

УДК 538.574.6

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

(Обзор)

*В. В. Никольский***СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение
2. Единый подход к задачам дифракции для волноводных систем и свободного пространства
3. Внутренние ключевые задачи и соответствующие вариационные формулировки для процесса дифракции
4. Методы типа Бубнова — Галеркина и Ритца
Короткое замыкание
Холостой ход
Импедансная трактовка
5. Метод поперечных сечений
6. Метод Трефтца и комбинированный метод
7. Дифракция на полосковых устройствах. Декомпозиция. Соотношение вариационных методов
8. Апостериорные оценки погрешности
9. Заключение
10. Приложение

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое изучение дифракции электромагнитных волн ведет к крайним задачам электродинамики или соответствующим интегральным уравнениям. Хорошо известно, что в силу математических трудностей теория дифракции отдает предпочтение конфигурационно простым объектам [1]. Между тем, интенсивное развитие вычислительных средств все более оправдывает тенденции широкого внедрения математических моделей в радиотехническую практику. При проектировании антенных, волноводных и иных устройств на передний план выдвигаются методы, пригодные для построения математических моделей, близких к реальности.

В этом отношении знаменательна роль вариационных методов в электродинамике, приобретающих все более твердую почву по мере совершенствования ЭВМ. Первоначальная идея здесь состоит в том, что электродинамической задаче сопоставляется некоторый функционал и ищется его стационарное значение на множестве «допустимых» функций; оказывается, что последовательность функций, реализующих приближение к стационарному значению, стремится — в некоторой метрике — к решению поставленной задачи. При этом большое практическое значение может иметь не функция-реализатор, а само стационарное значение функционала, дающее некоторый характеристический параметр задачи. Такой подход, или, как говорят, решение вариационной задачи, довольно гибко, поскольку в определенной мере (порой довольно значительной) снимаются конфигурационные и аналитические ограничения. Интересно, что в простых случаях может оказаться полезной подстановка в функционал функции, найденной интуитивно (из

физических соображений). Что же касается более или менее сложных электродинамических задач, в частности дифракционных, то применение к ним вариационных методов было почти бесперспективным до появления больших ЭВМ.

Отметим теперь, что алгоритмизация вариационных методов для рассматриваемых задач обычно связана с проектированием из функционального пространства на его конечномерное подпространство. В этом можно видеть сущность известного метода Ритца, относя его, таким образом, к проекционным методам.

Хотя изложение основ вариационного исчисления и вариационных методов в электродинамике [2, 3] не входит в план данного обзора, для дальнейшего понадобится краткое обсуждение некоторых фактов.

Сформулируем две задачи:

$$Lu = f \text{ и } \tilde{L}v = g, \quad (1.1)$$

где L — линейный оператор (например, оператор краевой задачи или интегральный), \tilde{L} — сопряженный оператор, а f и g — независимые заданные «функции возбуждения». Этим формулировкам сопоставим следующий функционал:

$$F(u, v) = (Lu, v) - (f, v) - (u, g) \quad (1.2)$$

(справа записаны скалярные произведения).

Метод Ритца для задач (1.1) опирается на выбор в функциональном пространстве некоторого базиса $\{u_n\}$. Строится представление

$$u^N = \sum_{n=1}^N a_n u_n \text{ и } v^N = \sum_{n=1}^N b_n u_n \quad (1.3)$$

(a_n, b_n — неопределенные коэффициенты). В простейшем случае, когда базисные функции принадлежат области определения операторов L ,

\tilde{L} ($u_n \in D_{L, \tilde{L}}$), правомерна обычная подстановка: $u \rightarrow u^N$, $v \rightarrow v^N$, которая приводит функционал $F(u, v)$ к виду

$$F^N = \sum_{k, n=1}^N a_k b_n^* (Lu_k, u_n) - \sum_{n=1}^N [b_n^* (f, u_n) + a_n (u_n, g)]. \quad (1.4)$$

Очевидно, F^N есть функция переменных $a_1, a_2, \dots, a_N, b_1^*, b_2^*, \dots, b_N^*$. Формально метод Ритца — применительно к первой из задач (1.1) — заключается в вычислении и обращении в нуль частных производных от F^N по всем b_n^* :

$$\frac{\partial F^N}{\partial b_n^*} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (1.5)$$

Как видно из (1.4), данная операция приводит к следующему «алгебраическому образу» задачи $Lu = f$:

$$La = f. \quad (1.6)$$

Это неоднородная система линейных уравнений относительно a (вектор, составленный из коэффициентов a_n суммы u^N (1.3)), L — матрица с элементами $L_{kn} = (Lu_n, u_k)$ и f — вектор с компонентами $f_k = \{f, u_k\}$.

Заметим, что при самосопряженности L ($\tilde{L} = L$) алгебраическая форма (1.6) может быть получена методом Ритца из квадратичного функционала $F(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$, что используется для обоснований метода [2].

Проекционный характер системы уравнений (1.6) настолько очевиден, что для ее получения нет необходимости прибегать к посредству

каких бы то ни было функционалов. Исходя прямо из первой формулировки (1.1), учтем, что нулевой элемент функционального пространства $Lu - f$ ортогонален всем u_n . Используя представление u^N (1.3) и налагая требование ортогональности до N включительно, при замене $u \rightarrow u^N$ имеем

$$(Lu^N - f, u_k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (1.7)$$

Отсюда сразу же получаем систему уравнений (1.6). Процесс (1.7), как известно, называется методом Бубнова—Галеркина.

Разумеется, с алгоритмической точки зрения, совершенно безразличен способ рассуждений, приводящий от исходной задачи $Lu = f$ (1.1) к алгебраической задаче $La = f$ (1.6). При этом прямой проекционный путь, заключенный в методе Бубнова—Галеркина, сам по себе лишен вариационной идеи (хотя по традиции этот метод и относят к вариационным [2]). Реализация алгоритма базируется на применении к системе (1.6) вычислительных методов линейной алгебры.

Остается, однако, проблема обоснования алгоритма, т. е. по крайней мере, доказательство сходимости $u^N \rightarrow u$ в функциональном пространстве при $N \rightarrow \infty$. Такое доказательство может использовать вариационные принципы или быть совершенно свободным от них. Но надо иметь в виду, что формальное обоснование еще не гарантирует успеха при реализации алгоритма: сходимость может оказаться недопустимо медленной; особого внимания может потребовать проблема устойчивости.

Чем проблематичнее получение удовлетворительного представления u^N путем решения системы уравнений (1.6) высокого порядка N , тем важнее уметь оценивать реализованную степень точности u^N или характеристических параметров, выражаемых как функционалы $\Phi(u^N)$. Развитие вариационных методов и родственных принципов позволяет подойти к построению апостериорных оценок погрешности, вычисления таких характеристических параметров. На основе апостериорных оценок могут быть развиты и неалгебраические алгоритмы для задач дифракции с известной полосой погрешности.

Рассмотренное выше сведение задачи $Lu = f$ (1.1) к системе алгебраических уравнений $La = f$ (1.6) дает общее представление об одном классе алгоритмов вариационного (проекционного) типа для задач дифракции. Конкретизация определяется видом оператора L и выбором базиса $\{u_n\}$. Типично применение функций u_n , не принадлежащих области D_L ; прямая подстановка u^N в (1.2) или (1.7) при этом невозможна; скалярные произведения преобразуются интегрированием по частям [2, 3].

Другой важный класс алгоритмов порождается использованием представлений u^N, v^N с коэффициентами, зависящими от одной пространственной координаты: $a_n = a_n(\zeta), b_n = b_n(\zeta)$. В отличие от предыдущего задача (1.1) сводится при этом к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Как и ранее, к одному и тому же результату приводят процессы Бубнова—Галеркина и Ритца. Без связи с задачами дифракции метод подробно изложен в [4].

Большое значение имеет также метод Трефтца, более известный в электродинамике как метод частичных областей. Обычно он применяется при отсутствии объемных источников (в (1.1) $f = 0$). Особенностью метода является использование базисных функций u_n , подчиненных основному уравнению задачи (т. е. $Lu_n = 0$), но не удовлетворяющих некоторым (или всем) краевым условиям. Система базисных функций должна быть полна лишь на соответствующих границах. Метод Трефтца приводит к системе алгебраических уравнений, проще всего получаемой путем ортогонализации невязки краевых условий базису

(в (1.7) L понимается как оператор краевых условий, $f = 0$, а интегрирование производится по границам). Но можно следовать схеме Ритца или Бубнова—Галеркина и прийти к тому же результату после необходимого интегрирования по частям.

Существенно, что базисные функции в методе Трефтца («базисы Трефтца») можно строить таким образом, чтобы некоторые из краевых условий заранее удовлетворялись в среднем. Другая возможность заключается в использовании метода Трефтца для сведения краевой задачи к интегральному уравнению, к которому затем применяется метод Бубнова—Галеркина.

В предлагаемом обзоре вариационных (проеекционных) методов применительно к задачам дифракции электромагнитных волн будут рассмотрены все упомянутые способы алгоритмизации. Автор надеется, что это охватывает основной поток исследований. Тем не менее, обзор не может претендовать на полноту, а также и на подробность изложения всех затронутых вопросов. В большинстве случаев читатель сможет произвести требуемую детализацию, опираясь на цитированную литературу. Это касается, например, обоснования типа «доказательств сходимости», полное изложение которых потребовало бы значительного объема.

Хорошо известно, что наибольшего распространения вариационные методы достигли в области внутренних задач дифракции. Отличительной чертой предлагаемого обзора является формулирование наметившегося в последние годы единого подхода к задачам внутренним и внешним.

Обзор заканчивается Приложением, в котором произведена систематизация некоторых стандартных понятий с целью пояснения основного текста.

Закончим Введение замечаниями об электродинамической символике, используемой в дальнейшем тексте.

Будем исходить из уравнений Максвелла относительно комплексных амплитуд векторов поля в форме

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i \omega \epsilon E + j, \\ \operatorname{rot} E &= -i \omega \mu H, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где ϵ и μ — в общем случае комплексные тензоры, зависящие от координат.

Эти же уравнения будут фигурировать и в более компактной записи, подробно обсуждавшейся в [3]:

$$(M - \omega \pi) u = f. \quad (1.9)$$

Здесь

$$u = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}, \quad M = i \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad f = i \begin{pmatrix} -j \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9')$$

Столбец u будем называть «полем», M — «оператором Максвелла», π — «проницаемостью», f — «источником».

2. ЕДИНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМ И СВОБОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Понятие дифракции является довольно широким. В данной статье рассматриваются лишь гармонические во времени электромагнитные процессы, интерпретируемые как отклик некоторой линейной системы

на заданный сигнал в виде волны или системы волн. Нахождение этого отклика — поля дифракции — требует решения краевой задачи для уравнений Максвелла (1.8) либо эквивалентной математической задачи, в частности вариационной.

Начнем с установления общих средств описания дифракционных процессов различных классов. На рис. 1 а схематически представлена электродинамическая система, называемая волноводным трансформатором. Некоторые тела, радиопрозрачные и металлические (объемы V_d и V_m), находятся внутри энергетически изолирующей оболочки S_0 с выходом в присоединенные волноводы. Общности радиосистема предполагается активной: задана область сторонних токов $j^{ст}$. Аналогичная совокупность объектов в свободном пространстве представлена на рис. 1 б.

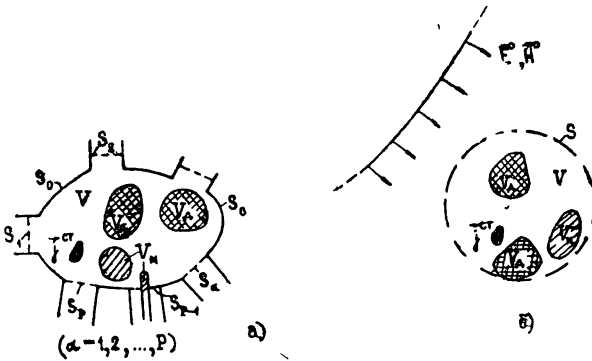


Рис. 1.

Обе эти незамкнутые электродинамические системы имеют внешний канал, по которому распространяются как прямые (падающие, сходящиеся) волны, направленные в сторону системы, так и обратные (отраженные, расходящиеся) волны, составляющие поле дифракции. Внешний канал волноводного трансформатора (рис. 1 а) есть совокупность регулярных волноводов, входные сечения которых (S_α , $\alpha = 1, 2, \dots, P$) обозначены пунктиром. Внешним каналом открытой системы (рис. 1 б) является свободное пространство, трактуемое как шаровой волновод с входным сечением в виде сферы S , внутри которой расположены все объекты, образующие электродинамическую систему; выбор центра сферы произволен; требуется лишь, чтобы вне S было однородное пространство (ограничение радиуса снизу).

Простейшая разновидность волноводного трансформатора (рис. 2а) есть область, выделенная в регулярном волноводе. При удалении тел V_d и V_m (а также источников) в данном случае предмет задачи дифракции исчезает, чего нельзя сказать в общем случае (рис. 1 а), когда дифракцию вызывает уже сама полая система.

Сравнимой по сложности является открытая двумерно-периодическая система (рис. 2б). Действительно, здесь достаточно рассматривать лишь один из каналов Флоке, который

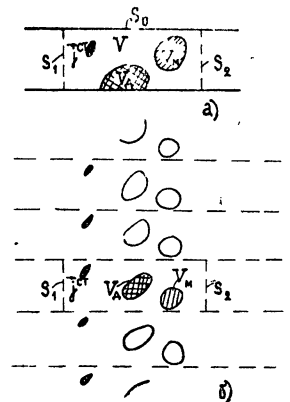


Рис. 2.

конфигурационно повторяет описанный выше простейший волноводный трансформатор; на рис. 2б каналы Флоке разделены пунктирными линиями.

Единый подход к описанию дифракционных процессов во всех рассмотренных (и подобных им) электродинамических системах основывается на том, что любое электромагнитное поле u во внешнем канале представимо в виде наложения его нормальных волн* обоим направлениям u_n^\pm (символика соответствует уравнениям Максвелла в форме (1.9)). При этом любое тангенциальное поле на открытой границе системы, т. е. на S (рис. 1б) или на всех S_α ($\alpha = 1, 2, \dots, P$) в случае волноводного трансформатора (рис. 1а) разложимо по поперечным составляющим нормальных волн одного направления. Выражая поле во внешнем канале, будем писать:

$$u = \left\{ \sum_n c_{n(\alpha)}^+ u_{n(\alpha)}^+ + \sum_n c_{n(\alpha)}^- u_{n(\alpha)}^- \right\}_{\alpha=1}^P \quad (2.1)$$

(подразумевается, что в общем случае внешний канал — составной, и тогда u есть $\{u_\alpha\}_{\alpha=1}^P$ — совокупность u_α полей отдельных волноводов; для шарового канала $P = 1$, индексы α в (2.1) при этом можно снять вместе с фигурными скобками). Нормальные волны u_n^\pm описаны в Приложении.

Последовательности коэффициентов $c_{n(\alpha)}^+$ и $c_{n(\alpha)}^-$ будем рассматривать как векторы $\{c_{n(\alpha)}^+\} = c^+$ и $\{c_{n(\alpha)}^-\} = c^-$; назовем их соответственно вектором прямых волн и вектором обратных волн. Введем еще вектор c^3 , представляющий собой набор чисел (комплексных амплитуд), характеризующих внутренние источники. Это — вектор источников (при заданном $j^{ст}$, вектор c^3 можно рассматривать как однокомпонентный).

В силу принципа излучения отклик электродинамической системы на любое возбуждение, внутреннее или внешнее, проявляется как распространение обратных волн во внешнем канале. Поэтому можно написать:

$$c^- = Rc^+ + Qc^3. \quad (2.2)$$

В это соотношение входят матрица рассеяния R и матрица излучения Q , которые вполне характеризуют рассматриваемую линейную электродинамическую систему. Для пассивной системы матрица Q не определена и соответствующий член в (2.2) опускается; но можно также говорить о пассивном режиме ($c^3 = 0$) системы общего вида.

Следует подчеркнуть, что не во всех случаях воздействующее на систему поле (сигнал) полностью описывается вектором прямых волн c^+ . Обычно это бывает в случае волноводного трансформатора. Что касается дифракции в свободном пространстве, то здесь сигнал есть волновой процесс, представленный, как правило, системой прямых и обратных волн шарового канала (такова, в частности, простейшая плоская однородная волна). Поэтому для характеристики сигнала вообще кроме c^+ надо задать еще вектор, обозначаемый c_0^- , который составлен из коэффициентов при полях обратных волн u_n^- в разложении поля сигнала u^0 (типа (2.1)). Соотношение (2.2), таким образом, обобщается посредством замены: $c^- = c_2^- + c_0^-$. Это дает:

$$c_2^- = Rc^+ - c_0^- + Qc^3. \quad (2.3)$$

Поле дифракции (отклик) полностью описывается вектором c_2^- .

