

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| Лотова Н. А., Чашей И. В. Дисперсионный анализ скорости солнечного ветра   | 329 |
| Безродный В. Г., Шубова Р. С. О влиянии многомодовости волноводного канала Земля—ионосфера на корреляционные соотношения СДВ сигналов        | 337 |
| Попов В. С. Некогерентное отражение электромагнитных волн от двухтемпературной электронно-ионной плазмы . . . . .                            | 342 |
| Гусев Г. А., Пустовалов В. В., Силин В. П. Насыщение параметрической неустойчивости с многосвязной областью раскачки . . . . .               | 353 |
| Горшков К. А., Папко В. В. Неадиабатическая стадия затухания солитонов и промежуточные асимптотики . . . . .                                 | 360 |
| Богатырев Ю. К. Автоколебания в волновых периодически-активных структурах  | 366 |
| Барабаненков Ю. Н., Калинин М. И. Об усреднении по времени в теории линейных динамических систем со случайными параметрами . . . . .         | 373 |
| Найда О. Н. Равномерная геометрооптическая аппроксимация линейных систем вдоль лучей переменной кратности . . . . .                          | 383 |
| Свиркунов П. Н. Распространение электромагнитного излучения в случайно-неоднородной среде пуассоновского типа . . . . .                      | 399 |
| Бочков Г. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н. Структура корреляционной зависимости нелинейных стохастических функционалов . . . . .              | 406 |
| Карплюк К. С. Дифракция ионно-звуковых волн на проводящей полуплоскости  | 413 |
| Муратов Р. З., Виноградов А. Г. Скалярная задача дифракции на эллипсоиде (низкочастотное приближение) . . . . .                              | 422 |
| Сморгонский В. Я., Илларионов Ю. А. Анализ многомодового режима двухслойного круглого волновода . . . . .                                    | 435 |
| Насонов Н. Н., Шендерович А. М. К теории продольной неустойчивости электронного пучка в волноводе с магнитоактивным диэлектриком . . . . .   | 444 |
| Велиев Э. И., Носич А. И., Шестopalов В. П. Излучение потока электронов, движущихся над решеткой из цилиндров с продольными щелями . . . . . | 451 |
| Зарница И. Г., Нусинович Г. С. Конкуренция мод, резонансных с разными гармониками циклотронной частоты, в гиромонотронах . . . . .           | 461 |
| Белов В. Е., Родыгин Л. В. К вопросу об устойчивости двухпоточных состояний в магнетроне. I . . . . .  | 468 |
| <b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>   |     |
| Данилов В. И. Об ограничении импульсных помех в модуляционном радиометре . . . . .   | 481 |

УДК 551.521.67

## ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ СКОРОСТИ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

*H. A. Лотова, И. В. Чашей*

По наблюдениям межпланетных мерцаний в трех пунктах проведен дисперсионный анализ скорости солнечного ветра и получены прямые оценки дисперсии скоростей  $\sigma = (0,25 \div 0,30) \langle V \rangle$ . Найдено, что дисперсия скоростей испытывает значительные изменения день ото дня. Определена область частот, в которой необходим учет дисперсии скоростей при определении пространственного спектра неоднородностей по временемому спектру мерцаний.

Развитие представлений о существовании в солнечном ветре структуры скоростей было стимулировано экспериментами по изучению кажущихся скоростей картины межпланетных мерцаний [1-4]. В экспериментах [1-4] измерялась интегральная по лучу зрения скорость неоднородностей  $V_k$ , которая, как оказалось, хорошо коррелирует с изменениями скорости протонной компоненты солнечного ветра  $V_w$ , полученными по измерениям на спутниках [5]. Однако скорости  $V_w$  и  $V_k$  численно различаются примерно на 5-10%, причем  $V_k < V_w$  [4]. Обсуждение возможных причин такого различия привело к отказу от предположения о вмороженности дифракционной картины и к подробному теоретическому анализу тонкой структуры скоростей в солнечном ветре [6-11].

Экспериментальное доказательство существования на луче зрения дисперсии скоростей  $\sigma$  было получено в работах [12-14]. В работе [14] было установлено, что наличие на луче зрения тонкой структуры скоростей является постоянным свойством солнечного ветра. Однако при этом оставались неясными величина  $\sigma$  и ее природа. Косвенные оценки  $\sigma$  были выполнены в работе [5] путем сравнения кажущихся скоростей [6]

$$V_k = \langle V \rangle + \frac{\sigma^2}{\langle V \rangle} \quad (1)$$

со скоростями протонной компоненты  $V_w$  и показали, что  $\sigma \approx 0,25 \div 0,30 \langle V \rangle$ .

Для прямых оценок  $\sigma$  и выяснения природы разброса скоростей можно использовать метод дисперсионного анализа [7, 8, 11].

### 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Дисперсионный анализ скорости солнечного ветра заключается в изучении зависимости  $V(\omega)$  скорости гармоник временного спектра флюктуаций интенсивности от частоты  $\omega$ . Зависимость  $V(\omega)$  связана с временным кросс-спектром мерцаний

$$P_c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int B(r, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (2)$$

соотношением [8]

$$V(\omega) = \frac{\omega r}{\Phi(\omega)}, \quad (3)$$

где  $r$  — расстояние между пунктами наблюдения,  $B(r, \tau) = \langle \delta I(0, t) \times \times \delta I(r, t + \tau) \rangle$  — кросс-корреляционная функция флуктуаций интенсивности  $\delta I(r, t)$ ,  $\Phi(\omega)$  — фаза кросс-спектра  $P_c(\omega)$ , равная

$$\Phi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} P_c(\omega)}{\operatorname{Re} P_c(\omega)}. \quad (4)$$

В формуле (2) предполагается, что направление скорости неоднородностей  $V$  совпадает с направлением базы  $r$ .

Предполагается, что в среде скорости неоднородностей распределены по некоторому закону  $\varphi(V)$  со средней скоростью  $\langle V \rangle = \int V \varphi(V) dV$  и дисперсией  $\sigma^2 = [\int (V - \langle V \rangle)^2 \varphi(V) dV]^{1/2}$ . Тогда в режиме слабых мерцаний ( $\langle \delta I^2 \rangle \ll \langle I \rangle^2$ ) спектр  $P_c(\omega)$  имеет вид [15]

$$P_c(\omega) = \int \frac{1}{V} P_a \left( \frac{\omega}{V} \right) \varphi(V) \exp \left( i \frac{\omega r}{V} \right) dV, \quad (5)$$

где  $P_a(\omega/V)$  — временной автокорреляционный спектр мерцаний, соответствующий скорости  $V$ :

$$P_a \left( \frac{\omega}{V} \right) = \int M \left( q_x \frac{\omega}{V} = \frac{\omega}{V}, q_y, q_z = 0 \right) dq_y, \quad (6)$$

$M(q_x, q_y, q_z = 0)$  — пространственный спектр мерцаний. Соотношения (2) — (6) устанавливают соответствие между временным кросс-спектром  $P_c(\omega)$  и функцией распределения скоростей  $\varphi(V)$ .

Вид зависимости  $V(\omega)$  (3) теоретически рассматривался в работах [10, 15] для различных моделей рассеивающей среды: среда с двумя характерными скоростями, сферически симметричный солнечный ветер, произвольное распределение скоростей. Было показано, что при слабой дисперсии скоростей ( $\sigma \ll \langle V \rangle$ ) зависимость  $V(\omega)$  является растущей и в области низких частот близка к линейной.

Конкретный вид функции  $V(\omega)$  зависит от распределения скоростей  $\varphi(V)$ . Рассмотрим два примера распределения  $\varphi(V)$ : ограниченное распределение скоростей

$$\varphi(V) = \begin{cases} (\beta+1) \left( \frac{V}{V_0} \right)^\beta \frac{1}{V_0} & (V < V_0) \\ 0 & (V > V_0) \end{cases}, \quad (7)$$

которое означает, что на луче зрения отсутствуют скорости, большие  $V_0$ , и нормальное распределение

$$\varphi(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(V - \langle V \rangle)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (8)$$

Используя соотношения (5), (6), можно показать, что в области низких частот ( $\omega \rightarrow 0$ ) скорость гармоник временного спектра равна [15]

$$V(\omega \rightarrow 0) = \frac{\langle V^{-1} \rangle}{\langle V^{-2} \rangle}, \quad (9)$$

где  $\langle V^{-k} \rangle = \int V^{-k} \varphi(V) dV$ . Для распределений (7) и (8) значение  $V(0)$  равно соответственно

$$V(0) = \frac{\beta - 1}{\beta} V_0 \quad (10)$$

и

$$V(0) = \langle V \rangle \left( 1 - 2 \frac{\sigma^2}{\langle V \rangle^2} \right). \quad (11)$$

Предположим теперь, что пространственный спектр неоднородностей  $M(q)$  в области частот  $q \geq q_f$  ( $q_f = \sqrt{2 k/z}$  — частота Френеля) имеет степенной вид  $M(q) \sim q^{-\alpha}$ . Тогда можно показать, что на высоких частотах  $\omega \gg q_f \langle V \rangle$  дисперсионная зависимость  $V(\omega)$  выходит на постоянный уровень  $V(\omega) = V_{\max} = \text{const}$  [15], причем

$$V_{\max} = V_0 \quad (12)$$

для распределения  $\varphi(V)$  (7) и

$$V_{\max} = \langle V \rangle \left( 1 + \frac{\alpha \sigma^2}{\langle V \rangle^2} \right) \quad (13)$$

— для распределения  $\varphi(V)$  (8), где  $\alpha$  — показатель степени трехмерного пространственного спектра неоднородностей. Если из эксперимента известно значение  $V(\omega)$  на низких ( $\omega \rightarrow 0$ ) и высоких частотах, то соотношения (10), (12) позволяют определить  $V_0$ ,  $\beta$  и относительную дисперсию скоростей  $\sigma/\langle V \rangle$  для распределения (7):

$$\frac{V(0)}{V_{\max}} = \frac{\beta - 1}{\beta}, \quad \frac{\sigma}{\langle V \rangle} = [(\beta + 1)(\beta + 3)]^{-1/2}. \quad (14)$$

Аналогично для распределения  $\varphi(V)$  вида (8) имеем из (11), (13)

$$\frac{\sigma}{\langle V \rangle} = \left[ \left( 1 - \frac{V(0)}{V_{\max}} \right) \right]^{1/2} \left[ \left( 2 + \alpha \frac{V(0)}{V_{\max}} \right) \right]^{-1/2}. \quad (15)$$

Формулы (14), (15) позволяют произвести оценку дисперсии скоростей по известному разбросу скоростей в дисперсионной зависимости  $V(\omega)$ . Следует заметить, что определение из эксперимента относительной дисперсии скоростей  $\sigma/\langle V \rangle$  удобнее, чем определение  $\sigma$ , так как при этом нет необходимости учитывать взаимную ориентацию базы  $r$  и скорости  $V$ .

## 2. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Развитый выше метод дисперсионного анализа был применен к трехпунктовым наблюдениям мерцаний источников ЗС-144 и ЗС-48, проведенным в Калифорнийском университете (Сан Диего, США) на волне 74 МГц с базами  $r \approx 90$  км [5]. Для четырех дней наблюдений (2, 10, 12 и 17 мая 1975 г.) были получены дисперсионные зависимости  $V(\omega)$ , соответствующие (3). Из трех кривых  $V(\omega)$ , которые могут быть получены для каждого сеанса наблюдений, к анализу привлекалась только одна, для которой угол между скоростью неоднородностей  $V$  и базой  $r$  был минимален. Эти зависимости  $V(\omega)$  приведены на рис. 1, 2.

Дисперсионные кривые  $V(\omega)$  (рис. 1, 2) позволяют сделать следующие выводы. Для всех кривых  $V(\omega)$  характерен рост  $V$  с ростом  $\omega$ , что находится в согласии с результатами модельных расчетов [6–11]. Зави-

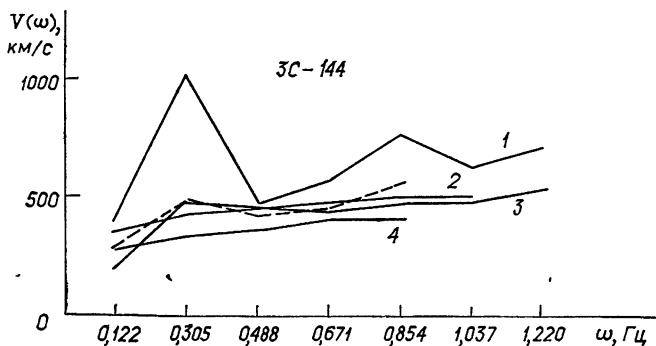


Рис. 1. Дисперсионные зависимости  $V(\omega)$  для источника 3С-144:  
1 — 2.05.75 г., 2 — 10.05.75 г., 3 — 17.05.75 г., 4 — 12.05.75 г.  
Пунктиром проведена зависимость  $\langle V(\omega) \rangle$ .

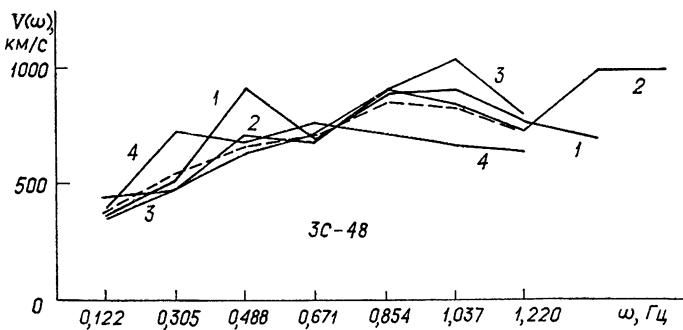


Рис. 2. Дисперсионные зависимости  $V(\omega)$  для источника 3С-48:  
1 — 2.05.75 г., 2 — 10.05.75 г., 3 — 12.05.75 г., 4 — 17.05.75 г.  
Пунктиром проведена зависимость  $\langle V(\omega) \rangle$ .

смость  $V(\omega)$  для каждого из источников испытывает достаточно сильные изменения день ото дня. Наблюдаемые изменения  $V(\omega)$  превосходят среднеквадратичную ошибку  $\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta \Phi}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} \left[ \frac{I}{2T} \left( \frac{1}{\kappa_{12}^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \approx 0,1$  [16]

(где  $\Phi$  — фаза кросс-спектра (4),  $I/T \approx 200$  — фактор сглаживания,  $\kappa_{12}^2$  — когерентность мерцаний в двух пунктах), связанную с конечностью интервала наблюдения  $T \sim 1$  час. Поэтому можно предположить, что характер кривых на рис. 1, 2 отражает реальное изменение структуры скоростей на уровне зрения. Сравнение между собой рис. 1 и 2 для источников 3С-144 (источник в плоскости эклиптики, гелиоширота  $\phi \approx 0^\circ$ ) и 3С-48 (высокоширотный источник,  $\phi \approx 60 \div 70^\circ$ ) показывает, что скорости неоднородностей  $\langle V \rangle$  и абсолютный разброс скоростей  $\sigma$  на высоких широтах значительно выше, чем на низких. Последнее согласуется с выводом работ [17, 18] о том, что скорость солнечного ветра увеличивается с гелиоширотой, и работы [19], где установлено, что вариации скорости дифракционной картины  $V_k$  от сеанса к сеансу для источника 3С-48 сильнее, чем для источника 3С-144. Эффект возрастания разброса скоростей с гелиоширотой можно объяснить тем, что разброс скоростей солнечного ветра на высоких широтах сильнее, чем на низких.

В работе [9] была получена функция распределения скоростей

$$\varphi(V) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 (V_0^2 - V^2)^{-1/2} & (V < V_0) \\ 0 & (V > V_0) \end{cases} \quad (16)$$

для модели сферически симметричного солнечного ветра, в которой разброс скоростей связан только с изменением проекции скорости на картируемую плоскость вдоль луча зрения. При этом дисперсия скоростей  $\sigma/\langle V \rangle \approx 0,20\%$  и дисперсионная зависимость выходит на постоянный уровень  $V(\omega) = V_0$  [10, 15]. Сравнение теоретической кривой  $V(\omega)$  с зависимостями, приведенными на рис. 1, 2, показывает, что только кривые 2 и 4 на рис. 1 не противоречат модели сферически симметричного ветра. Для этих кривых  $0,17 < \frac{\sigma}{\langle V \rangle} < 0,22$  (табл. 1). Во всех остальных

случаях относительная дисперсия скоростей превышает 20%. Это говорит о том, что наблюдаемая дисперсия скоростей не может быть объяснена геометрическим эффектом и помимо геометрического эффекта имеет место реальный разброс скоростей в среде.

Таблица 1

## 3С - 144

| Дата    | $\frac{\sigma_1}{\langle V \rangle}$ | $\frac{\sigma_2}{\langle V \rangle}$ | $V_k, \text{ км/с}$ | $\langle V \rangle, \text{ км/с}$ | $V_m, \text{ км/с}$ |
|---------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------|-----------------------------------|---------------------|
| 2.05.75 | 0,28                                 | 0,37                                 | 510                 | 464                               | 458                 |
| 10.05   | 0,19                                 | 0,22                                 | 425                 | 409                               | 368                 |
| 12.05   | 0,17                                 | 0,20                                 | 318                 | 306                               | 252                 |
| 17.05   | 0,28                                 | 0,37                                 | 423                 | 384                               | 391                 |
| Среднее | 0,23                                 | 0,29                                 | 419                 | 393                               | 367                 |

Далее, дисперсионные кривые  $V(\omega)$  (рис. 1, 2) можно разделить на три типа: 1) кривые с выходом на примерно постоянный уровень (кривые 2, 3, 4 на рис. 1 и кривые 1, 4 на рис. 2); 2) монотонно растущие (кривые 2, 3 на рис. 2) и 3) с резкими выбросами (кривая 1 на рис. 1). Зависимости первого типа соответствуют функции распределения скоростей вида (7). Для таких зависимостей при восстановлении пространственного спектра  $M(q)$  по временному автоспектру мерцаний  $P_a(\omega)$  [20] можно пренебречь дисперсией скоростей в области частот  $\omega > \omega_*$  ( $\omega_* \approx 0,5 \text{ Гц}$ —частота, при которой дисперсионная зависимость выходит на плато). Зависимости  $V(\omega)$  второго типа можно, например, объяснить тем, что в распределении  $\varphi(V)$  имеется высокоскоростной «хвост». Такое поведение кривых  $V(\omega)$  характерно для высоких широт. В этом случае при определении пространственного спектра  $M(q)$  в области частот  $\omega < 1 \text{ Гц}$  нельзя пренебречь разбросом скоростей, который будет заметно искажать вид спектра  $P_a(\omega)$ . Конкретный вид зависимости  $V(\omega)$  определяет область частот, где необходима коррекция временного спектра с учетом дисперсии скоростей. Наконец, резкий выброс на кривой  $V(\omega)$  третьего типа может быть интерпретирован как присутствие на луче зрения ускоренного потока.

Перейдем к численным оценкам дисперсии скоростей  $\sigma^*$ . Зависи-

\* При получении численных оценок  $\sigma$  предполагается, что зависимость скорости картины мерцаний от частоты  $V(\omega)$  обусловлена мгновенной структурой скоростей на луче зрения. Возможность такого предположения связана со следующими обстоятельствами: 1) спектры мерцаний получены в результате сильного слаживания (число усредняемых спектров  $\approx 200$ ); 2) скорости дрейфа с высокой степенью точности являются стационарными на интервале  $\sim 1 \text{ час}$  [22]; 3) характерные скорости собственных движений в межпланетной плазме на расстояниях от Солнца выше 0,5 а. е. значительно меньше наблюдаемого разброса скоростей  $\Delta V(\omega)$ .

мость  $V(\omega)$  (рис. 1, 2) позволяет определить скорости  $V(\omega \rightarrow 0)$  и  $V_{\max}$ , входящие в формулы (14), (15). Принимая  $\alpha = 3$  [2], получим оценки ежедневной относительной дисперсии скоростей  $\sigma_1/\langle V \rangle$  распределения (7) и  $\sigma_2/\langle V \rangle$  распределения (8). Далее, зная кажущуюся скорость  $V_k$  (1) и относительную дисперсию скоростей  $\sigma/\langle V \rangle$ , можно получить среднюю скорость неоднородностей  $\langle V \rangle$ . Соответствующие значения  $\sigma_{1,2}/\langle V \rangle$ ,  $V_k$  и  $\langle V \rangle$  приведены в табл. 1, 2. В табл. 1, 2 приведены также значения скорости  $V_m$ , вычисленной по среднему (по уровню 1/2) сдвигу кросс-корреляционной функции  $B(r, \tau)$ .

Таблица 2

| Дата    | 3С-48                                |                                      |                    |                                  |                    |
|---------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------|----------------------------------|--------------------|
|         | $\frac{\sigma_1}{\langle V \rangle}$ | $\frac{\sigma_2}{\langle V \rangle}$ | $V_k, \text{км/с}$ | $\langle V \rangle, \text{км/с}$ | $V_m, \text{км/с}$ |
| 2.05.75 | 0,28                                 | 0,37                                 | 733                | 666                              | 655                |
| 10.05   | 0,26                                 | 0,31                                 | 766                | 710                              | 662                |
| 12.05   | 0,28                                 | 0,37                                 | 743                | 674                              | 587                |
| 17.05   | 0,24                                 | 0,28                                 | 706                | 660                              | 713                |
| Среднее | 0,26                                 | 0,33                                 | 737                | 676                              | 654                |

Из табл. 1, 2 видно, что оценки дисперсии скоростей для распределения (8) превышают аналогичные величины для распределения (7),  $\frac{\sigma_1}{\langle V \rangle} < \frac{\sigma_2}{\langle V \rangle}$ . Ошибка в определении  $\frac{\sigma}{\langle V \rangle}$  по индивидуальной зависимости  $V(\omega)$ , связанная с конечностью интервала наблюдения, составляет 0,03. Поэтому из данных табл. 1, 2 можно получить оценку для средней дисперсии скоростей: по источнику 3С-144

$$\frac{\sigma}{\langle V \rangle} = 0,26 \pm 0,05 \quad (17)$$

и по источнику 3С-48 —

$$\frac{\sigma}{\langle V \rangle} = 0,30 \pm 0,05, \quad (18)$$

где ошибка определяется конечностью интервала наблюдения и неопределенностью в функции распределения скоростей  $\varphi(V)$ . Сравнение (17) и (18) показывает, что относительная дисперсия скоростей на высоких широтах (3С-48) в среднем незначительно превышает  $\frac{\sigma}{\langle V \rangle}$  на низких широтах (3С-144), в то время как абсолютные значения дисперсии различаются примерно вдвое. Из данных табл. 1, 2 видно, что средняя скорость  $\langle V \rangle$ , полученная с учетом  $\sigma$ , как правило, оказывается выше, чем скорость  $V_m$ , определенная по среднему сдвигу  $B(r, \tau)$ .

На рис. 1, 2 пунктиром проведены зависимости  $\langle \dot{V}(\omega) \rangle$ , усредненные по четырем дням наблюдений. Значения дисперсии скоростей, полученные по усредненной зависимости  $\langle \dot{V}(\omega) \rangle$ , хорошо совпадают со средними оценками  $\frac{\sigma}{\langle V \rangle}$ , найденными путем усреднения индивидуальных значений  $\frac{\sigma}{\langle V \rangle}$ .

Таким образом, проведен дисперсионный анализ скорости солнечного ветра по картине межпланетных мерцаний, который позволяет получить прямую оценку дисперсии скоростей  $\sigma = (0.25 \div 0.30) \langle V \rangle$ . Эта оценка  $\sigma$  хорошо согласуется с косвенной оценкой [5], полученной из сравнения кажущейся скорости  $V_k$  со скоростью протонной компоненты солнечного ветра, найденной по наблюдениям на спутниках. Абсолютный разброс скоростей картины мерцаний возрастает с гелиоширотой, что связано с ростом разброса скоростей в солнечном ветре. Этот эффект сопровождается ростом средней скорости неоднородностей. Структура скоростей на личе зрения меняется день ото дня. Дисперсия скоростей  $\sigma$  является важной характеристикой картины мерцаний, и ее учет необходим при определении пространственного спектра неоднородностей по временному спектру мерцаний, а также при определении средней скорости неоднородностей. При этом дисперсионный анализ позволяет определить область частот  $\omega$ , где необходим учет дисперсии скоростей при получении пространственного спектра неоднородностей по временному спектру межпланетных мерцаний. Дисперсионный анализ включает эффекты второго порядка малости по  $\sigma/\langle V \rangle$  и позволяет получать ежедневные значения дисперсии скоростей, что недоступно другим методам.

Авторы признательны В. А. Коулзу за любезно предоставленные результаты наблюдений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Виткевич, В. И. Власов, Астрон. щиркуляр, № 396 (1966).
2. В. Виткевич, В. И. Власов, Астрон. ж., 46, 851 (1969).
3. P. A. Denissen and A. Hewish, Nature, 213, 343 (1967).
4. A. Hewish and P. A. Denissen, J. Geophys. Res., 72, 1977 (1967).
5. J. W. Armstrong and W. A. Coles, J. Geophys. Res., 77, 4602 (1972).
6. Н. А. Лотова, И. В. Чашей, Астрон. ж., 50, 348 (1973).
7. Н. А. Лотова, И. В. Чашей, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, 491 (1974).
8. N. A. Lotova and I. V. Chashey, Astrophys. Sp. Sci., 20, 251 (1973).
9. Н. А. Лотова, И. В. Чашей, Радиотехника и электроника, 20, 1777 (1975).
10. Н. А. Лотова, И. В. Чашей, Геомагнетизм и аэрономия, 13, 998 (1973).
11. N. A. Lotova, I. V. Chashey, Solar Wind III, ed. by C. T. Russel, Los Angeles, Univ. of Calif., 1974, p. 375.
12. M. G. Golley and P. A. Denissen, Plan. Sp. Sci., 18, 95 (1970).
13. L. T. Little and R. D. Ekers, Astron. Astrophys., 10, 310 (1971).
14. Н. А. Лотова, Н. В. Верещагина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, 1645 (1973).
15. Н. А. Лотова, И. В. Чашей, Геомагнетизм и аэрономия, 15, 769 (1975).
16. Г. Дженинс, Д. Ваттс, Спектральный анализ и его приложения, вып. 2, М., 1972.
17. T. Watanabe, K. Shibasaki and T. Kakinuma, J. Geophys. Res., 79, 3841 (1974).
18. А. И. Ефимов, Н. А. Лотова, Космические исследования, 13, 603 (1975).
19. W. A. Coles and S. Maagoe, J. Geophys. Res., 77, 5622 (1972).
20. И. В. Чашей, Астрон. ж., 52, 365 (1975).
21. W. A. Coles, B. J. Rickett and V. H. Rumsey, Solar Wind III, ed. by C. T. Russel, Los Angeles, Univ. of Calif., 1974, p. 351.
22. J. W. Armstrong, Phil. Thes. Univ. of Calif., USA, 1975.

## DISPERSION ANALYSIS OF THE SOLAR WIND VELOCITY

*N. A. Lotova, I. V. Chashey*

The dispersion analysis has been made of the solar wind velocity from observations of interplanetary scintillations at three sites. Direct estimations of the velocity dispersion  $\sigma = (0,25 \pm 0,30) \langle V \rangle$  are obtained. The velocity dispersion is found to undergo considerable variations from day to day. The frequency region is determined in which the velocity dispersion is necessary to take into account in determination of the spatial spectrum of inhomogeneities from the scintillation time spectrum.

---

УДК 621.371.25

## О ВЛИЯНИИ МНОГОМОДОВОСТИ ВОЛНОВОДНОГО КАНАЛА ЗЕМЛЯ—ИОНОСФЕРА НА КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ СДВ СИГНАЛОВ

*B. Г. Безродный, Р. С. Шубова*

Показано, что знаки корреляционных соотношений СДВ сигналов в волноводе Земля—ионосфера жестко связаны с положением наблюдателя относительно интерференционной картины поля и сложным образом зависят от дистанции и частоты.

Многомодовость волноводного канала Земля—ионосфера в диапазоне сверхдлинных радиоволн (10—30 кГц) приводит к тому, что вдоль дистанции картина распределения поля носит интерференционный характер. В работах [1, 2] было показано, что это в свою очередь оказывает влияние на все статистические характеристики сигнала (средние значения, дисперсии, корреляционные функции и т. п.). В настоящем сообщении мы остановимся на более детальном исследовании одного из указанных явлений и рассмотрим вопрос о влиянии многомодовости волноводного канала на знаки различных корреляционных соотношений. Этот вопрос представляет, на наш взгляд, значительный практический интерес, поскольку с необходимостью его решения неизбежно придется столкнуться при экспериментальном исследовании флуктуаций СДВ сигналов в волноводе Земля—ионосфера.

Поставленную задачу будем решать на простой модели двухмодового волновода. Такая модель, во-первых, удобна тем, что позволяет выяснить основные качественные закономерности исследуемого статистического явления, используя минимальное число параметров для характеристики регулярного волноводного поля. Во-вторых, практически для всех частот СДВ диапазона можно указать протяженные интервалы дистанций (порядка тысяч километров), на которых такой двухмодовый режим реализуется (см., например, [3]). В соответствии со сказанным представим поле  $E$  в точке приема в виде

$$E = E_1 e^{i\varphi_1} (1 + ae^{i\varphi}) = Ae^{i\Psi}, \quad (1)$$

где  $a = E_2/E_1$ ,  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $E_{1,2}$  и  $\varphi_{1,2}$  — амплитуды и фазы первой и второй мод. На основании анализа регулярных СДВ полей приходим к выводу, что изменения параметров волноводного канала (например, его высоты) более существенно сказываются на характеристиках распространения второй моды [3]. Поэтому будем считать, что вариации амплитуды  $\delta A$  и фазы  $\delta\Psi$  результирующего поля обусловлены только флуктуациями  $\delta E_2$ ,  $\delta\varphi_2$  или, что то же, флуктуациями  $\delta a$  соотношения амплитуд и  $\delta\varphi$  разности фаз мод:

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial a} \delta a + \frac{\partial A}{\partial \varphi} \delta\varphi, \quad (2)$$

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial a} \delta a + \frac{\partial\Psi}{\partial \varphi} \delta\varphi.$$

Нас интересуют корреляционные соотношения вида  $K_{A\Psi} = \overline{\delta A \delta\Psi}$  — взаимная корреляция  $A$  и  $\Psi$  в одной точке;  $K_{A_i A_j} = \overline{\delta A_i \delta A_j}$  и  $K_{\Psi_i \Psi_j} = \overline{\delta\Psi_i \delta\Psi_j}$  — продольная пространственная или межчастотная корреляция  $A$  и  $\Psi$  в отдельности (индексы  $i$  и  $j$  соответствуют разным пунктам наблюдения или частотам, черта сверху означает статистическое усреднение). Знаки этих корреляторов определяются как знаками входящих в них производных, так и статистическими свойствами величин  $\delta a$  и  $\delta\varphi$ . Результаты исследований удобно представлять в плоскости, координатными осями которой являются параметры сигнала  $a$  и  $\varphi$ . Используя расчеты регулярных полей в волноводе Земля—ионосфера (например, [3]), каждой фиксированной частоте  $f$  и дистанции  $D$  в этой плоскости можно сопоставить определенную точку  $(a, \varphi)$ .

На рис. 1 показаны области положительных и отрицательных значений всех четырех производных, входящих в формулу (2) (рис. 1 а со-

ответствует  $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$  и  $\frac{\partial A}{\partial a}$ ; 1б —  $\frac{\partial\Psi}{\partial a}$ ; 1в —  $\frac{\partial A}{\partial\varphi}$ ).

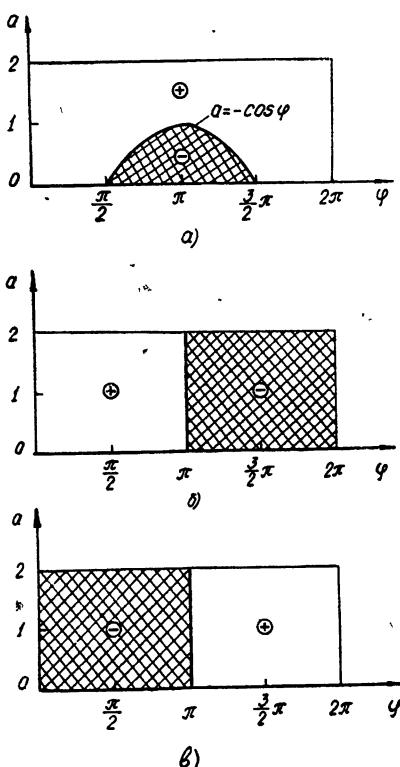


Рис. 1.

Статистику величин  $\delta a$  и  $\delta\varphi$  будем задавать феноменологически, рассматривая три следующих предельных случая:

$$1) \overline{\delta a^2} = 0, \quad \overline{\delta\varphi^2} \neq 0,$$

$$2) \overline{\delta a^2} \neq 0, \quad \overline{\delta\varphi^2} = 0,$$

$$3) \overline{\frac{\delta a_i \delta a_j}{a_i a_j}} = \overline{\delta\varphi_i \delta\varphi_j}, \quad \overline{\delta a_i \delta\varphi_j} = 0.$$

Можно указать, когда эти предельные случаи имеют место в реальных условиях. Так, ситуация «1» реализуется в «коротком» волноводе\*, когда неоднородности границы приводят только к флюктуациям фазовой скорости волны (вариации высоты либо мнимой части поверхностного импеданса) [1]. Ситуация «2» аналогична «1», но при флюктуациях затухания сигнала (например, за счет случайных изменений действительной части импеданса). Ситуация «3» имеет место в «длинном» волноводе [1] и, можно ожидать, не зависит от природы вариаций параметров волновода.

\* «Коротким» называем волновод, если дистанция и частота сигнала таковы, что поперечный размер зоны Френеля оказывается малым по сравнению с характерным масштабом неоднородностей границы; «длинным» — в случае выполнения обратного неравенства.

В первом предельном случае знак коэффициента взаимной корреляции «амплитуда—фаза»

$$K_{A\Psi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \overline{\delta \varphi \delta \varphi} . \quad (3)$$

определяется только знаком произведения производных. На рис. 2 б в плоскости  $a, \varphi$  показаны области положительных и отрицательных значений  $K_{A\Psi}$ . Видно, что знак  $K_{A\Psi}$  сложным образом зависит от дистанции и частоты через параметры сигнала  $a$  и  $\varphi$ . Знаки коэффициентов корреляции фаз  $K_{\Psi_i\Psi_j}$  и амплитуд  $K_{A_iA_j}$ , определяются соотношениями вида

$$\begin{aligned} K_{\Psi_i\Psi_j} &= \frac{\partial \Psi_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \varphi_j} \overline{\delta \varphi_i \delta \varphi_j}, \\ K_{A_iA_j} &= \frac{\partial A_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial A_j}{\partial \varphi_j} \overline{\delta \varphi_i \delta \varphi_j}. \end{aligned} \quad (4)$$

При небольшом разносе (по дистанции или частоте) величину  $\overline{\delta \varphi_i \delta \varphi_j}$ , будем считать положительной. Тогда знаки корреляторов по-прежнему зависят только от знаков произведений соответствующих производных в точках  $(a_i, \varphi_i)$  и  $(a_j, \varphi_j)$ . Как следует из рис. 1 а, знак фазового коррелятора положителен для всех  $\varphi_i, \varphi_j$  при условии, что амплитуды мод удовлетворяют неравенству  $a_i, a_j > 1$ . При  $a_i < 1$  или  $a_j < 1$  возможна смена знака коррелятора при расположении точек  $(a_i, \varphi_i)$  и  $(a_j, \varphi_j)$  по разные стороны границы  $a = -\cos \varphi$  (рис. 1 а).

Знак амплитудного коррелятора от величины  $a_i$  и  $a_j$  не зависит (рис. 1 в). Отрицательное значение он принимает только при разнесении точек  $(a_i, \varphi_i)$  и  $(a_j, \varphi_j)$  относительно линии  $\varphi = \pi$ .

В предельном случае «2» формулы для определения корреляторов совпадают с (3) и (4) при замене  $\frac{\partial}{\partial \varphi}$  на  $\frac{\partial}{\partial a}$ . Это означает, что

знак коэффициента взаимной корреляции  $K_{A\Psi}$  изменяется во всей плоскости  $a, \varphi$  на противоположный (рис. 2 а). Амплитудный коррелятор в разнесенных точках (или на разных частотах) ведет себя как фазовый, а фазовый — как амплитудный (рис. 1 а, б) в случае «1».

В случае «3» коэффициенты корреляции определяются соотношениями

$$K_{A\Psi} = \frac{\partial A}{\partial a} \frac{\partial \Psi}{\partial a} \overline{\delta a^2} + \frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \overline{\delta \varphi^2},$$

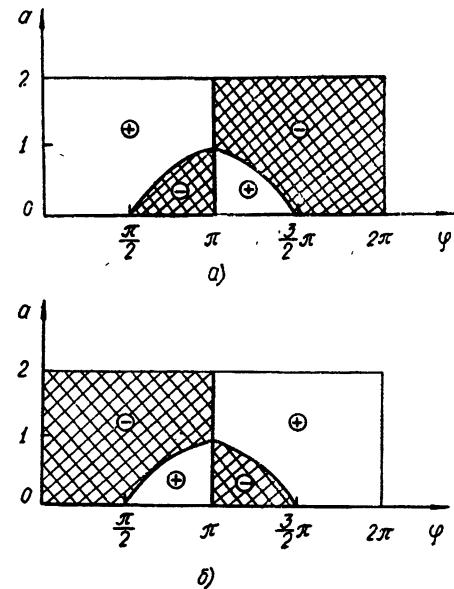


Рис. 2.

$$K_{\Psi_i \Psi_j} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial a_i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial a_j} \overline{\delta a_i \delta a_j} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \varphi_j} \overline{\delta \varphi_i \delta \varphi_j}, \quad (5)$$

$$K_{A_i A_j} = \frac{\partial A_i}{\partial a_i} \frac{\partial A_j}{\partial a_j} \overline{\delta a_i \delta a_j} + \frac{\partial A_i}{\partial \varphi_i} \frac{\partial A_j}{\partial \varphi_j} \overline{\delta \varphi_i \delta \varphi_j}.$$

После подстановки соответствующих производных  $K_{A\Psi}$  оказывается тождественно равным нулю, а выражения для амплитудных и фазовых корреляторов отличаются между собой только множителем

$$K_{\Psi_i \Psi_j} = \frac{1}{A_i A_j} K_{A_i A_j}.$$

Ограничиваая рассмотрение только малыми пространственными и частотными разносами (такими, что можно считать  $a_i \approx a_j$ ,  $A_i \approx A_j$ ), выражение для  $K_{\Psi_i \Psi_j}$ , представим в виде

$$K_{\Psi_i \Psi_j} = \frac{a^2}{A^4} (2 \cos^2 \Delta + 2a \cos \Delta \cos \varphi + a^2 - 1) \overline{\delta \varphi_i \delta \varphi_j}, \quad (6)$$

где

$$\varphi = \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}, \quad \Delta = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}.$$

Граница смены знака корреляторов  $K_{\Psi_i \Psi_j}$  и  $K_{A_i A_j}$  определяется условием обращения в нуль выражения в скобках в формуле (6). В прямоугольной системе координат  $a$ ,  $\cos \Delta$  эта граница представляет собой эллипс, полуоси которого  $c$  и  $d$  и угол  $\alpha$  наклона малой полуоси к координатной оси  $\cos \Delta$  зависят от  $\varphi$  как от параметра:

$$c^2 = \frac{2}{3 + \sqrt{1 + 4 \cos^2 \varphi}},$$

$$d^2 = \frac{2}{3 - \sqrt{1 + 4 \cos^2 \varphi}}, \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cos \varphi).$$

На рис. 3 показаны области отрицательных (внутренние части эллипсов) и положительных значений корреляторов  $K_{\Psi_i \Psi_j}$  и  $K_{A_i A_j}$  при фиксированных значениях параметра  $\varphi$ . Правая граница ( $\cos \Delta = 1$ ) на всех графиках соответствует нулевому разносу относительно средней

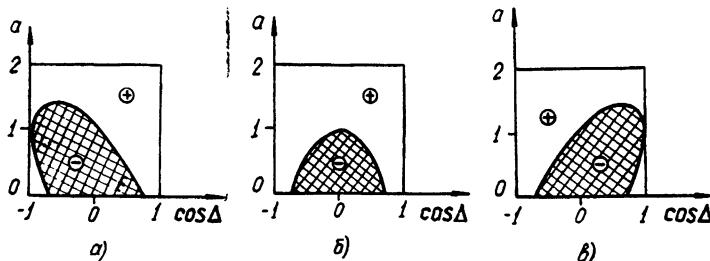


Рис. 3.

точки  $\varphi$  (рис. 3 а соответствует  $\varphi = 0, 2\pi$ ;  $3б - \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ;  $3в - \varphi = \pi$ ).

Видно, что изменение  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  приводит к «качаниям» эллипса и изменению соотношения его полуосей. При  $a > \sqrt{2}$  смены знаков корреляторов не происходит ни при каких значениях  $\varphi$  и  $\Delta$ . При  $a < \sqrt{2}$  смена знаков возможна, причем при  $\varphi \approx \pi$  она происходит при минимальных значениях  $\Delta$  (рис. 3 в).

Подводя итоги проведенному рассмотрению, укажем следующее. Несмотря на некоторую свою ограниченность, использованный феноменологический подход позволил установить ряд качественно новых, не отмеченных ранее закономерностей СДВ радиосигналов, связанных с многомодовостью волноводного канала Земля—ионосфера.

1) Коэффициент взаимной корреляции «амплитуда—фаза» по мере удаления наблюдателя от передатчика не только убывает по величине (это имеет место и в свободном пространстве), но и многократно изменяет свой знак. Интервалы дистанций, на которых его знак остается постоянным, не превосходят величины характерного пространственного масштаба интерференционных замираний.

2) Коэффициенты пространственной и межчастотной корреляции «фаза—фаза» и «амплитуда—амплитуда» с увеличением соответствующего разнесения также изменяют свои знаки. Значения разносов, при которых происходят указанные смены, зависят от положения каждой точки (пространственной или частотной) относительно своей интерференционной кривой.

3) Даже при фиксированных дистанциях и частотах знаки корреляционных соотношений, полученных в разных измерениях, могут отличаться друг от друга. Это связано с возможностью изменений от измерения к измерению средних параметров волновода (например, средней высоты ионосферы) и неизбежно должно наблюдаться при проведении многосугочных циклов измерений.

Наконец, отметим, что круг приложений результатов проведенного анализа не ограничивается волноводом Земля—ионосфера. С учетом конкретных отличий его результаты могут быть распространены на все случаи, когда поле волнового сигнала носит интерференционный характер по какой-либо из координат.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность П. В. Блиоху за полезные обсуждения результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Безродный, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 6, 918 (1973).
2. В. Г. Безродный, П. В. Блиох, Ю. М. Ямпольский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 3, 383 (1974).
3. А. Б. Орлов, Г. В. Азарин, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 10, 3 (1970).

Институт радиофизики и электронники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
13 апреля 1976 г.

#### EFFECTS OF MULTIMODE NATURE OF THE VLF FIELD IN THE EARTH-IONOSPHERE WAVEGUIDE ON ITS CORRELATION FACTORS

V. G. Bezrodny, R. S. Shubova

Signs of auto- and cross-correlation factors of VLF signals propagating in the earth-ionosphere channel are shown to be tightly related—with the observer's location with respect to the field interference pattern. In a complicated way they depend on the signal frequency and propagation path length.

УДК 621.371.25

## НЕКОГЕРЕНТНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ЭЛЕКТРОННО-ИОННОЙ ПЛАЗМЫ

*B. C. Попов*

Решена задача рассеяния электромагнитных волн на флюктуациях плотности электронов в полу бесконечной электронно-ионной плазме. Получены спектры рассеянного излучения при взаимодействии падающей волны с объемными и поверхностными ионно-звуковыми флюктуационными волнами. Показано, что рассеяние на критических флюктуациях (объемных и поверхностных) в токовой электронно-ионной плазме сопровождается аномальным нарастанием уровня некогерентно отраженных волн. Произведена численная оценка коэффициентов отражения.

Общий подход к проблеме некогерентного рассеяния электромагнитных волн ограниченными плазменными объектами был сформулирован в работе [1], где отмечалось, в частности, что для строгого решения задачи о рассеянии волн на флюктуациях в плазме, обладающей границей, необходимо корреляционные функции источников рассеянных волн вычислять с учетом ограниченности плазмы. Это требование следует из теории флюктуаций в пространственно-ограниченной плазме. До последнего времени такая теория с учетом пространственной дисперсии была развита только для полуограниченной равновесной электронной плазмы [2–5] (гидродинамическая теория флюктуаций для такой плазмы построена в [6]). Соответственно и задача о некогерентном отражении электромагнитных волн от плазмы в строгой постановке была решена только для случая равновесной электронной плазмы [7–9]. При этом было показано, что в спектре некогерентно отраженных волн появляется дополнительный резонанс, обусловленный взаимодействием падающей волны с высокочастотными поверхностными флюктуационными волнами (этот резонанс отсутствует, если для решения данной задачи использовать корреляторы для неограниченной плазмы [10]).

Позднее в работе [11], исходя из вероятностного подхода [5], была развита теория электромагнитных флюктуаций в полупространстве электронно-ионной плазмы. В этой работе показано, что в такой плазме наряду с высокочастотными существуют также и низкочастотные (ионно-звуковые) поверхностные флюктуационные волны, которые обеспечивают появление дополнительных максимумов в спектре флюктуаций. Там же отмечено, что при наличии дрейфа электронов относительно ионов, благодаря неустойчивости объемных и поверхностных ионно-звуковых волн [12], вблизи границы неустойчивости создаются условия для формирования критических флюктуаций (объемных и поверхностных соответственно). В неограниченной плазме, как известно [13, 14], рассеяние электромагнитных волн на критических флюктуациях характеризуется аномальным нарастанием уровня рассеянных волн. Такой же результат следует ожидать и при рассеянии волн на критических флюктуациях (в том числе и поверхностных) в плазменном полупространстве.

В связи с вышесказанным представляет интерес задача об определении спектра и уровня излучения, рассеянного на низкочастотных флюктуациях.

туациях в полупространстве, заполненном токовой электронно-ионной плазмой.

Пусть электронно-ионная плазма, электроны которой движутся относительно ионов с постоянной скоростью  $\mathbf{u} = \{u, 0, 0\}$ , занимает полупространство  $z > 0$ . Из свободного пространства  $z < 0$  на плазму под углом  $\theta_0$  падает плоская электромагнитная волна

$$\mathbf{E} = E_0 \exp(i\mathbf{k}_{\perp 0} \mathbf{r}_{\perp} + i\tilde{\mathbf{k}}_{z0} z - i\omega_0 t), \quad \tilde{\mathbf{k}}_{z0} = \frac{\omega_0}{c} \cos \theta_0, \quad (1)$$

$$\mathbf{k}_{\perp 0} = \left\{ \frac{\omega_0}{c} \sin \theta_0, 0 \right\},$$

которая, преломляясь на границе раздела, проникает внутрь плазмы и, взаимодействуя с флюктуациями, вызывает рассеянные волны. В области плазмы уравнения рассеянных волн выглядят следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{I}$  — рассеивающий ток.

Если фазовые скорости падающей и рассеянной волн значительно больше тепловых скоростей частиц плазмы, то для определения рассеивающего тока можно воспользоваться гидродинамическим приближением [15]. Кроме того, полагая, что  $u \ll v_e$  ( $v_e = \sqrt{T_e/m_e}$  — тепловая скорость электронов), можно пренебречь влиянием скорости дрейфа электронов на дисперсию падающей и рассеянной волн (при этом предполагается, что обе волны являются поперечными). Тогда, интересуясь лишь рассеянием на флюктуациях в объеме плазмы, временную фурье-компоненту рассеивающего тока можно записать в виде [16]

$$I_{\omega}(\mathbf{r}) = e \mathbf{v}_0 \delta n_{\Delta\omega}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где  $\delta n_{\Delta\omega}(\mathbf{r})$  — временная фурье-компонента флюктуаций плотности электронов,  $\mathbf{v}_0$  — скорость, приобретаемая электроном под действием падающей волны,  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ ,  $\omega$  — частота рассеянной волны.

Условия, наложенные на фазовые скорости волн и скорость дрейфа  $u$ , позволяют описать реакцию плазмы на действие падающей и рассеянной волн с помощью диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + i \frac{v}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (4)$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi N_e e^2}{m_e},$$

где  $v$  — эффективная частота столкновений ( $v \ll \omega_{pe}$ ),  $N_e$  — концентрация электронов,  $e$  и  $m_e$  — заряд и масса электрона соответственно.

Для однородной плазмы с резкой границей поле некогерентно отраженных волн, определяемое системой (2) и граничными условиями, в области свободного пространства можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{k}_{\perp} d\omega E_{\mathbf{k}_{\perp}\omega} \exp(i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp} - i\tilde{\mathbf{k}}_z z - i\omega t), \quad (5)$$

где

$$E_{ik\perp\omega} = \frac{2i}{\omega\Delta} \left( \frac{\omega}{c} g \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k_z^2 - g^2} \alpha_{ij} I_{jk\omega},$$

$$\alpha_{11} = (k_y^2 + \tilde{k}_z g), \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = -k_x k_y, \quad \alpha_{13} = k_x k_z,$$

(6)

$$\alpha_{22} = (k_x^2 + \tilde{k}_z g), \quad \alpha_{23} = -k_y \tilde{k}_z, \quad \alpha_{31} = k_x g, \quad \alpha_{32} = k_y g, \quad \alpha_{33} = k_\perp^2,$$

$$\Delta = (\tilde{k}_z + g)(k_\perp^2 + \tilde{k}_z g), \quad g = \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) - k_\perp^2 \right]^{1/2}, \quad \tilde{k}_z = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2 \right)^{1/2}.$$

Фурье-компоненты рассеивающего тока определены здесь формулой

$$I_{k\omega} = \int dr_\perp dt \int_0^\infty dz I(r, t) e^{-k_\perp z + i\omega t} (e^{ik_z z} + e^{-ik_z z}). \quad (7)$$

С помощью (5) и (6), а также соотношения

$$\langle \delta n_{\Delta k_\perp \Delta \omega}(z) \delta n_{\Delta k_\perp \Delta \omega'}(z') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\Delta\omega - \Delta\omega') \delta(\Delta k_\perp - \Delta k'_\perp) \times \langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_\perp \Delta \omega} \quad (8)$$

нетрудно вычислить статистически среднее значение  $z$ -компоненты вектора Умова—Пойнтинга некогерентно отраженных волн, излучаемых в элемент телесного угла  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  ( $\theta$ —угол отражения) в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Разделив затем эту величину на  $z$ -компоненту вектора Умова—Пойнтинга падающей волны, получим дифференциальный коэффициент отражения, который в случае  $s$ - или  $p$ -поляризации падающей волны имеет вид

$$dR_{s,p} = \frac{2r_e^2}{\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \int_0^\infty dz dz' \langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_\perp \Delta \omega} \times \exp[i(g + g_0)z - i(g_0^* + g^*)z'] F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) \cos\theta d\omega d\Omega, \quad (9)$$

$$\Delta k_\perp = k_\perp - k_{\perp 0},$$

где функции  $F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi)$  те же, что и в работе [9],  $\varphi$ —угол между векторами  $k_\perp$  и  $k_{\perp 0}$ ,  $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ —классический радиус электрона.

В ограниченной плазме корреляционная функция флуктуаций плотности электронов, входящая в выражение (9), в общем виде может быть представлена следующим образом [11]:

$$\langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_\perp \Delta \omega} = \langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_\perp \Delta \omega}^V + \langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_\perp \Delta \omega}^S + \langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_\perp \Delta \omega}^{VS}, \quad (10)$$

где индексами  $V$  и  $S$  отмечены слагаемые, которые в полосе прозрачности плазмы описывают корреляции за счет объемных и поверхностных волн соответственно. Двойной индекс  $VS$  приписан слагаемому, учитывающему корреляции за счет объемно-граничных эффектов. Явные выражения этих трех слагаемых имеют весьма громоздкий вид. Однако в ряде частотных областей эти выражения упрощаются. Ниже мы ограничимся исследованием рассеяния электромагнитной волны на ионно-звуковых флуктуационных волнах, области существования которых определены неравенствами

$$v_i \ll \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \ll v_e \quad (11)$$

для объемных волн [15, 17] и

$$v_i \ll \frac{\Delta\omega}{\Delta k_{\perp}} \ll v_e \quad (12)$$

— для поверхностных волн [17, 18] ( $v_i = \sqrt{T_i/m_i}$  — тепловая скорость ионов плазмы).

В областях частот (11) и (12) слагаемые коррелятора (10) для бесстолкновительной электронно-ионной плазмы при условии зеркального отражения частиц от границы плазмы можно записать в следующем виде [11]:

$$\langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_{\perp} \Delta\omega}^V = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k_z \langle \delta n^2 \rangle_{\Delta k \Delta\omega}^V \{ e^{i\Delta k_z(z-z')} + e^{i\Delta k_z(z+z')} \}; \quad (13)$$

$$\langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle_{\Delta k_{\perp} \Delta\omega}^S = \langle \delta n^2 \rangle_{\Delta k_{\perp} \Delta\omega}^S I(z) I^*(z'), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \delta n^2 \rangle_{\Delta k \Delta\omega}^V &= \frac{e^{-2} T_i}{\pi \Delta\omega} \frac{\Delta k^2}{|\epsilon_l|^2} \left[ t \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_u} |1 + 4\pi x_l^e|^2 \operatorname{Im} x_l^e + |4\pi x_l^e|^2 \operatorname{Im} x_l^i| \right], \\ \langle \delta n^2 \rangle_{\Delta k_{\perp} \Delta\omega}^S &= \frac{e^{-2} T_i}{\pi^3 \Delta\omega} \frac{2\Delta k_{\perp}^2}{|\widetilde{\Delta k}_z|} \frac{I^p}{|1 - r_p|^2}, \\ I(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k_z \frac{4\pi x_l^e}{\epsilon_l} e^{i\Delta k_z z}, \quad I^p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta k_z}{\Delta k^2} \frac{\Delta k_{\perp}^2 \alpha_l}{|\epsilon_l|^2}, \\ r_p &= \frac{Z_p}{\widetilde{Z}_p}, \quad Z_p = \frac{4i}{\Delta\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta k_z}{\Delta k^2} \frac{\Delta k_{\perp}^2}{\epsilon_l}, \quad \widetilde{Z}_p = -\frac{4\pi \widetilde{\Delta k}_z}{\Delta\omega}, \quad (15) \\ \alpha_l &= t \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_u} \operatorname{Im} x_l^e + \operatorname{Im} x_l^i, \quad \epsilon_l = 1 + 4\pi x_l^e + 4\pi x_l^i, \end{aligned}$$

$$\Delta\omega_u = \Delta\omega - \Delta k_{\perp} u, \quad \widetilde{\Delta k}_z = \sqrt{\frac{\Delta\omega^2}{c^2} - \Delta k_{\perp}^2}, \quad t = \frac{T_e}{T_i}, \quad \frac{u}{c} \ll 1,$$

$x_l^e(\Delta k, \Delta\omega_u)$  и  $x_l^i(\Delta k, \Delta\omega)$  — продольные составляющие тензора поляризуемости электронной и ионной компонент плазмы, имеющие общепринятый вид [15]. Выражение третьего слагаемого, входящего в (10), приводить не будем, поскольку в областях прозрачности плазмы для объемных или поверхностных волн оно оказывается несущественным.

После подстановки (10) в (9) с учетом (13) и (14) получаем

$$\begin{aligned} dR_{s,p} &= \frac{2r_e^2}{\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[ \frac{\pi}{\operatorname{Im} G} \langle \delta n^2 \rangle_{\Delta k \Delta\omega}^V + \langle \delta n^2 \rangle_{\Delta k_{\perp} \Delta\omega}^S |\Psi|^2 \right] \times \\ &\quad \times F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) \cos \theta d\omega d\Omega, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$\Delta k_z = -\operatorname{Re} G, \quad G = g + g_0,$$

$$\Psi = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k_z \frac{4\pi \epsilon_l^e}{\epsilon_l} \frac{\operatorname{Re} G}{(\operatorname{Re} G)^2 - \Delta k_z^2} - i\pi \frac{4\pi \epsilon_l^e}{\epsilon_l} \Big|_{\Delta k_z = -\operatorname{Re} G}. \quad (17)$$

Первый член в выражении (16) описывает рассеяние на объемных флюктуациях. Значение этого слагаемого может быть найдено с помощью корреляционной функции для неограниченной плазмы.

Отличие от случая рассеяния волн на флюктуациях в неограниченной плазме (наряду с наличием в (16) множителя  $F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi)$ ) определяется вторым слагаемым в (16), которое соответствует рассеянию на поверхностных флюктуациях.

Исходя из формулы (16), проанализируем спектральное распределение и уровень некогерентно отраженного излучения. При этом представим дифференциальный коэффициент отражения в виде суммы двух слагаемых  $dR_{s,p}^V$  и  $dR_{s,p}^S$ , описывающих рассеяние на объемных и поверхностных флюктуационных волнах соответственно.

Если плазма изотропна (в этом случае при подстановке в (16) выражений (15) в последних следует перейти к пределу  $t \rightarrow 0$ ), то вклад в спектр отраженных волн, обусловленный рассеянием на объемных флюктуациях в сильноизотермической плазме ( $t \gg 1$ ), характеризуется появлением максимумов, связанных с существованием слабозатухающих ионно-звуковых волн [15]. В этом случае та часть дифференциального коэффициента отражения, которая описывает рассеяние на объемных флюктуациях, может быть представлена в виде

$$dR_{s,p}^V = 2N_e r_e^2 a_e \frac{\Delta k^2 a_e}{\operatorname{Im} G} \frac{\Delta \omega^3}{\omega_{pl}^2} |1 + 4\pi \epsilon_l^e|^2 \times \\ \times \frac{1 + \left(t \frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Delta \omega^2}{2\Delta k^2 v_i^2}\right)}{1 + \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} t^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta \omega^2}{2\Delta k^2 v_i^2}\right)} \times \\ \times \frac{\delta(\Delta \omega^2 - \Delta \omega_0^2)}{1 + 6 \frac{\Delta k^2 v_i^2}{\Delta \omega^2}} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) \cos \theta d\omega d\Omega, \quad (18)$$

где  $\Delta \omega_0$  — корень уравнения  $\operatorname{Re} \epsilon_l = 0$  в низкочастотной области прозрачности объемных волн (11), имеющий вид

$$\Delta \omega_0^2 = \frac{\omega_{pl}^2}{2} \frac{\Delta k^2 a_e^2}{1 + \Delta k^2 a_e^2} (1 + \sqrt{1 + 12t^{-1}(1 + \Delta k^2 a_e^2)}), \quad (19)$$

$$\omega_{pl}^2 = \frac{4\pi N_i e_i^2}{m_i}, \quad a_e^2 = \frac{T_e}{4\pi N_e e^2}, \quad N_i = N_e, \quad e_i = -e.$$

Если  $\Delta k a_e \ll 1$ , то

$$\Delta \omega_0^2 \approx \Delta k^2 V_s^2, \quad V_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}. \quad (20)$$

При  $\Delta k a_e \sim 1$

$$\Delta \omega_0^2 \approx \frac{\omega_{pl}^2}{2}, \quad (21)$$

и, наконец, при  $\Delta k a_e \gg 1$  получаем из (19)

$$\Delta \omega_0^2 \approx \omega_{pi}^2. \quad (22)$$

Последний результат имеет смысл лишь при очень большой степени неизотермичности плазмы ( $t \gg \Delta k^2 a_e^2$ ).

