ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 2, РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 538.56 : 519.25

К ГИПОТЕЗЕ О ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. Н. Малахов, С. Н. Молодцов, А. И. Саичев

Предпринята теоретическая проверка гипотезы о логарифмически нормальном законе распределения флуктуаций интенсивности световой волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде и рассматриваемой в малоугловом приближении геометрической оптики. Показано, что с ростом расстояния от границы среды логарифмически нормальный закон сначала нарушается, а затем нормированное вероятностное распределение флуктуаций интенсивности волны опять стремится к нормальному.

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих теоретических и экспериментальных работах (см., например, [1–3]) высказывалось предположение о логарифмически нормальном законе распределения амплитуды световой волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде. В последнее время появились работы [9–11], указывающие на отклонение распределения амплитуды световой волны от логарифмически нормального в области сильных флуктуаций интенсивности. В то же время достаточно строгого теоретического рассмотрения этого вопроса не проводилось. В настоящей работе в приближении геометрической оптики методом кумулянтов исследуется вероятностное распределение интенсивности световой волны.

Отметим, что приведенное ниже геометрооптическое рассмотрение справедливо в области, где появлением каустик еще можно пренебречь, хотя флуктуации интенсивности уже могут быть большими.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Пусть на полупространство $x > 0$, заполненное случайно-неоднородной средой, перпендикулярно границе раздела падает плоская световая волна. В малоугловом приближении геометрической оптики интенсивность I волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде с относительными флуктуациями диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}$, и поперечные компоненты волнового вектора $\boldsymbol{v} = \{k_y, k_z\}$ удовлетворяют, как известно, следующим уравнениям ([6]):

$$\begin{gathered} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \rho} (\boldsymbol{v} I) = 0, \\ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + \frac{\boldsymbol{v}}{k} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \rho} = \frac{k}{2} \nabla_{\perp} \tilde{\varepsilon}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\rho = \{y, z\}$ — совокупность поперечных координат. Граничными условиями к уравнениям (1) являются следующие:

$$I(x=0) = I_0, \qquad v(x=0) = 0, \qquad \nabla_\perp v(x=0) = 0. \tag{2}$$

Будем считать $\tilde{\varepsilon}(x, \rho)$ дельта-коррелированными по продольной координате x и изотропными по поперечным координатам гауссовыми флуктуациями с корреляционной функцией

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho)\tilde{\varepsilon}(x', \rho') \rangle = A(\rho - \rho')\,\delta(x - x'),$$

где

$$A(\rho - \rho') = A(\rho^2) = A - D\rho^2 + B\rho^4 - \ldots,$$

$$\rho^2 = (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Если волна статистически однородна в поперечной плоскости y, z, то от исходных уравнений геометрической оптики (1) удается перейти к уравнениям для обратных моментов интенсивности $\langle I^{-k} \rangle$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Для этого необходимо сначала вывести уравнение для среднего $\langle u^p d^q I^{-k} \rangle$. Здесь u и d — соответсгвенно средний и гауссов радиусы кривизны [4], равные $u \equiv \alpha_{yy} + \alpha_{zz}$, $d \equiv \alpha_{yy}\alpha_{zz} - \alpha_{yz}^2$, где $\alpha_{ij} \equiv \dfrac{\partial v_i}{\partial y_j}$ ($i, j = y, z,\ \ y_j = y, z$). Уравнения для u и d легко получаются из второго уравнения (1).

Используя стандартную процедуру получения эволюционных уравнений для средних (см. [4, 5]), получаем следующее уравнение для $\langle u^p d^q I^{-k} \rangle$ (p, q, k — любые целые положительные числа):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\langle u^p d^q I^{-k} \rangle &= (k - p - q + 1)\langle u^{p+1} d^q I^{-k} \rangle + \\ &+ 2p\langle u^{p-1} d^{q+1} I^{-k} \rangle + 8Bp(p-1)\langle u^{p-2} d^q I^{-k} \rangle + \\ &+ 3Bq(q-1)\langle u^{p+2} d^{q-2} I^{-k} \rangle + 4Bq(2p - q + 1)\langle u^p d^{q-1} I^{-k} \rangle,\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$B \equiv \frac{1}{4!}\,\frac{\partial^4 A(\rho)}{\partial \rho^4}\bigg|_{\rho=0}.$$