* Имеются в виду собственные волны присоединенных волноводов (рис. 1а) либо сферические (сходящиеся и расходящиеся) волны в свободном пространстве, принимаемом за шаровой волновод (рис. 1б).

Уточним теперь, что для описания поля во внешнем канале в каждом из волноводов имеется своя система координат с началом на S_α , а в случае шарового волновода — в центре. При этом особую роль играют поперечные (тангенциальные к S_α) составляющие векторов $E_{n(\alpha)}^\pm$, $H_{n(\alpha)}^\pm$ нормальных волн $u_{n(\alpha)}^\pm$; детализация вводимых функций дается в Приложении. Эти векторные функции $(E_{n(\alpha)}^\pm)_\tau = e_{n(\alpha)}^\pm$, $(H_{n(\alpha)}^\pm)_\tau = h_{n(\alpha)}^\pm$ образуют полные ортогональные системы. Любые тангенциальные поля на S_α могут быть разложены в ряды Фурье по $\{e_{n(\alpha)}^+\}$, $\{h_{n(\alpha)}^+\}$, $\{e_{n(\alpha)}^-\}$ и $\{h_{n(\alpha)}^-\}$, например

$$(E_\alpha)_\tau = \sum_n a_{n(\alpha)} e_{n(\alpha)}^+, \quad (H_\alpha)_\tau = \sum_n b_{n(\alpha)} h_{n(\alpha)}^+ \quad (2.4)$$

($\alpha = 1, 2, \dots, P$; в случае шарового волновода $P = 1$ и индекс α опускается). Рассматривая последовательности $\{a_{n(\alpha)}\}$ и $\{b_{n(\alpha)}\}$ как векторы a и b , можно охарактеризовать электродинамическую систему посредством матрицы сопротивления Z или матрицы проводимости Y , которые входят в соотношения*

$$a = Zb + (I + Z\omega^2)Qc^3; \quad (2.5)$$

$$b = Ya - (\omega^2 + Y)Qc^3. \quad (2.6)$$

Здесь используется также прежняя матрица излучения Q (см. (2.2) и (2.3)) и определенная в Приложении матрица ω^2 (диагональная матрица с элементами $(\omega^2)_{nn} = W_n^+ / W_n^-$, где W_n^\pm — волновые сопротивления для прямых и обратных волн; в случае волноводного трансформатора это единичная матрица $\omega^2 = I$). Из (2.5) и (2.6) имеем:

$$Y = Z^{-1}, \quad Z = Y^{-1} \quad (2.7)$$

(когда соответствующие обратные матрицы существуют). С принятой нормировкой (см. Приложение). $a = c^+ + c^-$ и $b = c^+ - \omega^2 c^-$. Поэтому из (2.2), (2.5) и (2.6) следует:

$$R = (Z\omega^2 + I)^{-1} (Z - I) = (\omega^2 + Y)^{-1} (I - Y). \quad (2.8)$$

Матрицы Z и Y , вообще говоря, менее удобны в сравнении с матрицей R , так как при рассмотрении дифракции располагают информацией о сигнале, а не о полном электрическом или магнитном поле на открытой границе; правда, знание матрицы Z или Y позволяет сопоставить задаче дифракции «эквивалентную цепь». Следует учитывать, что при построении алгоритмов для задач дифракции путь, непосредственно приводящий к нахождению Z или Y , имеет свои преимущества (это будет видно из дальнейшего). Тогда матрица рассеяния R определяется по формуле (2.8).

3. ВНУТРЕННИЕ КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ДЛЯ ПРОЦЕССА ДИФРАКЦИИ

Можно утверждать, что поле дифракции в бесконечном внешнем канале, в частности свободном пространстве (рис. 1 б), вполне определяется электродинамическим процессом в конечной области, т. е. является локально обусловленным. Поэтому, например, исследование дифракции на проводящем теле можно свести к интегральному (интегро-дифференциальному) уравнению относительно плотности тока на

* Формулы (2.5), (2.6) дают обобщение обычных соотношений $a = Zb$ и $b = Ya$ на активные системы, характеризуемые матрицей Q .

поверхности проводника, аналогично исследуется и дифракция на одно-родных диэлектриках. Литература, посвященная этому направлению, весьма обширна (см., например, [5, 6]).

Формулирование задачи дифракции в виде уравнений Максвелла с крайвыми условиями на поверхностях всех тел и условием излучения в бесконечности не использует преимуществ, вытекающих из локальной обусловленности процесса. Но этот недостаток может быть устранен, на что, по-видимому, впервые было обращено внимание в работах [7, 8].

Первая возможность заключается в перенесении условия излучения из бесконечности на некоторую ближнюю границу, например на замкнутую поверхность S (рис. 1 б) или на совокупность всех S_α (рис. 1 а). Такое неасимптотическое условие излучения было сформулировано в [9, 10] в виде импедансного операторного краевого условия (импедансная трактовка незамкнутой электродинамической системы).

Пусть E, H — полное электромагнитное поле, а E^+, H^+ — система прямых волн внешнего канала. Тогда неасимптотическое условие излучения, записанное в общей форме, имеет следующий вид:

$$(E - E^+)_{\tau} = \overleftrightarrow{W}(H - H^+)_{\tau}, \quad (3.1)$$

где оператор импеданса \overleftrightarrow{W} задан в форме

$$\overleftrightarrow{W}(\dots) = \left\{ \sum_n e_{n(\alpha)} \frac{W_{n(\alpha)}^-}{|W_{n(\alpha)}^-|} \int_{S_\alpha} [e_{n(\alpha)}^*, \dots] ds \right\}_{\alpha=1}^P \quad (3.2)$$

($e_{n(\alpha)} = e_{n(\alpha)}^- = e_{n(\alpha)}^+$; при интегрировании имеется в виду внешняя нормаль). Здесь, как и ранее, при $P = 1$ (случай свободного пространства и др.) индекс α и фигурные скобки снимаются.

Импедансная трактовка позволяет сформулировать внутреннюю краевую задачу, эквивалентную задаче дифракции. Это задача для конечной области V , ограниченной поверхностью S (сфера S на рис. 1 б и $\{S_\alpha\}_{\alpha=1}^P + S_0$ на рис. 1 а). Формулировка имеет вид*

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i \omega \varepsilon E + j^{\text{ст}} \\ \operatorname{rot} E &= -i \omega \mu H \end{aligned} \right\} \text{ в } V, \quad (3.3)$$

$$E_{\tau} = 0 \text{ на } S_0,$$

$$(E - E^+)_{\tau} = \overleftrightarrow{W}(H - H^+)_{\tau} \text{ на } \{S_\alpha\}_{\alpha=1}^P$$

(краевые условия на границах раздела сред внутри V , например на границах областей V_d и V_m , подразумеваются). Заметим, что условие $E_{\tau} = 0$ на металле может быть заменено, например, крайвым условием Леонтовича. Доказывается [9, 10] единственность решения задачи (3.3); в случае свободного пространства при этом не используется предположение о внутренней диссипации.

Поскольку решение внутренней задачи (3.3) определяет и поле внешнего канала, то оно непосредственно и в полной мере описывает процесс дифракции. Естественно назвать ее ключевой задачей.

Вместо нахождения какого-то частного поля дифракции, отвечающего определенному заданному полю E^+, H^+ и (или) заданному распределению стороннего тока $j^{\text{ст}}$, можно получить описание всего класса решений задач дифракции и излучения для рассматриваемой

* В формулировках крайвых задач отдается предпочтение записи уравнений Максвелла в форме (1.8).

электродинамической системы. Согласно предыдущему (см. разд. 2) для этого надо определить матрицу рассеяния R и матрицу излучения Q данной системы (практически, достаточное число элементов этих матриц), чему служит следующий метод парциальных режимов.

Положим $\mathbf{j}^{\text{ст}} = 0$, а в качестве поля E^+ , H^+ в (3.3) зададим одну из нормальных волн внешнего канала $E_{n(\beta)}^+$, $H_{n(\beta)}^+$. Пусть при этом найдено решение задачи (3.3), которое обозначим $E^{n(\beta)}$, $H^{n(\beta)}$. Тогда элементы матрицы рассеяния $R = \|R_{kn}^{\alpha\beta}\|$, принадлежащие $n(\beta)$ -му столбцу, определяются, например, по формуле*

$$R_{kn}^{\alpha\beta} = \frac{W_{k(\alpha)}^-}{|W_{k(\alpha)}^-|} \int_{S_\alpha} [e_{k(\alpha)}^*, H^{n(\beta)} - H_{n(\beta)}^+] ds \quad (3.4)$$

(можно было бы исходить также из $E^{n(\beta)}$). Перебор падающих волн ($n = 1, 2, \dots$; $\beta = 1, 2, \dots, P$) обеспечивает возможность нахождения любых элементов матрицы рассеяния.

Если, далее, сторонние токи представляются в базисе $\{J_n\}$, то, положив $E^+ = 0$, $H^+ = 0$ и $\mathbf{j}^{\text{ст}} = J_n$, из соответствующего решения задачи (3.3) $E^{n(2)}$, $H^{n(2)}$ определим элементы матрицы $Q = \|Q_{kn}^\alpha\|$:

$$Q_{kn}^\alpha = \frac{W_{k(\alpha)}^-}{|W_{k(\alpha)}^-|} \int_{S_\alpha} [e_{k(\alpha)}^*, H^{n(2)}] ds \quad (3.5)$$

(подразумевается необходимый перебор индексов).

Отметим теперь, что ключевой задаче (3.3) отвечает некоторая вариационная задача. Соответствующий функционал строится на основе общей формы (1.2) при $L = M - \omega\pi$ (1.9'). Однако, желая сделать естественными** наиболее важные краевые условия, мы должны дополнить форму (1.2) специальными поверхностными интегралами. Так получается функционал

$$\Phi(u, v) = ((M - \omega\pi)u, v) - (f, v) - (u, \tilde{f}) - S(u, v), \quad (3.6)$$

где $S(u, v)$ в подробной записи имеет вид

$$S(u, v) = i \int_{\{S_\alpha\} + S_M} \{[e - E^+ - \vec{W}(h - H^+), \tilde{h}^*] + \\ + [\tilde{E}^+ - \vec{W}\tilde{H}^+, h^*]\} ds. \quad (3.7)$$

Естественными в данном случае являются неасимптотическое условие излучения (3.1) и условие $E_\tau = 0$ на S_M (совокупность всех металлических границ, включая S_0). Функционалы типа (3.6) были введены в [3] (см. [3], п. 3.2). Пробные функции u, v — это столбцы типа u в (1.9'), составленные из e и h , \tilde{e} и \tilde{h} соответственно. В (3.7) помимо величин, входящих в формулировку задачи (3.3), фигурируют также аналогичные величины из сопряженной задачи. Это сторонний ток $\tilde{\mathbf{j}}^{\text{ст}}$,

* В (3.4) и далее ориентация ds совпадает с внешней нормалью к замкнутой границе области V (направление $-z$ для присоединенных волноводов и r в случае сферической границы).

** Естественными называют краевые условия, которые удовлетворяются при достижении стационарной точки; при этом допустимыми оказываются функции, им не удовлетворяющие [2, 3]. Введение в функционал дополнительных членов с целью расширения класса допустимых функций было предложено в [14].

заданное поле \tilde{E}^+ , \tilde{H}^+ и оператор импеданса \tilde{W} ; последний получается из \tilde{W} путем замены $W_{n(\alpha)}^- \rightarrow -(W_{n(\alpha)}^-)^*$. При интегрировании по S_M в (3.7) поля E^+ , H^+ и \tilde{E}^+ , \tilde{H}^+ равны нулю, а операторы импеданса — нулевые операторы. Обращению в нуль полной вариации функционала (3.7) $\delta_{u, v} \Phi(u, v)$ соответствует стационарная точка при $u = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ и $v = \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{H} \end{pmatrix}$ (решения прямой задачи (3.3) и сопряженной ей).

Рассмотрим, далее, иную возможность постановки внутренней краевой задачи для области V (той же, что и в (3.3)), которая была бы также ключевой задачей. Эта возможность связана с давно известными операциями «короткого замыкания» и «холостого хода» для полых системы*. В первом случае ставится краевая задача:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i \omega \varepsilon E + J^{\text{CT}} \\ \operatorname{rot} E &= -i \omega \mu H \end{aligned} \right\} \text{ в } V, \\ E_\tau = 0 \text{ на } S_M, \quad (3.8)$$

$$E_\tau = \delta_{\alpha\beta} E_\beta \text{ на } S_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

Полагая $J^{\text{CT}} = 0$ и $E_\beta = e_{n(\beta)}$, задаем парциальный режим $n(\beta)$. Получаемое при этом решение задачи (3.8) обозначим $E_{k, \beta}^{n(\beta)}$, $H_{k, \beta}^{n(\beta)}$. Знание $H_{k, \beta}^{n(\beta)}$ приводит к определению элементов матрицы проводимости $Y = \| Y_{kn}^{\alpha\beta} \|$:

$$Y_{kn}^{\alpha\beta} = - \frac{W_{k(\alpha)}^+}{|W_{k(\alpha)}^+|} \int_{S_\alpha} [e_{k(\alpha)}^*, H_{k, \beta}^{n(\beta)}] ds. \quad (3.9)$$

Применение этого подхода к задачам дифракции в свободном пространстве было предложено в [7].

Задаче (3.8) сопоставим функционал вида (3.6), где в данном случае

$$S(u, v) = i \int_{S_M + \{S_\alpha\}_{\alpha+\beta}} [e, \tilde{h}^*] ds + i \int_{S_\beta} [E_\beta^*, h] ds. \quad (3.10)$$

Во втором случае («холостой ход») формулируется следующая краевая задача:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= i \omega \varepsilon E + J^{\text{CT}} \\ \operatorname{rot} E &= -i \omega \mu H \end{aligned} \right\} \text{ в } V, \\ E_\tau = 0 \text{ на } S_M, \quad (3.11)$$

$$H_\tau = \delta_{\alpha\beta} H_\beta \text{ на } S_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, P.$$

Решение задачи (3.11), получаемое для парциального режима, в котором $J^{\text{CT}} = 0$, $H_\beta = h_{n(\beta)}^+$, обозначим $E_{x, x}^{n(\beta)}$, $H_{x, x}^{n(\beta)}$. При этом

$$Z_{kn}^{\alpha\beta} = - \frac{(W_{k(\alpha)}^+)^*}{|W_{k(\alpha)}^+|} \int_{S_\alpha} [E_{x, x}^{n(\beta)}, (h_{k(\alpha)}^+)^*] ds. \quad (3.12)$$

Таким образом, рассмотрение серии режимов «холостого хода» позволяет определить необходимое число элементов матрицы сопротивления.

* См., например, [12]. В [12] этот подход был предложен в качестве основы алгоритмизации внутренней задачи дифракции (см. также [2]).

Задаче (3.11) сопоставляется функционал вида (3.6), в котором

$$S(u, v) = i \int_{S_M} [e, \tilde{h}^*] ds + i \int_{\{S_\alpha\}_{\alpha+\beta}} [\tilde{e}^*, h] ds + i \int_{S_\beta} [e, H_\beta^*] ds. \quad (3.13)$$

Ввиду (2.8) определение матрицы Y или Z эквивалентно определению R . Отметим, что введение парциальных режимов с $j^{ct} \neq 0$ позволяет использовать задачи (3.8) и (3.11) и для нахождения матрицы излучения Q [7, 23].

Итак, выделено три типа ключевых задач для процесса дифракции в полой системе или свободном пространстве; это внутренние краевые задачи (3.3), (3.8) и (3.11). Напомним, что во всех формулировках в случае свободного пространства ($P = 1$) снимаются индексы α, β .

Отличительной чертой рассмотренных формулировок является их общность; в следующих разделах обзора основное внимание будет обращено на методы решения поставленных задач.