Выше уже упоминалось, что в полуограниченной изотропной электронно-ионной плазме помимо объемной существует также ветвь поверхностных ионно-звуковых волн, вклад которых в спектральное распределение рассеянного излучения может быть оценен с помощью второго слагаемого в формуле (16). Подставляя в это слагаемое коррелятор  $\langle \delta n^2 \rangle_{\Delta k \perp \Delta \omega}^S$  (см. выражения (15)) и учитывая, что в области частот (12) для слабозатухающих поверхностных волн выполняется неравенство

$$|\operatorname{Re}(1 - r_p)| \gg \operatorname{Im} r_p, \quad (23)$$

где  $r_p(\Delta k \perp, \Delta \omega)$  есть отношение поверхностных импедансов плазмы и внешнего пространства, получаем следующее выражение для поверхностной части дифференциального коэффициента отражения:

$$\begin{aligned} dR_{s,p}^S = & \frac{4N_e r_e^2 a_e}{\pi^2} \frac{\Delta k_\perp^2 a_e}{\Delta \omega |\Delta \tilde{k}_z|} \frac{t Q_e + Q_i}{t(Q_e + Q_i)} \delta(1 - \operatorname{Re} r_p) \times \\ & \times |\Psi|^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) \cos \theta d\omega d\Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$Q_{e,i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta k_z}{\Delta k^2} \frac{\operatorname{Im} \epsilon_i^{e,i}}{|\epsilon_i|^2}. \quad (25)$$

Из формулы (24) следует, что в спектре некогерентно отраженных волн появляются дополнительные по сравнению со спектром, получаемым при использовании коррелятора для неограниченной плазмы [10], максимумы, положение которых в спектре определяется корнями дисперсионного уравнения слабозатухающих поверхностных ионно-звуковых волн:

$$\operatorname{Re}(1 - r_p) = 0. \quad (26)$$

В области (12) решение этого уравнения без учета теплового движения ионов имеет следующий вид [17]:

$$\Delta \omega_0^2 = \frac{1}{2} \omega_{pi}^2 (1 + 2\Delta k_\perp^2 a_e^2 - \sqrt{1 + 4\Delta k_\perp^4 a_e^4}). \quad (27)$$

Положение резонансных пиков в спектре зависит от значения параметра  $\Delta k_\perp a_e$ . Если  $\Delta k_\perp a_e \ll 1$ , то

$$\Delta \omega_0^2 \approx \Delta k_\perp^2 V_s^2. \quad (28)$$

На этих частотах, как показано в [18], основную роль в поглощении энергии поверхностных волн играют электроны ( $Q_e \gg Q_i$ ), и, следовательно, в этом случае формула (24) приобретает вид

$$\begin{aligned} dR_{s,p}^S \approx & \frac{8N_e r_e^2 a_e}{\pi^2} (\Delta k_\perp a_e)^6 \omega_{pi} \delta(\Delta \omega^2 - \Delta k_\perp^2 V_s^2) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \\ & \times |\Psi|^2 F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) \cos \theta d\omega d\Omega. \end{aligned} \quad (29)$$

В другом предельном случае, когда  $\Delta k_{\perp} a_e \gg 1$ , значение корня (27) оценивается формулой

$$\Delta \omega_0^2 \leq \frac{\omega_{pi}^2}{2}. \quad (30)$$

В окрестности частоты  $\frac{\omega_{pi}}{\sqrt{2}}$ , которая является верхней граничной частотой для поверхностных ионно-звуковых волн, затухание последних определяется в основном ионной компонентой плазмы ( $Q_i \gg Q_e$ ). В этом случае выражение (24) можно представить в виде

$$dR_{s,p}^S = \frac{N_e r_e^2 a_e}{\sqrt{2} \pi t} \Delta k_{\perp} a_e \omega_{pi} \delta \left( \Delta \omega^2 - \frac{\omega_{pi}^2}{2} \right) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \\ \times |\Psi|^2 F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) \cos \theta d\omega d\Omega. \quad (31)$$

Следует, однако, заметить, что наличие аномально большого затухания поверхностных волн на граничной частоте [18] существенно ухудшает условия обнаружения здесь максимума в спектре некогерентно отраженного излучения.

Проанализируем теперь спектр и уровень отраженного излучения в случае, когда скорость дрейфа электронов отлична от нуля. Если  $u \ll v_e$ , то спектр излучения, рассеянного на объемных ионно-звуковых флукуационных волнах в токовой плазме, будет иметь тот же вид, что и в случае рассеяния в полупространстве изотропной плазмы. Тогда объемная часть дифференциального коэффициента отражения (16) может быть представлена следующим образом:

$$dR_{s,p}^V = \frac{\text{Im } \epsilon_l(u=0)}{\text{Im } \epsilon_l} dR_{s,p}(u=0), \quad (32)$$

где  $\text{Im } \epsilon_l$  — мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости рассматриваемой плазмы [15, 17],  $dR_{s,p}(u=0)$  — объемная часть дифференциального коэффициента отражения для случая рассеяния волн на флукуациях в полуограниченной изотропной электронно-ионной плазме (18).

Коренное отличие (32) от (18) заключается в том, что стоящая в знаменателе выражения (32) функция  $\text{Im } \epsilon_l$  существенно зависит от скорости дрейфа электронов и при достижении последней значения, равного

$$u_c^V = \frac{\Delta \omega_0}{\Delta k_{\perp} \cos \Phi} \left[ 1 + i \frac{\omega}{v_i} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \exp \left( -\frac{\Delta \omega_0^2}{2 \Delta k_{\perp}^2 v_i^2} \right) \right], \quad (33)$$

обращается в нуль (здесь  $\Delta \omega_0$  — частота ионно-звуковых флукуационных волн (19),  $\Phi$  — угол между векторами  $\Delta k$  и  $u$ , изменяющийся от 0 до  $\pi$ ). Нетрудно видеть, что формула (33) дает хорошо известное значение критической скорости, при которой развивается ионно-звуковая неустойчивость в неограниченной плазме [15, 17]. Если  $u \rightarrow u_c^V$ , то коэффициент при  $\delta$ -функции в (32) аномально возрастает, что свидетельствует об аномальном возрастании уровня некогерентно отраженных волн. При рассеянии на звуковых волнах (20), если пренебречь вкладом ионов в затухание объемных волн, получаем

$$u_c^V = V_s \frac{\Delta k}{\Delta k_{\perp} \cos \Phi}, \quad (34)$$

$$\Delta k = \sqrt{\Delta k_{\perp}^2 + (\text{Re } G)^2},$$

где  $\Delta k_{\perp}$  и  $\text{Re } G$  при условии  $\Delta\omega \ll \omega_0$  можно записать в виде

$$\Delta k_{\perp} = \frac{\omega_0}{c} (\sin^2 \theta + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi)^{1/2}, \quad (35)$$

$$\text{Re } G = \frac{\omega_0}{c} (\sqrt{\epsilon(\omega)} - \sin^2 \theta + \sqrt{\epsilon(\omega_0) - \sin^2 \theta_0}).$$

Если же рассеяние происходит на флуктуационных волнах, частота которых определяется формулой (21), то

$$u_c^V = V_s \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{2\omega_0}} \frac{c}{v_e} \cos^{-1} \Phi (\sin^2 \theta + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi)^{-1/2}, \quad (36)$$

откуда видно, что условие  $u \ll v_e$  при  $\frac{v_e}{c} \ll 1$  выполняется лишь для очень больших значений отношения  $\frac{\omega_0}{\omega_{pe}}$ .

Переходя к исследованию спектра и уровня отраженных волн, рассеянных на поверхностных ионно-звуковых волнах, отметим прежде всего, что условие  $u \ll v_e$  также позволяет пренебречь влиянием скорости дрейфа электронов на значение частот ионно-звуковых волн, определяемых формулой (27). Кроме того, можно приближенно считать, что в этом случае

$$\text{Im } r_p = 4 \Delta k_{\perp}^2 |\tilde{k}_z|^{-1} \left( \frac{\Delta\omega_u}{\Delta\omega} Q_e + Q_i \right), \quad I^p_i = \Delta k_{\perp}^2 (t Q_e + Q_i), \quad (37)$$

где  $Q_{e,i}$  незначительно отличаются от аналогичных величин для изотропной плазмы (см. формулу (25)). Используя затем (23) и (37), получаем

$$dR_{s,p}^S = \frac{\frac{t Q_e + Q_i}{\Delta\omega_u} dR_{s,p}^S(u=0)}{\frac{\Delta\omega_u}{\Delta\omega} Q_e + Q_i}, \quad (38)$$

где  $dR_{s,p}^S(u=0)$  — поверхностная часть дифференциального коэффициента отражения, характеризующая рассеяние на поверхностных флуктуационных волнах в полуограниченной изотропной электронно-ионной плазме (24).

В знаменателе выражения (38) стоит величина, определяющая, как это видно из выражения (25), затухание поверхностных волн. Ее значение зависит от скорости дрейфа и при  $u \rightarrow u_c^S$ , где

$$u_c^S = \frac{\Delta\omega_0}{\Delta k_{\perp} \cos \Phi} \left( 1 + \frac{Q_i}{Q_e} \right), \quad (39)$$

она стремится к нулю ( $\Delta\omega_0$  — корень (27) уравнения (26)). В этом случае коэффициент при  $\delta$ -функции в выражении (38) аномально возрастает. По-видимому, скорость  $u_c^S$  можно рассматривать как критическую, при которой развивается неустойчивость поверхностных ионно-звуковых волн и при которой, следовательно, формируются критические поверхностные флуктуации [11]. В области частот (28), где  $Q_e \gg Q_i$ , критическая скорость  $u_c^S$  равна

$$u_c^s \approx V_s \cos^{-1} \Phi. \quad (40)$$

Если же  $\Delta k_{\perp}^2 a_e^2 \gg 1$ , то  $\Delta \omega_0^2 \approx \frac{\omega_{pi}^2}{2}$ . В окрестности этой частоты  $Q_i \gg Q_e$ , и тогда значение критической скорости, определяемое формулой (39), выходит за рамки принятого предположения о том, что  $u \ll v_e$ . Очевидно, в условиях черенковского поглощения энергии поверхностных волн частицами плазмы можно говорить об отсутствии аномального роста уровня некогерентно отраженного излучения вблизи частоты  $\omega = \omega_0 \pm \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{2}}$ .

При других механизмах затухания поверхностных волн критическая скорость может принимать меньшие значения [12].

Полученные выше выражения дифференциальных коэффициентов отражения позволяют проанализировать спектральный состав рассеянного излучения, а также произвести оценку его уровня в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Однако в условиях реального эксперимента наличие у приемных устройств полосы пропускаемых частот приводит фактически к интегрированию излучения по частоте. В связи с этим практический интерес представляют полные коэффициенты отражения, которые мы определим как результат интегрирования дифференциальных коэффициентов по частоте. При таком определении полные коэффициенты отражения дают количественную оценку уровня некогерентно отраженного излучения, попадающего в элемент телесного угла  $d\Omega$ .

В случае отражения от изотропной электронно-ионной плазмы интегрирование выражений (18) и (24) по положительным значениям  $\Delta\omega$  дает следующие выражения объемной и поверхностной части полных коэффициентов отражения:

$$\delta R_{s,p}^V = N_e r_e^2 a_e \frac{\Delta k^2 a_e}{\text{Im } G} \frac{\Delta \omega_0^2}{\omega_{pi}^2} \frac{|1 + 4\pi \epsilon_i^l|^2}{1 + 6 \frac{\Delta k^2 v_i^2}{\Delta \omega_0^2}} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \theta F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) d\Omega; \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{s,p}^S = & \frac{4N_e r_e^2 a_e}{\pi^2 t} (\Delta k_{\perp} a_e)^3 \frac{t Q_e + Q_i}{Q_e + Q_i} \frac{|\epsilon_i(\Delta\omega_0)| |\Psi|^2}{|\epsilon_i(\Delta\omega_0)| + 2\Delta k_{\perp}^2 a_e^2} \times \\ & \times \frac{\Delta \omega_0^2}{\omega_{pi}^2} F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) \cos \theta d\Omega, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\epsilon_i(\Delta\omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\Delta\omega^2}.$$

(При записи формулы (41) мы пренебрегли вкладом ионов в затухание объемных волн.)

Аналогичным образом получим выражения полных коэффициентов отражения в случае отражения от токовой электронно-ионной плазмы. При этом, однако, будем учитывать вклад, даваемый как положительными, так и отрицательными значениями смещения частоты  $\Delta\omega$ . Тогда

$$\delta R_{s,p}^{V,S} = \left[ \frac{u_c^{V,S}(+\Delta\omega_0)}{u_c^{V,S}(+\Delta\omega_0) - u} + \frac{u_c^{V,S}(-\Delta\omega_0)}{u_c^{V,S}(-\Delta\omega_0) - u} \right] \delta R_{s,p}^{V,S}(u=0), \quad (43)$$

где  $\delta R_{s,p}^{V,S}(u=0)$  — полные коэффициенты отражения для случая изотропной электронно-ионной плазмы, определенные выше формулами

(41) и (42),  $u_c^{V,S}$  — критические скорости дрейфа электронов, в выражения для которых подставляются значения  $\Delta\omega_0$ , являющиеся решениями дисперсионных уравнений объемных или поверхностных волн соответственно.

Из выражения (43) следует, что при  $u \rightarrow u_c^{V,S}$  уровень отраженного излучения аномально нарастает лишь для тех значений  $\Delta\omega_0$ , которые для заданного направления вектора  $u$  обеспечивают выполнение неравенства  $u_c^{V,S} > 0$ . Например, при  $\theta = 0$  имеем  $\Delta k_\perp = \frac{\omega_0}{c} \sin\theta_0$  и  $\Phi = \pi$ .

В этом случае  $u_c^{V,S} > 0$  только при  $\Delta\omega_0 < 0$ , и, следовательно, аномальное нарастание возможно только на частотах  $\omega = \omega_0 - |\Delta\omega_0|$ , лежащих левее частоты падающей волны  $\omega_0$  (второе слагаемое в формуле (43)). На частотах  $\omega = \omega_0 + |\Delta\omega_0|$  в этом случае имеет место уменьшение уровня отраженного излучения (аналогичные результаты получены в работах [13, 14] при исследовании рассеяния волн в неограниченной токовой плазме).

С помощью формул (41) и (42) нетрудно произвести численную оценку коэффициентов отражения для конкретных значений параметров плазмы. Так, например, в случае, когда  $N_e r_e^2 a_e \sim 10^{-16}$ ,  $\frac{\omega_0 a_e}{c} \sim 1$ ,  $\theta = 0$ ,  $\omega_0 > \omega_{pe}$ , получаем

$$\delta R_{s,p}^V \approx \frac{2 \cdot 10^{-16}}{\operatorname{Im} \epsilon(\omega)} \cos \theta_0 F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) d\Omega, \quad \operatorname{Im} \epsilon(\omega) \ll 1; \quad (44)$$

$$\delta R_{s,p}^S \approx 5 \cdot 10^{-17} \sin^3 \theta_0 F_{s,p}(\theta, \theta_0, \varphi) d\Omega, \quad (45)$$

т. е. даже при отражении от равновесной плазмы представляется возможным регистрировать и измерять параметры некогерентно отраженного излучения приемными устройствами, применяемыми в практике плазменного эксперимента [19]. Если же речь идет о рассеянии волн на флюктуациях в неравновесной электронно-ионной плазме, то увеличение уровня излучения, рассеянного как на объемных, так и на поверхностных критических флюктуациях (см. формулу (43)), существенно улучшает условия приема отраженного излучения (в случае рассеяния на критических объемных флюктуациях это увеличение может достигать нескольких порядков [20, 21]). Все это прямо указывает на практическое использование результатов решения задачи о рассеянии волн на низкочастотных флюктуациях в ограниченной плазме в целях диагностики плазменных объектов [22].

В заключение работы автор выражает благодарность И. П. Якименко за постановку задачи и руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Якименко, ЖЭТФ, 54, 255 (1968).
2. И. П. Якименко, Диссертация, изд. ХГУ, Харьков, 1970.
3. А. Г. Ситенко, И. П. Якименко, в сб. Проблемы теории плазмы, изд. Наукова думка, Киев, 1972, стр. 22.
4. Ж. Д. Генчев, С. С. Калмыкова, УФЖ, 17, 448 (1972).
5. S. Ichimaru and I. P. Yakimenko, Physica Scripta, 7, 198 (1973).
6. Н. Я. Коцаренко, А. М. Федорченко, УФЖ, 12, 1531 (1967).
7. Н. Я. Коцаренко, А. М. Федорченко, ЖТФ, 39, 42 (1969).
8. Ж. Д. Генчев, Диссертация, изд. ХГУ, Харьков, 1971.
9. В. С. Попов, И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 883 (1972).
10. И. А. Ахиезер, ЖТФ, 33, 935 (1963).
11. В. С. Попов, И. П. Якименко, ЖТФ, 45, 1381 (1975).

12. E. Abu-Assali, B. A. Altekkop and A. A. Rukhadze, *Plasma Phys.*, **17**, 189 (1975).
13. S. Ichimaru, *Ann. Phys.*, **20**, 78 (1962).
14. M. Rosenbluth and N. Rostoker, *Phys. Fluids*, **5**, 776 (1962).
15. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, *Электродинамика плазмы*, изд. Наука, М., 1974; Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
16. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 5, 637 (1967).
17. В. Л. Гinzburg, А. А. Рухадзе, *Волны в магнитоактивной плазме*, изд. Наука, М., 1975.
18. А. Н. Кондратенко, *Ядерный синтез*, **5**, 267 (1965).
19. А. В. Чернетский, О. А. Зиновьев, О. В. Козлов, *Аппаратура и методы плазменных исследований*, Атомиздат, М., 1965.
20. V. Agipasalam and S. C. Brown, *Phys. Rev.*, **140A**, 471 (1965).
21. С. В. Троицкий, *ЖТФ*, **44**, 284 (1974).
22. В. Е. Голант, *Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы*, изд. Наука, М., 1968.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
27 января 1976 г.

### INCOHERENT REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES FROM TWO-TEMPERATURE ELECTRON-ION PLASMA

*V. S. Popov*

The problem of scattering of electromagnetic waves by the electron density fluctuations in a semi-bounded electron-ion plasma is solved. The spectra of scattered radiation in the case of interaction of an incident wave with volume and surface ion-sound fluctuation waves are obtained. It is shown that scattering by critical fluctuations (volume and surface) in a current electron-ion plasma is accompanied by abnormal increase in the level of incoherently reflected waves. A numerical estimation of the reflection coefficients has been made.

УДК 533.951

## НАСЫЩЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ С МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ РАСКАЧКИ

Г. А. Гусев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин

В плазме с замагниченными электронами рассмотрена нелинейная стадия эволюции параметрической неустойчивости типа распада мощной волны накачки на две косые ленгмюровские волны в условиях, когда инкремент раскачки достигает одного и того же максимального значения в двух неперекрывающихся областях пространства волновых чисел, а насыщение обусловлено вынужденным рассеянием возбуждаемых волн на ионах. В приближении интегральной перекачки энергии и замагнченных биений проанализированы три различных режима эволюции нестационарной турбулентности: псевдопериодические затухающие пульсации полного шума с уменьшающейся со временем частотой, строго периодические незатухающие колебания уровня турбулентности, апериодический выход шума на стационарное турбулентное значение. Выявлен резкая асимметрия распределения энергии турбулентности по двум эквивалентным на линейной стадии зонам двухсвязной области раскачки.

Углубление и расширение представлений теории параметрической турбулентности [1–5], основы которой заложены десятилетие назад [6], в последние пять лет в значительной степени стимулируются бурным развитием экспериментальных исследований нелинейного взаимодействия радио-, СВЧ и лазерного излучения большой мощности с плазмой. Примером детальных количественных экспериментальных исследований в этом направлении может служить цикл работ по модификации ионосферы радиоизлучением мощных наземных радиопередатчиков [7]. Если ранее такие экспериментальные исследования носили в основном качественный характер [8, 9], то теперь понимание и интерпретация многих результатов требуют от нелинейной теории последовательного учета таких свойств плазмы, как замагнченность, неоднородность [7].

Характерным для ионосферной плазмы является наличие внешнего магнитного поля Земли  $B_0$ . Учет магнитного поля, произведенный в работе [10] применительно к верхней ионосфере (высоты 1000 км и более) в рамках нелинейной теории колебаний, на примере параметрического распада непотенциальной электромагнитной волны накачки (с частотой  $\omega_0$ , вектором напряженности электрического поля  $E_0$  и волновым вектором  $k_0$ , параллельным  $B_0$ ) на две косые ленгмюровские волны  $\omega_0 = 2\omega_{L_e} |\cos \theta| (1 + \Delta)$  ( $\Delta \ll 1$ ), принадлежащие ветви нижнего гибридного резонанса, приводит к генерации нескольких характерных длин волн возмущений плазмы, возбуждаемых на начальной стадии развития неустойчивости. При малых расстройках резонанса, когда

$$\Delta_0 \equiv \Delta + \frac{1}{2} \frac{\omega_{L_e}^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \theta \ll \frac{1}{2} (9 \beta_e \sin^2 \theta)^{2/3} \quad (\beta_e = v_{T_e}/c)^*,$$

\*  $\omega_{L_e}$  и  $\Omega_e$  — ленгмюровская и гирокопическая частоты электронов,  $\theta$  — угол между волновым вектором  $k$  возбуждаемых волн и магнитным полем  $B_0$ ;  $r_{D_e} = v_{T_e}/\omega_{L_e}$  — дебаевский радиус электронов,  $v_{T_e}$  — их тепловая скорость,  $n_e$  и  $T_e$  — электронная плотность и температура.

спектр неустойчивых волн концентрируется около одного характерного волнового числа (одна спектральная линия). В работе [11] построена нелинейная теория турбулентности для такого простейшего случая малой расстройки. При больших расстройках  $\Delta_0$  на пороге неустойчивости возбуждается несколько характерных волновых чисел [10] (две или три спектральные линии), что приводит к проявлениям новых свойств механизма насыщения неустойчивости индуцированным рассеянием шума на частицах. Насколько нам известно, задача о насыщении неустойчивости с таким сложным спектром в литературе до сих пор не рассматривалась.

Рассмотрим релаксацию параметрической турбулентности, когда в условиях преобладания кулоновских столкновений с частотой  $\nu_{el}$  над затуханием Ландау (что заведомо выполняется в ионосфере) происходит раскачка колебаний с одинаковым инкрементом

$$\gamma(k, \theta) = \frac{\nu_{el}}{2} \left[ -1 + \left( \frac{27}{4} p^2 \sin^2 \theta \cos^4 \theta - 2 n \rho^2 \left( z - \frac{2\sqrt{2}}{3n} \right)^{2n} \right)^{1/2} \right], \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} n > \theta > \frac{\pi}{2} (n-1), \quad n = 1, 2,$$

и двумя различными волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$  [10]. Здесь  $z$  — безразмерное волновое число,  $p$  — определяется отношением поля накачки  $E_0$  к минимальному пороговому  $E_{min}$ , а величина  $\rho^2$  характеризует резкость зависимости инкремента от волнового числа:

$$z = kr_{D_e} \sqrt{2} (3\beta_e)^{-1/3}, \quad p = E_0/E_{min},$$

$$\rho^2 = \frac{243}{64} \sqrt{3} \frac{\omega_{L_e}^2}{\nu_{el}^2} \beta_e^{4/3} \cos^2 \theta,$$

$$E_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} B_0 \frac{\nu_{el}}{\omega_{L_e}}.$$

В этом случае расстройка  $\Delta_0$  определяется тепловой скоростью электронов:

$$\Delta_0 = 0.5 (3\beta_e)^{2/3}.$$

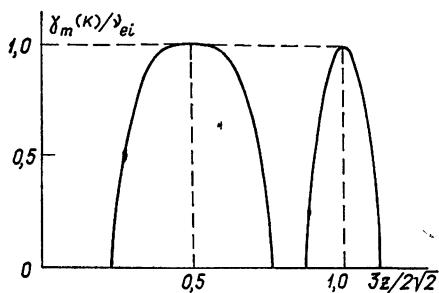


Рис. 1. Зависимость экстремального (по углам) инкремента  $\gamma_m(k)$  от волнового числа  $kr_{D_e} = (z/\sqrt{2}) (3\beta_e)^{1/3}$ .

Меньшее из волновых чисел  $z = \sqrt{2}/3$  реализуется во второй четверти углов  $\pi/2 < \theta < \pi$ ;  $p = 2$ ,  $\rho^2 = 100$ .

Инкремент (1) как функция углов  $\theta$  достигает максимума при  $\theta = \theta_m = \arcsin(1/\sqrt{3})$  и при  $\theta = \pi - \theta_m$ . Зависимость экстремального по углам инкремента  $\gamma_m(k)$  от волнового числа  $k$  схематически представлена на рис. 1.

Если поле  $E_0$  волны накачки немного превышает порог  $E_{min}$  ( $p - 1 < 1^*$ ), то область отличного от нуля инкремента представляет собой две изолированные подобласти в пространстве переменных  $\theta$  и  $k$ . Наличие в формуле (1) четвертой степени скобки  $(z - \sqrt{2}/3)^{2n}$  приводит к своеобразному разли-

\* В действительности из-за большой величины  $\rho^2$  в реальных условиях (например, ионосфере) этот вывод сохраняет силу и при значительном превышении порога,  $p \gg 1$ .

чию эволюции неустойчивых возмущений с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$  в первой и второй четвертях углов.

В основе рассмотрения лежит уравнение для спектральной плотности шума, возникающего благодаря параметрической неустойчивости с инкрементом (1), учитывающее спонтанную генерацию и индуцированное рассеяние шума на частицах [1, 5] (см., например, уравнение (2.3) работы [1]).

Для решения такого уравнения удобно воспользоваться представлением спектральной плотности

$$W(k, \theta, t) = (1 + p^2) \times T_e y_{1,2}(x, z, \tau)$$

вблизи каждого из экстремальных волновых чисел  $z_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$  в виде [12] ( $\rho_0 \equiv \rho(\theta_m)$ )

$$\begin{aligned} y_1(x, z, \tau) &= \left[ \frac{\partial \ln y_1}{\partial \tau} + u_1^{-2}(x, \tau) + (z - 2\sqrt{2}/3)^2 \rho_0^2 \right]^{-1}, \\ y_2(x, z, \tau) &= \left[ \frac{\partial \ln y_2}{\partial \tau} + u_2^{-4/3}(x, \tau) + 2\rho_0^2(z - \sqrt{2}/3)^4 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u_1(x, \tau) = \frac{\rho_0}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' y_1(x, z', \tau),$$

$$u_2(x, \tau) = \frac{2^{3/4} \sqrt{\rho_0}}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} dz' y_2(x, z', \tau);$$

$$x = \begin{cases} \theta - \theta_m, & 0 < \theta < \pi/2, \\ \pi - \theta_m - \theta, & \pi/2 < \theta < \pi, \end{cases} \quad \tau = 3\rho v_{ei} t. \quad (3)$$

В условиях  $\rho_0^2 \gg (p-1)/3\rho$  инкремент неустойчивости (1) имеет более резкую зависимость от волнового числа  $z$ , чем от угла  $x$ , что позволяет для функций  $u_{1,2}(x, \tau)$  получить одномерные интегро-дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \frac{1}{u_1} = u_1 \left( a^2 - x^2 - \varepsilon_1 \int_{x_1}^{x_2} dx' (x' - x + R) u_2(x', \tau) \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \frac{1}{u_2^{1/3}} = u_2 \left( a^2 - x^2 - \varepsilon_2 \int_{x_1}^{x_2} dx' (x' - x - R) u_1(x', \tau) \right);$$

$$a^2 = (p-1)/3\rho, \quad R = \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \beta_e \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_2 = 2^{11/4} \rho_0^{-1/2} \varepsilon_1, \quad (5)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{V^\pi} \frac{2^{9/4}}{3^{15/2}} \frac{(1+p^2)}{pn_e r_{De}^3} \left( \frac{r_{De}}{r_{Di}} + \frac{r_{Di}}{r_{De}} \right)^{-2}.$$

Эти уравнения (4) справедливы в приближении интегральной перекачки энергии турбулентности по спектру

$$a^2 < 2\sqrt[3]{9} (v_{T_e}^3/v_{T_e}^2 c)^{2/3}$$

и для замагниченных биений

$$(a + R)^2 < 3(\Omega_i/\omega_{L_e})^2,$$

когда нелинейным взаимодействием внутри спектральных линий можно пренебречь. Возникновение в ядрах нелинейного взаимодействия слагаемых, пропорциональных  $\pm R$ , обусловлено нелинейной добавкой в спектре неустойчивых колебаний, пропорциональной волновому вектору  $k_0$  волны накачки.

В системе (4) асимметрия спектральных линий  $u_{1,2}$  обусловлена различными знаками перед постоянной переброса  $R$  и возникновением степени  $1/3$  в том слагаемом второго уравнения, которое учитывает вклад спонтанной генерации. Отметим, что благодаря выбору во второй четверти углов  $\theta$  переменной  $x = (\pi - \theta_m) - \theta$  обе линии симметричны с точки зрения направления перекачки. Переходя снова к исходной переменной  $\theta$ , можно увидеть, что перекачка с первой линии на вторую происходит с уменьшением величины угла  $\theta$ , а со второй на первую — с увеличением  $\theta$ , что соответствует в обоих случаях перекачке энергии от больших частот к меньшим.

Стационарные решения системы (4) имеют вид (ср. с решением в работе [12])

$$\begin{aligned} u_1(x, \infty) &= [(x - a_1)^2 + b_1^2]^{-1/2}, \quad u_2(x, \infty) = [(x - a_2)^2 + b_2^2]^{-3/4}, \\ a_1 &= \sqrt{a^2 + R^2 + R}, \quad a_2 = \sqrt{a^2 + R^2 - R}, \quad a_1/\varepsilon_1, \quad a_2/\varepsilon_2 \gg 1, \\ b_1^2 &= 4(x_2 - a_1)(a_1 - x_1) \exp\left(-\frac{2a_2}{\varepsilon_2}\right), \quad b_2 = \frac{\pi^2 \varepsilon_1^2}{2a_1^2}, \quad b_{1,2}^2 \ll 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение (6) отвечает двум асимметричным линиям. Если постоянная переброса  $R$  не мала по сравнению с надпороговостью  $a$ , то возникает значительное уширение линий турбулентного шума с характерным волновым числом  $k_1$  (в первой четверти  $0 < \theta < \pi/2$  углов  $\theta$ ). Переброс  $R$  снижает полный (проинтегрированный по углам) шум в первой линии и увеличивает его во второй:

$$\bar{u}_1(\infty) = 2a_2\varepsilon_2^{-1}, \quad \bar{u}_2(\infty) = 2a_1\varepsilon_1^{-1}. \quad (7)$$

Для анализа нестационарной стадии турбулентности введем моменты спектральных плотностей

$$\bar{u}_{1,2}(\tau) = \int_{x_1}^{x_2} dx u_{1,2}(x, \tau), \quad u_{1,2}(\tau) = \int_{x_1}^{x_2} x u_{1,2}(x, \tau) dx. \quad (8)$$

Тогда с помощью формальных асимптотических решений ( $u_{1,2}(x, \tau) \gg 1$ ,  $a^2\tau \gg 1$ )

$$u_1(x, \tau) = u_1(x, 0) \exp \left[ (a^2 - x^2)\tau - \varepsilon_1(x + R) \int_0^\tau d\tau' u_2(\tau') + \varepsilon_1 \int_0^\tau d\tau' u_2(\tau') \right], \quad (9)$$

$$u_2(x, \tau) = u_2(x, 0) \exp \left[ (a^2 - x^2)\tau - \varepsilon_2(x - R) \int_0^\tau d\tau' u_1(\tau') + \varepsilon_2 \int_0^\tau d\tau' u_1(\tau') \right].$$

из системы (4) получим систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$d(\tau u_1/\bar{u}_1)/d\tau = \varepsilon_1 \bar{u}_2/2, \quad d(\tau u_2/\bar{u}_2)/d\tau = \varepsilon_2 \bar{u}_1/2,$$

$$\begin{aligned} u_1 \bar{u}_1^{-1} &= a^2 \bar{u}_1/u_1 + \varepsilon_1 \bar{u}_2 - \varepsilon_1 \bar{u}_1 u_2/u_1 - u_1^{-1} \frac{du_1}{d\tau} - \varepsilon_1 R \bar{u}_1 \bar{u}_2/u_1, \\ (10) \end{aligned}$$

$$u_2 \bar{u}_2^{-1} = a^2 \bar{u}_2/u_2 + \varepsilon_2 \bar{u}_1 - \varepsilon_2 \bar{u}_2 u_1/u_2 - u_2^{-1} \frac{du_2}{d\tau} + \varepsilon_2 R \bar{u}_1 \bar{u}_2/u_2.$$

В обозначениях

$$u_1 \bar{u}_1^{-1} = A_1, \quad u_2 \bar{u}_2^{-1} = A_2, \quad \varepsilon_1 \bar{u}_1 = 2B_1, \quad \varepsilon_1 \bar{u}_2 = 2B_2$$

система (10) принимает более компактный вид:

$$\begin{aligned} A_1^2 - a^2 &= 2B_2(A_1 - A_2 - R) - \frac{d \ln B_1}{d\tau}, \quad B_1 = \frac{d(\tau A_2)}{d\tau}, \\ (11) \quad A_2^2 - a^2 &= 2B_1(A_2 - A_1 + R) - \frac{d \ln B_2}{d\tau}, \quad B_2 = \frac{d(\tau A_1)}{d\tau}. \end{aligned}$$

Чтобы проследить описываемый решениями системы (11) выход на стационарное турбулентное состояние

$$A_{1,2}(\infty) = \pm R + \sqrt{R^2 + a^2}, \quad B_{1,2}(\infty) = A_{2,1}(\infty),$$

линеаризуем уравнения (11), положив

$$A_{1,2} = A_{1,2}(\infty) + \varphi_{1,2}(\tau), \quad B_{1,2} = B_{1,2}(\infty) + \varphi_{1,2}(\tau),$$

где  $\varphi_{1,2}$  и  $\varphi_{1,2}$  — малые нестационарные добавки. Исключая с помощью одной пары уравнений функции  $\varphi_{1,2}$ , получим для  $\varphi_{1,2}$  систему двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{R}{A_1(\infty)} \varphi_2 - \frac{1}{2a^2} \varphi'_1 + \frac{R}{A_1(\infty)} \tau \varphi'_2 - \frac{\tau}{2a^2} \varphi''_1, \\ (12) \quad \varphi_2 &= -\frac{R}{A_2(\infty)} \varphi_1 - \frac{1}{2a^2} \varphi'_2 - \frac{R}{A_2(\infty)} \tau \varphi'_1 - \frac{\tau}{2a^2} \varphi''_2. \end{aligned}$$

В пределе малого переброса  $R \ll a$ , когда можно полностью пренебречь членами, пропорциональными  $R$ , уравнения системы (12) расщепляются и имеют одинаковый вид для обеих линий. При этом решение аналогично случаю одной линии [1]:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = J_0(2\sqrt{2a^2\tau}), \quad a/R \gg a^2\tau \gg 1. \quad (13)$$

Здесь  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка. Этот результат вполне понятен, так как пренебрежение вкладом переброса  $R$  и вкладом, обусловленным спонтанной генерацией, делает нестационарные уравнения симметричными для обеих линий.

Другой класс решений получается в обратном предельном случае,  $R \gg a$ , когда существен вклад переброса:

$$\varphi_1 = \frac{C_1 + C_2 \ln a^2\tau}{a^2\tau}, \quad \varphi_2 = -2 \frac{R^2}{a^2} \frac{C_2}{a^2\tau}, \quad a^2\tau \gg 1, \quad R \gg a. \quad (14)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, определяемые начальными условиями. В отличие от (13) решение (14) описывает апериодическое нарастание турбулентного шума, причем при условии  $2R^2/a^2 > \ln a^2\tau$  нестационарная добавка  $\varphi_2$  больше, чем  $\varphi_1$ , что связано с дестабилизирующим действием переброса  $R$  по отношению ко второй линии. С другой стороны, при больших временах, когда  $\ln a^2\tau > 2R^2/a^2$ , начинает выпол-

няться соотношение  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Такое поведение решений связано с динамикой перекачки шумов с линии на линию.

Система (12) имеет также чисто периодическое решение:

$$\varphi_1 = C \sin \Omega\tau, \quad \varphi_2 = C \frac{R + \sqrt{R^2 + a^2}}{a} \cos \Omega\tau \quad (15)$$

$$(\Omega = 2aR, \quad a^3 R \tau \gg 1).$$

Существенно, что и в этом случае роль вклада  $R$  сводится к увеличению шума во второй линии. Особенностью решения (15) является фазовый сдвиг осцилляций второй линии на  $\pi/2$  по отношению к первой линии.

Таким образом, теория параметрической турбулентности, развитая здесь для неустойчивости со сложным спектром, выявляет новые аспекты релаксации шума как на стационарной, так и на нестационарной стадиях. Наличие двух характерных масштабов турбулентности (двух спектральных линий) приводит к системе зацепляющихся интегро-дифференциальных уравнений для спектральных плотностей энергии шума. В условиях такого составного спектра индуцированное рассеяние шумов на частицах может и не насыщать неустойчивость. В частности, можно показать, что в случае трех спектральных линий (трех масштабов турбулентных пульсаций) в приближении дифференциальной перекачки стационарное состояние отсутствует. Существенно, что перекачка по спектру с перебросом с одной линии на другую становится квазидвумерной, ибо наряду с плавной перекачкой по углу [11] происходит скачкообразное изменение волнового числа. Полученное теоретически отношение интенсивностей стационарных шумов для двух спектральных линий

$$\left( \frac{E^2(\infty)}{8\pi n_e \times T_e} \right)_{1,2} = 9,5 \frac{v_{ei}}{\omega_{L_e}} \left( \frac{r_{D_e}}{r_{D_l}} + \frac{r_{D_l}}{r_{D_e}} \right)^2 \frac{E_0}{E_{\min}} \left( \frac{3v_{T_l}^3}{v_{T_e}^2 c} \right)^{1/3} \times$$

$$\times \begin{cases} \left( \frac{E_0 - E_{\min}}{3E_0} + \beta_e^{4/3} \right)^{1/2} - \beta_e^{2/3} \\ \left( \frac{E_0 - E_{\min}}{3E_0} + \beta_e^{4/3} \right)^{1/2} + \beta_e^{2/3} \end{cases}$$

может быть проверено экспериментально.

Различие интенсивностей в двух спектральных областях турбулентности, существование различных режимов эволюции во времени турбулентности в зависимости от параметров плазмы—все это отражает своеобразие рассмотренного случая возникновения параметрической неустойчивости сразу в двух различных областях пространства волновых векторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
2. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 59, 2215 (1970).
3. Н. Е. Андреев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Письма в ЖЭТФ, 18, 624 (1973).
4. E. Valeo, C. Obergman and F. W. Perkins, Phys. Rev. Lett., 28, 218 (1972).
5. В. Ю. Быченков, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Письма в ЖТФ, 1, 998 (1975).
6. В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).

7. Специальный выпуск: Модификация ионосферы мощными передатчиками, Rad. Sci., 9, № 11 (1974).
8. У' Ю тло, Р. Коэн, УФН, 109, 371 (1973).
9. H. C. Carlson, W. E. Gordon and R. L. Showen, J. Geophys. Res., 77, 1242 (1972).
10. Г. А. Гусев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 7, 935 (1975).
11. Г. А. Гусев, В. П. Пустовалов, В. П. Силин, ЖТФ, 46, 1192 (1976).
12. Л. М. Дегтярев, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Препринт ФИАН СССР, № 131, М., 1974.

Физический институт имени П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
12 декабря 1975 г.

## SATURATION OF THE PARAMETRIC INSTABILITY WITH MULTI-CONNECTED PUMP REGION

*G. A. Gusev, V. V. Pustovalov, V. P. Slin*

A nonlinear stage of evolution of the parametric instability of the type of decay of a powerful pump wave into two slow Langmuir waves in plasma with magnetized electrons is considered under the conditions when the pump increment achieves one and the same maximum value in two non-intersecting space regions of the wave numbers and the saturation is due to the stimulated scattering of excited waves by ions. In the approximation of the integral energy pumping and magnetized beats three different regimes of evolution of nonstationary turbulence are analysed: pseudo-periodic attenuation of the overall pulsation noise with the frequency decreasing in time, strictly periodic non-attenuating oscillations of the turbulent level, the aperiodic noise has the stationary turbulent value. A sharp asymmetry of the turbulence energy distribution over two zones of the two-connected pump region being equivalent at the linear stage is identified.

УДК 621.391 8

## НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ СТАДИЯ ЗАТУХАНИЯ СОЛИТОНОВ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ

*К. А. Горшков, В. В. Папко*

В нелинейной линии исследовано затухание солитонов на больших расстояниях. Найдены промежуточные асимптотики: в случае низкочастотного поглощения это функция Эйри, а при высокочастотном поглощении — ударная волна конечной длительности.

Распространение солитонов в диссипативных средах исследовалось во многих работах [1-5]. При условии достаточно малой диссипации были получены законы изменения параметров ионно-звуковых и ленг-мюровских солитонов в плазме, солитонов возвышения на поверхности жидкости,  $2\pi$ -импульсов в двухуровневых средах, электромагнитных солитонов в дискретных линиях. Характерным свойством этих решений является их адиабатичность в смысле сохранения профиля волны и связей между ее основными параметрами. Однако даже при сколь угодно малых потерях на достаточно больших пространственно-временных интервалах эта особенность процесса нарушается. Представляет интерес вопрос о том, каким образом происходит дальнейшая эволюция волнового движения. Здесь мы рассмотрим этот процесс для возмущения, соответствующего в начальный момент солитону, в рамках уравнения

$$v_x + vv_t + \beta v_{tt} + \delta_1 v - \delta_2 v_{xx} = 0. \quad (1)$$

Хорошо известно, что в пренебрежении диссипацией решение (1) имеет, в частности, вид

$$v = 3s \operatorname{seh}^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{\beta}} (sx + t). \quad (2)$$

При достаточно малых  $\delta_1, 2$  решение уравнения (1) на начальном этапе затухания остается близким к (2), где величина  $s$  является медленной функцией координаты [3]:

$$s = s_0 \exp\left(-\frac{2}{3} \delta_1 x\right) \left\{1 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{2}{3} \delta_1 x\right)\right]\right\}^{-1}. \quad (3)$$

Некоторые общие сведения о пределах применимости и дальнейшей эволюции решения (2), (3) можно получить, сравнивая его с поправкой первого приближения  $v^{(1)}$ , нахождение которой сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения [6]:

$$v^{(1)} = 2 \left( \frac{2}{5} \delta_2 \beta^{-1/2} s^{1/2} - \delta_1 \beta^{1/2} s^{-1/2} \right) \left[ 1 - \operatorname{th}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{\beta}} \xi\right) \right]. \quad (4)$$

Из (4) прежде всего видно, что  $v^{(1)}$  является равномерно пригодной (по  $\xi = t + \int s dx$ ) поправкой к квазистационарному решению лишь

внутри движущегося слоя толщиной  $\Delta x \approx l \varepsilon_{1,2}^{-1} \ln \varepsilon_{1,2}^{-1}$ , где,  $l \sim s^{-3/2}$  — характерная длина солитона,  $\varepsilon_1 = \delta_1 \beta^{1/2} s^{-3/2}$ ,  $\varepsilon_2 = \delta_2 \beta^{-1/2} s^{-1/2}$  — малые параметры. Однако и внутри этого слоя отношение  $v^{(1)}/v^{(0)}$  меняется с расстоянием и представляется целесообразным выделить три характерные этапа. Так, пока  $x/l < \varepsilon_{1,2}$ , величина  $v^{(1)}/v^{(0)}$  постоянна и равна  $\varepsilon_{1,2}$ ; на расстояниях  $\varepsilon_{1,2}^{-1} < x/l < \varepsilon_1^{-1} \ln \varepsilon_1^{-1}$  ( $\varepsilon_2^{-1} < x/l < \varepsilon_2^{-3}$ ) отношение  $v^{(1)}/v^{(0)}$  возрастает от  $\varepsilon_{1,2}$  до величины порядка единицы, и, наконец, при  $x/l > \varepsilon_1^{-1} \ln \varepsilon_1^{-1}$  ( $x/l > \varepsilon_2^{-3}$ ) представление решения в виде (2) и суммы малых поправок теряет смысл. Решением (2), (3) можно пользоваться до расстояний  $x/l \sim \varepsilon_{1,2}^{-1}$ ; на промежуточном этапе ( $x/l > \varepsilon_{1,2}^{-1}$ ) происходит постепенное разрушение этого решения, проявляющееся в накоплении неадиабатических поправок, которые приводят к качественно иному характеру эволюции волны на расстояниях  $x/l > \varepsilon_1^{-1} \ln \varepsilon_1^{-1}$  ( $x/l > \varepsilon_2^{-3}$ ). Заметим, что на промежуточном этапе характерные отличия решения от (2), (3) имеют вид малых ( $\sim \varepsilon_{1,2}$ ) возмущений, образующихся за солитоном и имеющих ту же полярность, что и солитон (2) в случае высокочастотного поглощения, и противоположную — при низкочастотном поглощении; качественно это согласуется с результатами экспериментов [4] и численного счета [5].

Исследование процесса затухания на последних двух этапах до сих пор не проводилось. Использование приближенных методов по отмеченным причинам невозможно, привлечение же численного интегрирования затруднено, поскольку требует относительно больших затрат машинного времени, в особенности, если необходимо выяснить характерные качественные особенности процесса и его зависимость от параметров. Весьма эффективным оказывается исследование подобных процессов с помощью нелинейных электромагнитных  $LC$ -линий. В длинноволновом приближении уравнение для линии на рис. 1 имеет вид (1), где  $v = \alpha u/C_0$ ,  $\alpha/C_0$  — коэффициент, характеризующий нелинейные свойства емкости  $C$  (запертого  $p-n$ -перехода диода Д814А),  $u$  — напряжение на этой емкости,  $\delta_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{R_1}$ ,  $\delta_2 = \frac{R_2}{2\rho}$ ,  $\rho = (L/C_0)^{1/2}$ ,  $\beta = 1/24$ . Вариация коэффициентов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  осуществлялась изменением со-противлений  $R_1$  и  $R_2$  (минимальные значения величин  $\delta_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_2 = 6 \cdot 10^{-3}$  обусловлены конечной добротностью элементов  $L$  и  $C$ ). Начальные возмущения поступали на вход линий через односторонний элемент (диод Д311) и были близки по своим параметрам к солитонам (2). Линия содержала 60 звеньев, и оба ее конца были разомкнуты, что позволило наблюдать процесс затухания на очень больших расстояниях в результате многократных отражений импульса от концов и прохождений по линии туда и обратно. Линию здесь можно рассматривать как специализированную аналоговую машину для решения уравнения (1). Количественные измерения имели точность не хуже 5% для относительных величин и 10% — для абсолютных. Поскольку затухание солитона в случае низкочастотного ( $\delta_1 \neq 0$ ,  $\delta_2 = 0$ ) и высокочастотного ( $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 \neq 0$ ) поглощения происходит качественно различным образом, то эти два случая естественно рассмотреть раздельно.

1. *Низкочастотное поглощение.* В относящихся к этому случаю экспериментах начальная амплитуда солитонов  $V_0 = 0,14$ , а его пространственный размер  $l_0$  был равен трем (звеньям). Результаты экспе-

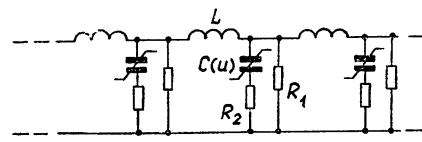


Рис. 1.

риментов, представленные в виде графиков на рис. 2 и осциллограмм на рис. 3 а, подтверждают существование трех качественно различных этапов в процессе затухания солитонов. Так, до расстояний  $x \approx l_{\epsilon_1}^{-1}$  ( $x \approx 70$  звеньев при  $\delta_1 = 6 \cdot 10^{-3}$  и  $x \approx 20$  звеньев при  $\delta_1 = 24 \cdot 10^{-3}$ ) изменение параметров солитона хорошо описывается адабатической теорией (см. рис. 2). На интервале  $\{l_{\epsilon_1}^{-1}, l_{\epsilon_1}^{-1} \ln \epsilon_1^{-1}\}$  уменьшение амплитуды волны еще следует формуле (3), однако ее длительность растет медленнее, чем для квазистационарного солитона (2), (3) и к концу интервала ( $x \approx 230$  и  $x \approx 32$  для двух приводимых значений  $\delta_1$ ) отличия составляют величину порядка самой длительности. Таким образом, сбалансированное вначале совместное действие нелинейности и дисперсии постепенно переходит в доминирующее влияние на эволюцию волны дисперсии и диссиляции, и на последнем этапе изучение процесса может быть сведено к исследованию линейного уравнения, полученного из (1) отбрасыванием нелинейного члена. Зная его решение при  $\delta_1 = 0$  [7], нетрудно записать ограниченное решение и для уравнения с учетом низкочастотного поглощения:

$$v = \text{const } x^{-1/3} \exp(-\delta_1 x) \text{Ai}(tx^{-1/3}), \quad (5)$$

где  $\text{Ai}$  — функция Эйри. Сопоставление приведенных на рис. 2 и 3 а экспериментальных данных с характерными зависимостями, следующими из (5), показывает, что линейное решение (5) дает правильное описание процесса затухания на расстояниях  $x > l_{\epsilon_1}^{-1} \ln \epsilon_1^{-1}$ . Изменение длительности импульса  $\tau$  приближается к типичному для функции Эйри закону  $\tau \sim x^{1/3}$  (рис. 2 а), изменение его амплитуды  $U$  также соответствует выражению (5)\*. Профиль волны становится несимметричным (рис. 3 а), и на уровне  $0.5 V_0$  отношение длительности фронта к длительности спада волны составляет величину 1,45 (для первой осцилляции функции Эйри 1,49...). Меньшие по сравнению с (5) величины амплитуд второй и последующих осцилляций можно объяснить тем, что на расстояниях  $x \approx 240$  эта часть волны еще не успела сформироваться. Кроме того, следует иметь в виду, что присутствие малых высокочастотных потерь ( $\delta_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ) оказывается прежде всего именно на этих осцилляциях.

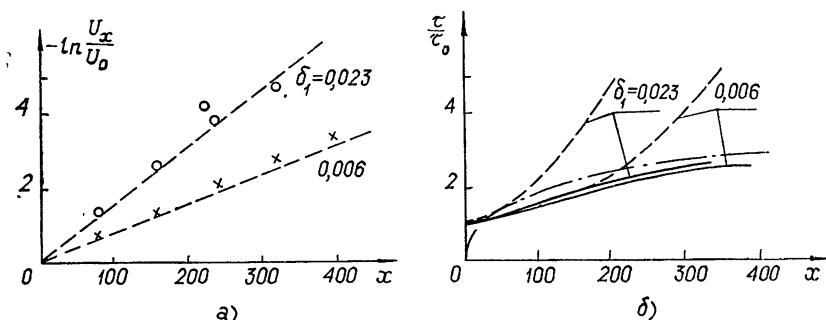


Рис. 2. Изменения амплитуды (а) и длительности импульса на уровне  $0.5 U_0$  (б) по мере затухания в линии с низкочастотным поглощением: сплошная кривая, кружки, крестики — экспериментальные данные; щтриховая кривая, штрих-пунктирная — данные, рассчитанные соответственно по нелинейной и линейной теории.

\* Заметим, что отличие декрементов затухания для линейного и нелинейного решений в значительной мере компенсируется наличием степенного множителя в (5), поэтому изменение амплитуды импульса мало отличается от (3) вплоть до расстояний  $x \approx l_{\epsilon_1}^{-1} \ln \epsilon_1^{-1}$ .

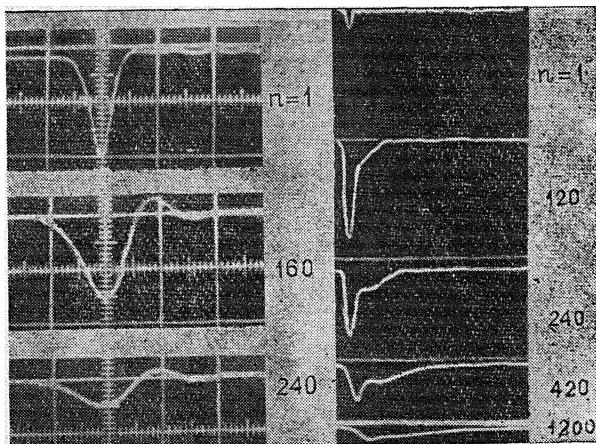


Рис. 3. Осциллограммы, иллюстрирующие преобразование профиля солитона:

а) в линии с низкочастотным поглощением ( $\delta_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ , напряжения при  $x = 160$  и  $x = 240$  усилены в 10 раз); б) в случае высокочастотного поглощения ( $\delta_2 = 18 \cdot 10^{-3}$ ).

**2. Высокочастотное поглощение.** Здесь в экспериментах амплитуда  $V_0 = 0,24$ , а  $l_0 = 2$ . Интересно отметить, что в данном случае изменения амплитуды и длительности волны, как видно из графиков на рис. 4, удовлетворительно описываются адиабатической теорией практически на всем промежуточном интервале до  $x \approx 1000$  ( $\delta_2 = 18 \cdot 10^{-3}$ ), где экспериментальные данные от рассчитанных по (2), (3) отличаются не более чем на 20—30%\*. Однако профиль волны в целом претерпевает значительные изменения. На осциллографмах рис. 3 б можно видеть, что в начале промежуточного интервала за солитоном образуется возмущение со сравнительно плоской вершиной (плато) и монотонным (близким к линейному) спадом. По мере распространения волны длительность линейного спада растет пропорционально пройденному пути (т. е. как в римановой волне), длительность же плато практически не меняется (рис. 4). В целом возмущение затухает значительно медленнее, чем солитон, и к концу промежуточного интервала волна преобразуется в несимметричный треугольный импульс, со значительно большими пространственно-временными масштабами, чем у солитона той же амплитуды. Ясно, что влияние дисперсии на эволюцию такой волны существенно меньше, чем нелинейности, и процесс затухания на этой стадии может быть описан более простым уравнением Бюргерса. Треугольный импульс представляет собой ударную волну конечной длительности [8]:

$$v(x, t) = 2 \left( \frac{\delta}{x} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{t^2}{4\delta_2 x} \right) \left[ a + \Phi \left( \frac{t^2}{4\delta_2 x} \right) \right]^{-1}, \quad (6)$$

где  $\Phi$  — функция Лапласа,  $a$  — коэффициент, определяемый площадью импульса. Как следует из результатов эксперимента, приведенных на

\* При  $\delta_2 = 18 \cdot 10^{-3}$ , согласно оценке, конец промежуточного интервала  $x \approx l \epsilon_2^{-3} = 1500$ . Это расхождение с экспериментом может быть объяснено наличием низкочастотного поглощения ( $\delta_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ ), сказывающимся на больших расстояниях.

рис. 4, на расстоянии  $x \sim l\epsilon_2^{-3}$  изменения амплитуды  $U$  и длительности  $\tau$  импульса приближаются к типичным зависимостям для ударной волны (6):  $U \sim x^{-1/2}$ ,  $\tau \sim x^{1/2}$ . Амплитуду ударной волны можно оценить по следующей эмпирической формуле:

$$U(x \approx l\epsilon_2^{-3}) = \gamma \delta_2 U_0, \quad (7)$$

где  $\gamma = 2,4 \pm 0,3$ ,  $U_0$  — амплитуда солитона при  $x = 0$ .

Детальное исследование затухания волны при смещенных потерях не проводилось, так как уже приведенные результаты экспериментов делают очевидным ход процесса и в этом случае. На достаточно больших расстояниях можно пренебречь и нелинейностью, и дисперсией по сравнению с высокочастотным и низкочастотным поглощением. Про-

филь волны при этом близок к гауссову, что наблюдалось в эксперименте.

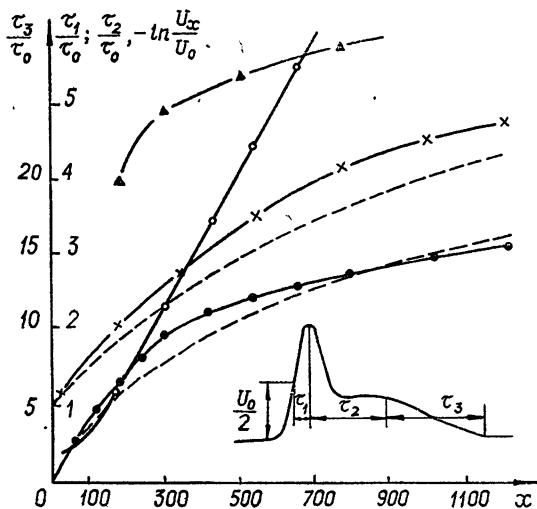


Рис. 4. Изменения амплитуды и длительности различных участков волны при  $\delta_2 = 18 \cdot 10^{-3}$ , наблюдавшиеся в экспериментах (крестики —  $\tau_1/\tau_0$ , треугольники —  $\tau_2/\tau_0$ , светлые кружки —  $\tau_3/\tau_0$ , точки —  $-\ln \frac{U}{U_0}$ ) и рассчитанные по формулам (2), (3) (штриховая кривая —  $\tau_1/\tau_0$ ,  $-\ln \frac{U}{U_0}$ ).

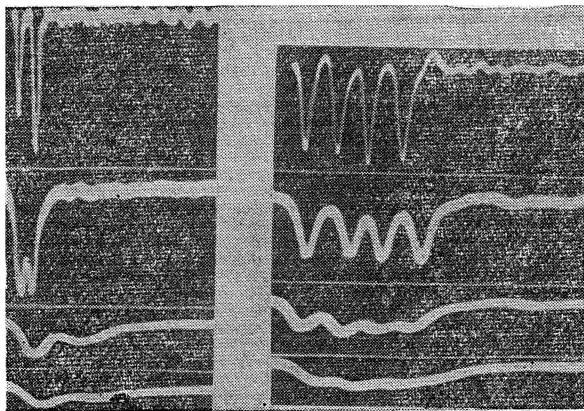


Рис. 5. Осциллографмы, иллюстрирующие взаимодействие двух солитонов (а), и распространение последовательности из четырех солитонов (б) в линии с  $\delta_2 = 0,01$ .

Изменение профиля солитона при затухании оказывает качественное влияние на многие процессы, связанные с уединенными волнами. Так, на рис. 5 а приведены осциллографмы, иллюстрирующие взаимо-

действие двух солитонов в линии с высокочастотными потерями. Вначале процесс протекает так же, как и в отсутствие диссипации: солитоны сближаются, при этом энергия передается от большего солитона к малому, вплоть до выравнивания их амплитуд и скоростей, после чего они начинают расходиться. Однако расположенный сзади солитон оказывается при этом на плато, образующемся за большим солитоном. Это плато увеличивает скорость заднего солитона и препятствует дальнейшему их расхождению. Происходит «захват» одного солитона другим.

При взаимодействии большой группы солитонов приблизительно одинаковой амплитуды (рис. 5 б) «захваты» приводят к образованию на некотором расстоянии почти прямоугольного импульса, который в дальнейшем преобразуется в ударную волну конечной длительности.

В заключение отметим, что решения (5) и (6) представляют собой промежуточные асимптотики соответствующих уравнений [9]. Проведенные исследования позволяют утверждать, что (5) и (6) являются промежуточными асимптотиками и для более сложного уравнения (1) в случаях низкочастотного или высокочастотного поглощения.

Авторы благодарны Л. А. Островскому за внимание к работе и полезные замечания, сделанные при чтении рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. Ott and R. N. Sudan, Phys. Fluids, 12, № 11, 2388 (1969).
2. S. L. Mc Call and E. L. Hahn, Phys. Rev., 183, № 2, 457 (1969).
3. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, № 2, 68 (1971).
4. Л. А. Островский, В. В. Папко, Е. Н. Пелиновский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 580 (1972).
5. Волновые процессы в двухфазных системах, под ред. С С Кукателадзе, СО АН СССР, Институт теплофизики, Новосибирск, 1975.
6. К. А. Горшков, Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ТИИР, 62, № 11, 113 (1974).
7. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1974.
8. О. В. Руденко, С. И. Солуяна, Докл. АН СССР, 190, 4, 815 (1970).
9. Г. И. Баренблatt, Я. Б. Зельдович, УМН, 26, вып. 2 (158) (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
11 марта 1976 г.

#### NONADIABATIC STAGE OF SOLITON DAMPING AND INTERMEDIATE ASYMPTOTICS

*K. A. Gorshkov, V. V. Papko*

The soliton damping at large distances has been investigated in a nonlinear line. Intermediate asymptotics are found in the cases of low-frequency (the Airy function) and high-frequency (a shock wave of the finite duration) absorptions.

УДК 621.372.2

## АВТОКОЛЕБАНИЯ В ВОЛНОВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИ-АКТИВНЫХ СТРУКТУРАХ

Ю. К. Богатырев

Рассматриваются автоколебания в волновой периодической структуре с активными элементами. Найден класс нелинейных волн с широким спектром, охватывающим большое число зон возбуждения структуры. Полученные результаты обобщаются на волновые системы с нелинейной границей. Приводятся данные эксперимента, выполненного в радиодиапазоне, хорошо совпадающие с результатами теории.

Развитие теории волновых автоколебаний, заметно ускорившееся за последние годы, затрагивает в основном распределенные нелинейные системы [1-4]. Вместе с тем, значительный интерес представляют периодические волновые структуры с дискретными нелинейными параметрами, например, квазиоптические резонаторы и электродинамические замедляющие системы, периодически заполненные активной средой, исследование специфических автоколебательных процессов в которых до последнего времени почти не проводилось. Исключение составляют ограниченные волновые структуры с активной нелинейной границей, изученные качественно [5] и в режиме квазигармонических колебаний [6].

В настоящей работе рассматриваются автоколебания в виде стационарных волн в периодически активных нелинейных структурах с периодом, соизмеримым и превышающим характерный пространственный масштаб волн, причем именно таких нелинейных волн, спектр которых охватывает широкую область дискретных возбуждений из различных зон дисперсионной характеристики системы. Метод исследования аналогичен примененному в [7] для анализа структур с реактивной нелинейностью.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим одномерную структуру с периодом  $\Lambda$ , которая во всем пространстве, за исключением дискретных точек  $x_n = n\Lambda$  (рис. 1) ( $n$  — целое), описывается нелинейным волновым уравнением. В точках  $n\Lambda$  связь между полями устанавливается нелинейными граничными условиями относительно совокупности переменных  $u^\pm, v^\pm$ , характеризующих поле соответственно справа и слева от границы. Конкретизируя



Рис. 1.

