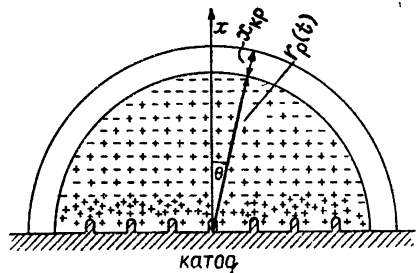


Рис. 4. Схематическое изображение прикатодной плазмы.

$$-\int_{S_1} j_{кр} dS_1 + \int_{S_2} j dS_2 + \varepsilon_0 \int_{S_1} \dot{E}_{S_1} dS_1 + \varepsilon_0 \int_{S_2} \dot{E}_{S_2} dS_2 = 0, \quad (2)$$

где  $S_1$  — площадь поверхности катода под полусферой  $S_2$ , второй и третий члены равными нулю,  $E_{S_2} = 3E_k \cos \theta$  [29] в силу  $r_p(t_3) \gg x_{кр}$  и учитывая, что в  $S_1$  эффективной является площадь размером  $(0,63 \div 0,94)\rho_m^2$  [30], находим

$$N_m \approx (7 \div 4,7) \sqrt{\frac{t_3}{10^{17} \text{ а} \cdot \text{м}^{-4} \cdot \text{с}^{-1}}} \left(\frac{h_m}{r_m}\right)^2 \left(\frac{r_p}{r_m}\right)^2 \varepsilon_0 \frac{E_k}{t_{кр}}, \quad (3)$$

так как вследствие развития лавин характерное время спада напряженности поля между плазмой и полусферической поверхностью

$$\sim t_{кр} \left(\frac{E_{S_2}}{p}\right) \approx \frac{x_{кр}}{v_-} \approx \frac{\ln N_e^{(кр)}}{\alpha_T(E_{S_2}/p)v_-(E_{S_2}/p)}. \text{ Если принять, что } h_m \approx 10^{-4} \text{ см}$$

[24, 25, 30],  $h_m/2r_m \approx 5$ ,  $r_p \approx 5 \cdot 10^{-2}$  см,  $t_{кр} \approx 0,1$  нс,  $t_3 \approx 1$  нс, то  $N_m \approx (1 \div 1,5) \cdot 10^3$ . При этом величина эмиссионного тока  $J_3 \approx 2$  А.

Плотность плазмы при ионизации газа расходящимся пучком электронов, эмиттированных каждым микровыступом, со средним радиусом поперечного сечения  $r_1$

$$n_p \approx \frac{j_{кр} t_3}{e} \frac{(0,63 \div 0,94)}{\pi} \left(\frac{\rho_m}{r_1}\right)^2 \sigma_l(\varepsilon_l) n_g. \quad (4)$$

Полагая, что энергия электронов в пучке  $\varepsilon_1$  практически полностью расходуется на ионизацию газа и нагрев электронов плазмы на пути  $h$ :

$$\frac{j_{кр} t_3}{e} (0,63 \div 0,94) \rho_m^2 \epsilon_1 \approx n_p (1,5 T_e + \bar{\epsilon}_{in}) r_1^2 h, \quad (5)$$

где  $\bar{\epsilon}_{in} \approx 34$  эВ [31] — средняя энергия, затрачиваемая на образование пары электрон—ион в воздухе, получаем из (4) и (5)

$$T_e \approx \frac{\epsilon_1}{1,5 n_g \sigma_i(\epsilon_1) h} - \frac{\bar{\epsilon}_{in}}{1,5}. \quad (6)$$

На пути  $h = 3 \cdot 10^{-2}$  см в воздухе согласно формуле Бете для неупругих потерь электронов [32] полностью замедляются электроны с энергией  $\epsilon_1 \approx 4$  кэВ\*. При такой энергии электронов сечение ионизации воздуха  $\sigma_i \approx 3 \cdot 10^{-17}$  см<sup>2</sup> [33] и (6) удовлетворяется при температуре электронов  $T_e \approx 100$  эВ, что близко к значению  $T_e = 200$  эВ, обеспечивающему стохастическое ускорение электронов в полностью ионизованной области прикатодной плазмы при наносекундных разрядах в атмосфере [11]. Следует отметить сильное превышение полученной оценки  $T_e$  над температурой электронов взрывной плазмы наносекундных вакуумных разрядов ( $T_e \sim 4,5$  эВ [28]), измеренной по спектральным линиям атомов в видимой области. Температура  $T_e \approx 4,5$  эВ, по-видимому, относится к наружным слоям плазмы, которые в силу большой плотности экранируют ультрафиолетовое излучение. Таким образом, начало стохастического ускорения части эмиссионных пучков возможно, во всяком случае, не позже появления заметных токов проводимости в промежутке.

