

СОДЕРЖАНИЕ

Радиофизика в высших учебных заведениях за 60 лет (1917—1977 гг.)	1593
Беллюстин Н. С. Установление резонансных полей в магнитоактивной плазме	1605
Каuffman Р. Н. Об усилении поля высокочастотных электромагнитных волн, падающих на плоскопараллельный слой магнитоактивной плазмы	1614
Моисеев Б. С. Об угловой анизотропии потока энергии электромагнитных волн в многокомпонентной магнитоактивной плазме	1623
Верев А. А., Цытович В. Н. О нелинейном затухании Ландау для сильно-нелинейных волн в плазме	1639
Иванов В. А., Комраков Г. П., Кротова З. Н., Рыжов В. А. Измерения параметров нагревной нелинейности в нижней ионосфере методом частичных отражений	1653
Кротова З. Н., Рыжов В. А., Шлюгер И. С. Исследование тепловых явлений в ионосфере кроссмодуляционным методом	1658
Орлов Ю. И. Особенности лучевых и каустических картин в неоднородном параболическом слое	1669
Лебский Ю. В., Мезенцев В. П., Федосеев Л. И., Швецов А. А. Субмиллиметровый широкодиапазонный супергетеродинный радиометр	1676
Артеменков С. Л., Смольский С. М. Переходные процессы в синхронизированном автогенераторе на инерционном активном элементе	1680
Калинин М. И. Об одновременном параметрическом возбуждении динамической системы детерминированным и случайным сигналами	1689
Саичев А. И. Моменты корреляционной функции интенсивности за случайным фазовым экраном	1694
Кляцкин В. И. О методах квантовой теории поля в динамике линейных стохастических систем	1698
Дрофа А. С. Временная корреляция смещений центра тяжести светового пучка в приземном слое атмосферы	1704
Воробьев М. И., Дрофа А. С. Исследование влияния внешнего масштаба атмосферной турбулентности на дисперсию случайных смещений световых пучков	1711
Березин Ю. В. Метод прямого измерения вектора поля электромагнитной волны	1718
Болотов Г. П., Кияшко Б. В. Применение двухканальной схемы в корреляционном методе измерения диаграмм направленности антенн	1721
[Данилов В. Н., Сыровой В. А.] О параксиальном приближении во внешней задаче формирования пространственных электронных пучков	1727
Нефёдов Е. И. Коаксиальный оротрон	1740
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Виняйкин Е. Н., Сеняткин В. А. Нижняя граница для угловых размеров источников спорадических импульсов на волне 52 см	1744
Горшков В. А., Соколовский Р. И. Форма импульсов суперлюминесценции	1747
Каневский М. Б., Рыжов Ю. А. Поглощение электромагнитных волн случайно неоднородной бесстолкновительной плазмой	1749
Кляцкин В. И. Об одном классе стохастических уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание	1752

РАДИОФИЗИКА В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ ЗА 60 ЛЕТ

(1917—1977 гг.)

Начало исследовательской работы в области радиотехники и радиофизики в СССР было положено в 1918 г. организацией Нижегородской радиолаборатории (НРЛ), положение о которой было подписано В. И. Лениным. НРЛ послужила примером того, как можно эффективно использовать специалистов, имевшихся в России до Октябрьской революции. В высшей школе в первые годы после Великой Октябрьской революции преподавание и исследовательскую работу вели почти исключительно ученые, сложившиеся в дореволюционное время.

В дореволюционной России исследовательская работа в области физики велась практически только на кафедрах вузов, главным образом университетов. В области радиофизики и электроники тогда были выполнены исследования, правда, немногочисленные, но стоявшие на уровне мировой науки. К ним следует отнести работы А. Г. Столетова по фотоэлектронной эмиссии, А. А. Эйхенвальда по изучению магнитных полей конвекционных токов и токов смещения, В. А. Ульянина, построившего первый вентильный селеновый фотоэлемент. В учебном заведении (минные офицерские классы) работал и А. С. Попов.

Особо следует выделить П. Н. Лебедева, создателя первой в России научной физической школы, сложившейся в Московском университете. Из лебедевской школы вышел ряд работ по генерации коротких электромагнитных волн, по пондеромоторному воздействию волн различной природы. Школа П. Н. Лебедева была в значительной степени научной радиофизической школой.

Уже в первые годы после Октябрьской революции одновременно с организацией сети научных институтов Академии наук и промышленности создавались исследовательские институты и лаборатории в вузах, сначала в Москве и Ленинграде, затем в Саратове, Горьком, Томске и других городах. В Московский университет возвратились сотрудники П. Н. Лебедева, покинувшие его вместе со своим учителем в 1911 году (В. К. Аркадьев, В. И. Романов и др.). Уже в первой половине 20-х годов ими и их сотрудниками был выполнен ряд работ по генерации кратчайших электромагнитных волн («массовый излучатель» А. А. Глаголовой-Аркадьевой), по исследованию поведения ферромагнетиков в полях высокой частоты и по ламповым генераторам СВЧ-колебаний.

Работы в области теории колебаний начали быстро развиваться с приходом в МГУ Л. И. Мандельштама (1925 г.), вокруг которого сбрасывалась большая группа талантливых учеников.

В начале 20-х годов подготовка радиоспециалистов, сочетающих технические знания и фундаментальное физическое образование, была развернута в Ленинградском политехническом институте (ЛПИ). В ЛПИ велись исследования в области генерации СВЧ-колебаний (Д. А. Рожанский), теории колебаний и параметрических машин (Н. Д. Папалекси), интерференционных методов измерения расстояний.

