ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XX, № 2 РАДИОФИЗИКА 1977

УДК 538.56 : 519.25

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

О. Г. Налбандян, В. И. Татарский

Задача о распространении плоской волны в среде со случайными неоднородностями рассматривается в приближении параболического уравнения. В отличие от работы [1], где подобная задача рассматривалась в приближении марковской δ-коррелированной модели, в настоящей работе выражение для продольной и поперечной корреляций поля получено в приближении, пригодном для произвольных расстояний между точками наблюдения. Полученные в работе выражения для среднего поля и пространственной корреляции поля описывают эффект фазовой задержки поля, обусловленный непрямолинейностью лучей вследствие наличия неоднородностей.

Для широкого круга задач, связанных с распространением волн в случайно-неоднородной среде, необходимо знание как продольной, так и поперечной корреляций поля волны, прошедшей сквозь среду.

Поперечная корреляция поля хорошо описывается в приближении марковской модели [2]. Однако при вычислении продольной корреляции поля предположение о δ-коррелированности неоднородностей вдоль направления первоначального распространения волны x оказывается правомочным лишь при условии, что продольное расстояние ξ между точками наблюдения много больше характерного масштаба корреляции неоднородностей. В настоящей работе расчет продольной корреляции проведен в приближении Бурре [3], которое является более общим, чем марковское приближение, и переходит в него при стремлении к нулю продольного радиуса корреляции неоднородностей.

1. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ

Распространение волн будем описывать скалярным параболическим уравнением [2]

$$2ik\frac{\partial U}{\partial x} + \Delta_\rho U + k^2\varepsilon(x, \rho)U(x, \rho) = 0, \quad U(0, \rho) = U_0. \tag{1}$$

Усреднив уравнение (1) в предположении начальной плоской волны, получим

$$\frac{\partial \overline{U}(x)}{\partial x} = \frac{ik}{2}\langle \varepsilon(x, \rho)U(x, \rho)\rangle. \tag{2}$$

Для нахождения корреляции $\langle \varepsilon(x, \rho)U(x, \rho)\rangle$ запишем уравнение (1) в интегральном виде:

$$U(x, \rho) = U^0(x, \rho) + \frac{ik}{2}\int g(x, \rho;\, x', \rho')\,\varepsilon(x', \rho')U(x', \rho')dx'd^2\rho'. \tag{3}$$

Здесь функция

$$g(x, \rho; x', \rho') = g(x - x', \rho - \rho') = \frac{k\,\theta(x - x')}{2\pi i(x - x')} \exp\left[\frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x - x')}\right]$$

представляет собой функцию Грина уравнения (1) в отсутствие неоднородностей, т. е. при $\varepsilon \equiv 0$.

Умножим уравнение (3) на $\varepsilon(x, \rho)$ и после усреднения в приближении Бурре, т. е. с использованием приближенного равенства

$$\langle \varepsilon(x, \rho)\varepsilon(x', \rho')U(x', \rho')\rangle \approx \langle \varepsilon(x, \rho)\varepsilon(x', \rho')\rangle\langle U(x', \rho')\rangle,$$

имеем

$$\langle \varepsilon(x, \rho)U(x, \rho)\rangle = \frac{ik}{2}\int g(x, \rho; x', \rho')B(x, \rho; x', \rho')\overline{U}(x')dx'd^2\rho', \tag{4}$$

где

$$B(x, \rho; x', \rho') = B(x - x', \rho - \rho') = \langle \varepsilon(x, \rho)\varepsilon(x', \rho')\rangle, \quad B(0, 0) = \sigma^2.$$

С учетом выражения (4) уравнение (2) примет вид

$$\frac{d\overline{U}(x)}{dx} = -\frac{k^2}{4}\int g(x - x', \rho - \rho')B(x - x', \rho - \rho')\overline{U}(x')dx'd^2\rho'. \tag{5}$$

Приближение Бурре, приводящее к уравнению (5), правомочно [4, 5] при условии $k\sigma L_1 \ll 1$. Входящий в (5) интеграл

