ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 2. РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 621.372 8

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ФОРМУ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ В СЛУЧАЕ МНОГОМОДОВЫХ ВОЛНОВОДОВ С ХАОТИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Л. Апресян

На примере уравнений для первого и второго моментов волн в многомодовых волноводах со случайными неоднородностями рассмотрено влияние детерминированных дополнительных граничных или начальных условий на форму уравнений для моментов Получены уравнения переноса для интенсивностей бегущих волн при учете обратного рассеяния и показано, что эти уравнения образуют замкнутую систему только при отсутствии отражения на конце волновода.

1. Введение. Вывод уравнений для моментов поля в средах со слабо флуктуирующими параметрами часто используется как эффективный способ устранения секулярных членов, возникающих при применении теории возмущений (см., например, [1–3]). В обзоре [2] отмечено, что форма этих уравнений зависит, вообще говоря, от характера динамической задачи, т. е. от способа задания дополнительных (начальных или граничных) условий, обеспечивающих однозначность решения исходного стохастического уравнения. Это простое обстоятельство пока еще не нашло достаточного отражения в литературе*, и поэтому представляет интерес рассмотреть хотя бы несложные примеры, в которых роль динамической постановки задачи проявляется достаточно ясно.

2. Содержание работы. Рассмотрим уравнения для первого и второго моментов решения $\xi = (\xi_i)$ системы линейных стохастических уравнений вида

$$\frac{d}{dx}\xi(x) \equiv \dot{\xi}(x) = \hat{A}(x)\,\xi(x), \tag{1}$$

где $\hat{A}(x) = \langle \hat{A} \rangle + \mu \hat{\tilde{A}}$ — случайная матрица, а μ — малый параметр. Возьмем простой частный случай, когда $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, и выясним влияние дополнительных условий на форму уравнений для $\langle \xi_i(x) \rangle$ и $\langle \xi_i(x_1)\,\xi_k(x_2) \rangle$. Обобщение результатов на системы большого числа измерений не вызывает затруднений, что будет продемонстрировано на примере многомодовых волноводов со случайными неоднородностями. Последняя задача имеет не только методический, но и практический интерес, поскольку многомодовые волновые процессы в волноводах со случайными неоднородностями встречаются в целом ряде проблем (например, при описании широкополосных волноводных линий связи [5], в задачах волоконной оптики [6], в описании электромагнитных свойств зрительных фоторецепторов [7] и других). Мы покажем, в частности, что

* Влияние граничных условий на форму уравнений для моментов отмечено лишь в [4], но регулярный способ учета этого влияния не указан.

замкнутую систему уравнений переноса или, иначе говоря, кинетических уравнений для величин $P_i = \langle \, | \, \xi_i(x) \, |^2 \, \rangle$ удается получить только в случае согласованной нагрузки, т. е. при отсутствии отражения и трансформации на конце волновода. Это объясняет результат работы [8] о несоответствии феноменологических кинетических уравнений при несогласованной нагрузке предельному переходу $\mu \to 0$, $\mu^2 L = \mathrm{const}$, где L — длина волновода.

3. О характере используемых приближений. Все расчеты проведены в первом неисчезающем приближении Кубо (см. [3]), т. е. в первом неисчезающем приближении по μ. В работах [8–10] было показано, что в задаче с начальными условиями это приближение согласуется с указанным выше предельным переходом. Мы не будем касаться условий применимости используемого приближения, отметив только, что основное необходимое предположение заключается в малости воздействия флуктуаций на длине корреляции, т. е. $\mu l_к \ll 1$, где $l_к$ — радиус корреляции элементов матрицы $\hat{A}$. Некоторые соображения, поясняющие это условие, приведены в [3].

4. Исходные уравнения в случае двух взаимодействующих мод. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \mu V_{12} \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \mu V_{21} \xi_1 \end{cases}, \tag{2}$$

или в матричном виде

$$\dot{\xi} = \mu \hat{V} \xi = \mu \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \tag{2'}$$

где $\langle \hat{V} \rangle = 0$ и $\hat{V}$ — статистически однородная по x случайная матрица.