В Саратовском университете (СГУ) начало исследованиям в области радиофизики было положено одним из воспитанников лебедевской

школы К. А. Леонтьевым. В Горьковском университете (ГГУ) и исследовательском физико-техническом институте университета (ГИФТИ) исследовательская работа и подготовка специалистов в области радиофизики и электроники началась с 1931 г. С 1936 г. систематические ионосферные наблюдения велись в Томске.

В настоящее время коллективы специалистов в области радиофизики и электроники работают на радиофизических специальностях и факультетах университетов, в технических вузах, исследовательских институтах и лабораториях во многих городах СССР. За 60 лет, прошедших после Октябрьской революции, ими были получены значительные научные результаты.

Радиофизика и электроника в вузах развивались в тесном взаимодействии с научными учреждениями Академии наук и промышленности. Широко практиковалась совместная разработка, выполнение вузами исследований по договорам, участие сотрудников АН и работников промышленности в преподавании и т. п. Значение таких связей для исследовательской работы в вузах и преподавании трудно переоценить.

Ниже дается краткий обзор исследований в области радиофизики, выполненных в вузах за 60 лет.

Физика колебаний и волновых процессов. Стремительное развитие нелинейной теории колебаний в 20-х годах в немалой степени стимулировалось нуждами радиотехники и радиосвязи. Если до 1930 года основными «колебательными центрами» были Германия (Баркгаузен) и Голландия (Ван-дер-Поль), то уже в начале 30-х годов ведущая роль переходит к Московскому университету, в первую очередь, благодаря научной и педагогической деятельности Л. И. Мандельштама и его учеников, особенно А. А. Андронова, и затем воспитанников этой школы следующего поколения. Особенно ясно огромный вклад школы Л. И. Мандельштама в МГУ и сформировавшейся в 30—40 годах школы Андронова в Горьковском университете в создание нелинейной теории колебаний виден с позиций современной науки. Именно в этих двух университетах сложилась особая колебательная культура, включающая в себя выработку «нелинейного физического мышления», построение общих методов и основных элементарных моделей, которая привела к общепризнанно высокому уровню исследований по теории нелинейных колебаний и теории нелинейных волн в Советском Союзе.

Многие современные разделы теории нелинейных колебаний и волн опираются на фундаментальные результаты, полученные в 30—40 годах в Москве и Горьком. Напомним основные из них: создание теории параметрических генераторов и ее экспериментальная проверка, обоснование метода Ван-дер-Поля и расширение его применительно к системам с меняющимися параметрами и другим задачам, исследование переходных процессов, создание теории автоколебаний для систем с одной степенью свободы, теория захватывания частоты автогенератора внешней периодической силой, теория разрывных колебаний, статистическое описание динамических систем, теория флуктуаций в нелинейных системах, развитие качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений на плоскости, введение понятия грубости (структурной устойчивости) динамических систем, развитие и последовательное применение к различным задачам нелинейных колебаний метода точечных преобразований Пуанкаре. Это лишь основные, да и то далеко не все направления физики колебаний, заложенные Мандельштамом и Андроновым в предвоенные годы. Они нашли свое отражение в книге А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина «Теория колебаний» (1937 г.) и лекциях

Л. И. Мандельштама по теории колебаний (изданных в 1947 г.). В послевоенные годы интенсивно развивалась теория автоматического регулирования, которая стала одной из основных областей приложения теории колебаний. Очень плодотворным здесь оказалось применение теории точечных преобразований. Были решены задача Мизеса и задача об автопилоте, полностью решена классическая задача Вышнеградского, создана теория часов, сделан существенный вклад в теорию электрических машин. В МГУ интенсивно развивалась строгая колебательная теория электронных приборов.

В последующие годы не раз подтверждалась плодотворность мандельштамовской идеи о «колебательной взаимопомощи» различных областей науки*. К началу 60-х годов благодаря созданию новых нелинейных материалов, построению мощных источников электромагнитных и звуковых волн и продвижению в диапазон очень высоких частот стали возникать новые разделы физики — нелинейная акустика, нелинейная оптика, нелинейные процессы в плазме и др. В них, а также в классической газо- и гидродинамике было поставлено большое число нелинейных колебательных задач. По существу на их основе начала складываться новая область теории колебаний — теория нелинейных волн. Бурное развитие этой области в СССР, во многом опережающее зарубежное, основывалось уже на прочном фундаменте теории колебаний, заложенном Мандельштамом и Андроновым. Была построена теория генерации гармоник в нелинейных средах, построена теория и созданы параметрические генераторы света, решен ряд проблем динамической теории ОКГ, построена теория комбинационных лазеров, разработаны и математически обоснованы асимптотические методы для анализа волновых процессов, построена теория автоколебаний одномерных распределенных систем, развита теория распространения модулированных волн в нелинейных средах.

Не останавливаясь на результатах еще не вполне завершенных исследований, отметим лишь, что теория нелинейных волн находит сейчас все более широкое применение в динамике атмосферы и океана, нелинейной акустике, теории турбулентности, распространении волн в ионосфере и ряде других проблем.