задачу, исследуем распространение поперечных электромагнитных волн в линии передачи, периодически нагруженной нелинейными активными элементами, когда исходная система уравнений для переменных  $u^+ = u$  и  $v^+ = v$  в точке  $n\Lambda$  сводится к сравнительно общему виду:

$$\begin{aligned} u_n(\tau) - u_{n+1}(\tau + 1) &= \delta \frac{d}{d\tau} \{u_n(\tau) + v_n(\tau)\} + \\ &+ \mu F \{u_{n,n \pm 1}(\tau), v_{n,n \pm 1}(\tau), \dots\}, \\ v_n(\tau) - v_{n+1}(\tau - 1) &= -\delta \frac{d}{d\tau} \{u_n(\tau) + v_n(\tau)\} - \\ &- \mu F \{u_{n,n \pm 1}(\tau), v_{n,n \pm 1}(\tau), \dots\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tau = ct/\Lambda$ ,  $c$  — скорость распространения волны на линейном участке,  $\delta = \text{const}$ ,  $F\{\dots\}$  — однозначная нелинейная функция,  $\mu$  — малый параметр.

В работе [7] показано, что дисперсионная характеристика линейной системы (1) (в приближении  $\mu = 0$ ) допускает выполнение условий фазового синхронизма для широкого дискретного спектра частот, охватывающего большое число зон возбуждения такой структуры и, как следствие, возможность существования в ней стационарных периодических волн несинусоидальной формы. Учитывая эту ситуацию, опустим здесь некоторые общие для обеих систем рассуждения и выкладки, касающиеся в основном линейных аспектов задачи.

Анализ системы (1) начнем с исследования частного класса нелинейных периодических решений в виде колебаний (волн), которые воспроизводят себя в точках  $n\Lambda$  с постоянным запаздыванием  $\Delta\tau = 1 + 2\Delta$  ( $2\Delta$  — безразмерное время запаздывания волны при прохождении нелинейной границы). Задавшись конкретным видом нелинейности, рассмотрим два практически интересных случая.

1. Вначале рассмотрим структуру с эквивалентной схемой активного импеданса (рис. 2 а) в точках  $n\Lambda$ , характерной для туннельных диодов, диодов Ганна и т. п., полупроводниковых СВЧ приборов. Нелинейный оператор  $\mu F\{\dots\}$  в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mu F\{\dots\} &\approx -\tau_0 \left\{ \frac{d}{d\tau} [u_n(\tau) - v_n(\tau)] - \right. \\ &\left. - \frac{\rho}{2\tau_0} \left[ u_n(\tau) + v_n(\tau) - \frac{2R}{\rho} (u_n(\tau) - v_n(\tau)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

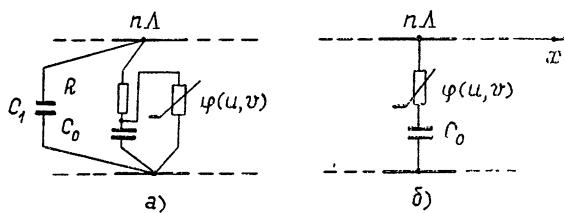


Рис. 2.

где  $\rho^2 = L/C$  ( $R \ll \rho$ ;  $C_1 \ll C_0$ ).

Для стационарных волн система (1), (2) сводится с учётом периодичности решений  $u(\xi - 2\Delta - 2) = u(\xi - 2\Delta)$  и условий равенства амплитуд встречных волн  $v(\xi) = u(\xi - 2\Delta - 2)$  к одному диф-

ференциально-разностному уравнению относительно переменных  $u(\xi)$ ,  $u(\xi \pm \Delta)$ . Задав характеристику нелинейной проводимости в виде  $\varphi[\dots] = -g\{1 - \alpha[\dots]^{q-1}\}[\dots]$  ( $\alpha, g > 0$ ) (в зависимости от начальных условий параметр  $q$  может иметь значения  $q = 2$  — случай квадратичной или  $q = 3$  — кубичной нелинейности), разложим в этом уравнении переменные  $u(\xi \pm \Delta)$  в ряд по малому параметру  $\Delta$ . Ограничиваюсь (в приближении  $\Delta \sim \delta \sim \mu$ ) членами порядка не выше  $\delta^3$ , приходим к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{\Delta - \delta}{\tau_0 \Delta} \frac{du}{d\xi} + \frac{\rho g}{\tau_0} [1 - \alpha(2u)^{q-1}] u = 0, \quad (3)$$

где  $\tau_0 = cRC_0/\Lambda$ ,  $\delta = \rho(C_1 + C_0)c/2\Lambda$  и вместо  $\xi$  введена новая переменная  $\xi_n = \xi + \Delta$ . Уравнение (3) имеет интересующие нас периодические решения лишь при условии  $\Delta = \delta$ . В частности, при  $q = 2$  эти решения — хорошо известные кноидальные волны с периодом  $T \approx 2/n$ . На фазовой плоскости им соответствует дискретный набор замкнутых траекторий. Для всех волн характерен одинаковый фазовый сдвиг (одно и то же время запаздывания  $2\Delta$ ) на нелинейностях структуры. Фазовым траекториям, близким к сепаратрисам, соответствуют автоколебания, близкие к последовательности солитонов. Амплитуда волны, так же как и форма, определяется их периодом.

Аналогичная ситуация имеет место и для распределенных автоколебательных систем [1], где, однако, автоколебаниям в виде периодических стационарных волн, распространяющихся с одинаковой скоростью, соответствует не дискретный, а непрерывный континuum замкнутых траекторий.

2. Исследуем теперь структуру с нелинейными потерями в области высоких, а не низких (как в предыдущем случае) частот, эквивалентная структура которой приведена на рис. 2 б. Оператор  $\mu F\{\dots\}$  имеет здесь более простой вид:

$$\mu F\{\dots\} = -\delta \frac{d}{d\tau} \varphi \left[ \frac{2}{\rho} (u_n(\tau) - v_n(\tau)) \right]. \quad (4)$$

Нелинейность аппроксимируем также полиномом типа  $\varphi[\dots] = -r\{1 - \beta[\dots]^{q-1}\}[\dots]$  ( $r, \beta > 0$ ). После процедуры, аналогичной проделанной в первом случае, для стационарных решений приходим к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} - \varepsilon \left\{ 1 - \left( \frac{dU}{d\xi} \right)^2 \right\} \frac{dU}{d\xi} + \omega_0^2 U = \text{const} \quad (5)$$

с безразмерными переменными  $\xi_n = \xi + \Delta$ ,  $U = 2\Delta(\beta)^{1/2}u/\rho$ , параметрами  $\varepsilon = 6r/(\Delta - 3\delta)\rho\Delta$ ,  $\omega_0^2 = 6(\Delta - \delta)/(\Delta - 3\delta)\Delta^2$ ,  $\delta = \rho C_0 c/2\Lambda$  и  $q = 3$ .

Для любых значений  $\Delta$  (5) — это хорошо изученное в теории колебаний уравнение Ван-дер-Поля. Единственный предельный цикл (5) соответствует автоколебаниям в виде периодических стационарных волн, причем только таким волнам, период которых  $T \approx 2/n$  (точнее  $T = 2(1 + 2\Delta)/n$ ) дискретен.

Форма предельного цикла изменяется в зависимости от значений параметра  $\Delta$ . Если  $(\Delta - \delta)(\Delta - 3\delta) \ll r^2/\rho^2$  — предельный цикл на фазовой плоскости разрывен, — стационарные волны имеют релаксационную форму и большой период следования. При обратном неравенстве имеют место квазигармонические волны с малыми периодами (большими  $n$ ). Строгое отыскание величины  $\Delta$  требует здесь решения

задачи на собственные значения с заданными начальными или граничными условиями. Однако практически для нахождения  $\Delta$  можно воспользоваться соотношением, устанавливающим приближенное равенство  $T = T^*$  между периодом колебаний, определяемым из физической постановки задачи, и периодом  $T^*$ , найденным в первом приближении путем решения уравнения (5). Это равенство имеет вид

$$2(1 + 2\Delta)/n = 1/\omega_0(\Delta) \quad (6)$$

и приводит к алгебраическому уравнению третьей степени.

В целом картина волнового процесса в периодической структуре в обоих рассмотренных выше случаях соответствует двум одинаковым периодическим стационарным волнам, бегущим навстречу друг другу и синфазно взаимодействующим в узлах структуры. В качестве примера на рис. 3 показано распределение поля вдоль структуры для стационарной кноидальной волны с максимальным пространственным периодом  $\lambda = 2\Lambda$  ( $T = 2$ ) в различные моменты времени. Заметим, что аналогичная картина имеет место и в периодической структуре с нелинейными емкостями [7].

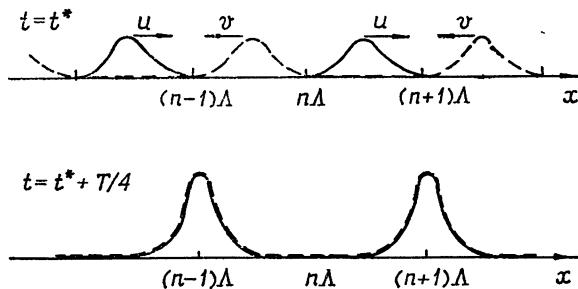


Рис. 3.

## 2. ОГРАНИЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ

Результаты, полученные выше, могут быть использованы для исследования ограниченных, например, кольцевых систем с периодической структурой, а также систем с нелинейной границей. Для кольцевых систем достаточно из множества решений уравнений (3), (5) выбрать лишь те, которые удовлетворяют условиям периодичности, связанным с временем пробега волн по системе.

То же самое относится и к системам с нелинейной границей. Действительно, уравнение, описывающее поле на нелинейной границе в точке  $x = l$  ограниченной системы (рис. 4) при выполнении простейшего условия  $u(0, \tau) = v(0, \tau)$  на противоположном ее конце, имеет вид

$$u(\tau) - v(\tau) = \delta \frac{d}{d\tau} \{u(\tau) + v(\tau)\} + \mu F\{u(\tau), v(\tau)\}. \quad (7)$$

Для класса стационарных волн, форма которых при отражении от нелинейной границы остается неизменной, выполняется очевидное условие:  $v(\tau) = u(\tau - 2\Delta)$ . С учетом этого условия для нелинейной гра-

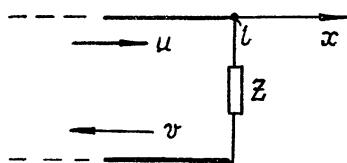


Рис. 4.

ницы, аналогичной, например, представленной на рис. 2, уравнение (7) сводится к виду (3) или (5).

Класс периодических нелинейных решений системы (1) можно существенно расширить, рассмотрев нестационарную задачу об установлении колебаний в периодической структуре, используя процедуру, изложенную в работе [7]. Однако следует отметить, что в ограниченных системах с нелинейной границей способ получения нестационарных уравнений в отличие от [7] имеет небольшую особенность. Дело в том, что здесь переменная  $\xi$  естественно не вводится, поэтому на границе функции  $u(\tau)$ ,  $v(\tau)$  будут формально зависеть от двух переменных  $\tau$  и  $\tau_n = \varepsilon\tau$ . В исходных уравнениях эти переменные могут входить с различными приращениями. Тем не менее, несмотря на то, что  $\tau$  и  $\tau_n$  имеют различные масштабы, искомые функции (решения) могут быть разложены, благодаря малости параметров  $\delta$  и  $\varepsilon$ , в ряды по этим приращениям. Исследование переходных процессов представляет, однако, особую задачу и здесь не рассматривается.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментально автоколебания в волновой периодической структуре исследовались на модели, выполненной в виде кольцевой искусственной *LC*-линии-резонаторе с малыми потерями, содержащей 20 звеньев с параметрами:  $C = 150 \text{ nF}$ ,  $L \approx 6 \text{ мГн}$ ,  $\rho \approx 200 \text{ Ом}$ . В диаметрально противоположные точки линии были подключены нелинейные активные элементы — туннельные диоды типа АИ101Д и дополнительные емкости  $C_1(C_0)$ . Построенная таким образом периодическая структура имела абсолютный пространственный период  $\Lambda_0 = 10$  ячейкам линии и относительный  $\Lambda = 1$ . Ее дисперсионная характеристика содержала 10 структурных полос (зон возбуждения). В точках  $k = n \pi/\Lambda$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), соответствующих верхним границам зон возбуждения, условия синхронизма приближенно (с точностью  $\sim \delta^3$ ) выполнялись для 5—6 гармонических составляющих с кратными частотами, каждая из которых принадлежала только одной зоне.

Сначала экспериментально исследовались автоколебательные режимы работы системы с активными неоднородностями, имеющими эквивалентную схему рис. 2 а ( $C_1 = 300 \text{ nF}$ ). При выполнении условий самовозбуждения в системе возникали устойчивые автоколебания в виде стационарных встречных волн типа представленных на рис. 3. В точках  $n\Lambda$  они воспроизводились как периодические импульсные колебания (стоячие волны). Достаточно хорошо возбуждались лишь первые две моды с относительными пространственными периодами  $\lambda = \Lambda/n = 2$  и 1. Устойчивое существование более высоких мод было затруднительно ввиду возрастания общих потерь системы. Пространственная длительность импульсов в 7 и более раз превышала пространственный масштаб ячейки линии. Время запаздывания  $\Delta t_0 \approx 6 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ , обусловленное разностью фазовых набегов даже между первой и четвертой гармониками спектра импульсов на одно звено структуры, было на порядок меньше времени  $2\Delta t$  запаздывания импульса при прохождении нелинейности. Поэтому влияние пространственной дисперсии отрезка линии между неоднородностями можно было не принимать во внимание, а основным механизмом в формировании вида стационарных автоколебаний считать механизм нелинейного взаимодействия встречных волн в точках  $n\Lambda$ . Форма колебаний в основном зависела от нелинейности (положения рабочей точки на вольт-амперной характеристике туннельного диода) и дисперсии (величины емкости  $C_1$ ). Исследованному здесь теоретическому случаю квадратичной нелинейности соот-

вествовал вывод рабочей точки в область максимума ( $E_{\text{см}} \approx 0,16 B$ ) характеристики диода. При этом нетрудно было обеспечить выполнение равенства  $\Delta/\delta = 1$  ( $\Delta t = 30 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ ), обеспечивающего, согласно (3), генерацию стационарных колебаний в виде волн, по форме близких к уединенным. Осциллограммы таких волн приведены на рис. 5 а, б, в. На рис. 5 а представлены колебания с  $\lambda = 2$  в узлах структуры: сверху в точках  $x_n = n \Lambda$  и ниже в точке  $x_{n+1} = (n + 1) \Lambda$ , а на рис. 5 б между узлами структуры в точке  $x_{n+1/2} = (n + 1/2) \Lambda$  в виде двух волн, бегущих навстречу друг другу, и в точке  $x_n = n \Lambda$ , как результат синфазного встречного взаимодействия этих волн. Спектр колебаний в точках  $x_n = n \Lambda$  (рис. 5 д) содержал пять гармонических составляющих с частотами  $f_1-f_5 = 1,4; 2,8; 4,2; 5,6; 7,6 \text{ МГц}$ , практически совпадающими с частотами синхронных гармонических возбуждений, принадлежащих первым пятью структурным зонам. Минимальная длительность импульсов первой моды  $t_{\text{и}} \approx 200 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ , период следования  $T \approx 720 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ , амплитуда  $U_{\text{в}} \sim 0,18 \text{ В}$  приблизительно соответствовала теоретически рассчитанной из (3)  $U_{\text{т}} = 3/4 \alpha \approx \approx 0,21 \text{ В}$  при условии  $\Delta = \delta$ .

Колебания второй моды сохраняли хорошо выраженный импульсный характер, а колебания третьей моды, имеющей более узкую область устойчивости (по  $E_{\text{см}}$ ), были почти гармоническими.

Экспериментально исследовались также волновые автоколебания в структуре с неоднородностью типа представленной на рис. 2 б ( $C_0 = 300 \text{ нФ}$ ) при кубичной нелинейности характеристики туннельного диода. Здесь, как и в предыдущем случае, устойчиво возбуждались лишь две первые моды колебаний. Одну из них с  $\lambda = 2$  иллюстрируют осциллограммы рис. 5 г ( $x_n = n \Lambda$  и  $x_{n+1} = (n + 1) \Lambda$ ). Здесь форма колебаний была, естественно, отличной от наблюдавшейся на рис. 5 а, б, в. Однако сравнение основных параметров колебаний, теоретически рассчитанных из решения (5), с экспериментальными данными было затруднительным. Дело в том, что в формулы для определения периода колебаний и амплитуды входит разность  $\Delta - \delta \neq 0$ , которую следовало измерять до величин  $\sim \delta^2$ , что при  $\Delta \sim \delta \sim \mu \ll 1$  выходило за рамки точности эксперимента. Поэтому в этом случае эксперимент носил лишь качественный характер.

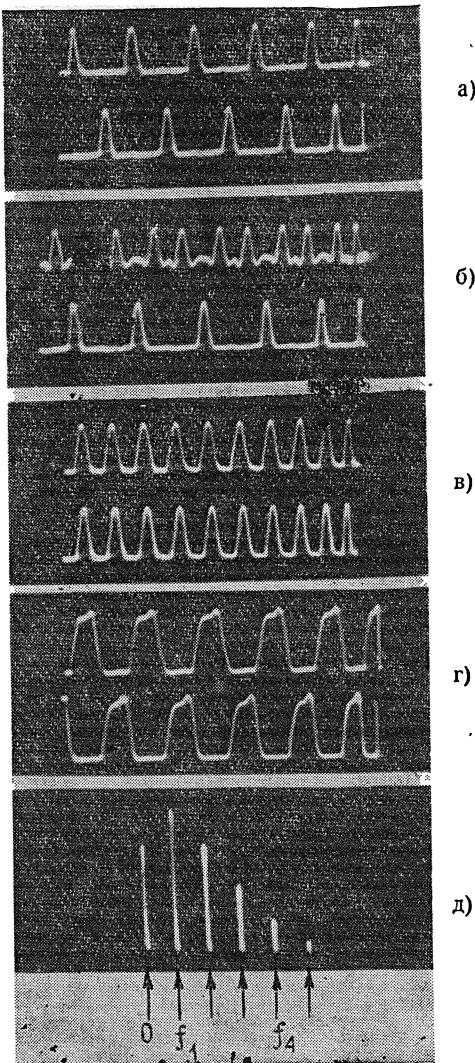


Рис. 5.

В обоих случаях стационарные колебания первых мод были устойчивы по отношению к малым возмущениям начальных условий и малым изменениям параметров системы. Так, небольшие (порядка нескольких процентов) относительные изменения положения рабочей точки на характеристике туннельных диодов или такие же малые изменения параметра  $C_1$  (или  $C_0$ ) практически не влияли на форму колебаний и режим работы системы. Большие возмущения приводили к модовой перестройке режима работы системы.

Картина, аналогичная описанной выше, имела место и в системе с нелинейной границей: отрезке линии, один конец которой был разомкнут, а другой — нагружен на туннельный диод.

В заключение отметим, что результаты, полученные в данной работе, представляют также интерес и с точки зрения практического применения рассмотренных структур в качестве различного рода радиотехнических устройств, где может оказаться существенным наличие многих типов устойчивых колебаний (многочастотных волновых генераторов, высокочастотных преобразователей частоты и других подобных систем [4]).

Автор благодарен Н. П. Ямпурину за помощь в эксперименте и К. А. Горшкову за полезные замечания, сделанные при обсуждении данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 477 (1974).
2. А. И. Жаботинский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 596 (1974).
3. В. А. Солицев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 616 (1974).
4. Ю. К. Богатырев, Импульсные устройства с нелинейными распределенными параметрами, изд. Сов. Радио, М., 1974.
5. А. А. Витт, ЖТФ, 6, № 9, 1459 (1936).
6. M. Shimura, IEEE Trans. Circuit Theory, 14, № 1, 60 (1967).
7. Ю. К. Богатырев, К. А. Горшков, Л. А. Островский, Радиотехника и электроника, 21, № 3, 464 (1976).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
13 октября 1975 г.

#### AUTO-OSCILLATIONS IN WAVE PERIODICALLY-ACTIVE STRUCTURES

*Yu. K. Bogatyrev*

Auto-oscillations in a wave periodic structure with active elements are considered. A class of nonlinear waves with a broad spectrum covering a great number of excitation zones of the structure is found. The results obtained are generalized for wave systems with a nonlinear boundary. The data are presented of the experiment made in a radio band which are in a good agreement with the theory.

УДК 538.56 : 519.25

## ОБ УСРЕДНЕНИИ ПО ВРЕМЕНИ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин

Рассматривается линейная динамическая система с одним флюктуирующими по произвольному закону параметром. Для вычисления второго статистического момента динамической системы за исходное принимается уравнение типа Дайсона в одногрупповом приближении, точность которого по абсолютной погрешности оценивается методом мажорантного процесса. Пренебрежение в исходном уравнении Дайсона, не выходя за пределы его точности, эффектом временного запаздывания приводит к более простому уравнению Кубо. Применение к уравнению Кубо процедуры Боголюбова усреднения по времени, погрешность которой оценивается неравенством, дает усредненное уравнение, включающее в себя как частный случай уравнение двухвременного метода Папаниколау и Келлера.

В работе [1] для вычисления второго статистического момента линейной динамической системы с одним флюктуирующим по произвольному закону параметром составлено уравнение Дайсона в одногрупповом приближении. С помощью мажорантного процесса получена оценка (неравенство) абсолютной погрешности по норме применения этого уравнения.

Уравнение Дайсона в одногрупповом приближении для второго статистического момента динамической системы является довольно сложным. Оказывается, оно допускает существенное упрощение, которое рассматривается в данной работе и производится в несколько этапов. На этих этапах получаются все более простые уравнения, абсолютные погрешности которых оцениваются путем сравнения эволюционных операторов и решения интегральных неравенств [2].

### 1. ПРЕНЕБРЕЖЕНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Линейная динамическая система описывается векторным стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d}{dt} z(t) = [A + B \Theta(t)] z(t), \quad z(0) = z_0. \quad (1)$$

Здесь  $z(t)$  — вектор состояния динамической системы с компонентами  $z_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),  $A$  — матрица невозмущенной системы, которая предполагается диагональной:

$$A = \text{diag}(i\omega_1, \dots, i\omega_N), \quad (2)$$

где все  $\omega_i$  — вещественны,  $B$  — неслучайная постоянная матрица,  $\Theta(t)$  — вещественная случайная функция, закон флюктуаций которой во времени задается набором ее кумулянтных функций. Выбор матрицы  $A$  в виде (2) означает, что невозмущенная динамическая система (1) является консервативной с нормальными координатами  $z_i(t)$  и частотами  $\omega_i$  нормальных колебаний.

Векторным дифференциальным уравнением вида (1) с диагональной невозмущенной матрицей  $A$ , равной (2), можно описать также движение диссипативной динамической системы с одним параметром диссипации, примером которой является гармонический осциллятор с флюктуирующей частотой и неслучайным декрементом затухания.

Обозначим через  $\langle \hat{Z}(t) \rangle$  точное значение второго статистического момента динамической системы, где угловые скобки означают усреднение по ансамблю и  $\hat{Z}(t) = z(t) \times z^*(t)$  — тензорное произведение вектора состояния динамической системы на его комплексно-сопряженное значение. Через  $\hat{Z}_D(t)$  обозначим приближенное значение второго статистического момента динамической системы, вычисленное с помощью уравнения Дайсона в одногрупповом приближении.

Перейдем к представлению взаимодействия (медленно меняющихся амплитуд), полагая

$$\langle \hat{Z}(t) \rangle = e^{\hat{A}t} \langle \hat{R}(t) \rangle, \quad \hat{Z}_D(t) = e^{\hat{A}t} \hat{R}_D(t),$$

где матрица  $\hat{A}$  равна

$$\hat{A} = A \times I + I \times A^*,$$

$I$  — единичная матрица. В этом представлении уравнение Дайсона в одногрупповом приближении может быть записано согласно [1] как

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_D(t) = e^{-\hat{A}t} \int_0^t \hat{M}(t-t') e^{-\hat{A}(t-t')} dt' e^{\hat{A}t} \hat{R}_D(t'), \quad \hat{R}_D(0) = \hat{Z}_0. \quad (3)$$

Здесь матричный массовый оператор  $\hat{M}(t-t')$  выражается через кумулятивные функции случайного параметра  $\Theta(t)$  динамической системы, флюктуации которого предполагаются стационарными, суммой ряда (11) из [1].

Абсолютная погрешность применения уравнения Дайсона (3) к вычислению второго статистического момента динамической системы оценивается по норме неравенством (12) из [1] вида

$$\| \langle \hat{R}(t) \rangle - \hat{R}_D(t) \|_2 \leq \| \hat{k}(t) - \hat{k}_D(t) \| \hat{Z}_0 \|_2. \quad (4)$$

В нем норма  $\| \cdot \|_2$  второго статистического момента определяется через квадратный корень из суммы квадратов модулей его элементов; функции  $\hat{k}(t)$  и  $\hat{k}_D(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\hat{k}(t)}{dt} = \int_0^t \hat{m}(t-t') dt' \hat{k}(t), \quad \hat{k}(0) = 1; \quad (5)$$

$$\frac{d\hat{k}_D(t)}{dt} = \int_0^t \hat{m}(t-t') dt' \hat{k}_D(t'), \quad \hat{k}_D(0) = 1, \quad (6)$$

где ядро  $\hat{m}(t)$  равно сумме ряда (14) из [1]. Функция  $\hat{k}(t)$  совпадает согласно [3] со средним по ансамблю значением вспомогательного одномерного мажорантного процесса для второго статистического момента динамической системы, а функция  $\hat{k}_D(t)$  есть среднее значение этого процесса, вычисленное с помощью уравнения Дайсона в одногрупповом приближении, составленного для одномерного мажорантного процесса.

Разность между решениями локального и нелокального уравнений (5) и (6) оценивается упомянутым во введении методом [2], который поясняется в Приложении. В результате неравенство (4) преобразуется к виду

$$\|\langle \hat{R}(t) \rangle - \hat{R}_D(t) \|_2 \leq \frac{4 t_0 t}{t_M^2} e^{2t/t_M} \|\hat{Z}_0\|_2. \quad (4a)$$

Здесь через  $t_M$  и  $t_0$  обозначены «марковское время релаксации»\*, определяемое соотношением

$$\frac{1}{t_M} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \hat{m}(t) dt, \quad (7)$$

и временной масштаб флюктуаций параметра динамической системы, равный

$$t_0 = \frac{\int_0^\infty t \hat{m}(t) dt}{\int_0^\infty \hat{m}(t) dt}. \quad (8)$$

Из неравенства (4 а) видно, что погрешность применения уравнения Дайсона (3) в одногрупповом приближении стремится к нулю вместе с отношением  $t_0/t_M$  временного масштаба  $t_0$  флюктуаций параметра динамической системы к марковскому времени релаксации  $t_M$  при произвольном\*\*, но ограниченном сверху отношении  $t^*/t_M$  интервала  $0 \leq t \leq t^*$  времени наблюдения к марковскому времени релаксации.

В уравнении Дайсона (3) учитывается эффект временного запаздывания. Пренебрегая этим эффектом, приходим к уравнению вида

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_K(t) = e^{-\hat{A}t} \int_{t_0}^\infty \hat{M}(t'') e^{-\hat{A}t''} dt'' e^{\hat{A}t} \hat{R}_K(t), \quad \hat{R}_K(0) = \hat{Z}_0. \quad (9)$$

Такое уравнение рассматривалось Кубо [4]. Разность между решениями уравнений Дайсона (3) и Кубо (9) оценивается неравенством

$$\|\hat{R}_D(t) - \hat{R}_K(t)\|_2 \leq \frac{2 t_0}{t_M} \left( \frac{2t}{t_M} + 1 \right) e^{2t/t_M} \|\hat{Z}_0\|_2. \quad (10)$$

Сравнение оценок (4 а) и (10) показывает, что погрешность применения уравнений Дайсона (3) такого же порядка, как и погрешность перехода от этого уравнения к уравнению\*\*\* Кубо (9). Переход между уравнениями (3) и (9) производится в два этапа, на первом из которых в правой части уравнения (3)  $\hat{R}_D(t')$  выносится за знак интеграла в точке  $t' = t$  и на втором — верхний предел  $t$  интегрирования по  $t'' = t - t'$  устремляется к бесконечности. Погрешности, возникающие на этих этапах, представлены первым и вторым слагаемыми в правой части неравенства (10), вывод которого дается в Приложении.

\* Оправданность введения этого термина см. в разд. 3.

\*\* Хотя  $t/t_M$  входит в показатель экспоненты оценки (4 а), все же имеется принципиальная возможность сделать правую часть этой оценки сколь угодно малой при произвольном ограниченном  $t/t_M$  и достаточно (возможно экспоненциально) малом  $t_0/t_M$ .

\*\*\* Качественно это понятно, так как обе погрешности связаны с пренебрежением «нелокальностью» в смысле формул (4) — (6).

## 2. УСРЕДНЕНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

Уравнение Кубо (9) является локальным и обратным преобразованием от представления взаимодействия сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Однако и уравнение Кубо допускает упрощение, что приводит к интересному с физической точки зрения результату.

Запишем уравнение Кубо (9) по компонентам:

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_{ij}^{(K)}(t) = \sum_{m,n} \hat{L}_{ijmn}(t) \hat{R}_{mn}^{(K)}(t), \quad \hat{R}_{ij}^{(K)}(0) = \hat{Z}_{ij}^{(0)}. \quad (9a)$$

Элементы матрицы  $\hat{L}(t)$  являются периодическими функциями времени вида

$$\hat{L}_{jklm}(t) = \tilde{\hat{M}}_{jklm}(\omega_m - \omega_l) \exp[i(\omega_k - \omega_j + \omega_l - \omega_m)t] \equiv \hat{C}_{jklm} + \hat{V}_{jklm}^{(1)}(t). \quad (11)$$

Здесь  $\tilde{\hat{M}}(\omega)$  — преобразование Фурье матричного массового оператора  $\hat{M}(t)$  уравнения Дайсона

$$\tilde{\hat{M}}(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \hat{M}(t) dt. \quad (12)$$

Через  $\hat{C}$  и  $\hat{V}(t)$  во втором равенстве (11) обозначены постоянная и переменная во времени части матрицы  $\hat{L}(t)$ . Применим к уравнению Кубо (9) метод усреднения по времени Боголюбова [5]. Это приводит к уравнению для второго статистического момента динамической системы вида

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_y(t) = \hat{C} \hat{R}_y(t), \quad \hat{R}_y(0) = \hat{Z}_0, \quad (13)$$

которое назовем усредненным (по времени).

Можно проверить, что постоянная матрица  $\hat{C}$  равна пределу

$$\hat{C} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^t dt' e^{-\hat{A}t'} \hat{M}(t-t') e^{\hat{A}t'}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что если в выражении матричного массового оператора  $\hat{M}(t)$  оставить только один член с кумулянтной функцией второго порядка случайного параметра  $\Theta(t)$  динамической системы, то усредненное уравнение (13) для ее второго статистического момента совпадает с уравнением Папаниколау [6], полученным двухвременным методом [7].

Погрешность перехода от уравнения Кубо (9) к усредненному уравнению (13), подробности вывода которой поясняются в Приложении, имеет вид

$$\|\hat{R}_k(t) - \hat{R}_y(t)\|_2 \leq \frac{8N^2}{\Omega t_M} \left(1 + \frac{2t}{t_M}\right) e^{2t/t_M} \|\hat{Z}_0\|_2. \quad (15)$$

Здесь через  $\Omega$  обозначена величина

$$\Omega = \min_{1 \leq j, k, l, m \leq N} |\omega_k - \omega_j + \omega_l - \omega_m| \neq 0, \quad (16)$$

где минимум берется при таком условии, что он отличен от нуля.

Согласно оценке (15), погрешность перехода от уравнения Кубо (9) к усредненному уравнению (13) для второго статистического момента стремится к нулю вместе с обратным значением\* произведения  $\Omega t_M$  величины  $\Omega$ , равной минимальной второй разности частот нормальных колебаний динамической системы, на марковское время  $t_M$  релаксации при ограниченном сверху отношении интервала времени наблюдения к марковскому времени релаксации.

### 3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Допустим, что все частоты нормальных колебаний динамической системы попарно различны. Тогда усредненное уравнение (13) распадается на независимые между собой системы уравнений для диагональных  $\hat{R}_{ii}^{(y)}(t)$  и недиагональных  $\hat{R}_{i \neq j}^{(y)}(t)$  элементов второго статистического момента.

Рассмотрим случай, когда параметр  $\Theta(t)$  динамической системы флукутирует по гауссову закону с нулевым средним значением и кумулянтной функцией  $g(t) = \langle \Theta(t)\Theta(0) \rangle$ . Обозначим через  $\tilde{g}(\omega)$  преобразование Фурье этой кумулянтной функции, равное

$$\tilde{g}(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} g(t) dt.$$

Ядро  $\hat{m}(t)$  представляется в рассматриваемом случае вторым членом ряда (14) из [1] вида

$$m(t) = 4 \|B\|_1^2 |g(t)|, \quad (17)$$

где  $\|B\|_1$  — обычная норма матрицы  $B$ .

Система уравнений для диагональных элементов второго статистического момента называемая кратко кинетическим (матричным) уравнением, имеет особенно простой вид, если матрица  $B$  обладает свойством

$$B_{ik} + B_{ki}^* = 0. \quad (18)$$

При этом сумма диагональных элементов (след) случайного тензорного произведения  $\hat{Z}(t)$  вектора состояния динамической системы, удовлетворяющего стохастическому уравнению (1), на его комплексно-сопряженное значение является интегралом движения, что выполняется, например, для волновода в приближении параболического уравнения [6]. При условии (18) кинетическое уравнение записывается как

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_{ii}^{(y)}(t) = \sum_k W_{ik} [-\hat{R}_{ii}^{(y)}(t) + \hat{R}_{kk}^{(y)}(t)], \quad \hat{R}_{ii}^{(y)}(0) = \hat{Z}_{ii}^{(0)}, \quad (19)$$

где коэффициенты  $W_{ik}$  равны

$$W_{ik} = 2 |B_{ik}|^2 \operatorname{Re} \tilde{g}(\omega_i - \omega_k). \quad (20)$$

\* Согласно (11) элементы матрицы  $\hat{L}(t)$  осциллируют с частотой порядка  $\Omega$ . Масштаб изменения  $\hat{R}_K(t)$  во времени порядка  $t_M$ . При условии  $\Omega t_M \gg 1$  существует интервал времени  $t_1$ , такой, что  $1/\Omega \ll t_1 \ll t_M$ , и усреднение уравнения (9) для  $\hat{R}_K(t)$  по интервалу длительности  $t_1$  около  $t$  приближенно дает уравнение (13) для  $\hat{R}_y(t)$ .

Проблеме вывода кинетического уравнения типа (19) посвящен целый ряд работ (см., например, [8]), первая из которых принадлежит Паули. Папаниколау [6] это уравнение получено двухвременным методом.

Кинетическое уравнение (19) описывает процесс релаксации, в результате которого происходит обмен энергией между нормальными колебаниями динамической системы. Коэффициенты релаксации  $W_{ik}$  определяют скорость этого обмена. Если разность  $\omega_i - \omega_k$  каких-либо двух частот нормальных колебаний мала по сравнению с обратным значением  $1/t_0$  временного масштаба флюктуаций параметра динамической системы  $|\omega_i - \omega_k| t_0 \ll 1$ , то соответствующий коэффициент релаксации  $W_{ik}$  становится порядка обратного значения  $1/t_m$  марковского времени релаксации,  $W_{ik} \sim 1/t_m$ . Такое предельное значение коэффициента релаксации равносильно предположению о том, что параметр  $\Theta(t)$  динамической системы флюктуирует по закону белого шума, т. е. дельта-коррелирован.

#### 4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЕТОР С ФЛЮКТУИРУЮЩЕЙ ЧАСТОТОЙ

Для гармонического осциллятора

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} y(t) + \omega_0^2 [1 + \mu(t)] y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \\ \frac{d}{dt} y(0) = \dot{y}_0 \quad (21)$$

частоты невозмущенных нормальных колебаний, когда  $\mu(t) \equiv 0$ , равны  $\pm \omega$ , где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ; на декремент затухания  $\gamma$  накладывается единственное ограничение, что он меньше частоты  $\omega_0$ ,  $\gamma < \omega_0$ . Как уже отмечалось, движение гармонического осциллятора (21) при переходе к нормальным координатам описывается векторным уравнением вида (1). Усредненное уравнение (13) для второго статистического момента осциллятора в нормальных координатах и при условии, что параметр  $\Theta(t) = -\omega_0 \mu(t)$  изменчивости частоты осциллятора флюктуирует по гауссову закону с нулевым средним значением, легко решается. В результате решения этого уравнения для среднего по ансамблю  $\langle y^2(t) \rangle_y$  квадрата смещения гармонического осциллятора получается выражение

$$\langle y^2(t) \rangle_y = \frac{1}{2} (y_0^2 + y_1^2) \exp \left\{ \left[ -2\gamma + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \operatorname{Re} \tilde{g}(2\omega) \right] t \right\} + \\ + \frac{1}{2} (y_0^2 + y_1^2) \exp \left( \left\{ -2\gamma - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} [2\tilde{g}(0) - \operatorname{Re} \tilde{g}(2\omega)] \right\} t \right) \times \quad (22) \\ \times \cos \left\{ \left[ 2\omega - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \operatorname{Im} \tilde{g}(2\omega) \right] t - \varphi_0 \right\}.$$

Здесь

$$y_1 = \frac{1}{\omega} (\gamma y_0 + \dot{y}_0), \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2y_0 y_1}{y_0^2 - y_1^2}.$$

В пределе малого декремента затухания осциллятора, когда  $\gamma/\omega_0 \ll 1$ , и при начальном условии  $\dot{y}_0 = 0$  формула (22) приближенно совпадает с полученной Папаниколау и Келлером [7] двухвременным методом. При экспоненциальной кумулянтной функции флюктуаций частоты осциллятора

$$\langle \mu(t) \mu(0) \rangle = \sigma^2 e^{-t/t_0}, \quad t > 0,$$

первый член формулы (22), испытывающий дополнительный рост по сравнению с невозмущенным осциллятором, принимает вид

$$\langle y^2(t) \rangle_y = \frac{1}{2} (y_0^2 + y_1^2) \exp(-2\gamma t + t/t_r) + \dots \quad (22a)$$

Здесь через  $t_r$  обозначено время дополнительного роста (параметрической раскачки), обратная величина которого равна

$$\frac{1}{t_r} = \frac{1}{1 + 4\omega^2 t_0^2} \frac{1}{2t_M}. \quad (23)$$

Для марковского времени релаксации  $t_M$ , определяемого равенствами (7) и (17), в случае гармонического осциллятора получаем

$$\frac{1}{t_M} = 2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sigma^2 \omega_0^2 t_0. \quad (24)$$

Сравнение равенств (23) и (24) показывает, что в случае мелкомасштабных флуктуаций частоты осциллятора, когда выполняется условие  $\omega t_0 \ll 1$ , время дополнительного роста  $t_r$  приближенно равно  $t_r \approx 2t_M$ , что совпадает с результатом расчета среднего квадрата смещения осциллятора в приближении белого шума. Однако в противоположном случае крупномасштабных флуктуаций частоты  $\omega t_0 \gg 1$  время дополнительного роста  $t_r$  приближенно равно  $t_r \approx 8(\omega t_0)^2 t_M$  и значительно отличается от его значения  $2t_M$  в приближении белого шума.

Для гармонического осциллятора нетрудно оценить относительную погрешность по норме применения усредненного уравнения (13). Эта погрешность получается путем деления суммы абсолютных погрешностей (4 а), (10) и (15) на норму решения усредненного уравнения (13), которая оценивается снизу. В результате получается неравенство

$$\begin{aligned} \| \langle \hat{X}(t) \rangle - \langle \hat{X}_y(t) \rangle_y \|_2 / \| \langle \hat{X}(t) \rangle_y \|_2 &\leq 8\sqrt{2} \left( \frac{t_0}{t_M} + \frac{8}{\omega t_M} \right) \times \\ &\times [1 + 8(1 + 4\omega^2 t_0^2) t/t_r] \exp[(3 + 16\omega^2 t_0^2) t/t_r]. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\langle \hat{X}(t) \rangle$  — точное значение второго статистического момента осциллятора в обычных (не нормальных) координатах работы [1] и  $\langle \hat{X}_y(t) \rangle_y$  — его приближенное значение, вычисленное с помощью усредненного уравнения (13). Как видно, относительная погрешность (25) стремится к нулю вместе с отношениями  $t_0/t_M$  и  $1/\omega t_M$  при произвольных, но ограниченных сверху значениях произведения  $\omega t_0$  и отношения  $t^*/t_r$  ( $t^*$  — интервал времени наблюдения)\*.

В заключение отметим, что в работе [1] при решении уравнения Дайсона для второго статистического момента гармонического осциллятора с малым декрементом затухания в случае крупномасштабных флуктуаций частоты ( $\omega_0 t_0 \gg 1$ ) допущена ошибка, из-за чего время дополнительного роста  $t_r$  оказалось равным  $2t_M$ , а не  $8(\omega_0 t_0)^2 t_M$ , как должно быть.

\* Если  $\omega t_0 \gg 1$  (но ограничено сверху), то правая часть погрешности (4 а) применения уравнения Дайсона порядка  $(t_0/t_M)(\omega t_0)^2(t/t_r) \exp[(\omega t_0)^2 t/t_r]$ . Эта величина при ограниченном сверху  $t/t_r$  становится сколь угодно малой, если  $t_0/t_M$  достаточно (экспоненциально) мало.

Бриссаудом и Фришем [9] с помощью качественных рассуждений оценивалась точность уравнения Дайсона в приближении Бурре, а также уравнения Кубо и уравнения Хасьминского. Их результаты согласуются с оценками в виде неравенств, полученными в данной работе.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Поясним вывод оценки (10) погрешности пренебрежения запаздыванием в уравнении Дайсона (3). Ограничимся получением первого слагаемого в правой части этого неравенства. Обозначим

$$\hat{D}(t, t') = e^{-\hat{A}t} \hat{M}(t - t') e^{\hat{A}t'}.$$

Норма этого ядра оценивается как

$$\|\hat{D}(t, t')\|_2 \leq \hat{m}(t - t'). \quad (\text{П.1})$$

Наряду с уравнением Дайсона (3) вводим другое уравнение

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_1(t) = \int_0^t \hat{D}(t, t') dt' \hat{R}_1(t'), \quad \hat{R}_1(0) = \hat{Z}_0, \quad (\text{П.2})$$

которое формально получается из (3) путем вынесения  $\hat{R}_D(t')$  за знак интеграла в момент  $t' = t$ . Разность между решениями уравнений (3) и (П.2) удовлетворяет (согласно [2] (стр. 161)) соотношению

$$\hat{R}_D(t) - \hat{R}_1(t) = - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{U}_1(t, t') \hat{D}(t', t'') [\hat{R}_D(t') - \hat{R}_D(t'')]. \quad (\text{П.3})$$

Через  $\hat{U}_1(t, s)$  здесь обозначена эволюционная матрица, отвечающая уравнению (П.2). Она находится из интегрального уравнения

$$\hat{U}_1(t, s) = \hat{I} + \int_s^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{D}(t', t'') \hat{U}_1(t', s), \quad (\text{П.4})$$

где  $\hat{I} = I \times I$  — тензорное произведение единичных матриц.

Возьмем норму от обеих частей уравнения (П.4). Это приводит к интегральному неравенству

$$\|\hat{U}_1(t, s)\|_2 \leq 1 + \int_s^t dt' \int_0^{t'} dt'' \|\hat{D}(t', t'')\|_2 \|\hat{U}_1(t', s)\|_2.$$

Оно решается с помощью оценки (П.1) и интегральной леммы [2] (стр. 153), и решение имеет вид

$$\|\hat{U}_1(t, s)\|_2 \leq e^{2(t-s)/t_M}. \quad (\text{П.5})$$

Для оценки нормы решения уравнения Дайсона (3) записываем его в интегральной форме и берем норму от обеих частей этого интегрального уравнения. Приходим к интегральному неравенству

$$\|\hat{R}_D(t)\|_2 \leq \|\hat{Z}_0\|_2 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{m}(t' - t'') \|\hat{R}_D(t'')\|_2. \quad (\text{П.6})$$

Путем изменения порядка интегрирования по  $t'$  и  $t''$  проверяется, что правая часть (П.6) не превосходит правой части более простого интегрального неравенства вида

$$\|\hat{R}_D(t)\|_2 \leq \|\hat{Z}_0\|_2 + \frac{2}{t_M} \int_0^t dt'' \|\hat{R}_D(t'')\|_2, \quad (\text{П.7})$$

решение которого уже легко находится и представляется как

$$\|\hat{R}_D(t)\|_2 \leq e^{2t/t_M} \|\hat{Z}_0\|_2. \quad (\text{П.8})$$

Беря норму от обеих уравнений Дайсона (3) в дифференциальной форме и учитывая (П.8), получаем оценку для нормы производной по времени от  $R_D(t)$  вида

$$\left\| \frac{d}{dt} \hat{R}_D(t) \right\|_2 \leq \frac{2}{t_M} e^{2t/t_M} \|\hat{Z}_0\|_2. \quad (\text{П.9})$$

Вернемся к соотношению (П.3). Оценим в его правой части разность  $\hat{R}_D(t') - \hat{R}_D(t'')$  с помощью теоремы о среднем [11] (стр. 54) в дифференциальном исчислении, имеющей вид неравенства

$$\|\hat{R}_D(t') - \hat{R}_D(t'')\|_2 \leq \sup_{t' < t < t''} \left\| \frac{d}{dt} \hat{R}_D(t) \right\|_2 |t' - t''|. \quad (\text{П.10})$$

Взяв далее норму от обеих частей соотношения (П.3) и используя (П.1), (П.5) и (П.9), получаем первую часть оценки на запаздывание:

$$\|\hat{R}_D(t) - \hat{R}_1(t)\|_2 \leq \frac{4t_0 t}{t_M^2} e^{2t/t_M} \|\hat{Z}_0\|_2.$$

Разность между решениями уравнений (5) и (6) оценивается в точности так же, как сейчас была оценена разность между решениями уравнений Дайсона (3) и (П.2).

При получении оценки (15) погрешности перехода от уравнения Кубо (9) к усредненному уравнению (13) исходим из соотношения

$$\hat{R}_K(t) - \hat{R}_y(t) = \int_0^t dt' e^{\hat{C}(t-t')} \hat{V}(t') \hat{R}_K(t'). \quad (\text{П.11})$$

Вводим матрицу

$$\hat{E}_{jklm}(t) = \frac{1}{i(\omega_k - \omega_j + \omega_l - \omega_m)} \hat{V}_{jklm}(t).$$

С ее помощью проинтегрируем в правой части соотношения (П.11) по частям, используя равенство  $\frac{d\hat{E}(t)}{dt} = \hat{V}(t)$ . Это дает

$$\begin{aligned} \hat{R}_K(t) - \hat{R}_y(t) &= \hat{E}(t) \hat{R}_K(t) - e^{\hat{C}t} \hat{E}(0) \hat{Z}_0 + \\ &+ \int_0^t dt' \hat{E} e^{\hat{C}(t-t')} \hat{E}(t') \hat{R}_K(t') - \int_0^t dt' e^{\hat{C}(t-t')} \hat{E}(t') \hat{L}(t') \hat{R}_K(t'). \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Из определения матрицы  $\hat{L}(t)$  и предельного равенства для матрицы  $\hat{C}$  следует, что их нормы подчиняются оценкам

$$\|\hat{L}(t)\|_2 \leq \frac{2}{t_M}, \quad \|\hat{C}\|_2 \leq \frac{2}{t_M}.$$

Отсюда для нормы матрицы  $\hat{E}(t)$  можно записать цепочку неравенств (см. [10], стр. 43):

$$\|\hat{E}(t)\|_2 \leq N^2 \max_{1 \leq j, k, l, m \leq N} |\hat{E}_{jklm}(t)| \leq \frac{N^2}{\Omega} \|\hat{V}(t)\|_2 \leq \frac{4N^2}{\Omega t_M}.$$

Теперь уже не представляет труда оценить нормы всех членов правой части соотношения (П.12), предварительно оценив еще норму  $\hat{R}_k(t)$  методом интегральных неравенств.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 7, 981 (1974).
2. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, изд. Наука, М., 1970.
3. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1249 (1973).
4. R. Kubo, J. Math. Phys., 4, № 2, 174 (1963).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
6. G. C. Papanicolaou, J. Math. Phys., 13, № 12, 1912 (1972).
7. G. C. Papanicolaou and J. B. Keller, SIAM, J. Appl. Math., 21, № 2, 287 (1971).
8. L. Van Hove, Physica, 21, № 6, 517 (1955); русский перевод в сб. Вопросы квантовой теории необратимых процессов, ИЛ, М., 1961, стр. 10.
9. A. Brissaud and U. Frisch, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974).
10. Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, изд. Мир, М., 1972.
11. Г. Е. Шилов, Математический анализ (Функции нескольких вещественных переменных), ч. 1, 2, изд. Наука, М., 1972.

Поступила в редакцию  
7 июля 1975 г.

## TIME AVERAGING IN THE THEORY OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH RANDOM PARAMETERS

*Yu. N. Barabanenkov, M. I. Kalinin*

The linear dynamic system with one parameter varying according to the arbitrary law is considered. To calculate the second statistic moment of the dynamic system, the Dyson equation is taken as initial in the one-group approximation the accuracy of which is estimated by the majorant process method. Neglecting the effect of the time delay in the initial Dyson equation being not beyond its accuracy, leads to more simple Kubo's equation. Application Bogolubov's method of averaged with time to Kubo's equation gives the averaged equation, which error is estimated by the inequality and which involving, as a particular case, the equation of Papanikolaou and Keller's two-time method.

УДК 621.371.25

## РАВНОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВДОЛЬ ЛУЧЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ КРАТНОСТИ

*O. H. Найдада*

Решена задача о распространении электромагнитной волны в двулучепреломляющей среде, постепенно переходящей в изотропную, в предположении достаточно медленного изменения параметров анизотропной среды (трехмерно-неоднородной).

Цель настоящей работы — исследование поведения волны в линейной среде с медленно меняющимися параметрами. При этом предполагается, что а) среда допускает существование двух невырожденных мод (например, анизотропная среда) и б) при движении по лучу коэффициенты преломления для этих двух мод сближаются и могут стать как угодно близкими или совпадать (например, при выходе в изотропную среду)\*. Медленность изменения параметров среды понимается в смысле, обычном для метода геометрической оптики: частота колебания  $\omega$  много больше обратного характерного периода нестационарности среды ( $\omega \gg T^{-1}$ ), а волновой вектор  $\mathbf{k}$  много больше обратного характерного масштаба неоднородности параметров среды ( $|\mathbf{k}| \gg l^{-1}$ ). При этом считаем, что  $\omega T \sim |\mathbf{k}| l$ . Таким образом, вводится малый параметр  $\mu \sim (\omega T)^{-1} \sim (|\mathbf{k}| l)^{-1}$ .

Ситуация, рассматриваемая в работе, иллюстрируется рис. 1. На нем изображена некоторая область, в которой распространяется электромагнитная волна, выходящая из анизотропной части пространства в изотропную ( $n_1, n_2, \dots$  — коэффициенты преломления, соответствующие различным волновым модам, т. е. обыкновенной и необыкновенной волнам и т. д.). Пусть в среде распространяется волна с коэффициентом преломления  $n_1$ , а  $n_2$  — ближайший к  $n_1$  коэффициент преломления, соответствующий, разумеется, другой моде, причем первоначально на пути волны  $|n_1 - n_2| \sim 1$ , а затем  $n_1$  и  $n_2$  начинают сближаться до совпадения при выходе в изотропную часть пространства. Наша задача состоит в том, чтобы рассчитать поле в области взаимодействия мод, где  $|\mathbf{k}| l |n_1 - n_2| \leq 1$ , т. е. там, где неприменим традиционный метод геометрической оптики (см., например, [2]), предполагающий существование независимых нормальных волн.

Ниже предлагается метод, который можно рассматривать как некоторое усовершенствование приближения геометрической оптики, применимое также и в области взаимодействия мод.

\* Такая постановка задачи называется, как известно, проблемой предельной поляризации [1]; основная трудность в задачах такого рода состоит в нахождении поляризации волны, вышедшей из двулучепреломляющей среды.

Для наглядности удобнее излагать сущность метода применительно к некоторой произвольной линейной системе уравнений

$$L(t, \mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t}, -i \nabla) \mathcal{E} = 0, \quad (1)$$

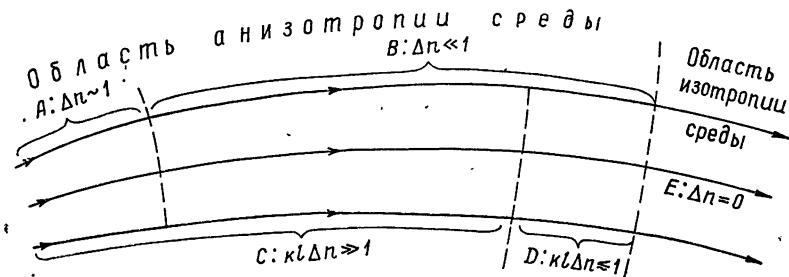


Рис. 1. Выход волны из анизотропной области в изотропную ( $\Delta n = |n_1 - n_2|$ ).

*A* — область сильной анизотропии среды, *B* — область слабой анизотропии, *C* — область слабого взаимодействия волновых мод (независимых нормальных волн), *D* — область существенного взаимодействия волновых мод, *E* — изотропная область,  $A \in C, D \in B$ , области *B* и *C* частично перекрываются.

не оговаривая пока числа компонент вектора  $\mathcal{E}$  и порядка частных производных. Если произвести в (1) обычную геометрооптическую подстановку

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{r}) = E(t, \mathbf{r}) \exp[i\varphi(t, \mathbf{r})], \quad (2)$$

то уравнение (1) преобразуется к виду

$$L(t, \mathbf{r}; \omega, \mathbf{k})E + \tilde{L}[E] = \delta L[E], \quad (3)$$

где  $\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,  $\mathbf{k} = \nabla \varphi$ , а символ  $L(t, \mathbf{r}; \Omega, \mathbf{p})$  введен для обозначения функции  $L$  числовых (а не операторных) переменных:  $L(t, \mathbf{r}; \Omega, \mathbf{p}) = L(t, \mathbf{r}; \Omega, \mathbf{p})$ ; оператор  $\tilde{L}$  в (3) дается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{L}[E] = i & \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} \nabla \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial^2 L}{\partial \Omega^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\nabla \omega \frac{\partial^2 L}{\partial \Omega \partial \mathbf{p}} - \sum_{m,n=1}^3 \frac{\partial k_m}{\partial x_n} \frac{\partial^2 L}{\partial p_m \partial p_n} \right) \right] E, \end{aligned}$$

а остаточный член  $\delta L[E]$  имеет по отношению к  $\tilde{L}[E]$  порядок малости  $|E|^{-1} O(|k|^{-1} l \left| \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right|)^*$ . Для рассматриваемых здесь решений  $E(x)$ , у которых вдали от области взаимодействия  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \sim l^{-2}$ , величина  $\delta L[E]$ .

\* Преобразование, аналогичное переходу к уравнению (3), рассматривалось, например, в работе [3]. Если уравнение (1) содержит частные производные только первого порядка, то  $\delta L \equiv 0$ .

имеет там порядок  $|\mathbf{k}|^{-1}l^{-1}$  по отношению к  $\tilde{L}[E]$ . В области взаимодействия из-за наличия межмодовых биений отношение между  $\delta L$  и  $\tilde{L}$  несколько возрастает, но, как показывает дополнительный анализ, все же остается малым (порядка  $|\mathbf{k}|^{-\theta}l^{-\theta}$ , где  $0 < \theta \ll 1$ ). Поэтому член  $\delta L$  не будет играть существенной роли в дальнейших построениях, использующих запись уравнения (1) в форме (3).

Прежде чем приступить к изложению улучшенного геометрооптического метода решения уравнения (3), оказывается полезным кратко рассмотреть метод геометрической оптики в традиционной форме, что и будет выполнено в разд. 1.

### 1. ТРАДИЦИОННЫЙ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИЙ МЕТОД (РЕШЕНИЯ В ВИДЕ НЕЗАВИСИМЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН)

В рамках этого метода, как известно (см. [2], гл. 6, ч. 1), эйконал  $\varphi(t, \mathbf{r})$ , отвечающий, например, моде с номером 1, подчиняется уравнению  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\Omega_1(t, \mathbf{r}, \nabla \varphi_1)$ , где  $\Omega_1$  — одно из решений  $\Omega_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  дисперсионного уравнения

$$\det L(t, \mathbf{r}; \Omega, \mathbf{p}) = 0. \quad (4)$$

Для эйконала  $\varphi_1$  должно быть задано начальное условие, например,  $\varphi_1(t_{in}, \mathbf{r}) = \varphi_{in}(\mathbf{r})$  при  $t = t_{in}$ .

Как известно, эйконалу  $\varphi_1$  можно сопоставить систему лучей  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; r_{in})$ , определяемую уравнениями Гамильтона,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \Omega_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial p}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \Omega_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial r}, \quad (5)$$

с начальным условием

$$\mathbf{r}(t_{in}; r_{in}) = \mathbf{r}_{in}, \quad \mathbf{k}(t_{in}; r_{in}) = \nabla \varphi_{in}(\mathbf{r}_{in}) \quad (6)$$

(начальная точка и начальный волновой вектор при  $t = t_{in}$ ).

В рамках традиционного метода геометрической оптики, оперирующего с независимыми нормальными волнами, в нулевом приближении поле волны (отвечающей той же первой моде) представляется в виде

$$E^{(0)}(t, \mathbf{r}) = c_1^{(0)}(t, \mathbf{r}) e_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{k}_1(t, \mathbf{r})), \quad (7)$$

где  $c_1^{(0)}$  — не определенная пока скалярная функция, а  $e_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — поляризационный вектор, соответствующей моде с номером  $\alpha$ :

$$L(t, \mathbf{r}; \Omega_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) e_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0. \quad (8)$$

Множитель  $c_1^{(0)}$  в (7) отыскивается, как известно, из условия разрешимости уравнения первого приближения  $L(t, \mathbf{r}; \omega_1, \mathbf{k}_1) E^{(1)} + \tilde{L}[E^{(0)}] = 0$ , дающего поправку  $E^{(1)}$  к нулевому приближению  $E^{(0)}$ . При этом получается так называемое уравнение переноса для амплитуды  $c_1^{(0)}$ , на выводе которого остановливаться не будем (см. [2]),

$$\frac{dc_1^{(0)}}{dt} + P_{11} c_1^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Здесь полная производная по  $t$  берется вдоль луча (5), а через  $P_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) обозначено

$$P_{\alpha\beta} = -i(e_{\alpha}^*(t, r, k_1) \cdot \tilde{L}[e_{\beta}(t, r, k_1)]). \quad (10)$$

Значения поляризационных векторов  $e_1$  и  $e_2$  берутся здесь на лучах, отвечающих первой моде. Нормировка поляризационных векторов, фигурирующих в (10), произведена по формуле

$$\left( e_{\alpha}^*(t, r, p), \frac{\partial L(t, r; \Omega, p)}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_{\alpha}(t, r, p)} e_{\alpha}(t, r, p) \right) = 1. \quad (11)$$

Если  $\Omega_{\alpha} = \Omega_{\beta}$ , то накладывается также условие

$$\left( e_{\alpha}^*(t, r, p), \frac{\partial L(t, r; \Omega, p)}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_{\beta}(t, r, p)} e_{\beta}(t, r, p) \right) = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (12)$$

При  $\Omega_{\alpha} \neq \Omega_{\beta}$  это условие выполняется тождественно, если матрица  $L$  эрмитова и имеет структуру

$$L(t, r; \Omega, p) = \hat{b}(t, r) \Omega^N + L'(t, r, p),$$

что обычно выполняется в уравнениях математической физики (с  $N = 1$  или  $N = 2$ ); в дальнейшем здесь будет подразумеваться именно такая структура для  $L$ . В случаях, когда  $L$  неэрмитова, то во всех скалярных произведениях сомножитель  $e_{\alpha}^*$  следует заменить на вектор  $e_{\alpha}^r$  — решение транспонированного уравнения  $L^r(t, r; \Omega_{\alpha}(t, r, p)) e_{\alpha}^r = 0$  ( $L_{mn}^r = L_{nm}$ ).

Недостатком метода геометрической оптики, использующего представление о независимых нормальных волнах, является, как известно (см. [2]), то обстоятельство, что при  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  поправки первого и более высоких порядков обращаются в бесконечность: это свидетельствует о неприменимости представления о независимости волн в указанном важном предельном случае.

## 2. УЛУЧШЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ РАВНОМЕРНУЮ АППРОКСИМАЦИЮ

Сформулированная выше трудность преодолевается обычно (см. [4, 5], а также [1], гл. 5) тем, что нулевое приближение строится в виде разложения поля не по одному, а по двум поляризационным или иным векторам; при этом уравнение переноса (9) заменяется системой двух уравнений для амплитуд взаимодействующих нормальных или иных волн. Аналогичный путь выберем и здесь, только сначала произведем разложение искомого решения  $E(x)$  по всем  $M$  ( $M$  — число компонент в  $\mathcal{E}$ ) линейно-независимым поляризационным векторам:

$$E = C_1 e_1(t, r, k_1) + \dots + C_M e_M(t, r, k_1). \quad (13)$$

Как и в формуле (10), значения всех поляризационных векторов берутся на одной (первой) системе лучей.

Уравнения для коэффициентов разложения  $C_1, \dots, C_M$  можно получить, подставляя (13) в (3), проектируя (3) на  $e_1(t, r, k_1), \dots, e_M(t, r, k_1)$ .