Систему (2) можно трактовать как феноменологическую модель для описания взаимодействия двух распространяющихся мод, а V_{ik} — как случайные коэффициенты связи (см. [11–13]). Если считать, что $S_{1,2} = |\xi_{1,2}|^2$ — модули среднего вектора Пойнтинга для каждой из мод, то для консервативности системы, т. е. для выполнения закона сохранения энергии

$$\frac{d}{dx}(S_1 \pm S_2) = 0, \tag{3}$$

достаточно условий

$$V_{12} = \mp V_{21}^*, \tag{4}$$

где верхний и нижний знаки относятся, соответственно, к случаям параллельного и встречного распространения мод.

Систему (2) нужно дополнить двумя условиями, которые мы выберем в виде

$$\begin{aligned} c_{11} \xi_1(a) + c_{12} \xi_2(a) &= \alpha_1, \\ c_{21} \xi_1(b) + c_{22} \xi_2(b) &= \alpha_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\|c_{ik}\|$ — детерминированная матрица, $|c_{ik}| \neq 0$, а α_l — некоторые постоянные. Варьируя в (5) a, b, c_{ik} и α_l, можно охватить разные задачи. Например, в случае встречных мод, распространяющихся в слое $0 \leqslant x \leqslant L$, естественно задавать детерминированные граничные условия на входе для каждой из мод, и тогда (5) примет вид

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= \alpha_1, \\ \xi_2(L) &= \alpha_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Для параллельных волн ясно, что нужно задавать начальные условия вида

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= \alpha_1, \\ \xi_2(0) &= \alpha_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Наконец, в случае встречных волн в волноводе, для нагрузки которого известен коэффициент отражения K, естественно принять граничные условия

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= \alpha_1, \\ \xi_2(L) &= K\xi_1(L), \end{aligned} \tag{8}$$

которые также являются частным случаем (5).

5. Уравнения для $\langle\xi\rangle$. Нас интересуют величины, усредненные по ансамблю реализаций. Хотя средние значения $\langle \xi_i \rangle$ на опыте обычно не измеряются, для пояснения методики выведем уравнения именно для них. Усреднив (2) и используя представление случайных величин в виде

$$a = \langle a \rangle + \tilde{a}, \tag{9}$$

запишем систему уравнений для $\langle \xi \rangle$ и $\tilde{\xi}$:

$$\langle \dot{\xi} \rangle = \mu \langle \hat{V} \tilde{\xi} \rangle; \tag{10}$$

$$\dot{\tilde{\xi}} = \mu \hat{V} \langle \xi \rangle + \mu \{ \hat{V} \tilde{\xi} - \langle \hat{V} \tilde{\xi} \rangle \}. \tag{11}$$

Замкнутая система для $\langle \xi \rangle$ получается из (10), если, решив (11) итерациями относительно $\tilde{\xi}$, подставить результат в (10). В приближении Бурре, когда удерживаются члены первого неисчезающего порядка по μ, нужно отбросить в (11) члены в фигурных скобках. Тогда (11) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\tilde{\xi} = \mu \hat{V} \langle \xi \rangle \equiv F. \tag{12}$$

Решать эту систему надо с граничными условиями

$$\begin{aligned} c_{11}\tilde{\xi}_1(a) + c_{12}\tilde{\xi}_2(a) &= 0, \\ c_{21}\tilde{\xi}_1(b) + c_{22}\tilde{\xi}_2(b) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

вытекающими из (5), что дает

$$\tilde{\xi} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} F = \hat{d} \int_a^b F(x')\,dx' + \int_a^x F(x')\,dx', \tag{14}$$

где

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} c_{12} & c_{21}, & c_{22} & c_{12} \\ -c_{11} & c_{21}, & -c_{11} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{15}$$

и $c = |c_{ik}|$. Таким образом, при условиях (13) обращение матричного оператора $\frac{d}{dx} \equiv \hat{1}\frac{d}{dx}$ на множестве векторов не является тривиальным, т. е. не сводится к оператору $\hat{1}\int_a^x dx'$.