По мере увеличения поверхности «квазианода» и плотности положительного заряда на ней критическая плотность тока реализуется на все большей части поверхности микровыступа, приводя в итоге к его взрыву. При этом значительный вклад в разогрев микровыступа может вносить ионная бомбардировка. В результате затравочная часть поверхности всех  $N_m \sim 10^3$  микровыступов, через  $t \approx t_3 \approx 1$  нс, когда достигается амплитудное значение тока  $J_0 \approx 2$  кА, оказывается равной  $J_0 (j_{кр} N_m \pi h m r_m)^{-1} \approx \frac{1}{3}$ . На этой стадии уже существуют токи про-

водимости во всем промежутке. Со взрывом микровыступов условия для формирования электронных пучков и, следовательно, развития пучковой неустойчивости в прикатодной плазме ухудшаются. Поэтому стохастическое ускорение электронов относится к стадии быстрого роста тока проводимости  $J$ , что соответствует экспериментальным данным (см. рис. 2).

8. Так как быстрые электроны ( $\epsilon > eU_0$ ) генерируются согласованно с ростом тока, то естественно допустить, что, ионизуя газ вне области прикатодной плазмы, они создают затравочные центры для развития электронных лавин. С учетом размена энергии вторичными электронами всего может быть создано не более

$$N_e^{(6)} \sigma_i(\epsilon_6) n_g d \frac{\bar{\epsilon}_{вт}}{\epsilon_{in}} \approx 10^{11} \text{ электронов}, \quad (7)$$

где  $N_e^{(6)} \approx 10^9$ ,  $\epsilon_6 \approx 300$  кэВ [5],  $\sigma_i \approx 5 \cdot 10^{-19}$  см<sup>2</sup>,  $\bar{\epsilon}_{вт} \approx 140$  эВ [34]. Тормозное

\* Если половина напряжения, приложенного к плазме, падает в прикатодной области, то  $\epsilon_1 \sim 0,5 E_k 2r_p \approx 5$  кэВ [11]. Электроны пучка, попадая из прикатодной области, где сосредоточен пространственный заряд ионов, в область, занятую квазинейтральной плазмой, в основном только теряют энергию. Квазинейтральная плазма практически существует с момента достижения первичной лавиной критических размеров. Следует отметить близость  $x_{кр} \approx 2 \cdot 10^{-2}$  см и  $h \approx 3 \cdot 10^{-2}$  см.

излучение быстрых электронов создает гораздо меньше центров ионизации. Для достижения тока порядка килоампера необходимо учесть размножение электронов. Однако, как уже отмечалось выше, на расстоянии  $x \approx 0,5$  см от катода, что соответствует началу диффузного свечения, лавинообразование практически отсутствует. Оценки показывают, что электромагнитное излучение прикатодной плазмы в области частот  $\omega \geq I/\hbar$ , где  $I$  — потенциал ионизации газа, также не может создать высокую проводимость в промежутке. Внешний вид разряда (наличие «темного» пространства) также свидетельствует о необходимости привлечения иного объяснения регистрируемой величины тока.

Механизмом, способным объяснить регистрируемые токи и внешний вид разряда, может являться «убегание» электронов из прикатодной плазмы. Наиболее быстрые электроны, вырываясь из плазмы и ускоряясь в зоне действия ее отрицательного пространственного заряда, согласно приближенному критерию перехода электронов к непрерывному ускорению в нейтральном газе [8]\*

$$\frac{1}{p} \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{eE_k}{p} \left[ 1 + 2 \left( \frac{r_p}{r_p + x} \right)^3 \right] \cos \theta - \left( \frac{d\varepsilon}{dx} \right)_{\text{loss}} > 0, \quad (8)$$

где  $\left( \frac{d\varepsilon}{dx} \right)_{\text{loss}}$  — энергетические потери электронов на единице пути при  $p = 1$  тор, начиная с некоторых достаточно острых углов  $\theta$ , набирают энергию порядка нескольких килоэлектронвольт и вовлекаются в режим «убегания». Более медленные электроны, вырвавшиеся из плазмы, а также вторичные электроны ионизируют и возбуждают молекулы газа вне ее, образуя «корону», внешний вид которой (рис. 1) определяется тем, что согласно (8) с ростом  $\theta$  начальная энергия электронов, необходимая для «убегания», увеличивается, и количество электронов, не вовлеченных в режим «убегания» и способных эффективно ионизировать газ, вначале растет, а затем с приближением  $\theta$  к  $\pi/2$  начинает уменьшаться.