Граничные условия для уравнения (3), следующие из (2), таковы: $\langle u^n d^m I^{-k} \rangle_{x=0} = I_0^{-k}\delta_{n,0}\delta_{m,0}$ ($\delta_{n,0}$, $\delta_{m,0}$ — символы Кронекера). Анализ уравнения (3) показывает, что система уравнений, определяющих эволюцию $\langle I^{-k} \rangle$, замкнута и конечна для любого положительного k. Так, уравнение для обратного момента $\langle I^{-1} \rangle$, полученное в [4] и записанное как функция безразмерной координаты $z \equiv \sqrt[3]{B}\,x$ имеет вид

$$\frac{d^6}{dz^6}\langle I^{-1} \rangle - 112\frac{d^3}{dz^3}\langle I^{-1} \rangle - 1280\langle I^{-1} \rangle = 0. \tag{3а}$$

Граничные условия для уравнения (3а) записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\langle I^{-1} \rangle_{z=0} = I_0^{-1}, \qquad \frac{d^3}{dz^3}\langle I^{-1} \rangle\bigg|_{z=0} = 32\,I_0^{-1}, \\ \frac{d}{dz}\langle I^{-1} \rangle\bigg|_{z=0} = \frac{d^2}{dz^2}\langle I^{-1} \rangle\bigg|_{z=0} = \frac{d^4}{dz^4}\langle I^{-1} \rangle\bigg|_{z=0} = \frac{d^5}{dz^5}\langle I^{-1} \rangle\bigg|_{z=0} = 0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Как следует из (3), среднее $\langle I^{-2} \rangle$ определяется замкнутой системой следующих десяти уравнений:

$$\frac{d}{dx}\langle I^{-2}\rangle = 3\langle uI^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle uI^{-2}\rangle = 2\langle u^2I^{-2}\rangle + 2\langle dI^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle u^2 I^{-2}\rangle = \langle u^3 I^{-2}\rangle + 4\langle udI^{-2}\rangle + 16B\langle I^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle dI^{-2}\rangle = 2\langle udI^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle udI^{-2}\rangle = \langle u^2dI^{-2}\rangle + 2\langle d^2 I^{-2}\rangle + 8B\langle uI^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle u^2dI^{-2}\rangle = 4\langle ud^2 I^{-2}\rangle + 16B\langle dI^{-2}\rangle + 16B\langle u^2 I^{-2}\rangle, \tag{3б}$$

$$\frac{d}{dx}\langle ud^2 I^{-2}\rangle = 2\langle d^3 I^{-2}\rangle + 6B\langle u^3 I^{-2}\rangle + 8B\langle udI^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle d^2 I^{-2}\rangle = \langle ud^2 I^{-2}\rangle + 6B\langle u^2 I^{-2}\rangle - 8B\langle dI^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle d^3 I^{-2}\rangle = 18B\langle u^2d I^{-2}\rangle - 24B\langle d^2 I^{-2}\rangle,$$

$$\frac{d}{dx}\langle u^3 I^{-2}\rangle = 6\langle u^2d I^{-2}\rangle + 48B\langle u I^{-2}\rangle.$$

Граничные условия для (3 б) таковы:

$$\langle I^{-2}\rangle_{x=0} = I_0^{-2}, \qquad \frac{d^3}{dx^3}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = 96\,B I_0^{-2},$$

$$\frac{d^6}{dx^6}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = 52\,992\; I_0^{-2} B^2, \qquad \frac{d^9}{dx^9}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = 38\,154\,240\, B^3 I_0^{-2}, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dx}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = \frac{d^2}{dx^2}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = \frac{d^4}{dx^4}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} =$$

$$= \frac{d^5}{dx^5}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = \frac{d^7}{dx^7}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = \frac{d^8}{dx^8}\langle I^{-2}\rangle\bigg|_{x=0} = 0.$$

