

УДК 621.385.6

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ, С ОБРАТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

*С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков*

Сформулированы нелинейные нестационарные уравнения взаимодействия электронного пучка в скрещенных полях с обратной электромагнитной волной. Записан закон сохранения энергии в системе и получены решения в виде стационарных волн. Построена нелинейная теория установления колебаний в генераторе обратной волны *M*-типа; представлены и обсуждаются результаты численного моделирования процесса с помощью ЭВМ «Наири». В частности, показано, что амплитуда сигнала на выходе генератора меняется следующим образом: сначала происходит экспоненциальное нарастание амплитуды в соответствии с линейной теорией, затем оно ускоряется, наблюдается высокий и резкий максимум амплитуды, затем амплитуда падает и после нескольких затухающих колебаний достигает значения, соответствующего стационарному режиму.

Не вызывает сомнения, что электронные приборы СВЧ с распределенным взаимодействием (ЛБВ, ЛОВ, волноводные гирорезонансные приборы и т. д.) можно рассматривать как активные нелинейные волновые системы. В частности, генераторы с длительным взаимодействием электронов и волны — типичный пример распределенных автоколебательных систем [1, 7].

В то же время, теория приборов СВЧ и теория нелинейных волн развивались и развиваются в значительной мере независимо, что, по-видимому, связано со своеобразием нелинейных волновых явлений в приборах СВЧ.

В настоящее время для генераторов СВЧ с длительным взаимодействием хорошо разработана теория слабого сигнала, позволяющая исследовать пусковой режим и начальный этап процесса установления колебаний, и построена нелинейная теория режима стационарной генерации, которая обычно исходит из предположения о гармоническом изменении электромагнитного поля во времени (такую теорию будем называть стационарной).

При современном уровне развития стационарной теории следующим естественным шагом является создание нестационарной нелинейной теории приборов СВЧ, которая позволит рассмотреть процесс установления колебаний в генераторах СВЧ, исследовать устойчивое стационарных состояний, проанализировать наиболее последовательным образом импульсные и многочастотные режимы, паразитные и шумовые явления в приборах СВЧ, охватывая широкий круг вопросов, важных в практическом отношении.

С другой стороны, создание нестационарной нелинейной теории станет шагом вперед в установлении связи электроники СВЧ и теории нелинейных волн в активных средах. Последнее представляет интерес как с точки зрения расширения области объектов исследований в тео-

рии нелинейных волн и распределенных автоколебательных систем, так и с точки зрения использования общих методов этой теории в электронике СВЧ.

В настоящей работе сделана попытка построить нестационарную нелинейную теорию одного из типов взаимодействия электронного потока с замедленной электромагнитной волной и применить ее к анализу процесса установления колебаний в генераторе обратной волны типа *M*.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим схему, показанную на рис. 1 а. В невозмущенном состоянии тонкий электронный поток движется со скоростью  $v_0 = \dot{y}_0$  в скрещенных статических электрическом  $E_0 = -E_0 j$  и магнитном  $B_0 = -B_0 k$  полях на расстоянии  $y_a$  от замедляющей системы, в которой вдоль оси  $x$  может распространяться электромагнитная волна с противоположно направленными групповой и фазовой скоростями:  $v_{гр} = -\dot{y}_{гр}$ ,  $v_{ф} \approx v_0$  (система с обратной волной).

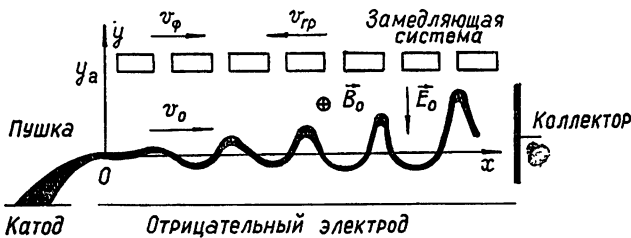


Рис. 1. Схематическое изображение лампы обратной волны типа *M*.

При исследовании взаимодействия электронного потока с волной 1) рассматривается двумерная задача, 2) используются уравнения движения электронов в адиабатическом приближении\*, 3) не учитывается влияние кулоновских полей пространственного заряда, ВЧ магнитных полей и релятивистских эффектов на движение электронов.

а) Уравнение возбуждения замедляющей системы. В работе [3] выведены достаточно общие уравнения возбуждения линии передачи монохроматическими источниками. При ином характере временной зависимости сигнала для определения поля необходимо разложить возбуждающий ток в интеграл Фурье, найти спектральные составляющие поля из уравнений [3] и подвергнуть их обратному преобразованию Фурье.