Полный ток, протекающий через разрядный промежуток, можно разбить на четыре составляющие в соответствии с природой и энергией электронов:

$$J = J^{(6)} + J^{(y6)} + J^{(вт)} + J^{(л)}, \quad (9)$$

где  $J^{(6)}$  — ток стохастически ускоренных (быстрых) электронов ( $\varepsilon \sim 300$  кэВ),  $J^{(y6)}$  — ток «убегающих» электронов (по-видимому,  $\varepsilon$  порядка десятков килоэлектронвольт),  $J^{(вт)}$  — ток вторичных электронов всех поколений, генерируемых «убегающими» и быстрыми электронами в промежутке вне прикатодной плазмы ( $\varepsilon \leq 100$  эВ),  $J^{(л)}$  — ток электронных лавин, инициируемых вторичными электронами, релаксирующими к  $E/p$  в данном месте промежутка.

Ток  $J^{(6)}$  составляет доли ампера  $\left( \frac{eN^{(6)}}{\Delta t^{(6)}} \approx 0,1 \text{ A} [8] \right)$ , и им можно пренебречь. Составляющая  $J^{(л)}$  уменьшается с увеличением расстояния  $x$  от прикатодной плазмы вследствие уменьшения  $E/p$  и в области диффузного свечения практически отсутствует. Следовательно, ток определяется «убегающими» и вторичными электронами. Так как в «темном» пространстве напряженность поля недостаточна для «убегания» вторичных электронов, то лавинообразования «убегающих» электронов не происходит. Вне зоны действия пространственного

\* Критерий записан для сферической поверхности плазмы [29].

заряда прикатодной плазмы ( $x \sim r_p$ ) спектр «убегающих» электронов смягчается, сечение ионизации возрастает  $\left(\sigma_i \sim \frac{\ln 1,25 (\varepsilon_{y6}/I)}{\varepsilon_{y6}}\right)$  [34] и плотность вторичных электронов увеличивается в сторону анода  $\left(\frac{N_e^{(y6)}}{S(x)} \sigma_i (\varepsilon_{y6}) n_g, \text{ где } S - \text{сечение разряда}\right)$ . Поэтому  $J^{(y6)}$  уменьшается, а  $J^{(вт)}$  возрастает в сторону анода.

Свечение разряда вне области прикатодной плазмы связано с переходами  $C^3 \Pi_u \rightarrow B^3 \Pi_g$  молекулы  $N_2$  (вторая положительная система, излучение которой обычно наблюдается при разрядах в воздухе). Для «убегающих» электронов при  $\varepsilon \gtrsim 1 \text{ кэВ}$  длина свободного пробега по отношению к возбуждению состояния  $C^3 \Pi_u N_2$  [35]  $(\sigma_{ex} n_g)^{-1} \gtrsim 50 \text{ см} \gg d$ . Поэтому распределение свечения в промежутке в основном определяется распределением плотности вторичных электронов, средняя энергия которых слабо зависит от энергии первичных электронов и, следовательно, от места генерации  $\left(\bar{\varepsilon}_{вт} \approx I \left(\ln \frac{\varepsilon_{y6}}{I} - 1\right) \sim 100 \text{ эВ}\right)$  [34].

Для вторичных электронов  $(\sigma_{ex} (C^3 \Pi_u) n_g)^{-1} \approx 0,1 \text{ см}$ , что соответствует длине «темной» области. Следовательно, происхождение «темной» области аналогично природе темного круковского пространства. Возможно, темная прикатодная полоса, наблюдавшаяся в [6], имеет ту же природу.

Итак, можно утверждать, что генерация быстрых электронов с энергией  $\varepsilon > eU_0$  связана с существованием прикатодной плазмы НГР. Электроны, у которых  $\varepsilon > eU_0$ , появляются не позже начала заметных токов проводимости в газоразрядном промежутке. Однако за высокие скорости коммутации тока в НГР отвечает, по-видимому, другая группа более медленных электронов, представляющая собой непрерывно ускоряющиеся («убегающие») электроны, вырвавшиеся из прикатодной плазмы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Станкевич, В. Г. Калинин, Докл. АН СССР, 177, 72 (1967).
2. R. C. Noggle, E. P. Krider, J. R. Wayland, J. Appl. Phys., 39, 4746 (1968).
3. Л. В. Тарасова, Л. Н. Худякова, ЖТФ, 39, 1530 (1969).
4. В. В. Кремнев, Ю. А. Курбатов, ЖТФ, 42, 795 (1972).
5. Л. В. Тарасова, Л. Н. Худякова, Т. В. Лойко, В. А. Цукерман, ЖТФ, 44, 564 (1974).
6. Ю. И. Бычков, В. В. Осипов, Ю. А. Курбатов, А. Г. Филонов, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 1, 61 (1973).
7. L. R. Peterson, A. E. S. Green, J. Phys. B. (At. Mol. Phys.), 1, 1131 (1968).
8. Л. П. Бабич, Ю. Л. Станкевич, ЖТФ, 42, 1669 (1972).
9. Г. Д. Алхазов, ЖТФ, 44, 1044 (1974).
10. Л. П. Бабич, Т. В. Лойко, Л. В. Тарасова, В. А. Цукерман, Письма в ЖТФ, 1, 166 (1975).
11. Л. П. Бабич, ЖТФ, 44, 1846 (1974).
12. С. П. Бугаев, В. И. Кошелев, М. И. Тимофеев, ЖТФ, 44, 1917 (1974).
13. Н. В. Белкин, Н. И. Комяк, Е. А. Пеликс, В. А. Цукерман, ПТЭ, № 2, 194 (1972).
14. Н. И. Комяк, Е. А. Пеликс, Дефектоскопия, № 3, 127 (1971).
15. Л. И. Андреева, Б. М. Степанов, ПТЭ, № 5, 149 (1962).
16. Л. П. Бабич, Диссертация, М., 1973.
17. С. Браун, Элементарные процессы в плазме газового разряда, Госатомиздат, М., 1961.
18. Дж. Мик, Дж. Крэгс, Электрический пробой в газах, ИЛ, М., 1960.
19. H. Schlumbohm, Zs. Phys., 184, 492 (1965).
20. H. Schlumbohm, Zs. Phys., 182, 317 (1965).
21. Г. А. Месяц, Ю. И. Бычков, В. В. Кремнев, УФН, 107, 201 (1972).
22. Ю. Л. Станкевич, Диссертация, М., 1967.