Решения уравнений (3 а) и (3 б) с учетом граничных условий (2.1) и (2.2) записываются в виде

$$\langle I^{-1}\rangle(z) = 1/3\, I_0^{-1}\Bigg(a e^{\sqrt[3]{\mu_1} z} + b e^{-\sqrt[3]{|\mu_2|}\, z} +$$

$$+ 2a\, e^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\mu_1}\, z} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\mu_1}\, z + 2b e^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{|\mu_2|}\, z} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\mu_2|}\, z\Bigg),$$

$$\mu_{1,2} = 4\left(14 \pm \sqrt{276}\right), \qquad \mu_1 \approx 122{,}4, \qquad \mu_2 \approx -10{,}4,$$

$$a = 1 - b = \frac{32 + |\mu_2|}{\mu_1 + |\mu_2|}, \tag{4}$$

$$\langle I^{-2}\rangle(z) = I_0^{-2}\Big(c_0 + c_1 e^{n_1 z} + c_2 e^{n_2 z} + c_3 e^{n_3 z} +$$

$$+ 2c_1 e^{-\frac{n_1}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}n_1 z + 2c_2 e^{-\frac{n_2}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}n_2 z + 2c_3 e^{-\frac{n_3}{2}z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}n_3 z\Big)$$

$$(n_1\ n_2\ n_3) \approx \left(\sqrt[3]{761}\ \ \sqrt[3]{573}\ \ \sqrt[3]{449}\right)$$

$$(c_0\quad c_1\quad c_2\quad c_3) \approx (0{,}780\quad 0{,}065\quad -0{,}171\quad 0{,}179).$$

Заметим, что мы получили точные значения для $\langle I^{-1}\rangle$ и $\langle I^{-2}\rangle$, которые имеют смысл первых двух моментов якобиана преобразования J эйлеровых координат в лагранжевые [7]. Отсюда следуют два важных замечания. Во-первых, статистика якобиана преобразования J определяется только одним параметром $z \equiv \sqrt[3]{B}\,x$, характеризующим пространственно-флуктуационные свойства среды. Аналогичный вывод содержится в работе [8], где рассмотрена статистика расстояния между лучами в приближении геометрической оптики. Второе замечание относится к наличию «периодических» слагаемых в выражениях для моментов. Несмотря на то, что наличие гармонических множителей в выражениях $\langle I^{-1}\rangle(z)$ и $\langle I^{-2}\rangle(z)$ не влияет на поведение этих средних при достаточно больших z ($\langle I^{-1}\rangle$, $\langle I^{-2}\rangle$ — монотонно возрастающие функции параметра z), тем не менее они, по-видимому, отражают известную «периодичность» якобиана преобразования J, вызванную образованием каустик.

При малых параметрах z (слабые флуктуации $\tilde{\varepsilon}$ или малые расстояния от границы среды), как следует из (4), $\langle I^{-1}\rangle, \langle I^{-2}\rangle \sim z^3$ $\left(\langle I^{-1}\rangle = I_0^{-1}\left(1 + \frac{32}{6}z^3\right), \langle I^{-2}\rangle = I_0^{-2}(1 + 16z^3),\ z \ll 1\right)$, что согласуется с результатом, полученным в [8]. Кроме того известно, [1, 4], что при распространении в среде случайной волны, статистически однородной по поперечным координатам, ее средняя интенсивность остается постоянной, т. е. $\langle I\rangle = I_0 = \mathrm{const}$, что также следует из (3). Знание точных значений этих трех моментов, $\langle I\rangle$, $\langle I^{-1}\rangle$, $\langle I^{-2}\rangle$, уже позволяет проверить гипотезу, согласно которой флуктуации уровня амплитуды $\chi = \ln\sqrt{\frac{I(x)}{I_0}}$ $(I_0 = I(x = 0))$ являются гауссовыми.