Прежде чем переходить к этому, отметим, что на задачи дифракции в свободном пространстве, трактуем как шаровой волновод, можно в известных рамках распространить теорию возбуждения полых волноводов; здесь возможны различные подходы. Близкие вопросы рассматриваются в работах Каценеленбаума и его сотрудников (см., например, [55–58]), хотя в них отдается предпочтение двумерным скалярным задачам. Интересной является идея построения во внешнем пространстве системы расходящихся волн, подчиненных на поверхности некоторого тела краевому условию с неопределенным импедансом [56]; формально импеданс вступает в качестве собственного значения*. Если построенная система полна, то она может быть использована как базис Третьяка (см. Введение и разд. 6). В [57] сформулированы некоторые вариационные принципы применительно к возникающим спектральным задачам. В [58] содержится мысль, которую для случая дифракции в полом волноводе можно переформулировать следующим образом. Пусть в волноводе отсечен объем (рис. 2а), внутренние источники отсутствуют ($j^{ct} = 0$) и одна из границ (например, S_2) «закорочена» ($E_\tau = 0$). Если при этом S_1 находится на значительном расстоянии и сохраняется только волна основного типа, то можно для объема V поставить электродинамическую (уравнения Максвелла) краевую задачу, потребовав: $E_\tau = (1 + \alpha)e_{1(1)}$ на S_1 , понимая α как собственное значение. Физический интерес представляет реализация $\alpha = R_{11}^{11}$, где имеется в виду коэффициент отражения.

4. МЕТОДЫ ТИПА БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА И РИТЦА

К сформулированным выше ключевым задачам могут быть применены кратко обсуждавшиеся во Введении метод Бубнова—Галеркина и метод Ритца в различных модификациях. Этот путь является весьма общим; он, в частности, правомерен при произвольной неоднородности и анизотропии сред.

Короткое замыкание. Начнем с задач, сформулированных в виде (3.8), и соответствующих вариационных задач. Применение к ним разновидностей методов Бубнова—Галеркина и Ритца подробно рассмотрено в книге [3] (там же приведена подробная библиография), однако ставились лишь внутренние задачи дифракции. Обобщение данного подхода на задачи дифракции в свободном пространстве было дано в [7].

* О собственных значениях, входящих в краевые условия, см. в книге [56].

Проекционные методы могут быть развиты в самом общем случае (рис. 1 а) при использовании базисных функций, не удовлетворяющих крайевым условиям на внешней границе и поверхностях внутренних тел. Остановимся сначала на одном варианте построения алгоритмов, ограничив класс задач таким образом, чтобы можно было ожидать наиболее высокой эффективности численной реализации.

Пусть рассматривается дифракция на радиопрозрачном теле (диэлектрик, намагниченный феррит и пр.) в одном из простых водноводных трансформаторов или в свободном пространстве (рис. 3). Объекты выбраны так, что основная область V является — при удалении радиопрозрачного тела — регулярной: она совпадает с областью \check{V} , порождающей базис. Это значит, что известны полные системы функций $\{E_n\}$ и $\{H_n\}$, порождаемые в \check{V} при $E_\tau = 0$ на замкнутой границе \check{S} ; это либо собственные поля резонатора, которым отвечают собственные частоты ω_n , либо потенциальные функции (тогда $\omega_n = 0$).

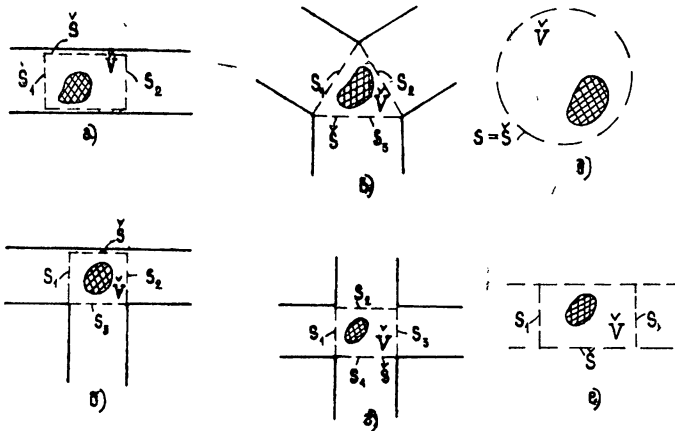


Рис. 3.

В соответствии с формулировкой (3.8) решению подлежит задача, получаемая при создании короткого замыкания на всех входных сечениях S_α кроме одного (S_β), где создается парциальный режим возбуждения $E_\beta = e_{n(\beta)}$. Так, например, в случае простейшего волноводного трансформатора (рис. 3 а) рассматривается возбуждение резонатора через «окно» (рис. 4 а) полем $e_{n(\beta)}$ при $\beta = 1, 2$ и $n = 1, 2, \dots$

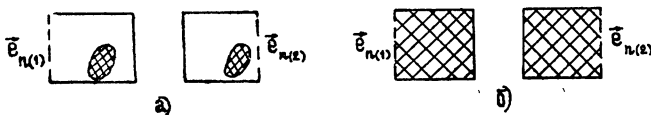


Рис. 4.

Наиболее экономичный алгоритм для объектов, показанных на рис. 3 и аналогичных, базируется на следующем представлении индукций:

$$D^N = D^0 + \epsilon_0 \sum_{n=1}^N a_n E_n, \quad B^N = B^0 + \mu_0 \sum_{n=1}^N b_n H_n, \quad (4.1)$$

где под знаком сумм исключены потенциальные поля, а D^0, B^0 — решение задачи о возбуждении в том же режиме $E_\beta = e_{n(\beta)}$ аналогичного резонатора при однородном заполнении (проницаемости ϵ^0, μ^0); для случая рис. 3 а эта вспомогательная задача поясняется при помощи рис. 4 б. Решение D^0, B^0 известно в замкнутой форме либо в виде ряда.

Опуская детали вывода, запишем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_n и b_n из (4.1), получаемую как методом Бубнова—Галеркина, так и методом Ритца:

$$\left(\begin{array}{c|c} \Omega \mathcal{A} & -I\omega \\ \hline -I\omega & \Omega M \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_e \\ f_m \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь a и b — векторы, составленные из a_n и b_n соответственно, Ω — диагональная матрица собственных частот основной области: $\Omega_{kn} = \delta_{kn}\omega_n$; \mathcal{A} и M — матрицы с элементами:

$$\mathcal{A}_{kn} = \epsilon_0^2 \int_V E_k^* \epsilon^{-1} E_n dv, \quad M_{kn} = \mu_0^2 \int_V H_k^* \mu^{-1} H_n dv; \quad (4.3)$$

далее, I — единичная матрица, ω — частота возбуждения; правые части в (4.2) имеют следующий вид:

$$f_e = \Omega \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon^0} a_0 - e \right) \quad \text{и} \quad f_m = \Omega \left(\frac{\mu_0}{\mu^0} b_0 - m \right), \quad (4.4)$$

где a_0, b_0, e и m — векторы с компонентами:

$$\begin{aligned} a_{0k} &= \int_V D^0 E_k^* dv, & b_{0k} &= \int_V B^0 H_k^* dv, \\ e_k &= \epsilon_0 \int_V \epsilon^{-1} D^0 E_k^* dv, & m_k &= \mu_0 \int_V \mu^{-1} B^0 H_k^* dv. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Решение системы уравнений (4.2) приводит к нахождению из (4.1) поля $(H_{kn}^{(\beta)})^N = \mu^{-1} B^N$ для подстановки в (3.9). Таким путем находится матрица проводимости Y , точнее, приближенные значения ее элементов $(Y_{kn}^{\alpha\beta})^N$. Можно показать (см. [3], п.23.3), что метод сходится, т. е. $(Y_{kn}^{\alpha\beta})^N \rightarrow Y_{kn}^{\alpha\beta}$ при $N \rightarrow \infty$.

В книге [3] (пп.27.1, 27.2) имеется значительное число примеров применения этого подхода к задачам дифракции в прямоугольном волноводе на различных гиротропных и диэлектрических телах (первые численные данные были получены на ЭВМ в начале 60-х годов, см. библи. в [3]). Результаты приведены в виде графиков элементов матрицы рассеяния как функций различных параметров объекта (R получается из Y). При этом входные сечения S_α располагались в зоне пренебрежимо малого влияния высших полей. На примере «диэлектрической пробки» (диэлектрик, заполняющий волновод на некотором отрезке) — путем привлечения известного аналитического решения — исследовано влияние числа продольных гармоник базиса на точность метода. С увеличением основной области (дифракция на теле возрастающей длины) для сохранения точности нужно значительно увеличивать число продольных гармоник. Ввиду ограниченности резерва ЭВМ это требование в указанных примерах из [3] не выполнялось, поэтому при малых продольных размерах объектов дифракции результаты более достоверны.

Отметим, что основная область в виде треугольной призмы (как на рис. 3в) фигурировала в [14] при построении проекционного алгоритма для У-циркулятора.

Обратимся теперь к рис. 5, на котором представлена схема выбора области, порождающей базис, в случае трансформатора сложной конфигурации.

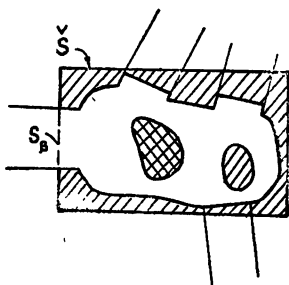


Рис. 5.

Для определенности объем $\overset{\vee}{V}$ имеет вид параллелепипеда, для которого и можно ставить задачу (3.8), полагая, что помимо первоначальных тел имеется еще одно металлическое, заполняющее весь дополнительный объем $\overset{\vee}{V}-V$ (заштриховано). Формальное усложнение системы уравнений (4.2) связано с появлением потенциальных функций в разложении D^N (4.1) вследствие разрыва нормальной компоненты D , на границе с идеальным проводником, а также с изменением вида матричных элементов (4.3) (возникновение поверхностных интегралов по границе с металлом) и заменой единичных матриц в (4.2) на более сложные. Эффективность метода существенно снижается.

Помимо D^N , B^N ; в виде (4.1) могут использоваться и представления E^N , H^N ; выделение поля D^0 , B^0 (E^0 , H^0) также не является обязательным приемом. При этом, однако, необходимо включение потенциальных подсистем. Различные варианты алгоритмов описаны в книге [3].

Помимо D^N , B^N ; в виде (4.1) могут использоваться и представления E^N , H^N ; выделение поля D^0 , B^0 (E^0 , H^0) также не является обязательным приемом. При этом, однако, необходимо включение потенциальных подсистем. Различные варианты алгоритмов описаны в книге [3].

Холостой ход. Применение проекционных методов для решения задачи (3.11) или соответствующей вариационной задачи мало отличается от предыдущего. Опять-таки наряду со сложными конфигурациями, когда приходится применять базисные функции, не удовлетворяющие краевым условиям, естественно отдельно рассматривать простые конфигурации (рис. 3). Тогда известны полные системы собственных функций $\{E_n\}$ и $\{H_n\}$, порождаемые при $H_\tau = 0$ на поверхности $\{S_a\}$ и при $E_\tau = 0$ на S_0 . Такие системы пригодны для представления поля E^{np} в (3.12). В [3] (п.11.5) получена соответствующая алгебраическая форма, аналогичная (4.2).

Импедансная трактовка. Рассмотрим теперь применение проекционных методов к задаче (3.3); сложность конфигурации с самого начала не ограничивается, так как это не привело бы к существенному упрощению алгебраической формы. Задавая тот или иной парциальный режим дифракции $E^+ = E_{n(\beta)}^+$, $H^+ = H_{n(\beta)}^+$ (одна нормальная волна внешнего канала), получаем задачу, приводящую непосредственно к определению $n(\beta)$ -го столбца матрицы рассеяния. В [15, 23] было предложено использовать «смешанный базис», а именно системы $\{E_n\}$, $\{H_n\}$, $\{E_n\}$ и $\{H_n\}$. Первые две — решения уравнений Максвелла для $\overset{\vee}{V}$ при $E_\tau = 0$ на всей внешней границе, а вторые — при $E_\tau = 0$ на S_0 и $H_\tau = 0$ на $\{S_a\}$. Устранение потенциальных функций в данном случае оказывается невозможным. Введение представлений

$$E^M = \sum_{n=1}^M a_n E_n \quad \text{и} \quad H^N = \sum_{n=1}^N b_n H_n \quad (4.6)$$

приводит к следующей системе уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \omega \check{\mathcal{Q}} & | & -\check{\Omega} \check{Q} + P & | & \eta & \\ \hline -\check{\Omega} \check{Q} & | & \omega \check{M} & | & \xi & \\ \hline \check{\eta} & | & -(\omega^-)^2 \check{\xi} & | & 0 & \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

(третья клеточная строка получается при проекционном наложении импедансного условия (3.1)). В (4.7) неизвестный вектор включает объединения коэффициентов a_n и b_n из (4.6) в a и b , а также $n(\beta)$ -й столбец матрицы рассеяния R , обозначенный R . Ниже выписаны элементы подматриц, входящих в (4.7):

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{Q}}_{kn} &= \int_{V-V_M} \mathbf{E}_k^* \varepsilon \mathbf{E}_n dV, & \check{M}_{kn} &= \int_{V-V_M} \mathbf{H}_k^* \mu \mathbf{H}_n dV, \\ P_{kn} &= -i \int_{S_M} [\mathbf{E}_k^*, \mathbf{H}_n] ds, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$Q_{kn} = \varepsilon_0 \int_{V-V_M} \mathbf{E}_k^* \mathbf{E}_n dV, \quad \check{Q}_{kn} = \mu_0 \int_{V-V_M} \mathbf{H}_k^* \mathbf{H}_n dV,$$

$$\xi_{kl(\alpha)} = -i \int_{S_\alpha} [e_{l(\alpha)}, H_k^*] ds, \quad \eta_{kl(\alpha)} = -i \int_{S_\alpha} [\mathbf{E}_k^*, h_{l(\alpha)}^-] ds.$$

Матрицы $\check{\Omega}$ и $\check{\Omega}$ — диагональные и составлены из собственных частот, отвечающих полям $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$ (ω_n) и $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$ (ω_n); при этом потенциальным полям отвечают нули. В (4.7) и далее ω^\pm — диагональные матрицы с элементами $W_{n(\alpha)}^\pm / |W_{n(\alpha)}^\pm|$. Область V_M понимается как совокупность всех металлических тел, а в случае использования базиса охватывающей области (рис. 5) к V_M присоединяется также дополнение V до \check{V} ; S_M есть граница V_M , лежащая внутри \check{V} (в случае, показанном на рис. 5, при построении базиса $\{\mathbf{E}_n\}, \{\mathbf{H}_n\}$ условие $E_\tau = 0$ налагается на поверхности параллелепипеда \check{V} за исключением грани, на которой лежит S_β ; там задается $\mathbf{H}_\tau = 0$).

Векторы правой части (4.7) в рассмотренном режиме имеют следующие компоненты:

$$f_{1k} = -i \int_{S_\beta} [\mathbf{E}_k^*, h_{n(\beta)}^+] ds, \quad f_{2k} = -i \int_{S_\beta} [e_{n(\beta)}, \mathbf{H}_k^*] ds, \quad (4.9)$$

$$f_{3k(\alpha)} = i\omega_{n(\beta)}^- \left(1 + \frac{\omega_{n(\beta)}^-}{\omega_{n(\beta)}^+} \right) \delta_{n(\beta)k(\alpha)}.$$

Заметим, что в случае волноводного трансформатора (рис. 1 а) $\omega^- = \omega^+$, а при дифракции в свободном пространстве (шаровой канал, рис. 1 б) $\omega^- = (\omega^+)^*$.

Как видно, решение системы уравнений (4.7) приводит к определению элементов матрицы рассеяния $R_{kn}^{\alpha\beta}$, а точнее говоря, их приближенных значений $(R_{kn}^{\alpha\beta})^{M,N}$, которые при $M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ стремятся к точным. При этом предполагается, что соответственно числам M и N растет также число учитываемых нормальных волн внешнего канала

(число столбцов матриц ξ - и η). Для нахождения некоторой редуцированной матрицы рассеяния надо рассмотреть серию парциальных режимов дифракции, изменяя β и n , а тем самым — правую часть системы (4.7).

Для определения матрицы излучения Q берутся режимы $E^+ = 0$, $H^+ = 0$, $j^{ct} = J_m$ ($m = 1, 2, \dots$). В правой части (4.7) теперь

$$f_{1k} = i \int_V J_m E_k^* dv, \quad f_{2k} = 0, \quad f_{3k(\alpha)} = 0. \quad (4.10)$$

Вектор R в (4.7) есть в этом случае m -й столбец матрицы Q .

Описанный метод применялся к волноводным задачам дифракции, к задаче о диэлектрической антенне, о дифракции в свободном пространстве на диэлектрическом цилиндре ограниченной длины и на неоднородном шаре [16–18]. Некоторые из полученных результатов ниже обсуждаются.

