

УДК 538.56 : 519.25

О ВЛИЯНИИ РАЗРЫВОВ НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

С. Н. Гурбатов

Исследуется влияние разрывов на вероятностное распределение, энергию и асимптотику спектра случайной волны, распространяющейся в нелинейной среде с малой вязкостью. Показано, что на начальном этапе затухание средней энергии случайной волны, связанное с поглощением энергии на разрывах, определяется первыми моментами энергетического спектра волны на входе и возрастает с увеличением ширины начального спектра. Найдена асимптотика энергетического спектра волны, имеющая универсальный степенной вид $S(k, t) \sim k^{-n}$, где n меняется от двух до трех с уменьшением волнового числа, причем область излома степенного спектра с течением времени сдвигается в сторону больших длин волн.

При распространении волны в нелинейной среде происходит искажение ее начального профиля. Если волна генерируется шумовым источником, то изменяются и ее статистические характеристики. Эволюция вероятностных распределений и энергетических спектров случайных полей в случае, когда можно пренебречь вязкостью и распространение сигнала описывается уравнением простой волны

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

была подробно исследована в работах [1-4]. Однако решение уравнения (1) на конечных временных интервалах $t > t_p$ становится неоднозначной функцией координаты x . Решение Римана в этих областях уже неприменимо, и необходимо учесть диссипативные процессы, перейдя от (1) к уравнению Бюргерса [4]. При числе Рейнольдса Re , стремящемся к бесконечности, волна становится при $t > t_p$ разрывной, причем характеристики ударных фронтов можно получить из неоднозначного решения уравнения (1) с помощью правила равенства площадей [4], следующего из условия сохранения потока массы вещества через разрыв*. Ниже мы рассмотрим влияние разрывов на одномерное вероятностное распределение, энергию и асимптотику энергетического спектра случайной волны.

1. В работе [2] было показано, что одномерная плотность вероятности простой волны $W_{\Pi}(v, t)$ при статистически однородных начальных условиях не меняется и равна $W_0(v) \equiv W_{\Pi}(v, 0)$. Следовательно, пока ни в одной из реализаций случайной волны не успели образоваться разрывы, будет сохраняться и одномерное вероятностное распределение волны, удовлетворяющей уравнению Бюргерса при $Re \rightarrow \infty$. Анализ кинетического уравнения для плотности вероятности простой волны [2] показывает, что при $t > t_p$ $W_{\Pi}(v, t) \equiv W_0(v)$ представляет из

* При случайных начальных условиях время образования разрыва становится случайной величиной. Статистические характеристики длины формирования разрыва квазимонохроматической волны $L_p = c_{зв} t_p$ исследовались в работах [5, 6].

себя сумму плотностей вероятности для каждого из «потоков», причем плотности вероятности, соответствующие опрокинувшимся участкам, входят в эту сумму со знаком минус. Для того, чтобы перейти от простой волны к решению уравнения Бюргера при $Re \rightarrow \infty$, мы должны, используя правило равенства площадей [4], заменить многозначное решение (1) на разрывное (рис. 1). При этом одномерную плотность вероятности $W_B(v, t)$ можно представить в виде

$$W_B(v, t) = W_0(v) + P(v, t), \quad (2)$$

где функция $P(v, t)$ описывает поправки к $W_0(v, t)$, связанные с появлением разрывов в волне, и удовлетворяет условию $\int P(v, t) dv = 0$.

Для нахождения P учтем, что $W(v, t) dv$ совпадает с функцией относительной длины пребывания $v(x, t)$ в интервале $v, v + dv$. Тогда $P(v, t)$ равно среднему от

$$p(v, t) \equiv \begin{cases} \frac{\partial x(v)}{\partial v}, & v \text{ принадлежит } [v_1, v_2] \\ 0, & v \text{ не принадлежит } [v_1, v_2] \end{cases}, \quad (3)$$

где $x(v)$ — решение уравнения (1) в неявном виде:

$$x(v) = x_0(v) + vt \quad (4)$$

($x_0(v)$ — функция, обратная к $v = v_0(x)$), а усреднение $P(v, t) = \overline{p(v, t)}$ производится по числу образовавшихся разрывов в волне на единицу длины и по форме кривой $x = x(v)$ в окрестности разрыва.