23. Г. И. Фурсей, Г. Н. Воронцов-Вельяминов, ЖТФ, 37, 1870 (1967).
24. R. P. Little, W. T. Whitney, J. Appl. Phys., 34, 2430 (1963).
25. Г. А. Богдановский, ФТТ, 1, 1921 (1959).
26. Г. Петер, Электронные лавины и пробой в газах, изд. Мир, М., 1968.
27. Г. И. Фурсей, Г. Н. Воронцов-Вельяминов, ЖТФ, 37, 1880 (1967).
28. G. A. Mesyats, 10-th Intern. Conf. on Phen. in Ion. Gases, Inv. papers, Oxford, England, 1971, p. 333.
29. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
30. И. Н. Сливков, Электроизоляция и разряд в вакууме, Атомиздат, М., 1972.
31. К. К. Аглинцев, Дозиметрия ионизирующих излучений, Гостехиздат, М., 1957.
32. Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, изд. Мир, М., 1969.
33. L. J. Kieffer, H. Gordon Dunn, Rev. Mod. Phys., 38, 1 (1966).
34. Л. И. Гречихин, В. В. Кудряшов, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 9, 158 (1970).
35. L. R. Peterson, S. S. Prasad, A. E. S. Green, Canad. J. Chem., 47, 1774 (1969).

Поступила в редакцию  
8 апреля 1976 г.

#### SOME QUESTIONS OF PHYSICS OF HIGHVOLTAGE NANOSECOND DISCHARGES IN DENSE GASES

*L. P. Babich, T. V. Loyko, L. V. Tarasova*

The results are set forth of the experimental investigations of nanosecond electric discharges in the air under atmospheric pressure, the field intensity being  $\sim 10^6$  V/cm by the order of magnitude. Information is obtained about voltage impulses which are realised during a discharge, the conduction current in the discharge gap, and about light emission from different discharge regions. It is shown that the electrons possessing the energy exceeding the applied voltage are generated in consistency with the growth of the conduction current. A conclusion is made that „runaway“ electrons play a main role in the discharges development.

---

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 538.56.

### О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКЕ МНОГИХ ГИПОТЕЗ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

А. А. Горбачев, А. П. Колданов

Основные результаты современной теории анализа и синтеза информационных систем относятся к параметрическим задачам [1]. В этом случае при проверке многих гипотез последние формируются относительно значений параметров некоторого параметрического семейства  $P_\theta(x)$ , которое адекватно описывает множество анализируемых ситуаций. Однако практика все чаще выдвигает задачи, в которых возникают значительные трудности при задании  $P_\theta(x)$  [1, 2]. Это приводит к необходимости разработки методов, не опирающихся на знание  $P_\theta(x)$ . Такие методы, как известно, получили название непараметрических и в настоящее время развиваются применительно к обнаружению [2, 3].

Цель настоящего сообщения состоит в изложении непараметрического подхода к проверке многих гипотез, основанного на использовании характеристических свойств нормального распределения и применении его к распознаванию импульсных и непрерывных помех, сопутствующих приему шумового сигнала.