Используя разложение характеристической функции в ряд по кумулянтам, получаем следующую формулу связи обратных моментов интенсивности с кумулянтами уровня амплитуды $\varkappa_n^{\chi}$:

$$\langle I^{-k}\rangle = I_0^{-k}\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2k)^n}{n!}\varkappa_n^{\chi}(z)\right]. \tag{5}$$

Отсюда видно, что для расчета N-го кумулянтного приближения, состоящего в том, что ряд кумулянтов χ обрывается на N-м кумулянте, необходимо знать N первых моментов $\langle I^{-k}\rangle$ $(k = -1, 1, 2, \ldots, N-1)$. Рассмотрение гауссова приближения, в котором отличны от нуля только первые два кумулянта χ $m_\chi \equiv \varkappa_1^\chi$ и $D_\chi \equiv \varkappa_2^\chi$, уже позволяет проверить гипотезу о логарифмически нормальном законе распределения. В гауссовом приближении формула (5) запишется в виде

$$\langle I^{-k} \rangle = I_0^{-k} \exp\left[-2k\, m_\chi(z) + 2k^2 D_\chi(z)\right]. \tag{5a}$$

Таким образом, достаточно знать два средних $\langle I^{-k} \rangle$, чтобы рассчитать гауссово приближение для флуктуаций уровня амплитуды, т. е. найти два первых кумулянта χ (среднее и дисперсию). Взяв за основу различные пары средних $\langle I^{-k} \rangle$, например $\left\{\begin{matrix}\langle I \rangle \\ \langle I^{-1} \rangle\end{matrix}\right\}$ и $\left\{\begin{matrix}\langle I \rangle \\ \langle I^{-2} \rangle\end{matrix}\right\}$, получим разные выражения для среднего и дисперсии в гауссовом приближении. Если гипотеза «логарифмической нормальности» верна, то найденные из разных выражений $m_\chi^{(1)}$, $D_\chi^{(1)}$ и $m_\chi^{(2)}$, $D_\chi^{(2)}$ должны совпадать. Заметим, что в гауссовом приближении из условия постоянства средней интенсивности волны из (5а) следует известное соотношение: $D_\chi(z) = -m_\chi(z)$ ([1]). Как видно из (5а), выражения для среднего и дисперсии уровня амплитуды в гауссовом приближении, когда за основу взяты пары средних $\left\{\begin{matrix}\langle I \rangle \\ \langle I^{-1} \rangle\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\langle I \rangle \\ \langle I^{-2} \rangle\end{matrix}\right\}$, соответственно будут

$$D_\chi^{(1)} = -m_\chi^{(1)} = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3}\Big[a e^{\sqrt[3]{\mu_1} z} + b e^{-\sqrt[3]{|\mu_2|} z} +$$
$$+ 2a e^{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\mu_1} z} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\mu_1}\, z + 2b e^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{|\mu_2|} z} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\mu_2|}\, z\Big],$$
$$a \equiv 1 - b = \frac{32 + |\mu_2|}{\mu_1 + |\mu_2|},\quad \mu_1 \approx 122{,}4,\quad \mu_2 \approx -10{,}4, \tag{6}$$
$$D_\chi^{(2)} = -m_\chi^{(2)} = \frac{1}{12}\ln\left[c_0 + \sum_{l=1}^{3} c_l\left(e^{n_l z} + 2e^{-\frac{n_l}{2} z}\cos\frac{\sqrt{3}}{2} n_l z\right)\right]$$
$$(n_1\ n_2\ n_3) \approx \left(\sqrt[3]{761}\ \ \sqrt[3]{573}\ \ \sqrt[3]{449}\right)$$
$$(c_0\ \ c_1\ \ c_2\ \ c_3) \approx (0{,}780\ \ 0{,}065\ \ -0{,}171\ \ 0{,}179).$$

В области слабых флуктуаций амплитуды световой волны, где $z \equiv \sqrt[3]{B}\, x \ll 1$, формулы (6) дают одинаковые асимптотические выражения:

$$D_\chi^{(1)} = -m_\chi^{(1)} = \langle \chi^2 \rangle_0 \equiv \frac{4}{3} z^3,$$
$$D_\chi^{(2)} = -m_\chi^{(2)} = \langle \chi^2 \rangle_0 \equiv \frac{4}{3} z^3, \tag{6a}$$

где $\langle \chi^2 \rangle_0$ — дисперсия флуктуаций уровня амплитуды, рассчитанная в пренебрежении нелинейными членами в уравнениях геометрической оптики (1).