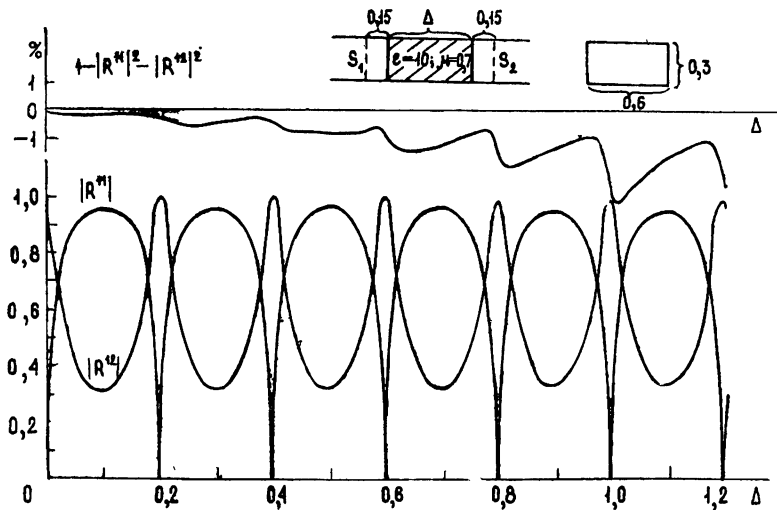


Рис. 6.

В [16] приведены результаты нахождения матрицы рассеяния для некоторых тел в прямоугольном волноводе, включая составные гиротропные объекты. Высокая эффективность метода демонстрируется при помощи теста с «диэлектрической пробкой» (все основные данные указаны на рис. 6); число продольных гармоник в базисе составляло 17 при общем числе базисных функций 51 (H -поля и потенциальные функции из $\{H_n\}$ и H -поля из $\{E_n\}$); порядок системы (4.7) был равен $M + N + 2 = 53$. В [16] проведено сравнение полученных результатов с точными в виде таблицы. О точности можно судить и по кривой дефекта баланса энергии (зависимость $1 - |R_{11}^{11}|^2 - |R_{11}^{21}|^2$ от длины пробки Δ на рис. 6). Вплоть до $\Delta \approx 3\lambda/2$, где λ — длина волны в волноводе с диэлектриком, нарушение баланса энергии не превышает 1%.

Случай антипараллельно намагниченных ферритовых брусков (рис. 7) исследовался при $M + N + 2 = 74$ (из $\{H_n\}$: $H_{10, 15}, H_{30, 15}, H_{30, 5}, H_{50, 15}, H_{50, 5}$ и потенциальные $P_{100}, \dots, P_{10, 16}, P_{300}, \dots, P_{305}, P_{500}, \dots, P_{502}$; из $\{E_n\}$: $H_{100}, \dots, H_{10, 14}, H_{300}, \dots, H_{305}, H_{500}, \dots, H_{502}$). Невзаимность волноводного трансформатора, как видно из рис. 7, заметно проявляется только в картине фазовых сдвигов (на рис. 7 и далее $\varphi_{\alpha\beta}$ есть фаза, отвечающая элементу матрицы рассеяния $R_{11}^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta}$).

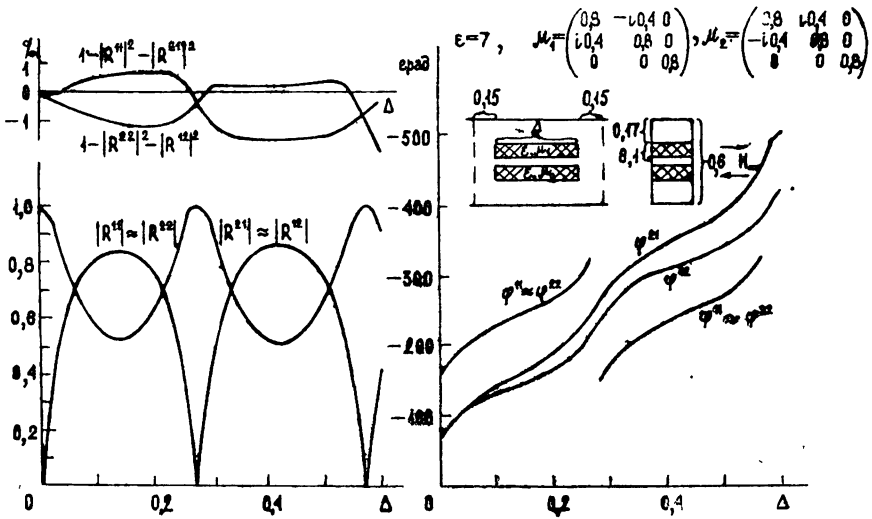


Рис. 7.

На рис. 8 представлены кривые, полученные для случая поперечно намагниченной ферритовой пластинки, постепенно заполняющей все поперечное сечение волновода. Система (4.7) имела прежний порядок (из $\{H_n\}$: $H_{101}, \dots, H_{106}, H_{201}, \dots, H_{205}, H_{301}, \dots, H_{305}, H_{401}, \dots, H_{404}, H_{501}, \dots, H_{504}$ и потенциальные $P_{001}, \dots, P_{003}, P_{100}, \dots; P_{107}, P_{200}, \dots, P_{205}, P_{300}, \dots, P_{303}, P_{400}, P_{401}$; из $\{E_n\}$: $H_{100}, \dots, H_{105}, H_{200}, \dots, H_{205}, H_{300}, \dots, H_{305}, H_{400}, \dots, H_{403}, H_{500}, \dots, H_{502}$). При заполнении волновода несколько более чем наполовину наблюдается область резкой невзаимности.

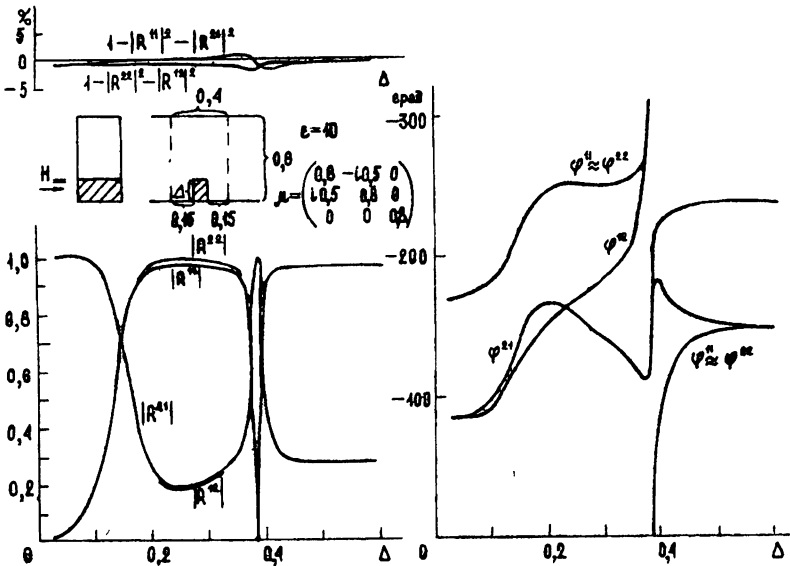


Рис. 8.

Трехмерная конфигурация представлена на рис. 9. Нарушение баланса энергии остается в этом случае еще довольно малым (около 1%). В базис входили функции из $\{H_n\}$: $E_{120}, \dots, E_{122}, E_{320}, \dots, E_{322}, H_{101}, \dots, H_{107}, H_{121}, \dots, H_{123}, H_{301}, \dots, H_{303}, H_{321}, \dots, H_{323}$ и потенциальные

$P_{100}, \dots, P_{109}, P_{120}, \dots, P_{123}, P_{300}, \dots, P_{302}$; из $\{E_n\}$: $E_{121}, \dots, E_{123}, E_{321}, \dots, E_{323}$, $H_{100}, \dots, H_{106}, H_{120}, \dots, H_{123}, H_{300}, \dots, H_{303}, H_{320}, \dots, H_{323}$ и потенциальные $P_{120}, \dots, P_{123}, P_{320}, \dots, P_{323}$. Порядок по-прежнему составлял $M + N + 2 = 74$.

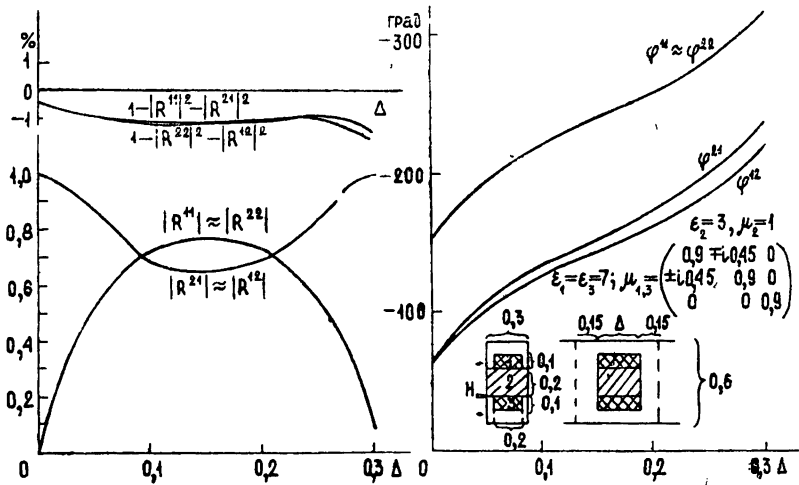


Рис. 9.

Для более сложной конфигурации (рис. 10) — два гиротропных и два изотропных бруска — счет производился при том же базисе и при добавлении следующих базисных функций: $E_{123}, E_{323}, H_{108}, H_{124}, H_{304}, P_{1,0,10}$ из $\{H_n\}$ и $E_{124}, H_{107}, H_{108}, H_{124}, H_{304}, H_{324}, P_{124}, P_{324}$ из $\{E_n\}$, так что стало $M + N + 2 = 88$. Приведены результаты сравнения.

На рис. 11 представлены некоторые результаты из [11] в виде диаграмм направленности диэлектрической стержневой антенны, возбуждаемой с торца структурой типа H_{11} ; антенна излучает в полупространство, отделенное идеально проводящим экраном. Электрический радиус стержня $kR = 0,81$; электрическая длина принимает значения $kL = 2,1; 3,16; 4,2; 5,26; 6,32$; это отмечено на графиках; диэлектрическая проницаемость стержня ϵ равна $7,25\epsilon_0$. Использовались базисные функции из $\{H_n\}$: $E_{121}, \dots, E_{123}, E_{141}, E_{142}, E_{161}, E_{162}, E_{181}, E_{1,10,1}, H_{111}, \dots, H_{113}, H_{131}, H_{132}, H_{151}, H_{152}, H_{171}, P_{111}, \dots, P_{114}, P_{131}, \dots, P_{133}, P_{151}, P_{152}, P_{171}, P_{191}$; из $\{E_n\}$: $E_{121}, \dots, E_{123}, E_{141}, E_{142}, E_{161}, E_{181}, H_{111}, \dots, H_{114}, H_{131}, \dots, H_{133}, H_{151}, H_{152}, H_{171}, H_{191}, P_{121}, \dots, P_{123}, P_{141}, P_{142}, P_{161}, P_{162}, P_{181}, P_{1,10,1}$. В свободном пространстве учитывались сферические волны: $H_{11}, H_{13}, H_{15}, H_{17}, H_{19}, E_{12}, E_{14}, E_{16}, E_{18}, E_{1,10}$.

Тестовой была задача об излучении из круглого отверстия в экране (случай, когда $\epsilon = \epsilon_0$); результаты теста мало отклонялись от приближения Гюйгенса — Кирхгофа.

Заметим, что в приведенном выше базисе число радиальных гармоник нуждается в увеличении; это позволило бы более свободно выбирать радиус базисной полусферы.

В заключение данного раздела отметим следующее. Проекционный метод, приводящий от формулировки ключевой задачи (3.3) к системе алгебраических уравнений типа (4.7), имеет ряд модификаций. В [23] он применен также к двумерным задачам дифракции, задачам об открытых направляющих системах и резонаторах, о периодических системах, включая двумерно-периодические (более подробное рассмотрение антенной решетки произведено в [19, 20]). В [23] изложен также вариант метода с разложением индукций.

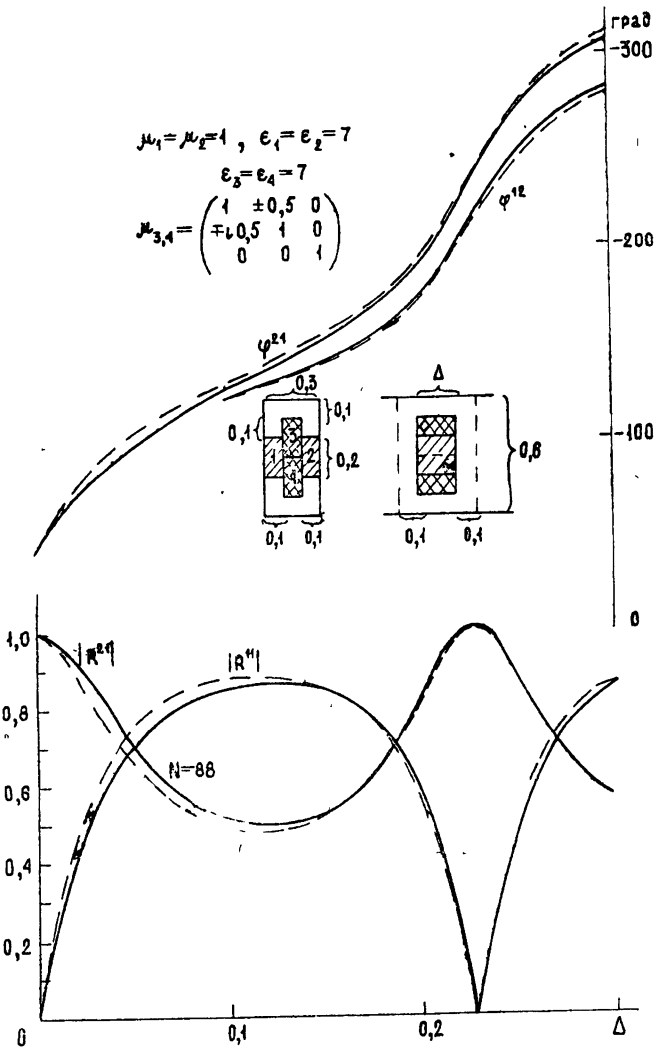


Рис. 10.

В [21] было показано, что выгодно использовать базисы, получаемые при решении однородной задачи типа (3.3) с фиксированным оператором импеданса (при частоте ω , отвечающей режиму возбуждения). Замечательным моментом является при этом совпадение краевых условий на открытой границе для базисных функций и искомого решения. Можно сказать, что базис оказывается физически естественным: он подчинен условию излучения. Разумеется, оператор базисной задачи — несамосопряженный и собственные частоты комплексны. В [21] рассмотрены решения этой задачи для параллелепипеда и шара. Одно из преимуществ данного подхода — в исключении окаймляющих клеток $\eta, \xi, -(\omega^-)^2 \xi$ и $\tilde{\eta}$ из (4.7); это способствует более рациональному использованию ресурсов ЭВМ (увеличение членов разложений поля в V).

Возможно также такое изменение метода, при котором из разложений исключаются потенциальные функции [22].

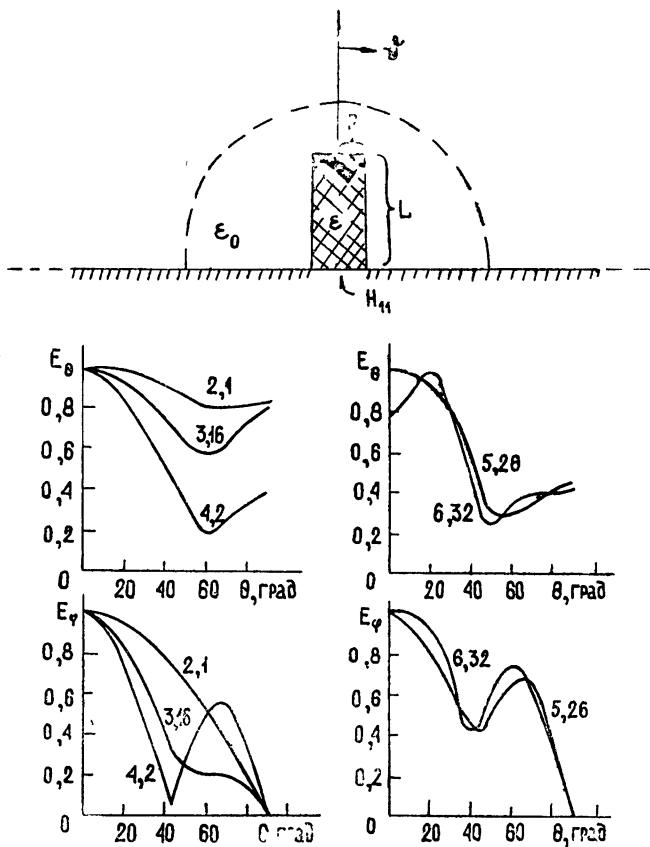


Рис. 11.