и учитывая при этом как тождество (12), так и следующие тождества\*:

$$\left( e_{\alpha}^*(t, r, p), \frac{\partial L(t, r; \Omega, p)}{\partial p} \Big|_{\Omega=\Omega_{\alpha}(t, r, p)} e_{\alpha}(t, r, p) \right) = - \frac{\partial \Omega_{\alpha}(t, r, p)}{\partial p},$$

$$\left( e_{\alpha}^*(t, r, p), \frac{\partial L(t, r; \Omega, p)}{\partial p} \Big|_{\Omega=\Omega_{\beta}(t, r, p)} e_{\beta}(t, r, p) \right) =$$

$$= [\Omega_{\alpha}^N(t, r, p) - \Omega_{\beta}^N(t, r, p)] N^{-1} \Omega_{\beta}^{1-N}(t, r, p) \times$$

$$\times \left( e_{\alpha}^*(t, r, p), \frac{\partial L(t, r; \Omega, p)}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_{\beta}(t, r, p)} \frac{\partial e_{\beta}(t, r, p)}{\partial p} \right) \quad (\alpha \neq \beta).$$

Если близким к корню  $\Omega_1$  может быть только корень  $\Omega_2$ , то систему уравнений, получающуюся в результате указанного проектирования, удобно записать в виде

$$\frac{dC_1}{dt} + P_{11}C_1 + P_{12}C_2 = \frac{\Omega_1^N - \Omega_2^N}{N\Omega_1^{N-1}} \left( e_1^*, \frac{\partial L}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_1} \frac{\partial e_2}{\partial p} \right) \nabla C_2 - i(e_1^*, \delta \tilde{L}[E]); \quad (14)$$

$$\frac{dC_2}{dt} + i(\Omega_2 - \Omega_1)C_2 + P_{21}C_1 + P_{22}C_2 = \frac{\partial(\Omega_1 - \Omega_2)}{\partial p} \nabla C_2 +$$

$$+ \frac{\Omega_2^N - \Omega_1^N}{N\Omega_1^{N-1}} \left( e_2^*, \frac{\partial L}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_1} \frac{\partial e_1}{\partial p} \right) \nabla C_1 + i \left[ (\Omega_2 - \Omega_1) - \frac{\Omega_2^N - \Omega_1^N}{N\Omega_2^{N-1}} \right] C_2 -$$

$$- i(e_2^*, \delta \tilde{L}[E]), \quad (15)$$

$$\delta \tilde{L}[E] = \delta L[E] + \sum \left( i \frac{\partial L}{\partial p} e_1 \nabla C_1 - \tilde{L}[e_1] C_1 \right);$$

$$C_{\gamma} = (\Omega_{\gamma}^N - \Omega_1^N)^{-1} (e_{\gamma}^*, \tilde{L}[E] - \delta L[E]) N \Omega_{\gamma}^{N-1} \quad (\gamma = 3, \dots, M), \quad (16)$$

где полная производная по  $t$  по-прежнему берется вдоль луча (5).

Существенная особенность уравнений (14), (15) заключается в том, что все частные производные в них сгруппированы или в полные производные по лучу (члены с  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{rp} \nabla$ ), или в комбинации, содержащие множитель  $\Omega_1 - \Omega_2$ , обращающийся в нуль при  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , или отнесены к малому оператору  $\delta L$ , или действуют лишь на  $C_3, \dots, C_M$ . Что же касается уравнения (16), то при  $|\Omega_1 - \Omega_{\gamma}| \sim |\Omega_2 - \Omega_{\gamma}| \sim |\Omega_1|$  оно также содержит в правой части малый множитель  $\mu = |\mathbf{k}|^{-1} l^{-1}**$ . Все это позволяет рассматривать правые части уравнений (14)–(16), по крайней мере при  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , как малые возмущения и учитывать их

\* Первое из приведенных соотношений представляет собой так называемое фундаментальное тождество (см [2]). Оба соотношения вытекают из формул (8), (11), (12). Фундаментальное тождество используется и при выводе уравнения (9).

\*\* С физической точки зрения, малость  $C_{\gamma}$  обусловлена тем, что моды с  $\gamma = 3, \dots, M$  не находятся в синхронизме с взаимодействующими модами ( $\alpha = 1, 2$ ), а потому имеют малые амплитуды.

в первом порядке итерации, строя таким образом нулевое приближение  $E^{(0)}$  по формулам

$$E^{(0)} = C_1^{(0)} e_1(t, r, k_1) + C_2^{(0)} e_2(t, r, k_1), \quad C_1^{(0)} = 0 \quad (17)$$

$$(3 \leq \gamma \leq M);$$

$$\frac{dC_\alpha^{(0)}}{dt} + i(\Omega_\alpha - \Omega_1)C_\alpha^{(0)} + \sum_{\beta=1}^2 P_{\alpha\beta} C_\beta^{(0)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (18)$$

Уравнение (18) по форме аналогично тому, которое использовалось в близких по смыслу задачах квантовой механики [6] и теории нерегулярных волноводов [7]. Нетрудно убедиться (с помощью интегрирования по частям в (18)), что если начальное условие для (18) задано в области, где  $|\Omega_1 - \Omega_2| \sim |\Omega_1| \sim |\Omega_2|$ , и имеет в этой области вид

$$|C_1^{(0)}(t_{in})| \sim 1, \quad C_2^{(0)}(t_{in}) = 0 \quad (19)$$

(т. е. если в указанной области присутствует только первая мода), то вдоль всего луча выполняются оценки

$$|C_1^{(0)}(t)| \leq 1, \quad |C_2^{(0)}(t)| \leq [1 + T |\Omega_1 - \Omega_2|]^{-1}; \quad (20)$$

$$|\nabla C_1^{(0)}|, |\nabla C_2^{(0)}| \leq t^{-1}. \quad (21)$$

Вторая из оценок (20) означает, что вдали от области взаимодействия, т. е. при  $|\Omega_1 - \Omega_2| \sim |\Omega_1| \sim |\Omega_2|$ , уравнение (18) содержит решения (отвечающие начальному условию (19)) типа невзаимодействующих нормальных волн, определяемых уравнениями (7), (9). С другой стороны, при  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  формулы (17), (18) непрерывным образом переходят в уравнения для связанных вырожденных мод (см. [2], гл. 6, ч. 1).

Оказывается, что и в интервале между указанными двумя предельными случаями уравнение (18) обеспечивает равномерную аппроксимацию с точностью не хуже, чем в этих предельных случаях. Однако анализ точности уравнения (18) оказывается непростым делом, так как «возмущающий механизм» членов, фигурирующих в правых частях (14), (15), различен: имеется по крайней мере три разных типа возмущений\*\*. Тем не менее итоговая оценка для всех возмущений оказывается одинаковой ( $\sim \mu$ ). Но показать это (в разд. 4) удается лишь после того, как предварительно (в разд. 3) будут получены достаточно

сильные верхние (по модулю) оценки для частных производных  $\frac{\partial C_\alpha}{\partial x_m}$ ,

$\frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x_m \partial x_n}$ , фигурирующих в правых частях формул (14), (15) явно или через посредство оператора  $\delta \widetilde{D}$ .

### 3. ПЕРЕХОД К НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМ НОРМАЛЬНЫМ ВОЛНАМ

Нетрудно видеть, что при достаточно большом удалении от области взаимодействия, например при  $|\Omega_2 - \Omega_1| \sim |\Omega_1| \sim |\Omega_2|$ , решения  $C^{(0)}$  уравнения (18), удовлетворяющие условию (19), могут быть представлены в виде ряда последовательных приближений:

\* Ю. А. Кравцов любезно сообщил автору, что уравнения, похожие на уравнения (18), но, однако, не обеспечивающие равномерной аппроксимации, были получены в работе [8].

\*\* При этом они действуют по-разному в области взаимодействия мод и вне ее.

$$C_a^{(0)} = C_a^{(0,0)} + C_a^{(0,1)} + C_a^{(0,2)} + \dots, \quad (22)$$

причем в нулевом приближении  $C_2^{(0,0)} = 0$  и

$$\frac{dC_1^{(0,0)}}{dt} + P_{11}C_1^{(0,0)} = 0, \quad |C_1^{(0,0)}(t_{in})| \sim 1. \quad (23)$$

Это нулевое приближение описывает и невзаимодействующие нормальные волны (нулевого приближения традиционной геометрической оптики), в чем легко убедиться, сопоставляя уравнения (23) и (9). Следующие члены ряда (22) удовлетворяют уравнениям

$$C_2^{(0,1)} = \frac{iP_{21}C_1^{(0,0)}}{\Omega_2 - \Omega_1}, \quad \frac{dC_1^{(0,1)}}{dt} + P_{11}C_1^{(0,1)} = -P_{12}C_2^{(0,1)}, \\ C_1^{(0,1)}(t_{in}) = 0; \quad (24)$$

$$C_2^{(0,2)} = \frac{i}{\Omega_2 - \Omega_1} \left( \frac{dC_2^{(0,1)}}{dt} + P_{21}C_1^{(0,1)} + P_{22}C_2^{(0,1)} \right), \quad (25)$$

$$\frac{dC_1^{(0,2)}}{dt} + P_{11}C_1^{(0,2)} = -P_{12}C_2^{(0,2)}, \quad C_1^{(0,2)}(t_{in}) = 0, \dots$$

Первая из формул (24) вдали от области взаимодействия приводит к оценке (20) для  $C_2^{(0)}$ . Нетрудно видеть из (23) — (25), что члены ряда (22), начиная с  $C_a^{(0,2)}$ , убывают примерно по геометрической прогрессии с показателем

$$\mu_{\text{эфф}} = \left| \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right|^{-1} \frac{l}{l_{\text{эфф}}} \mu$$

$$(l_{\text{эфф}}^{-1} = \max \{ l^{-1}, |\nabla \ln |\Omega_1 - \Omega_2|| \}),$$

так что область сходимости ряда (22) определяется условием

$$\mu_{\text{эфф}} \leq 1. \quad (26)$$

Теперь из формул (22) — (25) нетрудно получить и требуемые оценки для частных производных от  $C_a$  в области (26)

$$|\nabla C_2^{(0)}| \leq l_{\text{эфф}}^{-1} \mu |\Omega_1| / |\Omega_1 - \Omega_2|; \quad (27)$$

$$\left| \frac{\partial^2 C_a^{(0)}}{\partial x_m \partial x_n} \right| \leq l^{-1} l_{\text{эфф}}^{-1} \quad (28)$$

и аналогично для частных производных по  $t$ . Из оценки (28), в свою очередь, вытекает

$$|(e_a^*, \delta \tilde{L}[E])| \leq l_{\text{эфф}}^{-1} \mu \frac{\omega}{|k|}, \quad (29)$$

т. е. оператор  $\delta \tilde{L}$  оказывается достаточно мал не только вдали от области взаимодействия, но и до самых ее границ (всюду в области

(26)). В области взаимодействия вид оценок (27) — (29) изменится (см. разд. 4).

Условие (26) показывает, что область взаимодействия, если под таковой подразумевать область расходимости ряда (22), может быть несколько шире, чем область, где  $\mu \frac{|\Omega_1|}{|\Omega_1 - \Omega_2|} \geq 1$ . Этот вывод спра-

ведлив и в отношении традиционной геометрооптической итерации.

Заметим, что формулы (22) — (25) могут быть полезны не только для вывода оценок (27) — (29), но и для исследования асимптотических свойств амплитуд  $C^{(0)}$  вне области взаимодействия\*. Кроме того, они могут быть использованы при построении начального условия для  $C^{(0)}$  в случае, если в начальной точке  $t_{in}$  выполнено условие  $\mu_{\text{эфф}} \ll 1$ , но, однако, в этой точке  $\left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right| \ll 1$ . Тогда, чтобы получить начальное условие для  $C^{(0)}$ , гарантирующее точность аппроксимации порядка  $\mu$ , в итерации (22) — (25) необходимо использовать примерно  $\ln \mu / \ln \mu_{\text{эфф}}$  шагов.

#### А. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ: «ДВУСТОРОННЯЯ» АСИМПТОТИКА

*a) Оценки точности вне области взаимодействия.* В разд. 3 было получено (см. оценку (27)), что величина  $C_2^{(0)}$  и ее градиент малы вдали от области взаимодействия (где перестает быть малым множитель  $\Omega_1 - \Omega_2$  в правых частях (14), (15)). Зато при приближении к границе области взаимодействия, когда величина  $C_2^{(0)}$  уже не обязана быть малой, становится малым множитель  $\Omega_1 - \Omega_2$  в правых частях (14), (15). Эта «двусторонняя» асимптотика (со стороны области взаимодействия мод, где  $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , и со стороны области невзаимодействия, где  $|\Omega_1 - \Omega_2| \sim |\Omega_1| \sim |\Omega_2|$ ) и приводит к тому, что из четырех членов в правых частях (14), (15), которые содержат множитель  $\Omega_1 - \Omega_2$ , два члена становятся равномерно малыми всюду вне области взаимодействия, т. е. в области (26):

$$\left| (\Omega_1 - \Omega_2) \left( e_1^*, \frac{\partial L}{\partial \Omega} \frac{\partial e_2}{\partial p} \right) \nabla C_2^{(0)} \right|, \quad \left| \frac{\partial(\Omega_1 - \Omega_2)}{\partial p} \nabla C_2^{(0)} \right| \leq \mu I_{\text{эфф}}^{-1} \frac{\omega}{|k|}. \quad (30)$$

Второе и третье слагаемые в правой части (15) также содержат множитель  $\Omega_1 - \Omega_2$ , но они уже не обязаны быть малыми вдали от области взаимодействия: здесь  $C_1^{(0)}$  в отличие от  $C_2^{(0)}$  не является малой величиной. Оказывается, однако, что оба эти члена легко могут быть исключены из выражений, «возмущающих» нулевое приближение  $C^{(0)}$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующие вспомогательные величины:

$$\widetilde{C}_1 = C_1^{(0)}, \quad \widetilde{C}_2 = C_2^{(0)} + \eta, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \eta = i \frac{\Omega_2^N - \Omega_1^N}{\Omega_2 - \Omega_1} N^{-1} \Omega_1^{1-N} & \left( e_2^*, \frac{\partial L}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_1}, \frac{\partial e_1}{\partial p} \right) \nabla C_1^{(0)} + \\ & + \left( \frac{\Omega_2^N - \Omega_1^N}{\Omega_2 - \Omega_1} N^{-1} \Omega_2^{1-N} - 1 \right) C_2^{(0)}. \end{aligned}$$

\* В рамках квазизотропного приближения такое исследование в отношении электромагнитных волн было выполнено в работе [9] без использования формул (22) — (25). Эти формулы были получены (другим путем) в [10].

Подставляя теперь выражения (31) в левые части формул:

$$\frac{d(C_\alpha - \tilde{C}_\alpha)}{dt} + i(\Omega_\alpha - \Omega_1)(C_\alpha - \tilde{C}_\alpha) + \sum_{\beta=1}^2 P_{\alpha\beta}(C_\beta - \tilde{C}_\beta) = \xi_\alpha \quad (\alpha = 1, 2), \quad (32)$$

и принимая во внимание уравнения (14), (15) и (18), получаем, что в отличие от правых частей формул (14), (15) «возмущения»  $\xi_1, \xi_2$  удовлетворяют оценке, аналогичной (30):

$$|\xi_1|, |\xi_2| \leq \mu L_{\text{эфф}}^{-1} \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}. \quad (33)$$

Малость  $\xi_1$  и  $\xi_2$  обусловлена неравенствами (29), (30) и тем, что член  $-i\eta(\Omega_2 - \Omega_1)$ , появляющийся в левой части (32) при  $\alpha = 2$ , компенсирует член

$$\frac{\Omega_2^N - \Omega_1^N}{N\Omega_1^{N-1}} \left( e_2^*, \frac{\partial L}{\partial \Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_1}, \frac{\partial e_1}{\partial p} \right) \nabla C_1 + i \left[ (\Omega_2 - \Omega_1) - \frac{\Omega_2^N - \Omega_1^N}{N\Omega_2^{N-1}} \right] C_2,$$

стоящий в правой части (15). С другой стороны, остальные добавочные члены  $\frac{d\eta}{dt}$  и  $P_{\alpha 2}\eta$  в левых частях уравнений (32) не превышают  $\mu L_{\text{эфф}}^{-1} \omega / |\mathbf{k}|$ , так как  $|\eta| \sim \mu$ ,  $\left| \frac{d\eta}{dt} \right| \sim \mu L_{\text{эфф}}^{-1} \omega / |\mathbf{k}|$ . Теперь из формул (32),

(33) нетрудно получить оценку для величины  $C - \tilde{C}$  на интервале от  $t_{in}$  до границы  $t_1$  области взаимодействия:

$$\max \{ |C_1 - \tilde{C}_1|, |C_2 - \tilde{C}_2| \} \leq \int_{t_{in}}^{t_1} \mu L_{\text{эфф}}^{-1} \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} dt \leq \mu^*, \quad (34)$$

где  $t_1$  означает точку на луче, в которой

$$\mu_{\text{эфф}} = 1.$$

Если учесть теперь, что  $|C_{(0)} - \tilde{C}| \leq \mu$ , то из (34) получаем, что всюду в области (26) вплоть до ее границ справедлива оценка

$$\Delta(t) = \max \{ |C_1 - C_1^{(0)}|, |C_2 - C_2^{(0)}| \} \leq \mu \quad (35)$$

с точностью до множителей типа  $|\ln \mu|$ .

б) *Оценки в области взаимодействия и равномерная оценка точности аппроксимации.* Рассмотрим теперь те погрешности нулевого приближения  $C^{(0)}$ , которые накапливаются в области взаимодействия, т. е. при  $t > t_1$ . Если учесть (20) и оценку для оператора  $\delta L$ , то получаем следующую оценку, равномерную по всему лучу:

---

\* Здесь опущен логарифмический по  $\mu$  множитель, появляющийся из-за различия между  $l$  и  $L_{\text{эфф}}$ .

$$\Delta(t) \leq \mu \left[ 1 + \int_{t_1}^{t_0} (|\Omega_1 - \Omega_2| + \mu^{-1} |(e_a^*, \delta \tilde{L}[E])|) dt \right] \sim$$
(36)

$$\sim \mu \left[ 1 + \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left( \left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right| |\mathbf{k}| + l \left| \frac{\partial^2 C_a^{(0)}}{\partial x^2} \right| \right) d\sigma \right],$$

где  $t_0$  — точка на луче, в которой  $\left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right|$  обращается в минимум (например в нуль),  $\sigma$  — длина луча, причем  $\sigma_1 = \sigma(t_1)$ ,  $\sigma_0 = \sigma(t_0)$ ,  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ . При выводе (36) была использована оценка, вытекающая непосредственно из (14) — (16):  $|(\mathbf{e}_a^*, (\delta \tilde{L}[E] - \delta L[E]))| \leq \omega |\mathbf{k}|^{-2} \left| \frac{\partial^2 C_a}{\partial x^2} \right|$ .

Проиллюстрируем оценку (36) на простейшем примере, когда  $\left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right|$  убывает по степенному закону при приближении к некоторому  $\sigma_0$ :

$$\left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right| \sim \begin{cases} |\sigma/l_0|^m & (m \geq 1) \text{ при } \sigma \ll 0, \\ 0 & \text{при } \sigma \geq 0. \end{cases} \quad (37)$$

Тогда получаем

$$|\sigma_1| \sim l_0 (|\mathbf{k}| l_0)^{-1/(m+1)}. \quad (38)$$

Следовательно, если пренебречь вкладом от  $\delta \tilde{L}[E]$ , то

$$\Delta \leq (|\mathbf{k}| l_0)^{-1}. \quad (39)$$

Дополнительный анализ, использующий формулу (51) из разд. 6, показывает, что в случае (37)  $\int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left| \frac{\partial^2 C_a^{(0)}}{\partial x^2} \right| d\sigma \leq l_0^{-1}$  и, следовательно, оценка

(39) справедлива и при учете вклада от  $\delta \tilde{L}[E]$ .

Формулы (38), (39) остаются в силе и в случае, когда сближение корней  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  происходит по степенному закону при  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right| \sim \begin{cases} (\sigma/l_0)^m & (m < -1) \text{ при } \sigma \geq l_0, \\ 1 & \text{при } \sigma \leq l_0, \end{cases} \quad (40)$$

а также если степенные функции заменить на экспоненты вида  $\exp(-l_0/|\sigma|)$  или  $\exp(-l_0^2/\sigma^2)$  в (37) и  $\exp(-\sigma/l_0)$  или  $\exp(-\sigma^2/l_0^2)$  в (40).

Таким образом, решение уравнения (18) с начальным условием (19) позволяет получить равномерную вдоль луча аппроксимацию (с точностью  $\mu$ ) для волны, распространяющейся в направлении выхода из двулучепреломляющего слоя.

Полезно заметить, что изложенный метод применим не только к волновым уравнениям, но и к уравнениям теории колебаний для понижения их порядка. При этом, разумеется, во всех формулах, приведенных выше, следует положить нулю производные по  $r$  и  $p$ . Если же

рассматривается волна, то в уравнении (18) удобнее заменить дифференцирование по  $t$  на дифференцирование по длине луча  $\sigma$ :

$$\frac{dC_{\alpha}^{(0)}}{d\sigma} + i \left| \frac{\partial \Omega_1}{\partial p} \right|^{-1} (\Omega_{\alpha} - \Omega_1) C_{\alpha}^{(0)} + \sum_{\beta=1}^2 p_{\alpha\beta} C_{\beta}^{(0)} = 0 \quad (41)$$

$$(\alpha = 1, 2),$$

где

$$p_{\alpha\beta} = -i \left| \frac{\partial \Omega_1}{\partial p} \right|^{-1} (e_{\alpha}^*, \tilde{L}[e_{\beta}]). \quad (42)$$

## 5. РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Применим полученные выше результаты к уравнениям Максвелла:

$$\frac{\hat{\partial} \varepsilon E}{\partial t} - c \operatorname{rot} H = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + c \operatorname{rot} E = 0 \quad (\varepsilon_{mn}^* = \varepsilon_{nm}).$$

Эту систему можно представить в виде уравнения (1), если вектор  $\mathcal{E}$  в (1) взять шестирядным ( $\mathcal{E} = \{E, H\}$ ), оператор  $L[\mathcal{E}]$  — в виде  $L[a, b] = \left\{ i \frac{\hat{\partial} \varepsilon a}{\partial t} - ic \operatorname{rot} b, i \frac{\partial b}{\partial t} + ic \operatorname{rot} a \right\}$ , так что  $\tilde{L} = L$ , а  $L(t, r; \Omega, p)$  — шестирядная эрмитова матрица, определяемая формулой

$$L(t, r; \Omega, p)\{a, b\} = \{\hat{\Omega} \varepsilon a + c[pb], \Omega b - c[pa]\}.$$

Тогда дисперсионное уравнение (4) есть

$$\det(c^{-2}\Omega^2\varepsilon_{mn} + p_m p_n - \delta_{mn}p^2), \quad (43)$$

а поляризационные векторы  $e_{\alpha} = \{e_{\alpha}, h_{\alpha}\} (\alpha = 1, 2)$  отыскиваются из обычных формул

$$c^{-2}\Omega_{\alpha}^2 \varepsilon e_{\alpha} + [p[p e_{\alpha}]] = 0, \quad h_{\alpha} = c\Omega_{\alpha}^{-1}[p e_{\alpha}]. \quad (44)$$

Нормировочное условие (11) и условие (12) записутся в виде

$$e_{\alpha}^* \varepsilon e_{\beta} + h_{\alpha}^* h_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Наконец, для фигурирующих в уравнении (41) коэффициентов  $p_{\alpha\beta}$  получаем, согласно (42), выражения

$$p_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial \Omega_1}{\partial p} \right|^{-1} \left\{ e_{\alpha}^* \left( \frac{\hat{\partial} \varepsilon e_{\beta}}{\partial t} - c \operatorname{rot} h_{\beta} \right) + h_{\alpha}^* \left( \frac{\partial h_{\beta}}{\partial t} + c \operatorname{rot} e_{\beta} \right) \right\}. \quad (45)$$

Уравнение (41) в соответствии с (39) дает аппроксимацию с точностью  $\sim |\mathbf{k}|^{-1} l^{-1}$ . Заметим, что те же формулы, начиная с (43), получаются и в случае, если в качестве (1) взять уравнение  $\frac{c^{-2}\partial^2 \varepsilon E}{\partial t^2} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = 0$ , т. е. уравнение второго порядка с трехрядным вектором  $\mathcal{E}$ .

В некоторых случаях, особенно в стационарных задачах  $\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \mathcal{E} = E(r) e^{-i\omega t} \right)$ , удобнее пользоваться коэффициентами преломления

$n_a(t, r, p) = |\mathbf{p}| c \Omega_a^{-1}(t, r, p)$ . В этих обозначениях уравнения (43) — (45) перепишутся в виде

$$\det(n^{-2} \epsilon_{mn} + \tau_m \tau_n - \delta_{mn}) = 0 \quad (\tau = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|); \quad (43a)$$

$$n_a^{-2} \overset{\wedge}{\epsilon} \mathbf{e}_a + [\tau[\tau \mathbf{e}_a]] = 0, \quad \mathbf{h}_a = n_a [\tau \mathbf{e}_a]; \quad (44a)$$

$$p_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial |\mathbf{p}| n_1^{-1}}{\partial p} \right|^{-1} \left\{ \mathbf{e}_\alpha^* \left( \frac{\partial \overset{\wedge}{\epsilon} \mathbf{e}_\beta}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{h}_\beta \right) + \mathbf{h}_\alpha^* \left( \frac{\partial \mathbf{h}_\beta}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{e}_\beta \right) \right\}. \quad (45a)$$

Уравнения Гамильтона (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\sigma} &= \frac{\beta_1(t, r, k)}{|\beta_1(t, r, k)|} \quad \left( \beta_\alpha = \frac{\partial |\mathbf{p}| n_\alpha^{-1}(t, r, p)}{\partial p} \right), \\ \frac{dk}{d\sigma} &= -|\beta_1(t, r, k)|^{-1} |\mathbf{k}| \frac{\partial n_\alpha^{-1}(t, r, k)}{\partial r}, \end{aligned}$$

а уравнение (41)

$$\frac{dC_\alpha^{(0)}}{d\sigma} + i \frac{\omega}{c} |\beta_1|^{-1} \left( \frac{n_1}{n_\alpha} - 1 \right) C_\alpha^{(0)} + \sum_{\beta=1}^2 p_{\alpha\beta} C_\beta^{(0)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (46)$$

В случае плоскослоистой среды уравнение (46) (с коэффициентами (45 а)) переходит в уравнение Баддена [5], а в случае изотропной среды — в уравнение Рытова [11]. В случае слабой анизотропии для коэффициентов (45 а) может быть получено несложное разложение по параметру анизотропии  $\Delta \epsilon_{mn} = \epsilon_{mn} - \epsilon \delta_{mn}$  ( $\epsilon = (1/3) \text{Sp } \overset{\wedge}{\epsilon}$ ), которое при отсутствии гиротропии имеет вид

$$p_{11} = p_{22} = \frac{1}{2} \text{div } \tau - \frac{1}{4} \frac{d \ln \epsilon}{d \sigma}, \quad p_{21} = -p_{12} = T^{-1} + \frac{d \varphi}{d \sigma} + \dots, \quad (47)$$

где  $\tau = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ,  $\varphi$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  и поляризационным вектором  $\mathbf{e}_1$ , отсчитываемый от  $\mathbf{n}$  в сторону бинормали  $\mathbf{b} = [\tau \mathbf{n}]$ , а  $T$  — радиус кручения  $T^{-1} = \frac{b d n}{d \sigma}$ ; многоточия в (47) означают члены  $O[l^{-1} |\Delta \epsilon_{mn}|]$ .

Подставляя (47) в (46), получаем систему уравнений

$$\frac{dC_1^{(0)}}{d\sigma} + \left( \frac{1}{2} \text{div } \tau - \frac{1}{4} \frac{d \ln \epsilon}{d \sigma} \right) C_1^{(0)} - \left( T^{-1} + \frac{d \varphi}{d \sigma} \right) C_2^{(0)} + \dots = 0, \quad (46a)$$

$$\frac{dC_2^{(0)}}{d\sigma} + i \frac{\omega}{c} (n_1 - n_2) C_2^{(0)} + \left( T^{-1} + \frac{d \varphi}{d \sigma} \right) C_1^{(0)} + \left( \frac{1}{2} \text{div } \tau - \frac{1}{4} \frac{d \ln \epsilon}{d \sigma} \right) C_2^{(0)} + \dots = 0,$$

которая аналогична уравнениям квазизотропного приближения [4], но несколько точнее (даже если опустить члены, обозначенные многоточиями) благодаря другому виду мнимого множителя (различия в нем

$$\sim \frac{\omega}{c} |\Delta \epsilon|^2.$$

В более общем случае определенную трудность представляет вычисление частных производных  $\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_m}$ ,  $\frac{\partial e}{\partial t}$  (содержащихся в  $p_{\alpha\beta}$ ), поскольку

для их прямого вычисления требовалось бы предварительно знать значения эйконала не только на луче, но и в его окрестности. Оказывается, однако, что эти вычисления можно «локализовать», заменив вычислениями, не требующими выхода за пределы луча. В самом деле [12]\*

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_a}{\partial x_m} &= \frac{\partial e_a(t, r, k)}{\partial x_m} + \frac{\partial e_a(t, r, k)}{\partial p} \frac{\partial k}{\partial x_m}, \\ \frac{\partial e_a}{\partial t} &= \frac{\partial e_a}{\partial t} + \frac{\partial e_a(t, r, k)}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial e_a(t, r, k)}{\partial p} \frac{dk}{dt}, \\ \frac{\partial k_n}{\partial x_m} &= \frac{\partial k_n(t; r_{in})}{\partial r_{in}} \frac{\partial r_{in}(t; r)}{\partial x_m}, \\ \frac{\partial k_n}{\partial t} &= \frac{dk_n}{dt} + \frac{\partial k_n(t; r_{in})}{\partial r_{in}} \frac{\partial r_{in}(t; r)}{\partial t},\end{aligned}$$

а фигурирующие здесь частные производные  $\frac{\partial r_{in}}{\partial x_m}$ ,  $\frac{\partial k_n}{\partial r_{in}}$ , в свою очередь, вычисляются из системы шести уравнений, которую легко получить из уравнений Гамильтона (5):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_n}{\partial r_{in}} \right) &= \sum_{m=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 \Omega_1(t, r, k)}{\partial p_n \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial r_{in}} + \frac{\partial^2 \Omega_1(t, r, k)}{\partial p_n \partial p_m} \frac{\partial k_m}{\partial r_{in}} \right], \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial k_n}{\partial r_{in}} \right) &= - \sum_{m=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 \Omega_1(t, r, k)}{\partial x_n \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial r_{in}} + \frac{\partial^2 \Omega_1(t, r, k)}{\partial p_n \partial p_m} \frac{\partial k_m}{\partial r_{in}} \right].\end{aligned}\quad (49)$$

Теперь осталось лишь обратить матрицу  $\frac{\partial x_m}{\partial r_{in}}$ , чтобы получить  $\frac{\partial r_{in}}{\partial x_m}$ , и воспользоваться формулой

$$\frac{\partial r_{in}(t; r)}{\partial t} = - \sum_{m=1}^3 \frac{\partial r_{in}(t; r)}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt}. \quad (50)$$

Формулы (48)–(50), как и запись уравнения (41) в форме (46) справедливы, разумеется, не только в отношении уравнений Максвелла, но и в отношении уравнения (1) вообще.

## 6. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА (ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ МОД)

§ 7

Известно [13], что если убывание величины  $\left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right|$  происходит по степенному закону (37), то у волн рассматриваемого здесь типа (с  $C_2 \approx 0$  при  $\left| \frac{n_1}{n_2} - 1 \right| \sim 1$ ) компонента  $C_2$  остается малой как вне, так и внутри области взаимодействия:

$$|C_2| \leq \left( |k| l_0 \right)^{-\frac{1}{m+1}}. \quad (51)$$

\* В левых частях этих формул стоят искомые «полные» частные производные, а в правых—частные производные от поляризационных векторов  $e_a$ , рассматриваемых как известные функции семи переменных  $t, r, p$  (см. (8)).

Естественно, что этот результат вытекает и из уравнения (46), если взять его с начальным условием (19). В самом деле, на границе  $\sigma_1$  области взаимодействия получаем из (20), (37) и (38):  $|C_2^{(0)}(\sigma_1)| \leq \leq (\|\mathbf{k}\|l_0)^{-\frac{1}{m+1}}$ . Но поскольку длина области взаимодействия имеет порядок  $l_0(\|\mathbf{k}\|l_0)^{-\frac{1}{m+1}}$  (см. (38)), а производная  $\frac{dC_2^{(0)}}{d\sigma}$  ограничена  $\left(\frac{dC_2^{(0)}}{d\sigma} \leq l_0^{-1}\right)$ , это и ведет к условию (51). Оно может быть получено и путем применения к уравнению (46) теоремы Борна—Фока [6], содержащую оценку типа (51) и полученную в работе [6] применительно к колебательным (не волновым) модам.

Для случая (40) (сближение корней на бесконечности по степенному закону), если при этом выполнено условие  $|p_{\alpha\beta}| \leq l_0\sigma^{-2}$ , справедлива оценка, аналогичная (51):

$$|C_2| \leq (\|\mathbf{k}\|l_0)^{-\frac{1}{m+1}}. \quad (52)$$

Она может быть получена как из оценки (51) путем замены переменной  $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$  в уравнении (46), так и непосредственно из (46), с использованием (38).

Из формул (51), (52) легко получить и верхние оценки для коэффициента  $\eta_{12}$  линейной трансформации первой моды во вторую. Поскольку при непрерывных поляризационных векторах заведомо  $\eta_{12} \leq \max |C_2|^2$ , то  $\eta_{12} \leq (\|\mathbf{k}\|l_0)^{-\frac{2}{m+1}}$  для случая (37) и  $\eta_{12} \leq \leq (\|\mathbf{k}\|l_0)^{-\frac{2}{m+1}}$  для случая (40). Следовательно, в обоих случаях (сближение коэффициентов преломления  $n_1, n_2$  на конечном расстоянии и на бесконечности) коэффициент трансформации мод может быть тем выше, чем быстрее сближаются  $n_1$  и  $n_2$ , и может достигать величин порядка единицы при сближении бесконечного порядка (по экспоненте). Таким образом, как и следовало ожидать, теорема Борна—Фока о трансформации колебательных мод без изменения переносится на трансформацию волновых мод.

Полученные выше результаты позволяют избежать трудностей геометрической оптики, возникающих обычно при наличии переменного поляризационного вырождения, и строить равномерную аппроксимацию для линейных волн различной природы. Хотя допущения, использованные в оценках, и ориентировались в основном на случай электромагнитных волн в среде с  $\epsilon \sim 1$ , однако описанный в работе переход от уравнения (1) к уравнению (46) может быть произведен и в отношении уравнений акустики, уравнений квантовой механики для частиц со спином, и в отношении плазменных (линеаризованных) уравнений\*.

\* Например, в случае уравнений акустики анизотропных неоднородных сред [13]  $\frac{p\partial^2 u_l}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_p \partial x_m} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} \right)$  (обозначения те же, что в [14], стр. 137), во всех формулах, кроме (43)–(45), (47), достаточно положить  $L_{lm}(t, r; \Omega, p) = p\Omega^2 - \frac{1}{2}(\lambda_{iklm} + \lambda_{ikml})p_k p_l$ .

При этом, конечно, следует учитывать, что каждое конкретное уравнение может содержать большие параметры и не связанные с поляризационным вырождением (массовый член в уравнении Дирака и т. п.). Существуют и другие факторы, в равной мере затрудняющие применение и традиционного геометрооптического метода: каустики, дифракция, сильная рефракция и т. п. Каждый такой случай требует дополнительного анализа точности аппроксимации, т. е. дополнительного анализа правых частей уравнений (14) — (16). Однако можно ожидать, что и в этих случаях аппроксимация, даваемая уравнением (46) или (18), или (41), окажется наилучшей.

Полезно заметить, что равномерная геометрооптическая аппроксимация может быть получена и путем «сшивания» невзаимодействующей нормальной волны с решением, полученным в квазизотропном приближении (см. [4], а также [15]). Однако (см. [16]) погрешность даже оптимально «сшитого» решения оказывается существенно большей, чем

в излагаемом методе: примерно  $(|k| l_0)^{-\frac{m}{3m+2}}$  по порядку величины для случая (37). Таким образом, изложенный здесь метод имеет заметные преимущества и в точности аппроксимации. Аналогичные (и более сильные) сравнения можно привести для случая квазиперечного распространения электромагнитной волны в магнитоактивной плазме (например, ионосферной). Вследствие этого, особенно при использовании ЭВМ, решение уравнений из разд. 5 может оказаться более предпочтительным, чем построение решений из «сшитых» кусков, отвечающих разным геометрооптическим уравнениям. Кроме того, изложенный метод сам может оказаться источником различных вторичных полезных асимптотик.

Автор признателен Ю. А. Кравцову, А. Г. Прудковскому, а также С. М. Рытову и участникам его семинара за обсуждение работы и многочисленные полезные замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем уравнения, обобщающие (46 а) на случай гиротропной среды:

$$E = \exp \left( i\varphi_1 + i \frac{\omega}{c} \int \frac{n_2 - n_1}{2} d\sigma \right) (\Phi_1 q_1 + \Phi_2 q_2),$$

$$\frac{d\Phi_\alpha}{d\sigma} + \sum_{\beta=1}^2 \left( -\frac{i\omega}{2c\sqrt{\epsilon}} \Delta \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} + \tilde{p}_{\alpha\beta} \right) \Phi_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2),$$

где

$$\tilde{p}_{11} = \tilde{p}_{22} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \tau + \frac{1}{4} d \ln \frac{\epsilon}{d\sigma},$$

$$\tilde{p}_{21} = -\tilde{p}_{12} \approx T^{-1} + \frac{d\psi}{d\sigma}, \quad \psi = \arctg \left( \frac{q_1 b}{q_1 n} \right),$$

$$q_1 \perp q_2 \perp k_1, \quad q_1^2 = q_2^2 = 1, \quad \operatorname{Im} q_\alpha = 0, \quad \operatorname{Re} \hat{q}_1 \hat{q}_2 = 0,$$

$$\tilde{\Delta \epsilon}_{\alpha\beta} = \epsilon^2 \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_{22}^{-1} - \epsilon_{11}^{-1}}{2}, & -\epsilon_{12}^{-1} \\ -\epsilon_{21}^{-1}, & \frac{\epsilon_{11}^{-1} - \epsilon_{22}^{-1}}{2} \end{pmatrix} + O(|n_1 - n_2| |\Delta \epsilon_{mn}|),$$

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{-1} = q_\alpha \hat{q}_\beta.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
3. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, 1478 (1968).
4. Ю. А. Кравцов, Докл АН СССР, 183, 74 (1968); Диссертация, ГГУ, Горький, 1968.
5. K. G. Budden, Proc. Roy. Soc., 215, 215 (1952).
6. M. Born, V. Fock, Zs. für Phys., 51, 165 (1928).
7. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
8. Л. А. Апресян, Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, В. А. Яшинов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 19, № 9, 1296 (1976).
9. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 12, 1843 (1971).
10. О. Н. Найда, Диссертация, ФИАН, М., 1973.
11. С. М. Рытов, Докл. АН СССР, 18, 263 (1938).
12. Д. С. Лукин, Ю. Г. Спирidonов, в сб. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн, изд. Наука, М., 1971, стр. 265.
13. В. В. Чуренков, Изв АН СССР, серия математическая, 38, № 3, 625 (1974).
14. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория упругости, изд. Наука, М., 1965.
15. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 12, 1833 (1974).
16. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 6, 896 (1974).

Поступила в редакцию  
1 марта 1974 г.,  
после доработки  
21 июля 1976 г

UNIFORM GEOMETRICAL-OPTICS APPROXIMATION OF LINEAR SYSTEMS  
ALONG RAYS OF VARIABLE MULTIPLICITY

O. N. Nalda

The problem of propagation of electromagnetic waves in a birefringence medium uniformly transforming into an isotropic one is solved under the assumption of a sufficiently slow parameter variation of the anisotropic medium (three-dimensionally inhomogeneous).

УДК 538.574.4

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПУАССОНОВСКОГО ТИПА

*П. Н. Свиркунов*

В работе исследуется задача о распространении электромагнитных волн в среде, показатель преломления которой является случайной функцией пуассоновского типа. Применительно к данной среде известные замкнутые интегро-дифференциальные уравнения для моментов поля сведены к системе дифференциальных уравнений, более удобной для анализа. Обсуждается связь уравнений для моментов малых углов в теории рассеяния.

В настоящее время большое внимание уделяется вопросам распространения излучения в случайно-неоднородной среде. Основная проблема заключается в том, чтобы из стохастического волнового уравнения для электромагнитного поля получить замкнутые уравнения для моментов поля. С этой целью в последнее время были предложены достаточно эффективные методы, которые при определенных предположениях позволяют получить уравнения для моментов любого порядка (см. обзоры [1, 2] и цитируемую в них литературу). Существенно, что при выводе этих уравнений для моментов делались дополнительные предположения, например, о гауссовом характере поля показателя преломления [1] либо о малости набега фазы на отдельной неоднородности [2]. В то же время имеется важный пример случайной среды, свойства которой могут не удовлетворять сформулированным выше предположениям. Речь идет о пуассоновском случайном поле показателя преломления, т. е. функции вида

$$n(\mathbf{r}) = \sum_i n_{\alpha_i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (1)$$

где точки с координатами  $\mathbf{r}_i$  распределены в пространстве по закону Пуассона с некоторой концентрацией  $\gamma$ ,  $\alpha_i$  обозначает некоторую совокупность случайных параметров с соответствующей функцией распределения  $dP(\alpha)$ . Такая ситуация, в частности, возникает, когда в среде имеются аэрозольные частицы, изменяющие в своей окрестности показатель преломления, например, вследствие того, что они являются более нагретыми, чем окружающая среда. Тогда, предполагая, что изменение показателя преломления линейно связано с перегревом среды, мы приходим к выражению (1). Можно сказать, что выражение (1) описывает среду с « пятнами », понимая под « пятном » область с измененным показателем преломления.

На важность учета рассеяния излучения на пятнах впервые, по-видимому, обратил внимание Аскарьян [3] (в его терминологии — рассеяние на преломляющих ореолах). Им проведены оценки времен образования пятен, их характерных размеров и соответствующих уровней действующей радиации. Его рассмотрение носило в основном качественный характер. В работе [4], посвященной исследованию распростране-

нения электромагнитных волн в среде с крупномасштабными неоднородностями, когда неприменимы предположения о гауссовой статистике показателя преломления среды, авторы кладут в основу определенные предположения о статистике фазы волны, позволяющие выйти за рамки гауссова приближения.

В настоящей работе статистические характеристики электромагнитного поля выводятся непосредственно из свойств случайного поля показателя преломления (1).

1. Остановимся кратко на статистических свойствах пуассоновского поля (1). Показатель преломления отсчитывается от показателя преломления невозмущенной среды. Относительно функций  $n_{\alpha_i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ , характеризующих отдельные пятна, предположим, что они достаточно быстро спадают при  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \geq d$ , где  $d$  — некоторый масштабный множитель, характеризующий размер пятна.

Информация о статистических свойствах поля  $n(\mathbf{r})$  содержится в характеристическом функционале

$$\Phi(\chi_1, \chi_2) \equiv \langle \exp(i \int n(\mathbf{r}) \chi_1(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + i \int n^*(\mathbf{r}) \chi_2(\mathbf{r}) d\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.1)$$

Индекс  $\langle * \rangle$  означает комплексное сопряжение, скобки  $\langle \rangle$  — усреднение. Процедура усреднения проводится аналогично тому, как это делается для случая пуассоновского процесса [6]. Вначале выбирается некоторый объем  $V$ , содержащий  $N$  частиц, и производим усреднение по всем  $\mathbf{r}_i$  и параметрам  $\alpha_i$ . Получим

$$\begin{aligned} \Phi_N(\chi_1, \chi_2) &= \prod_{i=1}^N \int \frac{d\mathbf{r}_i}{V} dP(\alpha_i) \exp \left[ i \int \left( \sum_{j=1}^N n_{\alpha_j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \chi_1(\mathbf{r}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^N n_{\alpha_j}^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \chi_2(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{r} \right] = \left\{ \int \frac{d\mathbf{r}_0}{V} dP(\alpha) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ i \int (n_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \chi_1(\mathbf{r}) + n_\alpha^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \chi_2(\mathbf{r})) d\mathbf{r} \right] \right\}^N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далее усреднение проводится по возможным значениям  $N$ , которые распределены по закону Пуассона

$$\Phi = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\bar{N}} \frac{(\bar{N})^N}{N!} \Phi_N,$$

где  $\bar{N}$  — среднее значение  $N$ . Окончательно имеем

$$\Phi = \exp \{ v \int d\mathbf{r}_0 dP(\alpha) [\exp(i \int (n_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \chi_1(\mathbf{r}) + n_\alpha^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \chi_2(\mathbf{r})) d\mathbf{r}) - 1] \}. \quad (1.3)$$

Здесь  $v = \lim_{V \rightarrow \infty} \bar{N}/V$  — концентрация пятен.

Моменты  $n(\mathbf{r})$  легко получаются из (1.3) функциональным дифференцированием

$$\left\langle \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n n(\mathbf{r}_i) n^*(\mathbf{r}_j) \right\rangle = (-i)^{n+m} \frac{\delta^{n+m}}{\prod_{i=1}^m \delta \chi_1(\mathbf{r}_i) \prod_{j=1}^n \delta \chi_2(\mathbf{r}_j)} \Phi \Bigg|_{\chi_1, \chi_2=0}. \quad (1.4)$$

В частности, отсюда следует выражение для среднего значения

$$\langle n(r) \rangle = v \int d\mathbf{r} dP(\alpha) n_\alpha(r) \quad (1.5)$$

и для корреляционной функции

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \langle n(\mathbf{r}_1) n^*(\mathbf{r}_2) \rangle - |\langle n \rangle|^2 = \\ &= v \int d\mathbf{r} dP(\alpha) n_\alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}) n_\alpha^*(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из (1.6) можно заключить, что корреляция флюктуаций показателя преломления  $n(r)$  определяется перекрытием отдельных пятен. Таким образом, характерный масштаб корреляции флюктуаций по порядку величины соответствует диаметру пятен.

2. Переайдем к уравнениям для электромагнитного поля. Предположим, что характерный размер пятен много больше длины волны излучения и в то же время значения функций  $n_{\alpha_i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  малы по сравнению с единицей. Будем считать также, что характерные масштабы вдоль направления распространения излучения значительно превышают диаметр пятен. В этом случае для описания моментов поля можно использовать приближение дельта-коррелированности показателя преломления в направлении распространения излучения. Уравнения для моментов поля в этом приближении имеют вид [1]

$$\begin{aligned} M_{n,m}(x, \{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) &= M_{n,m}^0 \left\langle \exp \left\{ ik \int_0^x dy \left[ \sum_{i=1}^n n(y, \rho_i) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sum_{j=1}^m n^*(y, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle + \frac{i}{2k} \int_0^x dy \left\langle \exp \left\{ ik \int_y^x dz \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[ \sum_{i=1}^n n(z, \rho_i) - \sum_{j=1}^m n^*(z, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle \left( \sum_{i=1}^n \Delta_{\rho_i} - \sum_{j=1}^m \Delta_{\rho'_j} \right) M_{n,m}(y, \{\rho_i, \rho'_j\}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) записаны в системе координат, в которой излучение распространяется вдоль оси  $x$ ,  $\{y, z\} \equiv \{\rho\} \perp x$ .

Здесь  $M_{n,m}(x, \{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) \equiv \langle \psi(x, \rho_1) \dots \psi(x, \rho_n), \psi^*(x, \rho'_1) \dots \psi^*(x, \rho'_m) \rangle$ . Выражения для усредненных экспонент в уравнении (2.1) можно получить из (1.3), если выбрать пробные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_1(\mathbf{r}) &= k I_{x,y}(z) \sum_{i=1}^n \delta(\rho - \rho_i), \\ \chi_2(\mathbf{r}) &= -k I_{x,y}(z) \sum_{j=1}^m \delta(\rho - \rho'_j). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$I_{x,y}(z) = \begin{cases} 1 & (z \in (x, y)) \\ 0 & (z \not\in (x, y)) \end{cases}. \quad (2.3)$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} &\left\langle \exp \left\{ ik \int_y^x dz \left[ \sum_{i=1}^n n(z, \rho_i) - \sum_{j=1}^m n^*(z, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ v \int d\mathbf{r}_0 dP(\alpha) \left[ \exp \left( ik \int dz \left( \sum_{i=1}^n n_\alpha(\rho_i - \rho_0, z - z_0) - \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. \left. - \sum_{j=1}^m n_\alpha^*(\rho'_j - \rho_0, z - z_0) \right) \right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для дальнейшего используем следующее асимптотическое ( $|x - y| \rightarrow \infty$ ) равенство:

$$\begin{aligned} & \int dr_0 \left[ \exp \left( ik \int_y^x dz A_\alpha(\rho_0, z - z_0) \right) - 1 \right] = \\ & = (x - y) \int d\rho_0 \left[ \exp \left( \int dz A_\alpha(\rho_0, z) \right) - 1 \right] + O(|x - y|). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для краткости обозначено

$$A_\alpha(\rho_0, z) = ik \left[ \sum_{i=1}^n n_\alpha(\rho_i - \rho_0, z) - \sum_{j=1}^m n_\alpha^*(\rho'_j - \rho_0, z) \right]. \quad (2.6)$$

Пределы интегралов, если они специально не указаны, считаются бесконечными. Не вдаваясь в детали, отметим основную идею доказательства (2.5), заключающуюся в том, что интеграл  $\int_y^x A_\alpha(\rho_0, z - z_0) dz = \int_{y-z_0}^{x-z_0} A_\alpha(\rho_0, z) dz$  как функция  $z_0$  имеет при  $|x - y| \rightarrow \infty$  «столообразный» характер, т. е. при  $|x - y| \gg d$

$$\int_{y-z_0}^{x-z_0} A_\alpha(\rho_0, z) dz \approx \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A_\alpha(\rho_0, z) dz & (y_0 + d \ll z_0 \ll x - d) \\ 0 & (y - d \gg z_0, x + d \ll z_0) \end{cases}. \quad (2.7)$$

Для достаточно больших значений  $|x - y|$  (фактически для значений  $|x - y|$ , значительно превышающих интегральный масштаб пятен) можно пренебречь малой поправкой в соотношении (2.5) и, используя выражение (2.4), переписать уравнения для моментов (2.1) в форме дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial M_{n,m}}{\partial x} = \frac{i}{2k} \left( \sum_{i=1}^n \Delta_{\rho_i} - \sum_{j=1}^m \Delta_{\rho'_j} \right) M_{n,m} + v S(\{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) M_{n,m}; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} S(\{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) = & \int d\rho_0 dP(\alpha) \left\{ \exp \left[ ik \int dz \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \sum_{i=1}^n n_\alpha(\rho_i - \rho_0) - \sum_{j=1}^m n_\alpha^*(\rho'_j - \rho_0, z) \right) \right] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.8a)$$

По форме уравнение (2.8) совпадает с уравнением, полученным в работах [1, 2]. Отличие заключается в виде функции  $S(\{\rho_i\}, \{\rho'_j\})$ , которая в работах [1, 2] определяется только корреляционной функцией показателя преломления  $K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , в то время как (2.8a) содержит кумулянты всех порядков. Результат [1, 2] можно получить из выражения (2.8), если предположить, что набег фаз на отдельном пятне мал по сравнению с единицей:

$$k \int n_\alpha(\rho, z) dz \ll 1. \quad (2.9)$$

В этом случае, разлагая экспоненту в выражении (2.8a) до членов второго порядка по  $n(\mathbf{r})$  (считая, что  $n^* = n$ ), имеем

$$S(\{\rho_i\}, \{\rho'_i\}) \approx ik(n - m) \langle n(r) \rangle - \frac{k^2}{2} \left( \sum_{i,j=1}^n A(\rho_i - \rho_j) + \sum_{i,j=1}^m A(\rho'_i - \rho'_j) - 2 \sum_{i=1, j=1}^{n,m} A(\rho_i - \rho'_j) \right). \quad (2.10)$$

Здесь

$$A(\rho_1 - \rho_2) = \int dz' K(\rho_1 - \rho_2, z - z'). \quad (2.11)$$

При записи соотношения (2.10) учитывалось выражение для корреляционной функции (1.6).

Первое слагаемое в соотношении (2.10) соответствует регулярному сдвигу фазы в среднем поле показателя преломления  $\langle n(r) \rangle$ . Поэтому, если ввести новую функцию  $u \equiv \psi \exp(-ik \langle n \rangle x)$ , уравнения для моментов  $u(r)$  при выполнении равенства (2.10) сводятся к уравнениям, полученным в [1, 2]. Попутно заметим, что при выполнении условия (2.9) набег фазы волны приближенно можно считать гауссовой величиной, как это можно заключить из соотношения (2.5).

**3.** Рассеивающие свойства отдельных пятен характеризуются амплитудой рассеяния. Поскольку, по предположению, пятна являются «оптически мягкими» частицами, то для амплитуды рассеяния можно использовать приближение Ван де Хюлста (приближение эйконала) [5]

$$f_\alpha(k \rightarrow k') = \frac{k}{2\pi i} \int d\rho \exp(i(k - k')\rho) \times \\ \times \{ \exp[ik \int n_\alpha(\rho, z) dz] - 1 \}. \quad (3.1)$$

С помощью 3.1 уравнение для среднего поля, вытекающее из (2.8), запишем в виде

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_\rho \langle \psi \rangle + \frac{2\pi i}{k} v \langle f(k \rightarrow k) \rangle \langle \psi \rangle \quad (\langle \psi \rangle \equiv M_{1,0}). \quad (3.2)$$

Первый член в (3.2) описывает дифракционное уширение, второй связан с эффективным показателем преломления, который определяется амплитудой рассеяния вперед:

$$n_{\text{эфф}} = 1 + \frac{2\pi}{k^2} v \langle f(k \rightarrow k) \rangle. \quad (3.3)$$

Обычно соотношение (3.3) получают суммированием рассеянных вперед волн [5].

Поведение функции когерентности  $M_{1,1}$  также определяется амплитудой рассеяния (3.1). Чтобы это показать, предварительно заметим, что функция  $S(\rho_1, \rho'_1)$ , определенная соотношением (2.8 а), зависит фактически только от разности аргументов  $\rho = \rho_1 - \rho'_1$ . В связи с этим аналогично работе [1] введем новые координаты

$$R = \frac{\rho_1 + \rho'_1}{2}, \quad \rho = \rho_1 - \rho'_1 \quad (3.4)$$

и в уравнении для функции  $M_{1,1}$ , записанном в новых координатах (3.4), совершим фурье-преобразование по координате  $\rho$ . Вводя обозначение

$$I(x, R, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho e^{-i\rho x} M_{1,1}(x, R, \rho), \quad (3.5)$$

для функции  $I(x, R, \mathbf{x}')$  после некоторых преобразований с учетом (3.1) получим уравнение, являющееся по форме типичным уравнением переноса в приближении малых углов [1]:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\mathbf{x}}{k} \frac{\partial I}{\partial R} = - \nu \langle \sigma_t \rangle I + \\ + \int \frac{d\mathbf{x}'}{k^2} \langle |f(\mathbf{k}_{\mathbf{x}'} \rightarrow \mathbf{k}_{\mathbf{x}})|^2 \rangle I(x, R, \mathbf{x}'). \quad (3.6)$$

Здесь  $\mathbf{k}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}')$  — волновой вектор с проекцией  $\mathbf{x}(\mathbf{x}')$  на плоскость  $\{\rho\}$ .

Величина  $\langle \sigma_t \rangle = \frac{4\pi}{k} \langle \text{Im } f(\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k}_0) \rangle$ , в соответствии с оптической теоремой [5] имеет смысл среднего полного сечения ослабления излучения пятном, квадрат модуля амплитуды рассеяния равен дифференциальному сечению рассеяния. Параметр фурье-преобразования  $\mathbf{x}$  имеет смысл проекции волнового вектора на плоскость  $\{\rho\}$ , а дифференциал  $\frac{d\mathbf{x}}{k^2}$  трактуется как элемент телесного угла направлений волнового вектора. Аналогичные уравнения можно выписать для моментов высших порядков, определяющих флуктуации интенсивности излучения.

Отметим, что условие применимости вышеизложенного подхода предполагает малость изменения средних характеристик на расстояниях порядка длины корреляции  $d$ , что можно записать в виде [1]  $\gamma d \ll 1$ . Здесь  $\gamma = \nu \langle \sigma_t \rangle$  — коэффициент экстинкции. Учитывая выражение для  $\langle \sigma_t \rangle$ , приведенный критерий можно представить в виде

$$2\nu d \text{Re} \langle \int d\rho (1 - \exp(ik \int n_a(\rho, z) dz)) \rangle \ll 1 \quad (3.7)$$

(длина корреляции в соответствии с (1.6) по порядку величины совпадает с характерным размером пятен).

Если набег фаз на отдельных пятнах мал, то из (3.7) и (1.6) следует (для простоты считаем  $n_a = n_a^*$ )

$$(kd)^2 \sigma_n \ll 1, \quad (3.8)$$

где  $\sigma_n$  — дисперсия показателя преломления. В другом предельном случае (когда набег фазы на отдельных пятнах много больше единицы) из (3.7) следует

$$\nu d^3 \ll 1. \quad (3.9)$$

В заключение укажем, что результаты данной работы можно использовать не только в задачах, отмеченных во введении, но и при изучении флуктуаций электромагнитного излучения в дисперсных средах, содержащих оптически мягкие ( $|n - 1| \ll 1$ ) частицы, например, при исследовании прохождения инфракрасного излучения в облаках и туманах. Конкретные решения уравнений (2.8) представляют самостоятельную задачу и будут проведены в дальнейшем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
2. А. М. Прохоров, Ф. В. Бункин и др., УФН, 114, вып. 5, 415 (1974).
3. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 45, вып. 3 (9), 810 (1963).
4. Л. М. Ерухимов, П. И. Шпиро, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 879 (1974).

5. Р. Ньютона, Теория рассеяния волн и частиц, изд. Мир, М., 1969.  
6 Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд. Мир, М., 1968.

Институт экспериментальной метеорологии

Поступила в редакцию  
15 июля 1975 г.,  
после доработки  
6 августа 1976 г.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC RADIATION IN RANDOM  
INHOMOGENEOUS POISSON-TYPE MEDIUM

*P. N. Svirkunov*

The author investigates the problem of the electromagnetic wave propagation in the medium the refractive index of which is the random Poisson function. In application to the given medium the known closed integro-differential equations for the field moments are reduced to a system of differential equations which is more convenient to analyse. The relation between the moments equations with small angles approximation in the scattering theory is under discussion.

---

УДК 538.56 : 519.25

## СТРУКТУРА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Г. Н. Бочков, А. А. Дубков, А. Н. Малахов

Исследуется структура корреляционной зависимости двух нелинейных функционалов произвольно распределенных случайных процессов. Найденные соотношения являются обобщением известных формул Фуруути—Новикова—Донскера, формулы Прайса и результатов работы [1] на случай негауссовой совокупности случайных процессов. На основе полученных соотношений строятся некоторые приближенные методы корреляционного анализа стохастических систем достаточно общего вида.

Обширный круг задач статистической радиофизики приводит к проблеме вычисления корреляции двух (или большего числа) функционалов заданных случайных процессов. В работе [1] этот вопрос был решен для гауссовой совокупности процессов. В настоящей работе изучается структура корреляционной зависимости двух функционалов произвольно распределенных процессов. Так же, как и в [1], исследуется возможность представления корреляции в виде разложения по статистическим связям (определенным в данном случае совместными кумулянтами функциями) исходной совокупности случайных процессов.