Рассмотрим задачу проверки многих гипотез  $H_0, H_1, \dots, H_N$  ( $N > 1$ ). Будем считать, что гипотеза  $H_0$  может быть описана гауссовым семейством вероятностных мер  $N(0, \sigma^2)$ . Относительно гипотез  $H_1, \dots, H_N$  предполагается, что, по крайней мере, часть из них не допускает аналитического представления параметрическими семействами и различия между ними задаются некоторым качественным образом. Задачи подобного рода возникают, например, при распознавании типа помеховой ситуации, сопутствующей приему полезных сигналов. В частности, если помеховые ситуации разделены на два больших класса — импульсных и непрерывных, то при приеме шумовых (гауссовых) сигналов семейством  $N(0, \sigma^2)$  характеризуется гипотеза  $H_0$ : отсутствие помех. Две другие гипотезы допускают параметрическое представление лишь при значительном сужении класса импульсных и непрерывных помех [4]. К такому же типу относится задача распознавания типа полезных сигналов, пораженных шумовой помехой, или принимаемых на фоне собственных шумов приемника.

Как известно [2], принцип решения непараметрических задач состоит в выборе подходящего непараметрического факта и построении на его основе решающего правила. При решении задач обнаружения такой факт выбирается из соображений различия между двумя выделенными гипотезами. Наличие большего числа гипотез, естественно, накладывает дополнительные условия на непараметрические методы их проверки. Вместе с тем, присутствие гипотезы  $H_0$  наводит на мысль использовать характеристические свойства закона Гаусса в качестве базы таких методов. При этом для задачи проверки многих гипотез основное значение имеют свойства, которые не выполняются характерно по разному при истинности  $H_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Другим важным требованием является возможность относительно простой технической реализации. В этой связи следует особо отметить характеристические свойства нормального распределения, основанные на различных отношениях моментов.

Укажем некоторые свойства закона Гаусса и обсудим возможность их использования для решения поставленной задачи.

1) Свойство оптимальности выборочной дисперсии как оценки дисперсии нормального распределения [5]. На этом интересном свойстве, по существу, построен критерий Шапиро—Уилка [6]. Следует отметить, что методами моделирования показана его высокая, по сравнению с другими критериями нормальности, эффективность по отношению к широкому классу альтернатив [7, 8]. Однако из анализа [6] следует, что статистика Шапиро—Уилка при отклонениях распределения от нормального отклоняется всегда в одну сторону (всегда уменьшается). Это обстоятельство затушевывает разницу между альтернативами и потому осложняет построение правила проверки многих гипотез на базе критерия Шапиро—Уилка.

2) Следующее интересное свойство заключается в независимости статистик  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  и  $\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ , а также  $X_1 + X_2$  и  $X_1 - X_2$ , присущей только нормальному распределению [6]. Однако в настоящее время известен, по существу, только один непараметрический критерий независимости [9], реализация которого громоздка.

3) Характеризационным является также отсутствие регрессии  $\bar{s}^2$  на  $\bar{x}$  и  $X_1 + X_2$  на  $X_1 - X_2$ , если  $x, X_1, X_2 \in N(a, \sigma^2)$  [5].

Эти факты носят универсальный характер. Ограничившись регрессией любого заданного наперед порядка  $k$ , методом наименьших квадратов можно получить свойство, присущее распределению Гаусса, основанное на  $2k$  моментах.

4) В частности, можно показать, что ограничение квадратичной регрессией  $\bar{s}^2$  на  $\bar{x}$  при  $n \rightarrow \infty$  приводит к известным свойствам асимметрии и эксцесса нормального распределения. Свойство асимметрии не представляет интереса, так как большинство рассматриваемых процессов симметричны относительно нуля. Однако при переходе к анализу огибающей процессов положение может измениться. Свойство эксцесса заключается в том, что для нормального распределения

$$b_2 = \frac{E\{x^4\}}{(E\{x^2\})^2} - 3 = 0 \quad (1)$$

(здесь рассматриваются процессы с нулевым математическим ожиданием). На этом свойстве был построен алгоритм распознавания помеховых ситуаций, сопутствующих приему ЧМ сигналов [10].

$$5) b_1 = \frac{E\{|x|\}}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (2)$$

если  $x \in N(0, \sigma^2)$ . На этом свойстве построен критерий нормальности Джири [11].

Перечисленные характеризационные свойства распределения Гаусса не являются исчерпывающими, и поиск таких свойств представляет самостоятельный интерес.

Одним из нерешенных вопросов предлагаемого подхода является область применимости указанных свойств в смысле проверки многих гипотез. Ниже исследуется класс непрерывных и импульсных помех, которые можно различить на базе свойства (1). Рассмотрим процесс

$$z(t) = x(t) + y(t), \quad (3)$$

где  $x(t)$  — полезный сигнал (гауссов процесс),  $y(t)$  — помеха. Одномерная функция распределения  $z(t)$  имеет вид  $(1-\gamma)N(z) + \gamma(N(z) * f(z))$ , где  $(N * f)$  — свертка распределений  $x$  и  $y$  ( $f(z)$  считается непрерывной),  $\gamma = 1$  соответствует непрерывной помехе  $y(t)$ ,  $0 < \gamma < 1$  — импульсной (рассматривается процесс непрерывных импульсов). Можно показать, что эксцесс (3) имеет вид

$$b_2 = 3 \frac{1 + 2\gamma \frac{E\{y^2\}}{E\{x^2\}} + \gamma \frac{E\{y^4\}}{E\{x^4\}}}{1 + 2\gamma \frac{E\{y^2\}}{E\{x^2\}} + \gamma^2 \left(\frac{E\{y^2\}}{E\{x^2\}}\right)^2} - 3. \quad (4)$$