Подставив (14) в (10), получаем замкнутое уравнение для $\langle \xi \rangle$ в приближении Бурре:

$$\left(\frac{d}{dx} - \mu^2 \left\langle \hat{V}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} \hat{V} \right\rangle\right) \langle \xi \rangle \equiv \frac{d}{dx} \langle \xi(x) \rangle -$$

$$- \mu^2 \left(\int_a^b \langle \hat{V}(x) \hat{d} \hat{V}(x') \rangle \langle \xi(x') \rangle dx' + \int_a^x \langle \hat{V}(x) \hat{V}(x') \rangle \langle \xi(x') \rangle dx' \right) = 0, \qquad (16)$$

которое нужно дополнить условиями, получаемыми при усреднении (5):

$$\begin{aligned} c_{11} \langle \xi_1(a) \rangle + c_{12} \langle \xi_2(a) \rangle &= \alpha_1, \\ c_{21} \langle \xi_1(b) \rangle + c_{22} \langle \xi_2(b) \rangle &= \alpha_2. \end{aligned} \qquad (17)$$

Из (16) видно, что форма уравнения для $\langle \xi \rangle$ зависит от способа задания дополнительных условий, т. е. от вида матрицы $\hat{c}$. В частном случае задачи с начальными условиями, когда $a = b$, эта зависимость пропадает, так как при этом исчезает член с матрицей $\hat{d}$.

6. *Предельный переход к случаю длинных трасс.* Как сказано выше, приближение (16) может быть пригодно только в пределе $\mu l_к \ll 1$, где $l_к$ — наибольший из радиусов корреляции элементов матрицы $\hat{V}$. Но при этом характерный масштаб изменения $\langle \xi \rangle$, имеющий, как это видно из (16), порядок $\frac{1}{\mu^2 l_к}$, много больше $l_к$. Поэтому в (16) можно вынести $\langle \xi \rangle$ из-под интегралов, после чего уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dx} \langle \xi \rangle = \mu^2 \left(\int_a^b \langle \hat{V}(x) \hat{d} \hat{V}(x') \rangle dx' + \int_a^x \langle \hat{V}(x) \hat{V}(x') \rangle dx' \right) \langle \xi \rangle. \qquad (18)$$

Переход от (16) к (18) — это переход от приближения Бурре к приближению Кубо [3], которое проще приближения Бурре, но справедливо, фактически, с той же точностью.

Дальнейшие упрощения (18) возможны и для предельных случаев $|b - a| \gg l_к$ или $|b - a| \ll l_к$. При $|b - a| \gg l_к$ для всех x, достаточно удаленных от концов интервала $[a, b]$*, можно заменить пределы интегрирования a и b соответственно на $-\infty$ и $+\infty$. При $|b - a| \ll l_к$ можно заменить a на $-\infty$ и отбросить первое слагаемое в правой части (18), что соответствует задаче с начальными условиями. В обоих случаях (18) принимает вид векторного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, которое при дополнительном условии (17) легко решается.

7. *Пример.* В качестве простого примера рассмотрим взаимодействие двух встречных волн в волноводе длины $L = b - a \gg l_к$ с известным коэффициентом K отражения от нагрузки. Для этого случая граничные условия (17) нужно взять в виде (8), а уравнение (18) — при условии консервативности $V_{12} = V_{21}^* = v$ и замене a на $-\infty$ и b на $+\infty$ — принимает вид

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \langle \xi_1 \rangle \\ \langle \xi_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma, & K\delta \\ 0, & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \xi_1 \rangle \\ \langle \xi_2 \rangle \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где

$$\gamma = \mu^2 \int_0^\infty \langle v(0) v^*(x') \rangle dx', \quad \delta = \int_{-\infty}^\infty \langle v(x) v(x') \rangle dx'.$$

* Участки $|x - a| \lesssim l_к$ и $|x - b| \lesssim l_к$ несущественны, так как на них $\langle \xi \rangle$ не успевает заметно измениться.