На малых временах после образования разрыва можно аппроксимировать $x = x(v)$ в окрестности точки разрыва кубической параболой, причем из условия равенства площадей следует, что $\frac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} = 0$. Выражая коэффициенты разложения (4) через начальную скорость $v_* \equiv v_0(x_*)$ и ее производные $u \equiv \frac{\partial v_0}{\partial x}$, $z \equiv \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}$ в точке, где в начальный момент $\eta \equiv \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$, будем иметь для $p(v, t)$

$$p(v, t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{u} + t \right) - \frac{z}{2u^4} (v - v_*)^2 & (|v - v_*| < \Delta v) \\ 0 & (|v - v_*| > \Delta v) \end{cases}, \quad (5)$$

$$\Delta v = \sqrt{6u^3(1 + ut)/z}.$$

Как известно, условие опрокидывания волны можно записать в виде $u_0(x_*) < -1/t$, и, следовательно, усреднение (5) сводится к нахождению среднего на единицу длины числа минимумов процесса $u_0(x)$, величина которых больше $1/t$ [7]. Считая заданной четырехмер-

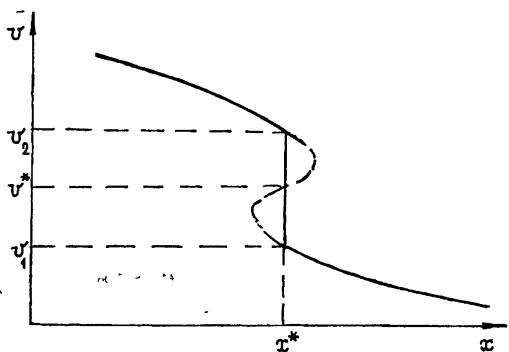


Рис. 1.

ную функцию распределения $W_0(v_*, u, \eta, z)$ статистически однородного процесса $v_0(x)$ и его трех производных, получим

$$P(v, t) = \int_{-\infty}^{-1/t} du \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dv_* p(v, t; v_*, u, z) z W_0(v_*, u, 0, z), \quad (6)$$

где $p(\dots)$ определяется выражением (5). Из анализа (6) можно установить, что появление разрывов в волне приводит к увеличению плотности вероятности $W_B(v, t)$ при тех значениях v , где $W_0(v_*, \eta = 0)$ имеет максимум, т. е. при тех v , для которых появление разрывов наиболее вероятно. В частности, для волны с гауссовой статистикой начальных условий $W_B(v, t)$ возрастает при малых v .

2. Из-за появления разрывов и поглощения на них энергии средняя энергия волны $E(t) = \int v^2 W_B(v, t) dv$ будет уменьшаться. Используя соотношение (5), для $\Delta E = E_0 - E(t)$ имеем из (6)

$$\Delta E(t) = \frac{2^{9/2} 3^{1/2}}{5} \int_{-\infty}^{-1/t} du \int_0^{\infty} dz W_0(u, 0, z) (1 + ut)^{5/2} u^{7/2} z^{-1/2}. \quad (7)$$

Изменение энергии $\Delta E(t)$, как следует из (7), не зависит непосредственно от распределения скорости $W_0(v)$, и связано это с тем, что время образования и поглощение энергии на каждом из разрывов не зависят от величины скорости v_* , при которой началось образование разрыва. Аналогичная ситуация имеет место и для детерминированных сигналов: например, время образования и поглощение энергии синусоидальной волны определяются максимальным градиентом начальной скорости [4].

Дальнейшие вычисления мы проведем для гауссова вероятностного распределения $W_0(v, u, \eta, z) = W_0(v, \eta) W_0(u, z)$, полностью определяемого дисперсией скорости $\sigma^2 = \langle v_0^2 \rangle$ и первыми тремя производными коэффициента корреляции $R(\rho)$ в нуле, которые связаны с пространственным спектром $v_0(x)$ соотношением

$$\omega_n^2 \equiv (-1)^n R^{(2n)}(0) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} S_0(k) dk \quad (n = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Для достаточно быстро спадающих спектров $S_0(k)$ поглощение энергии не зависит от величины коэффициента корреляции $r_{uz} = -\omega_2^2/\omega_1 \omega_3$ и определяется следующим выражением:

$$\Delta E(t) = \sqrt{\frac{54}{\pi}} \sigma^2 r_0^2 \tau^3 e^{-1/2 \tau^2}, \quad (9)$$

где $\tau \equiv \sigma \omega_1$, t — безразмерное время, $r_0 \equiv -r_{v\eta} = \omega_1^2/\omega_2$. Уменьшение энергии волны связано с возникновением ударных фронтов и определяется как средним на единицу длины числом разрывов, так и эффективной величиной энергии, поглощаемой на разрыве. Среднее число разрывов пропорционально множителю $\exp(-1/2 \tau^2)$ в (9) и тем больше, чем больше дисперсия градиента скорости $\sigma_u^2 = \sigma^2 \omega_1^2$. При одинаковой начальной энергии сильнее будет затухать волна с более широким спектром, аналогично тому, как при одинаковых амплитудах быстрее уменьшается энергия синусоидальной волны с меньшим периодом. Величина разрыва на начальном участке определяется первой и третьей производными начальной скорости в точке, где $\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$.