Из-за сильной дисперсии замедляющей системы, в которой распространяется обратная волна, разумно предположить, что волна имеет медленно меняющуюся во времени и пространстве амплитуду и фазу или, иными словами, узкий спектр ширины  $\Delta\omega$ , сосредоточенный вблизи «несущей» частоты  $\Omega \gg \Delta\omega$ , которая определяется условиями синхронизма  $v_{ф}(\Omega) = v_0$ . Это позволяет пренебречь частотной зависимостью групповой скорости, затухания\*\*, а также распределения поля

\* Если амплитуда и фаза волны медленно меняются во времени, то условия применимости адиабатического приближения остаются теми же, что и в стационарной теории (см., например, [3, 5, 6]).

\*\* Как известно, эти эффекты приводят к расплыванию профиля волны  $C_{-s} = \exp(-\gamma_s v_{гр} t) f(x + v_{гр} t)$  на расстояниях  $\sim [\beta_s''(\Omega)(\Delta\omega)^2]^{-1}$  и  $[\gamma_s'(\Omega)\Delta\omega]^{-1}$  от источника [4, 11]. Поэтому уравнениями (1) и (2) можно пользоваться, если длина рассматриваемого участка системы мала по сравнению с указанными величинами.

волны в поперечном сечении системы. В результате такого упрощения получим весьма простое нестационарное уравнение возбуждения (подробнее см. [1, 2]):

$$E = \operatorname{Re} \{ C_{-s}(x, t) E_{-s}^0 \exp[i(\Omega t - \beta_s(\Omega)x)] \}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{v_{\text{гp}}} \frac{\partial C_{-s}}{\partial t} - \frac{\partial C_{-s}}{\partial x} + \gamma_s C_{-s} = \frac{1}{N_s} \int_{s_{\perp}} \mathbf{J} E_s dS, \quad (2)$$

где собственные функции  $E_{\pm s}^0$  и норма  $N_s$  соответствуют введенным в [3] и взяты на «несущей» частоте  $\Omega$ ,  $v_{\text{гp}} = |\beta'_s(\Omega)|^{-1}$ ,  $\beta_s$  и  $\gamma_s$  — действительная и мнимая части собственной постоянной распространения волны,  $\mathbf{J}$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда вектора плотности тока  $\mathbf{j} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \exp[i(\Omega t - \beta_s(\Omega)\mathbf{x})] \}$ .

б) Уравнения движения электронов. Рассмотрим группу электронов, расположенных на протяжении одной замедленной длины волны со всевозможными фазами от 0 до  $2\pi$ . Представим координату  $x_e$  какого-нибудь электрона из этой группы в виде  $x_e = \bar{x}_e + \tilde{x}_e$ , где  $\tilde{x}_e$  — расстояние порядка замедленной длины волны, которую будем считать малой по сравнению с характерным масштабом изменения амплитуды  $C_{-s}(x, t)$ . Поэтому в уравнении движения можно подставить  $C_{-s}(\bar{x}_e, t)$  вместо  $C_{-s}(x_e, t)$ . Тогда в адиабатическом приближении имеем

$$\frac{d\tilde{x}_e}{dt} = -\operatorname{Re} \left\{ C_{-s}(\bar{x}_e, t) \frac{E_{-s,y}(\bar{x}_e + \tilde{x}_e, y_e)}{B_0} e^{i\Omega t} \right\}, \quad \frac{d\bar{x}_e}{dt} = v_0, \quad (3)$$

$$\frac{dy_e}{dt} = \operatorname{Re} \left\{ C_{-s}(\bar{x}_e, t) \frac{E_{-s,x}(\bar{x}_e + \tilde{x}_e, y_e)}{B_0} e^{i\Omega t} \right\}.$$

Предположим, что отрицательный электрод (рис. 1) достаточно удален от электронного потока и замедляющей системы, так что можно считать распределение поля замедленной волны экспоненциально убывающим при уменьшении  $y$  (аналогичное упрощение использовано в [3]):

$$E_{-sx} = -iE_{-sy} = E_0 \exp \left[ \frac{\Omega}{v_0} (y - ix) \right].$$

Перейдем в уравнениях (2) и (3) к безразмерным величинам

$$\tau = \Omega Dt, \quad q = \Omega D \frac{x}{v_0}, \quad Y = \frac{\Omega y_e}{v_0}, \quad X = \frac{\Omega \tilde{x}_e}{v_0}, \quad (4)$$

$$F(q, \tau) = \frac{C_{-s}}{D}, \quad u = \frac{v_{\text{гp}}}{v_0}, \quad d = \frac{v_0 \gamma_s}{\Omega D}, \quad D = \left( \frac{I_0 K_0 \Omega}{E_0 v_0} \right)^{1/2},$$

где  $I_0$  — постоянная составляющая тока электронного пучка,  $K_0 = 2E_0^2/\beta_s^2 N_s$  — сопротивление связи замедляющей системы в плоскости  $y = 0$ , параметр  $D$  предполагаем малым:  $D \ll 1^*$ . Введенные парамет-

\* Исходя непосредственно из уравнений Максвелла и уравнений движения, можно построить асимптотические разложения для поля и высокочастотных смещений электронов по параметру  $D$  (похожий метод описан, например, в [9]). Тогда в первом приближении получаются уравнения (5) и (6), причем естественным образом вводятся «медленные» переменные  $\tau \sim Dt$  и  $q \sim Dx$ , а спектр сигнала оказывается узким:  $\Delta\omega \sim \Omega D$ . Следует отметить, что такой метод открывает возможности для получения более точных приближений; он более последователен и строг, чем простые качественные рассуждения, положенные в основу вывода уравнений (5) и (6) в рамках данной работы.