Асимптотические формулы (6а) выражают известный закон нарастания дисперсии уровня амплитуды в области слабых флуктуаций интенсивности [1]. В области сильных флуктуаций интенсивности $z \gg 1$ имеет место диффузионный характер роста дисперсии χ: $D_\chi \sim z$. Чтобы оценить степень негауссовости распределения χ, необходимо количественно сравнить выражения для $D_\chi^{(1)}$ и $D_\chi^{(2)}$ для конкретных значений безразмерного параметра $z \equiv \sqrt[3]{B}\, x$. Для этого введем следующие оценочные величины:

$$\xi_1 \equiv \frac{D_\chi^{(2)} - D_\chi^{(1)}}{\sqrt{D_\chi^{(1)} D_\chi^{(2)}}}, \qquad \xi_2 \equiv \frac{m_\chi^{(1)} - m_\chi^{(2)}}{\sqrt{m_\chi^{(1)} m_\chi^{(2)}}}.$$

Из асимптотических формул (6 а) видно, что в области слабых флуктуаций амплитуды световой волны вероятностное распределение последней логарифмически нормальное. Однако с ростом параметра z вероятностное распределение уровня амплитуды χ становится негауссовым, причем степень негауссовости, как следует из табл. 1, растет с ростом параметра z. Таким образом, гипотеза о том, что распределение амплитуды подчиняется логарифмически нормальному закону, справедлива только в области слабых флуктуаций амплитуды $z \ll 1$.

Таблица 1

z	$\sqrt[3]{3/32}$	$\sqrt[3]{3/16}$	$\sqrt[3]{3/8}$	$\sqrt[3]{3/4}$	1	$\sqrt[3]{3/2}$
$\langle \chi^2 \rangle_0$	1/8	1/4	1/2	1	4/3	2
ξ, %	18	19	28	33,5	36	38

Чтобы исследовать негауссов характер флуктуаций уровня амплитуды χ, необходимо рассмотреть высшие негауссовы приближения, в частности эксцессное, которое предполагает отличными от нуля четыре первых кумулянта χ. Однако рассмотрение эксцессного приближения в рамках трехмерного случая сопряжено с чрезвычайно громоздкими выкладками и не представляется возможным. Чтобы подробнее рассмотреть процесс денормализации уровня амплитуды, обратимся к анализу более простого двумерного случая, когда неоднородности среды и все параметры волны зависят только от продольной x и одной поперечной координаты y.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

а) Общие уравнения

Уравнения двумерной геометрической оптики, следующие из (1), таковы:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial y}(vI) = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{k}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{k}{2}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y}, \tag{1a}$$

где $v \equiv \frac{\partial S}{\partial y}$ (S — фаза волны), $\tilde{\varepsilon} \equiv \tilde{\varepsilon}(x, y)$. Пусть на полуплоскость $x > 0$ перпендикулярно падает плоская световая волна. Тогда система граничных условий (2) записывается следующим образом:

$$I(x=0) = I_0, \qquad v(x=0) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x=0) = 0. \tag{2a}$$

От уравнений (1 а) можно, как и в трехмерном случае, перейти к уравнениям для обратных моментов интенсивности. Замкнутая система уравнений, позволяющая получить k-й обратный момент $\langle I^{-k}\rangle$, имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dx}\langle I^{-k}\rangle = (k+1)\langle uI^{-k}\rangle,\\
\frac{d}{dx}\langle uI^{-k}\rangle = k\langle u^2 I^{-k}\rangle,\\
\frac{d}{dx}\langle u^2 I^{-k}\rangle = (k-1)\langle u^3 I^{-k}\rangle + 2B\langle I^{-k}\rangle,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{d}{dx}\langle u^p I^{-k}\rangle = (k-p+1)\langle u^{p+1} I^{-k}\rangle + Bp(p-1)\langle u^{p-2} I^{-k}\rangle \quad (p<k+1),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{d}{dx}\langle u^{k+1} I^{-k}\rangle = Bk(k+1)\langle u^{k-1} I^{-k}\rangle .
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь предполагалось, что $\tilde{\varepsilon}(x, y)$ — гауссово поле с корреляционной функцией