На начальном этапе, как можно показать из (7), основной вклад в затухание средней энергии дают разрывы, у которых $z \equiv \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \approx \omega_1^2 / r_0^2 t$, что приводит к уменьшению средней величины разрыва, а следовательно, и поглощения волны с уменьшением коэффициента корреляции r_0 .

Рассмотрим для примера затухание широкополосного шума с коэффициентом корреляции $R(\rho) = \exp(-\rho^2/\rho_0^2)$ и квазимонохроматической волны с $R(\rho) = \exp(-\rho^2/\rho_1^2) \cos k_0 \rho$. Используя соотношение (8), нетрудно получить, что в первом случае $r_0^2 = 1/3$, $\omega_1^2 = 2/\rho_0^2$, а во втором $r_0 \approx 1$, $\omega_1^2 = k_0^2 + 2/\rho_1^2$. При одинаковых дисперсиях градиента скорости более эффективно затухает квазимонохроматическая волна, что связано с меньшими в среднем величинами разрывов широкополосного шума по сравнению с квазимонохроматической волной.

3. При распространении волны в нелинейной среде без дисперсии происходит изменение ее спектра. Деформация спектрального распределения случайного поля, удовлетворяющего уравнению (1), была рассмотрена в работах [1-3]. Некорректность использования уравнения простой волны, связанная с появлением в решении Римана областей неоднозначности, снимается учетом диссипативных эффектов и переходом от (1) к уравнению Бюргерса. При $Re \rightarrow \infty$ высокочастотное затухание существенно лишь в областях бесконечных градиентов скорости, и поэтому поле может быть представлено в виде непрерывной и разрывной частей:

$$v(x, t) = v_n(x, t) + \sum_n 2 \Delta v_n(t) 1(x - x_n(t)). \quad (10)$$

Непрерывная часть поля $v_n(x, t)$ на интервалах между разрывами удовлетворяет уравнению (1), и соответствующая ей часть спектра описывается формулами работ [1-3]. В частности, появление в решении участков, где $v(x, t) \sim (x - x_*)^{1/2}$, приводит к асимптотике энергетического спектра $S(k, t) \sim k^{-3}$ [1-3, 8]. Однако спектр разрывной части спадает более медленно, чем спектр непрерывной, и поэтому при волновом числе k , большем некоторой граничной частоты k_* (t), зависящей в общем случае от времени, основной вклад в энергетический спектр дает разрывная часть поля. Умножая фурье-преобразование второго слагаемого в (10)

$$c_p(k, t) = \sum_n \frac{2 \Delta v_n(t)}{ik} \exp[ikx_n(t)]$$

на комплексно-сопряженную величину и используя статистическую однородность $v_0(x)$, представим энергетический спектр разрывной части в виде суммы главного и интерференционных членов:

$$S_p(k, t) = \frac{4 \overline{\Delta v^2}}{k^2} + \frac{8}{k^2} \sum_{p=1}^{\infty} \overline{[\Delta v_{n+p} \Delta v_n \cos k(x_{n+p} - x_n)]}. \quad (11)$$

Появление интерференционных членов в (11) обусловлено корреляцией положений разрывов. Из-за появления фазового множителя интерференционная часть спектра достаточно быстро спадает при увеличении волнового числа. Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ спектр определяется главным слагаемым в (11) и пропорционален k^{-2} [9]. В задачах о трансформации спектров случайных волн в нелинейной среде интерес представляет закон изменения интенсивности высокочастотных

компонент с течением времени. Коэффициент $\overline{\Delta v^2}$, определяющий интенсивность спектра, находится усреднением квадрата амплитуды скачка Δv по величине и числу разрывов на единицу длины.

На начальном этапе, когда неявное решение (4) можно аппроксимировать в окрестности разрыва кубической параболой, для нахождения $\overline{\Delta v^2}$ достаточно знать трехмерную функцию распределения первых трех производных начальной скорости. Для нормального распределения $v_0(x)$ при этом имеем

$$S_p(k, t) = \frac{12 \sigma^2 r_0 \omega_1}{k^2 \pi} e^{-1/2 \tau^2}, \quad (12)$$

где, как и раньше, $\tau \equiv \sigma \omega_1 t$.

Сравнивая (12) с асимптотикой непрерывной части спектра [3]

$$S_n(k, t) = \frac{\sqrt{2\pi} \sigma^2 \omega_1^2}{k^3 \tau^3} e^{-1/2 \tau^2}, \quad (13)$$

можно оценить граничную частоту $k_*(\tau)$. Из (12), (13) следует, что при $k \gg k_*(\tau) \approx \omega_1/r_0 \tau^3$ асимптотика спектра связана с появлением в волне ударных фронтов и $S(k, t) \sim k^{-2}$, а при $k \ll k_*(\tau)$ основной вклад дает непрерывная часть спектра. В интервале волновых чисел $1/\rho_0 \ll k \ll k_*(\tau)$, где ρ_0 — некоторый масштаб начального поля, асимптотика непрерывной части спектра определяется поведением поля в окрестности разрыва и $S(k, t) \sim k^{-3}$. С течением времени граница излома степенного спектра $k_*(\tau) \approx \omega_1/r_0 \tau^3$ сдвигается в сторону более низких частот, что связано с увеличением в среднем амплитуды разрыва.