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(x - x', \rho')B(x - x', \rho')d^2\rho'$$

можно взять в предположении, что функция $B(x, \rho)$, является более гладкой по переменной ρ, чем функция $g(x, \rho)$; что справедливо при выполнении условия

$$\sqrt{L_1/k} \ll R_\varepsilon,$$

где R_ε — характерный поперечный, а $L_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(x', 0)dx'/B(0, 0)$ — характерный продольный масштабы корреляции неоднородностей. В этом случае

$$\frac{d\overline{U}(x)}{dx} = -\frac{k^2}{4}\int\limits_0^x \overline{U}(x - x')B(x')dx', \qquad B(x) \equiv B(x, 0). \tag{6}$$

Из (6) легко получить, что при $x \gg L_1$ характерный масштаб изменения функции $\overline{U}(x)$ равен $8(k^2\sigma^2L_1)^{-1}$, а при $x \ll L_1$ равен $2/k\sigma$. Если положить, что характерный масштаб функции $\overline{U}(x)$ в обоих предельных случаях много больше L_1, что соответствует условию

$$k\sigma L_1 \ll 1, \tag{7}$$

то функцию $\overline{U}(x)$ можно считать более плавной по переменной x, нежели функцию $B(x)$. В этом случае, вынося в выражении (6) искомую функцию из-под знака интегрирования, получим

$$U(x) = U_0\exp\left[-\frac{k^2}{4}\int\limits_0^x (x - x')B(x')dx'\right]. \tag{8}$$

Заметим, что уравнение (6) имеет чисто действительное решение и не описывает эффект фазовой задержки поля, вызванный непрямолинейностью лучей вследствие наличия неоднородностей. Величина фазовой задержки определяется отклонением луча от оси x и, как нетрудно проверить, в случае применимости малоуглового приближения характерный масштаб изменения члена, описывающего фазовую задержку, много больше остальных характерных масштабов задачи. Таким образом, при условии (7) искомую функцию в уравнении (5) можно вынести из-под знака интегрирования и выражение для среднего поля получим в виде произведения двух членов:

$$\overline{U}(x) = U_0 \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho'(x-x')B(x',\rho')\mathrm{Re}[g(x',\rho')]\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-i\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho'(x-x')B(x',\rho')\mathrm{Im}[g(x',\rho')]\right\}. \quad (9)$$

Первый член описывает затухание поля с ростом пройденного волной пути и при $\sqrt{L_1/k} \ll R_\varepsilon$ хорошо аппроксимируется решением уравнения (6). Второй, осциллирующий член описывает фазовую задержку поля. Заметим, что

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}[g(x',\rho')]d^2\rho' = 0$$

и поэтому в (9) в подынтегральном выражении второго сомножителя из корреляционной функции $B(x', \rho')$ можно вычесть ее значение в нуле $B(0)$, что соответствует учету лишь мелкомасштабных флуктуаций ε. Таким образом, в то время как затухание среднего поля в основном определяется крупномасштабными неоднородностями, фазовая задержка обусловлена мелкомасштабными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Последнее утверждение имеет простую физическую интерпретацию, так как отклонение луча от направления первоначального распространения обратно пропорционально размеру рассеивающей неоднородности.

Следует отметить, что при $x \gg L_1$ верхний предел входящих в (9) интегралов по x' можно заменить на L_1 и, таким образом, независимо от конкретного вида корреляционной функции $B(x, \rho)$, оба подэкспоненциальных выражения оказываются пропорциональными пути x, пройденному волной в среде.