1. Рассмотрим произвольный функционал  $\Phi[x, y]$  представляющий в общем случае нелинейное инерционное преобразование двух случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ . В том случае, когда совокупность  $\{x(t), y(t)\}$  имеет произвольное вероятностное распределение, среднее значение этого функционала будет определяться кумулянтами функциями исходной совокупности случайных процессов  $x_{p, q}^x, y(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q)$ . Как показано в [2], имеет место следующее полезное соотношение\*:

$$\frac{\delta \langle \Phi[x, y] \rangle}{\delta x_{p, q}^x, y(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q)} = \frac{1}{p!q!} \left\langle \frac{\delta^{p+q}\Phi[x, y]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_p) \delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} \right\rangle. \quad (1)$$

Для среднего значения произведения двух функционалов, когда  $\Phi[x, y] = F[x]G[y]$ , будем иметь

$$\frac{\delta \langle F[x]G[y] \rangle}{\delta x_{p, q}^x, y(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q)} = \frac{1}{p!q!} \left\langle \frac{\delta^p F[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_p)} \frac{\delta^q G[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} \right\rangle, \quad (2)$$

а также

$$\frac{\delta^m \langle F[x]G[y] \rangle}{\delta x_{p_1, q_1}^x(t_1^{(1)}, \dots, t_{p_1}^{(1)}; \tau_1^{(1)}, \dots, \tau_{q_1}^{(1)}) \dots \delta x_{p_m, q_m}^x(t_1^{(m)}, \dots, t_{p_m}^{(m)}; \tau_1^{(m)}, \dots, \tau_{q_m}^{(m)})} = \quad (3)$$

\* Здесь  $\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta x}$  — операторы вариационного дифференцирования (см., например, [1—7]).

$$= \frac{1}{p_1! q_1! \dots p_m! q_m!} \left\langle \frac{\delta^{p_1+...+p_m} F[x]}{\delta x(t_1^{(1)}) \dots \delta x(t_{p_m}^{(m)})} \frac{\delta^{q_1+...+q_m} G[y]}{\delta y(\tau_1^{(1)}) \dots \delta y(\tau_{q_m}^{(m)})} \right\rangle.$$

Поскольку в принятой записи индексы кумулянтных функций однозначно определяют и их аргументы, то в дальнейшем для сокращения формул аргументы будем иногда опускать. Так же поступим мы и с вариациями процессов  $x$  и  $y$ , приписав им индексы аргументов. Тогда формула (3) примет вид

$$\frac{\delta^m \langle F[x]G[y] \rangle}{\delta x_{p_1, q_1}^{x, y} \dots \delta x_{p_m, q_m}^{x, y}} = \frac{1}{p_1! q_1! \dots p_m! q_m!} \left\langle \frac{\delta^{p_1+...+p_m} F[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_{p_m}^{(m)}} \frac{\delta^{q_1+...+q_m} G[y]}{\delta y_1^{(1)} \dots \delta y_{q_m}^{(m)}} \right\rangle. \quad (3')$$

Разложим  $\langle F[x]G[y] \rangle$  в бесконечномерный функциональный ряд по кумулянтным функциям исходной совокупности процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle F[x]G[y] \rangle &= \langle F[x]G[y] \rangle_{x, y} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{p_1, q_1, \dots, p_m, q_m=1}^{\infty} \int \dots \int \left[ \frac{\delta^m \langle F[x]G[y] \rangle}{\delta x_{p_1, q_1}^{x, y} \dots \delta x_{p_m, q_m}^{x, y}} \right]_{x, y} \times \times \\ &\times x_{p_1, q_1}^{x, y} \dots x_{p_m, q_m}^{x, y} dt_1^{(1)} \dots dt_{p_m}^{(m)} d\tau_1^{(1)} \dots d\tau_{q_m}^{(m)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вариационные производные в (4) вычисляются на основании (3) при условии статистической независимости процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  (когда все совместные кумулянтные функции  $x_{p_l, q_l}^{x, y} \equiv 0$ ). В результате приходим к следующей формуле для корреляции двух функционалов:

$$\begin{aligned} \langle F[x]G[y] \rangle &= \langle F[x] \rangle \langle G[y] \rangle + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{l=1}^m \sum_{p_l, q_l=1}^{\infty} \frac{1}{p_l! q_l!} \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^{p_1+...+p_m} F[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_{p_m}^{(m)}} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^{q_1+...+q_m} G[y]}{\delta y_1^{(1)} \dots \delta y_{q_m}^{(m)}} \right\rangle \times \\ &\times x_{p_l, q_l}^{x, y} dt_1^{(l)} \dots dt_{p_l}^{(l)} d\tau_1^{(l)} \dots d\tau_{q_l}^{(l)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученное соотношение представляет собой «разложение» корреляций функционалов по статистическим связям исходной совокупности случайных процессов\*.

**2.** Остановимся на некоторых частных представлениях соотношения (5).

а) Прежде всего рассмотрим случай гауссовой совокупности случайных процессов  $\{x(t), y(t)\}$ , статистические связи между которыми

\* В частном случае  $y(t) \equiv x(t)$  соотношение (5) допускает представление в операторной форме (см. Приложение в [3]):

$$\langle F[x]G[x] \rangle = \left\langle \left\langle \frac{\Theta_x[v + \frac{\delta}{\delta x}]}{\Theta_x[v]\Theta_x[\frac{\delta}{\delta x}]} F[x] \right\rangle \right|_{v=\frac{\delta}{\delta x}} G[x] \right\rangle,$$

где  $\Theta_x[\alpha] = \langle \exp \{ i \int x(\tau) \alpha(\tau) d\tau \} \rangle$  — характеристический функционал случайного процесса  $x(t)$ .

исчерпывающим образом определяются взаимной ковариационной функцией  $B_{xy}[t, t + \tau] \equiv x_{1,1}^{x,y}(t; t + \tau)$ . В данном случае все  $x_{p,q}^{x,y} \equiv 0$  для  $p + q > 2$ . Тогда (5) существенно упрощается и принимает вид

$$\langle F[x]G[y] \rangle = \langle F[x] \rangle \langle G[y] \rangle + \quad (6)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^m F[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_m)} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^m G[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_m)} \right\rangle \prod_{i=1}^m x_{1,1}^{x,y}(t_i; \tau_i) dt_i d\tau_i.$$

Формула (6) была получена ранее в работе [1].

б) Пусть теперь функционал  $F[x(t)]$  имеет вид  $F[x] \equiv x(t)$ . Рассмотрим статистическое среднее от произведения случайного процесса  $x(t)$  и функционала от случайного процесса  $y(t)$ , статистически связанных с  $x(t)$  посредством известных кумулянтных зависимостей  $x_{p,q}^{x,y}$ . Тогда с учетом того, что  $\frac{\delta x(t)}{\delta x(t_1)} = \delta(t - t_1)$ , а  $\frac{\delta^n x(t)}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} = 0$  для  $n > 1$ , нетрудно получить из (5).

$$\langle x(t)G[y] \rangle = \langle x(t) \rangle \langle G[y] \rangle + \quad (7)$$

$$+ \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^q G[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_q)} \right\rangle x_{1,q}^{x,y}(t; \tau_1, \dots, \tau_q) d\tau_1 \dots d\tau_q.$$

Соотношение (7) (полученное ранее в [2]\*) является обобщением широко используемой в различных статистических расчетах формулы Фуруцу—Новикова—Донскера [5—7] на случай негауссовой совокупности случайных переменных  $x(t)$  и  $y(t)$ .

в) Рассмотрим также случай, когда оба функционала являются функциями случайных процессов:

$$F[x] = f(x(t_1)), \quad G[y] = g(y(t_2)).$$

Вычисляя

$$\frac{\delta^n f(x(t_1))}{\delta x(\theta_1) \dots \delta x(\theta_n)} = f^{(n)}(x(t_1)) \prod_{i=1}^n \delta(t_1 - \theta_i), \quad \frac{\delta^n g(y(t_2))}{\delta y(\theta_1) \dots \delta y(\theta_n)} = g^{(n)}(y(t_2)) \prod_{i=1}^n \delta(t_2 - \theta_i),$$

подставляя полученные выражения в (5) и выполняя интегрирование, будем иметь

$$\langle f(x(t_1))g(y(t_2)) \rangle = \langle f(x(t_1)) \rangle \langle g(y(t_2)) \rangle +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{p_i, q_i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i! q_i!} \langle f^{(p_1+\dots+p_m)}(x(t_1)) \rangle \langle g^{(q_1+\dots+q_m)}(y(t_2)) \rangle \times \quad (8)$$

$$\times x_{p_1 q_1}^{x,y}(t_1, \dots, t_1; t_2, \dots, t_2).$$

Соотношение (8), в свою очередь, можно трактовать как обобщение известной формулы Прайса [8] (см. также [9]) на случай произвольно распределенной совокупности случайных переменных  $x$  и  $y$ .

г) Особое место в статистических задачах занимает случай, когда исходные процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  можно рассматривать как дельта-корре-

\* В частном случае  $y \equiv x$  формула, аналогичная (7), получена в [4].

лированные случайные процессы. Зададим в этом случае кумулянтные функции совокупности  $\{x, y\}$  в виде

$$x_{p, q}^{x, y}(t_1, \dots, t_p; \tau_1, \dots, \tau_q) = D_{p, q}^{x, y}(t_1) \delta(t_2 - t_1) \dots \delta(t_p - t_1) \delta(\tau_1 - t_1) \dots \delta(\tau_q - t_1). \quad (9)$$

После подстановки кумулянтных функций в (5) и интегрирования получим соотношение

$$\begin{aligned} & \langle F[x]G[y] \rangle = \langle F[x] \rangle \langle G[y] \rangle + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{p_i, q_i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i! q_i!} \int_m \dots \int_m \left\langle \frac{\delta^{p_1+\dots+p_m} F[x]}{(\delta x_1)^{p_1} \dots (\delta x_m)^{p_m}} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^{q_1+\dots+q_m} G[y]}{(\delta y_1)^{q_1} \dots (\delta y_m)^{q_m}} \right\rangle \times \\ & \times D_{p_i, q_i}^{x, y}(t_i) dt_i. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Соотношение (5) дает удобный прием корреляционного анализа стохастических систем, описываемых некоторым функциональным соотношением между «входным» и «выходным» процессами,

$$z = Z[x].$$

В этом случае формула (5) позволяет найти автокорреляционную функцию «выходного» сигнала физической системы. Так, полагая в (5)  $x(t) \equiv y(t)$  и  $F \equiv G \equiv Z$ , получаем

$$\begin{aligned} & \langle z(t)z(t+\tau) \rangle = \langle Z_t[x] \rangle \langle Z_{t+\tau}[x] \rangle + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{n_i=2}^{\infty} \sum_{v_i=1}^{n_i-1} \frac{1}{(n_i - v_i)! v_i!} \int_{n_i} \dots \int_{n_i} x_{n_i}^x(t_1^{(i)}, \dots, t_{n_i}^{(i)}) dt_1^{(i)} \dots dt_{n_i}^{(i)} \times \quad (11) \\ & \times \left\langle \frac{\delta^{v_1+\dots+v_m} Z_t[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_m^{(m)}} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^{(n_1+\dots+n_m)-(v_1+\dots+v_m)} Z_{t+\tau}[x]}{\delta x_{v_1+1}^{(1)} \dots \delta x_{n_1}^{(1)} \dots \delta x_{v_m+1}^{(m)} \dots \delta x_{n_m}^{(m)}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Формула (8), определяющая в данном случае автокорреляционную функцию процесса, подверженного безынерционному нелинейному преобразованию  $z = z(x)$ , запишется в виде

$$\begin{aligned} & \langle z(x(t_1))z(x(t_2)) \rangle = \langle z(x(t_1)) \rangle \langle z(x(t_2)) \rangle + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{n_i=2}^{\infty} \sum_{v_i=1}^{n_i-1} \frac{1}{v_i!(n_i - v_i)!} x_{n_i}^x(t_1, \dots, t_1; t_2, \dots, t_2) \times \quad (12) \\ & \times \langle z^{(v_1+\dots+v_m)}(x(t_1)) \rangle \langle z^{(n_1+\dots+n_m)-(v_1+\dots+v_m)}(x(t_2)) \rangle, \end{aligned}$$

Для  $\delta$ -коррелированного случайного процесса  $x(t)$  с кумулянтными функциями, заданными в виде (9), основная формула (11) значительно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} & \langle Z_t[x]Z_{t+\tau}[x] \rangle = \langle Z_t[x] \rangle \langle Z_{t+\tau}[x] \rangle + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{n_i=2}^{\infty} \sum_{v_i=1}^{n_i-1} \frac{1}{v_i!(n_i - v_i)!} \int_m \dots \int_m D_{n_i}(t_i) dt_i \times \quad (13) \\ & \times \left\langle \frac{\delta^{v_1+\dots+v_m} Z_t[x]}{(\delta x_1)^{v_1} \dots (\delta x_m)^{v_m}} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^{(n_1-v_1)+\dots+(n_m-v_m)} Z_{t+\tau}[x]}{(\delta x_1)^{n_1-v_1} \dots (\delta x_m)^{n_m-v_m}} \right\rangle. \end{aligned}$$

4. Укажем теперь некоторые пути использования выведенных соотношений. Прежде всего отметим, что полученные формулы представляют собой точные разложения и в некоторых интересных случаях позволяют получать точные значения корреляционной связности функционалов. Это те случаи, когда разложения имеют конечное число членов или когда «ряды» удается просуммировать. Кроме того, раскрыв структуру корреляционной зависимости, можно указать классы приближенно решаемых задач. Остановимся на этом направлении особо.

Пусть флюктуации  $x(t)$  являются малыми (например, в сравнении с некоторым масштабом нелинейности, принятым за единицу):

$$x(t) = \mu \alpha(t),$$

где  $\mu \ll 1$  — малый параметр. Тогда кумулянтные функции этого процесса имеют вид

$$x_q^x(t_1, \dots, t_q) = \mu^q x_q^\alpha(t_1, \dots, t_q).$$

В этом случае ряд (11) после перегруппировки по степеням малого параметра  $\mu$  принимает вид\*

$$\begin{aligned} & \langle Z_t[x] Z_{t+\tau}[x] \rangle = \langle Z_t[x] \rangle \langle Z_{t+\tau}[x] \rangle + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{E(m/2)} \frac{1}{s!} \sum_{n_1, \dots, n_s=2}^{n_1+\dots+n_s=m} \prod_{i=1}^s \sum_{v_i=1}^{n_i-1} \frac{1}{v_i!(n_i-v_i)!} \int_m \dots \int dt_1^{(i)} \dots dt_{n_i}^{(i)} \times \quad (14) \\ & \times \left\langle \frac{\delta^{v_1+\dots+v_s} Z_t[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_{v_s}^{(s)}} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^{m-(v_1+\dots+v_s)} Z_{t+\tau}[x]}{\delta x_{v_1+1}^{(1)} \dots \delta x_{n_s}^{(s)}} \right\rangle x_{n_i}^x(t_1^{(i)}, \dots, t_{n_i}^{(i)}). \end{aligned}$$

Можно рассмотреть и другие способы перегруппировки разложений. Например, при группировке по связности, часто применяемой при анализе стохастических параметрических систем (см., например, [10, 11]), когда малый параметр  $\mu$  вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} & x_q^x(t_1, \dots, t_q) = \mu x_q^\alpha(t_1, \dots, t_q), \dots \quad (15) \\ & \prod_{i=1}^s x_{q_i}^x(t_1^{(i)}, \dots, t_{q_i}^{(i)}) = \mu^s \prod_{i=1}^s x_{q_i}^\alpha(t_1^{(i)}, \dots, t_{q_i}^{(i)}), \end{aligned}$$

приходим к тождественной с (11) форме записи основной формулы.

Рассмотрим, наконец, случай, когда процесс  $x(t)$  квазигауссов. В этом случае можно ввести параметр  $\mu$ , отражающий малость всех кумулянтных функций по сравнению с ковариационной функцией  $x_2^x(t, \tau) \equiv B_x(t, \tau)$ . Введем малый параметр следующим образом:

$$x_q^x(t_1, \dots, t_q) \sim \mu B_x^{q/2}(t_1, t_2) \quad (q \geq 3).$$

Тогда соотношение (11) для данного случая можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \langle Z_t[x] Z_{t+\tau}[x] \rangle = \langle Z_t[x] \rangle \langle Z_{t+\tau}[x] \rangle + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{2m} \dots \int \left\langle \frac{\delta^m Z_t[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_m)} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^m Z_{t+\tau}[x]}{\delta x(\tau_1) \dots \delta x(\tau_m)} \right\rangle \prod_{i=1}^m B_x(t_i, \tau_i) dt_i d\tau_i + \end{aligned}$$

\*  $E(\xi)$  — целая часть  $\xi$ . Вообще говоря, при перегруппировке можно учесть и порядки малости вариационных производных.

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(m+s)!} \prod_{i=1}^m \prod_{j=0}^s \sum_{n_i=3}^{\infty} \sum_{v_i=1}^{n_i-1} \frac{1}{(n_i - v_i)! v_i!} \int_{2s+n_i} \dots \int x_2^x(t_j, t'_i) x_{n_i}^x \times \quad (16)$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^{v_1+\dots+v_m+s} Z_t[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_{v_m}^{(m)} \delta x_1 \dots \delta x_s} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^{(n_1-v_1)+\dots+(n_m-v_m)+s} Z_{t+\tau}[x]}{\delta x_{v_1+1}^{(1)} \dots \delta x_{n_m}^{(m)} \delta x_1' \dots \delta x_s'} \right\rangle dt_j dt' dt_1^{(i)} \dots dt_{n_i}^{(i)}$$

Приведем дополнительно некоторые формы записи выведенных соотношений, которые весьма удобны в случае совокупности  $\{x(t), y(t)\}$ , близкой к гауссовой. Нетрудно показать, что имеет место следующее соотношение:

$$\langle Z_t[x] Z_{t+\tau}[x] \rangle = \langle Z_t[x] Z_{t+\tau}[x] \rangle_{\text{гаусс}} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{p_i=1}^{\infty} \sum_{q_i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i! q_i!} \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^{p_1+\dots+p_m} Z_t[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_{p_m}^{(m)}} \frac{\delta^{q_1+\dots+q_m} Z_{t+\tau}[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_{q_m}^{(m)}} \right\rangle_{\text{гаусс}} \times \quad (17)$$

$$\times x_{p_i+q_i}^x dt_1^{(i)} \dots dt_{p_i}^{(i)} d\tau_1^{(i)} \dots d\tau_{q_i}^{(i)},$$

где  $\langle \dots \rangle_{\text{гаусс}}$  — знак статистического усреднения по гауссовой совокупности  $\{x(t), y(t)\}$ . Это среднее, в свою очередь, должно быть раскрыто по формуле (6).

Когда функционалы вырождаются в функции случайного процесса  $x(t)$ , соотношение (17) переходит в следующее:

$$\langle z(x_t) z(x_{t+\tau}) \rangle = \langle z(x_t) z(x_{t+\tau}) \rangle_{\text{гаусс}} + \quad (18)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{p_i, q_i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i! q_i!} \langle z^{(p_1+\dots+p_m)}(x_t) z^{(q_1+\dots+q_m)}(x_{t+\tau}) \rangle_{\text{гаусс}} x_{p_i+q_i}^x.$$

Первое слагаемое в (18) и среднее во втором члене следует раскрывать в данном случае по формуле Прайса [8] (см. также [9]).

Приведем, наконец, сравнительно простое соотношение для корреляции двух функционалов случайного процесса  $x(t)$ , имеющего симметричное распределение, близкое к гауссову, с тем отличием, что вместе с  $x_2^x(t_1, t_2)$  существует  $x_4^x(t_1, t_2, t_3, t_4) \neq 0$ , а все  $x_i^x$  при  $i = 3, 5, 6, \dots$  равны нулю. Тогда

$$\langle Z_t[x] Z_{t+\tau}[x] \rangle = \langle Z_t[x] Z_{t+\tau}[x] \rangle_{\text{гаусс}} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \sum_{v_i=1}^3 \frac{1}{v_i!(4-v_i)!} \int_{4m} \dots \int x_4^x(t_1^{(i)}, \dots, t_4^{(i)}) dt_1^{(i)} \dots dt_4^{(i)} \times \quad (19)$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^{v_1+\dots+v_m} Z_t[x]}{\delta x_1^{(1)} \dots \delta x_{v_m}^{(m)}} \frac{\delta^{4m-(v_1+\dots+v_m)} Z_{t+\tau}[x]}{\delta x_{v_1+1}^{(1)} \dots \delta x_4^{(m)}} \right\rangle_{\text{гаусс}}.$$

Здесь средние вычисляются также в предположении гауссности процесса  $x(t)$ .

Указанный подход позволяет почти всегда решить задачу вычисления корреляционной связи двух функционалов в том или ином приближении истинного вероятностного распределения совокупности  $\{x(t), y(t)\}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Бочков, А. А. Дубков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 3, 376 (1974).
2. А. А. Дубков, А. Н. Малахов, Докл. АН СССР, 222, № 4, 793 (1975).
3. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 65, вып. 1 (7), 54 (1973).
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ТМФ, 17, № 2, 273 (1973).
5. K. Furutsu, J. Res. Natl. Bur. Standards, 67D, № 3, 303 (1963).
6. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, вып. 5 (11), 1919 (1964).
7. M. D. Donsker, Proc. Conf. Theory and Appl. Analysis in Funct. Space, The M. I. T. Press, 1964, p. 17. (перевод в сб. Математика, 11, 128 (1967)).
8. R. A. Price, IRE Trans., PGIT-4, № 6, 69 (1958).
9. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1287 (1973).
10. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, вып. 1 (7), 401 (1967).
11. Ю. Н. Барabanenkov, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 7, 981 (1974).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
27 октября 1975 г.

## THE STRUCTURE OF CORRELATION DEPENDENCE OF NONLINEAR STOCHASTIC FUNCTIONALS

*G. N. Bochkov, A. A. Dubkov, A. N. Malakhov*

The structure of correlation dependence of the two nonlinear functionals of arbitrarily distributed random processes is investigated. The found relations are the generalization of the known Furutsu—Novikov—Donsker formulas, Price formula, and the results of work [1] for the case of a non-Gaussian set of random processes. Based upon the relations obtained some approximate methods of the correlation analysis of stochastic general enough type systems are built.

УДК 533.951

## ДИФРАКЦИЯ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

*K. С. Карплюк*

Рассмотрена задача дифракции ионно-звуковых волн, распространяющихся в неизотермической плазме, при их падении на идеально проводящую полуплоскость. Задача сформулирована в виде парных интегральных уравнений, которые решаются с помощью метода Винера—Хопфа—Фока. Найдены точные решения, описывающие поля, возникающие в результате дифракции. Проанализировано асимптотическое поведение дифракционного поля в дальней зоне.

Задача о дифракции волн на полуплоскости является ключевой задачей теории дифракции. Для электромагнитных волн, распространяющихся в диэлектрике, ее решение хорошо известно [1]. В настоящей работе мы рассмотрим эту задачу для одного класса волн, распространяющихся в плазме, — для ионно-звуковых волн. Известно, что эти низкочастотные волны (с частотой, меньшей ионной ленгмюровской частоты) могут распространяться в неизотермической плазме с горячими электронами и холодными ионами. Падая на проводящий экран, ионно-звуковые волны не только рассеиваются на нем, но и возбуждают в окружающей экран плазме нераспространяющиеся поперечные колебания, апериодически затухающие при удалении от экрана. Существование этих поперечных колебаний оказывает влияние на структуру дифрагированной ионно-звуковой волны. В некоторой степени это подобно тому влиянию, которое оказывает учет вязкости на дифракцию звуковых волн [2].

При изучении дифракции ионно-звуковых волн на идеально проводящей полуплоскости будем исходить из линеаризованных уравнений гидродинамики для электронов и ионов и уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \frac{s^2}{n_{0e}} \nabla n_e - \frac{e_e}{m_e} \mathbf{E} + \nu \mathbf{v}_e = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_{0e} \nabla \cdot \mathbf{v}_e = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} - \frac{e_i}{m_i} \mathbf{E} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + n_{0i} \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0; \quad (4)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0; \quad (5)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + e_e n_{0e} \mathbf{v}_e + e_i n_{0i} \mathbf{v}_i = 0. \quad (6)$$

Здесь  $s^2 = \gamma p_0/m_e n_{0e}$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты для электронов, индексы «*e*» и «*i*» относятся, соответственно, к электронам и ионам. Остальные обозначения общепринятые.

При написании уравнений (1) — (6) предполагаем, что электроны теплые, а ионы холодные, поэтому давление равно нулю для ионов и, отлично от нуля — для электронов. В уравнении (1) учтен член  $v v_e$ , описывающий трение электронов. Этот член понадобится лишь для того, чтобы определить правила обхода особенностей функций, с которыми мы встретимся ниже. Во всех окончательных формулах  $v$  устремим к нулю.

Для стационарных процессов, зависящих от времени как  $e^{-i\omega t}$  можно с помощью уравнений (1) — (6) выразить величины  $v_e$ ,  $v_i$ ,  $n_e$ ,  $n_i$  и  $H$  через  $E$ , а для определения  $E$  получить уравнения

$$\Delta E_l + k_l^2 E_l = 0; \quad (7)$$

$$\Delta E_t + k_t^2 E_t = 0, \quad (8)$$

где

$$k_l^2 = \frac{\omega(\omega + i\nu)}{s^2(1 - \Omega_l^2/\omega^2)} \epsilon; \quad (9)$$

$$k_t^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon; \quad (10)$$

$$\epsilon = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)} - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}, \quad \Omega_a^2 = \frac{n_{0a} e_a^2}{m_a \epsilon_0}, \quad a = e, i. \quad (11)$$

Здесь  $E_l$  и  $E_t$  — продольная и поперечная части вектора  $E$ :

$$\nabla \times E_l = 0; \quad (12)$$

$$\nabla \cdot E_t = 0. \quad (13)$$

В области достаточно низких частот ( $\omega < \Omega_i$ ) уравнение (7) описывает ионно-звуковые волны, а уравнение (8) — низкочастотные поперечные колебания, апериодически затухающие при удалении от их источника.

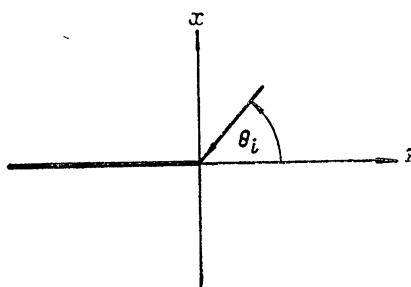


Рис. 1. Плоская ионно-звуковая волна, падающая на идеально проводящую полуплоскость.

Рассмотрим дифракцию плоской ионно-звуковой волны на идеально проводящей полуплоскости  $x = 0$ ,  $z < 0$ , помещенной в плазму. Направление распространения падающей волны составляет прямой угол с осью  $y$  и угол  $\theta_i$  с осью  $z$  (рис. 1). Будем искать тангенциальную составляющую продольной части электрического поля, возникающего в результате дифракции ионного звука, в виде

$$E_{zl} = E_{zi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} L_1(k_z) \exp[-ik_z z - \chi_l(k_z)x] dk_z \quad (x > 0); \quad (14)$$

$$E_{zt} = E_{zi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} L_2(k_z) \exp[-ik_z z + \chi_t(k_z)x] dk_z \quad (x \leq 0), \quad (15)$$

если  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ , и в виде

$$E_{zt} = E_{zi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} L_1(k_z) \exp[-ik_z z - \chi_t(k_z)x] dk_z + \\ + \left[ 1 + \frac{(k_l \cos \theta_i)^2}{\chi_t(k_l \cos \theta_i) \tilde{\chi}_l(k_l \cos \theta_i)} \right] \frac{E_t}{K(k_l \cos \theta_i)} \exp(-ik_l z \cos \theta_i + ik_l x \sin \theta_i) \quad (x \geq 0); \quad (16)$$

$$E_{zt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} L_2(k_z) \exp[-ik_z z + \chi_t(k_z)x] dk_z \quad (x \leq 0), \quad (17)$$

если  $\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi$ . Тангенциальную составляющую электрического поля поперечных колебаний ищем в виде

$$E_{zt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} E_1(k_z) \exp[-ik_z z - \chi_t(k_z)x] dk_z \quad (x \geq 0); \quad (18)$$

$$E_{zt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} E_2(k_z) \exp[-ik_z z + \chi_t(k_z)x] dk_z \quad (x \leq 0), \quad (19)$$

если  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ , и в виде

$$E_{zt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} E_1(k_z) \exp[-ik_z z - \chi_t(k_z)x] dk_z - \\ - \frac{2}{K(k_l \cos \theta_i)} E_t \exp(-ik_l z \cos \theta_i + ik_l x \sin \theta_i) \quad (x \geq 0); \quad (20)$$

$$E_{zt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} E_2(k_z) \exp[-ik_z z + \chi_t(k_z)x] dk_z \quad (x \leq 0), \quad (21)$$

если  $\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi$ . Здесь

$$E_{zi} = E_t \exp(-ik_l z \cos \theta_i - ik_l x \sin \theta_i)$$

— тангенциальная составляющая электрического поля падающей ионно-звуковой волны,  $k_l$  и  $k_t$  — те значения квадратного корня из  $k_l^2$  и  $k_t^2$ , у которых действительная часть положительна,

$$K(k_z) = 1 - \frac{k_z^2}{\tilde{\chi}_t(k_z) \chi_t(k_z)}; \quad (22)$$

$$\tilde{\chi}_t(k_z) = \frac{\omega(\omega + i\nu)}{\Omega_e^2} \left( 1 - \frac{\Omega_t^2}{\omega^2} \right) \chi_t(k_z), \quad (23)$$

$\chi_t(k_z)$  и  $\chi_l(k_z)$  — те ветви квадратных корней,

$$\chi_t(k_z) = \sqrt{k_z^2 - k_t^2}; \quad (24)$$

$$\chi_l(k_z) = \sqrt{k_z^2 - k_l^2}, \quad (25)$$

у которых мнимая часть отрицательна, если  $k_z = 0$  в комплексной плоскости  $k_z$ , разрезанной вдоль отрезков, соединяющих  $k_t$  с  $k_l$ ,  $-k_t$

с  $-k_l$ , и вдоль прямых  $k_z = \pm (k_l + id)$ ,  $0 \leq d < \infty$  (рис. 2). Угол  $\theta_t$  определяется соотношением

$$\cos \theta_t = \frac{k_l}{k_t} \cos \theta_i. \quad (26)$$

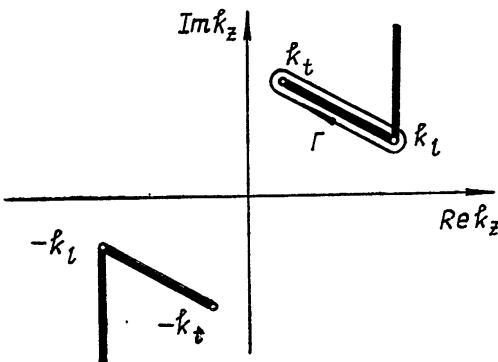


Рис. 2. Разрезы в комплексной  $k_z$ -плоскости.

во, что обеспечивает голоморфность фурье-трансформант

$$L_1 \exp(-\chi_t x), \quad L_2 \exp(\chi_l x), \quad E_1 \exp(-\chi_t x), \quad E_2 \exp(\chi_l x)$$

в полосах

$$-\operatorname{Im} k_l < \operatorname{Im} k_z < \operatorname{Im} k_l \cos \theta_i \quad (0 \leq \theta_i \leq \pi/2); \quad (27)$$

$$-\operatorname{Im} k_l \cos \theta_i < \operatorname{Im} k_z < \operatorname{Im} k_l \quad (\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi). \quad (28)$$

Путь интегрирования в (14) — (21) проходит в области голоморфности подынтегральных функций, т. е.  $a$  лежит в полосе (27) или (28).

Отметим, что хотя для фурье-амплитуд в (14) — (21) использованы одинаковые обозначения  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $E_1$  и  $E_2$  при любых углах  $\theta_i$ , мы заранее не предполагаем, что фурье-амплитуды при  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$  такие же, как и при  $\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi$ . Однако в результате решения выясняется, что они действительно равны.

Чтобы найти фурье-амплитуды, используем граничные условия. А именно, потребуем, чтобы  $E_z$  и  $v_x$  обращались в нуль на поверхности проводящей полуплоскости  $x = 0$ ,  $z < 0$ . Используя непрерывность  $E_z$  и  $v_x$  при  $x = 0$ ,  $-\infty < z < \infty$ , можно выразить искомые функции  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  через две новые неизвестные функции  $S(k_z)$  и  $D(k_z)$ :

$$E_1(k_z) = \chi_t(k_z)S(k_z) - k_zD(k_z); \quad (29)$$

$$E_2(k_z) = \chi_l(k_z)S(k_z) + k_zD(k_z); \quad (30)$$

$$L_1(k_z) = -\frac{k_z^2}{\chi_t(k_z)} S(k_z) + k_zD(k_z); \quad (31)$$

$$L_2(k_z) = -\frac{k_z^2}{\chi_l(k_z)} S(k_z) - k_zD(k_z). \quad (32)$$

Для определения  $S(k_z)$  получим из условий

$$E_z(x=0)=0 \quad (z<0),$$

$$H_y(x=+0)=H_y(x=-0) \quad (z>0)$$

систему парных интегральных уравнений:

$$z < 0: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \mathbf{x}_t(k_z) K(k_z) S(k_z) \exp(-ik_z z) dk_z = \\ = \begin{cases} -E_t \exp(-ik_t z \cos \theta_t) & (0 \leq \theta_t \leq \pi/2) \\ 0 & (\pi/2 \leq \theta_t \leq \pi) \end{cases}; \quad (33)$$

$$z > 0: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} S(k_z) \exp(-ik_z z) dk_z = \\ = \begin{cases} 0 & (0 \leq \theta_t \leq \pi/2) \\ \frac{1}{\mathbf{x}_t(k_t \cos \theta_t)} \frac{E_t \exp(-ik_t z \cos \theta_t)}{K(k_t \cos \theta_t)} & (\pi/2 \leq \theta_t \leq \pi) \end{cases}. \quad (34)$$

Аналогичным образом из условий

$$v_x(x=0)=0 \quad (z<0),$$

$$n(x=+0)=n(x=-0) \quad (z>0)$$

получим уравнения для  $D(k_z)$ :

$$z < 0: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \tilde{\mathbf{x}}_l(k_z) K(k_z) D(k_z) \exp(-ik_z z) dk_z = \\ = \begin{cases} \frac{\tilde{\mathbf{x}}_l(k_l \cos \theta_l)}{k_l \cos \theta_l} E_l \exp(-ik_l z \cos \theta_l) & (0 \leq \theta_l \leq \pi/2) \\ 0 & (\pi/2 \leq \theta_l \leq \pi) \end{cases}; \quad (35)$$

$$z > 0: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} D(k_z) \exp(-ik_z z) dk_z = \\ = \begin{cases} 0 & (0 \leq \theta_l \leq \pi/2) \\ -\frac{E_l \exp(-ik_l z \cos \theta_l)}{K(k_l \cos \theta_l)} \frac{1}{k_l \cos \theta_l} & (\pi/2 \leq \theta_l \leq \pi) \end{cases}. \quad (36)$$

Замыкая контур интегрирования в (33) и (35) в верхней полуплоскости, а в (34) и (36) — в нижней, можно убедиться, что выражения

$$S(k_z) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{E_i}{\mathbf{x}_t^+(k_t \cos \theta_t) K^+(k_t \cos \theta_t)} \frac{1}{\mathbf{x}_t^-(k_z) K^-(k_z)} \frac{1}{k_z - k_t \cos \theta_t}; \quad (37)$$

$$D(k_z) = -\frac{i}{V2\pi} \frac{E_t}{K^+(k_t \cos \theta_t)} \frac{\tilde{x}_t^-(k_t \cos \theta_t)}{k_t \cos \theta_t} \frac{1}{\tilde{x}_t^-(k_z) K^-(k_z)} \frac{1}{k_z - k_t \cos \theta_t} \quad (38)$$

являются решениями интегральных уравнений (33) — (36). Здесь

$$x_t^+(k_z) = \sqrt{k_z + k_t}; \quad (39)$$

$$x_t^-(k_z) = \sqrt{k_z - k_t}; \quad (40)$$

$$\tilde{x}_t^+(k_z) = \sqrt{k_z + k_t}; \quad (41)$$

$$\tilde{x}_t^-(k_z) = \frac{\omega(\omega + i\nu)}{\Omega_e^2} \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\right) \sqrt{k_z - k_t}; \quad (42)$$

$$K^+(k_z) = \sqrt{\frac{k_0 + k_z}{k_0 - k_z}} K(k_z) \left[1 - \frac{\omega^2 \Omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)(\omega^2 - \Omega_i^2)}\right]^{-1} \exp\left[-\frac{k_z}{2\pi i} I(k_z)\right]; \quad (43)$$

$$K^-(k_z) = \left[1 - \frac{\omega^2 \Omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)(\omega^2 - \Omega_i^2)}\right] \times \quad (44)$$

$$\times \sqrt{\frac{k_0 - k_z}{k_0 + k_z}} K(k_z) \left[1 - \frac{\omega^2 \Omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)(\omega^2 - \Omega_i^2)}\right]^{-1} \exp\left[\frac{k_z}{2\pi i} I(k_z)\right].$$

Интеграл

$$I(k_z) = \int_{\Gamma} \ln \frac{K(\zeta)}{1 - \frac{\omega^2 \Omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)(\omega^2 - \Omega_i^2)}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 - k_z^2} \quad (45)$$

вычисляется по контуру  $\Gamma$ , обходящему по часовой стрелке разрез от  $k_t$  до  $k_l$  (рис. 2);  $k_0$  — расположенный в верхней полуплоскости нуль функции  $K(k_z)$ . Можно показать, что при  $\nu = 0$   $k_0^2$  всегда имеет положительную мнимую часть и что на плоскости  $k_z$  корень  $k_0$  всегда расположен внутри треугольника, образованного осями координат и прямой, соединяющей  $k_t$  и  $k_l$ . Для вычисления  $k_0^2$  можно получить формулу

$$k_0^2 = \left[ \frac{\omega^4}{\Omega_e^4} \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\right)^2 \frac{k_l^2 + k_t^2}{2} \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\frac{\omega^8}{\Omega_e^8} \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\right)^4 \frac{k_l^2 - k_t^2}{4} + \frac{\omega^4}{\Omega_e^4} \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\right)^2 k_l^2 k_t^2} \right] \left[ \frac{\omega^4}{\Omega_e^4} \left(1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2}\right)^2 - 1 \right]^{-1}, \quad (46)$$

которая, однако, наряду с правильным значением  $k_0^2$  определяет также и лишнее значение. Чтобы выделить правильное значение, перед радикалом в (46) нужно выбирать такой знак, при котором мнимая часть  $k_0^2$  будет положительной. Для квадратных корней в (39) — (45) выбраны такие ветви, что

$$\operatorname{Re} \sqrt{k_z \pm k_t} > 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{k_z + k_t} > 0, \quad \operatorname{Im} \sqrt{k_z - k_t} < 0 \quad (k_z = 0),$$

$$\arg \sqrt{\frac{k_0 + k_z}{k_0 - k_z} K(k_z) \left[ 1 - \frac{\omega^2 \Omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)(\omega^2 - \Omega_i^2)} \right]^{-1}} = 0 \quad (k_z=0, \nu=0),$$

$$\arg \sqrt{\frac{k_0 - k_z}{k_0 + k_z} K(k_z) \left[ 1 - \frac{\omega^2 \Omega_e^2}{\omega(\omega + i\nu)(\omega^2 - \Omega_i^2)} \right]^{-1}} = 0 \quad (k_z=0, \nu=0).$$

Функции  $K^+$  и  $K^-$  осуществляют факторизацию функции  $K$ , т. е. разбиение  $K$  на множители:

$$K = K^+ \cdot K^-,$$

причем функция  $K^+$  голоморфна и не имеет нулей в полуплоскости

$$-\min(\operatorname{Im} k_0, \operatorname{Im} k_l) < \operatorname{Im} k_z,$$

а функция  $K^-$  голоморфна и не имеет нулей в полуплоскости

$$\operatorname{Im} k_z < \min(\operatorname{Im} k_0, \operatorname{Im} k_l).$$

Факторизация функции  $K$  выполнена с помощью общего метода, использующего интегральную формулу Коши [3-5].

После того, как найдены решения парных интегральных уравнений  $S(k_z)$  и  $D(k_z)$ , остается лишь подставить их в (14) — (21) и (29) — (32) и, тем самым, определить тангенциальную составляющую электрического поля, возникшего в результате дифракции ионно-звуковой волны на полуплоскости.

Однако точные выражения для полей (14) — (21) содержат интегралы, которые могут быть определены лишь численно. Поэтому рассмотрим частный случай, для которого можно получить приближенные значения этих интегралов с помощью метода наискорейшего спуска. А именно, найдем асимптотические выражения для поля продольных волн в дальней зоне ( $k_l \sqrt{x^2 + z^2} \gg 1$ ). Для этого произведем замену

$$k_z = -k_l \cos \alpha,$$

$$x = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

при которой плоскость  $k_z$ , разрезанная, как показано на рис. 2, отобразится в плоскости  $\alpha$  на полосу, ограниченную кривыми

$$\tau = \sqrt{2} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\tau = \sqrt{2} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\alpha - \pi}{2},$$

вдоль которых  $\tau$  пробегает вещественные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$  (рис. 3). Экспоненциальные множители в подынтегральных выражениях (14) — (17) примут вид

$$\exp[i k_l r \cos(\alpha - |\theta|)],$$

а путь интегрирования, проходящий в плоскости  $k_z$  вдоль вещественной

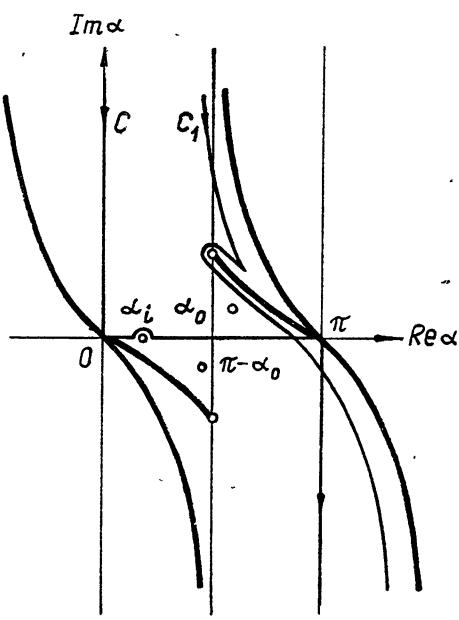


Рис. 3. Разрезы и контуры интегрирования в комплексной  $\alpha$ -плоскости.

оси, отобразится в плоскости  $\alpha$  на контур  $C$  (рис. 3). Для вычисления интегралов (14) — (17) деформируем контур  $C$  в контур наискорейшего спуска  $C_1$ , проходящий через седловую точку  $\alpha = |\theta|$ . Может оказаться, что в процессе такой деформации контура  $C$  будут пересекаться полюсы подынтегральной функции в точках

$$\alpha_i = \pi - \theta_i,$$

$$\alpha_0 = \pi - \arccos \frac{k_0}{k_l},$$

$$\pi - \alpha_0,$$

и, кроме того, часть нового контура пройдет по берегам разрезов, проведенных от точек  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  (контур  $C_1$  на рис. 3). Участки контура интегрирования, проходящие по берегам разрезов, дают пре-небрежимо малый вклад в асимптотическое выражение для поля из-за экспоненциальных множителей, содержащихся в подынтегральных функциях. Точно так же пре-небрежимо малый вклад возникает при пересечении полюсов  $\alpha_0$  и  $\pi - \alpha_0$ . Если же пересекается расположенный на вещественной оси полюс  $\alpha_i$ , то возникающий при этом вклад следует учитывать обычным образом.

Окончательно получаем следующие асимптотические выражения для тангенциальной составляющей электрического поля ионно-звуковых волн:

$$\begin{aligned} E_{zi} \approx & E_{zi} + \frac{E_i}{K(k_l \cos \theta_i)} \left[ 1 + \frac{(k_l \cos \theta_i)^2}{x_t(k_l \cos \theta_i) \tilde{x}_t(k_l \cos \theta_i)} \right] \times \\ & \times \exp\left(-ik_l z \cos \theta_i + ik_l x \sin \theta_i\right) + \frac{E_i \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right)}{K^+(k_l \cos \theta_i) K^-(-k_l \cos \theta_i) \sin \theta} \times \\ & \times \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \cos \theta_i} \frac{\exp(ik_l r)}{k_l \sqrt{\pi k_l r}} \left[ \frac{ik_l \cos \theta}{x_t^+(-k_l \cos \theta) x_t^+(k_l \cos \theta_i)} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin \theta}{\cos \theta_i} \frac{\sin(\theta_i/2)}{\cos(\theta/2)} \right] \quad (\pi - \theta_i < \theta < \pi); \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} E_{zi} \approx & E_{zi} + \frac{E_i \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right)}{K^+(k_l \cos \theta_i) K^-(-k_l \cos \theta_i) \sin \theta} \times \\ & \times \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \cos \theta_i} \frac{\exp(ik_l r)}{k_l \sqrt{\pi k_l r}} \left[ \frac{ik_l \cos \theta}{x_t^+(-k_l \cos \theta) x_t^+(k_l \cos \theta_i)} \mp \right. \\ & \left. \mp \frac{\sin \theta}{\cos \theta_i} \frac{\sin(\theta_i/2)}{\cos(\theta/2)} \right] \quad (0 \leq |\theta| < \pi - \theta_i); \end{aligned} \quad (48)$$

$$E_{zi} \approx \frac{E_i \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right)}{K^+(k_l \cos \theta_i) K^-(-k_l \cos \theta_i) \sin \theta} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \cos \theta_i} \frac{\exp(ik_l r)}{k_l \sqrt{\pi k_l r}} \times \quad (49)$$

$$\times \left[ \frac{i k_l \cos \theta}{\kappa_t^- (-k_l \cos \theta) \kappa_t^+ (k_l \cos \theta_i)} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta_i} \frac{\sin(\theta_i/2)}{\cos(\theta/2)} \right] \quad (-\pi < \theta < \theta_i - \pi).$$

В (48) верхний знак берется при  $x \geq 0$ , нижний — при  $x \leq 0$ .

Из приведенных выше асимптотических формул (47) — (49) видна структура поля ионно-звуковой волны в дальней зоне. А именно, в секторе  $\pi - \theta_i < \theta < \pi$  полное поле является суперпозицией поля падающей волны (первое слагаемое в (47)), поля отраженной волны (второе слагаемое) и поля дифрагированной волны. Последняя, как обычно, имеет вид цилиндрической волны, расходящейся от края экрана. В секторе  $0 < |\theta| < \pi - \theta_i$  полное поле является суперпозицией поля падающей волны и поля дифрагированной волны. И, наконец, в область геометрической тени ( $-\pi < \theta < \theta_i - \pi$ ) проникает только дифрагированная волна.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, Math. Ann., 47, 317 (1896).
2. J. B. Alblas, Appl. Sci. Res., A6, 237 (1957).
3. N. Wiener and E. Hopf, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 696 (1931).
4. B. A. Фюк, Математический сборник, 14, 3 (1944).
5. Б. Нобл, Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию  
9 декабря 1975 г.

## DIFFRACTION OF ION-SOUND WAVES BY CONDUCTING SEMI-PLANE

*K. S. Karplyuk*

The problem of diffraction of ion-sound waves propagating in a nonisothermal plasma when they are incident on a perfectly conducting semi-plane is considered. The problem is formulated as pair integral equations which are solved using Wiener-Hopf—Fok method. Exact solutions describing the fields occurring as a result of diffraction are found. An asymptotic behaviour of the diffraction field in a far zone has been analysed.

УДК 534.26

## СКАЛЯРНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ (низкочастотное приближение)

*P. Z. Муратов, A. Г. Виноградов*

Методом возмущений, примененным к интегральным уравнениям акустики неоднородной идеальной жидкости, получено приближенное решение задачи о рассеянии плоской волны на малом однородном эллипсоиде. Найдены первые три члена низкочастотного разложения для звукового поля внутри эллипсоида и для рассеянной волны как в ближней, так и в дальней зонах. Рассмотрены частные случаи этой задачи: дифракция на несжимаемом закрепленном эллипсоиде, на жестком эллиптическом диске и на эллиптическом отверстии в мягком экране.

Строгое решение задачи дифракции на эллипсоиде затруднено недостаточной разработанностью теории эллипсоидальных волновых функций и зависимостью констант разделения от волнового числа. Практическое использование отдельных результатов такого подхода (см., например, [1]), в свою очередь, затруднено из-за отсутствия таблиц эллипсоидальных волновых функций. Остаются актуальными поэтому приближенные методы решения задачи дифракции на эллипсоиде и, в частности, приближение низких частот.

Впервые задача о рассеянии плоской звуковой волны трехосным эллипсоидом, размеры которого малы по сравнению с длиной волны, была поставлена и в первом приближении решена Рэлеем [2]. Показав, что она может быть рассмотрена на основе решения соответствующей задачи теории потенциала, Рэлей нашел потенциал скоростей рассеянной волны в дальней зоне как для эллипсоида с абсолютно мягкой (условие Дирихле) или абсолютно жесткой (условие Неймана) границей, так и для акустически прозрачного эллипсоида. В [2] исследовано в первом приближении и рассеяние плоской электромагнитной волны на малом эллипсоиде.

Следующие два члена низкочастотного ряда Рэлея были найдены в электромагнитной задаче Стивенсоном [3] с помощью развитого им метода [4], а в акустической задаче с мягкой границей Слиманом [5]\* на основе метода Клейнмана [7]. Между тем, насколько известно авторам, задача о рассеянии звука на малом, акустически прозрачном эллипсоиде дополнительно не рассматривалась. Восполнению этого пробела посвящена данная работа.

Здесь исследовано рассеяние произвольно направленной плоской монохроматической звуковой волны на малом однородном эллипсоиде и найдены первые три члена низкочастотного разложения для звукового поля внутри эллипсоида и для рассеянной волны как в ближней,

\* См. также работу [6], в которой обнаружены и исправлены некоторые ошибки, допущенные в [5].

так и в дальней зонах\*. Как частные случаи этой задачи рассмотрены рассеяние на несжимаемом закрепленном эллипсоиде (задача с жесткой границей), рассеяние на эллиптическом диске и дифракция на эллиптическом отверстии в мягком экране. Задача решается методом возмущений, примененным к интегральным уравнениям акустики неоднородной идеальной жидкости. В электродинамике аналогичный подход к решению задачи рассеяния на малых телах был предложен Хижняком [8] (см. также [9]).

### 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Если вне некоторого объема  $V$  идеальная жидкость однородна и характеризуется плотностью  $\rho$  и адиабатической сжимаемостью  $\beta$ , а внутри  $V$  они имеют значения  $\tilde{\rho}(r)$  и  $\tilde{\beta}(r)$ , зависящие, вообще говоря, от координат, то уравнения акустики

$$\nabla p + \tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + \tilde{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

можно в случае гармонических полей ( $e^{i\omega t}$ ) переписать в виде

$$\nabla P + ik\mathbf{v} = ik\mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} + ikP = ikh, \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$  ( $c = \sqrt{1/\beta\rho}$  — скорость звука во внешней области),  $P = p/\rho c$ , а

$$\mathbf{g}(r) = (1 - \tilde{\rho}/\rho)\mathbf{v}, \quad h(r) = (1 - \tilde{\beta}/\beta)P, \quad (2)$$

так что снаружи  $V$  функции  $\mathbf{g}$  и  $h$  равны нулю.

Уравнениям (1) соответствуют неоднородные уравнения второго порядка:

$$\Delta P + k^2 P = ik \nabla \cdot \mathbf{g} + k^2 h; \quad (3)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + k^2 \mathbf{v} = ik \nabla h + k^2 \mathbf{g}. \quad (4)$$

Если источник первичной звуковой волны находится на конечном расстоянии от объема  $V$ , то правые части (3) и (4) должны быть дополнены заданными функциями, характеризующими свойства источника.

Построим формальные решения уравнений (3), (4), считая их правые части заданными функциями. Эти решения получаются с помощью соответствующих функций Грина однородного пространства. Для уравнения (3) скалярная функция Грина есть, как известно\*\*,

$$G(r, r') = G(R) = -\frac{\exp(-ikR)}{4\pi R}, \quad (5)$$

где  $R = r - r'$ . Уравнению (4) соответствует тензорная функция Грина  $\hat{\Gamma}(r, r')$ . Эта функция, все компоненты которой должны удовлетворять условию излучения, определяется как решение уравнения

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \hat{\Gamma}(r, r')) + k^2 \hat{\Gamma}(r, r') = \hat{I}\delta(R),$$

где  $\hat{I}$  — единичный аффинор, и равна [10]

$$\hat{\Gamma}(r, r') = \left[ \hat{I} - \frac{1}{k^2} \nabla \times (\nabla \times \hat{I}) \right] G(R).$$

\* Точнее говоря, в дальней зоне первый член низкочастотного ряда, пропорциональный  $\omega^2$ , дополнен слагаемым, пропорциональным  $\omega^4$ . Член же порядка  $\omega^3$  для эллипсоида равен нулю, как и в аналогичной электромагнитной задаче [8].

\*\* Будем считать область, занятую жидкостью, неограниченной.

Формальное решение уравнений (3), (4) теперь можно представить в виде

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &= P_0(\mathbf{r}) + k^2 \int G(R) h(\mathbf{r}') dV' + ik \int G(R) \operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{r}') dV', \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \int G(R) \mathbf{g}(\mathbf{r}') dV' + \\ &\quad + \frac{i}{k} (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \int G(R) \operatorname{grad} h(\mathbf{r}') dV', \end{aligned}$$

где  $\rho c P_0$  и  $\mathbf{v}_0$  — давление и скорость в первичной звуковой волне. Интегрируя по частям члены, содержащие производные функций  $\mathbf{g}$  и  $h$ , заменяя затем  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}$  на  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ , а  $\mathbf{g}$  и  $h$  — их явными выражениями, окончательно получаем

$$P(\mathbf{r}) = P_0(\mathbf{r}) + k^2 \int_V Q_\beta G(R) P(\mathbf{r}') dV' + ik \operatorname{div} \int_V Q_\rho G(R) \mathbf{v}(\mathbf{r}') dV'; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \int_V Q_\beta G(R) \mathbf{v}(\mathbf{r}') dV' + \\ &\quad + ik \operatorname{grad} \int_V Q_\beta G(R) P(\mathbf{r}') dV', \end{aligned} \quad (7)$$

где  $Q_\rho = 1 - \tilde{\rho}/\rho$ ,  $Q_\beta = 1 - \tilde{\beta}/\beta$ . Для точек  $\mathbf{r}$ , принадлежащих объему  $V$ , (6) и (7) являются интегральными уравнениями акустики.

Для внешних точек формулы (6), (7) представляют собой соотношения, связывающие поля  $P_{\text{расс}} = P - P_0$  и  $\mathbf{v}_{\text{расс}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  рассеянной звуковой волны с полями внутри объема  $V$ . Таким образом,

$$P_{\text{расс}} = k^2 \Psi + ik \operatorname{div} \Pi, \quad \mathbf{v}_{\text{расс}} = (k^2 - \operatorname{rot} \operatorname{rot}) \Pi + ik \operatorname{grad} \Psi, \quad (8)$$

где

$$\Psi = \int_V Q_\beta G(R) P(\mathbf{r}') dV' \quad (9)$$

и

$$\Pi = \int_V Q_\rho G(R) \mathbf{v}(\mathbf{r}') dV' \quad (10)$$

— скалярный и векторный «акустические потенциалы Герца».

## 2. ЦЕПОЧКА УРАВНЕНИЙ НИЗКОЧАСТОТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Если размеры объема  $V$  малы по сравнению с длиной волны, то приближенное решение уравнений (6), (7) сводится к решению цепочки интегральных уравнений, соответствующих задачам теории потенциала. Уравнения цепочки получаются в результате подстановки в (6), (7) вместо всех величин, зависящих от частоты, их разложений в ряды по степеням  $k$ :

$$4\pi G(R) = -1/R + ik + k^2 R/2 + \dots,$$

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m P^{(m)}, \quad \mathbf{v} = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m \mathbf{v}^{(m)}, \quad P_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m P_0^{(m)},$$

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m \mathbf{v}_0^{(m)}.$$

В частности, для падающей плоской волны единичной амплитуды\*

$$P_0 = e^{-ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{x} e^{-ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}},$$

где  $\mathbf{x}$  — единичный вектор направления распространения волны, имеем следующую систему зацепляющихся уравнений для последовательных приближений:

$$P^{(0)}(\mathbf{r}) = 1; \quad (11)$$

$$\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}) = \mathbf{x} + \frac{Q_\rho}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_V \frac{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}')}{R} dV'; \quad (12)$$

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} + \frac{Q_\beta}{4\pi} \operatorname{div} \int_V \frac{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}')}{R} dV'; \quad (13)$$

$$\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}) + \frac{Q_\beta}{4\pi} \operatorname{grad} \int_V \frac{dV'}{R} + \frac{Q_\rho}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_V \frac{\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV'; \quad (14)$$

$$P^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{Q_\beta}{4\pi} \int_V \frac{dV'}{R} + \frac{Q_\rho}{4\pi} \operatorname{div} \int_V \frac{\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV'; \quad (15)$$

$$\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{Q_\rho}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}')}{R} dV' + \frac{Q_\beta}{4\pi} \operatorname{grad} \int_V \frac{P^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV' + \quad (16)$$

$$+ \frac{Q_\rho}{8\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_V \frac{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}') R^2 + 2\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}')}{R} dV';$$

$$P^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{6} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{r})^3 + \frac{Q_\beta}{4\pi} \left[ V + \int_V \frac{P^{(1)}(\mathbf{r}')}{R} dV' \right] + \quad (17)$$

$$+ \frac{Q_\rho}{8\pi} \operatorname{div} \int_V \frac{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}') R^2 + 2\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

Эти формулы записаны для интересующего нас случая, когда  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{\beta}$  постоянны.

Формулы (11)–(17) справедливы всюду в ближней зоне. Мы видим, что при  $Q_\rho \neq 0$  для точек  $\mathbf{r}$ , лежащих внутри объема  $V$ , задача свелась к решению последовательности интегральных уравнений для  $\mathbf{v}^{(m)}$ , в то время как величины  $P^{(m)}$  выражаются непосредственно через заданные функции и поля предыдущих приближений. Любопытно, что при  $Q_\rho = 0$ , т. е.  $\tilde{\rho} = \rho$ , вообще отпадает необходимость предварительного вычисления векторов  $\mathbf{v}^{(m)}$ , обращается в нуль вектор  $\mathbf{P}$  и, в этом смысле, задача становится чисто скалярной.

### 3. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ВНУТРИ ЭЛЛИПСОИДА

Пусть теперь объем  $V$  представляет собой однородный эллипсоид, граница которого дается уравнением  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — полуоси эллипсоида. Тогда для точек  $\mathbf{r}$ , лежащих внутри  $V$ , интегралы, входящие в (12)–(17), имеют структуру потенциалов внутри неоднородного эллипсоида. Как известно [11], потенциал внутри эллип-

\* Введение вместо давления  $\rho$  величины  $P = p/\rho c$  выравнивает не только размерности «давления» и скорости, но и их амплитуды в плоской волне, распространяющейся в однородной среде.

соида, плотность источников которого дается полиномом степени  $n$ , есть полином степени  $n+2$ . Поэтому, если в (12), (14), (16) искать  $v^{(m)}(r)$  в виде полинома  $m$ -й степени, которая совпадает со степенью полинома, характеризующего свободные члены этих интегральных уравнений, то для коэффициентов полинома  $v^{(m)}(r)$  получается замкнутая линейная алгебраическая система уравнений. Таким образом, уравнения цепочки могут быть решены точно. Легко видеть, что при этом  $P^{(m)}(r)$  — также полиномы степени  $m$ .

Для сокращения записи в последующих формулах наряду с величинами

$$Q_\rho = 1 - \tilde{\rho}/\beta, \quad Q_\beta = 1 - \tilde{\beta}/\beta \quad (18)$$

применяются обозначения

$$\delta = \tilde{\rho}/\rho, \quad \eta = \tilde{\beta}/\beta. \quad (19)$$

Будем искать решение для  $P^{(m)}(r)$  в виде\*

$$P^{(1)} = \delta(\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z); \quad (20)$$

$$P^{(2)} = \delta \left( \frac{\alpha_{200}}{2} x^2 + \frac{\alpha_{020}}{2} y^2 + \frac{\alpha_{002}}{2} z^2 + \alpha_{110} xy + \alpha_{011} yz + \alpha_{101} xz \right) + \alpha_{000}; \quad (21)$$

$$P^{(3)} = \delta \left( \frac{\alpha_{300}}{3} x^3 + \frac{\alpha_{030}}{3} y^3 + \frac{\alpha_{003}}{3} z^3 + \alpha_{210} x^2 y + \alpha_{201} x^2 z + \alpha_{120} x y^2 + \alpha_{021} y^2 z + \alpha_{102} x z^2 + \alpha_{012} y z^2 + \alpha_{111} x y z + \alpha_{100} x + \alpha_{010} y + \alpha_{001} z \right) + Q_\beta \frac{abc}{3}. \quad (22)$$

Соответствующие выражения для  $v^{(m)}(r)$  можно получить, используя первое из уравнений (1), которое для  $m \geq 1$  внутри эллипсоида дает

$$\delta v^{(m-1)} = \nabla P^{(m)}. \quad (23)$$

Подставляя выражения для  $v^{(m)}$  и  $P^{(m)}$  в цепочку приближенных уравнений (12), (14), (16) и используя полиномиальные представления интегралов вида  $\int_V \frac{x'^l y'^m z'^n}{R} dV'$ , найденные в [12], получаем систему алгебраических уравнений для коэффициентов  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  и  $\alpha_{lmn}$ . Ее решение есть\*\*

$$v_x^{(0)} = \alpha_x = \alpha_x / (\delta + Q_\rho M_{100}); \quad (24)$$

$$\alpha_{110} = \alpha_x \alpha_y / [\delta + Q_\rho (a^2 + b^2) M_{110}]; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{200} &= \frac{1}{H} \{ \mu_a - Q_\rho [(b^2 + c^2) M_{011} \mu_a + c^2 M_{101} (\eta - \mu_b) + b^2 M_{110} (\eta - \mu_c)] + \\ &+ Q_\rho^2 \eta b^2 c^2 \langle M_{110} M_{101} \rangle \}, \quad H = 1 - Q_\rho \langle (a^2 + b^2) M_{110} \rangle + Q_\rho^2 \langle a^2 b^2 \rangle \langle M_{110} M_{101} \rangle; \end{aligned} \quad (26)$$

\* Для сокращения записи в (20)–(22) опущены слагаемые (например, квадратичные в (22)), коэффициенты при которых в результате решения оказываются равными нулю.

