4. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Ю. А. Игнатьев, Г. П Комраков, Письма в ЖЭТФ, 22, 497 (1975).
5. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Ю. А. Игнатьев, Г. П. Комраков, Изв. высш уч зав — Радиофизика, 19, № 7, 1084 (1976).

Научно-исследовательский радиофизический институт — Поступила в редакцию 21 мая 1976 г.

Примечание при корректуре. На оси времен рис. 1 вместо 14.35 следует читать 14.45.

УДК 533.922

О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, ВЫХОДЯЩИХ ИЗ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Н. Г. Денисов

При исследовании распространения электромагнитных волн в плавно неоднородной плазме широко используют так называемое приближение геометрической оптики, которое является главной частью асимптотического ряда, получаемого методом ВКБ. Пределы применимости этого приближения достаточно полно исследованы (см., например, [1]) и указывают на то, что его нарушение связано с наличием в неоднородном слое «точек отражения» или «точек пересечения».

Здесь мы более детально рассмотрим лишь случай, когда волна проходит «точку пересечения», лежащую на границе плазмы с вакуумом, где показатели преломления нормальных волн $n_1(z)$ и $n_2(z)$ становятся равными друг другу. Необходимость дополнительного рассмотрения связана с тем, что, как показано в ряде математических работ [2, 3], метод ВКБ в окрестности этой точки неприменим, а асимптотический ряд, начиная с некоторого члена, содержит дробные степени малого параметра $1/k_0$ ($k_0 = \omega/c$ — волновое число). Последнее связано с наличием «взаимодействия» мод в области «пересечения», учет которого приводит к некоторым изменениям условий применимости приближения геометрической оптики.

Уравнения поля плоской волны при ее нормальном падении на слой магнитоактивной плазмы без поглощения можно записать в виде двух связанных уравнений второго порядка [1, 4]:

$$\begin{aligned} F_1'' + F_1\left[k_0^2 n_1^2(z) + \frac{\psi^2}{4}\right] &= -\psi F_2' - \frac{1}{2}\psi' F_2, \\ F_2'' + F_2\left[k_0^2 n_2^2(z) + \frac{\psi^2}{4}\right] &= -\psi F_1' - \frac{1}{2}\psi' F_1 \end{aligned} \tag{1}$$

(штрихи означают производные по координате z). Эти уравнения записаны для некоторых комбинаций компонент электрического поля E_x и E_y $(E \sim e^{i\omega t})$:

$$F_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{q}}(E_x \mp qE_y); \tag{2}$$

$$\psi = \frac{q'}{q}, \quad q = \sqrt{\frac{1 - i\eta}{1 + i\eta}}, \quad \eta = \frac{1 - v}{\nu_c}, \quad \nu_c = \frac{u_T}{2\sqrt{u_L}} \tag{3}$$

и введены стандартные обозначения (см. [1])

$$v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}, \quad u_T = u\sin^2\alpha, \quad u_L = u\cos^2\alpha \tag{4}$$

(ω_0 — плазменная частота, ω_H — гирочастота электронов, ω — частота волны и α — угол между направлением распространения волны (осью z) и направлением внешнего магнитного поля H_0). Система уравнений (1) в отличие от обычно принятой (см. [1]) записана для компонент поля E в системе координат, в которой $H_{0x} = H_{0y}$. Для плавного слоя параметр связи ψ мал и система (1) распадается на два независимых уравнения В этом случае приближение геометрической оптики дает решения этих уравнений, которые определяются локальными значениями показателей преломления $n_{1,2}(z)$ и коэффициентов поляризации $\pm q$, а условия их применимости не содержат ограничений на разность $n_2 - n_1$. «Взаимодействие» мод появляется лишь при учете параметра связи ψ, и слабость этого «взаимодействия» определяет условия применимости геометрической оптики.

Эффект взаимодействия можно оценить, рассматривая уравнения для медленно меняющихся амплитуд нормальных волн [1, 4].

Если положить теперь

$$F_{1,2} = U_{1,2}(z)\frac{\exp\left(ik_0\int n_{1,2}dz\right)}{\sqrt{n_{1,2}}}, \tag{5}$$

то амплитуды $U_1(z)$ и $U_2(z)$ нормальных волн, распространяющихся в слое без отражения, будут решениями уравнений

$$\begin{aligned} U_1' &= -\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\exp\left[ik_0\int(n_2-n_1)dz\right]U_2, \\ U_2' &= -\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\exp\left[-ik_0\int(n_2-n_1)dz\right]U_1. \end{aligned} \tag{6}$$

В области малой концентрации электронов ($v \ll 1$) приближенно имеем

$$\psi = i\frac{\nu_c}{1+\nu_c^2}v', \qquad n_2 - n_1 = \frac{\sqrt{u_L}}{1-u}\sqrt{1+\nu_c^2}\,v. \tag{7}$$

Дальнейшее исследование системы (6) можно провести для конкретных профилей $v(z)$, однако добавочный член к амплитуде волны определенного типа, рождаемой волной другого типа, можно оценить методом возмущений. Рассмотрим падение обыкновенной волны на границу плазмы с вакуумом $z = 0$ ($U_2(0) = 1$, $U_1(0) = 0$). Тогда

$$U_1(z) = \frac{1}{2}\int_0^z \psi\exp\left[ik_0\int_0^z(n_2-n_1)d\zeta\right]dz. \tag{8}$$

При наличии большого параметра k_0 этот интеграл можно оценить обычными методами. Так, для линейного профиля $v(z) = z/L$, $\psi = \mathrm{const}$ главный вклад в (8) определяется стационарной точкой $z = 0$ ($n_1 = n_2$) и

$$U_1(z) \approx \frac{\psi}{\sqrt{k_0(n_2-n_1)'}}. \tag{9}$$

Используя (7), получим условие применимости геометрической оптики

$$\sqrt{v'/k_0} = (k_0L)^{-1/2} \ll 1 \tag{10}$$

(с точностью до множителей, зависящих от внешнего магнитного поля и угла α).