4. Более полный анализ изменения статистических характеристик нелинейной разрывной волны удастся провести, когда начальный профиль случайного поля близок по форме к профилю некоторой детерминированной волны, эволюция которой в нелинейной среде достаточно хорошо изучена в динамике. Так, в работе [10] было исследовано затухание волны, представляющей из себя при $t=0$ последовательность синусоидальных импульсов случайной амплитуды, а в [11] было найдено вероятностное распределение разрывной волны, имеющей в начальный момент квазисинусоидальную форму с флуктуирующей амплитудой.

Аналогично можно определить для первоначально квазимонохроматической волны $v_0(x) = a(x) \cos(k_0 x + \varphi(x))$ асимптотику спектра, связанную с появлением ударных фронтов. Как известно [4], амплитуда разрыва v_p синусоидальной волны определяется начальной амплитудой a и локальным волновым вектором $k_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv k_0 + \Omega$. Считая заданной двумерную плотность вероятности $W_0(a, \Omega)$, нетрудно найти вероятностное распределение амплитуды разрыва

$$G(v_p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0 \left[\frac{v_p}{\sin((k_0 + \Omega)v_p t)}, \Omega \right] \frac{d}{dv_p} \left(\frac{v_p}{\sin((k_0 + \Omega)v_p t)} \right) d\Omega, \quad (14)$$

с помощью которого находится коэффициент $\overline{\Delta v^2} = \langle v_p^2 \rangle k_0 / 2\pi$ в (11), определяющий интенсивность спектра при $k \rightarrow \infty$. На начальном участке происходит увеличение интенсивности спектра при $k \rightarrow \infty$, что связано с увеличением среднего числа разрывов в волне. Для гауссовой статистики $v_0(x)$ амплитуда a имеет рэлеевское распреде-

ление и при $\tau \equiv \sigma k_0 t \ll 1$, как можно показать из (14), асимптотика спектра определяется формулой (12). При $\tau \gg 1$ число разрывов в волне не меняется и определяющую роль начинает играть уменьшение амплитуды разрыва из-за высокочастотного затухания. Вероятностное распределение $G(v_p, t)$ локализовано при этом в области $v_p \approx \pi/k_0 t$, что приводит к асимптотике $S_p(k, t) \sim (k^2 t^2)^{-1}$, не зависящей, как и для детерминированного сигнала, от плотности энергии волны на входе.

В заключение отметим, что проведенное выше рассмотрение может быть обобщено на среды с произвольным видом нелинейности. В отличие от рассматриваемого случая изменение величины разрыва и затухание на нем энергии будет определяться величиной скорости, при которой образовался разрыв. Следовательно, затухание средней энергии будет существенно зависеть от начального распределения скорости.

Автор благодарит А. Н. Малахова, А. И. Саичева за обсуждение и полезные замечания к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Руденко, А. С. Чиркин, Докл. АН СССР, 214, № 5, 1045 (1974).
2. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974).
3. А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 7, 1025 (1974).
4. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Теоретические основы нелинейной акустики, изд. Наука, М., 1975.
5. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Акуст. ж., 18, № 4, 590 (1972).
6. О. В. Руденко, А. С. Чиркин, Радиотехника и электроника, 19, № 10, 2172 (1974).
7. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, изд. Сов. радио, М., 1969.
8. В. П. Кузнецов, Акуст. ж., 16, № 1, 155 (1970).
9. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Докл. АН СССР, 208, № 4, 794 (1973).
10. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Акустические методы и средства исследования океана, тезисы докладов, ч. 1, Владивосток, 1974, стр. 35.
11. О. В. Руденко, А. С. Чиркин, Докл. АН СССР, 225, № 3, 520 (1975).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 января 1976 г.

DISCONTINUITY EFFECT ON STATISTICAL CHARACTERISTICS OF NONLINEAR WAVES

S. N. Gurbatov

The discontinuity effect on the probability distribution, energy and asymptotic of the spectrum of a random wave propagating in a nonlinear medium with a small viscosity is investigated. It is shown at the initial stage the attenuation of the mean energy of the random wave connected with the energy absorption by discontinuities is determined by the first moments of the energetic wave spectrum at the input and increases with the growth of initial spectral width. The asymptotics of the energetic wave spectrum is found. It has a universal power form $S(k, t) \sim k^{-n}$ where n changes with decreasing the wave number from 2 to 3, the region of discontinuity of the power spectrum moves in time towards large wavelengths.