ры, в основном, совпадают с принятыми в стационарной теории [5, 6]; появилась лишь дополнительная независимая переменная  $\tau$  — безразмерное время. В результате получим

$$\frac{dX}{d\tau} = -\operatorname{Re}\{iF(\tau - \tau_0, \tau)e^{Y-iX}\}, \quad \frac{dY}{d\tau} = \operatorname{Re}\{F(\tau - \tau_0, \tau)e^{Y-iX}\}, \quad (5)$$

$$X|_{\tau=\tau_0} = X_0, \quad Y|_{\tau=\tau_0} = Y_0;$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} + dF = \iint f(X_0, Y_0)e^{Y+iX} dX_0 dY_0, \quad (6)$$

где в правой части уравнения (6) интеграл берется по всем электронам группы, прошедшей через сечение  $x=0$  в момент  $\tau_0 = \tau - q$ , исключая электроны, осевшие на замедляющую систему. Функция  $f(X_0, Y_0)$  есть нормированная на единицу функция распределения электронов рассматриваемой группы по фазам и поперечной координате в момент  $\tau_0$ . При переходе от (2) к (6) был использован закон сохранения заряда.

Не нарушая общности, ограничимся случаем  $u=1$ , поскольку уравнения (5) и (6) приводятся к нему заменой независимых переменных:

$$q' = q, \quad \tau' = \frac{2u}{1+u}\tau + \frac{1-u}{1+u}q. \quad (7)$$

Для дальнейшего упрощения уравнений будем считать, что  $F$  — действительная величина. Последнее означает, что волне можно приписать постоянную фазовую скорость  $v_0$  и это, как нетрудно видеть, не противоречит уравнениям (5) и (6) (этим выбирается определенный класс решений задачи, представляющий, как будет ясно из разд. 3, наибольший интерес). Кроме того, положим для простоты  $d=0$ , считая, что главную роль в энергетическом балансе при автоколебаниях играет отбор энергии в нагрузке (который будет учтен при записи граничных условий), а не распределенная диссипация.

Введем вспомогательную величину  $\Phi$  (параметр группировки): 1) условие  $\Phi=0$  соответствует невозмущенному пучку:  $f(X_0, Y_0)_{\Phi=0} = \delta(Y_0)/2\pi$ ,  $X_0 \in [0, 2\pi)$ ; 2)  $\frac{d\Phi}{d\tau} = F$  или, что то же самое,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} = F. \quad (8)$$

Тогда уравнения движения (5) легко интегрируются, как и в [5]:

$$X = X_0 - \Phi \sin X_0, \quad e^Y = \frac{\sin X_0}{\sin(X_0 - \Phi \sin X_0)}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), будем иметь\*

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} = G(\Phi), \quad (10)$$

где  $G(\Phi)$  — функция, введенная в [5], которая в нашем случае определяется выражением

\* Если учитывать распределенную диссипацию, в левой части уравнения (10) появится дополнительный член  $dF$ .

$$G(\Phi) = \frac{1}{\pi} \int_{X_1(\Phi)}^{\pi} \sin X_0 \operatorname{ctg}(X_0 - \Phi \sin X_0) dX_0. \quad (11)$$

Нижний предел учитывает оседание электронов на замедляющую систему:  $X_1(\Phi) = 0$  при  $\Phi \leq 1 - \exp(-Y_a)$ ;  $X_1$  есть решение уравнения  $\exp(Y_a) = \frac{\sin X_1}{\sin(X_1 - \Phi \sin X_1)}$ , заключенное между 0 и  $\pi$ , если  $\Phi >$

$1 - \exp(-Y_a)$ . График этой функции при  $Y_a = 3$  показан на рис. 2.