Эта оценка соответствует случаю, когда разность фаз $k_0\int_0^z(n_2-n_1)dz \gg 1$. Для профиля $v(z) \sim (z/L)^m$ оценка интеграла (8) дает

$$U_1(z) \sim (k_0L)^{-\frac{m}{m+1}} \ll 1. \tag{11}$$

Неравенства (10) и (11) отличаются от известного условия $v'/k_0v \ll L$ (см., например, [1]). Профили типа $v \sim (z/L)^{-m}$ или $v \sim e^{-z/L}$ приводят к обычным условиям применимости геометрической оптики:

$$\frac{\psi}{k_0(n_2-n_1)} \sim \frac{v'}{k_0v} \ll 1. \tag{12}$$

Заметим, что в случае экспоненциального спадания $v(z)$ система (6) сводится к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и может быть решена точно. При этом отсутствует «взаимодействие» различных мод и влияние области малых значений $n_2 - n_1$ сводится лишь к изменению фазы нормальных волн

Таким образом, наиболее сильное влияние на распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме при выходе в вакуум оказывает область низких концентраций электронов (уровень $v = 0$) для переходных слоев типа $v \sim z^m$. Однако и в этих случаях можно использовать обычное приближение геометрической оптики при выполнении неравенств (10) и (11). Поскольку «взаимодействие» различных мод в области $v = 0$ определяет лишь поляризацию волны, выходящей из плазменного слоя, приведенные выше условия показывают, когда эта поляризация определяется только коэффициентами поляризации $\pm q(v = 0)$ нормальных волн в плазме.

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу за просмотр рукописи и существенные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. В. Вазов, Асимптотические разложения решений линейных дифференциальных уравнений, изд. Мир, М., 1968.
3. В. В. Кучеренко, Изв. АН СССР, серия матем, 38, № 3, 625 (1974).
4. K. G. Budden, Proc. Roy. Soc., A215, № 1121, 215 (1952).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 20 апреля 1976 г.

УДК 539.16

О ВОЗНИКНОВЕНИИ СТОХАСТИЧНОСТИ ПРИ РАСПАДНЫХ ПРОЦЕССАХ

С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант

В данной работе обсуждается механизм возникновения стохастичности в автоколебательной системе из двух резонансно связанных мод — близких к линейным осцилляторов — с частотами ω и 2ω, когда основная мода ω в линейном приближении затухает, а ее гармоника обладает инкрементом. Усредненные уравнения, описывающие слабую связь осцилляторов за счет квадратичной нелинейности, имеют вид

$$\dot{a}_1 = -\sigma a_2 a_1^* - \nu a_1, \qquad \dot{a}_2 = \sigma a_1^2 + \tilde{\gamma} a_2 - \rho a_2 |a_2|^2, \tag{1}$$

где $a_{1,2}$ — комплексные амплитуды мод, ν — декремент a_1, $\tilde{\gamma}$ — инкремент a_2, ρ — характеризует нелинейное затухание неустойчивой моды, например, за счет передачи энергии затухающим гармоникам В действительных переменных $X = \frac{\sigma}{\nu}|a_2|\sin(\arg a_2 - 2\arg a_1)$, $Y = \frac{\sigma}{\nu}|a_2|\cos(\arg a_2 - 2\arg a_1)$, $Z = \frac{\sigma^2}{\nu^2}|a_2|^2$, $\gamma = \frac{\tilde{\gamma}}{\nu}$, из (1) следует

$$\dot{X} = Z - 2Y^2 + \gamma X - \rho X(X^2 + Y^2), \quad \dot{Y} = 2XY + \gamma Y - \rho Y(X^2 + Y^2), \quad \dot{Z} = -2Z(X+1). \tag{2}$$

Системы подобного типа* сейчас привлекают большое внимание в связи с возникновением новых представлений о природе турбулентности, как о стохастических движениях в чисто динамической автоколебательной системе с небольшим числом степеней свободы [1–4]. По мнению Рюэля [3] подобная турбулентность — это такие движения динамической системы, которым в фазовом пространстве соответствует притягивающая область, не являющаяся многообразием — «странный аттрактор» [2, 3]. Заметим, что такое определение турбулентности — стохастических автоколебаний — фактически является естественным развитием данного Андроновым [5] определения динамических автоколебаний. как движений, которым в фазовом пространстве соответствует предельный цикл.

До настоящего времени, однако, отсутствуют строгие результаты о существовании в какой-либо трехмерной системе типа (2) странного аттрактора, утверждения же относительно стохастичности подобных систем базируются в основном на численных экспериментах. В связи с этим представляется чрезвычайно важным вопрос о влиянии малых флуктуаций на поведение таких систем. Ниже для системы (2) показано, что

---

* А именно — нелинейные неконсервативные третьего порядка.