Из анализа (4) следует, что импульсные и непрерывные помехи можно различать по знаку  $b_2$ , если: 1) непрерывная помеха имеет отрицательный эксцесс, 2) величина  $\gamma$  (обратная скважности) удовлетворяет условию

$$3\gamma < \frac{E\{y^4\}}{(E\{y^2\})^2}. \quad (5)$$

Пусть, например, непрерывная помеха и заполнение непрерывных импульсов имеют вид

$$y(t) = \sum_{i=1}^k a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (6)$$

где  $\varphi_i$  распределены равномерно и независимо на  $[0, 2\pi]$ . Отметим, что функция распределения (6) в аддитивной смеси с нормальным шумом в настоящее время находится лишь численными методами [12]. Вместе с тем, можно убедиться, что эксцесс (3) при условии (6) отрицателен, а появление импульсной помехи (при условии  $\gamma < 1/2$ ) ведет к тому, что  $b_2 > 0$ , что позволяет их различать на фоне шумового сигнала. Конкретно правило распознавания получается, исходя из распределения  $b_2$ , табулированного в [13].



## ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Большаков, Б. Р. Левин, В. Г. Репин, Г. П. Тартаковский, Изв. АН СССР, серия Техническая кибернетика, № 2, 153 (1970).
2. Ф. П. Тарасенко, Труды Сибирского физико-технического института при Томском университете, вып. 63, 49 (1973).
3. Б. Р. Левин, Труды Сибирского физико-технического института при Томском университете, вып. 63, 6 (1973).
4. А. А. Горбачев, А. П. Колданов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 882 (1975).
5. А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао, Характеризационные задачи математической статистики, изд. Наука, М., 1972.
6. S. S. Shapiro and M. B. Wilk, Biometrika, 52, № 4, 591 (1965).
7. R. Dyer, Biometrika, 61, № 1, 185 (1974).
8. R. B. D'Agostino, Biometrika, 61, № 1, 181 (1974).
9. W. Hoeffding, Ann. Math. Statist., 19, 546 (1948).
10. А. А. Горбачев, А. П. Колданов, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 19, № 9, 58 (1976).
11. R. C. Geary, Biometrika, 34, 209 (1947).
12. S. O. Rice, IEEE Trans. Communs., 22, № 6, 851 (1974).
13. Л. Н. Большев, И. В. Смирнов, Таблицы математической статистики, изд. Наука, М., 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
30 марта 1976 г.

УДК 538.56 : 519.259

## МНОГОМЕРНОЕ ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СОВОКУПНОСТИ ПАРАМЕТРОВ

Г. У. Матушанский, Т. К. Нежметдинов

Пусть в  $k$ -мерном пространстве измеряется неизвестный вектор параметров  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  и производится  $N$  независимых измерений этих параметров  $(x_{1v}, \dots, x_{kv})$ ,  $v = 1, 2, \dots, N$ . Необходимо построить  $(100-p)$ -процентную доверительную область для вектора  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  по  $N$  измерениям.

Ранее при решении аналогичных задач строили многомерный параллелепипед со сторонами, равными доверительным интервалам, полученным с помощью распределения Стьюдента. Однако задачу построения доверительной области можно решить с помощью случайной величины  $T^2$ , подчиняющейся распределению Хотеллинга. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N x_{iv}, & l_{ij} &= s_i s_j r_{ij} = \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{v=1}^N (x_{iv} - \bar{x}_i)(x_{jv} - \bar{x}_j), & l_{ii} &= s_i^2 = \frac{1}{N-1} (x_{iv} - \bar{x}_i)^2. \end{aligned}$$

Здесь средние значения  $\bar{x}_i$  являются оценками неизвестных математических ожиданий  $\mu_i$ , выборочные дисперсии  $s_i^2$  оценивают дисперсии  $\sigma_i^2$  генеральной совокупности, а выборочные коэффициенты корреляции  $r_{ij}$  представляют собой оценки  $\rho_{ij}$ . В этих обозначениях случайная величина  $T^2$  равна [1]

$$T^2 = (N-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k l_{ij}^{-1} (\bar{x}_i - \mu_i)(\bar{x}_j - \mu_j), \quad (1)$$

где  $l_{ij}^{-1}$  — элемент матрицы, обратной к матрице  $\|l_{ij}\|$ , имеет распределение  $T^2$  Хотеллинга с элементом вероятности

$$f(T^2)dT^2 = \frac{\Gamma(N/2)}{(N-1)^{k/2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N-k}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{N-1}\right)^{-N/2} (T^2)^{k/2-1} dT^2. \quad (2)$$

При  $k = 1$  распределение (2) превращается в положительную половину обычного распределения Стьюдента с  $N - 1$  степенями свободы.