\*\* Заметим, что получение и запись результатов существенно облегчаются, если использовать симметрию задачи: возможность циклической перестановки (одновременной замены  $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x, a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a, T_{lmn} \rightarrow T_{nlm}$ , где  $T_{lmn}$  — любая из встречающихся в статье величин с тремя целочисленными индексами) и взаимной замены координат (например,  $x \leftrightarrow y, a \leftrightarrow b$  и  $T_{lmn} \rightarrow T_{mln}$ ).

$$2\alpha_{000} = Q_\beta M_{000} + Q_\rho \langle a^2 M_{100} \alpha_{200} \rangle; \quad (27)^*$$

$$\alpha_{111} = x_x x_y x_z / (\delta + Q_\rho \langle a^2 b^2 \rangle M_{111}); \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{120} = & \frac{\alpha_x}{N_a} \left\{ \frac{1}{2} \delta Q_\rho \eta [2 \delta A_{210} - Q_\rho (A_{210} B_{201} - A_{201} C_{210})] + 2 \delta \Lambda_{201} + \right. \\ & \left. + Q_\rho (\Lambda_{201} E_{201} - \Lambda_{210} F_{210}) \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} N_a = & 4 \delta^2 + 4 \delta Q_\rho [1 + 6 M_{100} - \langle a^2 b^2 \rangle M_{111} - 2 a^2 (b^2 M_{210} + c^2 M_{201})] + \\ & + Q_\rho^2 (E_{210} E_{201} - F_{210} F_{201}). \end{aligned}$$

Коэффициент  $\alpha_{102}$  находится из выражения для  $\alpha_{120}$  с помощью взаимной замены  $y \leftrightarrow z$ ,  $b \leftrightarrow c$ ,  $T_{lmn} \rightarrow T_{lnm}$ . После этого можно определить

$$\alpha_{300} = \frac{1}{2} \delta \eta \alpha_x - \alpha_{120} - \alpha_{102}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} 2(\delta + Q_\rho M_{100}) \alpha_{100} = & \frac{1}{2} \alpha_x [Q_\rho (M_{000} - a^2 M_{100}) + 2 \delta Q_\beta a^2 M_{100} - \delta Q_\rho \eta a^2 D_{100}] - \\ & - Q_\rho (D_{120} \alpha_{120} + D_{102} \alpha_{102}). \end{aligned} \quad (31)$$

Выражения для остальных коэффициентов получаются из (24)–(26), (29)–(31) и формулы для  $\alpha_{102}$  с помощью циклической перестановки.

Для сокращения записи в вышеприведенных формулах, наряду с (18) и (19), использованы обозначения

$$\mu_a = x_x^2 - Q_\beta M_{100}, \quad A_{210} = a^2 (M_{110} - a^2 M_{210}),$$

$$B_{210} = b^2 [M_{110} - (2a^2 + b^2) M_{120}], \quad C_{210} = c^2 (M_{011} - 3a^2 M_{111}),$$

$$D_{100} = M_{100} - a^2 M_{200}, \quad E_{210} = A_{210} - B_{210}, \quad F_{210} = A_{210} - C_{210},$$

$$D_{120} = b^2 (M_{010} - 3a^2 M_{110}) - a^2 D_{100},$$

$$\Lambda_{201} = x_y^2 (\delta + Q_\rho M_{100}) - \frac{1}{2} Q_\rho (M_{010} - a^2 M_{110}) - \delta Q_\beta a^2 M_{110}$$

и их варианты, получающиеся в результате циклической перестановки или взаимной замены координат. Символом  $\langle \dots \rangle$  обозначена сумма трех слагаемых, связанных циклической перестановкой (например,  $\langle a^2 b^2 \rangle = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$ ).

Таким образом, поле внутри эллипсоида  $P \approx \sum_{m=0}^3 (-ik)^m P^{(m)}$ ,  $v \approx \sum_{m=0}^2 (-ik)^m v^{(m)}$  оказывается выраженным через внутренние потенциальные факторы эллипсоида [12–14]:

$$\begin{aligned} M_{lmn} = & (2l - 1)!! (2m - 1)!! (2n - 1)!! \frac{abc}{2} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)^{l+\frac{1}{2}} (b^2 + u)^{m+\frac{1}{2}} (c^2 + u)^{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (32)$$

\* Выражение (27) для  $\alpha_{000}$  получено путем вычисления (15) и сравнения результата с (21).

Эти интегралы (в общем случае — эллиптические) с помощью рекуррентных соотношений [14], в свою очередь, выражаются через факторы размагничивания эллипсоида  $M_{100}$ ,  $M_{010}$  и  $M_{001}$ , которые табулированы (см., например, [15]).

#### 4. ПОЛЕ РАССЕЯНИЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

Вне эллипсоида первое из уравнений (1) дает для рассеянного поля в ближней зоне  $\mathbf{v}_{\text{расс}}^{(m)} = \nabla P_{\text{расс}}^{(m+1)}$ , где  $P_{\text{расс}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m P_{\text{расс}}^{(m)}$ ,  $\mathbf{v}_{\text{расс}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-ik)^m \mathbf{v}_{\text{расс}}^{(m)}$ . Поэтому для вычисления полей с интересующей нас точностью достаточно найти  $P_{\text{расс}}^{(m)}$  до  $m = 3$ . Поскольку  $P_{\text{расс}}^{(m)} = P^{(m)} - P_0^{(m)}$ , то расчет  $P_{\text{расс}}^{(m)}$  можно провести по формулам (11), (13), (15), (17), отбросив в них первые члены правых частей.

Используя выражения для потенциалов вне неоднородного эллипсоида, найденные в [13], окончательно получаем:  $P_{\text{расс}}^{(0)} = 0$ ,

$$P_{\text{расс}}^{(1)} = -Q_p \langle \alpha_x \widetilde{M}_{100} x \rangle; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} 2P_{\text{расс}}^{(2)} = Q_p I_{000} + Q_p \langle a^2 \alpha_{200} \widetilde{M}_{100} - (a^2 \alpha_{200} \widetilde{M}_{200} + b^2 \alpha_{020} \widetilde{M}_{110} + \\ + c^2 \alpha_{002} \widetilde{M}_{101}) x^2 - 2(a^2 + b^2) \alpha_{110} \widetilde{M}_{110} xy \rangle; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{расс}}^{(3)} = Q_p \frac{abc}{3} + \frac{1}{2} \delta Q_p \langle \alpha_x a^2 x I_{100} \rangle + \frac{1}{4} Q_p \langle \alpha_x x (I_{000} - a^2 I_{100}) \rangle - \\ - Q_p \alpha_{111} \langle a^2 b^2 \rangle \widetilde{M}_{111} xyz - \frac{1}{2} Q_p \langle x [\alpha_{300} a^2 (I_{100} - a^2 I_{200}) + \\ + \alpha_{120} b^2 I_{120} + \alpha_{102} c^2 I_{102} + 2 \alpha_{100} \widetilde{M}_{100}] \rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь введены обозначения:

$$I_{000} = \widetilde{M}_{000} - \langle \widetilde{M}_{100} x^2 \rangle, \quad I_{100} = \widetilde{M}_{100} - \frac{1}{3} \widetilde{M}_{200} x^2 - \widetilde{M}_{110} y^2 - \widetilde{M}_{101} z^2,$$

$$I_{200} = \widetilde{M}_{200} - \frac{1}{3} \widetilde{M}_{300} x^2 - \widetilde{M}_{210} y^2 - \widetilde{M}_{201} z^2,$$

$$\begin{aligned} I_{120} = \widetilde{M}_{010} - 3a^2 \widetilde{M}_{110} - (\widetilde{M}_{110} - a^2 \widetilde{M}_{210}) x^2 - (\widetilde{M}_{020} - 2\widetilde{M}_{110} - 3a^2 \widetilde{M}_{120}) y^2 - \\ - (\widetilde{M}_{011} - 3a^2 \widetilde{M}_{111}) z^2. \end{aligned}$$

Таким образом, звуковое поле, рассеянное эллипсоидом, выражается в ближней зоне с помощью внешних потенциальных факторов эллипсоида  $\widetilde{M}_{lmn}(\xi)$ . Последние определяются формулой, отличающейся от (32) тем, что нижний — нулевой — предел интегрирования заменен эллипсоидальной координатой  $\xi$  точки наблюдения. Рекуррентные соотношения для  $\widetilde{M}_{lmn}(\xi)$ , выведенные в [14], позволяют выразить эти факторы через табулированные факторы размагничивания эллипсоида.

#### 5. ПОЛЕ РАССЕЯННОЙ ВОЛНЫ В ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ

По известному полю внутри эллипсоида нетрудно вычислить с помощью акустических потенциалов Герца (8) — (10) поле рассеянной волны в дальней зоне.

Для этого используем справедливое при  $r > r'$  разложение функции Грина (5) по сферическим гармоникам:

$$G(R) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(kr') h_l^{(2)}(kr) P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'), \quad (36)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ,  $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$ ,  $j_l(x)$  и  $h_l^{(2)}(x)$  — соответственно сферические функции Бесселя и Ханкеля,  $P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$  — полиномы Лежандра. При  $kr' \ll 1$  (условие малости эллипсоида) с точностью, соответствующей расчету внутреннего поля, имеем

$$j_0(kr') \approx 1 - (kr')^2/6, \quad j_1(kr') \approx kr'/3, \quad j_2(kr') \approx (kr')^2/15.$$

Подставляя эти выражения в (36), ограничиваясь тремя членами ряда и учитывая, что в волновой зоне ( $kr \gg 1$ )

$$h_l^{(2)}(kr) \approx i^{l+1} e^{-ikr}/kr \quad (l = 0, 1, 2),$$

приближенно получаем

$$G(R) \approx -\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \left[ 1 + iknr' - \frac{1}{2} k^2(nr')^2 \right]. \quad (37)$$

Дальнейший расчет, включающий вычисление интегралов (9), (10) с точностью до величин порядка  $k^2$ , дает окончательно

$$P_{\text{пacc}} = k^2(\Psi + n\Pi), \quad v_{\text{пacc}} = nP_{\text{пacc}}, \quad (38)$$

$$\Psi \approx VQ_\beta \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left[ -1 + k^2 \left( q - \frac{1}{5} \delta \langle a^2 \alpha_x n_x \rangle + \frac{1}{10} \langle a^2 n_x^2 \rangle \right) \right]; \quad (39)$$

$$n\Pi \approx VQ_p \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \left\{ -\langle \alpha_x n_x \rangle + k^2 \left[ \langle w_x n_x \rangle + \frac{1}{10} \langle \alpha_x n_x \rangle \langle a^2 n_x^2 \rangle - \frac{1}{5} \langle \alpha_{200} a^2 n_x^2 + \alpha_{110} (a^2 + b^2) n_x n_y \rangle \right] \right\}, \quad (40)$$

где  $V$  — объем эллипсоида,

$$q = \alpha_{000} + \frac{1}{10} \delta \langle \alpha_{200} a^2 \rangle, \quad w_x = \alpha_{100} + \frac{1}{5} (\alpha_{300} a^2 + \alpha_{120} b^2 + \alpha_{102} c^2).$$

Из формул (38)–(40) видно, что в дальней зоне разложение поля звуковой волны, переизлученной малым эллипсоидом, не содержит члена порядка  $k^3$ .

## 6. КОЭФФИЦИЕНТ РАССЕЯНИЯ

Простое вычисление с использованием формул (38)–(40) показывает, что полное поперечное сечение рассеяния эллипсоида равно

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{1}{12\pi} k^4 V^2 \left\{ 3Q_\beta^2 + Q_p^2 \langle \alpha_x^2 \rangle - 2k^2 \left[ Q_\beta^2 \left( 3q + \frac{1}{10} \langle a^2 \rangle \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + Q_p^2 \left\langle \alpha_x w_x + \frac{1}{50} \alpha_x^2 (3a^2 + b^2 + c^2) \right\rangle - \frac{1}{5} Q_p Q_\beta \langle a^2 (\delta \alpha_x^2 + \alpha_{200}) \rangle \right] \right\} + \\ & + O(k^7). \end{aligned} \quad (41)$$

Коэффициент рассеяния  $\sigma$  определяется по формуле

$$\sigma = \Sigma/S, \quad (42)$$

где  $S$  — площадь проекции эллипсоида на плоскость, перпендикулярную направлению  $\mathbf{x}$ . Ее величина есть

$$S = \pi \sqrt{\langle x^2 b^2 c^2 \rangle}. \quad (43)$$

## 7. РАССЕЯНИЕ НА НЕСЖИМАЕМОМ ЗАКРЕПЛЕННОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

Изложенный в разд. 1, 2 метод решения низкочастотной задачи дифракции принципиально пригоден лишь к акустически прозрачным рассеивателям. Однако после того как поле, рассеянное прозрачным препятствием, найдено в аналитическом виде, можно, устремив в полученных выражениях сначала отношение сжимаемостей  $\eta = \tilde{\beta}/\beta \rightarrow 0$ , а затем отношение плотностей  $\delta = \rho/\rho \rightarrow \infty$ , прийти к формулам для несжимаемого закрепленного препятствия. Эта процедура аналогична переходу от прозрачного к идеально проводящему рассеивателю в электродинамике [4].

Таким образом, в ближней зоне для поля, рассеянного несжимаемым закрепленным эллипсоидом, получаем

$$P_{\text{пacc}} \approx \sum_{m=1}^3 (-ik)^m P_{\text{пacc}}^{(m)}, \quad v_{\text{пacc}} \approx \sum_{m=0}^2 (-ik)^m \nabla P_{\text{пacc}}^{(m+1)}; \quad (44)$$

$$P_{\text{пacc}}^{(1)} = \langle \gamma_x \widetilde{M}_{100} \mathbf{x} \rangle; \quad (45)$$

$$2 P_{\text{пacc}}^{(2)} = I_{000} - \langle a^2 \gamma_{200} \widetilde{M}_{100} - (a^2 \gamma_{200} \widetilde{M}_{200} + b^2 \gamma_{020} \widetilde{M}_{110} + c^2 \gamma_{002} \widetilde{M}_{101}) x^2 - 2 \gamma_{110} (a^2 + b^2) \widetilde{M}_{110} xy \rangle; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{пacc}}^{(3)} &= \frac{abc}{3} + \frac{1}{2} \langle \gamma_x x a^2 I_{100} \rangle - \frac{1}{4} \langle \gamma_x x (I_{000} - a^2 I_{100}) \rangle + \\ &+ \gamma_{111} \langle a^2 b^2 \rangle \widetilde{M}_{111} xyz + \frac{1}{2} \langle x [\gamma_{120} (b^2 I_{120} - a^2 I_{100} + a^4 I_{200}) + \\ &+ \gamma_{102} (c^2 I_{102} - a^2 I_{100} + a^4 I_{200}) + 2 \gamma_{100} \widetilde{M}_{100}] \rangle, \end{aligned} \quad (47)$$

где величины  $I_{lmn}$  определены в разд. 4,

$$\begin{aligned} \gamma_x &= x/(1 - M_{100}); \quad \gamma_{110} = x_x x_y/[1 - (a^2 + b^2) M_{110}], \\ \gamma_{200} &= [(b^2 + c^2) M_{011} v_a - c^2 M_{101} v_b - b^2 M_{110} v_c]/(\langle a^2 b^2 \rangle \langle M_{110} M_{101} \rangle), \\ v_a &= x_x^2 - M_{100}; \quad \gamma_{111} = x_x x_y x_z/(1 - \langle a^2 b^2 \rangle M_{111}), \\ \gamma_{120} &= \frac{\gamma_x}{L_a} (2 \Gamma_{201} - \Gamma_{201} E_{201} + \Gamma_{210} F_{210}), \\ L_a &= 4 [2 a^2 (b^2 M_{210} + c^2 M_{201}) + \langle a^2 b^2 \rangle M_{111} - 6 M_{100}] + \\ &+ E_{201} E_{210} - F_{201} F_{210}, \\ \Gamma_{201} &= x_y^2 (1 - M_{100}) + \frac{1}{2} (M_{010} - 3 a^2 M_{110}), \\ 2(1 - M_{100}) \gamma_{100} &= \frac{\gamma_x}{2} (3 a^4 M_{100} - M_{000}) + \gamma_{120} D_{120} + \gamma_{102} D_{102}, \end{aligned} \quad (48)$$

а величины  $D_{lmn}$ ,  $E_{lmn}$ ,  $F_{lmn}$  были введены в разд. 3.

В волновой зоне рассеянное поле имеет вид (38), где теперь

$$\Psi \approx \frac{e^{-ikr}}{3r} abc \left[ -1 + k^2 \left( f - \frac{1}{5} \langle a^2 \gamma_x n_x \rangle + \frac{1}{10} \langle a^2 n_x^2 \rangle \right) \right]; \quad (49)$$

$$\begin{aligned} n\Pi \approx & \frac{e^{-ikr}}{3r} abc \left\{ \langle \gamma_x n_x \rangle - k^2 \left[ \langle u_x n_x \rangle + \frac{1}{10} \langle \gamma_x n_x \rangle \langle a^2 n_x^2 \rangle - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{5} \langle \gamma_{200} a^2 n_x^2 + \gamma_{110} (a^2 + b^2) n_x n_y \rangle \right] \right\}. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} 2f = M_{000} + \frac{1}{5} \langle \gamma_{200} a^2 (1 - 5M_{100}) \rangle, \quad u_x = \gamma_{100} - \\ - \frac{1}{5} [\gamma_{120} (a^2 - b^2) + \gamma_{102} (a^2 - c^2)]. \end{aligned}$$

Наконец, для коэффициента рассеяния на несжимаемом закрепленном эллипсоиде из (41)–(43) получаем

$$\sigma = \frac{4k^4 a^2 b^2 c^2}{27 \sqrt{\langle x_x^2 b^2 c^2 \rangle}} \left\{ 3 + \langle \gamma_x^2 \rangle - k^2 \left[ 3M_{000} + \langle \gamma_{200} a^2 (1 - 3M_{100}) \rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{5} \langle a^2 \rangle + \langle 2\gamma_x u_x + \frac{1}{25} \gamma_x^2 (13a^2 + b^2 + c^2) \rangle \right] \right\} + O(k^7). \quad (51)$$

## 8. РАССЕЯНИЕ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДИСКЕ

Решение дифракционной задачи об абсолютно жестком диске, ограниченном эллипсом  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , можно получить из результатов разд. 7 путем перехода к пределу при  $c \rightarrow 0$ .

Найдем, например, поле рассеянной волны в дальней зоне. Для этого необходимо выразить входящие в (49), (50) внутренние потенциальные факторы  $M_{lmn}$  через факторы размагничивания эллипсоида и учесть, что последние при  $a > b \gg c$  равны

$$\begin{aligned} M_{100} \approx \frac{bc}{a^2 e^2} (K - E) - \frac{c^2}{a^2}, \quad M_{010} \approx \frac{c}{be^2} \left( E - \frac{b^2}{a^2} K \right) - \frac{c^2}{b^2}, \\ M_{001} \approx 1 - \frac{c}{b} E + \frac{c^2}{b^2} \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (52)$$

где  $K$  и  $E$  — соответственно полные эллиптические интегралы первого и второго рода, модуль которых  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ . Опуская громоздкие выкладки, связанные с вычислением предела, окончательно получаем

$$\begin{aligned} P_{\text{расс}} \approx & \frac{\exp(-ikr)}{3r} k^2 ab^2 \frac{x_z n_z}{E} \left\{ 1 - \frac{k^2}{5} \left[ \frac{a^2}{2} (x_x^2 + n_x^2) + \frac{b^2}{2} (x_y^2 + n_y^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - b^2 \frac{K}{E} - (a^2 - b^2) \left( \frac{a^2 x_x n_x}{a^2 - 2b^2 + b^2 K/E} + \frac{b^2 x_y n_y}{2a^2 - b^2 - b^2 K/E} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Коэффициент рассеяния на акустически жестком диске оказывается равным

$$\sigma = \frac{\Sigma}{x_z \pi ab} \approx \frac{4}{27} k^4 ab^3 \frac{x_z}{E^2} \left[ 1 - \frac{k^2}{5} \left( \frac{a^2 + b^2}{5} + a^2 x_x^2 + b^2 x_y^2 - 2b^2 \frac{K}{E} \right) \right]. \quad (54)$$

## 9. ДИФРАКЦИЯ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ОТВЕРСТИИ В ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Пусть на бесконечно тонкий, акустически мягкий экран с эллиптическим отверстием ( $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ) падает плоская волна  $P_0 = e^{-ikxr}$ , где  $x_z > 0$ . Тогда, согласно теореме Бабине (см., например, [16]), поле дифрагированной волны  $P_{\text{дифр}}$  ( $z > 0$ ) связано с решением  $P_{\text{пасс}}$  дополнительной задачи о жестком диске простым образом:

$$P_{\text{дифр}} = -P_{\text{пасс}} \quad (z > 0). \quad (55)$$

В частности, на больших расстояниях от отверстия дифрагированная волна описывается выражением, получающимся при подстановке (53) в (55).

Коэффициент прохождения  $\tau$ , очевидно, равен

$$\tau = \sigma/2, \quad (56)$$

где  $\sigma$  дается формулой (54).

Представляет интерес также поле в отверстии экрана. Чтобы найти его, сначала нужно переписать (44)–(47) для точек на поверхности эллипсоида (при этом внешние потенциальные факторы  $\tilde{M}_{lmn}(0)$  совпадают с внутренними —  $M_{lmn}$ ), затем перейти к пределу при  $c \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow +0$ ,  $\frac{z}{c} \rightarrow \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ , после чего использовать теорему Бабине. В результате получаем

$$P_{\text{дифр}} \approx -\sum_{m=1}^3 (-ik)^m P_{\text{пасс}}^{(m)},$$

$$\text{где } P_{\text{пасс}}^{(1)} = \frac{b}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad P_{\text{пасс}}^{(2)} = 0, \\ P_{\text{пасс}}^{(3)} = -P_{\text{пасс}}^{(1)} \left\{ \frac{b^2}{4} \frac{K}{E} - \frac{1}{3\theta} [(x^2 + \varphi)\chi + (y^2 + \bar{\varphi})\bar{\chi}] \right\}. \quad (57)$$

Эти формулы записаны для случая нормального падения ( $x_x = z_y = 0$ ,  $x_z = 1$ ), в них обозначено

$$\theta = 4 \frac{a^2}{b^2} - 19 + 4 \frac{b^2}{a^2} + 8 \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{K}{E} - 5 \frac{b^2}{a^2} \frac{K^2}{E^2}, \\ \varphi = \frac{b^2}{2e^2} \left( \frac{K}{E} - 1 \right), \quad \chi = \left( 3 + \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{K}{E} - \frac{7}{2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} \frac{K^2}{E^2}, \\ \bar{\varphi} = \frac{b^2}{2e^2} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \frac{K}{E} \right), \quad \bar{\chi} = \left( 1 + 3 \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{K}{E} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} \frac{K^2}{E^2}.$$

## 10. СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

Найденное приближенное решение задачи дифракции на эллипсоиде в ближней зоне (разд. 3, 4, 7) удовлетворяет как уравнениям акустики (1), записанным для  $P^{(m)}$  и  $v^{(m)}$ , так и граничным условиям (непрерывность  $P^{(m)}$  и нормальной компоненты скорости  $v_n^{(m)}$  для прозрачного эллипса,  $v_n^{(m)} = 0$  для несжимаемого закрепленного эллипса).

В волновой зоне решение (разд. 5, 7—9) согласуется с известными частными случаями:

а) В первом приближении поле  $P_{\text{пacc}}$ , даваемое (38)—(40) при  $\mathbf{x}_x = \mathbf{x}_y = 0, \mathbf{x}_z = -1$ , в точности совпадает с результатом Рэлея [2].

б) Шар. В случае шара ( $c = b = a$ ), когда [14]

$$M_{lmn} = \frac{(2l-1)!! (2m-1)!! (2n-1)!!}{2(l+m+n)+1} a^{-2(l+m+n-1)},$$

из (38)—(40) получаем при  $\mathbf{x}_x = \mathbf{x}_y = 0, \mathbf{x}_z = 1$

$$\begin{aligned} P_{\text{пacc}} \approx & -\frac{e^{-ikr}}{kr} \varepsilon^3 \left\{ \frac{Q_\beta}{3} + \frac{Q_\rho}{1+2\delta} n_z - \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{45} (9 - 15\eta + 5\eta^2 + \delta\eta^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{5} \frac{Q_\rho - \delta^2 Q_\beta}{(1+2\delta)^2} n_z + \frac{Q_\rho}{9(2+3\delta)} (1 - 3n_z^2) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = ka$ . Аналогичный результат получается из строгого решения задачи дифракции на шаре.

в) Сфериоид. Если в формулах (38), (49), (50) положить  $a = b < c$  (вытянутый сфериоид),  $\mathbf{x}_x = \mathbf{x}_y = 0, \mathbf{x}_z = -1$ , выразить  $M_{lmn}$  с помощью рекуррентных формул [14] через продольный фактор размагничивания сфериоида

$$M \equiv M_{001} = \frac{1-e^2}{2e^3} \left( \ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right),$$

где  $e = \sqrt{1-(a/c)^2}$ , то после упрощений получим

$$\begin{aligned} P_{\text{пacc}} \approx & -\frac{\exp\{-ikr\}}{r} k^2 \frac{a^2 c}{3} \left\{ 1 + \frac{n_z}{1-M} - \frac{k^2 c^2}{10} \left[ 6 \frac{a^2}{c^2} + 5e^2 M + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^2 \frac{(1-M)(1-5M)}{1-3M} + \frac{2+e^2(1-M)}{(1-M)^2} n_z + e^2 \frac{3-5M}{1-3M} n_z^2 + \frac{e^2 n_z^3}{1-M} \right] \right\}. \end{aligned}$$

К такому же виду можно преобразовать выражение (14) работы [17], в которой рассматривается рассеяние на несжимаемом закрепленном сфериоиде\*.

г) Круглое отверстие в экране. Подставляя (53) в (55) и полагая  $b = a$ , будем иметь

$$P_{\text{дифр}} \approx -\frac{e^{-ikr}}{kr} \frac{2}{3\pi} \varepsilon^3 \mathbf{x}_z n_z \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^3}{10} \left[ \mathbf{x}_z^2 + n_z^2 + \frac{4}{3} (\mathbf{x}_x n_x + \mathbf{x}_y n_y) \right] \right\},$$

где  $\varepsilon = ka$ . Это совпадает с результатами, полученными в [18].

В заключение авторы выражают признательность М. А. Исаковичу, М. Л. Левину и С. М. Рытову за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. B. D. Sleeman, J. Inst. Math. Appl., 3, № 1, 4 (1967).
2. W. Rayleigh, Phil. Mag., 44, № 1, 28 (1897).
3. A. F. Stevenson, J. Appl. Phys., 24, № 9, 1143 (1953).
4. A. F. Stevenson, J. Appl. Phys., 24, № 9, 1134 (1953).
5. B. D. Sleeman, J. Inst. Math. Appl., 3, № 3, 291 (1967).
6. W. E. Williams, J. Inst. Math. Appl., 7, № 2, 111 (1971).
7. R. E. Kleinman, Arch. Rational Mech. Anal., 18, № 3, 205 (1965).
8. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 28, № 7, 1592 (1958).

\* В формуле для  $v_4$  работы [17] имеется опечатка в знаке перед дробью 16/7.

9. О. Е. Лысенко, Н. А. Хижняк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 559 (1968).
10. L. B. Felsen, N. Marcuvitz, Radiation and scattering of waves, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (N. J.), 1973.
11. N. M. Ferrers, Quart. J. Pure Appl. Math., 14, № 53, 1 (1877).
12. M. L. Levin, R. Z. Muratov, Astrophys. J., 166, № 2, 441 (1971).
13. Р. З. Муратов, Тр. Радиотехнического института. — Теория и техника ускорителей, № 11, 212 (1973).
14. М. Л. Левин, Р. З. Муратов, ЖТФ, 44, № 2, 263 (1974).
15. В. Н. Белоозеров, Р. З. Муратов, Радиотехника и электроника, 17, № 4, 902 (1972).
16. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
17. T. B. A. Senior, Can. J. Phys., 38, № 12, 1632 (1960).
18. J. Bazer, H. Hochstadt, Comm. Pure Appl. Math., 15, № 1, 1 (1962).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 ноября 1975 г.

## SCALAR PROBLEM OF LF-DIFFRACTION BY AN ELLIPSOID

*R. Z. Muratov, A. G. Vinogradov*

An approximate solution of the problem of a plane wave scattering by a small homogeneous ellipsoid is obtained by the perturbation applied to integral equations of acoustics for a homogeneous perfect liquid. The first three terms of the low-frequency expansion are found for a sound field inside the ellipsoid and for a scattered wave both in the near and far zones. Special cases of this problem, namely, diffraction by a noncompressible fixated ellipsoid, by a rigid elliptic disc and by an elliptic aperture in a soft screen are considered.

*Примечание при корректуре.* Результаты работ [12—15] содержатся в недавно вышедшей книге: Р. З. Муратов, «Потенциалы эллипсоида», М., Атомиздат, 1976 г.

УДК 621.372.8

## АНАЛИЗ МНОГОМОДОВОГО РЕЖИМА ДВУХСЛОЙНОГО КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

*В. Я. Сморгонский, Ю. А. Иларионов*

Предложен графический метод определения типов волн, которые могут распространяться в двухслойном круглом волноводе на фиксированной частоте при заданных параметрах заполнения.

При исследовании двухслойных волноводов возникает необходимость определить распространяющиеся типы волн в определенном диапазоне частот при заданных параметрах заполнения (коэффициент заполнения, диэлектрическая проницаемость). Дисперсионное уравнение круглого двухслойного волновода представляет собой сложное трансцендентное выражение, содержащее функции Бесселя первого, второго рода и их производные от действительного и мнимого аргумента [1]. Численное решение дисперсионного уравнения сопряжено со значительными математическими трудностями и даже при использовании ЭВМ требует большой затраты времени и не дает наглядной картины влияния параметров заполнения на диапазонные свойства двухслойных волноводов.

Целью настоящей работы является определение распространяющихся волн высших типов в данном диапазоне частот при заданных параметрах заполнения без численного решения дисперсионного уравнения.

Запишем дисперсионное уравнение в виде

$$F_n(x) = \frac{\chi}{2} \left[ Q_n^H(y) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} Q_n^E(y) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[ Q_n^H(y) - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} Q_n^E(y) \right]^2 + \frac{4\tilde{\beta}^2}{\epsilon_1} \left( 1 - \frac{1}{\chi} \right)^2} \right]. \quad (1)$$

Здесь обозначено:

$$F_n(x) = \frac{x J'_n(x)}{n J_n(x)}, \quad \chi = \frac{x^2}{y^2},$$

$$Q_n^E(y) = \frac{y}{n} \frac{J'_n(y) N_n\left(y \frac{b}{a}\right) - N'_n(y) J_n\left(y \frac{b}{a}\right)}{J_n(y) N_n\left(y \frac{b}{a}\right) - N_n(y) J_n\left(y \frac{b}{a}\right)},$$

$$Q_n^H(y) = \frac{y}{n} \frac{J'_n(y)N'_n\left(y \frac{b}{a}\right) - N'_n(y)J'_n\left(y \frac{b}{a}\right)}{J_n(y)N'_n\left(y \frac{b}{a}\right) - N_n(y)J'_n\left(y \frac{b}{a}\right)},$$

$$x = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \sqrt{\epsilon_1 - \tilde{\beta}^2}, \quad y = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \sqrt{\epsilon_2 - \tilde{\beta}^2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{2\pi/\lambda}.$$

Левая часть уравнения (1) зависит только от  $x$ . Правую часть уравнения (1), которая зависит от  $x$  и  $y$ , обозначим через  $\Psi_{\pm}(x, y)$ ;  $\Psi_+$  соответствует знак «+» перед корнем,  $\Psi_-$  — знак «—».

Точки дисперсионной характеристики того или иного типа волны определяются координатами точек пересечения кривых  $\Psi_+$  и  $\Psi_-$  с кривой  $F_n(x)$ . При фиксированной частоте распространяющимися будут те типы волн, у которых координаты точек пересечения соответствуют действительному значению постоянной распространения, т. е. взаимное расположение кривых  $\Psi_{\pm}$  и  $F_n(x)$  должно быть рассмотрено в интервале тех значений  $x$  и  $y$ , при которых  $\tilde{\beta}^2 > 0$ . Этот интервал легко рассчитать при фиксированной частоте для заданных значений параметров заполнения.

В точке  $\tilde{\beta} = 0$  получаем  $x_0 = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1}$ ,  $y_0 = \frac{2\pi a}{\lambda}$  для волновода со стержнем и  $x_0 = \frac{2\pi a}{\lambda}$ ,  $y_0 = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\epsilon_2}$  для волновода со втулкой. Для анализа взаимного расположения кривых  $\Psi_{\pm}$  и  $F_n(x)$  в качестве независимой переменной целесообразно принять величину  $x$ , так как в этом случае всем значениям параметров заполнения и частотам соответствует одна кривая  $F_n(x)$ , нули и полюсы которой совпадают с нулями производных и функций Бесселя первого рода  $n$ -го порядка. Эти величины табулированы [2]\*.

Для определения типов волн, которые распространяются в волноводе на заданной частоте, нужно определить взаимное расположение кривых  $\Psi_{\pm}$  и  $F_n(x)$  при изменении переменных  $x$  и  $y$ , при фиксированной частоте связанных соотношением

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 (\epsilon_1 - 1) \text{ для волновода со стержнем,}$$

$$y^2 - x^2 = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 (\epsilon_2 - 1) \text{ для волновода со втулкой}$$

$$\text{в интервале } 0 < x < \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \sqrt{\epsilon_1}$$

$$0 < y < \frac{2\pi a}{\lambda}, \quad \text{если } \tilde{\beta} < 1$$

$$0 < y < j \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \sqrt{\epsilon_1 - 1}, \quad \text{если } \tilde{\beta} \geq 1$$

} для волновода со стержнем

\* В области минимумов значений аргумента ( $x = jx^*$ ) функции Бесселя заменены модифицированными функциями.

и в интервале  $0 < y < \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) V_{\varepsilon_2^-}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x < \frac{2\pi a}{\lambda}, \text{ если } \tilde{\beta} \leq 1 \\ j0 &\leq x < j\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) V_{\varepsilon_2^- - 1}, \text{ если } \tilde{\beta} \geq 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{для волновода со втулкой.} \\ \cdot \end{array} \right.$$

Как было отмечено выше, нули функции  $F_n(x)$  совпадают с нулями производных, а полюсы — с нулями функций Бесселя первого рода; на рис. 1 представлен график функции  $F_n(x)$  в действительной и мнимой областях для  $n = 1, 2, 3$ .

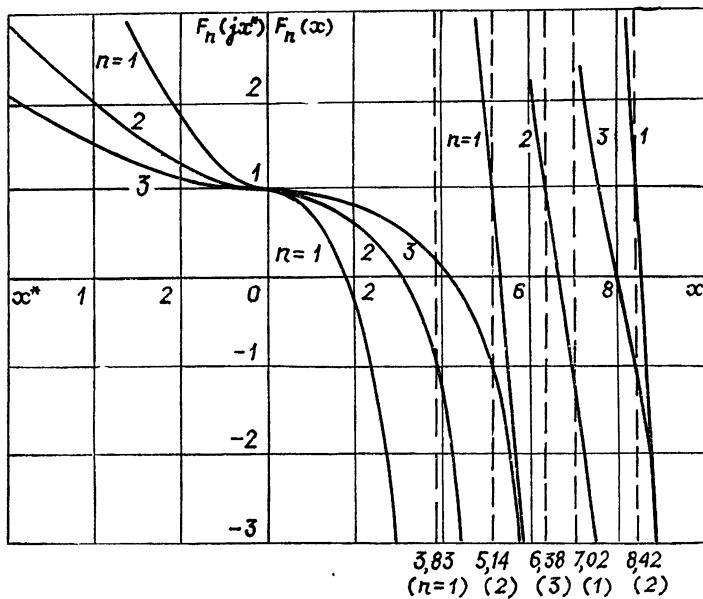


Рис. 1. График функции  $F_n(x) = \frac{x J'_n(x)}{n J_n(x)}$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

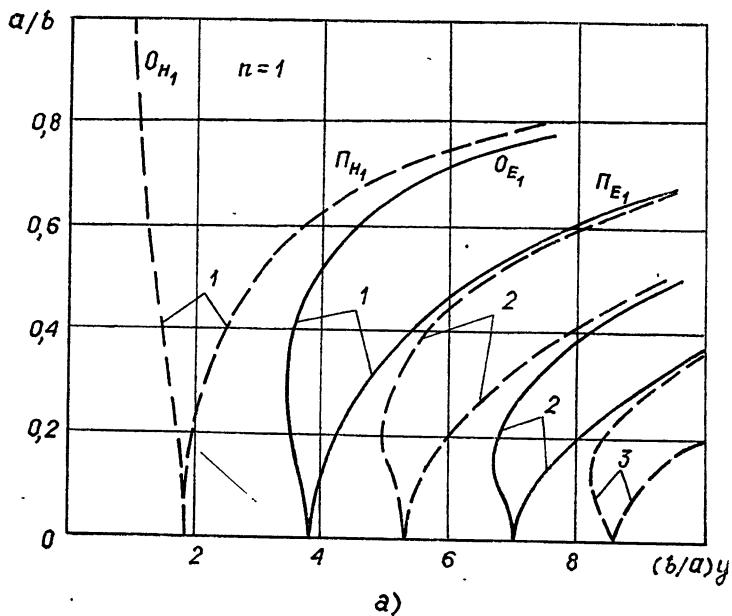
Пунктирные линии соответствуют полюсам функции  $F_n(x)$ .

Функции  $\Psi_+$  и  $\Psi_-$  имеют особенности в точках, соответствующих полюсам функций  $Q_n^H(y)$  и  $Q_n^E(y)$ . На рис. 2 а, б, в приведены графики значений  $\frac{b}{a} y_{nm}^H$ ,  $\frac{b}{a} y_{nm}^E$ , первых трех нулей и полюсов ( $n = 1, 2, 3$ ) этих функций для  $m = 1, 2, 3$ .

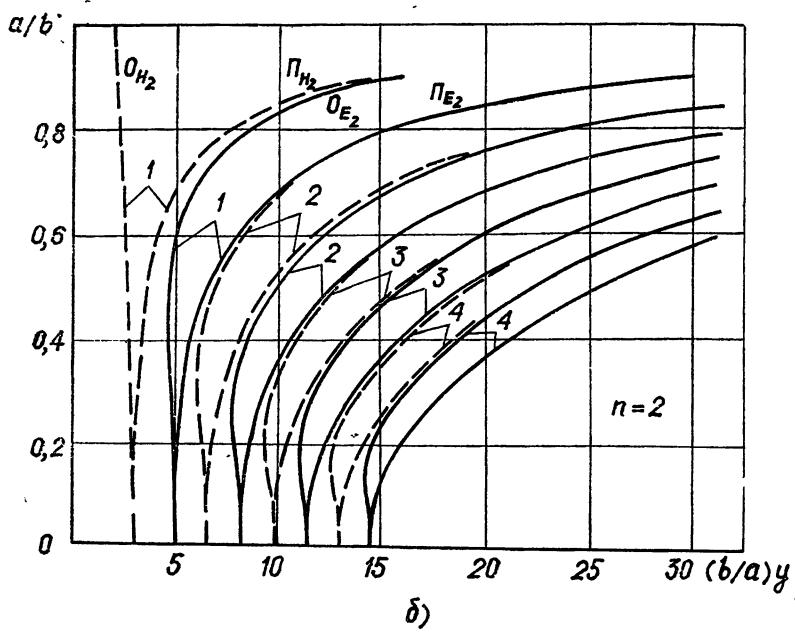
Из графика рис. 2 следует, что при любых значениях коэффициента заполнения нули и полюса функций  $Q_n^H(y)$  и  $Q_n^E(y)$  чередуются в одной и той же последовательности:

$$0 < y_{n1}^H < y_{n1}^E < y_{n1}^E < y_{n1}^H < y_{n2}^H < y_{n2}^H < y_{n2}^E < y_{n2}^E < \dots,$$

т. е. между  $m$ -м полюсом и  $(m + 1)$ -м нулем функции  $Q_n^H(y)$  находится  $m$ -й нуль и полюс функции  $Q_n^E(y)$ . Исследование взаимного расположения кривых  $\Psi_\pm$  и  $F_n(x)$  произведем отдельно для волновода со стержнем и волновода со втулкой.



a)



b)

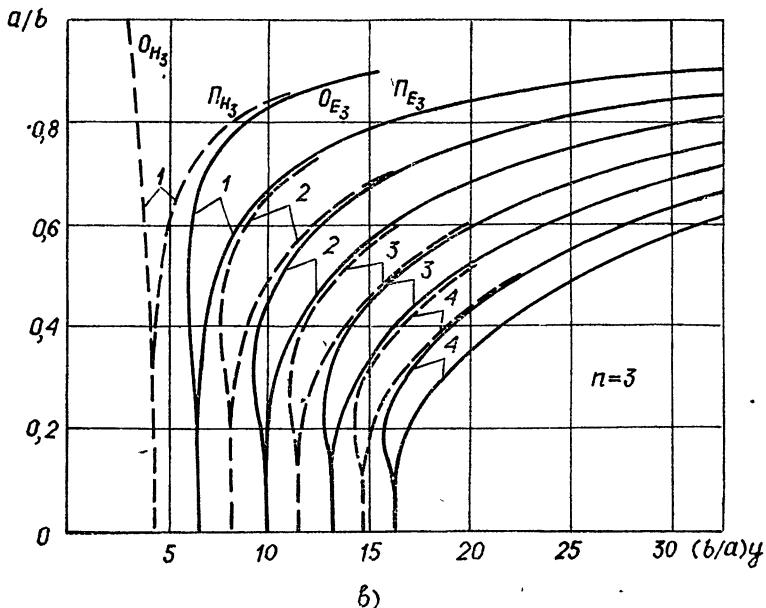


Рис. 2. Значения аргумента  $\left( y \frac{b}{a} \right)$ , соответствующие нулям  $(0_{H_n}, E_n)$  и полюсам  $(\Pi_{H_n}, E_n)$  функций  $Q_n^H(y)$  (пунктирные линии) и  $Q_n^E(y)$  (сплошные линии) в зависимости от  $a/b$ .

### А. ВОЛНОВОД СО СТЕРЖНЕМ

Дисперсионное уравнение запишем в виде

$$F_n(x) = \Psi_{\pm}(x, y), \quad (1a)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(x, y) = & \frac{\chi}{2} \left[ Q_n^H(y) + \frac{1}{\epsilon_1} Q_n^E(y) \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\left[ Q_n^H(y) - \frac{1}{\epsilon_1} Q_n^E(y) \right]^2 + \frac{4\tilde{\beta}^2}{\epsilon_1} \left( 1 - \frac{1}{\chi} \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

В волноводе со стержнем всегда  $x^2 > 0$ . Максимальное значение  $x = x_0 = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1}$ . По таблицам нулей функций Бесселя первого рода определяем число ветвей функции  $F_n(x)$ , соответствующих интересующему нас интервалу изменения переменной  $x$ .

Кривые  $\Psi_{\pm}^*$  (рис. 3 а) в начале координат ( $x=0$ ) имеют ординаты  $\pm 1$ . Кривая  $\Psi_+$  начинается в точке  $(0; -1)$  и монотонно возрастает, обращаясь в бесконечность в точке, соответствующей первому полюсу функции  $Q_n^H$ . Таким образом, кривая  $\Psi_+$  пересекает все ветви кривой  $F_n(x)$ , расположенные в интервале  $0 < x < \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1}$ . Эти пересечения опре-

\* Участок кривых между разрывом и полюсом проведен без масштаба.

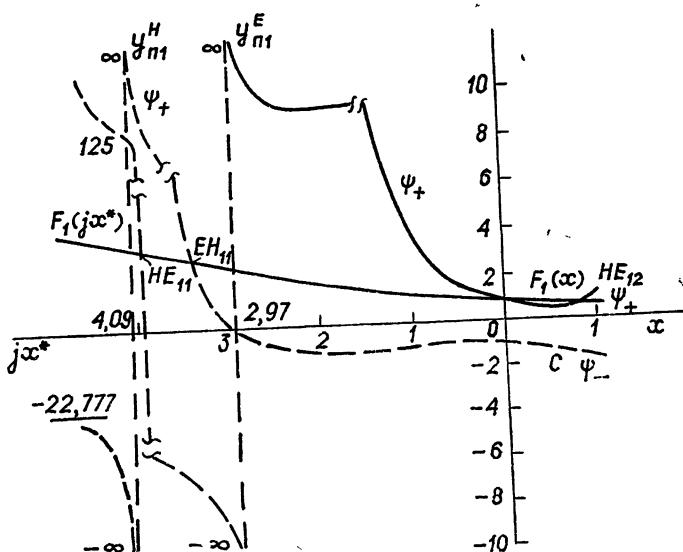
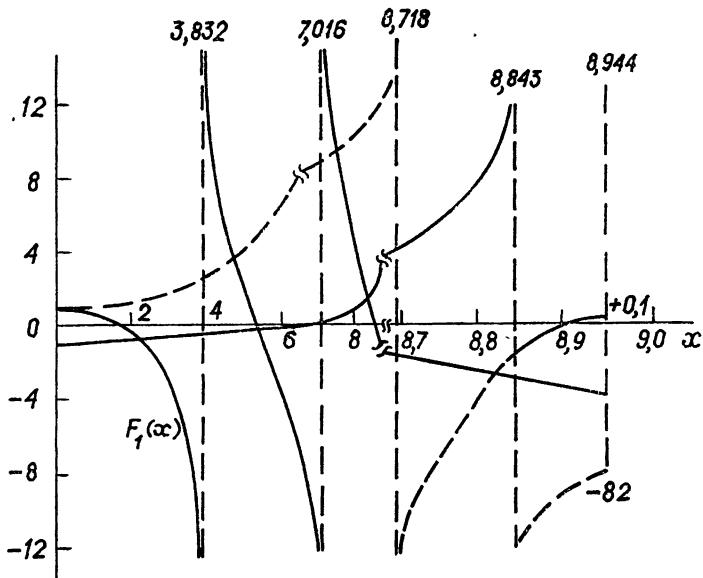


Рис. 3. Взаимное расположение кривых  $\Psi_+(x, y)$  (сплошные линии),  $\Psi_-(x, y)$  (пунктирные линии) и  $F_n(x)$  (толстые линии)

а) для волновода со стержнем при  $\frac{2\pi a}{\lambda} = 2$ ,  $\epsilon_1 = 20$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $n = 1$ ,

б) для волновода со втулкой при  $\frac{2\pi a}{\lambda} = 1$ ,  $\epsilon_2 = 20$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $n = 1$ .

деляют точки дисперсионной характеристики волн  $HE_{1m}$  ( $m$ —порядковый номер точки пересечения). Первая точка пересечения всегда расположена левее первого полюса функции  $Q_n^H$  и находится в интервале  $0 < x < j_{n,1}$ , где  $j_{n,1}$ —первый нуль функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка. При переходе через полюс кривая  $\Psi_+$  принимает значение  $\chi Q_n^E/\epsilon_1$  и в точке  $x_0 = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1 - 1}$ ,  $y_0 = \frac{2\pi a}{\lambda}$  она заканчивается. При этом  $\Psi_+ = \epsilon_1 Q_n^H(y_0)$ ,  $\Psi_- = Q_n^E(y_0)$ , если точка окончания кривой  $\Psi_+$  расположена перед полюсом  $Q_n^H$ , и  $\Psi_+ = Q_n^E(y_0)$ ,  $\Psi_- = \epsilon_1 Q_n^H(y_0)$ , если точка окончания кривой находится за полюсом функции  $Q_n^H$ .

Кривая  $\Psi_-$  (рис. 3 а) начинается в точке  $(0; +1)$  и монотонно возрастает, обращаясь в  $+\infty$  в точке  $x_1 = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\epsilon_1 - 1}$ , т. е. при  $\tilde{\beta} = 1$ .

Все пересечения, лежащие левее точки  $x_1$  ( $0 < x < x_1$ ) будут соответствовать медленным волнам, а точки пересечения правее  $x_1$  будут соответствовать быстрым волнам (то же относится к точкам пересечения с кривой  $\Psi_+$ ). Так как в начале координат  $\Psi_- = +1$ , то первое пересечение с кривой  $F_n(x)$  будет в интервале  $j_{n,1} < x < j'_{n,2}$ , где  $j'_{n,2}$ —второй нуль производной функции Бесселя  $n$ -го порядка. Все последующие пересечения будут в интервалах  $j_{n,m} < x < j'_{n,m+1}$ . Эти пересечения будут определять точки на дисперсионной характеристике медленных волн  $EH_{n,m}$ . В интервале  $j_{n,m} < x < j_{n,m+1}$ , где находится точка  $x_1$ , будут три пересечения кривых  $\Psi_\pm$  с кривой  $F_n(x)$ : 1) пересечение  $\Psi_-$  с участком кривой  $F_n(x)$  в интервале  $j_{n,m} < x < j'_{n,m+1}$  левее точки  $x_1$ ; 2) пересечение  $\Psi_-$  с  $F_n(x)$  в окрестности точки  $j'_{n,m+1}$ ; 3) пересечение  $\Psi_-$  с кривой  $F_n(x)$  в интервале  $j'_{n,m+1} < x < j_{n,m+1}$  правее точки  $x_1$ . Последнее и все последующие пересечения будут определять точки на дисперсионной характеристике быстрых волн  $EH_{n,m}$ .

В качестве примера на рис. 3 а приводится график для определения распространяющихся типов волн в волноводе со стержнем при нормированной частоте  $\frac{2\pi a}{\lambda} = 2$ ;  $\epsilon_1 = 20$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $n = 1$ . В этом случае

$x_0 = 8,944$ ,  $y_0 = 2$ ,  $x_1 = 8,718$ ,  $y_1 = 0$ . Первый полюс функции  $Q_1^H$  будет в точке  $x_{n1}^H = 8,843$ ,  $y_{n1}^H = 1,485$ . Таким образом, при нормированной частоте  $\frac{2\pi a}{\lambda} = 2$  распространяющимися будут быстрые и медленные волны ( $x_0 > x_1$ ).

В интересующем нас интервале ( $0 < x < 8,944$ ) функция  $F_1(x)$  имеет два полюса  $j_{1,1} = 3,832$  и  $j_{1,2} = 7,016$  и три нуля  $j_{1,1}' = 1,842$ ,  $j_{1,2}' = 5,331$ ,  $j_{1,3}' = 8,536$ . Кривая  $\Psi_+$  имеет по одному пересечению в интервалах  $0 < x < 3,832$  и  $3,832 < x < 7,016$ , которые соответствуют точкам на дисперсионных характеристиках волн  $HE_{11}$  и  $HE_{12}$ . Эти волны медленные, так как обе точки пересечения расположены левее точки  $x_1 = 8,718$ .

Наконец, в интервале между точкой  $x_1 = 8,718$  и полюсом функции  $Q_1^H$  имеется еще одна точка пересечения, которая определяет волну  $HE_{13}$ , эта волна является быстрой, так как точка пересечения расположена правее точки  $x_1 = 8,718$ . В интервале между полюсами функции  $Q_1^H$  и точкой окончания кривой  $\Psi_\pm$  пересечений нет, так как в точке  $x_0 = 8,944$   $F_1(x_0) = -3,7$ ,  $\Psi_+ = +0,1$ ,  $\Psi_- = -82$ .

## Б. ВОЛНОВОД СО ВТУЛКОЙ

Дисперсионное уравнение запишем в виде

$$F_n(x) = \Psi_{\pm}(x, y), \quad (16)$$

где

$$\Psi_{\pm}(x, y) = \frac{\chi}{2} [Q_n^H(y) + \varepsilon_2 Q_n^E(y)] \pm \sqrt{\frac{\chi^2}{4} [Q_n^H(y) - \varepsilon_2 Q_n^E(y)]^2 + \tilde{\beta}^2(\chi - 1)^2}.$$

В волноводе со втулкой всегда  $y^2 > 0$ . При  $\tilde{\beta} = 0$

$$x_0 = \frac{2\pi a}{\lambda}, \quad y_0 = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_2}.$$

В точке, соответствующей  $\tilde{\beta} = 1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_2 - 1}$ . При фиксированной частоте переменные  $x$  и  $y$  изменяются в интервале

$$0 < y < \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_2},$$

$$0 < x < \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (\tilde{\beta} \ll 1),$$

$$j0 < x < j \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right) \sqrt{\varepsilon_2 - 1} \quad (\tilde{\beta} \gg 1).$$

В точке  $y = 0$  кривая  $\Psi_+$  обращается в бесконечность (рис. 3б); значение  $\Psi_-(0)$  определяется формулой

$$\Psi_- = \frac{(\varepsilon_2 + 1) + \varepsilon_2(\varepsilon_2 - 1) \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 [s_E T_n^H + s_H T_n^E]}{s_H + \varepsilon_2 s_E},$$

где

$$s_H = \frac{1}{s_E} = \frac{(b/a)^{2n} - 1}{(b/a)^{2n} + 1},$$

$$T_n^E = \frac{[(b/a)^{2n} - 1]^2 - 2n^2(b/a)^{2n}[(b/a)^2 - 1] + n[(b/a)^{4n} - 1]}{2n(n^2 - 1)[(b/a)^{2n} - 1]^2},$$

$$T_n^H = \frac{[(b/a)^{2n} + 1]^2 + 2n^2(b/a)^{2n}[(b/a)^2 - 1] + n[(b/a)^{4n} - 1] - 4(b/a)^{2(n+1)}}{2n(n^2 - 1)[(b/a)^{2n} + 1]^2}.$$

Особенности функций  $\Psi_{\pm}(x, y)$  находятся в точках, соответствующих полюсам функций  $Q_n^H(y)$  и  $Q_n^E(y)$ .

При определении типов волн следует иметь в виду, что дисперсионная характеристика определяется как непрерывная кривая, начинающаяся в точке, соответствующей критической частоте данного типа волны. Каждая точка этой кривой соответствует уравнению (1а), (1б). Исходя из этого определения при переходе через полюс следует иметь в виду, что если перед полюсом пересечения кривой  $\Psi_-$  определяли волну  $HE_{n,m}$ , то после полюса этот тип волны будет определяться пересечениями кривой  $\Psi_+$ . Аналогично для волны  $EH_{n,m}$ . Все точки пересечения расположенные в области  $x^2 > 0$ , будут определять быстрые волны, а при  $x^2 < 0$  — медленные волны.

В качестве примера на рис. 3 б приведен график для определения распространяющихся типов волн в волноводе со втулкой при нормированной частоте  $\frac{2\pi a}{\lambda} = 1$ ,  $\epsilon_2 = 20$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $n = 1$ . В этом случае  $x_0 = 1$ ,

$y_0 = 4,472$ ,  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 4,359$ . Координаты первого полюса функции  $Q_1^H - x_{n1}^H = j4,098$ ,  $y_{n1}^H = 1,485$ , функции  $Q_1^E - x_{n1}^E = j2,97$ ,  $y_{n1}^E = 3,19$ .

В интервале  $0 < y < y_{n1}^H$  пересечений не будет, так как в этом интервале  $125 < \Psi_+ < \infty$ ,  $-21,538 > \Psi_- > -\infty$ ,  $F_1(x_{n1}^H) = +3,7$ . В интервале между первым полюсом функции  $Q_1^H$  и первым полюсом функции  $Q_1^E + 125 > \Psi_- > -\infty$ ,  $0,57 < \Psi_- < \infty$ ,  $3,7 > F_1(x) > 2,676$ ; пересечение с  $\Psi_-$  соответствует медленной волне  $HE_{11}$ , пересечение с  $\Psi_+$  — медленной волне  $EH_{11}$ . Так как в интервале  $(x_{n1}^E)^2 < x^2 < 0$  особенностей функций  $Q_1^H$  и  $Q_1^E$  нет ( $3,19 < y < 4,098$ ), то точки пересечения отсутствуют. Действительно, в этом интервале  $\Psi_- < 0$ , а  $\Psi_+$  изменяется в пределах  $1 < \Psi_+ < +\infty$ , оставаясь больше  $F_1(x)$ . Наконец, при  $x^2 > 0$  имеется еще одна точка пересечения с  $\Psi_+$ , так как в точке  $\beta = 0$   $F_1(x_0) = +0,739$ . Это пересечение определяет точку на дисперсионной характеристики быстрой волны  $HE_{12}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- Г. И. Веселов, Л. А. Любимов, Радиотехника и электроника, 8, № 9, 1530 (1963).
- Таблицы нулей функций Бесселя. Библиотека математических таблиц, вып. 44, изд. ВЦ АН СССР, М., 1967.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
27 октября 1975 г.

#### THE ANALYSIS OF MULTIMODE REGIME OF A TWO-LAYER CIRCULAR WAVEGUIDE

V. Ya. Smorgonsky, Yu. A. Illarionov

A graphical method is suggested to determine the types of waves which can propagate in a two-layer circular waveguide at a fixed frequency with the given filling parameters.

УДК 533.951

## К ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЛНОВОДЕ С МАГНИТОАКТИВНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

*Н. Н. Насонов, А. М. Шендерович*

Исследована продольная неустойчивость электронного пучка в волноводе с ферритовыми кольцами в случаях ненасыщенного и продольно-намагниченного феррита. Получены выражения для спектра возбуждаемых частот и соответствующих инкрементов неустойчивости

### ВВЕДЕНИЕ

Широкое применение магнитных материалов в ускорительной технике обусловливает интерес к изучению взаимодействия пучков заряженных частиц с магнитоактивными средами. Ранее в работе [1] была исследована в кинетическом приближении неустойчивость электронного пучка, пролетающего по каналу в бездисперсионном магнитодиэлектрике (исследовались два предельных случая бесконечной среды и тонкого слоя магнитодиэлектрика), а в [2] проведено в приближении плоских волн решение задачи о неустойчивости неограниченного электронного потока в однородной гиротропной ферродиэлектрической среде.

В первой части настоящей работы рассматривается неустойчивость пучка в ненасыщенном ферродиэлектрике; при этом, в отличие от [1], учитывается влияние кулоновских полей пучка и дисперсия магнитной проницаемости, возникающая при перемагничивании феррита. Эти результаты получены в общем случае ферритового волновода с конечными поперечными размерами. Во второй части работы исследуется, в отличие от [2], неустойчивость электронного пучка, пролетающего по каналу в гиротропном волноводе, заполненном продольно-намагниченными до насыщения ферритовыми кольцами.

### 1. СЛУЧАЙ НЕНАСЫЩЕННОЙ ФЕРРИТОВОЙ СРЕДЫ

Пусть электронный пучок радиуса  $r$  пролетает по каналу в круглом волноводе радиуса  $R$ , заполненном ферритовыми кольцами с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $R$ . Исследуем устойчивость пучка относительно малых возмущений, причем в качестве материального уравнения среды, описывающего процесс перемагничивания феррита, будем использовать диссипативный член модифицированного уравнения Блоха [3, 4]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \omega_r (\chi_0 \mathbf{H} - \mathbf{M}). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{M}$  — магнитный момент феррита,  $\mathbf{H}$  — магнитное поле,  $\omega_r$  и  $\chi_0$  — характеристики марки феррита.

Разлагая все возмущенные величины в интеграл Фурье ( $A =$

$= \int A_{\omega k} e^{i\omega t - ikz} d\omega dk$ ), получаем, пользуясь стандартными методами, следующее дисперсионное соотношение:

$$\varepsilon(\omega, k) \frac{J_1(\eta_{\omega k} r)}{\eta_{\omega k} J_0(\eta_{\omega k} r)} = \frac{\varepsilon_0}{\nu_{\omega k}} \frac{J_0(\nu_{\omega k} R) N_1(\nu_{\omega k} r) - N_0(\nu_{\omega k} R) J_1(\nu_{\omega k} r)}{J_0(\nu_{\omega k} R) N_0(\nu_{\omega k} r) - N_0(\nu_{\omega k} R) J_0(\nu_{\omega k} r)}, \quad (2)$$

где

$$\nu_{\omega k}^2 = \frac{\varepsilon_0 \mu(\omega) \omega^2}{c^2} - k^2, \quad \mu(\omega) = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r + i\omega},$$

$$\eta_{\omega k}^2 = \varepsilon(\omega, k) \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right), \quad \varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega - kv_0)^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m \gamma_0^3},$$

$\gamma_0 = \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{c^2} \right)^{-1/2}$ ,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная феррита,  $n_0$  и  $v_0$  — невозмущенные плотность и скорость пучка,  $J_{0,1}$ ,  $N_{0,1}$  — функции Бесселя. При выводе (2) рассматривалось, как и в [1], только продольное движение частиц пучка.