Применение рассмотренных проекционных методов в случаях дифракции на металлических телах приводит к результатам, менее удовлетворительным. Трудности возникают и при малых, но оптически плотных объектах дифракции. Путь их преодоления предложен в [24].

5. МЕТОД ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Начнем с замечания, что задачи дифракции допускают «одноканальную трактовку», т. е. вся область существования поля может рассматриваться как единый волновод с поперечным сечением S (вообще неплоским) и ортогональным ему направлением ζ ; при этом вид S и электродинамические характеристики на S зависят от ζ .

Одноканальная трактовка естественна в случаях, отвечающих рис. 3 а, д, е; это поясняется на рис. 12 а, б; продольной координатой ζ является при этом z и соответственно r . В случае волновода с регулярной оболочкой и локальной неоднородностью среды, а также в случае канала Флоке (рис. 3 а, е и рис. 12 а) контур поперечного сечения S остается неизменным, но функции поперечных координат ϵ и μ параметрически зависят от z . При дифракции в свободном пространстве (рис. 3 д и рис. 12 б) поперечным сечением является сфера $S = S(r)$. На рис. 12 в, г представлены и другие примеры неразветвляющихся каналов. Одноканальная трактовка может потребовать, однако, введения поперечного сечения S изменяющейся связности (рис. 12 д, е).

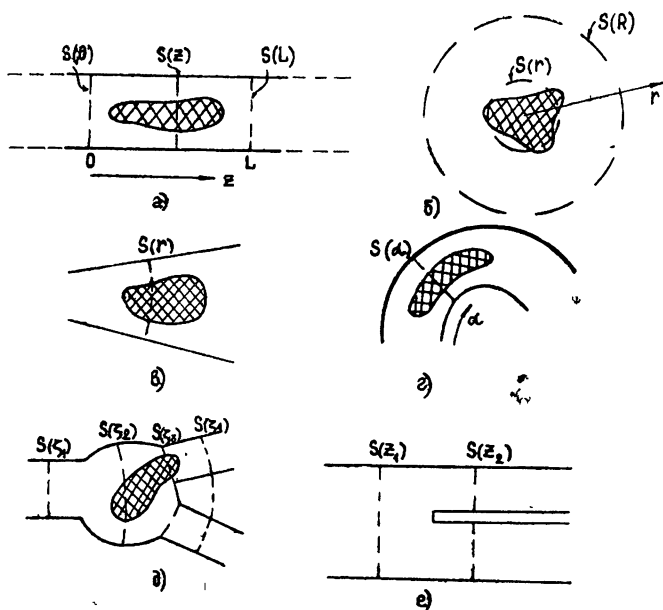


Рис. 12.

Одноканальная трактовка порождает подход, называемый иногда [25] «методом поперечных сечений», основная идея которого восходит к работам [12, 26]*. В [25] содержится подробная разработка метода и его применение в случае слабых изменений поперечного сечения волновода. Дальнейшее развитие и строгая разработка метода поперечных сечений как проекционного, а также его ЭВМ-алгоритмизация для широкого круга волноводных задач начинается работами [27–29] (подробная библиография приводится в [30]). В книге [3] (п.12.2) дается вариационная интерпретация метода поперечных сечений. Обобщение метода на задачи дифракции в свободном пространстве ведет начало от работ [8, 31]. В [32] метод применен к двумерно-периодическим системам (канал Флоке).

Сущность метода поперечных сечений заключается в том, что решение задачи представляется в виде суммы u^N (1.3), где, однако, коэффициенты a_n являются функциями продольной координаты ζ ; при этом базисные функции u_n определены в поперечном сечении S . Таким образом, проектирование осуществляется не в функциональном пространстве, которому принадлежит решение задачи (возможно, обобщенное), а в пространстве поперечных распределений поля. Сама операция проектирования может быть реализована как по схеме Бубнова—Галеркина, так и по схеме Ритца (соотношения (1.7) и (1.5) соответственно), но в отличие от методов Бубнова—Галеркина и Ритца, использующих представления с постоянными коэффициентами, получается не система алгебраических уравнений, а система обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также Введение и [3]).

Известны различные модификации метода поперечных сечений. Если ограничиться обобщенно-цилиндрическими координатами, то речь идет о применении процесса Бубнова—Галеркина к задаче для уравнений Максвелла вида (ср. (1.9))

* В [25] приводится подробная библиография до 1961 года.

$$M_{\perp} u + i \frac{\partial}{\partial z} T u - \omega \pi u = 0 \quad (5.1)$$

(\perp — символ поперечных координат), где

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \times z_0 \\ z_0 \times & 0 \end{pmatrix},$$

либо процесса Ритца к функционалу [3]:

$$F(u, v) = (M_{\perp} u, v) + i \left(\frac{\partial}{\partial z} T u, v \right) - \omega (\pi u, v). \quad (5.2)$$

Базис $\{u_n\}$ при этом порождается той или иной краевой задачей для «волноводных» уравнений Максвелла:

$$M_{\perp} u_n - \omega \pi_0 u_n = \Gamma_n T u_n \quad (5.3)$$

(проницаемость π_0 составлена из констант ϵ_0 и μ_0). Если поперечное сечение S регулярно, то эта задача ставится на S . В противном случае можно использовать охватывающую регулярную область или [27] путем преобразования координат свести S , например, к кругу. Вообще уравнения Максвелла в форме (1.8) можно рассматривать как ковариантные; при этом E и H — ковариантные векторы, а ϵ и μ включают компоненты контравариантного фундаментального тензора. Это ведет к следующей концепции [27] (см. также [3], пп. 13.2, 13.3 и 15.1): область с нерегулярной границей и произвольной средой (в частности, однородной изотропной) эквивалентна некоторой области с регулярной границей при неоднородном анизотропном заполнении. Например, вместо нерегулярного объекта, показанного на рис. 13 а, можно анализировать цилиндрический волновод (рис. 13 б) с неоднородной анизотропной средой на участке между сечениями S_1 и S_2 . Ниже обсуждаются некоторые результаты применения метода поперечных сечений [29, 32, 34, 35] с преобразованием координат*.

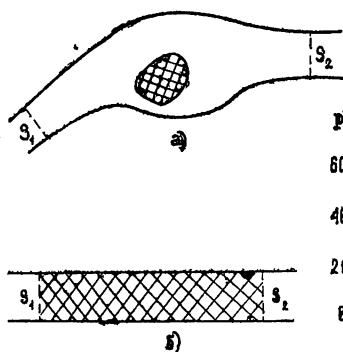


Рис. 13.

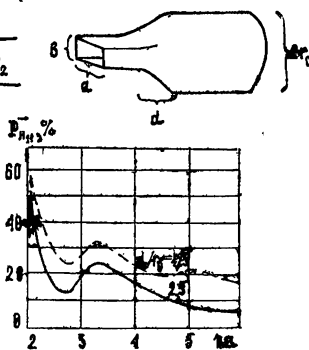


Рис. 14.

В [29] исследовалось плавное сочленение круглого и прямоугольного волноводов. На рис. 14 представлены зависимости потока энергии отраженной основной волны круглого волновода от частоты (точнее, от ka) в процентах по отношению к потоку падающей волны для двух значений длины сочленения. При этом (см. рис.) $a = r_0$ и $r_0 = 2b$.

* Подчеркнем, что аналогичные преобразования координат можно применять и в методах, рассмотренных выше в разд. 4, (см. [33]; [3], п. 14.1).

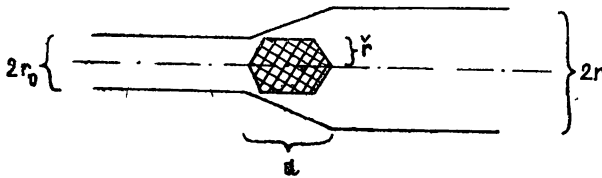


Рис. 15.

Аксиально-симметричное волноводное устройство с пиротропным включением (рис. 15) рассматривалось в [34]; результаты опубликованы для случая $r_0 = r = 0,36\lambda$, $r = 0,18\lambda$, $d = 0,09\lambda$; при этом в области включения

$$\mu = \begin{pmatrix} 0,5 & -i0,8 & 0 \\ i0,8 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mu_0 \text{ и } \epsilon = \begin{pmatrix} 10 & -i0,1 & 0 \\ i0,1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \epsilon_0.$$

Разложение поля в поперечном сечении производилось по волнам H_{11}, \dots, H_{1p} и E_{11}, \dots, E_{1p} (тах $p = 5$); определялись элементы матрицы рассеяния для основной волны H_{11} . Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

p	h_0	$ R^{11} ^2$	$ R^{21} ^2$	$ R^{11} ^2 + R^{21} ^2$
5	0,10	0,5313	0,5136	1,0449
5	0,05	0,485008	0,514977	0,999986
3	0,05	0,364383	0,639403	1,003786

(h_0 — шаг при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений). Можно заключить, что степень выполнения баланса энергии (близость величины $|R^{11}|^2 + |R^{21}|^2$ к единице) не является полным критерием точности. Преобразования координат в данном примере не требовалось.

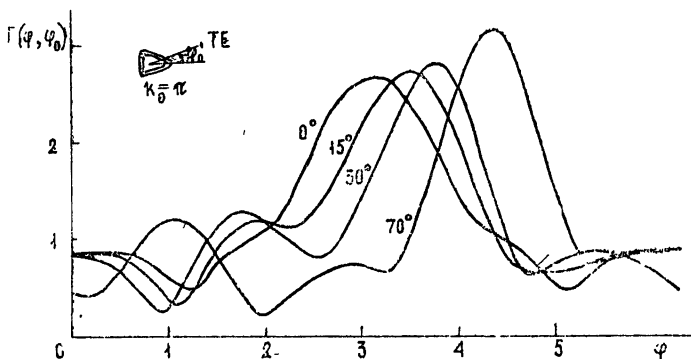


Рис. 16.

Большое количество интересных результатов получено в работе [35], где обсуждается реализация метода поперечных сечений для задачи дифракции плоской однородной волны в свободном пространстве на бесконечном идеально проводящем цилиндре специального про-

филя, погруженном в локально неоднородный диэлектрик, имитирующий плазменное образование. Диэлектрическая проницаемость вне цилиндра (комплексная с отрицательной вещественной частью) изменяется радиально и азимутально. Рассмотрим некоторые из приведенных в [35] графиков. На рис. 16 представлена угловая зависимость поля рассеяния для ряда углов падения (φ_0) падающей плоской волны. Символ ТЕ означает, что вектор \mathbf{H} падающей волны параллелен оси цилиндра. Поперечное сечение цилиндра—равнобедренный треугольник с закругленными углами, отношение высоты к основанию есть $3/2$; в обозначениях длина волны отнесена к основанию (например, $k_0 = \pi$ означает, что λ вдвое превышает его). На рис. 16 символически показан слой неоднородного диэлектрика у поверхности цилиндра.

На рис. 17 даны характеристики рассеяния при «лобовом» ($\varphi_0 = 0$) падении плоской волны прежней поляризации. Сопоставлены три случая: полное окружение неоднородным диэлектриком, диэлектрик в носовой части (в пределах $|\varphi| < 37^\circ$) и случай отсутствия неоднородного диэлектрика.

На рис. 18 аналогичные данные приведены для другого типа поляризации падающей волны (ТМ-волна, вектор \mathbf{E} параллелен оси цилиндра).

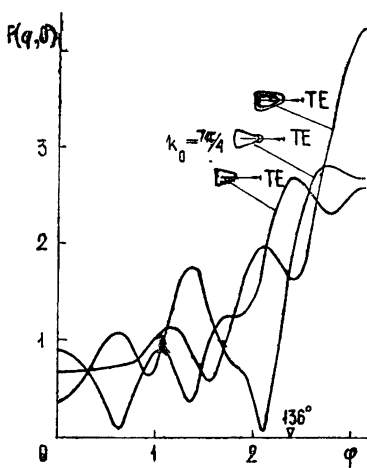


Рис. 17.

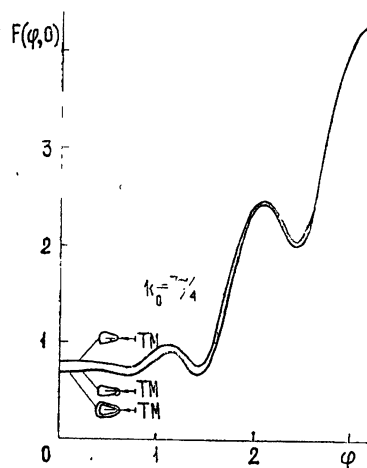


Рис. 18.

Касаясь методики, примененной в работе [35], отметим, что использовалось преобразование координат, при котором поперечное сечение цилиндра переходило в круг; задача при ТЕ- и ТМ-поляризации оставалась скалярной.

В работе [32] метод поперечных сечений был применен для математического моделирования бесконечной (двумерной) решетки, элемент которой показан на рис. 19: цилиндрический волновод с продольно намагниченным ферритом выходит на идеально проводящую плоскость, за которой расположен диэлектрический элемент в виде закругленного конуса.

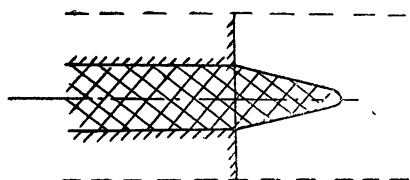


Рис. 19.

численные данные приведены для тестового варианта, когда ферритовое заполнение и диэлектрический конус отсутствуют.

6. МЕТОД ТРЕФТЦА И КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД

Как известно, в отличие от методов Бубнова—Галеркина и Ритца метод Трефтца основывается на представлении типа (1.3), где теперь каждая базисная функция удовлетворяет уравнению поставленной задачи, но неизбежно не удовлетворяет некоторым (или даже всем) граничным условиям. Естественно, что в методе Трефтца не требуется разложимости поля по $\{u_n\}$ в основной области задачи V , но необходима разложимость тангенциальных составляющих поля на тех границах, где краевые условия задачи не удовлетворяются базисными функциями. В прикладной электродинамике метод Трефтца более известен под названием метода частичных областей (МЧО). Действительно, в большинстве случаев (но не всегда) он применяется при разделении V на подобласти, в каждой из которых могут быть построены подходящие системы решений уравнений Максвелла. Этот подход является одним из старейших*, однако применяется без строгих обоснований.

Простейшее применение метода Трефтца—решение задачи дифракции направляемой волны на стыке двух полых волноводов, отличающихся как формой оболочки, так и внутренним заполнением. Доказательство сходимости метода в этом случае (при однородном изотропном заполнении) было представлено сравнительно недавно [37, 38].

Разумеется, для решения задачи должны быть известны нормальные волны обоих волноводов. Если волноводы поперечно-нерегулярны (например, содержат намагниченные ферритовые элементы и пр.), то нормальные волны могут быть найдены при помощи метода Бубнова—Галеркина [3]. Так возникает комбинированный метод (сочетание двух разных методов), на основе которого решались весьма сложные дифракционные задачи [39].

В качестве примера (все данные представлены В. Г. Феоктистовым) рассмотрим применение комбинированного метода в следующем случае (рис. 20). Объект представляет собой ступенчатое соединение прямоугольных волноводов, внутри которого расположен трубчатый ферритовый неоднородно намагниченный элемент и согласующие диэлектрические элементы. Как видно, речь идет о системе продольно-регулярных участков различных волноводов, разделенных стыками (например, S_1, S_2, S_3). Сначала методом Бубнова—Галеркина находятся системы нормальных волн и соответствующие постоянные распространения для всех волноводов. Затем методом Трефтца решаются задачи о всех стыках, в результате чего определяются их матрицы рассеяния. На заключительном этапе матрица рассеяния устройства в целом вычисляется по известным матрицам рассеяния стыков. Разумеется, каждая из этих матриц—многомодовая: при сравнительно малой длине регулярных участков нельзя пренебрегать ближними полями, а в области ферритовой трубки два типа волны являются распространяющимися. Характер намагничивания феррита поясняется на рис. 20 стрелками. Выписанное значение тензора магнитной проницаемости для каждой из подобластей надо рассматривать в системе координат, продольная ось которой указывается стрелкой. На графике представлены только модули элементов полной матрицы рассеяния для основного типа H_{10} и фаза одного из этих элементов. В методе Бубнова—Галеркина базис содержал 18 функций ($H_{10}, 30, 50, 70, 90, 110, H_{12}, 32, 14; E_{12}, 32, 52, 72, 14, E_{16}, 18, 110, 112$).