В качестве примера рассмотрим изотропное случайное поле $\varepsilon(x, \rho)$ с корреляционной функцией вида

$$B(x,\rho) = \sigma^2 \exp\left[-\frac{\pi}{L_1^2}(x^2+\rho^2)\right].$$

В этом случае среднее поле при $x \gg L_1$ имеет вид

$$\overline{U}(x) = U_0 \exp\left(-\frac{k^2}{8}\sigma^2 L_1 x\right)\exp\left(i\frac{k\sigma^2}{4}x\right), \quad (10)$$

а при $x \ll L_1$ соответственно

$$U(x) = U_0 \cos\left(\frac{k\sigma}{2}x\right)\exp\left(i\frac{\pi k\sigma^2}{12L_1^2}x^3\right). \quad (11)$$

2. КОРРЕЛЯЦИЯ ПОЛЯ

При определении корреляции поля

$$\Gamma_2(x_1, \rho_1; x_2, \rho_2) \equiv \langle \gamma_2(x_1, \rho_1; x_2, \rho_2) \rangle \equiv \langle U(x_1, \rho_1) U^*(x_2, \rho_2) \rangle$$

вновь будем отправляться от параболического уравнения (1):

$$2ik \frac{\partial U(x_1, \rho_1)}{\partial x_1} + \Delta_1 U(x_1, \rho_1) + k^2 \varepsilon(x_1, \rho_1) U(x_1, \rho_1) = 0; \tag{12}$$

$$-2ik \frac{\partial U^*(x_2, \rho_2)}{\partial x_2} + \Delta_2 U^*(x_2, \rho_2) + k^2 \varepsilon(x_2, \rho_2) U^*(x_2, \rho_2) = 0. \tag{13}$$

Умножим уравнение (12) на $U^*(x_2, \rho_2)$, сопряженное ему уравнение (13) — на $U(x_1, \rho_1)$ и вычтем одно из другого. В результате получим уравнение для $\gamma_2(x_1, \rho_1; x_2, \rho_2)$, которое после замены переменных

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x, \quad x_1 - x_2 = \xi, \quad \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \boldsymbol{R}, \quad \rho_1 - \rho_2 = \rho$$

примет вид

$$2ik \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + 2\nabla_R \nabla_\rho \gamma_2 + k^2 \varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) \gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) = 0, \tag{14}$$

где

$$\varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) = \varepsilon\left(x + \frac{\xi}{2}, \boldsymbol{R} + \frac{\rho}{2}\right) - \varepsilon\left(x - \frac{\xi}{2}, \boldsymbol{R} - \frac{\rho}{2}\right).$$

Усредним уравнение (14) по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho)$. В случае, когда падающая на неоднородную среду волна является плоской, то $\nabla_R \Gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) = 0$, и мы имеем

$$\frac{\partial \Gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho)}{\partial x} = i \frac{k}{2} \langle \varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) \gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) \rangle. \tag{15}$$

Для нахождения корреляции $\langle \varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) \gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) \rangle$ действуем аналогично вышеописанной процедуре со средним полем.

Запишем уравнение (14) в интегральной форме

$$\gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) = \gamma_2^0(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) + \frac{ik}{2} \int dx' d^2R' d^2\rho' \times$$
$$\times g(x, \boldsymbol{R}, \rho; x', \boldsymbol{R}', \rho') \varepsilon^+(x', \xi, \boldsymbol{R}', \rho') \gamma_2(x', \xi, \boldsymbol{R}', \rho'), \tag{16}$$

где функция

$$g(x, \boldsymbol{R}, \rho; x', \boldsymbol{R}', \rho') \equiv g(x - x', \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}', \rho - \rho') =$$
$$= \frac{k^2 \theta(x - x')}{4\pi^2 (x - x')^2} \exp\left[ik \frac{(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}')(\rho - \rho')}{x - x'}\right] \tag{17}$$

является функцией Грина для уравнения (14) при $\varepsilon^+ \equiv 0$. Умножим уравнение (16) на $\varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho)$ и усредним в приближении Бурре. Получившееся для корреляции $\langle \varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) \gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho) \rangle$ выражение после подстановки в (15) дает уравнение для функции $\Gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \rho)$:

$$\frac{\partial \Gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})}{\partial x} = -\frac{k^2}{4}\int\limits_{\xi/2}^{x} dx' \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2R' \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' g(x, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho};\ x', \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}') \times$$
$$\times \langle \varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})\, \varepsilon^+(x', \xi, \boldsymbol{R}', \boldsymbol{\rho}') \rangle\, \Gamma_2(x', \xi, \boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}', \boldsymbol{\rho}'). \tag{18}$$