В отсутствие отражения на конце волновода ($K=0$) система (19) распадается на два независимых уравнения для $\langle \xi_1 \rangle$ и $\langle \xi_2 \rangle$. В общем же случае, когда $K \neq 0$, решением (19) при граничных условиях, полученных усреднением (8), будет

$$\begin{pmatrix} \langle \xi_1 \rangle \\ \langle \xi_2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{\alpha_1}{K^2 \delta e^{-\gamma L} + (2\gamma - K^2 \delta) e^{\gamma L}} \begin{pmatrix} K^2 \delta e^{-\gamma (L-x)} + (2\gamma - K^2 \delta) e^{\gamma (L-x)} \\ 2K\gamma e^{-\gamma (L-x)} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Из (20) видно, что в случае достаточно сильного отражения, когда $\mathrm{Re}\,(K^2 \delta - \gamma) > 0$, амплитуда среднего значения падающей волны $|\langle \xi_1 \rangle|$ вблизи нагрузки возрастает в направлении распространения. Это связано с тем, что введение нагрузки подавляет флуктуации падающей волны за счет возникновения отраженной волны, которая, взаимодействуя с падающей, увеличивает амплитуду $|\langle \xi_1 \rangle|$.

8. Уравнения для двухточечного момента $\langle \xi_l (x_1) \xi_k^* (x_2) \rangle$. Из результатов работы [14] (см. также обзор [2]) следует, что если случайные величины η_1 и η_2 определяются линейными операторными уравнениями

$$\mathbf{L}_\alpha \eta_\alpha = \mu V_\alpha \eta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad \langle V_\alpha \rangle = 0, \tag{21}$$

то их билинейная комбинация с точностью до членов порядка $0(\mu^2)$ формально удовлетворяет двум уравнениям*:

$$(D_1 \pm D_2) \langle \eta_1 \eta_2 \rangle = \mu^2 \left(L_2^{-1} \pm L_1^{-1} \right) \langle V_1 V_2 \rangle \langle \eta_1 \eta_2 \rangle, \tag{22}$$

где D_α — оператор Дайсона в приближении Бурре:

$$D_\alpha = L_\alpha - \langle V_\alpha L_\alpha^{-1} V_\alpha \rangle. \tag{23}$$

Операторы с индексами 1 и 2 действуют здесь только на переменные с теми же индексами.

В интересующем нас случае нужно положить $\eta_1 = \boldsymbol{\xi}(x_1)$, $\eta_2 = \boldsymbol{\xi}^*(x_2)$, $\mathbf{L}_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $V_1 = \hat{V}_1(x_1)$, $V_2 = \hat{V}_2^*(x_2)$, а под $\eta_1 \eta_2$ понимать прямое произведение векторов $\boldsymbol{\xi}(x_1)$ и $\boldsymbol{\xi}^*(x_2)$. Тогда (22) можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \pm \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu^2 \sum_{\alpha, \beta = 1,2} (\pm)^{\alpha+1} \left\langle \hat{V}_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)^{-1} \hat{V}_\beta \right\rangle \right] \langle \eta_1 \eta_2 \rangle = 0, \tag{24}$$

где явный вид операторов $L_\alpha^{-1} \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)^{-1}$ при условиях (13) определяется в соответствии с (14). Система (24) дополняется условиями, которые нетрудно получить перемножением и усреднением динамических дополнительных условий (5):

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha, \beta = 1, 2} c_{1\alpha} c_{1\beta}^* \langle \xi_\alpha (a) \xi_\beta^* (a) \rangle = |\alpha_1|^2, \\ &\sum_{\alpha, \beta = 1,2} c_{1\alpha} c_{2\beta}^* \langle \xi_\alpha (a) \xi_\beta^* (b) \rangle = \alpha_1 \alpha_2^*, \\ &\sum_{\alpha, \beta = 1,2} c_{2\alpha} c_{2\beta}^* \langle \xi_\alpha (b) \xi_\beta^* (b) \rangle = |\alpha_2|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

---

* Практически эти уравнения определяют корреляцию $\langle \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 \rangle$, где $\tilde{\eta} = \eta - \langle \eta \rangle$, поскольку при вычислении вторых моментов первые моменты обычно можно считать известными.