Статистическая радиофизика. Можно сказать, что статистическая радиофизика берет свое начало от пионерской работы 1933 г. А. А. Андронова, А. А. Витта и Л. С. Понтрягина (тогда сотрудников МГУ), посвященной статистическому описанию поведения динамической системы, находящейся под действием случайных сил. Основное развитие это научное направление получило в послевоенные годы и было стимулировано развитием радиолокации, радионавигации и радиоастрономии.

В настоящее время статистическая радиофизика является одним из важнейших разделов радиофизики. Область ее применения непрерывно растет, включая в себя весьма разнообразные научно-технические проблемы.

Ученые вузов страны внесли чрезвычайно существенный вклад в развитие статистической радиофизики. В первую очередь здесь следует выделить коллективы, работающие в Московском и Горьковском университетах.

* Например, взаимодействие синусоидальной волны и ее гармоники в нелинейной среде впервые было исследовано в связи с анализом процессов в радиотехнических устройствах — линиях передачи с нелинейной погонной емкостью (или индуктивностью). Решение же возникшей несколько лет спустя в нелинейной оптике проблемы удвоения частоты лазерного излучения опиралось на уже имеющиеся результаты и сложившиеся к тому времени представления о взаимодействии волн в нелинейных средах с дисперсией.

Исследования флуктуаций в автоколебательных системах и связанные с ними вопросы о немонохроматичности автоколебаний, стабильности частоты и точности ее измерения были начаты в 1938 г. в Горьком. Г. С. Гореликом (ГГУ) были выяснены физические механизмы уширения линии автогенератора и введены понятия естественной и технической ширины линий. Эти результаты явились основополагающими для дальнейших работ по флуктуациям в автоколебательных системах. Последующие работы этого направления связаны как с исследованиями флуктуаций в системах различного типа, так и с разработкой общих вопросов теории случайных процессов. В ГГУ исследовались флуктуации в кристалонах, мазерах, лазерах и других типах генераторов.

Существенный этап в изучении флуктуационных явлений в автоколебательных системах связан с работами сотрудников МГУ. Здесь же были исследованы низкочастотные шумы и флуктуации в полупроводниковых устройствах, магнитных пленках, ферритах, а также статистические явления в автоколебательных системах с диффузными связями. Следует отметить также работы по изучению статистических характеристик шумов в полупроводниковых и магнитных материалах, выполненные в Московском физико-техническом институте (МФТИ), по флуктуациям в генераторах и усилителях СВЧ (ЛПИ), работы по исследованию стабильности многочастотных автоколебательных систем и изучению флуктуаций в различных полупроводниковых радиоэлектронных системах по исследованию флуктуаций в умножителях частоты (Московский энергетический институт — МЭИ), по изучению характеристик фликкер-шумов в резисторах и полупроводниках (Вильнюсский университет) и флуктуаций в высокочастотных кварцевых транзисторных генераторах (Калининградский университет). Широкие исследования по созданию малошумящих полупроводниковых устройств СВЧ проведены в Московском государственном педагогическом институте (МГПИ).

Существенные успехи были достигнуты также в исследованиях флуктуационных явлений при распространении волн в случайно неоднородных средах в приложении к акустике, оптике и радио (МГПИ, Научно-исследовательский радиофизический институт), а также в исследованиях по статистическим явлениям в нелинейных средах (МГУ и ГГУ).

Следует особо отметить те работы ученых вузов, которые оказали большое влияние на общее развитие статистической радиофизики и определяют ее современное состояние. Это работы, касающиеся общих вопросов теории случайных процессов, теории флуктуационных явлений в колебательных и автоколебательных системах, теории случайных полей, теории флуктуационных явлений при распространении волн, теории тепловых флуктуаций и др., и работы по теории флуктуаций в радиотехнике, теории условных марковских процессов и их применению к задачам оптимального управления, теории информации и по исследованию флуктуаций в неравновесных системах, выполненные в МГУ.

Распространение радиоволн. Физика ионосферы. В Сибирском физико-техническом институте (СФТИ) при Томском университете (ТГУ) в 1936 г. была создана первая советская ионосферная станция и начаты регулярные ионосферные наблюдения. Позднее (1945—50 годы) исследования распространения радиоволн и процессов в ионосфере начали проводиться в ряде вузов. Центры таких исследований за последние 20 лет сформировались в Горьковском, Ростовском, Харьковском и Иркутском университетах.

В Ленинградском университете (ЛГУ) на развитие работ по распространению радиоволн определяющее влияние оказали работы

В. А. Фока, выполненные в 1940—50 годах. Эти исследования были связаны с решением фундаментальных задач распространения радиоволн над земной поверхностью. Проблемы распространения радиоволны заняли доминирующее положение на созданной в 1947 г. кафедре радиофизики ЛГУ. Наибольшую известность получил выполненный в ЛГУ цикл работ по исследованию распространения радиоволн СДВ-диапазона.

В МГУ основным направлением был анализ влияния неоднородностей на распространение радиоволн в тропосфере и ионосфере.

В ГГУ и НИРФИ, начиная с 1945 г., был выполнен большой цикл работ по физике и динамике ионосферы и ионосферному распространению радиоволн. Были исследованы структура регулярной и неоднородной ионосферы и зависимости ее основных параметров от времени суток, сезона солнечной активности на различных геомагнитных широтах, включая полярные и экваториальные области. Значительные результаты были получены по спектру ионосферных неоднородностей и по физике нижней ионосферы (D -область) методом частных отражений. В последние годы в НИРФИ сложилось новое направление ионосферных исследований — искусственные возмущения ионосферы полями мощных наземных передатчиков.