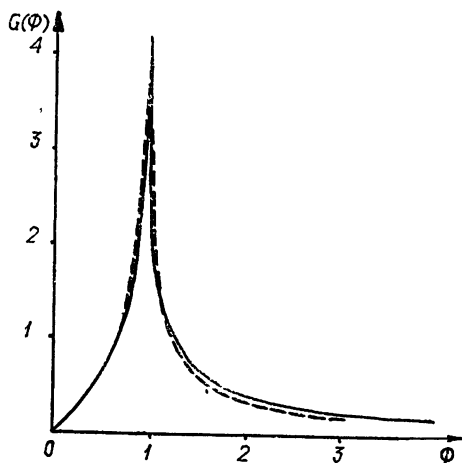


Рис. 2. График функции  $G(\Phi)$  при  $Y_a = 3$  (сплошная линия). Пунктиром показана аналитическая аппроксимация функции, использованная при численном решении уравнений нелинейной теории:

$$G(\Phi) = \begin{cases} \frac{\Phi}{1 - 0,8564 \Phi^2} & (\Phi < 0,9502) \\ \frac{0,4213}{1,1582 \Phi - 1} & (\Phi > 0,9502) \end{cases}$$

Уравнения в частных производных (8) и (10) образуют «почти линейную» (производные входят в уравнения линейным образом, а нелинейность определяется членом  $G(\Phi)$ ) систему второго порядка гиперболического типа. Система имеет два семейства характеристик (рис. 3):

$$q - \tau = C_1, \quad q + \tau = C_2,$$

причем вдоль характеристик первого семейства распространяются возмущения электронного потока, а вдоль второго — возмущения амплитуды поля.

В случае генератора обратной волны на величины  $\Phi$  и  $F$  следует наложить граничные условия

$$\Phi|_{q=0} = 0, \quad F|_{q=l} = 0, \quad (12)$$

которые выражают отсутствие модуляции пучка на пушечном конце и входного сигнала на коллекторном конце лампы. Накладывая иные граничные условия, можно рассмотреть также резонансную ЛОВМ и ЛОВМ-усилитель (см. [2]).

Исключая  $F$ , можно переписать систему (8) и (10) в виде уравнения Клейна—Гордона (см., например, [7])

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2} = G(\Phi) \quad (13)$$

с довольно сложной и необычной нелинейностью.

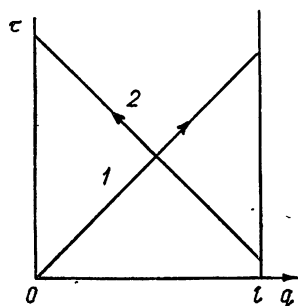


Рис. 3. Характеристики системы уравнений (8) и (10).

## 2. ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ С ОБРАТНОЙ ВОЛНОЙ, КАК НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ СИСТЕМА

Хотя с практической точки зрения для рассматриваемой системы основной интерес представляют граничные задачи (см. разд. 3), в данном разделе рассмотрим некоторые свойства уравнений (8) и (10) в рамках традиционного для теории нелинейных волн подхода (включая построение решений в виде стационарных волн), не накладывая на  $\Phi$  и  $F$  каких-либо определенных граничных условий.

### 2.1. Закон сохранения энергии

Умножим обе части уравнения (10) на  $F$  и, используя уравнение (8), запишем результат в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{F^2}{2} + W(\Phi) \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left( -\frac{F^2}{2} + W(\Phi) \right) = 0, \quad (14)$$

где  $W(\Phi) = - \int_0^{\Phi} G(\Phi) d\Phi$ .

Величинам  $F^2/2$  и  $W(\Phi)$  можно, очевидно, приписать смысл безразмерных средних плотностей энергии поля и потенциальной энергии электронов. Соответствующие потоки энергии будут  $-F^2/2$  и  $W(\Phi)$  в силу того, что безразмерная скорость распространения энергии равна  $-1$  для электромагнитной волны и  $+1$  для электронного пучка. Таким образом, соотношение (14) связывает суммарные плотность и поток энергии в системе и имеет типичную форму закона сохранения.

### 2.2. Стационарные нелинейные волны

Будем искать решения системы уравнений (8) и (10) в виде волн, распространяющихся с безразмерной скоростью  $V$ , т. е. положим

$$\Phi = \Phi(\xi), \quad F = F(\xi), \quad \xi = q - V\tau. \quad (15)$$

Тогда получаем из (8) и (10) систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1 - V) \frac{d\Phi}{d\xi} = F, \quad -(1 + V) \frac{dF}{d\xi} = G(\Phi). \quad (16)$$

Характер решения существенно зависит от величины параметра  $V$ . При  $|V| < 1$  начало координат на плоскости  $(\Phi, F)$  является особой точкой типа центра, и мы получаем периодические стационарные волны (рис. 4 а). В частности, случай  $V = 0$  соответствует стационарным состояниям ЛОВМ (см. разд. 3).

Если же  $|V| > 1$ , то начало координат становится особой точкой типа седла, а решение принимает вид ударной волны (рис. 4 б).

При  $|V| = 1$  решения в виде стационарных волн отсутствуют.