$$
\langle \tilde{\varepsilon}(x, y)\tilde{\varepsilon}(x', y')\rangle = A(y-y')\,\delta(x-x'),
$$

$$
u \equiv \frac{1}{k}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad B \equiv \frac{1}{8}\left.\frac{\partial^4 A(y)}{\partial y^4}\right|_{y=0}.
$$

б) Гауссово приближение

В гауссовом приближении для определения статистических характеристик уровня достаточно знать два обратных момента. В качестве таких «опорных» моментов возьмем поочередно

$$
\left\{\begin{matrix}\langle I\rangle\\ \langle I^{-1}\rangle\end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix}\langle I^{-1}\rangle\\ \langle I^{-2}\rangle\end{matrix}\right\}.
$$

Из (7) следуют такие уравнения для первых двух обратных моментов:

$$
\begin{gathered}
\frac{d^3}{dz^3}\langle I^{-1}\rangle = 4\langle I^{-1}\rangle,\\
\frac{d^4}{dz^4}\langle I^{-2}\rangle = 24\frac{d}{dz}\langle I^{-2}\rangle, \qquad z \equiv \sqrt[3]{B}\,x.
\end{gathered}
\tag{7a}
$$

Как следует из (2 а), граничные условия для уравнений (7 а) записываются следующим образом:

$$
\langle u^n I^{-m}\rangle = I_0^{-m}\,\delta_{n,0},
$$

$$
n = 0, 1, 2, \dots, \qquad m = 1, 2, 3, \dots
$$

Легко видеть, что

$$\langle I^{-1}\rangle(z) = I_0^{-1}\left(\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{4}z} + \frac{2}{3}e^{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}z}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}z\right),$$
$$\langle I^{-2}\rangle(z) = I_0^{-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{\sqrt[3]{24}z}+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{3}z}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{3}z\right), \quad (8)$$

где $z = \sqrt[3]{B}\,x$.

Взяв вначале за основу $\langle I\rangle = I_0$ и $\langle I^{-1}\rangle$, из (5а) получаем следующие функциональные зависимости среднего и дисперсии уровня амплитуды от продольной координаты:

$$D_\chi^{(1)} = -m_\chi^{(1)} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{4}z} + \frac{2}{3}e^{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}z}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}z\right). \quad (9)$$

Используя теперь в качестве «опорных» моментов $\langle I^{-1}\rangle$, $\langle I^{-2}\rangle$, будем иметь следующие формулы гауссова приближения:

$$D_\chi^{(2)} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{4}z}+\frac{2}{3}e^{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}z}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}z\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{\sqrt[3]{24}z}+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{3}z}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{3}z\right),$$
$$m_\chi^{(2)} = -\ln\left(\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{4}z}+\frac{2}{3}e^{-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}z}\cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{2}z}\right)+ \quad (10)$$
$$+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{\sqrt[3]{24}z}+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{3}z}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{3}z\right).$$

Тот факт, что во втором случае $D_\chi^{(2)} \neq -m_\chi^{(2)}$, уже говорит о негауссовости уровня амплитуды χ, так как если бы вероятностное распределение χ было гауссовым, то из условия постоянства средней интенсивности волны следовало бы, что $D_\chi = -m_\chi$ ([1]). Если верна гипотеза «логарифмической нормальности», то выражения (9) и (10) должны совпадать. Нетрудно видеть, что в случае $z \equiv \sqrt[3]{B}x \ll 1$ так оно и есть. При этом

$$D_\chi^{(1)} = D_\chi^{(2)} = -m_\chi^{(2)} = -m_\chi^{(1)} = \langle\chi^2\rangle_0 = \frac{1}{6}Bx^3,$$

где $\langle\chi^2\rangle_0 = \frac{1}{6}Bx^3$ — дисперсия флуктуаций уровня амплитуды в области малых флуктуаций амплитуды, рассчитанная в пренебрежении нелинейными членами в уравнениях геометрической оптики (1а).

