УДК 538.56

РЕКУРРЕНТНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ЧЕРЕЗ КУМУЛЯНТЫ

А. Б. Шмелев

Общие формулы, связывающие моменты и кумулянты многомерных случайных величин, довольно сложны [1] и не всегда удобны для практического использования Более удобен способ разложения моментов по кумулянтам с помощью выведенной в [2] формулы, связывающей среднее значение смешанных производных от произвольной функции случайных величин с производными по кумулянтам от среднего значения этой функции

В данном сообщении формулируется рекуррентное правило, позволяющее механически выписывать разложение по кумулянтам любого смешанного момента совокупности случайных величин, если такое разложение известно для момента на единицу меньшего порядка. В основе вывода лежит методика усреднения произведения функционалов от случайных процессов, развитая в работе [3]

Пользуясь этой методикой, усредним произведение $e^{iuz}f(z)$, где $z=(z_1, \ldots, z_n)$ — рассматриваемый случайный вектор, а f — некоторая произвольная функция. Сдвигая аргумент у f на произвольный детерминированный вектор η, имеем

$$\begin{aligned}\langle e^{iuz}f(z)\rangle &= \langle e^{iuz}f(z+\eta)\rangle\big|_{\eta=0} = \left\langle e^{iuz+z\frac{d}{d\eta}}\right\rangle f(\eta)\big|_{\eta=0} = \\ &= \Phi\left[u+\frac{d}{d(i\eta)}\right]f(\eta)\Big|_{\eta=0},\end{aligned} \tag{1}$$

где $\Phi(u)$ — характеристическая функция случайного вектора z.

Умножая и деля правую часть на $\Phi\left[\frac{d}{d(i\eta)}\right]$ и замечая, что этот оператор в точке $\eta=0$ является оператором статистического усреднения, по аналогии с [3] находим

$$\langle e^{iuz}f(z)\rangle = \left\langle \frac{\Phi\left[u+\frac{d}{d(iz)}\right]}{\Phi\left[\frac{d}{d(iz)}\right]}f(z)\right\rangle. \tag{2}$$

Пользуясь этим выражением, получаем

$$\begin{aligned}\langle z_1^{j_1}\ldots z_n^{j_n}f(z)\rangle &= \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}}{\partial(iu_1)^{j_1}\ldots\partial(iu_n)^{j_n}}\langle e^{iuz}f(z)\rangle\big|_{u=0} = \\ &= \left\langle Q_{j_1\ldots j_n}\left(\frac{d}{dz}\right)f(z)\right\rangle,\end{aligned} \tag{3}$$

где оператор Q имеет вид

$$Q_{j_1\ldots j_n}(u) = \frac{1}{\Phi(u)}\,\frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}\Phi(u)}{\partial(iu_1)^{j_1}\ldots\partial(iu_n)^{j_n}}. \tag{4}$$

Замечая, что $Q_{j_1\ldots j_k+1\ldots j_n}(u) = \frac{1}{\Phi(u)}\frac{\partial}{\partial(iu_k)}[Q_{j_1\ldots j_n}(u)\Phi(u)]$, находим рекуррентную формулу для этого оператора:

$$Q_{j_1\ldots j_k+1\ldots j_n}(u) = \frac{\partial Q_{j_1\ldots j_n}(u)}{\partial(iu_k)} + Q_{j_1\ldots j_n}(u)\frac{\partial\theta(u)}{\partial(iu_k)}, \tag{5}$$

где

$$\theta(u) = \ln\Phi(u) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\varkappa_m^{l_1\ldots l_m}(iu_{l_1})\ldots(iu_{l_m}). \tag{6}$$

Через $\varkappa_m^{l_1\ldots l_m}$ здесь обозначен кумулянт порядка m от случайных величин $z_{l_1},\ldots,z_{l_m}$, а по индексам $l_1, \ldots, l_m$ подразумевается суммирование от 1 до n.