9. Уравнения для одноточечного момента $\langle \xi_i(x)\xi_k^*(x)\rangle$. Возьмем в (24) знак плюс и положим $x_1 = x_2 = x$. После этого, произведя предельный переход к случаю $|b - a| \gg l_к$ так, как это описано в п. 6 (формально такой предельный переход соответствует дельта-корреляции слабых ($\mu \to 0$) или гауссовых флуктуаций в характерных масштабах изменения моментов), запишем (24) в виде

$$\left(\frac{d}{dx} - \hat{M}\right)\langle \eta_1\eta_2\rangle\Big|_{x_1=x_2=x} \equiv \left[\frac{d}{dx} - \mu^2 \sum_{\alpha,\beta=1,2}\left\langle \hat{V}_\alpha(x)\left(\hat{d}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{V}_\beta(x')\,dx' + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \int_{-\infty}^{x}\hat{V}_\beta(x')\,dx'\right)\right\rangle\right]\langle \eta_1\eta_2\rangle\Big|_{x_1=x_2=x} = 0, \tag{26}$$

или в компонентах

$$\sum_{k,l}\left(\frac{d}{dx} - \hat{M}\right)_{ij,kl}\langle \xi_k(x)\xi_l^*(x)\rangle \equiv \frac{d}{dx}\langle \xi_i\xi_j^*\rangle - \sum_{k,l} M_{ij,kl}\langle \xi_k\xi_l^*\rangle = 0. \tag{26'}$$

В отличие от уравнения (24), которое является интегро-дифференциальным уравнением с частными производными для двухточечного момента $\langle \eta_1(x_1)\eta_2(x_2)\rangle$, (26) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, определяющее одноточечный момент $\langle \eta_1(x)\eta_2(x)\rangle$. Это уравнение образует совместно с условиями (25) замкнутую систему только в том случае, если условия (25) налагают ограничения лишь на одноточечный момент, а не на двухточечный (т. е. когда эти условия замкнуты относительно одноточечного момента $\langle \eta_1(x)\eta_2(x)\rangle$). Это возможно либо в задаче с начальными условиями, когда $a=b$ (при этом в (26) нужно заменить d на нуль), либо если второе из условий (25) несущественно. Последний случай может осуществляться при описании интенсивностей и для $a \neq b$, если $c_{12} = c_{21} = 0$, что соответствует отсутствию трансформации на концах линии.

10. Уравнения переноса для интенсивностей $P_i(x) = \langle|\xi_i|^2\rangle$. На практике обычно измеряют значения интенсивностей $P_i = \langle|\xi_i|^2\rangle$. Посмотрим поэтому, при каких условиях интенсивности определяются замкнутыми уравнениями, не содержащими билинейных комбинаций вида $\langle \xi_i\xi_k^*\rangle$ ($i \neq k$). Как видно из (26), для этого необходимо выполнение равенства

$$M_{ii,lm} = M_{ii,ll}\,\delta_{lm}. \tag{27}$$

В случае двух мод, когда матрица $\hat{V}$ имеет вид (21), равенство (27) выполняется для задачи с начальными условиями (т. е. при $a = b$), а для задачи с граничными условиями достаточно диагональности матрицы $\hat{d}$. Согласно (15), при $c \neq 0$ матрица $\hat{d}$ диагональна, если $c_{12} = c_{21} = 0$. Если же число мод больше двух, то диагональности не достаточно, равенство (27) не выполняется и уравнения переноса можно получить в общем случае, только рассматривая величины, усредненные в масштабах характерных длин волн (см. п. 13).