Укажем еще один простой для анализа класс задач с данными на характеристиках вида  $\Phi|_{\tau=-q} = \Phi_0, F|_{\tau=q} = 0$ . В этом случае уравнение (13) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, если искать решение в виде  $\Phi = \Phi(\sqrt{\tau^2 - q^2})$  (см. [1]):

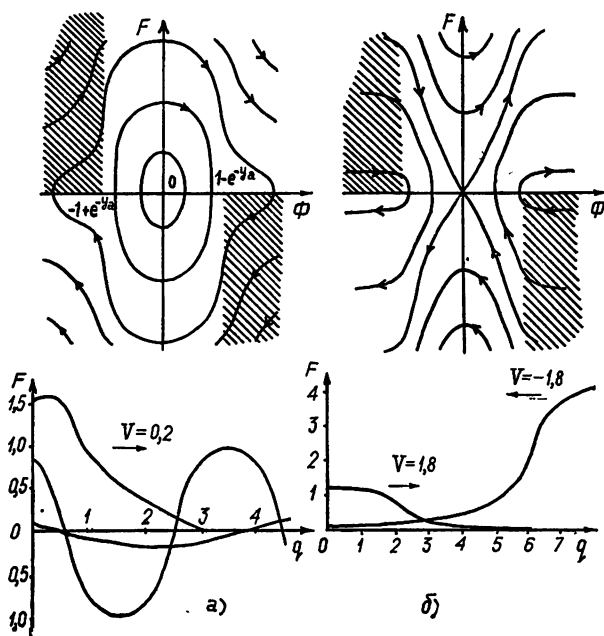


Рис. 4. Решения системы уравнений (8) и (10) в виде нелинейных стационарных волн: а)  $|V| < 1$ ; б)  $|V| > 1$ .

Заштрихованы участки фазовой плоскости, не имеющие физического смысла из-за „необратимости“ процесса оседания электронов на замедляющую систему.

### 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

#### 3.1. Линейная теория. Начальный этап процесса установления колебаний

Если  $\Phi \ll 1$ , то из (11) следует, что  $G(\Phi) \approx \Phi$ . Тогда вместо (8) и (10) с учетом (12) будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} = F, \quad \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial q} = \Phi, \quad \Phi|_{q=0} = 0, \quad F|_{q=l} = 0. \quad (17)$$

Уравнения (17) легко решаются методом разделения переменных. Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_m A_m \exp(\chi_m^+ \tau) \sin \beta_m^+ q + \sum_n B_n \exp(\chi_n^- \tau) \sin \beta_n^- q, \\ F &= \sum_m A_m \exp(\chi_m^+ \tau) \sin \beta_m^+ (l - q) - \sum_n B_n \exp(\chi_n^- \tau) \sin \beta_n^- (l - q), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $A_m$  и  $B_n$  — произвольные постоянные, которые должны быть найдены из начальных условий; величины  $\beta^\pm$  и  $\chi^\pm$  определяются из уравнений

$$\beta^\pm = \pm \sin \beta^\pm l, \quad \chi^\pm = \mp \cos \beta^\pm l, \quad (19)$$

которые следует решать в комплексной области; при этом общее число корней бесконечно (суммирование в (18) производится по всевозмож-

ным корням)\*. Если исключить  $\beta^\pm$ , вместо (19) можно записать одно уравнение для  $x$ :

$$x \sin \sqrt{1-x^2} l + \sqrt{1-x^2} \cos \sqrt{1-x^2} l = 0, \quad (20)$$

корнями которого служат все числа  $x^+$  и  $x^-$ . Уравнение (20) представляет собой известное характеристическое уравнение линейной теории установления колебаний в ЛОВМ генераторе (см., например, [8], формула (V.125)). В работе [10] проведено довольно полное исследование корней этого уравнения.

Остановимся на некоторых важных для дальнейшего свойствах полученного решения.

Ясно, что если  $\operatorname{Re} x_k > 0$ , то  $k$ -й член в (18) будет нарастать с течением времени. Как показано в [10], этому условию могут удовлетворять только действительные корни  $x$ . При  $l < \pi/2$  нарастающие решения отсутствуют. Если  $\frac{\pi}{2}(2n-1) < l < \frac{\pi}{2}(2n+1)$ , то имеется  $n$  нарастающих решений ( $n = 1, 2, \dots$ )\*\*.

Рассмотрим подробнее случай  $\frac{\pi}{2} < l < \frac{3\pi}{2}$ , когда имеется единственный положительный действительный корень  $x_0$  (из (19) можно видеть, что соответствующее решение симметрично). Тогда практически при любых начальных условиях\*\*\* по прошествии достаточного времени можно положить

$$\Phi = C_0 e^{x_0 t} \sin \sqrt{1-x_0^2} q, \quad F = C_0 e^{x_0 t} \sin \sqrt{1-x_0^2} (l - q), \quad (21)$$

т. е. считать, что распределение поля в пространстве установилось, а во времени происходит экспоненциальное нарастание амплитуды сигнала. Решение (21) целесообразно использовать в качестве начального условия для уравнений (8) и (10) с граничными условиями (12).