Если положить $x = \xi/2$, то одна из точек наблюдения окажется в плоскости $x = 0$, а другая — в плоскости $x = \xi$. Поэтому уравнение (18) будем решать с граничным условием

$$\Gamma_2\left(\frac{\xi}{2}, \xi, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}\right) = U_0\overline{U}(\xi). \tag{19}$$

Решение уравнения (18) будем искать в предположении, что искомая функция $\Gamma_2(x', \xi, \boldsymbol{R}', \boldsymbol{\rho}')$ является более плавной, чем остальные члены подынтегрального выражения — правомочность такого предположения будет ясна из полученного решения. Тогда, выражая входящую в уравнение (18) корреляционную функцию случайного поля $\varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})$ через корреляционную функцию случайного поля ε,

$$\langle \varepsilon^+(x, \xi, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho})\, \varepsilon^+(x', \xi, \boldsymbol{R}', \boldsymbol{\rho}') \rangle =$$
$$= B\left(x - x', \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}' + \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) + B\left(x - x', \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}' - \frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) - \tag{20}$$
$$- B\left(x - x' + \xi, \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}' + \frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'}{2}\right) - B\left(x - x' - \xi, \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}' - \frac{\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'}{2}\right),$$

решение уравнения (18) получим в виде

$$\Gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}) = U_0\overline{U}(\xi)\exp\left\{-\frac{k^4}{16\pi^2}\int\limits_0^{x-\xi/2} dx' \int\limits_0^{x'} \frac{dx_1}{x_1^2} \times\right.$$
$$\times \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2R_1 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_1\, [B(x_1, \boldsymbol{\rho}_1) + B(x_1, \boldsymbol{R}_1) - \tag{21}$$
$$\left. - B(x_1 + \xi, \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}) - B(x_1 - \xi, \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{\rho})]\exp\left[\frac{ik}{2x_1}(R_1^2 - \rho_1^2)\right]\right\}.$$

После несложных преобразований можно получить

$$\Gamma_2(x, \xi, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\rho}) = U_0\overline{U}(\xi)\exp\left\{\frac{ik^3}{8\pi}\int\limits_0^{x-\xi/2} dx' \int\limits_{-x'}^{x'} \frac{dx_1}{x_1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho_1 \times\right.$$
$$\left. \times \exp\left(-\frac{ik}{2x_1}\rho_1^2\right)[B(x_1, \boldsymbol{\rho}_1) - B(x_1 + \xi, \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho})]\right\}. \tag{22}$$

Как и следовало ожидать, выражение (22) не зависит от $\boldsymbol{R}$, поэтому в дальнейщем переменную $\boldsymbol{R}$ мы будем опускать.

Для вычисления интегралов в выражении (22) аппроксимируем случайный процесс $\varepsilon(x, \boldsymbol{\rho})$ процессом, δ-коррелированным вдоль оси x. Такая аппроксимация правомочна при $x - \xi/2 \gg L_1$. Так как величина $x - \xi/2$ изменяется от $x/2$ до x, то тем самым накладывается ограничение только на величину x: $x \gg L_1$, т. е. переход к модели δ-коррелированных неоднородностей не накладывает ограничений на величину ξ. При этом можно считать, что замена истинного случайного процесса $\varepsilon(x, \rho)$ на δ-коррелированный справедлива при тех же условиях, что и в случае $\xi = 0$, которые подробно исследованы в [6]. Полагая в (22)

$$B(x, \rho) = \delta(x) A(\rho),$$

где

$$A(\rho) = 2\pi \int \Phi_\varepsilon(\varkappa) e^{i\varkappa\rho} d^2\varkappa, \qquad A(0) \equiv A_0 = \sigma^2 L_1,$$