Анализ выражений (9) и (10) показывает, что в области сильных флуктуаций, где $z \gg 1$, эти выражения значительно отличаются друг от друга, и гипотеза о том, что вероятностный закон распределения логарифмически нормален в области сильных флуктуаций интенсивности, неприменима. Чтобы провести количественное сравнение выражений (9) и (10), полученные в приближении гауссова распределения уровня амплитуды, введем, как и раньше, оценочные величины ξ_1 и ξ_2:

$$\xi_1 = \frac{D_\chi^{(2)} - D_\chi^{(1)}}{\sqrt{D_\chi^{(1)} D_\chi^{(2)}}}, \qquad \xi_2 = \frac{m_\chi^{(1)} - m_\chi^{(2)}}{\sqrt{m_\chi^{(1)} m_\chi^{(2)}}}.$$

Оценив ξ_1 и ξ_2 для конкретных значений безразмерного параметра $z \sim \sqrt[3]{\langle \chi^2 \rangle_0}$, мы определим степень негауссовости распределения χ. Так, для $z = 0{,}7$ $\xi_1 \approx 35\%$, $\xi_2 \approx 34\%$. В области сильных флуктуаций амплитуды ($\langle \chi^2 \rangle_0 \sim 1$) $z = 1$ имеем $\xi_1 > 100\%$, $\xi_2 \approx 53\%$. Таким образом, гипотеза о логарифмически нормальном законе распределения интенсивности света справедлива в области слабых флуктуаций амплитуды $\left(z \equiv \sqrt[3]{B}\, x \ll 1\right)$. Аналогичный вывод был получен и в трехмерной геометрической оптике.

в) Эксцессное приближение

Учет негауссовости уровня амплитуды χ может быть произведен в рамках негауссова эксцессного приближения, которое предполагает отличными от нуля первые четыре кумулянта χ:

$$\varkappa_1^\chi \equiv m_\chi, \quad \varkappa_2^\chi \equiv D_\chi, \quad \varkappa_3^\chi, \quad \varkappa_4^\chi.$$

Знание трех обратных моментов $\langle I^{-1} \rangle$, $\langle I^{-2} \rangle$, $\langle I^{-3} \rangle$ и того, что $\langle I \rangle = I_0 = \mathrm{const}$, позволяет вычислить эти четыре кумулянта в эксцессном приближении. В этом случае (5) запишется так:

$$\langle I^{-k} \rangle = I_0^{-k} \exp\left(-2k\varkappa_1^\chi + 2k^2\varkappa_2^\chi - \frac{4}{3}k^3\varkappa_3^\chi + \frac{2}{3}k^4\varkappa_4^\chi\right). \tag{5б}$$

Момент $\langle I^{-3} \rangle$ находится из системы (7) с учетом (2а). Он равен

$$\langle I^{-3} \rangle = I_0^{-3}\left(\frac{5}{7} + \frac{2}{21}e^{\sqrt[3]{84}\,z} + \frac{4}{21}e^{-\sqrt[3]{\frac{21}{2}}z}\cos\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\frac{21}{2}}\,z\right).$$

Используя систему уравнений (5б) для $k = -1, 1, 2, 3$, Найдем первые четыре кумулянта уровня амплитуды в эксцессном приближении. Они имеют следующий вид:

$$\varkappa_n^\chi(z) = \ln\prod_{l=1}^{3}\left(a_l + b_l e^{\gamma_l z} + c_l e^{-\omega_l z}\cos\sqrt{3}\,\omega_l z\right)^{m_{nl}}, \tag{11}$$