### 3.2. Нелинейная теория. Стационарный режим

Если положить  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , то система уравнений (8) и (10) с граничными условиями (12) принимает вид

$$-\frac{dF}{dq} = G(\Phi), \quad \frac{d\Phi}{dq} = F, \quad \Phi|_{q=0} = 0, \quad F|_{q=l} = 0 \quad (22)$$

или

$$\frac{d^2\Phi}{dq^2} = -G(\Phi), \quad \Phi|_{q=0} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dq} \Big|_{q=l} = 0, \quad (23)$$

что совпадает с соответствующим уравнением работы [5], в которой проведено также решение этого уравнения. Однако, прежде чем ут-

\* Заметим, что решения, отмеченные знаком «+» соответствуют симметричному распределению  $F$  и  $\Phi$  по длине:  $\Phi(q) = F(l - q)$ , а «-» — антисимметричному:  $\Phi(q) = -F(l - q)$ .

\*\* В частности, при  $l = \frac{\pi}{2}(2n-1)$  уравнение (20) имеет решением  $x = 0$ . Это соответствует пусковым условиям различных типов колебаний ЛОВМ ([8], стр. 344).

\*\*\* В реальных системах роль начальных возмущений играют шумовые флуктуации в электронном потоке и замедляющей системе. Хотя подробное исследование соответствующего начального этапа процесса установления колебаний представляется важным, не будем останавливаться на нем в рамках данной работы. Ограничимся здесь предположением о справедливости решения (21) на определенной стадии процесса.



верждать, что соответствующий режим может быть реализован, найденные решения необходимо исследовать на устойчивость. Как показано в [2], если оседание электронов на замедляющую систему отсутствует, то нетривиальные ( $\Phi \neq 0$ ) решения задачи неустойчивы. Что касается состояний с оседанием, то в рамках сделанных допущений они, по-видимому, устойчивы. Основанием для такого утверждения являются результаты численного решения нестационарной задачи, приведенные ниже.

### 3.3. Нелинейная теория. Процесс установления колебаний

Для проведения численного решения была выбрана следующая простая разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений (8) и (10):

$$\frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta \tau} + \frac{\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n}{\Delta q} = F_m^n, \quad \frac{F_m^{n+1} - F_m^n}{\Delta \tau} - \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{\Delta q} = G(\Phi_m^n), \quad (24)$$

где  $\Delta q < \Delta \tau$ ; величины  $F$  и  $\Phi$ , отмеченные индексами  $m$  и  $n$ , относятся к узлам прямоугольной сетки на плоскости  $(q, \tau)$ :  $q = m\Delta q$ ,  $\tau = n\Delta \tau$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $M = l/\Delta q$ ).

Граничные условия задавались в виде (ср. (12))

$$\Phi_0^n = 0, \quad F_M^n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (25)$$

При записи начальных условий использовалось решение (21) линейной задачи

$$\Phi_m^0 = C_0 \sin [\sqrt{1 - \kappa_0^2 m} \Delta q], \quad F_m^0 = C_0 \sin [\sqrt{1 - \kappa_0^2} (M - m) \Delta q]. \quad (26)$$

Разностная схема (24) является явной, т. е. она позволяет вычислить  $F$  и  $\Phi$  «слой за слоем» по времени, при этом в каждый момент машина должна «помнить» величины, относящиеся лишь к одному слою.

Решение проводилось на ЭВМ «Наири». Важным обстоятельством, позволившим осуществить решение задачи на малой ЭВМ, был способ задания функции  $G(\Phi)$ , которая аппроксимировалась простыми аналитическими выражениями (рис. 2).

Результаты расчета представлены на рис. 5, 6. Каждый «кадр» рис. 5а соответствует фиксированному моменту времени и показывает зависимость амплитуды поля  $F$  и величины  $\Phi$ , характеризующей состояние электронного потока, от координаты  $q$ . Обозначения и масштаб ясны из рис. 5б, который показывает установившееся стационарное состояние, найденное путем численного решения уравнений стационарной теории (22) с использованием той же самой функции  $G$ .

Ту часть пространства взаимодействия, на протяжении которой электроны оседают на замедляющую систему, будем называть областью оседания. На границе этой области функция  $G(\Phi)$  имеет максимум (на рис. 2 в точке  $\Phi = 0,95$ ) и поэтому взаимодействие наиболее эффективно. Для лучшего понимания развития процесса установления, описанного ниже, удобно следить за перемещением граничной точки области оседания. Положение этой точки в каждый момент времени показано крестиком на рис. 5.

Используя рис. 5, последовательно рассмотрим особенности завершающего этапа процесса установления колебаний в ЛОВМ.

$\tau = 0$ . Заданы начальные условия (26). Амплитуда выходного сигнала составляет 0,2. Распределение  $F$  и  $\Phi$  в пространстве гармоническое.

$\tau = 0 \div 4$ . Поле экспоненциально нарастает во времени, как предсказано линейной теорией (см. рис. 6). Распределение поля в пространстве не меняется.