Пусть  $T_p^2$  есть  $p$ -процентное критическое значение распределения  $T^2$  Хотеллинга (2), тогда  $(100-p)$ -процентной доверительной областью для неизвестного вектора  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  будет эллипсоид, удовлетворяющий соотношению  $T^2 < T_p^2$ , где  $T^2$  определено в (1). Как известно из [1], объем  $k$ -мерного эллипсоида  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} x_i x_j < c^2$  выражается формулой

$$V = \frac{(\pi c^2)^{k/2}}{\Gamma(k/2 + 1) \sqrt{A}}, \quad (3)$$

где  $A = \det \|a_{ij}\|$ . Подставляя в (3) нужные нам значения, после некоторых вычислений получим

$$V_1 = \frac{(\pi T_p^2)^{k/2} \sqrt{\det \|l_{ij}\|}}{\Gamma(k/2 + 1) (N-1)^{k/2}}. \quad (4)$$

Описанную выше задачу можно обобщить на случай интервальной оценки совокупности параметров, измеряющихся разными приборами с неодинаковой точностью, т. е. перейти к частной задаче комплексирования.

Предположим, что искомым вектор параметров  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  в  $k$ -мерном пространстве измерений определяется  $m$  разноточными приборами, каждый  $f$ -й из которых делает  $n_f$  независимых равноточных измерений  $(x_{1f}^{(j)}, \dots, x_{kf}^{(j)})$ ,  $v = 1, 2, \dots, n_f$ . Необходимо построить  $(100-p)$ -процентную доверительную область для вектора  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  по  $N = n_1 + \dots + n_f + \dots + n_m$  измерениям.

Для решения задачи предлагается с помощью статистики  $T^2$  Хотеллинга строить  $m$  разновеликих доверительных эллипсоидов (4). Далее, объемы указанных эллипсоидов нормируются и находится результирующий среднестатистический доверительный эллипсоид от  $m$  одинаковых средневзвешенных. Объем последнего после некоторых вычислений получается равным

$$V_2 = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2 + 1) m^{k/2}} \frac{\sum_{j=1}^m b_j \frac{T_p^k}{(n_f - 1)^{k/2}} \sqrt{\det \|l_{ij}^{(j)}\|}}{\sum_{j=1}^m b_j}, \quad (5)$$

$b_f$  определяется из выражения

$$b_f = \frac{n_f - 1}{T_p^k \sqrt{\det \|l_{ij}^{(j)}\|}}.$$

Предлагаемый метод построения доверительных областей в форме эллипсоида является более эффективным, чем метод построения доверительных параллелепипедов. При сравнении указанных объемов получим

$$\frac{V_1}{V_n} = \frac{1}{\Gamma(k/2 + 1)} \left( \frac{\sqrt{\pi} T_p}{2t_q} \right)^k \sqrt{\frac{(N-2) \dots (N-k)}{(N-1)^{k-1}}}, \quad (6)$$

где  $V_n$  — объем доверительного параллелепипеда,  $t_q$  —  $q$ -процентное критическое значение распределения Стьюдента. Отношение (6) всегда меньше единицы. В частности, при  $k = 3$  и  $p = 95\%$  оно равно 0,69.

Полученные в статье результаты могут применяться при вторичной обработке сигналов в радиоастрономических и радиолокационных системах, представляющих комплекс из нескольких приемников с единым центром обработки информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Крамер, Математические методы статистики, изд. Мир, М., 1975.

Казанский государственный университет

Потсупила в редакцию  
23 февраля 1976 г.

## СМЕСИТЕЛЬ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ВОЛН С СЕЛЕКЦИЕЙ ЗЕРКАЛЬНОГО КАНАЛА ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Ю. А. Дрягин, Л. В. Лубяко

Смесительный узел современного микроволнового супергетеродинного приемника обычно является многофункциональным устройством, в котором наряду с преобразованием частоты осуществляется подавление шумов гетеродина и селекция зеркального канала. Методы решения этих задач в разных диапазонах различны. В миллиметровом диапазоне, например, где в последние годы наблюдается тенденция повышения промежуточной частоты (ПЧ), для этой цели успешно используются интерферометрические фильтры [1-3], что позволяет избегать здесь трудности балансных схем.