где $z = \sqrt[3]{B}\,x$, $n = 1, 2, 3, 4$,

$$\{a_l\} = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 1/2 \\ 5/7 \end{matrix}\right\|, \qquad \{b_l\} = \left\|\begin{matrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 2/21 \end{matrix}\right\|, \qquad \{c_l\} = \left\|\begin{matrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 4/21 \end{matrix}\right\|,$$

$$\{\gamma_l\} = \left\|\begin{matrix} \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{24} \\ \sqrt[3]{84} \end{matrix}\right\|, \qquad \{\omega_l\} = \left\|\begin{matrix} \sqrt[3]{1/2} \\ \sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{21/2} \end{matrix}\right\|, \qquad \{m_{nl}\} = \left\|\begin{matrix} -3/4 & 1/4 & -1/24 \\ 1/8 & 1/12 & -1/48 \\ 3/4 & -3/8 & 1/16 \\ 3/8 & -1/4 & 1/16 \end{matrix}\right\|.$$

Анализ выражений (11) в предельном случае $z \ll 1$ показывает, что в области слабых флуктуаций вероятностное распределение уровня амплитуды близко к нормальному, причем $D_\chi = -m_\chi = \frac{1}{6}Bx^3$, $\varkappa_3^\chi \sim B^2x^6$,

$\varkappa_4^\chi \sim B^3 x^9$ $(z \ll 1)$. В области сильных флуктуаций $(z \gg 1)$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$m_\chi \simeq -0{,}66\,z,\quad D_\chi \simeq 0{,}35\,z,\quad \varkappa_3^\chi \simeq 0{,}39\,z,\quad \varkappa_4^\chi \simeq 0{,}15\,z. \tag{12}$$

Из (12) видно, что в области сильных флуктуаций вероятностное распределение уровня амплитуды существенно негауссово.

Сделаем одно существенное замечание. В области сильных флуктуаций интенсивности необходимо учитывать, что в одну точку может прийти сразу несколько волн (лучей). Однако результаты, полученные выше, можно распространить на некоторую область сильных флуктуаций интенсивности, в каждую точку которой приходит практически один луч. Действительно, для $z \equiv \sqrt[3]{B}\,x' = 1$ $\langle N(x', y)\rangle \leqslant 1{,}3$ (см. [7]), где $\langle N(x', y)\rangle$ — среднее число лучей, приходящих в точку с координатами x', y. Таким образом, в области сильных флуктуаций интенсивности, для которой $z \lesssim 1$, можно, по-видимому, успешно применять полученные нами результаты.

Как следует из (12), в области сильных флуктуаций амплитуды световой волны, где $z \gg 1$, имеет место эффект нормализации уровня амплитуды, так как в этом случае коэффициенты асимметрии и эксцесса ведут себя следующим образом:

$$\gamma_3 \sim \frac{1}{\sqrt{z}},\qquad \gamma_4 \sim \frac{1}{z},\qquad \text{где } z \sim \sqrt[3]{\langle\chi^2\rangle_0} \gg 1.$$

Однако вопрос о вероятностном распределении уровня амплитуды в области развитых каустик тем не менее остается открытым, так как в этой области приближение геометрической оптики становится неправомочным.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 55, № 8, 662 (1968).
3. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
4. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 6 (12), 2080 (1974).
5. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 570 (1974).
6. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 897 (1972).
7. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 9, 1368 (1976).
8. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 706 (1971).
9. J. W. Strohbehn and T. I. Wang, J. Opt. Soc. Amer., 62, № 9, 1061 (1972).
10. T. I. Wang and J. W. Strohbehn, J. Opt. Soc. Amer., 64, № 5, 583 (1974).
11. T. I. Wang and J. W. Strohbehn, J. Opt. Soc. Amer., 64, № 7, 994 (1974).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
7 июля 1975 г.

TO THE HYPOTHESIS OF A LOGARITHMICALLY NORMAL DISTRIBUTION LAW OF AMPLITUDE FLUCTUATIONS OF A LIGHT WAVE PROPAGATING IN A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM

A. N. Malakhov, S. N. Molodtsov, A. I. Saichev

A theoretical verification is undertaken of the hypothesis on a logarithmically normal distribution law of intensity fluctuations of a light wave propagating in a randomly-inhomogeneous medium and considered in a small-angular geometrical optics approximation. It is shown that with the growth of the distance from the medium boundary a logarithmically normal law is first violated and then the norminated probability distribution of wave intensity fluctuations tends to be normal.