$\tau = 5,75$ . Начали действовать нелинейные эффекты, связанные с подъемом электронов к замедляющей системе. Максимум  $\Phi$  составляет примерно 0,8 и достигается вблизи коллекторного конца лампы. Поле в этой области быстро растет вследствие увеличения эффективности взаимодействия из-за подъема электронов к замедляющей системе, поэтому максимум амплитуды поля смещается к коллекторному концу. Распределение поля в пространстве уже нельзя считать гармоническим.

$\tau = 6$ . Начинается оседание электронов на замедляющую систему вблизи коллекторного конца лампы. Поэтому движение максимума амплитуды к коллекторному концу прекращается; он сносится к пушечному концу со скоростью, близкой к групповой.

$\tau = 6,25 \div 7$ . Сильное поле в области максимума быстро поднимает электроны к замедляющей системе; таким образом, именно в этой области происходит наиболее интенсивная передача энергии электронов полю. Величина максимума быстро растет, и он принимает форму резкого всплеска.

Вблизи коллекторного конца лампы амплитуда поля уменьшается, так как в этой области осталось мало электронов (большая часть их осела на замедляющую систему), которые не могут навести значительного поля.

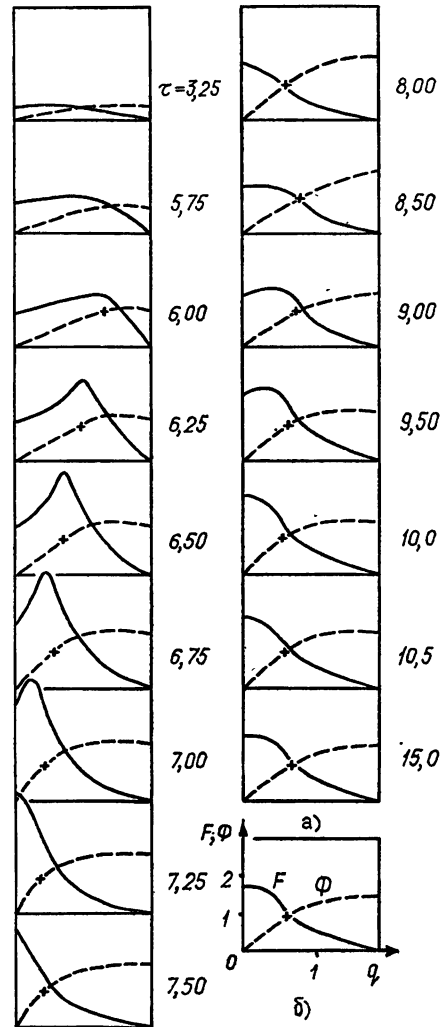


Рис. 5. а) Развитие процесса установления колебаний в ЛОВМ-генераторе;  $l = 1,8$ ;  $Y_a = 3$ ;  $\Delta q = 0,05$ ;  $\Delta \tau = 0,025$ ; б) установившееся стационарное состояние.

$\tau = 7,25$ . Вершина всплеска дошла до пушечного конца лампы. В этот момент наблюдается максимум амплитуды выходного сигнала (рис. 6). Группировка электронов у пушечного конца происходит наиболее интенсивно, поэтому  $\Phi$  быстро увеличивается с ростом  $q$  и граничная точка области оседания находится на минимальном расстоянии от пушечного конца.

$\tau = 7,5 \div 8,5$ . Всплеск прошел выход лампы; амплитуда поля по всей длине лампы уменьшается, так как пространство взаимодействия «опустошено» после прохождения всплеска. В момент  $\tau = 8,5$  амплитуда выходного сигнала достигает минимума. Величина  $\Phi$  также

уменьшается во всем пространстве взаимодействия, граница области оседания удаляется от пушечного конца. Это происходит потому, что электроны, испытавшие влияние прошедшего всплеска, непрерывно покидают пространство взаимодействия. На их место со стороны пушечного конца приходят «свежие» электроны, которые группируются сравнительно слабым полем.

$\tau = 9 \div 9,5$ . «Свежие» электроны оказываются в состоянии навести более сильное поле. Распределение амплитуды вновь приобретает максимум (на этот раз достаточно плавный) вблизи середины пространства взаимодействия, ближе к пушечному концу, т. е. там, где находится теперь граница области оседания.

Максимум, увеличиваясь, смещается к пушечному концу, вслед за ним смещается граница области оседания. Фактически все процессы повторяются, но в значительно более слабой степени.

$\tau = 10 \div 15$ . Максимум доходит до пушечного конца, а затем амплитуда выходного сигнала вновь начинает уменьшаться.

$\tau = 15,5$ . После нескольких затухающих колебаний устанавливается стационарное состояние с оседанием, которое соответствует решению уравнений стационарной теории (22) (рис. 5 б).