11. Влияние дополнительных условий на форму уравнений переноса. Это влияние мы проиллюстрируем на двух примерах. Рассмотрим две встречные моды в консервативном волноводе ($V_{12} = V_{21}^* = v$) при двух частных случаях дополнительных условий (5). Первый из них соответствует задаче с граничными условиями:

$$\xi_1(0) = \xi_1^0,\qquad \xi_2(L) = 0 \tag{28}$$

(согласованная нагрузка), а второй — задаче с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \xi_1(0) &= \xi_1^0, \\ \xi_2(0) &= \xi_2^0. \end{aligned} \tag{29}$$

(Последняя задача не имеет физического смысла, поскольку рассматриваются встречные моды.)

В первом случае

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а во втором — $\hat{d} = 0$. Вычисляя коэффициенты уравнения переноса согласно (26) и (27), получаем в первом случае

$$\dot{P}_1 = -\gamma(P_1 - P_2) = \dot{P}_2 \tag{30}$$

и во втором —

$$\dot{P}_1 = \gamma(P_1 + P_2) = \dot{P}_2, \tag{31}$$

где $\gamma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle v(x) v^*(x - x') \rangle dx'$. Дополнительные условия для (30) и (31) нетрудно получить из (28) и (29).

Системы уравнений переноса (30) и (31) были рассмотрены в работе [13].

12. Динамические уравнения для волн в многомодовых волноводах со случайными неоднородностями. Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dx}\eta = i\hat{\lambda}\eta + \mu\hat{V}\eta, \tag{32}$$

где $\eta = (\eta_{-N}, \dots, \eta_{-1}, \eta_1, \dots, \eta_N) = (\eta_i)_{-N}^{N}$, $\hat{\lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_{-N} \dots \lambda_N)$, $\lambda_i > 0$, $t > 0$, $\lambda_{-i} = -\lambda_i$, а случайная $2N \times 2N$ матрица $\hat{V}$ предполагается статистически однородной по x, причем $\langle \hat{V} \rangle = 0$.

Система (32) представляет собой очевидное феноменологическое обобщение аналогичной системы, использованной в [9]. Величины η_i рассматриваются как амплитуды волн, бегущих в направлении $+x$ и $-x$ соответственно при $i > 0$ и $i < 0$, а матрица $\hat{V}$ определяет рассеяние и связь между модами разных типов. В работе [10] были вычислены в явном виде коэффициенты этой системы для случая цилиндрического волновода с хаотическим заполнением и случайно-неоднородными стенками. В отличие от [9, 10] мы учли обратное рассеяние, а в отличие от [10] — пренебрегли нераспространяющимися модами.

Если амплитуды η_i нормированы так, что поток энергии для i-й моды S_i равен $\sigma_i |\eta_i|^2$, где $\sigma_i = \mathrm{sgn}\, i$, то в консервативной системе должен выполняться закон сохранения

$$\Sigma S_i = \Sigma \sigma_i |\eta_i|^2 = \mathrm{const},$$

для чего достаточно, чтобы элементы матрицы $\hat{V}$ удовлетворяли условию

$$V_{ij} = -\sigma_i \sigma_j V_{ji}^*. \tag{33}$$

Из физических соображений ясно, что при учете обратного рассеяния в случае отражающей нагрузки нужно дополнить (32) следующими граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_i(0) = \eta_i^0, \\ &\eta_{-i}(L) = \sum_{j=1}^{N} K_{-ij}\eta_j(L) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{34}$$

где матрица $\|K_{-ij}\|_1^N$ описывает отражение и трансформацию волн на конце волновода.