Рассмотрим схему такого типа, где, по нашему мнению, задача селекции зеркального канала решается наиболее удачно (рис. 1). На входы интерферометра Цендера—Маха с разностью хода  $\Delta_1 = c/2(f_c - f_r) = \Delta_{\text{пр}}/2$  подводятся сигнал (в обоих боковых каналах, т. е. на частотах  $f_c = f_r - F_{\text{пр}}$  и  $f_s = f_r + F_{\text{пр}}$ ) и колебания гетеродина (плечи 1 и 2). Шум гетеродина на частотах  $f_c$  и  $f_s$  отфильтровывается в плече 3, а сигналы обоих зеркальных каналов и гетеродина суммируются в плече 4. Образовавшийся сигнал целесообразно до преобразования пропустить сквозь еще один интерферометр того же типа, но с разностью хода, равной  $\Delta_2 = c/4(f_r - f_c) = \Delta_{\text{пр}}/4$ . Характерный частотный период функции передачи такого фильтра  $2(f_r - f_c) = 2F_{\text{пр}}$ , поэтому мощность гетеродина в плечах 7 и 8 делится пополам, а рабочий и зеркальный каналы разветвятся (на рис. 1, это показано в виде условных спектральных диаграмм).

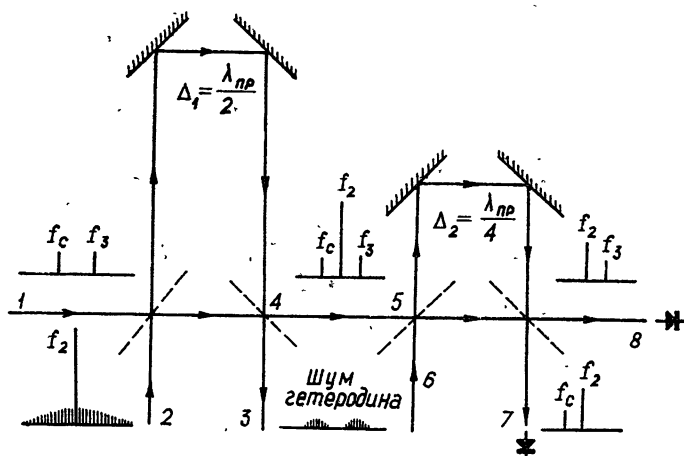


Рис. 1. Схема включения интерферометров в смесителе ( $f_c, f_s, f_r$  и ШГ—спектральные компоненты принимаемого и гетеродинного сигналов).

Смеситель по такой схеме был собран и испытан в двухмиллиметровом диапазоне длин волн. Усилитель ПЧ в дециметровом диапазоне при средней частоте 850 МГц имел полосу 400 МГц и шум-фактор 3,5 дБ, поэтому интерферометры имели разность хода соответственно 173 и 86 мм. Собственно смеситель — арсенидгаллиевый диод с барьером Шоттки. Гетеродин и измерительный генератор (снабженный калибровочным аттенуатором) — лампы обратной волны. Измеренная величина развязки между каналами составила не менее 20 дБ во всей полосе ПЧ, что для широкого класса задач позволяет считать их независимыми и осуществлять независимый прием по обоим боковым.

Кроме того, была измерена шумовая температура приемника как в одноканальном режиме, так и в двухканальном (с отключенным вторым интерферометром). В качестве источника шумового сигнала использовалась ртутная лампа типа ПРК-4 (температура ее в двухмиллиметровом диапазоне измерена и составляет ~ 2400 К). Полученные величины 5300 и 3800 К отличаются не в два раза, что, по-видимому, связано с недостаточно полным подавлением шумов гетеродина в двухканальном режиме.

В заключение отметим, что рассматриваемая схема обладает еще одной любопытной особенностью. Как известно, главными продуктами нелинейного преобразования двух частот будут: разностная (промежуточная) и зеркальная частоты. Таким образом, каждый смеситель на выходах 7 и 8 генерирует перекрестные зеркальные сигналы, которые отражаются в высокочастотный тракт и, в силу взаимности коэффициентов передачи второго интерферометра, оба проходят в плечо 6. Если здесь установить поршень и отправить эти сигналы в нужной фазе обратно (т. е. запереть смеситель по зеркальной частоте), то можно надеяться преодолеть пресловутый 3 дБ порог в потерях преобразования на нелинейной резистивности. Эксперимент с поршнем, однако, не дал достаточно убедительного результата: изменение чувствительности при перемещении поршня не превышало 10%. Это связано с тем, что потери преобразования миллиметровых смесителей (8—9 дБ) пока далеки от пороговых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Федосеев, Ю. Ю. Куликов, Радиотехника и электроника, 16, № 4, 554 (1971).
2. Ю. А. Дрягин, Л. М. Кукин, Л. В. Лубяко, Радиотехника и электроника, 19, № 8, 1779 (1974).
3. Ю. Ю. Куликов, А. А. Швецов, Астрономический журнал, 52, вып. 1 (1975).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
26 октября 1976 г.