В НИРФИ была создана теория атмосферного поглощения миллиметровых и субмиллиметровых волн, подтвержденная точными измерениями. Исследования по атмосферному распространению радиоволн сантиметрового диапазона привели к созданию нового метода дистанционного определения атмосферных профилей влажности и температуры.

Значительно расширились, особенно в последние годы, работы по физике ионосферы и ионосферному распространению радиоволн в Харькове. В Харьковском университете (ХГУ) были проведены исследования по анализу флуктуационных характеристик ионосферы. В Харьковском политехническом институте (ХПИ) создана современная установка по изучению ионосферы методом некогерентного рассеяния радиоволн.

В Томске (СФТИ) изучались вопросы далекого тропосферного распространения волн УКВ-диапазона. В области ионосферных исследований здесь в течение многих лет изучались суточные и сезонные изменения области E ионосферы. В Ростовском университете (РГУ) основные усилия были направлены на изучение характеристик спорадического слоя E и поглощения в ионосфере.. В Иркутском университете интенсивно разрабатываются вопросы моделирования области F ионосферы, актуальные для коротковолновой связи.

Физика плазмы. Здесь следует прежде всего отметить выдающуюся роль А. А. Власова (МГУ), который в конце 40-х годов предложил метод описания коллективных взаимодействий заряженных частиц в плазме путем введения самосогласованного электромагнитного поля в кинетическое уравнение. Полученное уравнение, обычно называемое уравнением Больцмана — Власова, лежит в основе современной физики плазмы. Исследования по теории плазмы были продолжены в МГУ, где была разработана получившая широкое признание статистическая теория неравновесных процессов.

В конце 40-х годов в Горьковском университете начались работы в области теории распространения и излучения волн в плазме. Были исследованы особенности излучения электрона в магнитоактивной плазме, линейное взаимодействие волн в неоднородной плазме, гирорезонансное и черенковское поглощение; эти исследования легли в основу кинетической теории распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Несколько позднее в НИРФИ было проведено исследование процессов конверсии плазменных волн в электромагнитное

излучение, в частности, за счет слияния продольных волн в поперечную волну. Эти работы положили начало широкому изучению трехволнового взаимодействия в плазме.

В последние годы в Горьком выполнен цикл важных теоретических и экспериментальных исследований нелинейных электромагнитных явлений в плазме. Начало этому циклу положили фундаментальные работы по изучению усредненных пондеромоторных сил и их использованию для локализации и ускорения плазмы высокочастотными полями, заложившие основы описания динамических нелинейных процессов в плазме. Хорошо известны работы по теории теплового и стрикционного самовоздействия и взаимодействия электромагнитных волн в плазме, по влиянию нелинейных процессов на эффективность резонансного бесстолкновительного поглощения электромагнитных волн в плазме, а также выполненные впервые эксперименты по самофокусировке волн в плазме и просветлению непрозрачной плазмы интенсивным излучением.

В МГУ и в НИРФИ выполнены исследования коллективных эффектов взаимодействия волн и частиц в магнитосферной плазме. Полученные результаты позволили построить теорию динамики радиационных поясов Земли и обосновать циклотронный механизм генерации очень низкочастотных (ОНЧ) излучений в магнитосфере.

В ХГУ были выполнены получившие большую известность исследования по теории флуктуаций в плазме и рассеянию волн на флуктуациях плазмы. Другим направлением в ХГУ было изучение процесса проникновения волн в ограниченную плазму и исследование плазменных волноводов.

Плазменная тематика принадлежит к числу ведущих и в Киевском университете (КГУ), где широко исследовались процессы в низкотемпературной плазме, экспериментально изучалась релаксация электронных потоков в плазме, а также выполнен цикл экспериментальных исследований короткоживущей импульсной плазмы.

Радиоастрономия. Наиболее значительные результаты в области радиоастрономии были получены в Государственном астрономическом институте им. Штернберга при Московском университете (ГАИШ), Ленинградском университете и в НИРФИ.

Основное направление радиоастрономических исследований в Ленинградском университете — наблюдение радиоизлучения Солнца на сантиметровых волнах. Полученные ими результаты позволили установить общий вид частотного спектра медленно меняющейся компоненты солнечного радиоизлучения.

В отделе радиоастрономии (ГАИШ) была развита теория синхротронного излучения дискретных источников, в частности, было объяснено излучение Крабовидной туманности и предсказано обнаруженное позднее вековое изменение потока радиоизлучения источника Кассиопея-А. Там же была развита теория излучения водорода в линии 21 см и предсказаны возможности исследования радиоизлучения молекул в линиях.

Благодаря исследованиям, выполненным в ГАИШ, была создана более или менее полная картина явлений в солнечной атмосфере, позволившая глубже понять различные особенности радиоизлучения Солнца. Следует также отметить большой цикл исследований межзвездной среды в линии 21 см, где было подробно изучено искривление межзвездного газа и его распределение. Там же была предсказана возможность обнаружения радиорекомбинационных линий, которые были экспериментально обнаружены. Сотрудники ГАИШ принимали участие в создании

радиотелескопа системы Ратан-600 и в ряде работ, выполненных на искусственных спутниках Земли и космических ракетах.