Систему (32) удобно записать в «представлении взаимодействия», положив $\xi = \exp(-i\hat{\lambda}x)\eta$. Для вектора $\xi(x)$ мы получаем тогда уравнение

$$\dot{\xi} = \mu \exp(-i\hat{\lambda}x)\,\hat{V}(x)\exp(i\hat{\lambda}x)\,\xi \equiv \mu\hat{V}_g\xi \tag{35}$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i(0) = \xi_i^0 \equiv \eta_i^0, \\ &\xi_i(L) = \sum_{j=1}^{N}(\hat{K}_g)_{-ij}\xi_j(L) \equiv \sum_{j=1}^{N} e^{-i\lambda_i L}K_{-ij}e^{i\lambda_j L}\xi_j(L) \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2,\ldots, N). \tag{36}$$

13. Уравнения переноса для интенсивностей волн в многомодовом волноводе. Эти уравнения можно вывести аналогично тому, как это сделано в п. 10 для случая двух мод. Уравнения для одноточечных моментов в пределе $|b-a| \gg l_к$ имеют вид (26′), где коэффициенты $M_{ij,\,lm}$ равны

$$\begin{aligned} M_{ij,\,lm} = {} & \sum_{k,\,p}\int_{-\infty}^{\infty}\langle V_{ik}(y')(d_{kp} + \theta(y')\delta_{kp})V_{pl}(0)\rangle \times \\ & \times \exp(i\lambda_{pl}y')\,dy'\exp[-i(\lambda_{ik} + \lambda_{pl})x]\,\delta_{jm} + \\ & + \sum_{k}\int_{-\infty}^{\infty}\langle V_{il}(y')(d^*_{jk} + \theta(y')\delta_{jk})V^*_{km}(0)\rangle\exp(-i\lambda_{km}y')\,dy' \times \\ & \times \exp[-i(\lambda_{il} - \lambda_{km})x] + \begin{pmatrix} i \longleftrightarrow j \\ l \longleftrightarrow m \end{pmatrix}^*, \end{aligned} \tag{37}$$

причем все индексы пробегают значения от $-N$ до $+N$, символ $\begin{pmatrix} i\longleftrightarrow j \\ l\longleftrightarrow m \end{pmatrix}$ означает сумму предшествующих слагаемых, в которой произведена замена индексов $(ijlm)$ на $(jiml)$; $\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$; $\theta(x) = 1$, $x \geqslant 0$; $\theta(x) = 0$, $x < 0$; $d_{-i-j} = -\delta_{ij}$, $d_{-ij} = (K_g)_{-ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$, а остальные члены матрицы $\hat{d}$ равны нулю.

В отличие от случая двух мод (п. 10) для выполнения условия (27) здесь уже недостаточно диагональности матрицы $\hat{d}$, т. е. отсутствия отражения и трансформации волн на конце волновода. Для получения уравнений переноса рассмотрим величины, усредненные в масштабе характерных длин волн $L_0 \sim \lambda_i^{-1}$. Тогда в (37) можно отбросить члены, содержащие быстро осциллирующие коэффициенты вида $\exp[-i(\lambda_{ik} + \lambda_{lm})x]$, рассматривая тем самым усредненные по x коэффициенты $M_{ij,\,lm}$, которые мы обозначим через $\overline{M}_{ij,lm}$. Физически такая процедура вполне понятна. Формально-математически она согласуется с предельным переходом к бесконечно длинной трассе при бесконечно слабых флуктуациях (см. [8–10]). Нетрудно видеть, что в отсутствие вырождения $(\lambda_{ij} \neq 0,\ i \neq j)$ и при $K_{-ij} = 0$ для усредненных коэффициентов $M_{ij,\,lm}$ соотношение (27) выполняется, так что усредненные по x интенсивности $\overline{P}_i$ удовлетворяют уравнению переноса

$$\frac{d}{dx}\overline{P}_l = \sum_{l=-N}^{N} \overline{M}_{ll,\,ll}\overline{P}_l. \tag{38}$$

Эту систему нужно решать при условиях

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_l(0) &= P_l^0\\ \overline{P}_{-l}(L) &= 0\end{aligned}\right\} \quad (l = 1, 2,\dots, N), \tag{39}$$

вытекающих из (34) при $K_{-ij} = 0$.