В дальнейшем будут рассматриваться только длинноволновые возмущения ( $\eta_{\omega k} r \ll 1$ ), представляющие наибольшую опасность [5] (развитие коротковолновых возмущений затруднено компенсирующим действием кулоновских полей пучка). Как следует из (2), для не слишком больших токов пучка в области частот  $\omega^2 \gg \omega_0^2$  будет происходить черенковское возбуждение собственных волн системы; при этом  $kv_0 = \omega + \delta$  ( $\delta \ll \omega$ ). Для частоты  $\omega$  получаем из (2) в нулевом приближении по  $\omega_0$  следующее уравнение:

$$\frac{J_0(\nu_{\omega}^0 R) N_0(\nu_{\omega}^0 r) - N_0(\nu_{\omega}^0 R) J_0(\nu_{\omega}^0 r)}{J_0(\nu_{\omega}^0 R) N_1(\nu_{\omega}^0 r) - N_0(\nu_{\omega}^0 R) J_1(\nu_{\omega}^0 r)} = \frac{2\varepsilon_0}{\nu_{\omega}^0 r}. \quad (3)$$

Здесь  $\nu_{\omega}^0 = \frac{\omega}{v_0} \sqrt{\varepsilon_0 \mu(\omega) \beta^2 - 1}$ ,  $\beta = \frac{v_0}{c}$ . Как показывает анализ, в представляющем практический интерес случае  $2\varepsilon_0 \frac{R-r}{r} \gg 1$  (что обычно выполняется, например, в линейных бетатронах [6]) уравнение (3) имеет решения только в области частот  $\nu_{\omega}^0 r \gg 1$ . При этом для собственных частот системы  $\omega_n$  получаем из (3) уравнение

$$i(\varepsilon_0 \beta^2 - 1) \omega_n^3 + \omega_r [\varepsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0) - 1] \omega_n^2 - \\ - i \frac{x_n^2 v_0^2}{(R-r)^2} \omega_n - \frac{x_n^2 v_0^2}{(R-r)^2} \omega_r = 0, \quad (4)$$

где  $x_n$  — решения уравнения  $x_n \operatorname{tg} x_n = \frac{2\varepsilon_0(R-r)}{r}$  ( $x = \nu_n^0(R-r)$ ). Значения  $\omega_n$  найденные из (4), содержат положительную мнимую добавку ( $\omega_n = \omega_n^R + i\omega_n^I$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ), т. е. собственные волны системы являются затухающими (энергия поглощается при перемагничивании феррита).

В случае  $\omega \ll \omega_r$ , когда время релаксации феррита мало по сравнению с периодом возмущений, получаем из (4)

$$\omega_n' = \frac{2\omega_r x_n^2 v_0^2}{4\omega_r^2 [\varepsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0) - 1] (R-r)^2 + x_n^2 v_0^2}, \quad \omega_n^R = \frac{x_n v_0 (1 - \omega_n'/2\omega_r)}{(R-r) \sqrt{\varepsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0) - 1}}. \quad (5)$$

В области более высоких частот  $\omega \gg \omega_r$  декремент затухания собственных волн системы не зависит от номера  $n$ :

$$\begin{aligned} \omega_n^I &= \frac{\omega_r [\epsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0) - 1]}{2(\epsilon_0 \beta^2 - 1)}, \\ \omega_n^R &= \frac{x_n v_0}{(R-r) \sqrt{\epsilon_0 \beta^2 - 1}} \sqrt{1 - \frac{\omega_r^2 (R-r)^2 [\epsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0) - 1]^2}{4 x_n^2 v_0^2 (\epsilon_0 \beta^2 - 1)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (2) легко получить уравнение для комплексной добавки  $\delta_n(\omega_n) = \delta_n^R - i\delta_n^I$  к частотам  $\omega_n$ ; в первом приближении по  $\omega_0$  имеем

$$\delta_n^3(\omega_n) = \frac{Ax_n^2}{A^2 + x_n^2} \frac{2c^2 \omega_0^2 \epsilon_0^{-1} (R-r)^{-2}}{\frac{\partial}{\partial \omega_n} [\omega_n^2 \mu(\omega_n)]}, \quad (7)$$

где  $A \equiv \frac{2\epsilon_0(R-r)}{r}$ . Для инкремента неустойчивой ветви получаем из (7) в случае  $\omega \ll \omega_r$ ,

$$\delta_n^I = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{Ax_n^2}{A^2 + x_n^2} \frac{c^2 \omega_0^2 (R-r)^{-2}}{(1 + 4\pi\chi_0) \epsilon_0 \omega_n^R} \right)^{1/3} \quad (8)$$

и в случае  $\omega \gg \omega_r^*$

$$\delta_n^I = \left( \frac{Ax_n^2}{A^2 + x_n^2} \frac{c^2 \omega_0^2}{2\pi\chi_0 \omega_r \epsilon_0 (R-r)^2} \right)^{1/3}. \quad (9)$$

Очевидно для фактического возбуждения волн необходимо выполнение условия

$$\delta_n^I > \omega_n^I. \quad (10)$$

При увеличении поперечных размеров волновода узкие волновые пакеты собственных волн начинают перекрываться и в пределе бесконечной ферритовой среды образуется сплошной спектр. Дисперсионное соотношение (2) в этом случае принимает при  $\eta_{\omega k} r \ll 1$  вид

$$\epsilon(\omega, k) = \frac{2\epsilon_0}{\eta_{\omega k} r} \frac{H_1^{(2)}(\eta_{\omega k} r)}{H_0^{(2)}(\eta_{\omega k} r)}, \quad (11)$$

где  $H_{0,1}^{(2)}(\eta_{\omega k} r)$  — функция Ганкеля второго рода. Решение (11) можно получить уже без предположения о малости  $\omega_0$ . В рассматриваемом ниже случае  $\omega \ll \omega_r$  нетрудно, ввиду относительной простоты выражения для  $\eta_{\omega k}$ , представить решение как в виде зависимости  $k = k(\omega)$ , так и в виде  $\omega = \omega(k)$ . Поскольку при рассмотрении аналогичного вопроса в следующем разделе настоящей работы удается получить в компактном виде только зависимость  $k = k(\omega)$ , то для реализации возможности сравнения результатов ниже записывается решение (11) в виде  $k = k(\omega)$ . В области  $\eta_{\omega k} r < 1$  имеем

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_0} \frac{1 \pm i\varphi(\omega) \sqrt{\epsilon_0 \beta_0^2 (1 + 4\pi\chi_0) (1 - \varphi^2(\omega)) - 1}}{1 - \varphi^2(\omega)}, \quad (12)$$

\* Всюду в статье предполагается  $4\pi\chi_0 \gg 1$  и не рассматривается представляющийся малоинтересным случай  $\omega > 4\pi\chi_0 \omega_r$ , когда  $\mu(\omega) \rightarrow 1$ .

где  $\varphi(\omega) = \frac{\omega_0 r}{v_0 \sqrt{2} \epsilon_0} \left( \ln \frac{2 v_0 \gamma_s^{-1} \omega^{-1} r^{-1}}{\sqrt{\epsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0)} - 1} \right)^{1/2}$ . В области более высоких частот при  $\nu_{\omega k} r > 1$  выражение для  $k(\omega)$  имеет вид

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_0} \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{2} v_0} \frac{x(\omega)(\sqrt{1 + x^2(\omega)} - 1)^{-1/2} + i(\sqrt{1 + x^2(\omega)} - 1)^{1/2}}{\sqrt{1 + x^2(\omega)}}, \quad (13)$$

где  $x(\omega) = \frac{2 \epsilon_0 v_0}{\omega r \sqrt{\epsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0)} - 1}$ . Как следует из (13), для высокочастотных волн характерно наличие сильной дисперсии. Инкремент максимален, как легко показать, на частоте

$$\omega_m = \frac{2 \epsilon_0 v_0}{\sqrt{3} r \sqrt{\epsilon_0 \beta^2 (1 + 4\pi\chi_0)} - 1}; \quad (14)$$

при этом величина его зависит только от параметров пучка

$$\text{Im } [k(\omega)]_{\max} = \frac{\omega_0}{2^{3/2} v_0}. \quad (15)$$

## 2. СЛУЧАЙ ГИРОТРОПНОЙ ФЕРРИТОВОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим теперь неустойчивость пучка электронов в волноводе с продольно-намагниченными ферритовыми кольцами. В этом случае материальным уравнением среды является хорошо известное уравнение Ландау и Лифшица:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma_e M \times H - \frac{\alpha \gamma_e}{M_0} M \times M \times H. \quad (16)$$

Здесь  $\gamma_e$  — гиромагнитное отношение,  $M_0$  — магнитный момент насыщения, а  $\alpha$  — коэффициент диссипации. В рассматриваемом случае малых возмущений линеаризация (16) приводит к тензору  $\mu(\omega)$ , связывающему фурье-образы переменных составляющих векторов магнитного поля и индукции. Вид тензора и зависимость его компонентов от частоты приведены в [4]. Общие решения уравнений Максвелла в области феррита, полученные с использованием методов [4], записаны в [7] в виде громоздких комбинаций функций Бесселя от аргументов  $\chi_{1,2} \rho$ , которые без учета диссипации можно привести к виду

$$\chi_{1,2}^2 = \left\{ \frac{\omega^2 \epsilon_0}{c^2} \left[ \omega_b^2 + \omega_p^2 - 2\omega^2 \pm \omega_p^2 L \sqrt{1 - 2 \frac{\omega_p^2 - 2\omega^2}{\omega_p^2} \frac{k^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_0 L} + \frac{k^4 c^4}{\omega^4 \epsilon_0^2 L^2}} \right] - \right. \\ \left. - k^2 (\omega_p^2 + \omega_H^2 - 2\omega^2) \right\} [2(\omega_p^2 - \omega^2)]^{-1}, \quad (17)$$

где  $\omega_b = \gamma_e B_0$ ,  $\omega_p = \gamma_e \sqrt{B_0 H_0}$ ,  $\omega_H = \gamma_e H_0$ ,  $L = B_0/H_0 \gg 1$ ,  $B_0$  и  $H_0$  — соответственно индукция насыщения и продольное намагничивающее поле. Как легко показать, в очень широком диапазоне частот  $\omega \ll \omega_p \ll \omega_b$  (обычно  $\omega_b \sim 10^{11} \text{с}^{-1}$ ) для волн, фазовые скорости которых удовлетворяют условию  $v_\Phi = \omega/k \gg c/\sqrt{\epsilon_0 L}$ , имеем из (17)

$$\chi_1^2 \sim \frac{\omega^2 \epsilon_0}{c^2} \frac{\omega_b^2}{\omega_p^2 - \omega^2}, \quad \chi_2^2 \sim \frac{\omega^2 \epsilon_0}{c^2} \quad (\chi_1 \gg \chi_2), \quad (18)$$

т. е. в исследуемой области частот в волноводе могут возбуждаться собственные волны двух типов: электромагнитные волны с поперечным вектором  $\chi_2$  и магнитоактивные волны с вектором  $\chi_1$ .

В рассматриваемом случае  $\omega \sqrt{\epsilon_0} (R - r)/c \ll 1$  выражения для полей в феррите можно существенно упростить. Принимая во внимание известное соотношение  $N_n(x)J_{n+1}(x) - N_{n+1}(x)J_n(x) = 2/\pi x$  и неравенство  $\chi_1 \gg \chi_2$ , получаем для используемых в дальнейшем компонентов полей следующие выражения, удовлетворяющие граничным условиям на металле при  $\rho = R$ :

$$\begin{aligned} E_{\omega k z} &= \frac{k \chi_1 L \omega_H \omega}{\omega_p^2 - \omega^2} \left[ C_{\omega k} \left( J_0(\chi_1 \rho) - \frac{R}{\rho} J_0(\chi_1 R) \right) + D_{\omega k} \left( N_0(\chi_1 \rho) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R}{\rho} N_0(\chi_1 R) \right) \right], \\ E_{\omega k \varphi} &= C_{\omega k} \left[ T_1 (J_1(\chi_1 \rho) - J_1(\chi_1 R)) + \frac{R}{\rho} T_2 \psi_1(R - \rho) J_0(\chi_1 R) \right] + \\ &\quad + D_{\omega k} \left[ T_1 (N_1(\chi_1 \rho) - N_1(\chi_1 R)) + \frac{R}{\rho} T_2 \chi_1(R - r) N_0(\chi_1 R) \right], \\ H_{\omega k z} &= \frac{i c \chi_1}{\omega} \left[ C_{\omega k} \left( T_1 J_0(\chi_1 \rho) - \frac{R}{\rho} T_2 J_0(\chi_1 R) \right) + D_{\omega k} \left( T_1 N_0(\chi_1 \rho) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R}{\rho} T_2 N_0(\chi_1 R) \right) \right], \\ H_{\omega k \varphi} &= \frac{k \epsilon_0 \omega^2 L \omega_H}{i T_2 (\omega_p^2 - \omega^2) c} \left[ C_{\omega k} \left( T_2 J_1(\chi_1 \rho) - \frac{R}{\rho} T_1 J_1(\chi_1 R) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R}{\rho} T_2 \chi_1(R - \rho) J_0(\chi_1 R) \right) + D_{\omega k} \left( T_2 N_1(\chi_1 \rho) - \frac{R}{\rho} T_1 N_1(\chi_1 R) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R}{\rho} T_2 \chi_1(R - r) N_0(\chi_1 R) \right) \right], \\ T_1 &= -k^2 \frac{\omega^2}{\omega_p^2 - \omega^2}, \quad T_2 = \frac{\omega^3 \epsilon_0}{c^2} \frac{\omega_b^2}{\omega_p^2 - \omega^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $C_{\omega k}$  и  $D_{\omega k}$  — постоянные интегрирования. Сшивая на границе пучок-феррит при  $\rho = r$  решения (19) с соответствующими решениями, полученными в области пучка, получаем, полагая, что в области пучка выполнены все ограничения, принятые в разд. 1, дисперсионное соотношение

$$\epsilon(\omega k) = \frac{2 \epsilon_0}{\chi_1 r} \frac{J_0(\chi_1 R) N_1(\chi_1 r) - N_0(\chi_1 R) J_1(\chi_1 r)}{J_0(\chi_1 R) N_0(\chi_1 r) - N_0(\chi_1 R) J_0(\chi_1 r)}, \quad (20)$$

совпадающее по внешнему виду с (2) (в случае  $\eta_{\omega k} r \ll 1$ ).

Таким образом, в рассматриваемых условиях спектр возбуждаемых колебаний определяется только волнами магнитоактивной (спиновой) ветви колебаний намагниченности в гиротропном феррите.

Дальнейшие вычисления аналогичны проделанным в первом разделе. Так для  $\omega_n$  и  $\delta'_n$  (см. (5) — (9)) имеем в прежних обозначениях

$$\omega_n = \omega_p \left( 1 + \frac{\epsilon_0 \omega_b^2 (R - r)^2}{c^2 x_n^2} \right)^{-1/2}, \quad (21)$$

$$\delta_n' = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\omega_b \sqrt{\epsilon_0} (R - r)}{c} \right)^{-1/3} \left( \frac{Ax_n}{A^2 + x_n^2} \right)^{1/3} \left( \frac{\omega_0}{\omega_p} \right)^{2/3} (\omega_p^2 - \omega_n^2)^{1/2}.$$

Как следует из (21), в случае гиротропного волновода спектр возбуждаемых волн ограничен сверху, причем инкремент стремится к нулю по мере приближения  $\omega_n$  к  $\omega_p$ .

В случае бесконечной гиротропной среды (с вакуумным каналом для пролета пучка) выражение для  $k(\omega)$  совпадает с (13), где следует положить  $\kappa(\omega) = \frac{2c\sqrt{\epsilon_0}}{r\omega} \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{\omega_b}$ , т. е. инкремент отличен от нуля в диапазоне частот  $0 < \omega < \omega_p$ . Интересно отметить, что как и в случае ненасыщенной ферритовой среды,  $\text{Im}[k(\omega)]_{\max} = 2^{-3/2} (\omega_0/v_0)$  на частоте

$$\omega_m = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + 3\omega_b^2 r^2 / 4c^2 \epsilon_0}}. \quad (22)$$

Учет диссипации энергии в феррите (при этом необходимо использовать полное уравнение (16)) существенно усложняет зависимость инкремента от частоты:

$$\text{Im}[k(\omega)] = \frac{\omega_0}{\sqrt{2} v_0} \left\{ \frac{\sqrt{\left( 1 + \frac{cF\sqrt{2\epsilon_0}}{\omega_b \omega r} \right)^2 + \frac{2c^2 \Phi^2 \epsilon_0}{\omega_b^2 \omega^2 r^2} - 1 - \frac{cF\sqrt{2\epsilon_0}}{\omega_b \omega r}}}{\left( 1 + \frac{cF\sqrt{2\epsilon_0}}{\omega_b \omega r} \right)^2 + \frac{2c^2 \Phi^2 \epsilon_0}{\omega_b^2 \omega^2 r^2}} \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

$$F = (\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \alpha \omega_b^2 \omega^2} + \omega^2 - \omega_p^2)^{1/2},$$

$$\Phi = (\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \alpha \omega_b^2 \omega^2} - \omega^2 + \omega_p^2)^{1/2}.$$

Исследование (23) показывает, что с увеличением коэффициента диссипации  $\alpha$  максимальный инкремент  $\text{Im}[k(\omega)]_{\max}$  и соответствующее ему значение  $\omega = \omega_m$  уменьшаются.

---

Таким образом, проведенное исследование показывает, что характер неустойчивости электронного пучка в волноводе с ферритовыми кольцами существенно зависит от состояния намагниченности феррита. Так, в случае ненасыщенного феррита спектр возбуждаемых колебаний неограничен, в отличие от случая продольно-намагниченного феррита, когда спектр волноводных гармоник ограничен частотой  $\omega_p = 1,76 \cdot 10^7 \times \sqrt{B_0 H_0}$ .

В случае гиротропного ферритового волновода с ростом продольного магнитного поля  $H_0$  частоты возбуждаемых колебаний увеличиваются  $\sim \sqrt{H_0}$  (см. формулу (21)), что хорошо подтверждается результатами измерений [8].

Развитие неустойчивости приводит к перераспределению энергии по длине пучка (этот эффект наблюдался экспериментально [8]), что позволяет использовать ферритовые волноводы для самоускорения интенсивных электронных пучков.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Гришин, ЖТФ, 42, № 1, 9 (1972).
2. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Спиновые волны, Физматгиз, М., 1967.
3. R. Wangness, Phys. Rev., 98, № 4, 927 (1955).
4. А. Г. Гуревич, Ферритры на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
5. Л. С. Богданович, А. А. Рухадзе, УФН, 103, 609 (1971).
6. Ю. П. Вахрушин, И. М. Матора, УФН, 110, 117 (1973).
7. Н. Н. Насонов, А. М. Шендерович, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 6, 909 (1974).
8. В. В. Закутин, Н. Н. Насонов, А. А. Ракитянский, А. М. Шендерович, Труды IV Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, изд. Наука, М., 1975, стр. 256.

Поступила в редакцию  
27 ноября 1975 г.

TO THE THEORY OF LONGITUDINAL ELECTRON BEAM IN A WAVEGUIDE  
WITH MAGNETOACTIVE DIELECTRIC

*N. N. Nasonov, A. M. Shenderovich*

The longitudinal instability of an electron beam in a waveguide with ferrite rings has been investigated in the cases of nonsaturated and longitudinally-magnetized ferrite. Expressions are obtained for the spectrum of frequencies excited and corresponding increments of the instability.

## ИЗЛУЧЕНИЕ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ НАД РЕШЕТКОЙ ИЗ ЦИЛИНДРОВ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Э. И. Велиев, А. И. Носич, В. П. Шестопалов

Исследованы особенности характеристик излучения потока электронов над решеткой из цилиндров с продольными щелями. Показано, что энергия излучения существенно возрастает при возбуждении в структуре резонансных режимов.

Рассматривается задача об излучении плоского электронного потока, движущегося над периодической структурой, образованной из параллельных продольно-щелевых цилиндров (рис. 1). Стенки цилиндров предполагаются бесконечно тонкими, идеально проводящими; радиус цилиндров  $a$ , угловой размер щелей  $2\theta$ , угол ориентации щелей относительно оси  $Oy$  равен  $\varphi_0$ , период структуры  $l$ .

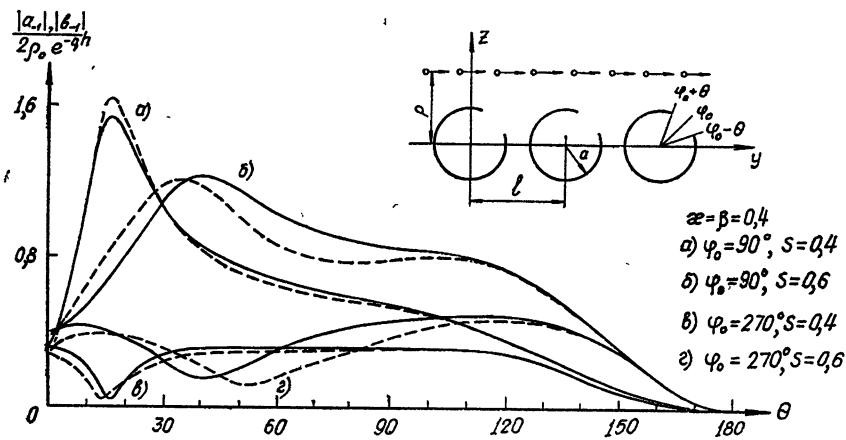


Рис. 1.

Известно, [1, 2], что решетка из металлических брусьев прямоугольного сечения обладает резонансными свойствами, связанными с возбуждением потоком режимов, близких к квазисобственным, что существенно влияет на энергию излучения. Рассматриваемая в данной работе структура также является резонансной, а ее геометрия открывает возможности для оптимизации характеристик дифракционного излучения. Полученное решение позволяет выяснить резонансные свойства структуры путем их аналитического описания и численного анализа на ЭВМ.

Метод, используемый для решения задачи, опирается на результаты [2, 4]. Он состоит в выделении в интегральном уравнении 1-го рода, к которому сводится решение рассматриваемой задачи, интегрального оператора, связанного с отдельным элементом решетки, и последующем его обращении на основе метода задачи Римана—Гильберта [3].

## 1. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО РОДА

Как известно, в отсутствие решетки собственное электромагнитное поле монохроматического плоского электронного потока, имеющего скорость  $v = \beta c$  и плотность заряда

$$\rho = \rho_0 \delta(z - p) e^{i(ky - \omega t)}, \quad (1)$$

имеет вид  $H$ -поляризованной неоднородной плоской волны [5]

$$H_x^0 = 2\pi\beta\rho_0 \operatorname{sign}(z - p) e^{-q|z-p| + iky}, \quad (2)$$

где  $q = \frac{k_0}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $k_0 = \omega/c$ . (Зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$  здесь и далее опускается.) Остальные компоненты поля  $E_y^0$  и  $E_z^0$  определяются из уравнений Максвелла.

Впоследствии нам понадобится представление поля (2) в виде разложения по цилиндрическим функциям в системе координат  $r, \varphi$ . В области  $z < p$   $H_x^0$  имеет вид

$$H_x^0 = -2\pi\beta\rho_0 e^{-qp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0 r) i^n \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \right)^n e^{in\varphi}, \quad (3)$$

где  $J_n(x)$  — функции Бесселя.

Полное поле, возбуждаемое потоком, определяется единственной, отличной от нуля  $x$ -компонентой магнитного поля, которая должна удовлетворять известным условиям [2]. Представим ее в виде

$$H(y, z) = H_x^0(y, z) - V(y, z). \quad (4)$$

Функцию  $V(y, z)$ , описывающую рассеянное поле, будем искать в виде суперпозиции потенциалов двойного слоя, распределенных по элементам решетки с неизвестной плотностью тока  $\mu(y, z)$ :

$$V(y, z) = \pi \int_S \mu(y_s, z_s) \frac{\partial}{\partial \nu} K(y - y_s, z - z_s) dl_s, \quad (5)$$

где

$$K(y, z) = -\frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k_0 \sqrt{(y - nl)^2 + z^2}) \exp\left(i \frac{k_0 l}{\beta} n\right) = \\ = -\frac{i}{2\pi\kappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{ik_0 \left[ \left(\frac{1}{\beta} + \frac{n}{\kappa}\right)y + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{n}{\kappa}\right)^2} |z| \right]\right\}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{n}{\kappa}\right)^2}} \quad (6)$$

( $\kappa = l/\lambda$ ,  $H_0^{(1)}(x)$  — функция Ханкеля,  $S$  — контур нулевого элемента решетки,  $\nu$  — нормаль к его поверхности).

Второе представление для функции  $K(y, z)$  получено в результате применения формулы суммирования Пуассона, причем выбрана та ветвь  $\sqrt{A}$ , для которой  $\operatorname{Im} \sqrt{A} > 0$ , если же  $\operatorname{Im} \sqrt{A} = 0$ , то  $\operatorname{Re} \sqrt{A} > 0$ .

Из (5) следует, что рассеянное поле имеет вид суперпозиции однородных и неоднородных плоских волн, амплитуды которых определяются геометрией элементов решетки и параметрами электронного пучка.

Плотность поверхностного тока на цилиндрах решетки должна быть такой, чтобы удовлетворялось краевое условие Неймана, а также условие Мейкснера на ребрах. Первое из условий приводит к интегродифференциальному уравнению относительно функции  $\mu(y, z)$ , а второе определяет класс допустимых решений этого уравнения. Можно показать, что в качестве такого класса достаточно выбрать  $L_2$ .

Представляя функцию  $\mu(y, z)$  в виде ряда Фурье по азимутальной координате  $\varphi$  и используя теорему сложения для функций Бесселя, приедем от интегродифференциального уравнения к системе функциональных уравнений относительно коэффициентов Фурье тока  $\mu_m$  того же типа, что и в случае дифракции плоской волны на одном цилиндре со щелью [6] или на решетке из таких цилиндров [4]. Выделяя в этих уравнениях часть, связанную с нулевыми элементами решетки, и обращая ее с помощью решения задачи Римана—Гильберта [3], получим систему линейных алгебраических уравнений Фредгольма 2-го рода:

$$\mu_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} \mu_n + B_m \quad (m = 0, \pm 1, \dots), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_{m0} &= i\pi(k_0 a)^2 J'_0 [H_0^{(1)'} T_m^0 + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \exp(ip\varphi_0) J'_p G_p(x, \beta) T_m^p], \\ A_{mn} &= |n| (-1)^n \exp(in\varphi_0) \delta_n T_m^n + i\pi(k_0 a)^2 J'_n \times \\ &\quad \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \exp(ip\varphi_0) J'_p G_{p-m}(x, \beta) T_m^p, \\ T_m^n &= \begin{cases} -W_n(-u), & m = 0 \\ \frac{1}{m} (-1)^m \exp(-im\varphi_0) V_{m-1}^{n-1}(-u), & m \neq 0 \end{cases} \\ B_m &= -i\pi(k_0 a)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\varphi_0) (-i)^n J'_n T_m^n (1 - \sqrt{1-\beta^2})^n / \beta^n, \\ \delta_n &= 1 + \frac{i\pi(k_0 a)^2}{|n|} J'_n H_n^{(1)'}, \\ G_m(x, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp\left(i2\pi n \frac{x}{\beta}\right) + (-1)^m \exp\left(-i2\pi n \frac{x}{\beta}\right) \right] H_m^{(1)}\left(2\pi n \frac{x}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

В этих выражениях аргументом цилиндрических функций является  $(k_0 a)$ , а функции  $W_n$ ,  $V_m^n$  выражаются через полиномы Лежандра [3], причем  $u = \cos \theta$ .

Амплитуды пространственных гармоник выражаются через неизвестные  $\mu_m$  в виде рядов. Например, над решеткой

$$a_n = -\frac{2\beta\rho_0 e^{-qp}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{n}{x}\right)^2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu_m i^m J'_m(k_0 a) \exp(-im\varphi_n), \quad (9)$$

где  $\varphi_n = \arccos\left(\frac{1}{\beta} + \frac{n}{x}\right)$  — угол излучения гармоники с номером  $n$ .

## 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Если сравнить матричные элементы  $A_{mn}$  системы (7) с аналогичными величинами для задачи о движении потока над одним цилиндром с продольной щелью [7], то можно заметить, что они различаются

наличием ряда с функциями  $G_p(x, \beta)$ . Именно эти функции описывают взаимное влияние цилиндров в решетке. Из асимптотических формул для функций Ханкеля вытекает, что  $\lim_{l \rightarrow \infty} G_p(x, \beta) = 0$ , следовательно, система (7) допускает предельный переход к случаю изолированного цилиндра.

Поскольку ряд Шлемильха для  $G_p$  (8) сходится медленно, то для исследования системы (7) удобнее представить  $G_p(x, \beta)$  в виде быстро сходящихся рядов по элементарным функциям подобно [8].

Из анализа полученных таким образом выражений следует, что матричные элементы  $A_{mn}$  могут обратиться в бесконечность при некоторых значениях параметров  $x$  и  $\beta$ . Это происходит в «точках скольжения», когда  $x\left(\frac{1}{\beta} \pm 1\right) = n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), а также в малоинтересном случае статического распределения зарядов при  $\beta = 0$ .

Отметим, что заменой

$$G_p(x, \beta) = \widetilde{G}_p(x, \beta) + \alpha_+ \exp\left(-ip\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_- \exp\left(ip\frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$\alpha_{\pm} = \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\pi\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[i2\pi x\left(1 \pm \frac{1}{\beta}\right)n\right]}{\sqrt{n}},$$

система (7) преобразуется к виду, пригодному для исследования при всех значениях  $x$  и  $\beta$  ( $\beta \neq 0$ ).

Тем не менее всюду вне указанных выше значений  $x$  и  $\beta$  система (7) остается более предпочтительной в силу простоты ее элементов. Поскольку она фредгольмового типа, то ее решение может быть получено методом усечений [9].

Оценим норму матрицы системы (7)  $q = \max_{m \neq 0} \sum_{n \neq 0, m} \left| \frac{A_{mn}}{1 - A_{mm}} \right|$ . Из оценок функций  $V_m^n$  [3], функций  $G_p$  [2] и асимптотических выражений для цилиндрических функций следует, что

$$q < \sqrt{1-u^2} \left[ C_1(k_0 a)^2 + C_2 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right] + C_3 \sqrt{1+u} (k_0 a) \left( \frac{a}{l} \right) + C_4 (1+u) \left( \frac{a}{l} \right)^2, \quad (10)$$

где  $C_i$  — постоянные величины.

Таким образом, для решетки из достаточно узких лент ( $u \rightarrow -1$ ) и в случае редкой решетки ( $s = \frac{2a}{l} \ll 1$ ) из цилиндров с произвольными щелями —  $q < 1$ , следовательно, к решению системы (7) можно применить метод последовательных приближений.

В нулевом приближении из (7) получим

$$\mu_0 = \frac{i\pi(k_0 a)^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp(ip\varphi_0) (-i)^p J'_p \left( \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right)^p W_p}{1 + i\pi(k_0 a)^2 J'_0 \left[ H_0^{(1)'} W_0 + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \exp(ip\varphi_0) J'_p G_p W_p \right]}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \mu_m = & \frac{(-1)^m \exp(im\varphi_0) i \pi (k_0 a)^2}{m} \left\{ \mu_0 \left[ J'_0 H_0^{(1)'} V_{m-1}^{-1} + J'_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \times \right. \right. \\
 & \times \exp(ip\varphi_0) J'_p G_p V_{m-1}^{p-1} \left. \right] + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp(ip\varphi_0) J'_p \left( \frac{1 - \sqrt{1-\beta^2}}{i\beta} \right)^p V_{m-1}^{p-1} \left. \right\} \times \\
 & \times \left[ 1 - \frac{|m|}{m} \delta_m V_{m-1}^{m-1} - i \pi (k_0 a)^2 (-1)^m \frac{\exp(-im\varphi_0)}{m} J'_m \sum_{p=\infty}^{\infty} (-1)^p \times \right. \\
 & \left. \left. \times \exp(ip\varphi_0) J'_p G_{p-m} V_{m-1}^{p-1} \right]^{-1}. \right. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Теперь исследуем более детально некоторые важные частные случаи.

а) *Решетка из узких лент.* Для амплитуд дифракционных гармоник, возникающих при взаимодействии потока с решеткой из узких цилиндрических лент, из (11) и (12) можно получить следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned}
 a_n = & - \frac{2\pi\beta\rho_0 (k_0 a)^2 \cos^2(\theta/2)}{\pi \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\beta} + \frac{n}{\pi} \right)^2}} (\sqrt{1-\beta^2} \sin \varphi_0 - i \cos \varphi_0) \times \\
 & \times \cos(\varphi_n - \varphi_0) \exp[-q(p + a \sin \varphi_0)] \exp \left\{ ik_0 a \left[ \cos(\varphi_n - \varphi_0) - \frac{1}{\beta} \cos \varphi_0 \right] \right\}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Погрешность этих формул имеет величину порядка  $O[(k_0 a)^4 \cos^4(\theta/2)]$ . Из (13) следует, что излучение отсутствует в направлении, параллельном лентам решетки, что согласуется с другими работами [10]. Это несложно объяснить, если учесть, что продольная компонента тока на лентах отсутствует. Множитель  $\exp[-q(p + a \sin \varphi_0)]$  отражает тот факт, что эффективность взаимодействия потока с решеткой экспоненциально зависит от прицельного параметра. Действительно, амплитуды гармоник максимальны при  $\varphi_0 = 270^\circ$ , т. е. когда ленты расположены ближе всего к потоку. Отметим также, что выражения (13) при  $\varphi_0 = 90^\circ, 270^\circ$  с точностью до фазового множителя совпадают с теми, которые можно получить из [5] для дифракционного излучения над плоской решеткой из узких лент.

б) *Редкая решетка из цилиндров с узкими щелями.* Если решетка состоит из цилиндров с узкими щелями и достаточно редкая, то выражения (11), (12) также значительно упрощаются и амплитуды гармоник поля дифракционного излучения принимают вид

$$\begin{aligned}
 a_n = & - \frac{2\beta\rho_0 e^{-qp}}{\pi \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\beta} + \frac{n}{\pi} \right)^2}} \left\{ \mu_0 J'_0 - (\mu_0 H_0^{(1)'} - 1) J'_0 \sum_{m \neq 0} \frac{|m|}{m} \times \right. \\
 & \times \frac{(-i)^m \exp[i m (\varphi_0 + \varphi_n)] V_{m-1}^{-1}}{H_m^{(1)'} + J'_m G_0} + \sum_{m \neq 0} \frac{|m|}{m} \frac{J'_m (-1)^m \exp(-im\varphi_n) V_{m-1}^{-1}}{H_m^{(1)'} + J'_m G_0} \times \\
 & \left. \times \left( \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \right)^m \right\}. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Выражение (14) определено с точностью до  $O \left[ \left( \frac{a}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$ .

Его исследование показывает, что амплитуды гармоник имеют экстремум, когда параметры решетки удовлетворяют уравнению

$$|D_0(k_0 a, \theta)|' = 0, \quad (15)$$

где  $D_0$  — знаменатель выражения (11).

Решая соответствующую однородную задачу о свободных колебаниях, можно показать, что резонансные значения параметров из (15) близки к корням дисперсионного уравнения структуры. Эти корни определяют квазисобственные режимы решетки, причем все они комплексные. Физически это соответствует тому, что в случае узких щелей в цилиндрах решетка представляет собой открытую резонансную структуру, где квазисобственные колебания затухают с течением времени («затухающие резонансы» [2]). Скорость затухания определяется отрицательной мнимой частью резонансных значений частотного параметра  $\kappa$ .

При  $k_0 a \ll 1$  дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 + (k_0 a)^2 \left[ 1 - \pi \frac{(k_0 a)^2}{4} \operatorname{Im} G_0 \right] \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + O\left(\kappa^3 s^4 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = 0. \quad (16)$$

Если, например, условия излучения выполняются только для —1-й пространственной гармоники, то

$$\operatorname{Im} G_0(\kappa, \beta) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma \kappa}{2} - (\kappa^2 - \nu^2) \frac{1.202}{\pi} + O(\nu^3),$$

где

$$|\nu| = \left| \frac{\kappa}{\beta} - 1 \right| < \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1.781\dots$$

Корень уравнения (16) равен

$$k_0 a = \left( -\ln \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2} + \chi, \quad (17)$$

где малая комплексная добавка  $\chi$  имеет порядок  $O\left(-\ln \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-3/2}$ .

Этот корень дисперсионного уравнения связан с так называемой щелевой вытекающей волной круглого волновода со щелью. Добротность соответствующего ему резонанса, определяемая как  $\operatorname{Re} \kappa / \operatorname{Im} \kappa$ , имеет порядок  $O\left(-\ln \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$ .

Из анализа дисперсионного уравнения при произвольных  $k_0 a$  следует, что поток будет возбуждать другие квазисобственные режимы, когда  $k_0 a = \pi \kappa s$  близко к корням производных функций Бесселя, т. е. когда частота близка к резонансным частотам замкнутого цилиндра, но отличается от них на малую добавку. Например, для возмущенных симметричных  $H$ -колебаний резонансная частота равна

$$k_0 a = \nu_{0m} + \chi_1 + i \chi_2 + O(\delta^3),$$

$$J'_0(\nu_{0m}) = 0, \quad \chi_1 = -\delta + 2\delta^2 \eta_1, \quad \chi_2 = 2\delta^2 \eta_2, \quad \delta = \frac{1}{2} \ln^{-1} \sin \frac{\theta}{2}; \quad (18)$$

$$\eta_1 = \frac{4}{\nu_{0m}} + 2 \operatorname{Im} G_0 \frac{J'_0}{N'_1} + \frac{N''_1}{N'_1}, \quad \eta_2 = -2(1 + \operatorname{Re} G_0) \frac{J'_0}{N'_1}$$

(аргументом цилиндрических функций является  $\nu_{0m}$ ).

Полученное выражение показывает, что добротность соответствующего резонанса имеет порядок  $O\left(\ln^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$ , т. е. больше, чем в случае резонанса, соответствующего щелевой волне. Сдвиг резонансной частоты (по отношению к  $\nu_{0m}$ ) происходит из-за наличия неоднородности в виде щели в стенах цилиндров, а также из-за взаимодействия между цилиндрами. Отметим, что поскольку возбуждающее поле имеет неоднородный характер, то вблизи резонансов энергия излучения должна быть более критичной по отношению к углу ориентации  $\varphi_0$ , чем вдали от них.

### 3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приближенные аналитические формулы, получаемые с помощью метода последовательных приближений, применимы лишь при существенных ограничениях, налагаемых на параметры  $\theta$ ,  $x$ ,  $s$ . С целью более детального исследования характеристик излучения был проведен численный анализ задачи путем решения системы (7) на ЭВМ М-222 методом усечений. На рис. 1—6 представлены некоторые из полученных зависимостей амплитуд —1-й пространственной гармоники, излучаемой в верхнее ( $a_{-1}$ ) и нижнее ( $b_{-1}$ ) полупространство.

Наибольший интерес при расчетах представляет такой режим, когда вся энергия дифракционного излучения сосредоточена в одной незатухающей гармонике, излучающейся по нормали к решетке. Как следует из (6), для —1-й гармоники это выполняется при  $x = \theta < 1$ . Отметим, что для тех графиков, которые не связаны с поворотом по углу ориентации  $\varphi_0$ , эффективный прицельный параметр не меняется, т. е. расстояние  $h$  от потока до решетки остается постоянным.

Если волновые размеры цилиндров фиксированы ( $k_0 a = \pi s = \text{const}$ ), то зависимость  $|a_{-1}|$  и  $|b_{-1}|$  (пунктир) от углового размера щели  $\theta$  при различных углах ее ориентации  $\varphi_0$  имеет резонансный характер (рис. 1). Возрастание или убывание энергии излучения связано с возбуждением вблизи элементов структуры поля, близкого к квазисобственному полю решетки, причем резонансные значения  $\theta$  и  $k_0 a$  удовлетворяют соотношению (16). Характер резонанса существенно зависит от угла ориентации щели  $\varphi_0$ . Из результатов расчетов следует, что изменение  $\varphi_0$  приводит к изменению фазового и амплитудного распределения тока на поверхности элемента решетки, что сказывается на амплитудах излучаемых плоских волн. Это явление отражает неоднородный характер возбуждаемого поля и сильнее всего выражено в резонанском случае.

При исчезновении щели ( $\theta \rightarrow 0$ )  $|a_{-1}|$  и  $|b_{-1}|$  стремятся к конечным (не равным друг другу) значениям, соответствующим излучению над решеткой из круглых брусьев. Как и следовало ожидать, предельные значения не зависят от  $\varphi_0$ . В другом предельном случае, когда  $\theta \rightarrow 180^\circ$ , т. е. решетка состоит из узких цилиндрических лент, амплитуды гармоник стремятся к нулю, причем в верхнее и нижнее полупространство излучается почти равная энергия. Это согласуется с результатами исследования дифракционного излучения над решеткой из плоских лент [5].

На рис. 2, 3 приведены зависимости амплитуды —1-й гармоники от коэффициента заполнения структуры  $s = 2a/l$ . При этом период решетки остается постоянным, а меняются лишь волновые размеры цилиндров. Резонансный характер зависимостей связан с возбуждением в структуре режимов, близких к квазисобственным. Например, если резонансы на рис. 2 и первый из резонансов на рис. 3 а являются резонансами щелевого типа, то второй (рис. 3 а) связан с возбуждением внутри цилиндров поля, близкого к полю колебания  $H_{11}$  замкнутого цилиндра.

Действительно, при резонансе  $k_0 a = 1,92$ , что близко к первому корню функции  $J'_1(x)$ , равному 1,84 (на причины сдвига резонансной частоты указывалось ранее).

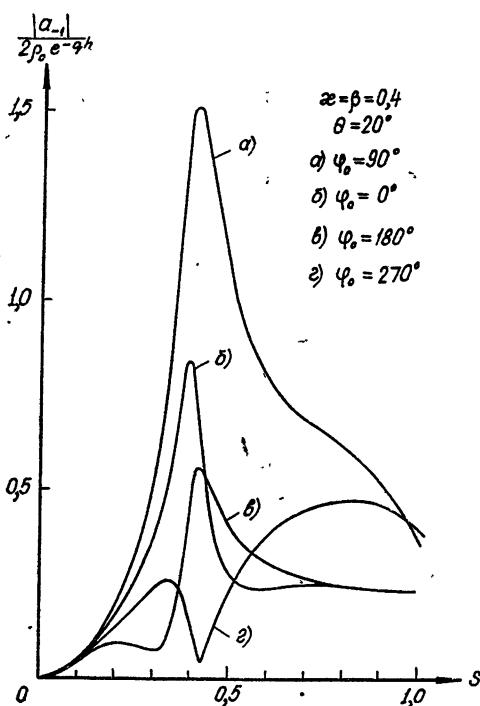


Рис. 2.

решетка близка к ножевой. Вместе с тем, эта энергия не равна нулю, что объясняется кривизной лент, образующих решетку.

По мере уменьшения  $\theta$  характер зависимости от  $\varphi_0$  сильно меняется. Когда щель узка, например,  $\theta = 1^\circ$  (рис. 5), то при повороте по  $\varphi_0$  изменением расстояния от потока до решетки можно пренебречь. В резонансном случае ( $s=0,246$ ) зависимость от угла сильно выражена, а максимум энергии излучения наблюдается, когда щель в цилиндрах обращена к потоку. Если же уйти от резонанса по какому-либо из параметров, например, по  $s$ , то зависимость от  $\varphi_0$  становится незначительной. Подобный характер кривых отражает тот факт, что резонанс связан со щелевой волной и возбуждается полем неоднородной плоской волны.

С целью сравнения решетки из незамкнутых цилиндров с решетками других типов были построены также нормированные угловые

Как и следовало ожидать, описанные резонансные явления исчезают, когда угловые размеры щели настолько велики, что элементы структуры представляют собой цилиндрические ленты (рис. 3 б).

Рассмотрим более подробно влияние угла ориентации щели  $\varphi_0$  на эффективность излучения. Этот вопрос в задачах о дифракционном излучении, насколько нам известно, ранее не обсуждался. Рис. 4 соответствует случаю, когда решетка состоит из узких лент. Как ясно и из элементарных физических соображений, энергия гармоник максимальна, когда ленты расположены ближе всего к потоку и образуют решетку, близкую к плоской ( $\varphi_0 = 270^\circ$ ). Поскольку  $\alpha = \beta$ , т. е. излучается только  $-1$ -я гармоника по нормали к решетке, то очевидно, что энергия излучения минимальна, когда  $\varphi_0$  близко к 0 или  $180^\circ$ , т. е. ре-

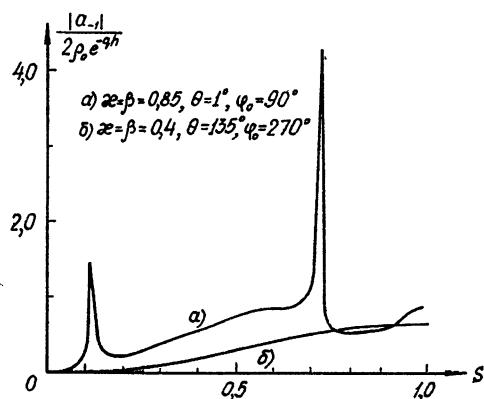


Рис. 3.

диаграммы направленности излучения — 1-й гармоники (рис. 6). (Пунктиром приведена диаграмма излучения над решеткой из полуплоскостей, наклоненных под углом  $\phi = 70^\circ$  [10].) Направлению максимального излучения соответствует возбуждение в структуре квазисобственного режима, исследованного выше. Подбирая требуемым образом пара-

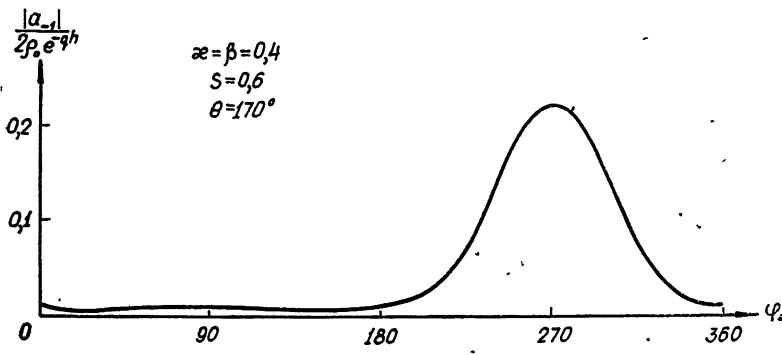


Рис. 4.

метры решетки, можно, например, добиться максимального излучения в вертикальном направлении. Это имеет существенное значение в дифракционной электронике при создании мощных генераторов дифракционного излучения непрерывного действия с электронным КПД порядка 20%. Заметим, что для отражательных решеток типа эшелетт и некоторых других излучение по нормали к решетке мало по принципиальным соображениям [10]. Кроме того, величина максимальной энергии излучения над решеткой из продольно-щелевых цилиндров пре-  
восходит энергию излучения для потока над решеткой типа гребенки.

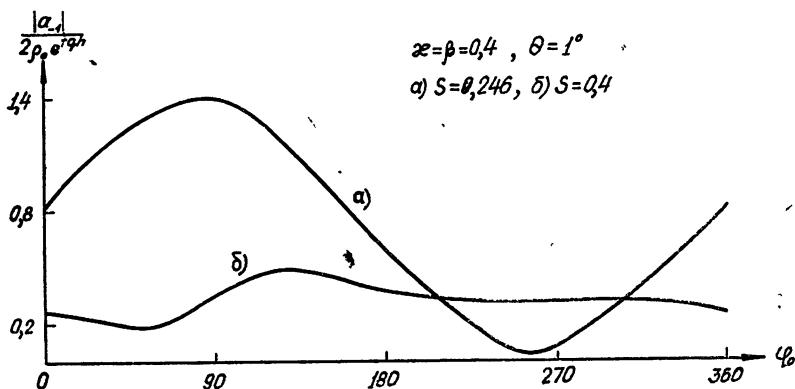


Рис. 5.

В заключение отметим, что из анализа сходимости результатов счета было установлено, что для получения точности не хуже 0,5% достаточно решить систему 17-го порядка. С целью контроля решения и алгоритма вычислений проверялось выполнение граничных условий на поверхности цилиндра и условий на ребре, причем результаты были вполне удовлетворительными при произвольных параметрах задачи.

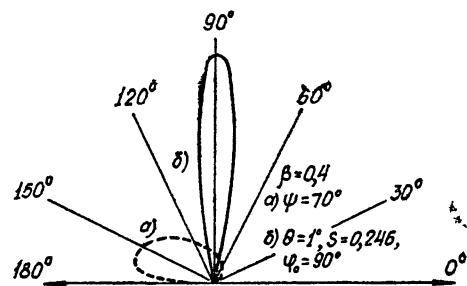


Рис. 6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 4, 588 (1968).
2. В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, Дифракция волн на решетках, изд. ХГУ, Харьков, 1973.
3. В. П. Шестопалов, Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения радиоволн, изд. ХГУ, Харьков, 1971.
4. Э. И. Велиев, сб. Радиотехника, изд. ХГУ, № 34, 158 (1975).
5. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника, 10, № 7, 1233 (1965).
6. В. Н. Кошпаренок, Г. Г. Половников, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 42, № 10, 2039 (1972).
7. Е. Б. Сидоренко, С. Д. Андренко, сб Радиотехника, изд. ХГУ, № 34, 86 (1975).
8. V. Twersky, IRE Trans., AP-10, № 6, 737 (1962).
9. А. В. Конторович, Г. Б. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1962.
10. А. А. Кириленко, Л. А. Рудь, УФЖ, 17, № 2, 283 (1972).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
17 февраля 1976 г.

RADIATION OF ELECTRON FLOW, FLYING OVER A GRATING OF CYLINDERS WITH LONGITUDINAL SLOTS

*E. I. Velyev, A. I. Nosich, V. P. Shestopalov*

Properties of radiation characteristics of electron flow, flying over a grating of circular cylinders with longitudinal slots are investigated. Resonances being excited in the periodic structure, radiated energy is shown to increase essentially.

УДК 621.385.6

## КОНКУРЕНЦИЯ МОД, РЕЗОНАНСНЫХ С РАЗНЫМИ, ГАРМОНИКАМИ ЦИКЛОТРОННОЙ ЧАСТОТЫ, В ГИРОМОНОТРОНАХ

*И. Г. Зарницаина, Г. С. Нусинович*

Показано, что генерация рабочей моды на второй гармонике циклотронной частоты расширяет область возбуждения паразитных мод, резонансных с первой гармоникой. Исследована зависимость условий самовозбуждения паразитных мод (при генерации рабочей моды) от основных параметров гиромонотрона: тока пучка, напряженности магнитостатического поля, расстройки частот мод, относительной эффективности взаимодействия электронов с полями рабочей и паразитной мод.

1. В гиромонотронах с пространственно развитой резонансной системой условия самовозбуждения могут выполняться одновременно для нескольких мод. При конкуренции мод, резонансных с циклотронной частотой  $\omega_H$ , возбуждение колебаний одной моды уменьшает область самовозбуждения прочих мод [1].

В гиромонотронах, работающих на моде, резонансной с  $2\omega_H$ , «опасными» конкурентами, как правило, являются моды, резонансные с  $\omega_H$ , более эффективно взаимодействующие с пучком [2]. Взаимодействие электронов с высокочастотным полем частоты  $\omega$  при  $\omega \approx \omega_H$  и  $\omega \approx 2\omega_H$  имеет различный характер [3]: при  $\omega \approx \omega_H$  — дипольный, при  $\omega \approx 2\omega_H$  — квадрупольный. Поэтому можно ожидать, что конкуренция мод, резонансных с разными гармониками  $\omega_H$ , отличается от исследованного в [1] случая конкуренции мод, резонансных с основной гармоникой. Цель настоящей работы заключается в исследовании влияния генерации рабочей моды, резонансной с  $2\omega_H$ , на условия самовозбуждения паразитных мод, резонансных с  $\omega_H$ .

2. Рассмотрим принятую в [1] модель гиромонотрона: рабочее пространство прибора аксиально симметрично, в потоке слаборелятивистских электронов отсутствует разброс скоростей и радиусов ведущих центров  $R_0$ , резонатор радиуса  $R$  является высокодобротным, вследствие чего характерное время установления колебаний мод существенно превышает время пролета электронов через резонатор. Будем считать, что азимутальные индексы рабочей ( $m_1$ ) и паразитной ( $m_2$ ) мод удовлетворяют неравенству  $m_1 \neq 2m_2$ . При сделанных предположениях, как показано в [1, 4], задача сводится к последовательному интегрированию уравнений движения электронов в высокочастотном поле с постоянными амплитудами мод ( $F_2 \ll F_1$ ) и линейно меняющейся со временем разностью фаз  $2\psi_2 - \psi_1$ , вычислению факторов возбуждения рабочей ( $\hat{\Phi}_1$ ) и паразитной ( $\hat{\Phi}_2$ ) мод, характеризующих перекачку энергии электронного потока в энергию высокочастотного поля данной моды [1, 4], и, наконец, анализу устойчивости колебаний рабочей моды, состоящему

в исследовании на плоскости  $F_1, F_2$  окрестности состояния равновесия  $F_1 = F_1^0, F_2 = 0$ .

Нестационарные процессы, которым в плоскости  $F_1, F_2$  соответствует движение точки, отображающей состояние генератора, описываются системой уравнений [1, 4]

$$\frac{dF_s}{dt} = F_s \left( -\frac{n_s}{2Q_s} + I_s \hat{\Phi}'_s \right) \quad (s = 1, 2), \quad (1)$$

где  $n_s$  — номер резонансной  $s$ -й моде гармоники  $\omega_H$ ,  $Q_s$  — добротность  $s$ -й моды,  $I_s = 0,944 \cdot 10^{-6} I \beta_{\perp}^{2(n_s-3)} n_s \left( \frac{n_s^{n_s}}{2^{n_s} n_s!} \right)^2 G_s$ ,  $G = \lambda^3 J_m^2 \left( \frac{\omega}{c} R_0 \right) / N$

(величины  $m$  и  $n$ , частота  $\omega$ , длина волны  $\lambda$  и норма  $N$  у рабочей и паразитной мод различны),  $J$  — ток пучка в амперах,  $\beta_{\perp}$  — отношение поперечной компоненты скорости электронов к скорости света  $c$ .

Стационарная амплитуда колебаний рабочей моды  $F_1^0$  определяется уравнением баланса активных мощностей пучка и высокочастотного поля

$$I_1 \hat{\Phi}'_1 (F_1^0) = \frac{n_1}{2Q_1}; \quad (2)$$

условие устойчивости колебаний рабочей моды по отношению к паразитным модам имеет вид [1]

$$\hat{\Phi}'_1 (F_1^0) / \hat{\Phi}'_2 (F_1^0) > \hat{q} = \beta_{\perp}^{-2} \frac{Q_2 G_2}{Q_1 G_1}. \quad (3)$$

Множитель  $\beta_{\perp}^{-2}$  в  $\hat{q}$  (3) характеризует отличие эффективности взаимодействия пучка с полем на первой и второй гармониках  $\omega_H$  [2]. Скомпенсировать множитель  $\beta_{\perp}^{-2}$  можно увеличением отношения  $\frac{Q_2 G_2}{Q_1 G_1}$  в (3).

Уравнения движения электронов и выражения, определяющие факторы возбуждения, приведены в [1]. Проинтегрировать уравнения движения и определить факторы  $\hat{\Phi}_{1,2}$  аналитически можно, например, в гиromонотроне с одинаковым продольным  $\delta$ -распределением полей обеих мод [1]  $f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = \frac{1}{2} [\delta(\zeta) + \delta(\zeta - \mu)]$ , где  $\zeta = (\beta_{\perp}^2 / 2\beta_{\parallel}) (\omega_H z / c)$  — безразмерная продольная координата. В такой модели реальные части факторов возбуждения равны

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}'_1 &= \frac{1 - \operatorname{ch}^2 F_1}{2F_1^2} + \frac{1}{4F_1} \operatorname{Re} \left\{ \left( 1 + \frac{\operatorname{sh} F_1}{F_1} \right) \exp [-i(\Delta + \operatorname{ch} F_1 - 1)2\mu] \times \right. \\ &\times [-J_0(2X) \operatorname{sh} F_1 + iJ_1(2X) \operatorname{ch} F_1] + \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} F_1}{F_1} \right) \exp [i(\Delta + \operatorname{ch} F_1 - 1)2\mu] \times \\ &\times [J_0(2X) \operatorname{sh} F_1 + iJ_1(2X) \operatorname{ch} F_1] \Big\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\hat{\Phi}'_2 = 2 \frac{1 - \operatorname{ch}(F_1/2)}{F_1^2} + \frac{\operatorname{ch}(F_1/2) - 1}{F_1^2} \operatorname{Re} \left\{ \exp [i(\Delta - \tilde{\Delta} + \operatorname{ch} F_1 - 1)\mu] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ -J_0(X) \left( \operatorname{ch} \frac{F_1}{2} - 1 + i\mu \left( \operatorname{ch} \frac{3}{2} F_1 - \operatorname{ch} F_1 \right) \right) + \right. \\
 & \left. + J_1(X) \mu \left( \operatorname{sh} \frac{3}{2} F_1 - \operatorname{sh} F_1 \right) \right] \Bigg\} + \frac{\operatorname{sh}(F_1/2)}{F_1^2} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[ -i(\Delta + \tilde{\Delta} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{ch} F_1 - 1)\mu \right] \left[ -J_0(X) \left( \operatorname{sh} \frac{F_1}{2} - i\mu \left( \operatorname{sh} \frac{3}{2} F_1 - \operatorname{sh} F_1 \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + J_1(X) \mu \left( \operatorname{ch} \frac{3}{2} F_1 - \operatorname{ch} F_1 \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь введены расстройки  $\Delta = \frac{2}{\beta_\perp^2} \left( \frac{\omega_1}{2\omega_H} - 1 \right)$ ,  $\tilde{\Delta} = \frac{2}{\beta_\perp^2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{1}{2} \right)$ ,  $X = F_1 \mu -$

параметр группировки. Эффекты насыщения описываются в (4) функциями Бесселя, которые в случае моды, резонансной с  $\omega_H$ , зависят от параметра группировки  $X$ , а в случае моды, резонансной с  $2\omega_H$ , — от удвоенной величины  $2X$ , т. е. насыщение моды на  $2\omega_H$ , взаимодействие пучка с которой имеет квадрупольный характер, происходит быстрее, чем у дипольно взаимодействующей с пучком моды на  $\omega_H$ .

Для того, чтобы понять причину этого эффекта, следует учесть, что при резонансе на второй гармонике электроны группируются в два сгустка, находящиеся в одинаковой фазе по отношению к высокочастотному полю квадрупольной структуры (см. рис. 6 в [3]). Такая группировка оказывается существенной — приводит к проявлению эффектов насыщения — уже при воздействии высокочастотного поля вдвое меньшей амплитуды, чем необходимая для эффективной группировки в один сгусток в случае резонанса на  $\omega_H$  с полем дипольной структуры, что и объясняет различие аргументов функций Бесселя в (4).

На плоскости расстроек  $\Delta, \tilde{\Delta}$  при заданных значениях  $F_1, \mu, q$  условие (3) определяет область, в которой колебания рабочей моды являются устойчивыми. В отсутствие колебаний ( $F_1 = 0$ ) выражения для факторов возбуждения (4) отличаются лишь постоянным множителем и углами пролета  $\hat{\Phi}'_1(2\Delta\mu) = 2\hat{\Phi}'_2[(\Delta + \tilde{\Delta})\mu]$ ; стартовые токи мод определяются выражением (2), в котором следует раскрыть обозначение  $I_1$  и для паразитной моды индекс 1 заменить на 2. Отношение стартовых токов мод равно

$$I_{\text{старт}, 1}/I_{\text{старт}, 2} = q \hat{\Phi}'_2/\hat{\Phi}'_1, \quad (5)$$

откуда видно, что условие (3) применительно к линейному режиму означает превышение стартового тока паразитной моды над стартовым током рабочей. При  $q = 2$  минимальные стартовые токи обеих мод одинаковы, области самовозбуждения обеих мод имеют на плоскости  $\Delta, \tilde{\Delta}$  симметричный вид (разделены на рис. 1, где  $\mu = 5$ , штриховыми линиями; парал-

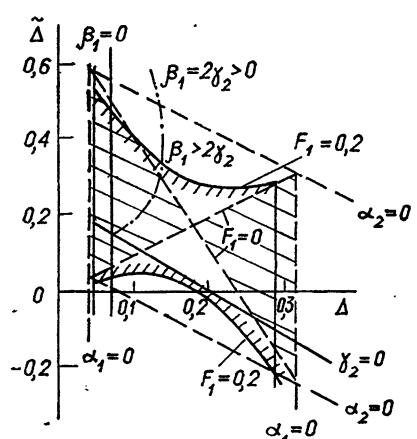


Рис. 1.

лельные штриховые линии соответствуют значениям  $\Delta, \tilde{\Delta}$ , при которых  $\hat{\Phi}'_{1,2} = 0$ ). Такое же разбиение плоскости расстроек на области самовозбуждения рабочей и паразитной мод имело место и в случае  $n_1 = n_2 = 1$  при  $\hat{q} = 1$  [1]. Однако при  $n_1 = n_2 = 1$  область самовозбуждения паразитных мод сужалась [1] по мере роста амплитуды рабочей моды, вызванного увеличением тока пучка (см. (2)), в то время как при появлении колебаний с  $\omega \approx 2\omega_H$  область самовозбуждения паразитных мод, резонансных с  $\omega_H$ , расширяется (заштрихована на рис. 1).