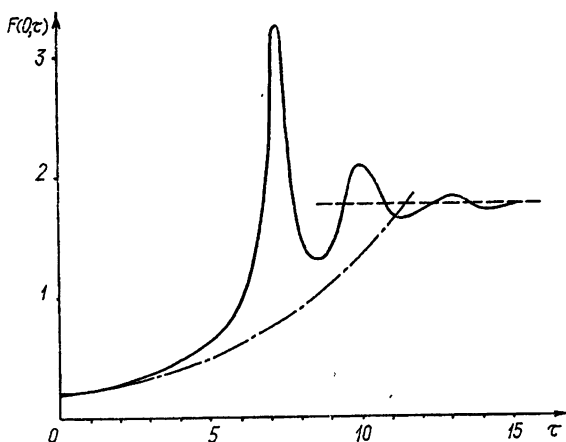


Рис. 6. Изменение амплитуды выходного сигнала ЛОВМ-генератора в процессе установления по результатам численного счета (сплошная линия) и по линейной теории (штрих-пунктир).

Пунктир — выходная амплитуда, даваемая стационарной нелинейной теорией.

На рис. 6 показано, как меняется во время описанного процесса амплитуда сигнала на выходе лампы. Для сравнения приведена аналогичная зависимость, полученная на основании линейной теории. Результаты линейной теории и численных расчетов согласуются на начальном участке. Как видно из рисунка, найденное по линейной теории время нарастания амплитуды выходного сигнала до значения, соответствующего стационарному режиму, хорошо аппроксимирует время установления колебания. Впрочем, указанное совпадение носит случайный характер, так как линейная теория не может описать процессы, определяющие заключительную стадию установления колебаний.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Применим к решению системы уравнений (8) и (10) с граничными условиями (12) метод последовательных приближений.

В качестве нулевого приближения выберем невозмущенную волну  $F^{(0)} = F(\tau + q)$ . Подставим  $F^{(0)}$  в уравнение (8) и проинтегрируем его с учетом (12). Результат подставим в (10) и также проинтегрируем его с учетом (12), определив  $F^{(1)}(q, \tau)$ . Потребуем, чтобы  $F^{(0)}|_{q=0} = F^{(1)}|_{q=0}$ , тогда получим интегральное уравнение относительно выходной амплитуды:

$$F(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau-2l}^{\tau} G \left[ \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\tau} F(\zeta) d\zeta \right] d\eta. \quad (*)$$

В линейном приближении можно искать решение в виде  $F \sim e^{(1/2)\kappa\tau}$ , в результате чего получим уравнение (V.129) работы [8].

Численное решение уравнения (\*), проведенное на ЭВМ «Проминь», показало, что данный метод завышает скорость нарастания амплитуды на начальном этапе процесса и занижает амплитуду колебаний в стационарном состоянии, однако качественное соответствие с разностным методом представляется хорошим.

Хотя в данном конкретном случае рассматриваемый метод и не привел к радикальному упрощению задачи, следует ожидать, что он окажется полезным при анализе более сложных задач (например, ЛОВ типа 0, резонансные ЛОВ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5, изд. Саратовского университета, 1974, стр. 88.
2. Электроника ламп с обратной волной, под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова, изд. Саратовского университета, 1975, глава III.
3. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
4. Л. А. Вайнштейн, Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5, изд. Саратовского университета, 1974, стр. 3.
5. Фейнштейн, Кайно, в сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, т. 1, ИЛ, М., 1961.
6. Теория лучевых приборов магнетронного типа, под ред. Д. И. Трубецкого, Лекции по электронике СВЧ (2-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5, изд. Саратовского университета, 1972.
7. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 477 (1974).
8. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков, Аналитические методы расчета в электронике СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1970.
9. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 454 (1974).
10. D. L. Bobroff and H. A. Haus, J. Appl. Phys., 38, № 1, 390 (1967).
11. L. A. Wainstein, Proceedings of the fifth colloquium of microwave communication, Budapest, 24—30 June, 1974, p. ET-429.

---

NONSTATIONARY NONLINEAR PHENOMENA IN THE CASE OF INTERACTION  
OF AN ELECTRON BEAM MOVING IN CROSSED FIELDS WITH A BACKWARD  
ELECTROMAGNETIC WAVE

*S. P. Kuznetsov, D. I. Trubetskov*

Nonlinear nonstationary equations of interaction of an electron beam in crossed fields with a backward electromagnetic wave are formulated. The law of energy conservation in the system is written, the solutions are obtained in the form of stationary waves. The nonlinear theory of steady-state oscillations in *M*-type BWO is built; the results of numerical modelling of the process by the computer „Nairi“ are given and discussed. It is shown in particular that the signal amplitude at the output of the oscillator changes in the following way. First there occurs an exponential increase in the amplitude in accord with the linear theory, then it accelerates, a high and sharp maximum of the amplitude is observed, then the amplitude falls and after some damping oscillations it reaches the value corresponding to the stationary regime.

---