В случае волновода без потерь, используя (33) и (37), можно записать (38) в виде

$$\sigma_l \frac{d}{dx}\overline{P}_l = \sum_{l=-N}^{N} W_{ll}(\overline{P}_l - \overline{P}_l), \tag{40}$$

где

$$W_{ll} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle V_{ll}(x') V_{ll}^*(0) \rangle \exp(-i\lambda_{ll} x')\, dx' \tag{41}$$

— коэффициенты рассеяния и трансформации, рассчитанные в борновском приближении. Из (40) вытекает закон сохранения среднего потока энергии:

$$\frac{d}{dx}\sum_{l=-N}^{N} \sigma_l P_l = \frac{d}{dx}\sum_{l=1}^{N} (P_l - P_{-l}) = 0. \tag{42}$$

14. Заключение. Система уравнений переноса вида (40) для случая волноводов с шероховатыми стенками была выведена в работе [15] непосредственно из уравнения Бете — Солпитера для двухточечной функции Грина. При использованной нами постановке задачи (т. е. на основе линейного уравнения вида (32)) уравнения переноса выводились неоднократно [4, 8–10], но корректно была рассмотрена только задача с начальными условиями. Более сложный случай краевой задачи описывался феноменологически [8] или полуфеноменологически [4]. Распространенным подходом является приведение краевой задачи к задаче с начальными условиями — путем перехода от линейной исходной системы к нелинейному уравнению типа Риккати для коэффициента отражения [16]. Однако это не дает полного решения вопроса. Уравнения же в частных производных для двухточечных моментов, насколько известно автору, пока не рассматривались.

Автор благодарен С. М. Рытову и Ю. А. Кравцову за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. U. Frisch, in Probabilistic Methods in Applied Mathematics, ed. A. T. Bharucha-Reid, Acad. Press, 1968.
2. Л. Апресян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 165 (1974).
3. A. Brissaud and U. Frisch, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974).
4. D. Marcuse, IEEE Trans., MTT-20, 541 (1972).
5. Р. Б. Ваганов, Р. Ф. Матвеев, В. В. Мериакри, Многоволновые волноводы со случайными нерегулярностями, изд. Сов. радио, М., 1972.
6. A. W. Snyder, J. Opt. Soc. Amer., 62, № 11, 1267 (1972).
7. A. W. Snyder and C. Pask, J. Opt. Soc. Amer., 62, № 8, 998 (1972).
8. W. Kohler and G. C. Papanicolaou, J. Math. Phys., 14, № 12, 1733 (1973).
9. G. C. Papanicolaou, J. Math. Phys., 13, № 12, 1912 (1972).
10. W. Kohler, J. Math. Phys., 16, № 3, 536 (1975).
11. D. T. Young, Bell. Syst. Techn. J., 46, № 6, 2761 (1963).
12. S. E. Miller, Bell. Syst. Techn. J., 33, № 3, 661 (1954).
13. J. A. Morrison. IEEE Trans., MTT-22, № 2, 126 (1974).

14. J. B. Keller, Proc. Symp. on Turbulence of Fluids and Plasmas, N. Y., 1968, p. 131.
15. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
16. М. Х. Захар-Иткин, УМН, 25, № 5, 241 (1970).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
12 августа 1975 г.

THE INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE FORM OF MOMENTAL EQUATIONS IN THE CASE OF MULTI-MODE WAVEGUIDES WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

L. Apresyan

The influence of determinated additional boundary or initial conditions on the form of momental equations has been considered by the example of equations for the first and the second moments of waves in multi-mode waveguides with random inhomogeneities. The transfer equations are obtained for traveling wave intensities, the backscattering being taken into account. These equations are shown to form a closed system only in the absence of reflection at the ends of the waveguide.