3. Для того, чтобы проследить причину этого эффекта, будем считать амплитуду колебаний  $F_1$  не очень большой и проведем в выражениях (4) разложение по  $F_1$ , удерживая только члены порядка  $F_1^2$ . При этом выражения (4) переходят в следующие:

$$\hat{\Phi}'_1 = \alpha_1 - \beta_1 F_1^2, \quad \hat{\Phi}'_2 = \alpha_2 - \gamma_2 F_1^2, \quad (6)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (\mu \sin 2\Delta\mu - 1 - \cos 2\Delta\mu) \equiv \varphi [2\Delta\mu], \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \varphi [(\Delta + \tilde{\Delta})\mu],$$

$$\beta_1 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1+i\mu}{24} e^{i2\Delta\mu} + \left( \frac{1}{8} - \frac{7}{8} i\mu - \mu^2 + \frac{3}{16} i\mu^3 \right) e^{-i2\Delta\mu} \right\},$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{8} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{24} + e^{i(\Delta-\tilde{\Delta})\mu} \frac{1}{8} (1 + 5i\mu - 2\mu^2) + e^{-i(\Delta+\tilde{\Delta})\mu} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{6} - \frac{8}{3} i\mu - \frac{11}{4} \mu^2 \right) \right\}.$$

Коэффициенты  $\beta_1$  и  $\gamma_2$  характеризуют «скорость насыщения» факторов  $\hat{\Phi}'_{1,2}$ .

Из сопоставления (3) и (6) следует, что в той области углов проleta, где  $\beta_1 > \hat{q}\gamma_2$ , увеличение амплитуды рабочей моды вызывает расширение области самовозбуждения паразитных мод, и, наоборот, в области, где  $\beta_1 < \hat{q}\gamma_2$ , зона самовозбуждения паразитных мод с ростом амплитуды  $F_1$  сужается. Изображенная на рис. 1 штрих-пунктирной линией граница  $\beta_1 = 2\gamma_2$  ( $\hat{q} = 2$ ) свидетельствует о том, что в значительной части области расстроек  $\Delta, \tilde{\Delta}$ , где имеет место конкуренция мод, рабочей моде на  $2\omega_H$  свойственна большая «скорость насыщения», чем паразитным модам на  $\omega_H$ .

Таким образом, стремление понизить стартовые токи рабочей моды на  $2\omega_H$  путем выбора места ввода пучка в область максимального взаимодействия электронов с полем рабочей моды ( $G_1 = G_{1\max}$ ) можно привести к отрицательным последствиям: при малых токах будут возбуждаться колебания рабочей моды (если при увеличении  $G_1$  величина  $G_2$  сущ-

ственно не изменяется), однако при больших токах из-за уменьшения  $\hat{q} \sim G_2/G_1$  произойдет перескок частоты генератора с  $2\omega_H$  на  $\omega_H^*$ .

4. В гиромонотронах обычно [6] используются открытые резонаторы, в которых продольная структура поля обеих мод хорошо аппроксимируется гауссовой функцией

$$f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = \exp [-(2\zeta/\mu)^2]. \quad (7)$$

Численное исследование условий самовозбуждения паразитной моды при генерации рабочей моды в модели гиромонотрона с продольной структурой мод (7), проведенное путем описанного в [1] анализа системы уравнений самосогласованного поля, качественно подтвердило полученные выше результаты. При параметрах  $\mu, I_0 = 0,944 \cdot 10^{-6} IQ_1 G_1 \frac{\mu^2}{\beta_\perp^2}$ , соответствующих высокому КПД рабочей моды [7] ( $I_0 = 20, \mu = 10$ ), и  $\hat{q} = 2$  появление генерации на  $2\omega_H$ , как видно из рис. 2, существенно увеличивает область самовозбуждения паразитной моды на  $\omega_H$  по сравнению со случаем отсутствия автоколебаний ( $F_1 = 0$ ). Зависимость факторов  $\hat{\Phi}'_{1,2}$  обеих мод от амплитуды рабочей моды при нескольких значениях  $\Delta$  и  $\tilde{\Delta} = 0,4$  показана на рис. 3, где можно проследить различие в «скоростях насыщения» мод.

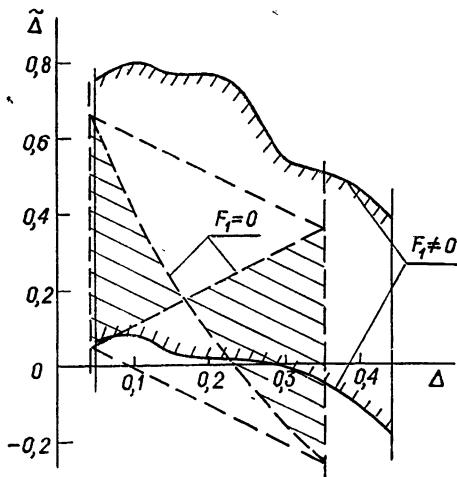


Рис. 2.

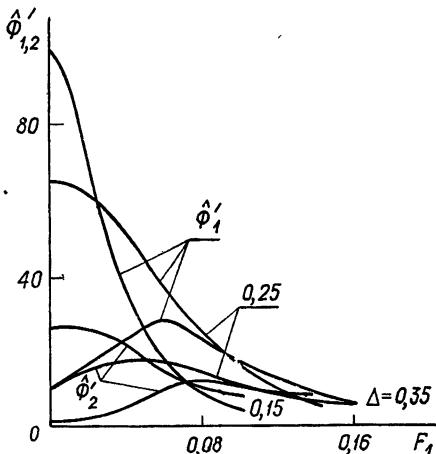


Рис. 3.

В экспериментальных условиях, как правило, гиромонotron выводится на нужный режим путем регулировки тока пучка и напряженности магнитостатического поля  $H$ , чему соответствует независимое изменение введенных выше параметров  $I_0, \Delta$ . Области самовозбуждения рабочей и паразитной мод, расстройка частот которых составляет

\* Анализ уравнений (1) показывает, что при описывающей поведение генератора в режиме «мягкого» самовозбуждения квадратичной (6) аппроксимации зависимости факторов  $\hat{\Phi}'_{1,2}$  от амплитуд обеих мод в точке, где нарушается условие устойчивости (3), седло, находившееся на плоскости  $F_1, F_2$ , ложится на ось  $F_1$  и, следовательно, система из любой точки плоскости  $F_1, F_2$  приходит к единственному устойчивому состоянию — одномодовым колебаниям второй моды (см. [5]).

$\tilde{\Delta} = 0,4$ , показаны в плоскости  $I_0$ ,  $\Delta$  на рис. 4. Из этого рисунка видно, что область малых стартовых токов паразитной моды находится правее (при больших  $H$ ) зоны самовозбуждения рабочих колебаний, в которой почти всюду стартовый ток паразитной моды при  $\hat{q} = 1$  и даже при  $\hat{q} = 2$  превышает стартовый ток рабочей моды. Штриховыми линиями на рисунке изображены линии равных значений поперечного электронного КПД  $\eta_{\perp}$  при генерации рабочей моды\*. При токах, меньших стартового (левая часть рисунка), колебания рабочей моды возбуждаются «жестко». Штрих-пунктирная линия на рис. 4 соответствует минимальной величине тока, при которой существуют колебания рабочей моды. Граница области, в которой выполняется условие устойчивости колебаний рабочей моды (3), показана на рис. 4 линией с густой штриховкой. Увеличение  $\hat{q}$  от единицы до двух делает невозможным получение мощных колебаний, резонансных с  $2\omega_H$ , с хорошим КПД.

Полученные результаты показывают, что в условиях конкуренции мод невозможно определить установившийся тип колебаний на основе

анализа, проведенного в рамках линейной теории (сравнение стартовых токов мод). Пусть, например, генератор включается так: при фиксированном магнитостатическом поле ( $\Delta = 0,33$ ) ток увеличивается до значения

$I_0 = 15$ . Если  $\hat{q} = 2$ , то согласно линейной теории, в этом случае условия самовозбуждения выполняются только для рабочей моды, а стартовый ток паразитной моды превышает ( $\tilde{\Delta} = 0,4$ , см. рис. 4) ток пучка. Нелинейный анализ автоколебаний рабочей моды позволяет надеяться на генерацию рабочей моды с КПД  $\eta_{\perp} \approx 0,34$ , и только

выяснение зависимости условий самовозбуждения паразитной моды от амплитуды рабочей моды показывает, что при данных значениях параметров генератора имеют место паразитные колебания.

Авторы благодарны А. В. Гапонову и М. И. Петелину за полезные беседы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- И. Г. Зарница, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 12, 1858 (1974).
- А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
- М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Лекции по электронике СВЧ, кн. IV, Саратов, 1974, стр. 95.
- М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1709 (1974).
- И. Г. Зарница, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 303 (1975).

\* Относительно низкая величина КПД объясняется интегрированием по продольной координате от  $\zeta = -\mu/2$  до  $\zeta = \mu/2$ , т. е. на границах области интегрирования поле спадает в  $e$  раз по сравнению с максимальным значением, а не в  $e^3$  раз, как в [7] (ср. результаты работ [6—8]).

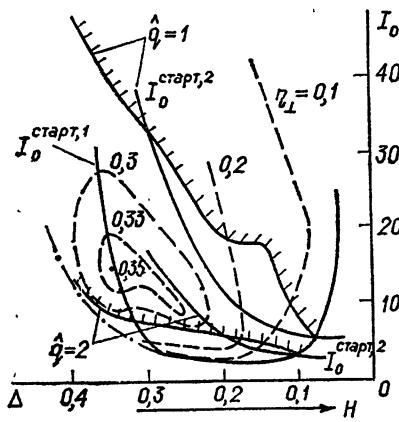


Рис. 4.

6. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Т. Б. Панкрантова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **18**, № 2, 280 (1975).
7. Г. С. Нусинович, Р. Э. Эрм, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 8, 55 (1972).
8. Т. А. Грязнова, С. В. Кошевая, Г. Н. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, вып. 9, 998 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
23 февраля 1976 г.

COMPETITION OF MODES WHICH ARE IN RESONANCE WITH  
DIFFERENT HARMONICS OF THE CYCLOTRON FREQUENCY IN  
GYROMONOTRONS

*I. G. Zarnitzyna, G. S. Nusinovich*

It is shown that the generation of the operating mode at the second harmonic of cyclotron frequency extends the excitation region of parasitic modes which are in resonance with the first harmonic. The dependence of the conditions of parasitic mode self-excitation (in generation of the operating mode) upon the basic parameters of a gyromonotron: the beam current, the magnetostatic field intensity, the mode frequency detuning, efficiency of interaction of electrons with operating and parasitic mode fields is investigated.

УДК 621.385.6

## К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХПОТОЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В МАГНЕТРОНЕ. I

*В. Е. Белов, Л. В. Родыгин*

Рассматриваются плоская и цилиндрическая модели двухпоточного электронного облака с неограниченными краевыми плоскостями заряда в магнетронном диоде и исследуются их устойчивость по отношению к поперечным (радиальным) возмущениям. Решение показывает, что введение цилиндричности (кривизны пространства взаимодействия) уменьшает инкременты колебаний и даже может привести практически к устойчивости электронного облака. Полученные результаты уточняют выводы работ [4, 5].

В настоящее время общепризнано, что существенную роль при формировании электронного облака в предгенерационных режимах магнетрона играют электронно-волновые процессы, возникающие из-за различного рода возмущений. Анализ азимутально-несимметричных возмущений типа вращающейся волны, проведенный в линейном приближении для классического однопоточного [1] и двухпоточного [2] состояний, показывает, что они нарастают, т. е. исходные статические состояния неустойчивы. Наличие таких возмущений приводит к энергообмену между группами электронов и вызывает смещение одних групп к аноду, а других — к катоду.

Для описания нелинейной стадии процесса теории, развитые в [1, 2], непригодны. Однако из многочисленных экспериментов известно, что в установившемся состоянии в облаке происходит генерация «избыточных» шумов с уровнями энергии на несколько порядков выше диодных. Некоторое представление об этой стадии дает предложенная в [3] модель, согласно которой электроны двигаются по петлеобразным орбитам, а наличие шумовых полей приводит к диффузионному перемещению этих орбит как целого.

В целом авторы работ [1–3] связывают бомбардировку катода энергичными электронами, значительные плотности объемного заряда при радиусах больше критического, аномально высокие анодные токи и тому подобные явления именно с «избыточными» шумами, порожденными неустойчивостью статических состояний по отношению к возмущениям типа вращающейся волны.

Существенно иной класс возмущений, приводящих к разрушению двухпоточного состояния электронного облака, рассмотрен в статье [4]. В ней показано, что в двухпоточной модели облака с бесконечной плотностью заряда на краях нарастают радиальные (азимутально-симметричные) колебания с частотами много больше циклотронной, причем инкременты колебаний растут с ростом частоты.

Выводы статьи [4] усилены в [5], где утверждается, что «двуихпоточное состояние электронного облака неустойчиво даже по отношению к возмущениям, оставляющим его симметричным. Фактически оно никогда не реализуется, и вместо него образуется состояние, близкое к однопоточному, в котором вместо двух встречных потоков имеется лишь один поток, движущийся в основном параллельно катоду» (см. [5], стр. 280).

По отношению к реальным приборам такое утверждение, по-видимому, является слишком категоричным. Его трудно согласовать с результатами экспериментов по прямому наблюдению следов электронных траекторий [6]. Измеренное в [7] распределение плотности заряда также более соответствует представлениям о двухпоточном состоянии электронного облака в магнетроне.

В предлагаемой работе оценивается область параметров, при которых описанный механизм возникновения неустойчивости (в [4, 5] он квалифицируется как неустойчивость двух встречных пучков) может иметь место в реальных приборах. В части I проводится анализ устойчивости плоской и цилиндрической моделей электронного облака с неограниченными краевыми плотностями по отношению к поперечным (радиальным) возмущениям. Его результаты уточняют выводы работ [4, 5].

## 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим двухпоточную модель электронного облака в закритическом плоском магнетронном диоде, соответствующую нулевым скоростям электронов у катода. Стационарное движение электронов в ней описывается в [5] уравнениями (П.16), а малые его возмущения — системой (П.39) с краевыми условиями (П.40). После введения параметров и безразмерных переменных

$$T = \Omega t, \quad v = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \beta = \frac{8\pi j_y^0}{\Omega E_k}, \quad \gamma = \frac{eE_k}{m\Omega^2} \quad (1)$$

последние принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{R} - (v^2 - 1 + 2\rho)R &= 2iv\dot{S}, \\ \ddot{S} - (v^2 - 1)S &= 2iv\dot{R}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$R(0) = R(T_{kp}) = 0, \quad S(0) = S(T_{kp}) = 0. \quad (3)$$

Здесь точка обозначает производную по  $T$ ,

$$\rho(T) = \gamma \frac{\beta \Omega}{2v^0} = \frac{0,5}{1 - \cos T + (1/\beta) \sin T} \quad (4)$$

является отношением плотности заряда  $\sigma(T) = \frac{2j_y^0}{v^0}$  к удвоенной бриллюэновской  $2\sigma_{kp} = \frac{m\Omega^2}{2\pi e}$ , а параметр  $\beta$  характеризует степень температурного ограничения тока эмиссии (при полном объемном заряде  $\beta = \infty$ ).

Для дальнейшего посредством замены

$$\begin{aligned} R &= A \sin vT + B \cos vT, \\ \dot{R} &= (vA + D) \cos vT - (vB - C) \sin vT, \\ S &= A \cos vT - B \sin vT, \\ \dot{S} &= -(vA + D) \sin vT - (vB - C) \cos vT \end{aligned} \quad (5)$$

удобно перейти от уравнений (2) к системе

$$\dot{A} = C,$$

$$\dot{B} = D,$$

$$\dot{C} = (\rho - 1)A + \rho(-A \cos 2\nu T + B \sin 2\nu T), \quad (6)$$

$$\dot{D} = (\rho - 1)B + \rho(A \sin 2\nu T + B \cos 2\nu T)$$

относительно новых функций  $A(T)$ ,  $B(T)$ ,  $C(T)$  и  $D(T)$ . Нетрудно проверить, что для  $T = 0$  краевые условия (3) при этом переходят в условия

$$A(0) = A_0, \quad B(0) = 0, \quad C(0) = 0, \quad D(0) = D_0 \quad (7)$$

с произвольными  $A_0$  и  $D_0$ .

Следуя [4, 5], мы будем искать собственные значения и собственные функции задачи (2), (3) лишь при  $\nu \gg 1$  и во всех последующих преобразованиях опускать члены порядка  $\nu^{-1}$  и менее без дополнительных оговорок. Заметим, что согласно (4) при приближении к точкам поворота  $T = 0$  и  $T = T_{\text{кр}} = \pi + 2 \arctg \beta$  значения  $\rho(T)$  неограниченно возрастают. Одновременно возрастает роль быстроколеблющихся слагаемых в уравнениях (6). С удалением от точек поворота функция  $\rho(T)$  становится все более «гладкой», и при

$$|\dot{\rho}| / \nu \rho \ll 1 \quad (8)$$

(что выполняется при  $\nu T \gg 1$ ) для приближенного решения системы (6) естественно применить метод усреднения, т. е., отбросив в правых частях в (6) быстроколеблющиеся члены, перейти к системе

$$\begin{aligned} \dot{\bar{A}} &= \bar{C}, & \dot{\bar{C}} &= (\rho - 1)\bar{A}, \\ \dot{\bar{B}} &= \bar{D}, & \dot{\bar{D}} &= (\rho - 1)\bar{B}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из последней следует, что функции  $\bar{A}(T)$  и  $\bar{B}(T)$  удовлетворяют уравнению

$$\ddot{\varphi} + (1 - \rho(T))\varphi = 0. \quad (10)$$

Если два линейно независимых решения последнего обозначить через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то  $\bar{A}(T)$  и  $\bar{B}(T)$  будут их линейными комбинациями, а  $\bar{C}(T)$  и  $\bar{D}(T)$  — линейными комбинациями их производных с теми же коэффициентами.

Регулярных аналитических методов нахождения решений уравнения (10) нет. Поэтому даже при  $\nu \gg 1$  для решения системы (6) на всем интервале  $(0, T_{\text{кр}})$  приходится использовать приближенные численные методы. Та же задача, но для случая со сглаженным распределением плотности заряда решалась в работе [5] с применением метода фазовых интегралов (метод ВКБ). Из выкладок в [5] следует, что в качестве приближения к решениям можно использовать функции  $\exp(\pm \int V \sqrt{1 - \rho(\xi)} d\xi)$ . Однако в областях с плотностью  $\rho > 0,6$  они уже не могут быть использованы (см. Приложение 1).

## 2. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКОГО СЛОЯ

Для случая  $\nu \gg \max(1, \beta)$  в Приложении 2 показано, что приближенное решение системы (6), удовлетворяющее условиям (7), на всем интервале изменения  $T$ , кроме некоторой окрестности точки  $T = T_{\text{кр}}$  имеет вид

$$A(T) = A_0 \left[ \varphi_2(T) - \frac{\beta}{2} \varphi_1(T) \operatorname{Cl} 2\nu T \right],$$

$$B(T) = \left[ A_0 \frac{\beta}{2} \left( \operatorname{Si} 2\nu T - \frac{\pi}{2} \right) + D^0 \right] \varphi_1(T),$$

$$C(T) = A_0 \left[ \dot{\varphi}_2(T) - \frac{\beta}{2} \dot{\varphi}_1(T) \operatorname{Ci} 2\sqrt{T} \right], \quad (11)$$

$$D(T) = \left[ A_0 \frac{\beta}{2} \left( \operatorname{Si} 2\sqrt{T} - \frac{\pi}{2} \right) + D^0 \right] \dot{\varphi}_1(T)$$

с  $D^0 = D_0 + A_0 \frac{\beta\pi}{4}$ . Через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  здесь обозначены решения уравнения (10) с различным асимптотическим поведением в окрестности точки  $T = 0$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1(T) &= T + \frac{\beta}{4} T^2 + \dots, \\ \varphi_2(T) &= 1 + \frac{\beta}{2} T (\ln 2\sqrt{T} - 1) + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

$\ln \Gamma = 0,5772 \dots$  — постоянная Эйлера.

Для нахождения решений, удовлетворяющих краевым условиям (3) при  $T = T_{kp}$ , целесообразно в (6) сделать подстановки

$$T = T_{kp} - T',$$

$$\begin{aligned} A(T) &= A'(T') \cos \nu T_{kp} - B'(T') \sin \nu T_{kp}, \\ B(T) &= -A'(T') \sin \nu T_{kp} - B'(T') \cos \nu T_{kp}, \\ C(T) &= -C'(T') \cos \nu T_{kp} + D'(T') \sin \nu T_{kp}, \\ D(T) &= C'(T') \sin \nu T_{kp} + D'(T') \cos \nu T_{kp} \end{aligned} \quad (13)$$

и перейти к новой переменной  $T'$  и функциям  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  и  $D'$ . При этом получится система, отличающаяся от (6) заменой  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $T$  на  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  и  $T'$ . Для новых функций можно таким же образом определить краевые условия при  $T' = 0$  и записать решения на интервале, не содержащем окрестности точки  $T' = T_{kp}$  ( $T = 0$ ). Для этого в формулах (11), (12) достаточно формально отметить штрихами соответствующие переменные, функции и произвольные постоянные  $A_0$  и  $D^0$ . Тогда функции  $\varphi'_1(T')$  и  $\varphi'_2(T')$  окажутся решениями уравнения (10) с заданным асимптотическим поведением при  $T' \rightarrow 0$ .

По мере удаления от точек поворота быстроколеблющиеся компоненты в решениях, связанные с интегральными синусом и косинусом, уменьшаются, и в области, где  $\nu T \gg 1$  и  $\nu T' \gg 1$ , ими можно пренебречь. В этой области определены оба решения, и потому в ней можно их сплить. Подставляя в (13) значения соответствующих функций в точке сшивания  $T = T^*$  ( $T' = T^* = T_{kp} - T^*$ ), получим

$$A_0 \varphi_2(T) - A'_0 \varphi'_2(T') \cos \nu T_{kp} + D^0 \varphi'_1(T') \sin \nu T_{kp} = 0,$$

$$D^0 \varphi_1(T) + A'_0 \varphi'_2(T') \sin \nu T_{kp} + D^0 \varphi'_1(T') \cos \nu T_{kp} = 0,$$

$$A_0 \dot{\varphi}_2(T) - A'_0 \dot{\varphi}'_2(T') \cos \nu T_{kp} + D^0 \dot{\varphi}'_1(T') \sin \nu T_{kp} = 0,$$

$$D^0 \dot{\varphi}_1(T) + A'_0 \dot{\varphi}'_2(T') \sin \nu T_{kp} + D^0 \dot{\varphi}'_1(T') \cos \nu T_{kp} = 0$$

(точкой обозначена производная  $\frac{d}{dT} = -\frac{d}{dT'}$ ). Условие равенства нулю

детерминанта, составленного из коэффициентов при  $A_0$ ,  $D^0$ ,  $A'_0$ ,  $D^0$  в этой системе, дает уравнение относительно собственных частот

$$\operatorname{tg}^2 \nu T_{kp} = -Z = -\frac{(z_1 - z'_1)(z_2 - z'_2)}{(z_1 - z'_2)(z_2 - z'_1)}, \quad (14)$$

где

$$z_1 = \frac{\varphi_1(T^*)}{\dot{\varphi}_1(T^*)}, \quad z_2 = \frac{\varphi_2(T^*)}{\dot{\varphi}_2(T^*)}, \quad z'_1 = \frac{\dot{\varphi}'_1(T'^*)}{\dot{\varphi}_1(T'^*)}, \quad z'_2 = \frac{\dot{\varphi}'_2(T'^*)}{\dot{\varphi}_2(T'^*)}.$$

Введем в рассмотрение функции  $\psi_1(T)$  и  $\psi_2(T)$  — решения уравнения (10), для которых при  $T = T^*$  заданы значения

$$\psi_1(T^*) = 1, \quad \dot{\psi}_1(T^*) = 0, \quad \psi_2(T^*) = 0, \quad \dot{\psi}_2(T^*) = 1, \quad (15)$$

и представим  $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  в виде линейных комбинаций

$$\varphi_1(T) = a\psi_1(T) + b\psi_2(T), \quad \dot{\varphi}_1(T') = a'\psi_1(T) + b'\psi_2(T),$$

$$\varphi_2(T) = c\psi_1(T) + d\psi_2(T), \quad \dot{\varphi}_2(T') = c'\psi_1(T) + d'\psi_2(T).$$

Тогда

$$z_1 = -\frac{\varphi_1 \dot{\psi}_2 - \dot{\varphi}_1 \psi_2}{\varphi_1 \dot{\psi}_1 - \dot{\varphi}_1 \psi_1} = \frac{a}{b}, \quad z_2 = -\frac{\varphi_2 \dot{\psi}_2 - \dot{\varphi}_2 \psi_2}{\varphi_2 \dot{\psi}_1 - \dot{\varphi}_2 \psi_1} = \frac{c}{d},$$

$$z'_1 = -\frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi}_2 \psi_2}{\dot{\varphi}_1 \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi}_2 \psi_1} = \frac{a'}{b'}, \quad z'_2 = -\frac{\dot{\varphi}_2 \dot{\psi}_2 + \dot{\varphi}_1 \psi_2}{\dot{\varphi}_2 \dot{\psi}_1 + \dot{\varphi}_1 \psi_1} = \frac{c'}{d'}.$$

Эти соотношения не зависят от  $T$ , и поэтому достаточно вычислить их вблизи точек поворота, где асимптотическое поведение  $\varphi_1(T), \varphi_2(T)$  (около  $T = 0$ ) и  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$  (около  $T = T_{kp}$ ) известно:

$$z_1 = -\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\psi_2 - T \dot{\psi}_2}{\psi_1 - T \dot{\psi}_1}, \quad z'_1 = -\lim_{T \rightarrow T_{kp}} \frac{\psi_2 + (T_{kp} - T) \dot{\psi}_2}{\psi_1 + (T_{kp} - T) \dot{\psi}_1}, \quad (16)$$

$$z_2 = z_1 \frac{f_2 - \ln \nu}{f_1 - \ln \nu}, \quad z'_2 = z'_1 \frac{g_2 + \ln \nu}{g_1 + \ln \nu}.$$

Здесь

$$f_{1,2} = \frac{2}{\beta} \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{\dot{\psi}_{1,2}}{\psi_{1,2} - T \dot{\psi}_{1,2}} - \frac{\beta}{2} \ln 2 \Gamma T \right); \quad (17a)$$

$$g_{1,2} = \frac{2}{\beta} \lim_{T \rightarrow T_{kp}} \left( \frac{\dot{\psi}_{1,2}}{\psi_{1,2} + (T_{kp} - T) \dot{\psi}_{1,2}} + \frac{\beta}{2} \ln 2 \Gamma (T_{kp} - T) \right). \quad (17b)$$

После подстановки (16) в (14) и введения обозначений

$$I_0 = \frac{1}{z_1 - z'_1} [z'_1(f_1 - g_2) + z_1(g_1 - f_2)],$$

$$I_1 = \frac{1}{z_1 - z'_1} (z'_1 f_1 g_2 - z_1 f_2 g_1),$$

$$I_2 = \frac{1}{(z_1 - z'_1)^2} (z'_1 f_1 - z_1 f_2) (z_1 g_1 - z'_1 g_2)$$

дисперсионное уравнение (14) переходит в

$$\operatorname{tg}^2 \nu T_{kp} = -Z = -\frac{\ln^2 \nu + I_0 \ln \nu + I_1}{\ln^2 \nu + I_0 \ln \nu + I_2}. \quad (18)$$

При анализе плоского слоя удобно выбрать  $T^* = \frac{1}{2}T_{kp}$ , так как в этом случае  $\psi_1(T)$  и  $\psi_2(T)$  будут просто симметричным и антисимметричным решениями уравнения (10),

$$z_1 = -z'_1, \quad f_1 = -g_1 = f_s, \quad f_2 = -g_2 = f_a,$$

и уравнение (18) принимает вид

$$\operatorname{tg}^2 \nu T_{kp} = -Z = -4 \frac{(f_s - \ln \nu)(f_a - \ln \nu)}{(f_s - f_a - 2 \ln \nu)^2}. \quad (19)$$

Корнями уравнений (14), (18), (19) являются

$$\nu_n = \frac{1}{T_{kp}} \left( 2\pi n \pm \frac{i}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{Z}}{1 - \sqrt{Z}} \right). \quad (20)$$

При  $Z < 0$  все они действительны, а при  $Z > 0$  — комплексны. В соответствии с постановкой исходной задачи при  $Z > 0$  модель электронного облака неустойчива по отношению к рассматриваемому классу возмущений. Из формул (18) — (20) видно, что инкременты колебаний зависят от частоты  $\nu$  и через функции  $\psi_1, \psi_2$  от хода плотности  $\rho(T)$  на всем интервале  $(0, T_{kp})$ .

Задача расчета собственных частот, таким образом, сводится к нахождению двух линейно независимых решений  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , соответствующих выбранному параметру  $\beta$ , вычислению коэффициентов дисперсионного уравнения по формулам (16), (17) и исследованию функции  $Z(\nu)$ . Анализ результатов расчета на ЭВМ показывает, что при  $\beta \ll 0,1$  для коэффициентов  $f_s$  и  $f_a$  справедливы приближенные выражения  $f_s \approx -4/\beta^2$ ,  $f_a \approx 1$ , а для инкрементов колебаний — формула

$$\operatorname{Im} \nu \approx \frac{1}{T_{kp}} \ln \left[ 1 + \frac{\beta}{2} \sqrt{(\ln \nu - 1) \left( 1 + \frac{\beta^2}{4} \ln \nu \right)} + \frac{\beta^2}{4} \ln \nu \right]. \quad (21)$$

Из (21) следует, что

$$\operatorname{Im} \nu \approx \frac{\beta}{2 T_{kp}} \sqrt{\ln \nu - 1} \quad \text{при } \beta^2 \ln \nu \ll 1,$$

$$\operatorname{Im} \nu \approx \frac{1}{T_{kp}} \ln \left( \frac{3}{4} \beta^2 \ln \nu \right) \quad \text{при } \beta^2 \ln \nu \gg 1.$$

При  $1 < \beta \ll 100$  оценочно можно считать

$$\operatorname{Im} \nu \sim \frac{1}{T_{kp}} \ln (\beta^k \ln \nu), \quad \text{где } 2 < k < 3. \quad (22)$$

Из проведенного анализа следует, что двухпоточная модель электронного облака в магнетроне неустойчива для всех  $\nu \gg 1$ , а при  $\nu \rightarrow \infty$  инкремент колебаний растет как  $\frac{1}{T_{kp}} \ln \ln \nu$ . Эти результаты совпадают с полученными в [4]. Для значений же  $\nu$ , ограниченных сверху разумно выбранным пределом, инкремент определяется преи-

мущественно фактором  $\frac{1}{T_{kp}} \ln \beta$ , где  $\beta$  характеризует распределение заряда в облаке в статическом режиме. Таким образом, в области «разумных» значений  $v$  инкремент колебаний в основном зависит от статических характеристик модели электронного облака, и его значения существенно изменяются с изменением параметров облака.

Формально уравнения (18), (19) допускают интервал частот, где  $Z < 0$ . Но он расположен в низкочастотной части спектра, где выводы проведенного анализа не имеют силы.

### 3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Для описания малых радиальных колебаний цилиндрического слоя при  $\gamma = 0$  в работе [5] получены уравнения (П.88), которые совместно с (П.83) образуют замкнутую систему. В общем случае в них нужно ввести дополнительные члены, связанные с отличным от нуля полем на катоде ( $\gamma > 0$ ). После перехода к комплексным амплитудам  $S(\tau)$ ,  $R(\tau)$ ,  $\Phi$  и безразмерным переменным и параметрам

$$x = \frac{r^0}{r_k}, \quad T = \Omega\tau, \quad v = \frac{\omega}{\Omega}, \quad V^0 = \frac{\dot{r}^0}{\Omega r_k}, \quad \gamma_c = \frac{\gamma}{r_k}, \quad x_{kp} = \frac{r_{kp}^0}{r_k}$$

( $r_k$  — радиус катода) полная система уравнений задачи принимает вид\*

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dT^2} - v^2 + f(x, T) \right] S &= 2iv \frac{dR}{dT}, \\ \left[ \frac{d^2}{dT^2} - v^2 + f(x, T) - 2\frac{\rho(T)}{x} \right] R &= 2iv \frac{dS}{dT}; \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dT} &= V^0, \\ \frac{dV^0}{dT} &= \frac{\gamma_c}{x} (1 + \beta T) - \frac{1}{4} \left( x - \frac{1}{x^3} \right), \end{aligned} \quad (23b)$$

где обозначено

$$\rho(T) = \frac{\beta \gamma_0}{2V^0}, \quad f(x, T) = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{3}{x^4} \right) + \frac{\gamma_c}{x^2} (1 + \beta T)$$

(по соображениям, приведенным в [5], член с  $\Phi$  в (23 а) опущен).

Уравнения (23 а) решаются при краевых условиях (П.90) из [5], а уравнения (23 б) при условиях  $x(0) = 1$ ,  $V^0(0) = 0$ .

Анализ цилиндрической задачи будем проводить по схеме, описанной выше. Для этого в (23 а) сделаем замену (5). Тогда уравнения для функций  $A(T)$ ,  $B(T)$ ,  $C(T)$  и  $D(T)$  примут вид

$$\begin{aligned} \dot{A} &= C, \\ \dot{B} &= D, \\ \dot{C} &= -f(x, T)A + \frac{\rho(T)}{x} [A(1 - \cos 2vT) + B \sin 2vT], \end{aligned} \quad (24)$$

\* В формулах (П.91) работы [5] имеется ошибка. Правильным выражением для  $\Omega_\tau$  является  $\Omega_\tau = \Omega_\tau \left( 1 - 2 \frac{\Delta(\tau)}{\Omega_\tau^2} \right)^{1/2}$ .

$$\dot{D} = -f(x, T)B + \frac{\rho(T)}{x} [A \sin 2\nu T + B(1 + \cos 2\nu T)],$$

а уравнение (10) перейдет в

$$\frac{d^2\varphi}{dT^2} + \left(f(x, T) - \frac{\rho(T)}{x}\right)\varphi = 0. \quad (25)$$

Его решения, удовлетворяющие условиям (15), по-прежнему обозначим через  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , а имеющие асимптотическое поведение (12) в окрестности точки  $T = 0$  — через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . При построении же решений  $\varphi'_1$  и  $\varphi'_2$  будем иметь в виду, что в цилиндрическом случае кривая плотности  $\rho(T)$  не обладает симметрией и  $\dot{V}^0(0) \neq |\dot{V}^0(T_{kp})|$ . Поэтому в формулах для «штрихованных» решений, а также в (17б), кроме примененных ранее подстановок, нужно еще заменить  $\beta$  на  $\beta' = -\beta \frac{V^0(0)}{x_{kp} \dot{V}^0(T_{kp})}$ .

С учетом этих замечаний можно записать для  $\nu \gg \max(f, \beta)$  приближенные решения уравнений (23б), (24) и, произведя сшивание при  $T = T^*$ , получить дисперсионное уравнение вида (18).

Для нескольких значений  $\beta$  входящие в него коэффициенты  $I_0$ ,  $I_1$  и  $I_2$  были рассчитаны с помощью ЭВМ. Расчеты показали, что  $I_1 < 0$  для всех  $\beta$ , а для  $\beta < 1$   $I_2 > I_0 > 0$ , и знаменатель в правой части уравнения (18) положителен. (При  $1 < \beta < 10$  он меняет знак в низкочастотной части спектра.) Поэтому формула

$$\nu_{rp} = \exp \frac{I_0}{2} \left( \sqrt{1 - 4 \frac{I_1}{I_0}} - 1 \right)$$

определяет граничную частоту  $\nu_{rp}$ , разделяющую в области  $\nu \gg 1$  спектр собственных значений частот на действительную ( $\nu < \nu_{rp}$ ) и комплексную ( $\nu > \nu_{rp}$ ) части. Она зависит от двух параметров слоя, в качестве которых (для удобства сравнения с экспериментом) здесь выбраны  $\beta$  и параметр цилиндричности  $x_{kp}$ .

На рис. 1 представлена зависимость  $\nu_{rp}(x_{kp})$  для нескольких значений  $\beta$ . При  $\nu \geq 100 \max(\gamma_0, \beta)$  участок кривой нанесен сплошной линией, а ее «устойчивая» сторона ( $\nu < \nu_{rp}$ ) отмечена штриховкой. Пунктирная линия продолжает сплошную до малых значений  $\nu$ . Из рисунка видно, что с увеличением  $x_{kp}$ , а также уменьшением  $\beta$  значения  $\nu_{rp}$  возрастают и «входят» в высокочастотную область. На плоскости параметров  $\beta, x_{kp}$  можно указать область, в которой  $\nu_{rp}$  превышает заранее заданное значение. Это значение, по крайней мере, для  $\beta < 1$ , может быть выбрано сколь угодно большим. Поэтому при

умеренных  $\beta$  введение кривизны междуэлектродного пространства (цилиндричности) приводит к уменьшению инкрементов колебаний и даже устойчивости рассматриваемого слоя.

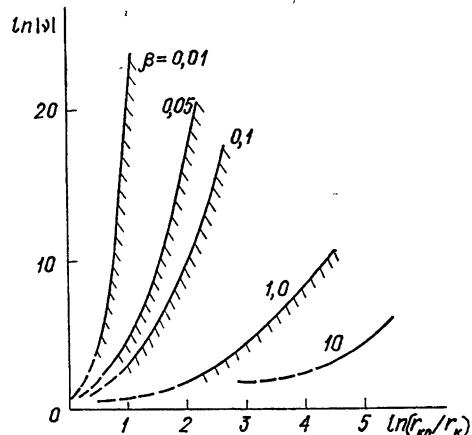


Рис. 1.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате анализа задачи о малых возмущениях двухпоточной модели облака в постановке, аналогичной [4], получены следующие основные результаты.

1. Уточнен вид дисперсионного уравнения. Указано на зависимость его коэффициентов от хода функции  $\rho(T)$  на всем интервале  $(0, T_{kp})$  (а не только на участках с повышенной плотностью).

2. Рассчитаны дисперсионные характеристики плоского облака. Для инкрементов колебаний в облаке получены формулы (21), (22), из которых следует, что при  $\nu \rightarrow \infty$  инкремент растет как  $\frac{1}{T_{kp}} \ln \ln \nu$ , т. е. неограниченно. В то же время уже умеренным значениям  $\ln \nu = 8 \div 12$  соответствует оптический участок спектра, вряд ли ответственный за неустойчивости в облаке. Для «разумных» же значений  $\nu$  инкременты ограничены, и их величина определяется в первую очередь значением параметра  $\beta$ .

3. Выяснено, что введение кривизны пространства катод—анод (цилиндричности слоя) уменьшает инкременты и в широком диапазоне изменения  $\nu$  и  $\beta$  может привести к устойчивости. Асимптотическая оценка  $\ln \nu \sim \frac{1}{T_{kp}} \ln \ln \nu$  при  $\nu \rightarrow \infty$  для цилиндрического слоя сохраняется.

Естественно, что рассмотренная выше идеализированная модель электронного слоя не учитывает ряд физических факторов, которые могут оказать существенное влияние на электронно-волновые процессы в реальных приборах. Так, с ростом частоты число электронов, содержащееся в кубе со стороной, равной замедленной длине волны, уменьшается. Для оптических частот оно становится слишком малым и возбуждаемые ими поля теряют одномерную структуру. Следовательно, дискретность электрических зарядов ограничивает сверху диапазон допустимых относительных частот.

У краев облака существенную роль играет разброс скоростей электронов. Он оказывает определяющее влияние на обмен электронами между облаком и катодом. Его наличие приводит к разбросу периодов обращения электронов. Из-за него теряет силу (у краев) понятие средней скорости потока. С учетом разброса скоростей краевая плотность становится конечной, ход кривой  $\rho(T)$  в целом деформируется и перестает укладываться в однопараметрическое семейство (4). Однако для последовательного учета разброса скоростей еще нет адекватной методики анализа. Даже расчет статических состояний моделей с разбросом скоростей проведен (в известной нам литературе) лишь для катодных плотностей заряда, меньших бриллюэновской [8, 9].

Оба эти примера показывают, что полученные здесь результаты и выводы из них имеют ограниченный характер. Применяя их к реальным приборам, не следует апеллировать к слишком большим частотам, плотностям заряда и т. д. В то же время последовательный учет дополнительных факторов требует существенного выхода за рамки модели, анализируемой в настоящей статье.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

После применения к (П.39) замен (П.55) и (П.56) в работе [5] получена система (П.57). Она справедлива для каждого частного решения, поэтому знаки суммирования и индексы  $j$  в ней можно опустить. В соответствии с рекомендациями метода ВКБ функции  $\nu(\tau)$ ,  $R(\tau)$  и  $S(\tau)$  представим в виде формальных рядов

$$\nu(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k(\tau) \omega^{1-k}, \quad R(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\tau) \omega^{-k}, \quad S(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\tau) \omega^{-k}$$

(использованы обозначения из [5]), подставим в (П.57) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями  $\omega$ .

При  $\omega^2$  получим

$$\begin{aligned} (\nu_0^2 + 1)R_0 + 2\nu_0S_0 &= 0, \\ 2\nu_0R_0 + (\nu_0^2 + 1)S_0 &= 0. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что по крайней мере одна из функций  $S_0(\tau)$  либо  $R_0(\tau)$  отлична от нуля. Тогда из (П.1) следует  $\nu_0 = \pm 1$ ,  $R_0 = -\nu_0 S_0$ .

Уравнения при  $\omega^1$  определяют лишь связь  $S_1 = -\nu_0 R_1$ . Никакой зависимости от  $\nu_1$  (в силу особых свойств системы (П.57) из [5]) они не содержат. Соотношения для определения  $\nu_1(\tau)$  получаются лишь в уравнениях следующего приближения.

При  $\omega^0$  имеем

$$\begin{aligned} 2(R_2 + \nu_0 S_2) + (i\nu_1 + \nu_1^2 - \Omega_v^2)R_0 + 2i\nu_1\dot{R}_0 - \ddot{R}_0 &= 0, \\ 2(\nu_0 R_2 + S_2) + (i\nu_1 + \nu_1^2 - \Omega^2)S_0 + 2i\nu_1\dot{S}_0 - \ddot{S}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на  $\nu_0$ , заменим  $\nu_0 S_0$  на  $(-R_0)$  и вычтем из первого. Получим

$$R_0 - 2i\nu_1\dot{R}_0 - \left(i\nu_1 + \nu_1^2 - \frac{\Omega^2 + \Omega_v^2}{2}\right)R_0 = 0$$

— дифференциальное уравнение относительно двух функций  $R_0(\tau)$  и  $\nu_1(\tau)$  ( $S_0 = -\nu_0 R_0$ ). Такая неопределенность является следствием замены, взятой из [5] (см. (П.55) в [5]), которая ввела в рассмотрение три функции вместо двух. Поэтому одну из функций можно задавать произвольным образом:

А) Если предположить, что  $\nu_1(\tau) \equiv 0$ , для функции  $R_0$  получится уравнение  $\ddot{R}_0 + \frac{1}{2}(\Omega^2 + \Omega_v^2)R = 0$ , лишь обозначениями отличающееся от (10).

Б) Если, следуя [5], предположить квазистоянство амплитуд  $R$  и  $S$  (т. е.  $R_0 = \text{const}$ ), то для  $\nu_1(\tau)$  получается уравнение Риккати

$$i\nu_1 + \nu_1^2 = \frac{\Omega^2 + \Omega_v^2}{2}. \tag{П.2}$$

Формула (П.51), предложенная в качестве первого приближения в [5], получается из (П.2), если в (П.2) отбросить член  $i\nu_1$ . Достаточным условием этого является неравенство

$$H = \left| \frac{\Omega_v^2}{(\Omega^2 + \Omega_v^2)^{3/2}} \right| \ll 1,$$

гораздо более жесткое, чем (П.58) в [5]. Расчеты показывают, что при  $\rho(T) \geqslant 0,6$  величина  $H > 1$ . Поэтому использование формулы (П.51) из [5] при  $\rho > 0,6$  необоснованно.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Обозначим через  $\Phi_1(T)$  и  $\Phi_2(T)$  линейно независимые решения уравнения (10), существенно различающиеся асимптотическим поведением при  $T \rightarrow 0$ , и запишем фундаментальную матрицу решений системы (9) и обратную к ней:

$$\hat{\Phi} = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\Phi}_1 & \dot{\Phi}_2 \\ \dot{\Phi}_1 & \dot{\Phi}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Phi}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Phi_2 & 0 & -\Phi_2 & 0 \\ -\dot{\Phi}_1 & 0 & \Phi_1 & 0 \\ 0 & \dot{\Phi}_2 & 0 & -\Phi_2 \\ 0 & -\dot{\Phi}_1 & 0 & \Phi_1 \end{vmatrix},$$

где  $\Delta = \Phi_1 \dot{\Phi}_2 - \Phi_2 \dot{\Phi}_1 = \text{const}$ . Кроме того, введем обозначения для матриц и векторов

$$\hat{L} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \rho - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho - 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{N} = \rho(T) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos 2\nu T & \sin 2\nu T & 0 & 0 \\ \sin 2\nu T & \cos 2\nu T & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{A}(T) = \begin{vmatrix} A(T) \\ B(T) \\ C(T) \\ D(T) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}.$$

Матрица  $\hat{\Phi}$ , очевидно, удовлетворяет уравнению  $\dot{\hat{\Phi}} - \hat{L}\hat{\Phi} = 0$ , а система (9) имеет вид  $\dot{\hat{A}} - \hat{L}\hat{A} = \hat{N}\hat{A}$ . С помощью метода неопределенных коэффициентов Лагранжа последнюю можно свести к эквивалентному интегральному уравнению

$$\mathbf{A}(T) = \hat{\Phi}(T) \left[ \int_{T^0}^T \hat{\Phi}^{-1}(s) \hat{N}(s) \mathbf{A}(s) ds + \mathbf{C} \right], \quad (\Pi.3)$$

где  $T^0 \gg 1/\nu$  и

$$\hat{\Phi}^{-1}(s) \hat{N}(s) = \frac{\rho(s)}{\Delta} \begin{vmatrix} \Phi_2 \cos 2\nu s & -\Phi_2 \sin 2\nu s & 0 & 0 \\ -\Phi_1 \cos 2\nu s & \Phi_1 \sin 2\nu s & 0 & 0 \\ -\Phi_2 \sin 2\nu s & -\Phi_2 \cos 2\nu s & 0 & 0 \\ \Phi_1 \sin 2\nu s & \Phi_1 \cos 2\nu s & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (\Pi.4)$$

Решения уравнения (П.3) будем искать методом итераций, взяв в качестве начального приближения  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(0)$ . Тогда

$$\mathbf{A}(T) = \mathbf{A}_1(T) + [\mathbf{A}_2(T) - \mathbf{A}_1(T)] + [\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2(T)] + \dots,$$

$$\mathbf{A}_1 = \hat{\Phi}(T) \left( \int_{T^0}^T \hat{\Phi}^{-1} \hat{N} \mathbf{A}_0 ds + \mathbf{C} \right),$$

$$\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 = \hat{\Phi}(T) \int_{T^0}^T \hat{\Phi}^{-1} \hat{N} (\mathbf{A}_1(s) - \mathbf{A}_0) ds \quad \text{и т.д.}$$

В результате в первом приближении для компонентов вектора будем иметь

$$\begin{aligned} A_1(T) &= A_0 \left[ \Phi_1 \int_{T^0}^T \rho \Phi_2 \cos 2\nu s ds - \Phi_2 \int_{T^0}^T \rho \Phi_1 \cos 2\nu s ds \right] + a\Phi_1 + b\Phi_2, \\ B_1(T) &= A_0 \left[ \Phi_2 \int_{T^0}^T \rho \Phi_1 \sin 2\nu s ds - \Phi_1 \int_{T^0}^T \rho \Phi_2 \sin 2\nu s ds \right] + \\ &\quad + c\Phi_1 + d\Phi_2, \\ C_1(T) &= A_0 \left[ \dot{\Phi}_1 \int_{T^0}^T \rho \Phi_2 \cos 2\nu s ds - \dot{\Phi}_2 \int_{T^0}^T \rho \Phi_1 \cos 2\nu s ds \right] + a\dot{\Phi}_1 + b\dot{\Phi}_2, \\ D_1(T) &= A_0 \left[ \dot{\Phi}_2 \int_{T^0}^T \rho \Phi_1 \sin 2\nu s ds - \dot{\Phi}_1 \int_{T^0}^T \rho \Phi_2 \sin 2\nu s ds \right] + c\dot{\Phi}_1 + d\dot{\Phi}_2. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Для неполного пространственного заряда, когда в окрестности точки  $T = 0$  можно принять  $\rho(T) = \beta/2T$ , решения  $\Phi_1(T)$  и  $\Phi_2(T)$  имеют вид

$$\Phi_1(T) = T + \frac{\beta}{4} T^2 + \dots, \quad \Phi_2(T) = 1 + \frac{\beta}{2} T \ln T + \dots$$

Нетрудно поверить, что в этом случае

$$\begin{aligned} \int_{T^0}^T \rho \Phi_2 \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\nu s \\ \cos 2\nu s \end{array} \right\} ds &= -\frac{\beta}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 2\nu T - \frac{\pi}{2} \\ \text{Ci } 2\nu T \end{array} \right\} + O(1/\nu, \beta/\nu), \\ \int_{T^0}^T \rho \Phi_1 \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\nu s \\ \cos 2\nu s \end{array} \right\} ds &\sim O(1/\nu, \beta/\nu). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Поэтому для удовлетворения краевым условиям (10) необходимо в (П.5) положить

$$a = A_0 \frac{\beta}{2} (\ln 2\nu T - 1), \quad b = A_0, \quad c = D_0 + A_0 \frac{\beta\pi}{4}, \quad d = 0. \quad (\text{П.7})$$

Если теперь подставить (П.7) в (П.5), учесть (П.6) и ввести обозначения

$$\varphi_1(T) = \Phi_1(T), \quad \varphi_2(T) = \Phi_2 + \Phi_1 \frac{\beta}{2} (\ln 2\nu T - 1), \quad D^0 = D_0 + A_0 \frac{\beta\pi}{4},$$

то  $\varphi_1(T)$  и  $\varphi_2(T)$  совпадут с (12), а (П.5) перейдут в (11).

Для вычисления  $A_2 - A_1$  нужно из  $A_1$  вычесть  $A_0$ , к полученному вектору применить матрицу (П.4) и выполнить интегрирование. Оценки показывают, что компоненты разности  $A_2 - A_1$  имеют порядок не выше  $O(1/\nu, \beta/\nu)$ . Другими словами, дополнительные к решению (11) члены при  $\nu \gg \max(1, \beta)$  можно не учитывать.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. Банеман, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, т. 1, ИЛ, М., 1961, стр. 181.
2. Г. Д. Симс, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, т. 1, ИЛ, М., 1961, стр. 157.
3. Г. Хок, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, т. 1, ИЛ, М., 1961, стр. 204.

4. Б. Б. Кадомцев, ЖТФ, 29, № 7, 833 (1959).
5. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973, стр. 255.
6. Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 6, 1217 (1964).
7. N. C. Nedderman, J. Appl. Phys., 26, № 12, 1420 (1957).
8. P. A. Lindsay, J. Electr. Contr., 8, 177 (1960); 9, 241 (1960).
9. В. И. Вигдорчик, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1882 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
23 октября 1975 г.

## ON THE PROBLEM OF TWO-STREAM STATE STABILITY IN A MAGNETRON

*V. E. Belov, L. V. Rodygin*

The plane and cylindrical models of a two-stream electron cloud with unbounded boundary densities charge in a magnetron diode are considered. Their stability with respect to transverse (radial) perturbations is investigated. The solution shows that the introduction of cylindricity (curvature of interaction space) decreases the oscillation increments and may lead practically even to the electron cloud stability. The results obtained specify the conclusions of papers [4, 5].

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 535.8 : 535.214.4

**ОБ ОГРАНИЧЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ В МОДУЛЯЦИОННОМ  
РАДИОМЕТРЕ**

В. И. Данилов

Особенности использования амплитудных ограничителей по максимуму при приеме шумовых сигналов, значительно превосходящих уровень собственных шумов измерителя, рассмотрены в [1, 2]. Применение ограничителей для подавления импульсных помех может оказаться полезным и при приеме слабых шумовых сигналов. В частности, в [3] для этой цели используется ограничение в видеотракте радиометра.

Достаточно мощные импульсные помехи могут вызывать специфические искажения сигнала, обусловленные инерционной нелинейностью высокочастотного тракта радиометра. В ряде случаев при этом возможно уменьшение коэффициента передачи перегруженого помехой каскада и даже его запирание, что ведет к весьма большим ошибкам в измерениях. Ослабление указанных эффектов возможно путем расширения динамического диапазона усилителей, однако более целесообразным представляется включение безынерционных ограничителей в ВЧ тракте радиометра.

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с выбором уровня ограничения при использовании таких ограничителей. Здесь будут также оценены возможные ошибки измерений в зависимости от параметров помехи и от порога ограничения. Предполагается, что ограничитель включен на входе квадратичного детектора. Характеристика нелинейной системы ограничитель—детектор может быть представлена в виде:

$$u_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}}) = \begin{cases} u_{\text{вх}}^2 & (|u_{\text{вх}}| < V) \\ V^2 & (|u_{\text{вх}}| \geq V) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $u_{\text{вых}} = u_{\text{вых}}(t)$  — напряжение на выходе детектора,  $u_{\text{вх}} = u_{\text{вх}}(t)$  — напряжение на входе ограничителя,  $V$  — порог ограничения.

Все составляющие процесса на входе ограничителя — собственные шумы радиометра  $u_0(t)$ , полезный сигнал  $u_c(t)$ , шумы антенны  $u_A(t)$  и согласованной нагрузки,  $u_a(t)$  и помеха  $u_p(t)$  — попарно независимы.

Шумовые составляющие представляют собой нормальные процессы с постоянными на интервале времени наблюдения дисперсиями  $\sigma_0^2$ ,  $\sigma_c^2$ ,  $\sigma_A^2$  и  $\sigma_a^2$  и нормированной корреляционной функцией вида  $\rho(\tau) = \exp(-\alpha\tau^2)$  ( $\omega_0$  — центральная частота усилителя промежуточной частоты). Модуляция сигнала осуществляется меандром с периодом  $T_m$ , а демодуляция — его первой гармоникой. Помеха  $u_p(t)$  на входе ограничителя представляет собой последовательность прямоугольных радиоимпульсов с амплитудой  $U_m$  и средним коэффициентом заполнения  $b$ . Частота повторения импульсов предполагается не кратной частоте модуляции сигнала. Вычислительные трудности, возникающие при анализе процессов в инерционных нелинейных цепях, известны [4]. Ограничимся поэтому упрощенной моделью расчета. А именно, величину выходного сигнала радиометра будем определять как разность постоянных составляющих процесса на выходе детектора, соответствующих подключению ко входу усилителя антennы и согласованной нагрузки.

Такая модель представляется приемлемой, так как обычно  $\alpha^{-\frac{1}{2}} \ll T_m \ll \Delta\omega^{-1}$  ( $\Delta\omega$  — ширина полосы пропускания фильтра звуковых частот). Найдем математическое ожидание оценки интенсивности полезного сигнала:

$$m_1 \left\{ \hat{\sigma}_c^2 \right\} = K \left\{ (1 - d) \int_0^\infty f(x) w(x, \sigma_c^2) dx + d \int_0^\infty f(x) w_p(x) dx - \int_0^\infty f(x) w(x, \sigma_A^2) dx \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $K$  — нормирующий коэффициент, зависящий от параметров демодулятора и от уровня ограничения,  $w(x, \sigma_e^2)$  и  $w(x, \sigma_\lambda^2)$  — распределения плотностей вероятностей мгновенных значений нормальных процессов с дисперсиями  $\sigma_e^2 = \sigma_0^2 + \sigma_A^2 + \sigma_c^2$  и  $\sigma_\lambda^2 = \sigma_0^2 + \sigma_s^2$  соответственно,

$$w_n(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi} \sigma_e} \int_{-U_m}^{U_m} (U_m^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{(x-s)^2}{2\sigma_e^2} \right] ds.$$

В отсутствие помех с учетом обычных для радиометра условий  $\sigma_c^2 \ll \sigma_0^2$ ,  $\sigma_A^2 \ll \sigma_0^2$  и при использовании квазинулевого метода наблюдений ( $\sigma_s^2 = \sigma_0^2$ ) (2) приводится к виду

$$m_1 \left\{ \frac{\Delta \sigma_c^2}{\sigma_c^2} \right\} = K \left[ \frac{1}{2} \Phi \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \right) - \frac{v}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{v^2}{2} \right) \right] \sigma_c^2, \quad (3)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad v = \frac{V}{\sigma_\lambda}.$$

Очевидно, что для получения несмещенной оценки  $\sigma_c^2$  следует выбирать

$$K = \left[ \frac{1}{2} \Phi \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \right) - \frac{v}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{v^2}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (4)$$

Кроме того, из (3) видно, что в процессе измерений необходимо поддерживать  $v = \frac{V}{\sigma_\lambda} = \text{const}$ , т. е. выполнить ограничитель следующим.

Полагая величину порога  $v$  постоянной на интервале времени наблюдения, с учетом (3) и (4) из (2) найдем математическое ожидание смещения оценки, обусловленного помехами:

$$\Delta \sigma_c^2 = m_1 \left\{ \frac{\Delta \sigma_c^2}{\sigma_c^2} \right\} - \sigma_c^2 = d \sigma_\lambda^2 H(a, v), \quad (5)$$

где

$$a = \frac{U_m}{\sigma_\lambda}, \quad H(a, v) = K [U_2(a, v) - U_1(v)], \quad (6)$$

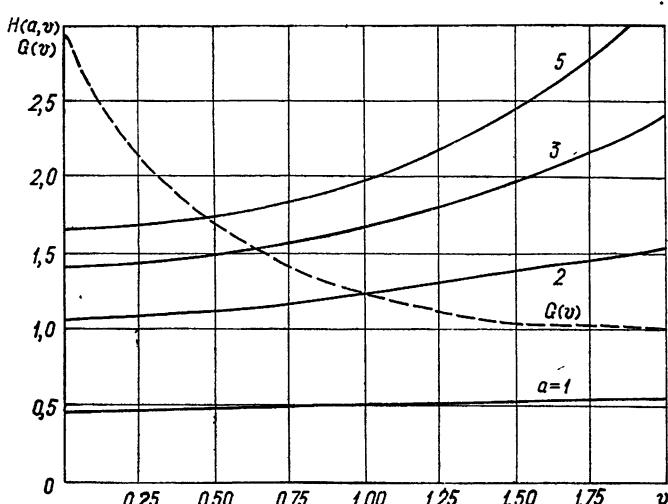


Рис. 1. Характеристики смещения ( $H(a, v)$ ) и дисперсии ( $G(v)$ ) оценки в зависимости от относительного порога ограничения.

$$U_2(a, v) = \sigma_{\lambda}^{-2} \int_0^v (x^2 - V^2) w_{\Pi}(x) dx (\sigma_c^2 = 0), \quad U_1(v) = U_2(0, v).$$

Зависимости  $H(a, v)$  для  $a = 1, 2, 3, 5$  представлена на рис. 1.

Оценим теперь величину дисперсии оценки интенсивности полезного сигнала  $D(\sigma_c^2)$  в отсутствие помех для произвольного порога ограничения. Воспользуемся для этой цели методом контурных интегралов [4]. Полагая форму частотных характеристик фильтра УПТ и фильтра звуковых частот прямоугольной, получим

$$D(\sigma_c^2) = \sqrt{\frac{\pi^3}{8}} \frac{\Delta\Omega}{\sqrt{a}} \sigma_{\lambda}^4 G(v), \quad (7)$$

где

$$G(v) = 1 + \frac{K^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-v^2)}{2^{4n} \sqrt{n+1} [(n+1)!]^2} \left\{ H_{2n-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{v}{\sqrt{2}} H_{2n}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \right\}^2, \quad (8)$$

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ ,  $\Delta\Omega$  — ширина полосы пропускания фильтра УПТ. Зависимость  $G(v)$  показана на рис. 1 пунктиром. Множитель в (7) при  $G(v)$  характеризует величину  $D(\sigma_c^2)$  для радиометра без ограничителя.

Проведенный анализ показывает, что смещение оценки обратно пропорционально скважности импульсов помехи и уменьшается с понижением порога ограничения, стремясь к величине

$$\Delta\sigma_c^2 \min = \lim_{v \rightarrow 0} \Delta\sigma_c^2 = 2d\sigma_{\lambda}^2 \left[ 1 - e^{-\frac{a^2}{4}} I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) \right]. \quad (9)$$

Дисперсия оценки, напротив, с понижением порога возрастает, и, следовательно, для уменьшения флуктуаций выходного сигнала в отсутствие помех, необходимо повышать порог ограничения. Очевидно, при известных параметрах  $d$  и  $a$  можно было бы оптимизировать  $v$ . В общем же случае представляется целесообразным устанавливать  $v \approx 1$ . При этом значении порога  $\Delta\sigma_c^2$  незначительно превосходит  $\Delta\sigma_c^2 \min$  в достаточно широком диапазоне  $a$  ( $a < 5$ ), а стандартное отклонение флуктуаций выходного сигнала увеличивается лишь на 10% по сравнению с таковым для радиометра без ограничителя и в отсутствие помех. В ряде случаев (при  $a > 5$ ), исходя из потребностей практики, можно применять еще более глубокое ограничение ( $v < 1$ ), что приведет к дальнейшему уменьшению смещения оценки, однако следует иметь в виду, что с понижением порога повышается (в соответствии с (7)) уровень флуктуаций выходного сигнала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Горбачев, В. И. Данилов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 4, 730 (1966).
2. А. А. Горбачев, В. И. Данилов, Радиотехника, 23, № 7, 48 (1968).
3. В. А. Прозоров, Изв. ГАО в Пулкове, № 188, 180 (1972).
4. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
30 июля 1975 г.