* К числу ранних применений относится работа [36], в которой рассматриваются собственные колебания аксиально-симметричного резонатора.

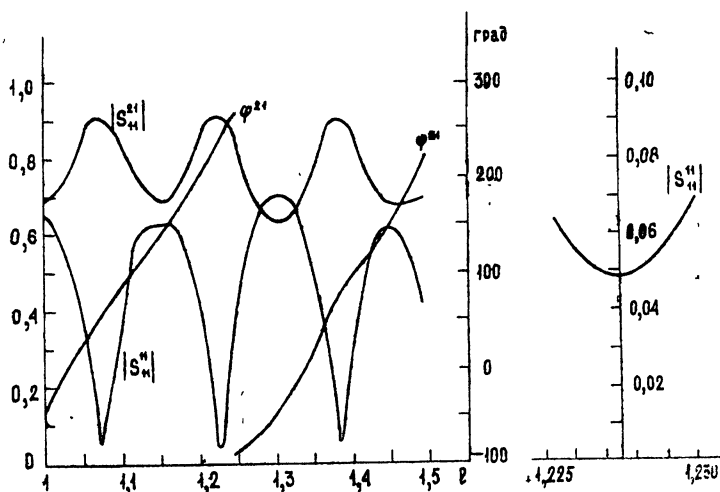
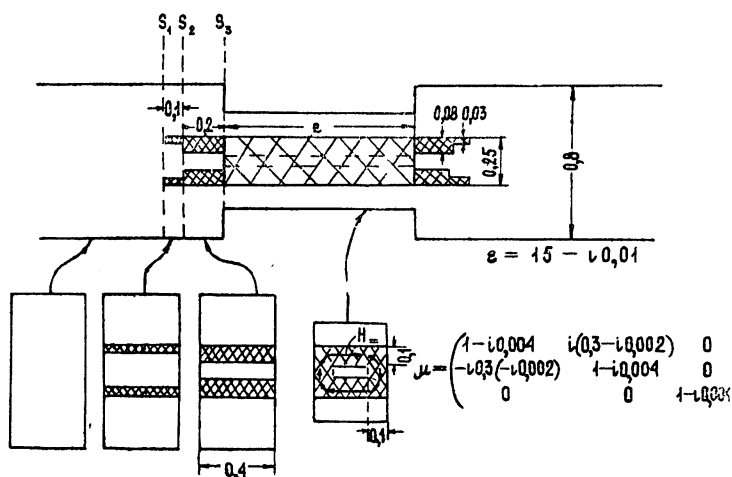


Рис. 20.

Пример интересен тем, что демонстрирует применение декомпозиции (разбиения) сложного объекта на автономно анализируемые простые.

Совершенно аналогично комбинированный метод применяется и в случае бесконечных антенных решеток. Но при этом вместо обычных волноводов (или в дополнение к ним) рассматриваются каналы Флоке. Разумеется, метод Галеркина может быть с успехом применен для нахождения нормальных волн канала Флоке с тем или иным включением. Пример такого рода опубликован в [40].

7. ДИФРАКЦИЯ НА ПОЛОСКОВЫХ УСТРОЙСТВАХ. ДЕКОМПОЗИЦИЯ. СООТНОШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

В отличие от элементарной теории полосковых и микрополосковых устройств («интегральных схем» СВЧ) электродинамическая теория подходит к этим устройствам как к объектам дифракции [20, 41, 42]. При этом вариационные (проеекционные) методы оказываются довольно удобными для решения соответствующих краевых задач. Естественным является применение метода Трефтца. При этом, в частности, для уче-

та особенностей поля на границах плоских проводников могут быть применены специальные системы решений уравнений Максвелла в виде «реберных волн» [43]. В [42] рассмотрено выделение особенностей в интегро-дифференциальных уравнениях, описывающих полосковые устройства. Следует, однако, признать, что оба подхода алгоритмически сложны.

В предыдущем разделе был продемонстрирован простейший пример декомпозиции сложного объекта, которую можно назвать «одноканальной». Целесообразность более общих расчленений сложных электродинамических объектов на автономно анализируемые блоки проявляется, в частности, при решении задач дифракции, связанных с полосковыми устройствами [42]. В качестве примера возьмем некоторое экранированное полосковое устройство с двумя коаксиальными входами (рис. 21 а). Его декомпозиционное представление дано на рис. 21 б, где каждый блок характеризуется своей матрицей рассеяния, определяемой независимо (матрицы, разумеется, многомодовые). Блок I (таких блоков два) — это скачкообразное разветвление коаксиальной линии на два прямоугольных волновода (рис. 21 в), один из которых отвечает диэлектрической подложке, а другой — верхней однородной области полоскового устройства. Блок II есть однородный параллелепипед, соответствующий диэлектрической подложке (рис. 21 г), три грани его постоянно «закорочены»; аналогичен блок (III), отображающий верхнюю однородную область полоскового устройства (рис. 21 д). Наконец, блок IV описывает совокупность всех полосковых проводников; это не что иное, как требуемой формы диафрагма в прямоугольном волноводе (рис. 21 е), поперечное сечение которого совпадает с прямоугольной областью раздела сред исходного полоскового устройства (рис. 21 а).

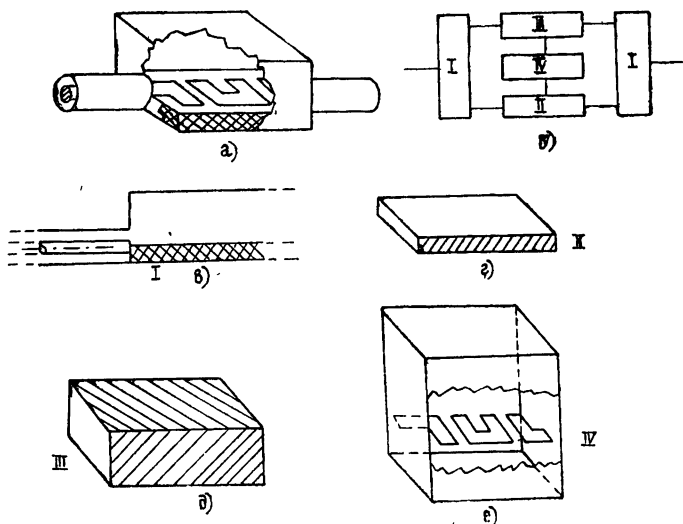


Рис. 21.

Проще всего находятся матрицы рассеяния блоков II и III. Для этого сначала определяются их матрицы проводимости. Заметим, что каждый элемент бесконечной матрицы проводимости может быть легко найден в замкнутой форме (частично это рассмотрено в [3], стр. 172).

Наиболее трудным в вычислительном отношении является определение матрицы рассеяния диафрагмы сложного профиля. На этом остановимся несколько дольше, тем более что вопрос представляет и принципиальный интерес.

Для нахождения j -го столбца матрицы рассеяния диафрагмы рассматривается ее возбуждение падением волны j -го типа. Один из путей — формулирование интегральных уравнений. Интегральным уравнением типа A условно назовем следующее:

$$\int_{S_{\Sigma}} \vec{G}_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E_t(\mathbf{r}') ds' = \frac{1}{W_j} \mathbf{e}_j(\mathbf{r}), \quad (7.1)$$

где

$$\vec{G}_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{W_p} \mathbf{e}_p(\mathbf{r}) \circ \mathbf{e}_p^*(\mathbf{r}'). \quad (7.2)$$

Здесь используется система собственных электрических функций прямоугольного волновода $\{\mathbf{e}_n\}$, в данном случае нормированных к единице, и соответствующие волновые сопротивления W_n . S_{Σ} есть часть поперечного сечения волновода, дополнительная к области плоских проводников S_M . E_t — касательное электрическое поле на S_{Σ} , кружок означает диадные произведения в разложении тензора Грина.

Вместо этого можно сформулировать интегральное уравнение, как будет говориться, типа B :

$$\int_{S_M} \vec{G}_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') ds' = 2\mathbf{e}_j, \quad (7.3)$$

где

$$\vec{G}_B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{p=1}^{\infty} W_p \mathbf{e}_p(\mathbf{r}) \circ \mathbf{e}_p^*(\mathbf{r}'). \quad (7.4)$$

Здесь $\eta = [\mathbf{v}_0, H_t(+0) - H_t(-0)]$ есть плотность тока на плоских проводниках, занимающих область S_M ; остальные обозначения понятны из предыдущего.

Общая методика составления интегральных уравнений обоих типов, по-видимому, давно известна. Интегральное уравнение типа B для более сложной математической модели полоскового устройства фигурировало в [42], а в [44] и для задачи о диафрагме. Ядро (7.4) имеет импедансный характер, а ядро (7.2) — адмитансный. В общем случае каждое из них содержит неинтегрируемую особенность. Особенность, однако, может быть выделена при сведении уравнения к интегро-дифференциальному [42].

Алгоритмически наиболее прост путь прямого применения проекционного (вариационного) подхода к интегральным уравнениям типа A и B ; на простом примере будет показано, что такой подход имеет оправдание.

В наиболее естественной трактовке проекционный подход имеет характер процесса Бубнова—Галеркина. Запишем интегральные уравнения (7.1) и (7.3) в форме

$$L_{A, B} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (7.5)$$

Здесь L_A и L_B — интегральные операторы с ядрами (7.2) и (7.4) соответственно, \mathbf{u} есть E_t либо η , и правая часть \mathbf{f} имеет требуемый вид. Для применения проекционной схемы (1.7), во-первых, констатируем, что скалярное произведение в (1.7) понимается как интеграл по S_{Σ} в случае A и по S_M в случае B .

Пусть $\{\mathbf{u}_n\}$ — некоторая полная (не обязательно ортогональная) система функций, заданных на S_{Σ} или S_M соответственно. Построим представление вида (1.3):

$$\mathbf{u}^{q_0} = \sum_{n=1}^{q_0} a_n \mathbf{u}_n. \quad (7.6)$$

Во-вторых, в данном случае следует учесть, что интегральный оператор дан в виде разложения. Оставляя в (7.2) и (7.4) ρ_0 членов, возьмем вместо L_A и L_B «аппроксимирующие» операторы $L_A^{\rho_0}$ и $L_B^{\rho_0}$. Наконец, введем проекционный базис $\{\mathbf{v}_n\}$ (функции \mathbf{v}_n определены на S_{Σ} или S_M соответственно; в частности, они могут совпадать с \mathbf{u}_n). Таким образом, процесс Бубнова—Галеркина задается согласно (1.7) равенством

$$(L_{A,B}^{\rho_0} \mathbf{u}^{q_0} - \mathbf{f}, \mathbf{v}_q) = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, q_0). \quad (7.7)$$

Нетрудно проверить, что (7.7) приводит к следующим алгебраическим формам.

Задача A —

$$X^A W^{-1} Y^A a = g^A. \quad (7.8)$$

Задача B —

$$X^B W Y^B a = g^B. \quad (7.9)$$

Здесь a — вектор коэффициентов (7.6), матрицы $X^{A,B}$ и $Y^{A,B}$ имеют элементы

$$X_{ik}^{A,B} = \int_{S_{\Sigma, M}} \mathbf{v}_i^* \mathbf{e}_k ds \quad \text{и} \quad Y_{ik}^{A,B} = \int_{S_{\Sigma, M}} \mathbf{e}_i^* \mathbf{u}_k ds, \quad (7.10)$$

W есть диагональная матрица волновых сопротивлений ($W_{ik} = \delta_{ik} W_k$), вектор g^A есть j -й столбец матрицы $X^A W^{-1}$, а g^B — j -й столбец матрицы $2X^B$.

После нахождения решения a алгебраической задачи (7.8) или (7.9) из (7.6) находится \mathbf{u}^{q_0} , т. е. представление E_t или η соответственно, и элементы j -го столбца матрицы рассеяния диафрагмы вычисляются простым проектированием на исходный базис $\{\mathbf{e}_n\}$ или соответственно на $\{\mathbf{h}_n\}$ (система собственных магнитных функций прямоугольного волновода).

Интересно подчеркнуть, что алгебраические формы (7.8) и (7.9) могут быть также получены методом Трефтца «с последовательным наложением граничных условий»; в отношении задач типа A это показано в [45]*. В обычном методе Трефтца при решении задач дифракции на диафрагме в волноводе поле разлагается по решениям уравнений Максвелла в виде прямых и обратных нормальных волн волновода. Можно, однако, построить (в виде разложений по этим волнам) такие решения уравнений Максвелла, которые к тому же будут удовлетворять некоторым граничным условиям на диафрагме. Тогда в методе Трефтца остается потребовать удовлетворения оставшихся граничных условий.

В частности, алгебраическая форма (7.8) возникает при использовании в качестве базиса Трефтца системы решений уравнений Максвелла $\left\{ \begin{matrix} E_q \\ H_q \end{matrix} \right\}$ следующего вида:

* В [45] рассматривалась несколько более сложная «ключевая задача» для полоскового устройства, поставленная в [42].

$$\begin{pmatrix} E_q \\ H_q \end{pmatrix} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{p_0} Y_{pq}^A \begin{pmatrix} e_p \\ -h_p \end{pmatrix} e^{i\Gamma_p z}, & z < 0 \\ \sum_{p=1}^{p_0} Y_{pq}^A \begin{pmatrix} e_p \\ h_p \end{pmatrix} e^{-i\Gamma_p z}, & z > 0 \end{cases} \quad (7.11)$$

Нетрудно видеть, что $E_{qt}(0)$ и $H_{qt}(0)$ порождают полные на S_Σ системы (при $z = 0$ расположена диафрагма); поперечная составляющая E_{qt} везде непрерывна; в пределе при $p_0 \rightarrow \infty$ компонента E_{qt} обращается в нуль на S_M . Поэтому в методе Трефтца остается лишь наложить в проекционной форме условие непрерывности поперечного магнитного поля на S_Σ , что и приводит к (7.8).

В другом варианте решения уравнений Максвелла, образующие базис Трефтца $\begin{pmatrix} E_q \\ H_q \end{pmatrix}$, строятся в виде

$$\begin{pmatrix} E_q \\ H_q \end{pmatrix} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{p_0} W_p Y_{pq}^B \begin{pmatrix} e_p \\ -h_p \end{pmatrix} e^{i\Gamma_p z} & (z < 0) \\ \sum_{p=1}^{p_0} W_p Y_{pq}^B \begin{pmatrix} e_p \\ h_p \end{pmatrix} e^{-i\Gamma_p z} & (z > 0) \end{cases} \quad (7.12)$$

Эти функции отличаются в главном от (7.11) тем, что при $p_0 \rightarrow \infty$ удовлетворяют условию непрерывности поперечной составляющей магнитного поля на S_Σ . При реализации метода Трефтца с базисом (7.12) остается потребовать (в проекционной форме) обращения в нуль касательной составляющей электрического поля на S_M , а это приводит к (7.9).

Возвращаясь к реализации алгебраических форм (7.8) и (7.9), прежде всего отметим простейшие варианты выбора базисов. В дополнение к $\{e_n\}$ введем в рассмотрение системы $\{e_n^\Sigma\}$ и $\{e_n^M\}$, обладающие теми же свойствами, что и $\{e_n\}$, в областях S_Σ и S_M соответственно. Такие системы очень просто построить, если, например, области S_Σ и S_M могут быть составлены из параллелепипедов, что очень часто имеет место для полосковых устройств.