Полагая теперь в (3) $f(z)\equiv 1$, получаем

$$\langle z_1^{j_1} \ldots z_n^{j_n} \rangle = Q_{j_1 \ldots j_n}(0). \tag{7}$$

Это выражение, по сути дела, дает разложение смешанного момента в левой части по кумулянтам, поскольку, согласно (5) и (6), оператор $Q_{j_1 \ldots j_n}(u)$ содержит различные смешанные производные от $\theta(u)$, значение которых в точке $u = 0$ равно соответствующим кумулянтам:

$$\left.\frac{\partial^p \theta(u)}{\partial(iu_{l_1}) \ldots \partial(iu_{l_p})}\right|_{u=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left.\varkappa_{m+p}^{l_1 \ldots l_m l_1 \ldots l_p} (iu_{j_1}) \ldots (iu_{j_m})\right|_{u=0} = \varkappa_p^{l_1 \ldots l_p}. \tag{8}$$

Допустим, что разложение (7) нам известно, Тогда для момента на единицу большего порядка, согласно (5) и (8), будем иметь

$$\langle z_1^{j_1} \ldots z_k^{j_k+1} \ldots z_n^{j_n} \rangle = \left.\frac{\partial Q_{j_1 \ldots j_n}(u)}{\partial(iu_k)}\right|_{u=0} + Q_{j_1 \ldots j_n}(0)\, \varkappa_1^k. \tag{9}$$

Дифференцирование по (iu_k) в точке $u = 0$ производных типа (8), из которых состоит оператор Q, формально сводится к увеличению на единицу нижнего индекса кумулянта и к добавлению верхнего индекса k, т. е. эта операция приводит к замене $\varkappa_p^{l_1 \ldots l_p}$ на $\varkappa_{p+1}^{l_1 \ldots l_p k}$ в (8).

Это позволяет сформулировать следующее рекуррентное правило вычисления моментов через кумулянты.

Пусть известно разложение момента $\langle z_1^{j_1} \ldots z_k^{j_k} \ldots z_n^{j_n} \rangle$ по кумулянтам. Для того, чтобы найти аналогичное разложение для момента $\langle z_1^{j_1} \ldots z_k^{j_k+1} \ldots z_n^{j_n} \rangle$, имеющего на единицу больший порядок, нужно.

1) в разложении $\langle z_1^{j_1} \ldots z_k^{j_k} \ldots z_n^{j_n} \rangle$ увеличить на единицу нижний индекс кумулянтов, добавив наверх индекс k. Эту операцию следует проводить по правилам дифференцирования;

2) прибавить к полученному выражению произведение $\varkappa_1^k \langle z_1^{j_1} \ldots z_k^{j_k} \ldots z_n^{j_n} \rangle$.

Пользуясь этим правилом, последовательно находим:

$$\begin{aligned}
\langle z_1 z_2 \rangle &= \varkappa_2^{12} + \varkappa_1^1 \varkappa_1^2, \\
\langle z_1 z_2 z_3 \rangle &= \varkappa_3^{123} + \varkappa_1^1 \varkappa_2^{23} + \varkappa_1^2 \varkappa_2^{13} + \varkappa_1^3 \varkappa_2^{12} + \varkappa_1^1 \varkappa_1^2 \varkappa_1^3, \\
\langle z_1 z_2^2 \rangle &= \varkappa_3^{122} + \varkappa_1^1 \varkappa_2^{22} + 2\varkappa_1^2 \varkappa_2^{12} + \varkappa_1^1 (\varkappa_1^2)^2 \ \text{и т. д.}
\end{aligned} \tag{10}$$

Если заранее известно, что какие-либо кумулянты (например, средние значения) равны нулю, то полагать их равными нулю можно лишь по завершении описанной процедуры вычислений, но не на промежуточных этапах.

Автор приносит благодарность С. М. Рытову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Леонов, А Н Ширяев, Теория вероятностей и ее применение, **4**, № 3, 342 (1959).
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 8, 1287 (1973).
3. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, **65**, вып. 1 (7), 54 (1973).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
13 апреля 1976 г.