Экспериментальные работы по радиоастрономии были начаты в Горьковском университете вскоре после окончания Отечественной войны. Была разработана радиоастрономическая аппаратура и начаты наблюдения радиоизлучения Солнца, Луны и дискретных источников. В последующие годы сотрудники НИРФИ провели измерения радиоизлучения Луны; полученные ими результаты позволили определить интегральные характеристики лунной поверхности. Были выполнены исследования галактического радиоизлучения в миллиметровом диапазоне; ведется изучение солнечного радиоизлучения на сантиметровых и дециметровых волнах и по программе «службы Солнца». Проведены исследования спектра и поляризации космического радиоизлучения.

Исследования в области теоретической радиоастрономии и физики космической плазмы в Горьком были начаты в 50-х годах по инициативе В. Л. Гинзбурга и продолжаются до настоящего времени под его руководством. Были выполнены работы по исследованию и обоснованию синхротронного механизма распределения космического радиоизлучения. Проведено изучение механизмов генерации радиоизлучения в космической плазме; эти исследования позволили заложить основы теории происхождения солнечного радиоизлучения.

Квантовая радиофизика и нелинейная оптика. Идея использования эффекта стимулированного излучения для усиления электромагнитных колебаний и волн принадлежит В. А. Фабриканту (1939 г.). Им и его сотрудникам (МЭИ) была подана авторская заявка на новый способ усиления электромагнитного излучения в диапазоне от ультрафиолетовых до радиоволн. В этой заявке предлагались конкретные способы создания в среде состояний с инверсной заселенностью уровней.

Как самостоятельное научное направление квантовая радиофизика оформилась в середине 50-х годов. С этого времени исследования по квантовой радиофизике ведутся во многих вузах.

Исследования парамагнитных кристаллов, сыгравшие значительную роль в деле создания квантовых парамагнитных усилителей, были проведены в Научно-исследовательском институте ядерной физики при МГУ.

Исследования эффектов, имеющих место при ферромагнитном резонансе в монокристаллах феррита, которые проводились в Киевском университете, привели к созданию умножителей частоты, а также перестраиваемых усилителей и генераторов диапазона СВЧ. В ГГУ и НИРФИ были проведены экспериментальные исследования молекулярных генераторов и, в частности, создан мазер миллиметрового диапазона на формальдегиде. Квантовые генераторы субмиллиметрового диапазона с оптической накачкой разработаны и исследованы в ХГУ.

Весьма перспективным классом активных сред для лазеров являются пары химических элементов. Работы ученых Ростовского университета выявили особенности процессов, протекающих в таких активных средах, и позволили существенно расширить список генерирующих элементов и линий.

В МГУ был создан новый класс перестраиваемых генераторов ультрафиолетового диапазона — лазеры на органических сцинцилляторах; там же были развернуты фундаментальные исследования по проблеме гамма-лазеров (Р. В. Хохлов).

Второй большой круг вопросов, в разработку которого ученые вузов внесли существенный вклад, связан с динамикой излучения квантовых генераторов. Первые работы по устойчивости стационарной генерации

были выполнены в МГУ. Изучению природы и характера нестационарных режимов квантовых генераторов и созданию динамической теории лазера посвящены работы, выполненные в НИРФИ. Основные закономерности генерации твердотельных лазеров с кольцевым и со сверхдлинным линейным резонаторами выявлены в экспериментах, поставленных в НИИЯФ. В ЛПИ получен ряд результатов, касающихся синхронизации мод в кольцевых твердотельных лазерах. Теоретические и экспериментальные исследования отдельных вопросов динамики лазеров на твердом теле ведутся в Томском институте автоматизированных систем управления и радиоэлектроники.

Вопросы динамики излучения инжекционных полупроводниковых лазеров, методы их модуляции и регистрации излучения с большим временным разрешением разрабатывались в МГУ. Здесь же были созданы полупроводниковые лазеры, работающие в непрерывном режиме при комнатной температуре. Работы в области полупроводниковых лазеров и в ряде других направлений квантовой электроники ведутся в Московском инженерно-физическом институте (МИФИ).

Существенный вклад учеными вузов внесен в изучение проблемы флюктуаций излучения квантовых генераторов. В ГГУ рассмотрены вопросы теории флюктуаций в молекулярных генераторах. Фундаментальные теоретические и экспериментальные результаты в области флюктуаций газовых лазеров получены в НИРФИ и МГУ. Исследования чувствительности квантовых усилителей оптического диапазона ведутся в МФТИ.

Необходимо также отметить пионерскую работу по применению лазеров в химии и проблеме разделения изотопов (МГУ).

Создание лазеров стимулировало развитие исследований процессов взаимодействия и самовоздействия световых волн, связанных с нелинейностью характеристик веществ в поле сильного излучения. Ученые вузов внесли существенный вклад в создание и развитие возникшей в результате этих исследований новой области науки — нелинейной оптики. Так, в основополагающих работах, выполненных в МГУ, были впервые рассмотрены как некоторые основные закономерности взаимодействия световых волн, так и возможные применения этих процессов для преобразования частоты когерентного светового излучения. В частности, были предложены новые для оптики параметрические генераторы света, позволяющие плавно перестраивать частоту излучения.