Взяв сначала задачу А, отметим следующие четыре варианта построения алгоритма при различном выборе базисов $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$:

Вариант	$\{u_n\}$	$\{v_n\}$	Вариант	$\{u_n\}$	$\{v_n\}$
A. 1	$\{e_n\}$	$\{e_n^\Sigma\}$	A. 3	$\{e_n\}$	$\{e_n\}$
A. 2	$\{e_n^\Sigma\}$	$\{e_n^\Sigma\}$	A. 4	$\{e_n^\Sigma\}$	$\{e_n\}$

Для задачи В естественно несколько расширить этот набор:

Вариант	$\{u_n\}$	$\{v_n\}$	Вариант	$\{u_n\}$	$\{v_n\}$
B. 1	$\{e_n\}$	$\{e_n^M\}$	B. 1a	$\{e_n\}$	$\{z_0, e_n^M\}$
B. 2	$\{e_n^M\}$	$\{e_n^M\}$	B. 2a	$\{z_0, e_n^M\}$	$\{z_0, e_n^M\}$
B. 3	$\{e_n\}$	$\{e_n\}$	B. 3a	—	—
B. 4	$\{e_n^M\}$	$\{e_n\}$	B. 4a	$\{z_0, e_n^M\}$	$\{e_n\}$

Такое расширение связано с тем обстоятельством, что функции $[z_0, e_n^m]$ в сравнении с e_n^m более естественны в смысле представления тока на открытых краях проводников.

В заключение этого обсуждения приведем в сокращенной форме результаты тестового расчета, цель которого — показать на примере, что урезание разложений типа (7.2), (7.4) может быть эффективным и при возрастании их членов. Заметим предварительно, что при возбуждении в волноводе одних только E -полей члены разложения (7.2) убывают, как $|1/\Gamma_p|$ (при $p \rightarrow \infty$), а члены разложения (7.4) возрастают, как $|\Gamma_p|$ (при разложении поля по одним H -полям роли разложений меняются). Тестовой является задача дифракции волны ТЕМ на диафрагме половинной высоты в системе параллельных плоскостей. С одной стороны, эта задача уже подвергалась методическому исследованию [46], а с другой — здесь можно воспользоваться формулами метода факторизации, полученными в [47], чтобы произвести сравнение. В данном случае возбуждаются только E -поля (наряду с ТЕМ), поэтому алгоритмы типа A благоприятны, а алгоритмы типа B могут быть подвергнуты сомнению.

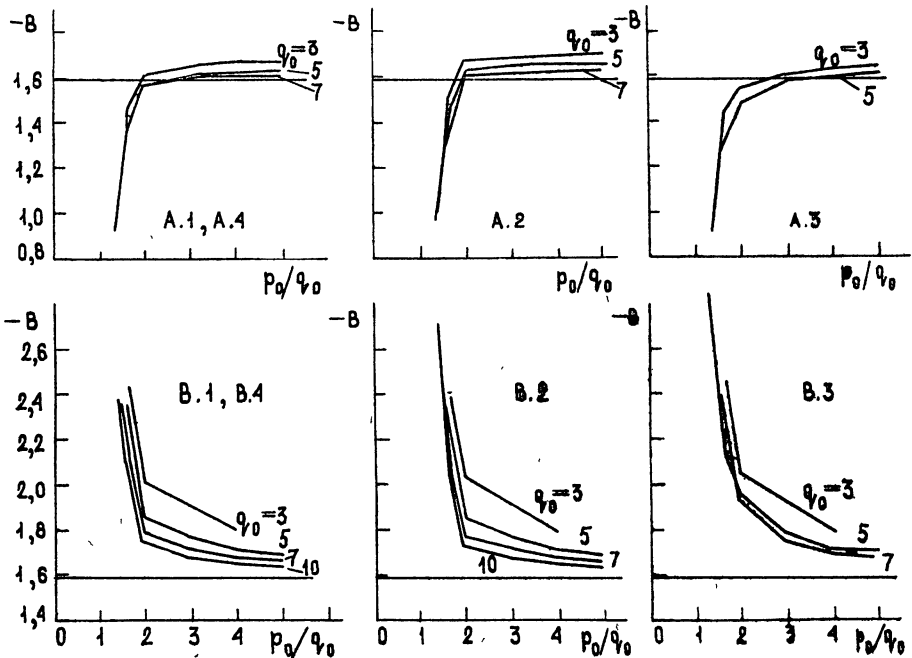


Рис. 22.

На рис. 22 представлены результаты вычисления проводимости B указанной диафрагмы для волны ТЕМ (после нахождения матрицы рассеяния). Горизонтальная линия на всех графиках соответствует значению $-B = 1,5866\dots$, полученному на основе метода факторизации (при этом в формуле (52.30) [47] взято 100 членов). По осям абсцисс везде отложено отношение ρ_0/q_0 , где ρ_0 — число членов, сохранных в (7.2) или (7.4), а q_0 — число членов в представлении решения (7.6) и одновременно порядок решаемой системы алгебраических уравнений (7.8) или (7.9). Параметр ρ_0/q_0 характеризует степень аппроксимации интегрального оператора ($L_{A,B} \rightarrow L_{A,B}^{\rho_0}$), или — при другой интер-

претации — степень выполнения «промежуточного» краевого условия в методе Трефтца, налагаемого на базисные функции. При каждом фиксированном q_0 точность результата повышается с ростом p_0/q_0 (и обратно). Хотя в вариантах В.1—В.4 в сравнении с вариантами А.1—А.4 точность ниже, налицо сходимость алгоритмов, несмотря на тот факт, что в (7.4) отбрасывается бесконечная часть разложения функции Грина с возрастающими членами. Заметим, что вариант А.2 вполне соответствует алгоритму, исследованному в [46]. Подчеркнем в заключение, что намеренно исследовались простейшие алгоритмы, в которых не реализуются преимущества, связанные с выделением особенностей.

8. АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

Рассмотренные нами вариационные (проеекционные) методы сами по себе не дают возможности оценивать точность получаемых результатов, например, точность нахождения приближенных значений элементов матриц Y , Z , R и Q (см. разд. 2), которые нетрудно выразить в виде функционалов на множестве приближенных представлений поля. Между тем, на пути, тесно примыкающем к вариационным методам, могут быть получены апостериорные оценки погрешности указанных величин. Это значит, что в принципе можно указывать некоторые границы, внутри которых лежат погрешности данных характеристических параметров задач дифракции, для того или иного конкретного представления поля. Разумеется, при этом действуют различные ограничения.

По-видимому, впервые для волноводных задач одна из возможностей такого рода была найдена Швингером [48], однако в области применимости подхода оказались лишь простейшие (одномерные) диафрагмы. Существенно более широкий путь был намечен Като [49], правда, в указанной работе рассматривалась задача не из области электродинамики. Для частного класса волноводных задач идея Като была применена в [50]. Для широкого класса задач дифракции применительно к экранированным и открытым системам апостериорные оценки погрешности были построены в [51, 52]. Позднее весьма сходные результаты были опубликованы в [53].

Обсудим проблему на основании [51, 52]. Пусть рассматривается задача дифракции общего вида (рис. 1 а, б) при $j^{\text{ст}} = 0$ и сформулирована соответствующая внутренняя краевая задача (3.3), причем входящие в (3.3) уравнения Максвелла будем писать в форме (1.9).

Если $U = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ — решение рассматриваемой задачи дифракции, то согласно (1.9)

$$(M - \omega\pi)U = 0. \quad (8.1)$$

Обозначив $L = M - \omega\pi$, построим функционал

$$\Phi(u) = \int_{V-V_M} [LUu^* - U(Lu)^*] dv = (L'U, u) - (U, Lu) \quad (8.2)$$

(краевые условия здесь не фиксированы), допустимыми являются функции $u = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix}$ с непрерывными касательными составляющими на всех внутренних границах. Введем обозначение $\delta U = u - U$ и приведем (8.2) к следующему виду:

$$\Phi(u) = -(u, Lu) + (\delta U, L\delta U). \quad (8.3)$$

Если ε и μ — эрмитовы тензоры, в частности, вещественные скаляры (поглощение или, например, регенерация в среде отсутствуют), то в результате интегрирования в правой части (8.2) по частям получим

$$\Phi(u) = i \int_{\{S_\alpha\} + S_M} \{[E, h^*] + [e^*, H]\} ds \quad (8.4)$$

(как и в разд. 3, $\{S_\alpha\}$ — совокупность всех открытых сечений каналов, т. е. в случае дифракции в свободном пространстве — просто сфера S ; S_M — поверхность всех металлических границ, включая S_0).

В зависимости от выбора режима (тип крайних условий на $\{S_\alpha\}$) можно получать частные классы функционалов, выражающих те или иные характеристические параметры задач дифракции. Ограничимся случаем перехода к ключевой задаче (3.8). При этом решение U имеет тангенциальную компоненту E_τ , обращающуюся в нуль на всех S_α за исключением S_β , где $E_\tau = e_{n(\beta)}$. Допустимыми будем считать функции u , касательные электрические компоненты которых подчинены крайним условиям задачи, т. е. $e_\tau = E_\tau$. Согласно (8.4), в этом случае

$$\Phi(u) = -i \frac{W_{n(\beta)}^{+*}}{|W_{n(\beta)}^+|} Y_{nn}^{\beta\beta} + i \int_{S_\beta} [e_{n(\beta)}, h^*] ds.$$

Поэтому ввиду (8.3)

$$Y_{nn}^{\beta\beta} = \frac{W_{n(\beta)}^{+*}}{|W_{n(\beta)}^+|} \left\{ \int_{S_\beta} [e_{n(\beta)}, h^*] ds - i(u, Lu) + i(\delta U, L \delta U) \right\}. \quad (8.5)$$

Если изменить режим таким образом, чтобы касательная электрическая компонента не обращалась в нуль на двух входах, а именно $E_\tau = e_{n(\beta)}$ на S_β и $E_\tau = \pm e_{k(\alpha)}$ на S_α (как частный случай берется один вход: $E_\tau = e_{n(\beta)} \pm e_{k(\beta)}$ на S_β и $E_\tau = 0$ на S_α), то вместо (8.5) получаем:

$$\begin{aligned} & (Y_{nn}^{\beta\beta} \pm Y_{nk}^{\beta\alpha}) \frac{W_{n(\beta)}^{+*}}{|W_{n(\beta)}^+|} + (Y_{kk}^{\alpha\alpha} \pm Y_{kn}^{\alpha\beta}) \frac{W_{k(\alpha)}^{+*}}{|W_{k(\alpha)}^+|} = \\ & = \int_{S_\beta} [e_{n(\beta)}, h^*] ds \pm \int_{S_\alpha} [e_{k(\alpha)}, h^*] ds - i(u, Lu) + i(\delta U, L \delta U) \end{aligned} \quad (8.6)$$

(в частности, может быть взято $\alpha = \beta$).

Функционалы (8.5) и (8.6) на множестве допустимых функций u дают точные значения линейных комбинаций элементов матрицы Y , которые, однако, непосредственно не реализуемы, так как через δU в них входит и точное решение задачи U , остающееся неизвестным. Смысл полученных функционалов заключается в том, что член $(\delta U, L \delta U)$ будет оцениваться. Тем самым при выборе u в классе допустимых функций находятся — с известной (и регулируемой) погрешностью — сначала диагональные элементы матрицы Y из (8.5), а после этого все остальные из (8.6).

Для построения двусторонних оценок вещественной величины $(\delta U, L \delta U)$ (и далее — апостериорных оценок параметров дифракции) введем в рассмотрение крайние условия для оператора $L = M - \omega\pi$, обеспечивающие его симметричность, например, следующие: а) $e_\tau = 0$ на границе области $V - V_M$ либо б) $e_\tau = 0$ на этой границе, за исключением $\{S_\alpha\}$, и $h_\tau = 0$ на $\{S_\alpha\}$. Новый оператор обозначим \tilde{L} .

Поставим задачу на собственные значения

$$\mathring{L} u_n = \Omega_n q u_n, \quad (8.7)$$

где q — некоторый симметричный оператор веса. В частности, при $q = \pi$ имеем

$$\mathring{M} u_n = \omega_n \pi u_n; \quad \omega_n = \Omega_n + \omega \quad (8.8)$$

(символом \mathring{M} обозначен оператор Максвелла M при указанных краевых условиях). Заметим, что в случае краевых условий первого типа это задача об электромагнитном резонаторе с идеально проводящей оболочкой, ограничивающей область $V - V_m$.

Поскольку входящая в функционалы (8.5) и (8.6) функция δU принадлежит области определения оператора \mathring{L} , то разложив δU и $q^{-1}L \delta U$ в ряды Фурье по $\{u_n\}$, с коэффициентами $a_n = (q \delta U, u_n)$ и $A_n = (L \delta U, u_n)$, путем интегрирования по частям получим также, что $A_n = \Omega_n a_n$. Следовательно,

$$(q^{-1}L \delta U, L \delta U) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2, \quad (\delta U, L \delta U) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} |A_n|^2, \quad (8.9)$$

$$\frac{1}{\Omega_{-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} |A_n|^2 \leq \frac{1}{\Omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2,$$

где $\Omega_{-1} = \min \Omega_n$ для $\Omega_n > 0$ и $\Omega_{-1} = \max \Omega_n$ для $\Omega_n < 0$. Ввиду (8.9)

$$\frac{1}{\Omega_{-1}} (q^{-1}L \delta U, L \delta U) \leq (\delta U, L \delta U) \leq \frac{1}{\Omega_1} (q^{-1}L \delta U, L \delta U),$$

а так как $L \delta U = Lu$, то

$$\frac{1}{\Omega_{-1}} (q^{-1}Lu, Lu) \leq (\delta U, L \delta U) \leq \frac{1}{\Omega_1} (q^{-1}Lu, Lu). \quad (8.10)$$

Этот результат можно рассматривать как двойное неравенство типа Като. Наиболее существенно, что для входящей в функционалы (8.5) и (8.6) величины $(\delta U, L \delta U)$ получена двусторонняя оценка, реализуемая через любую допустимую функцию u . Однако должны быть известны собственные значения Ω_{-1} и Ω_1 оператора \mathring{L} (8.7). Если взято $q = \pi$, то $\Omega_{-1} = \omega_k - \omega$ и $\Omega_1 = \omega_{k+1} - \omega$, где ω_k и ω_{k+1} — две соседние собственные частоты электромагнитного резонатора, отвечающего задаче (8.8), причем $\omega_k < \omega < \omega_{k+1}$ (ω — частота в задаче дифракции). Это иллюстрируется спектральной диаграммой на рис. 23, где $k = 2$.

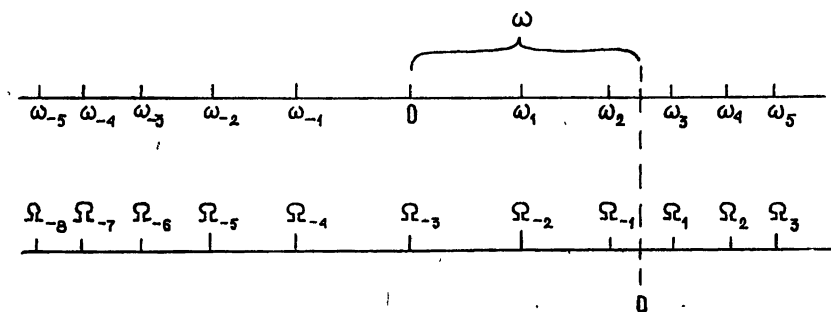


Рис. 23.

Оценки элементов матрицы Z строятся совершенно аналогично, несколько сложнее получить оценки для матрицы рассеяния R . Заметим, что в [53] оценки элементов матрицы Y были построены для расчета коаксиальных элементов.

В [44] была отмечена связь проблемы апостериорных оценок с регуляризацией.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение вариационных (проекционных) методов как средства исследования дифракционных процессов в настоящее время уже получило значительное распространение; частично об этом свидетельствует цитированная литература. Приведенные в обзоре примеры применения методов к конкретным задачам дают представление о степени сложности реальных объектов, математическое моделирование которых осуществимо в настоящее время. Характерно, что оно требует больших ЭВМ. Быстрый прогресс вычислительной техники, несомненно, приведет в обозримом будущем к дальнейшему возрастанию сложности моделируемых объектов. Можно ожидать, что станет доступным математическое моделирование антенных решеток конечных размеров с удовлетворительным учетом конфигурационной сложности отдельных элементов, а также моделирование иных родственных объектов, не сводимых к каналу Флоке. Своей очереди ждут дифракционные задачи об активных и нелинейных (например, полупроводниковых) элементах в СВЧ аппаратуре.

Одно из важнейших применений вариационных методов для задач дифракции — разработка алгоритмической базы для систем автоматизированного проектирования устройств СВЧ и антенн [54]. Уже сейчас такие системы существуют.