$\Phi_\varepsilon(\varkappa)$ — спектр флуктуаций ε, имеем

$$\Gamma_2(x, \xi, \rho) = U_0 \overline{U}(\xi) \exp\left\{\frac{ik^3}{8\pi} \frac{x - \xi/2}{\xi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [A_0 - A(\rho + \rho_1)] \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left(-\frac{ik}{2\xi}\rho_1^2\right) d^2\rho_1\right\}. \tag{23}$$

Если в выражении (23) положить $|\rho| \gg R_\varepsilon$ и в качестве функции $\overline{U}(\xi)$ подставить выражение, соответствующее первому марковскому приближению [2], то получим

$$\Gamma_2(x, \xi, \rho) = \overline{U}\left(x - \frac{\xi}{2}\right) U\left(x + \frac{\xi}{2}\right). \tag{24}$$

Полученный результат (24) соответствует независимому распространению лучей, приходящих в сильно разнесенные в поперечной плоскости точки наблюдения.

Выражение (23) для функции $\Gamma_2(x, \xi, \rho)$ может быть представлено через спектр $\Phi_\varepsilon(\varkappa)$ флуктуаций неоднородностей. Для этого заметим, что подэкспоненциальное выражение в (23) представляет собой двумерную фурье-свертку функций $A(\rho)$ и $\exp\left(-\frac{ik}{2\xi}\rho^2\right)$:

$$\Gamma_2(x, \xi, \rho) = U_0 \overline{U}(\xi) \exp\left[-\frac{k^2}{4} A_0\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{ik^3}{8\pi} \frac{x - \xi/2}{\xi}\left[A(\rho) * \exp\left(-\frac{ik}{2\xi}\rho^2\right)\right]\right\}. \tag{25}$$

Поэтому, последовательно подействовав на подэкспоненциальное выражение прямым и обратным двумерными преобразованиями Фурье, получим

$$\Gamma_2(x, \xi, \rho) = U_0 \overline{U}(\xi) \exp\left[-\frac{k^2}{4} A_0\left(x - \frac{\xi}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{k^2}{4}\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\varkappa) e^{i\varkappa\rho} \exp\left(-\frac{\varkappa^2\xi}{2ik}\right) d^2\varkappa\right\}. \tag{26}$$

Дифракционный множитель $\exp\left(-\frac{\varkappa^2\xi}{2ik}\right)$ искажает высокочастотную часть спектра флуктуаций неоднородностей и, по существу, эквивалентен искажению внутреннего масштаба неоднородностей. Если в (26) положить $\xi = 0$, то искажение спектра отсутствует и для функции

$\Gamma_2(x, 0, \rho)$ получится выражение, соответствующее чисто поперечной корреляции [2].

При исследовании распространения волн в турбулентной атмосфере внутренний масштаб неоднородностей l_0 зачастую вводится умножением степенного спектра на член $\exp\left(-\frac{\varkappa^2 l_0^2}{4\pi^2}\right)$, обрезающий высокочастотную часть спектра. В этом случае влияние дифракционного множителя в (26) эквивалентно введению эффективного внутреннего масштаба турбулентности:

$$l_{\text{эфф}} = \left(l_0^2 + \frac{2\pi^2\xi}{ik}\right)^{1/2}, \tag{27}$$

и выражение (26) для функции $\Gamma_2(x, \xi, \rho)$ можно записать в виде

$$\Gamma_2(x, \xi, \rho) = U_0 U(\xi) \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)[A_0 - A_{\text{эфф}}(\rho)]\right\}, \tag{28}$$

где $A_{\text{эфф}}(\rho)$ есть функция $A(\rho)$ с искаженным внутренним масштабом $l_{\text{эфф}}$ вместо истинного l_0. Следует заметить, что $A_{\text{эфф}}(0) \neq A_0$ и при $\rho = 0$ экспонента в выражении (28) не обращается в единицу. В этом нетрудно убедиться, положив в выражении (26) $\rho = 0$. Для спектра флуктуаций ε вида

$$\Phi_\varepsilon(\varkappa) = A C_\varepsilon^2 \varkappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_m^2}\right) \qquad \left(\varkappa_m = \frac{2\pi}{l_0}\right) \tag{29}$$

имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \xi, 0) &= U_0 \overline{U}(\xi) \exp\left\{-\frac{k^2}{4}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)[A_0 - A_{\text{эфф}}(0)]\right\} = \\ &= U_0 \overline{U}(\xi) \exp\left[-\frac{6\pi^2 \Gamma(1/6)}{5 \cdot 2^{11/6}} C_\varepsilon^2 k^{7/6} x (i\xi)^{5/6}\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Характерные масштабы изменения как действительной, так и мнимой частей экспоненциального множителя

$$\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\left(x - \frac{\xi}{2}\right)[A_0 - A_{\text{эфф}}(0)]\right\} \tag{31}$$

равны $L(L/x)^{6/5}$, где $L = (1{,}23\, C_\varepsilon^2 k^{7/6})^{-6/11}$ — расстояние, на котором дисперсия флуктуаций интенсивности, вычисленная по методу плавных возмущений [7], становится равной единице.

Анализ выражения (30) показывает, что при $x \ll (k^2 \sigma^2 L_1)^{5/6} L^{11/6}$ затухание корреляции определяется затуханием среднего поля на пути между точками наблюдения, а при $x \gg (k^2 \sigma^2 L_1)^{5/6} L^{11/6}$ — экспоненциальным множителем (31). При условии $x \gg (k\sigma^2)^{5/6} L^{11/6}$, как правило, выполняющемся для реальных параметров задачи, фазовым сдвигом, описываемым функцией $\overline{U}(\xi)$, можно пренебречь.

На основе выражений (28) и (30) можно записать:

$$\Gamma_2(x, \xi, \rho) = \Gamma_2(x, \xi, 0) \exp\left[-\frac{1}{2} D_{1\,\text{эфф}}(x, \rho)\right]. \tag{32}$$

Здесь $D_{1\,\text{эфф}}(x, \rho)$ есть функция $D_1(x, \rho)$, в которой вместо истинного внутреннего масштаба неоднородностей l_0 подставлен эффективный внутренний масштаб $l_{\text{эфф}}$. Функция $D_1(x, \rho)$ представляет собой структурную функцию комплексной фазы. В случае изотропной турбулентности функция

$$D_1(x, \rho) = 2\pi^2 k^2 x \int_0^\infty [1 - J_0(\varkappa\rho)]\, \Phi_\varepsilon(\varkappa)\varkappa\, d\varkappa \tag{33}$$

для спектра (29) имеет вид [7]

$$D_1(x, \rho) = \frac{6}{5}\pi^2 A\, \Gamma(1/6) C_\varepsilon^2 k^2 x\, \varkappa_m^{-5/3} \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\varkappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1 \right]. \tag{34}$$

Из полученного решения можно показать, что переход от уравнения (18) к уравнению (21) правомочен при условии $L_1 \ll L$, означающем малость флуктуаций интенсивности волны, прошедшей расстояние, равное продольному масштабу корреляции неоднородностей.

В заключение авторы выражают признательность В. И. Кляцкину за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1069 (1970).
2. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1970.
3. R. Bourret, Nuovo Cimento, 26, 1 (1962).
4. A. Brissaud, U. Frish, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974)
5. Л. А. Апресян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 165 (1974).
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш уч зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).
7. В И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
27 октября 1975 г.

SPATIAL CORRELATION OF THE WAVE FIELD IN A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM

O. G. Nalbandyan, V. I. Tatarsky

The problem of propagation of a plane wave in a medium with random inhomogeneities is considered in the parabolic equation approximation. In contrast to the paper [1] where the similar problem was considered in the approximation of the Markov δ-correlated model, in the present paper the expression for longitudinal and transverse field correlations is obtained in the approximation useful for arbitrary distances between the observation points. Expressions obtained in the paper for the mean field and spatial field correlation describe the effect of the phase delay of the field due to the ray nonrectilinearity because of the presence of inhomogeneities.