В начавшихся затем широких исследованиях параметрического взаимодействия световых волн, процессов вынужденного рассеяния, самофокусировки и самовоздействия света значительное место занимают работы ученых Московского, Горьковского, Киевского и Вильнюсского университетов и связанных с ними исследовательских институтов. Проведенные в МГУ исследования привели, в частности, к открытию явления параметрической суперлюминесценции. Широкие теоретические и экспериментальные исследования процессов параметрического взаимодействия, вынужденного рассеяния, самофокусировки и самовоздействия световых пучков и импульсов, проведенные в МГУ, НИРФИ, Вильнюсском университете, привели к созданию весьма полной картины протекания этих процессов. Изучение особенностей четырехфотонного резонансного параметрического взаимодействия, проведенное в МГУ и ГГУ, позволили выяснить возможности его применения для нового типа спектроскопии — активной спектроскопии, а также для генерации когерентного излучения. В результате исследований особенностей и характеристик основных типов параметрических генераторов, проведенные в МГУ, НИРФИ, КГУ, были определены оптимальные пути создания перестраиваемых по частоте параметрических генераторов света.

На основе проведенных исследований нелинейных процессов в оптике в высших учебных заведениях решается ряд прикладных задач. В частности, в МГУ, КГУ, НИРФИ созданы эффективные генераторы гармоник и параметрические преобразователи инфракрасного излучения в видимую область спектра. В Московском и Вильнюсском университетах для спектроскопии эффективно используются параметрические генераторы света. На основе исследований взаимодействия лазерного излучения с электро- и магнитоупорядоченными кристаллами, а также с ультразвуковыми и гиперзвуковыми волнами в КГУ и МГУ созданы эффективные модуляторы света и системы обработки и отображения информации.

Электродинамика. Исследования в области электродинамики традиционно занимают заметное место в научной деятельности ученых вузов. Работы, выполненные в ЛГУ в 1940—50 годах В. А. Фоком, одним из крупнейших советских физиков-теоретиков, сыграли важную роль в отечественной и мировой науке, определив основные идеи асимптотических методов в теории дифракции и распространения радиоволн. Можно отметить пионерские исследования по волноводам, выполненные в довоенные годы в МГПИ Е. М. Студенковым, погибшим на фронте в годы Великой Отечественной войны.

Работы В. А. Фока по теории дифракции получили дальнейшее развитие на кафедре математической физики ЛГУ. Выполненные там исследования во многом определяют современное состояние асимптотических методов в решении дифракционных задач.

Важное место в разработке вопросов теории дифракции и распространения электромагнитных волн занимают выполненные в МФТИ работы по теории возбуждения волноводов и резонаторов, теории открытых резонаторов и волноводов, методу факторизации и др., а также работы по теории неоднородных линий.

В ГГУ и НИРФИ были выполнены фундаментальные теоретические исследования поверхностных электромагнитных волн и их приложений, выяснены возможности широкого использования в электродинамике импедансных граничных условий, предложен принципиально новый частотный способ механического управления диаграммами направленности. В МЭИ разрабатывались методы синтеза импедансных антенн по заданным характеристикам излучения, методы решения сложных дифракционных задач, методы расчета антенных решеток.

Фундаментальные результаты в области разработки новых математических методов решения задач дифракции и распространения радиоволн получены в ХГУ. Существенный вклад в разработку вариационных методов решения внутренних задач электродинамики внесен исследованиями, выполненными в Московском институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА). Большое место в электродинамических исследованиях занимали работы в области линейной и нелинейной квазиоптики (НИРФИ и ЛГУ).

В ЛГУ и в НИРФИ изучены многие случаи распространения и дифракции электромагнитных волн в неоднородных средах, в том числе в неоднородной плазме.

В области теории дифракции следует отметить работы, выполненные в СФТИ, по дифракции волн в клиновидных областях, обобщение метода факторизации на решение трехмерных задач дифракции волн в импедансных системах, а также важный цикл работ по дифракции на нестационарных объектах (ЛГУ).

Большое внимание в исследованиях Воронежского, Ростовского, Днепропетровского университетов и других вузов уделялось машинным

методам анализа, синтеза и проектирования СВЧ-систем, что позволило создать ряд новых элементов и узлов многофункциональной СВЧ-аппаратуры. Созданы новые конструкции коммутаторов и фазовращателей на основе использования ферритов с прямоугольной петлей гистерезиса (Днепропетровский университет).

Можно отметить работы по теории замедляющих систем, анализу и синтезу СВЧ полосковых и микрополосковых элементов и узлов, расчету волноводов сложного поперечного профиля, выполненные в РГУ. Разработаны новые методы расчета решеток проводников, нашедшие применение при анализе спиральных и штыревых замедляющих систем электронных приборов, антенн вытекающих волн, волноводных фильтров и т. п., развит новый метод анализа неоднородных связанных линий, позволивший существенно ускорить расчет частотных характеристик таких линий на ЭВМ, разработан итерационный метод синтеза СВЧ-узлов по заданным характеристикам.

Выполнены большие исследования по методам измерения СВЧ-полей, в том числе квазиоптического типа, разработаны комплекты миниатюрных измерительных элементов, в частности, СВЧ-переход к интегральным схемам, разработана серия приборов на основе волноводно-диэлектрических резонаторов на повышенные уровни мощности (ХГУ). В СГУ был развит метод наведенных токов для моделирования различных полей. В Воронежском университете проводились исследования по визуализации электромагнитных полей СВЧ-диапазона: разработана электронная система для визуализации амплитудно-фазовых распределений СВЧ-полей, состоящая из матрицы управляемых полуволновых вибраторов, созданы экспериментальные образцы эффективных полупроводниковых радиооптических преобразователей.