В теоретическом плане определенные надежды связаны с развитием апостериорных оценок погрешности проекционных алгоритмов. Продвижение в этом направлении должно позволить не только получать результаты математического моделирования с гарантированной точностью, но и существенно повысить экономичность алгоритмов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Система нормальных волн продольно однородного канала. Комплексные амплитуды нормальных волн, распространяющихся вдоль направляющей системы с постоянной структурой поперечного сечения, имеют вид $E_n = \hat{E}_n e^{-i\Gamma_n z}$, $H_n = \hat{H}_n e^{-i\Gamma_n z}$ (\hat{E}_n , \hat{H}_n не зависят от z). Уравнения Максвелла (1.9) для этого случая можно переписать, исключая зависимости от z , в форме

$$(M_{\perp} - \omega\pi) \underset{\wedge}{F}_n = - \Gamma_n T \underset{\wedge}{F}_n. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $\underset{\wedge}{F}_n = \begin{pmatrix} \underset{\wedge}{E}_n \\ \underset{\wedge}{H}_n \end{pmatrix}$, M_{\perp} — оператор Максвелла с отбрасыванием производных по z , π не зависит от z , $T = \begin{pmatrix} 0 & \times z_0 \\ z_0 \times & 0 \end{pmatrix}$, где крест отвечает векторному произведению.

Пусть оператор $M_{\perp} - \omega\pi$ — симметрический (это будет, например, если канал ограничен идеально проводящей оболочкой, а ε и μ — эрмитовы тензоры). Тогда из (П.1) следует

$$(\Gamma_n - \Gamma_k^*)(TF_n, F_k) = 0, \quad (\text{П.2})$$

или (правила действий см. в [3], пп. 2.3 и 9.1)

$$(\Gamma_n - \Gamma_k^*) \int_S \{ [e_k^*, h_n] + [e_n, h_k^*] \}_z ds = 0 \quad (\text{П.2a})$$

(e_i, h_i — поперечные составляющие векторов $\underset{\wedge}{E}_i, \underset{\wedge}{H}_i, S$ — поперечное сечение канала, его контур обозначается символом $\underset{\wedge}{L}$).

Из (П.2) следует, что нормальные волны рассматриваемого класса, представленные функциями $\underset{\wedge}{F}_i$, ортогональны с весом T (и вообще «самоортогональны»), но исключения составляют «сопряженные» волны, т. е. такие волны с номерами n и \tilde{n} , для которых $\Gamma_{\tilde{n}} = \Gamma_n^*$. Поэтому естественно правило ортонормировки

$$\int_S \{ [e_{\tilde{n}}^*, h_n] + [e_n, h_{\tilde{n}}^*] \}_z ds = 2N_k \delta_{kn}, \quad (\text{П.3})$$

где N_k — некоторые числа. В частности, для вещественных постоянных распространения $\Gamma_{\tilde{n}} = \Gamma_n$ и для мнимых $\Gamma_{\tilde{n}} = -\Gamma_n$.

Нормальные волны полого волновода с однородной изотропной средой. Нормальные волны в этом случае принадлежат классам E, H и (в случае неоднородности поперечного сечения) ТЕМ.

E-волны:

$$E_n^\pm = z_0 \Phi_n^\pm + \frac{1}{\chi_n^2} \nabla_\perp \frac{\partial \Phi_n^\pm}{\partial z},$$

$$H_n^\pm = -i \frac{\omega \varepsilon}{\chi_n^2} [z_0, \nabla_\perp \Phi_n^\pm], \quad (\text{П.4})$$

$$\Phi_n^\pm = \varphi_n e^{\mp i \Gamma_n z}, \quad \chi_n^2 + \Gamma_n^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu,$$

где φ_n — собственные функции краевой задачи

$$\nabla_\perp^2 \varphi_n + \chi_n^2 \varphi_n = 0, \quad (\text{П.5})$$

$$\varphi_n = 0 \text{ на } \underset{\wedge}{L};$$

H-волны:

$$E_n^\pm = -i \frac{\omega \mu}{\chi_n^2} [\nabla_\perp \Psi_n^\pm, z_0],$$

$$H_n^\pm = z_0 \Psi_n^\pm + \frac{1}{\chi_n^2} \nabla_\perp \frac{\partial \Psi_n^\pm}{\partial z}, \quad (\text{П.6})$$

$$\Psi_n^\pm = \psi_n e^{\mp i \Gamma_n z}, \quad \chi_n^2 + \Gamma_n^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu,$$

где ψ_n — собственные функции краевой задачи

$$\nabla_\perp^2 \psi_n + \chi_n^2 \psi_n = 0, \quad (\text{П.7})$$

$$\partial \psi_n / \partial \nu = 0 \text{ на } \underset{\wedge}{L};$$

ТЕМ-волны:

$$E_n^\pm = \nabla_\perp \frac{\partial \overset{\circ}{\Phi}_n^\pm}{\partial z} = -i \omega \mu [\nabla_\perp \overset{\circ}{\Psi}_n^\pm; \mathbf{z}_0],$$

$$H_n^\pm = -i \omega \varepsilon [\mathbf{z}_0, \nabla_\perp \overset{\circ}{\Phi}_n^\pm] = \nabla_\perp \frac{\partial \overset{\circ}{\Psi}_n^\pm}{\partial z}, \quad (\text{П.8})$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_n^\pm = \overset{\circ}{\varphi}_n e^{\mp i k z}, \quad \overset{\circ}{\Psi}_n^\pm = \overset{\circ}{\psi}_n e^{\mp i k z} \quad (\Gamma = k),$$

где $\overset{\circ}{\varphi}_n$ и $\overset{\circ}{\psi}_n$ — собственные функции задач (П.5) и (П.7) соответственно при $\chi_n = 0$.

Поперечные векторные функции \mathbf{e}_n^\pm , \mathbf{h}_n^\pm получаются из (П.4), (П.6) и (П.8) посредством выделения поперечных компонент и отбрасывания множителя $e^{\pm i \Gamma z}$; их можно рассматривать как собственные функции векторных уравнений Гельмгольца при специфических краевых условиях ([3], п. 9.2). При этом справедливы соотношения

$$\mathbf{e}_n^\pm = W_n [\mathbf{h}_n^\pm, \pm \mathbf{z}_0], \quad W_n \mathbf{h}_n^\pm = [\pm \mathbf{z}_0, \mathbf{e}_n^\pm], \quad (\text{П.9})$$

где для волн E , H , и ТЕМ соответственно волновые сопряжения W_n равны: $\Gamma_n / \omega \varepsilon$, $\omega \mu / \Gamma_n$ и $\sqrt{\mu / \varepsilon}$.

Можно положить

$$\mathbf{e}_n^\pm = \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{h}_n^\pm = \pm \mathbf{h}_n. \quad (\text{П.10})$$

Если ε и μ вещественны, то Γ_n либо вещественны (активные волны), либо чисто мнимы (реактивные волны); в первом случае $\Gamma_n = \Gamma_n$, во втором $\Gamma_n = -\Gamma_n$. С учетом предыдущего удобно взять в (П.3) $N_k = W_k / |W_k|$. При этом получаем

$$\int_S \Lambda [\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_k^*]_z ds = \frac{W_k}{|W_k|} \delta_{kn}. \quad (\text{П.11})$$

Однако в ряде случаев удобнее иные ортонормировки, например

$$\int_S \Lambda \mathbf{e}_k^* \mathbf{e}_n ds = \delta_{kn} \quad (\text{П.12})$$

везде в статье, за исключением разд. 7, используется соотношение (П.11), а в разд. 7 — (П.12).

Система нормальных волн шарового канала. Нормальные волны принадлежат классам E и H .

E -волны:

$$E_p^\pm = r_0 \Phi_p^\pm + \frac{1}{n(n+1)} \nabla_\perp \frac{\partial r^2 \Phi_p^\pm}{\partial r},$$

$$H_p^\pm = -i \frac{\omega \varepsilon}{n(n+1)} [r_0, \nabla_\perp r^2 \Phi_p^\pm], \quad (\text{П.13})$$

$$\Phi_p^\pm = M_p \frac{H_{n+1/2}^{(1,2)}(kr)}{(kr)^{3/2}} P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \frac{\cos m \alpha}{\sin m \alpha};$$

H-волны:

$$E_p^\pm = -i \frac{\omega \mu}{n(n+1)} [\nabla_\perp r^2 \Psi_p^\pm, \mathbf{r}_0],$$

$$H_p^\pm = r_0 \Psi_p^\pm + \frac{1}{n(n+1)} \nabla_\perp \frac{\partial r^2 \Psi_p^\pm}{\partial r}, \quad (\text{П.14})$$

$$\Psi_p^\pm = N_p \frac{H_{n+1/2}^{(1,2)}(kr)}{(kr)^{3/2}} P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \frac{\cos m\alpha}{\sin}$$

(символ \perp означает исключение производных по радиальной координате). Скалярные функции Φ_p^\pm , Ψ_p^\pm отличаются только константами, определяемыми нормировкой (см. ниже). На поверхности каждой сферы $r = \text{const}$ они определяются уравнением

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} \Phi_p^\pm \\ \Psi_p^\pm \end{Bmatrix} + \frac{n(n+1)}{r^2} \begin{Bmatrix} \Phi_p^\pm \\ \Psi_p^\pm \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{П.15})$$

при периодических краевых условиях.

На каждой сфере $r = \text{const}$ определим векторные функции \mathbf{e}_p^\pm , \mathbf{h}_p^\pm как поперечные (лишенные r -компоненты) составляющие функций E_p^\pm , H_p^\pm , причем в соответствии с (П.13), (П.14) индекс «+» соответствует сходящимся волнам (выбор функции Ханкеля первого рода), а «-» — расходящимся (выбор функции Ханкеля второго рода). Эти функции — решения уравнения вида (П.15), где ∇_\perp^2 понимается как векторный оператор ($\nabla_\perp^2 = \text{grad}_\perp \text{div}_\perp - \text{rot}_\perp \text{rot}_\perp$) при периодических условиях.

Подобно (П.9)

$$\mathbf{e}_p^\pm = W_p^\pm [\mathbf{h}_p^\pm, \mp \mathbf{r}_0], \quad \mathbf{h}_p^\pm = (W_p^\pm)^{-1} [\mp \mathbf{r}_0, \mathbf{e}_p^\pm], \quad (\text{П.16})$$

причем $W_p^- = (W_p^+)^*$.

Для *E*-волн:

$$W_p^+ = (W_p^-)^* = \frac{-i \frac{d}{dr} (\sqrt{kr} H_{n+1/2}^{(1)}(kr))}{\omega \varepsilon \sqrt{kr} H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}, \quad (\text{П.17})$$

а для *H*-волн:

$$W_p^+ = (W_p^-)^* = \frac{i \omega \mu \sqrt{kr} H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{\frac{d}{dr} (\sqrt{kr} H_{n+1/2}^{(1)}(kr))}. \quad (\text{П.18})$$

Ортонормировка определяется соотношением

$$\oint_{S(r=\text{const})} [\mathbf{e}_q^\pm, (\mathbf{h}_p^\pm)^*] \cdot d\mathbf{s} = \mp \frac{W_p^\pm}{|W_p^\pm|} \delta_{pq}, \quad (\text{П.19})$$

причем удобно положить

$$\mathbf{e}_p^\pm = \mathbf{e}_p, \quad \mathbf{h}_p^- = -\frac{W_p^+}{W_p^-} \mathbf{h}_p^+ = -\omega_p^2 \mathbf{h}_p^+ \quad (\text{П.20})$$

($\omega_p = W_p^+ / |W_p^+|$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
2. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, изд. Наука, М., 1970.
3. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, изд. Наука, М., 1967.
4. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М., 1962.
5. Cl. Müller, Grundlagen der mathematischen Theorie electromagnetischen Schwingungen, Berlin, 1957.
6. Г. Т. Марков, Е. Н. Васильев, Математические методы прикладной электродинамики, изд. Сов. радио, М., 1970.
7. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 201 (1969).
8. А. Г. Свешников, Докл. АН СССР, 184, № 1 (1969).
9. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 16, № 7, 1120 (1971).
10. В. В. Никольский, Труды МИРЭА, вып. 55, Электродинамика, Антенны и техника СВЧ, 5 (1972).
11. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, Гостехиздат, М., 1951.
12. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС, Л., 1949.
13. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 5, № 12, 1960 (1960).
14. А. Г. Медокс, Радиотехника, 22, № 9, 30 (1967).
15. В. В. Никольский, Труды МИРЭА, вып. 40, Радиотехника, 1, 3 (1969).
16. В. В. Никольский, Ф. Ф. Измайлов, А. П. Федосеев, Радиотехника и электроника, 17, № 6, 1305 (1972).
17. В. В. Никольский, Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 7, 1045 (1973).
18. Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 268 (1975).
19. А. Н. Коваленко, Труды МИРЭА, вып. 70, Электродинамика, антенны и техника СВЧ, 60 (1974).
20. В. В. Никольский, Труды МИРЭА, вып. 70, Электродинамика, антенны и техника СВЧ, 24 (1974).
21. В. В. Никольский, В. Г. Феоктистов, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1596 (1971).
22. В. В. Никольский, Труды МИРЭА, вып. 70, Электродинамика, антенны и техника СВЧ, 112 (1974).
23. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 16, № 8, 1342 (1971).
24. В. В. Никольский, Труды МИРЭА, вып. 70, Электродинамика, антенны и техника СВЧ, 99 (1974).
25. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
26. A. Stevenson, J. Appl. Phys., 22, № 12, 1447 (1951).
27. А. Г. Свешников, ЖВМ и МФ, 3, № 2 (1963).
28. А. Г. Свешников, ЖВМ и МФ, 3, № 5 (1963).
29. А. Г. Свешников, А. С. Ильинский, И. П. Котик, сб. Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, вып. 3, М., 1965.
30. В. И. Дмитриев, А. С. Ильинский, А. Г. Свешников, Вестник МГУ, Математика, механика, вып. 4, 71 (1970).
31. А. Г. Свешников, А. С. Ильинский, ЖВМ и МФ, 11, № 4, 960 (1971).
32. А. С. Ильинский, Н. Б. Косич, Радиотехника и электроника, 19, № 6, 1171 (1974).
33. В. П. Орлов, Радиотехника и электроника, 9, № 3, 553 (1964).
34. В. П. Моденов, сб. Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, М., вып. 5, 197 (1966).
35. А. С. Ильинский, А. Л. Павлов, А. Г. Свешников, Исследование некоторых задач дифракции в неоднородных средах численными методами, изд. МГУ, М., 1972.
36. W. C. Nahp, J. Appl. Phys., 12, № 1, 62 (1941).
37. В. В. Никольский, Труды МИРЭА, вып. 70, Электродинамика, антенны и техника СВЧ, 3 (1974).
38. В. В. Никольский, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, ч. 1, Москва — Ереван, 1973, стр. 83.
39. В. Г. Феоктистов, О. И. Левин, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, ч. 1, Москва — Ереван, 1973, стр. 102.
40. Ю. П. Винниченко, Л. Н. Захарьев, А. А. Леманский, А. Е. Туманская, Радиотехника и электроника, 19, № 8, 1591 (1974).
41. В. В. Никольский, сб. Машинное проектирование систем и устройств СВЧ, изд. Киев, вып. 2, 1974, стр. 3.

42. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, **20**, № 3, 457 (1975).
43. В. В. Никольский, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, ч. 1, Москва — Ереван, 1973, стр. 79.
44. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, **20**, № 10, 2046 (1975).
45. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, **20**, № 11, 2382 (1975).
46. Sh. W. Lee, W. R. Jones, J. J. Campbell, IEEE Trans., MTT, **19**, № 6, 528 (1971).
47. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
48. Ю. Швингер, Зарубежная радиоэлектроника, № 3 (1970).
49. Т. Като, Progr. Theor. Phys., **6**, 394 (1951).
50. L. Spruch, J. Appl. Phys. **31**, № 5, 905 (1960).
51. В. В. Никольский, В. Г. Феоктистов, Труды МИРЭА, вып. 40, Радиотехника, **5**, 50 (1970).
52. В. В. Никольский, В. Г. Феоктистов, Радиотехника и электроника, **16**, № 10, 1770 (1971).
53. Э. Л. Куликов, Е. И. Киникстунь, Л. П. Тимченко, Радиотехника и электроника, **17**, № 9 (1972).
54. В. В. Никольский, Ю. Х. Вермишев, В. П. Орлов, В. Г. Феоктистов, сб. Машинное проектирование систем и устройств СВЧ, изд. Киев, вып. 1, 1974, стр. 3.
55. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, **13**, № 4, 587 (1968).
56. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, **14**, № 1, 25 (1969).
57. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Радиотехника и электроника, **17**, № 2, 268 (1972).
58. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, Радиотехника и электроника, **20**, № 6, 1129 (1975).
59. Л. Коллатц, Задачи на собственные значения, изд. Наука, М., 1968, стр. 56.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
27 января 1976 г.