Электроника*. В двадцатых годах центральной задачей электроники, решавшейся вначале в условиях полной научной блокады нашего государства, была разработка электронных ламп и создание их теории. Здесь прежде всего следует указать на работы С. А. Богуславского (МГУ) по теории электронных токов в вакууме, имевших основополагающее значение для теории электронных приборов. Уже в то время на повестке дня стояла задача разработки ламповых генераторов дециметровых и сантиметровых волн. На этой стадии развития электроники СВЧ исследования были сосредоточены на двух известных в то время СВЧ-генераторах: триоде в схеме тормозящего поля и магнетроне. Большой цикл исследований, посвященных физическим процессам в лампах с тормозящим полем и магнетронах, созданию на их основе пригодных для практического использования генераторов дециметровых и сантиметровых волн, был выполнен в МГУ, СГУ и ХГУ. Позднее (в тридцатые годы) сотрудники МГУ, ГГУ (ГИФТИ) и харьковские ученые оказали активную помощь промышленности в разработке магнетронов и других электровакуумных приборов, антенных устройств и приемно-передающих СВЧ-систем, предназначенных для экспериментов по радиообнаружению и связи.

Успешное применение радиолокации в годы войны стимулировало развитие известных и появление новых методов генерации и усиления СВЧ-колебаний. В 40—50 годы в МГУ, СГУ, ГГУ и других вузах выполнены фундаментальные теоретические и экспериментальные исследо-

* Здесь мы не будем касаться работ по электронной эмиссии и электрическому току в газах, большая часть которых посвящена вопросам, не относящимся непосредственно к радиофизике. Изложение результатов этих работ входит в задачи обзора по физической электронике.

вания ЛБВ и ЛОВ типа «О», клистронов, приборов типа «М». Эти работы успешно продолжаются и в настоящее время.

Значительный интерес для понимания переходных процессов и режима стационарной генерации в магнетронных приборах представляют исследования, проведенные в ГГУ и ЛПИ. Ряд важных результатов по теории лучевых приборов магнетронного типа получены в СГУ.

Весьма значительным является вклад сотрудников Московского института электронного машиностроения (МИЭМ) и Саратовского политехнического института (СПИ) в построение нелинейной теории приборов типа «О». Следует также отметить исследования влияния полей пространственного заряда на работу приборов типа «О», выполненные в МИЭМ и Северо-Западном заочном политехническом институте (СЗПИ). Ряд эффективных методов, позволяющих исследовать характеристики различных электронных приборов СВЧ, был развит в СГУ.

В МГУ в последние годы проводились обширные исследования электронно-лучевых приборов параметрического типа, направленные на создание малошумящих СВЧ-усилителей.

Большой практический интерес представляют начавшиеся в конце 50-х годов в НИРФИ работы по созданию источников СВЧ-колебаний повышенной мощности на основе использования релятивистских эффектов в высоковольтных электронных пучках. Теоретические и экспериментальные исследования индуцированного циклотронного излучения релятивистских электронов привели к созданию нового класса СВЧ-генераторов и усилителей — мазеров на циклотронном резонансе (МЦР, гиротронов) — наиболее мощных приборов диапазона миллиметровых и субмиллиметровых волн. В последние годы теоретические и экспериментальные исследования индуцированного циклотронного (синхротронного) излучения электронов применительно к электронике СВЧ велись в МГУ, Киевском политехническом и Минском радиотехническом институтах.

С конца 60-х годов, после появления сильноточных электронных ускорителей, в НИРФИ начались широкие теоретические исследования различных физических механизмов, которые могут быть положены в основу действия мощных СВЧ-генераторов с ультрарелятивистскими электронными пучками. Некоторые варианты приборов, разработанных на базе этой теории, уже реализованы экспериментально (НИРФИ совместно с ФИАН). Успешные экспериментальные работы ведутся и в Томском политехническом институте.

Исследования в области полупроводниковой электроники в вузах в основном были направлены на разработку физических принципов действия полупроводниковых устройств, продвижение их в новые частотные диапазоны и на исследование свойств полупроводниковых материалов.

В проблемной радиофизической лаборатории МГПИ разработана методика субмиллиметровой спектроскопии высокого разрешения и проведены обширные исследования примесных уровней в полупроводниках. Там же созданы параметрические усилители СВЧ на полупроводниковых диодах.

В МГУ проведены исследования эффекта детектирования СВЧ-излучения на контакте Джозефсона и развита теория доменной неустойчивости в полупроводниках. Изучены шумы в полупроводниковых диодах, параметрических усилителях и умножителях частоты СВЧ-диапазона, а также шумы в ферритах и тонких магнитных пленках.

В НИРФИ была предсказана и рассчитана отрицательная высокочастотная проводимость, обусловленная пролетными эффектами в фазовом пространстве; обнаружены и исследованы эффекты преобра-

зования частоты излучения миллиметровых и субмиллиметровых волн в полупроводниках. Разработаны смесители на диодах с барьером Шоттки и на их основе созданы высокочувствительные приемники излучения миллиметровых и субмиллиметровых диапазонов.

В КГУ в результате исследований контакта металл—полупроводник создана его физическая модель, разработаны методы теоретического описания таких контактов и работы детекторных, смесительных, умножительных и варакторных СВЧ-диодов, основанные на их использовании. Создана и внедрена технология указанных устройств. Построены теория усиления параллельных акустических волн в полупроводниковых пластинках дрейфом носителей и теории акустоэлектрического генератора с учетом волны пространственного заряда.

В МИФИ, начиная с конца 60-х годов, исследовались процессы переноса и релаксации зарядов, а также инжекционные токи в высокочастотных полупроводниках и был обнаружен ряд новых явлений.

В МФТИ успешно развивается теория акустоэлектрических эффектов; открыты акустомагнитоэлектрический эффект, волны Гуляева. Эти работы привели к созданию серии акустоэлектрических устройств.

В ХГУ разработаны генераторы Ганна СВЧ-диапазона. Кинетическая теория поверхностных плазменных волн в полупроводниках разработана в ХГУ и ГИФТИ. В ГИФТИ построена теория неустойчивости пространственно-разделенных пучков плазмы твердого тела, исследованы электромагнитные свойства тонких пленок, периодических полупроводниковых структур и обнаружен квантовый размерный эффект в тонких полупроводниковых пленках.

В Вильнюсском университете развита теория горячих электронов в полупроводниках. Технология выращивания монокристаллов полупроводниковых соединений с шириной запрещенной зоны, плавно меняющейся в зависимости от состава, использованных в микроэлектронике, разработана в Днепропетровском университете.

Подводя итоги работ вузовских радиофизиков, нельзя не сказать об их участии в создании научной и учебной литературы. Учеными вузов написано большое число монографий и учебных пособий по радиофизике и электронике, из которых многие переведены и изданы за рубежом.

В настоящее время преподавание радиофизических дисциплин в достаточной степени обеспечено учебными пособиями. Учебная литература по радиофизике и электронике постоянно пополняется новыми книгами, а содержание ранее изданных книг систематически обновляется при переизданиях.

УДК 533.9.01

УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ПОЛЕЙ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

H. С. Беллюстин

Обсуждаются особенности нестационарных полей, обусловленные плазменным резонансом. Рассмотрена задача о включении излучателя достаточно малых размеров. Выяснено, что скорость v , с которой устанавливаются резонансные поля, прямо пропорциональна размеру источника. В волновой зоне амплитуды полей меняются по универсальному закону, характерному для нестационарных плоских волн в диспергирующих средах; огибающая в этом случае выражается через интегралы Френеля. В дальней зоне v определяет скорость распространения сигнала в направлении наибольшего значения стационарного поля. В квазистатической области огибающие различны для электрического и магнитного полей и зависят от пространственного распределения источника. Время установления в этом случае порядка времени запаздывания и порядка R/v , нестационарный процесс аналогичен возбуждению колебательного контура на резонансной частоте.

Распространение монохроматических ($e^{-i\omega t}$) электромагнитных волн в холодной плазме характеризуется тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon}_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega - \omega_H^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2 - \Omega_H^2}$, $g = \frac{\omega_H \omega_0^2}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)} - \frac{\Omega_H \omega_{0i}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_H^2)}$, $\eta = 1 - \frac{\omega_0^2 + \omega_{0i}^2}{\omega^2}$, ω_0 и ω_{0i} — плазменные частоты, ω_H и Ω_H — гироочастоты электронов и ионов (см., например, [1], гл. 5), ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля. Показатель преломления одной из нормальных волн может обращаться в бесконечность, если

$$\epsilon\eta < 0. \quad (2)$$

При этом условии электрическое и магнитное поля точечного источника бесконечно велики на биконической поверхности (см. [2]):

$$\epsilon z^2 + \eta r^2 = 0. \quad (3)$$

Такой характер поведения поля обусловлен плазменным резонансом, поэтому поверхность (3) и область пространства вблизи нее будем называть резонансными.

Особенность в решении уравнений поля свидетельствует о том, что используемое приближение непригодно и необходимо либо более полное, чем (1), описание свойств плазмы (речь идет об учете соударений, теплового движения частиц, случайных неоднородностей и т. д., см.

[²⁻⁴]), либо учет конечных размеров излучателя [⁵⁻⁷]. Тогда решение не имеет особенности, но поле может достигать больших значений в резонансной области.

Как видно из рассмотрения нестационарной задачи о включении* точечного гармонического источника [⁸], скорость распространения сигнала на резонансной поверхности равна нулю и поля вблизи нее существенно нестационарны. Фактически, конечное время, прошедшее с момента включения, является еще одним фактором, ограничивающим резонансные поля.

В настоящей работе будут рассмотрены нестационарные поля, создаваемые при включении распределенного гармонического источника, и показано, что установление резонансных полей характеризуется отличной от нуля скоростью. Влияние размеров излучателя на поведение нестационарных полей обсуждалось в работе [⁹].

1. СВОЙСТВА ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСА

Дисперсионное уравнение $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$ при $\omega = \text{const}$ определяет цилиндрически симметричные поверхности в \mathbf{k} -пространстве:

$$k_z^2 = k_0^2 \epsilon - \frac{1}{2} k_{\perp}^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{\eta} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} k_{\perp}^4 \left(1 - \frac{\epsilon}{\eta} \right)^2 - k_0^2 \frac{g^2}{\eta} k_{\perp}^2 + k_0^4 g^2}. \quad (4)$$

При условии (2) решение (4) содержит поверхности незамкнутого типа для одной из нормальных волн, которую и будем рассматривать в дальнейшем. Другую волну всегда можно исключить из рассмотрения, например, за счет выбора соответствующей поляризации источника.

Если длина волны достаточно мала,

$$k^2 \gg k_0^2 \max \left\{ |\epsilon| + |\eta|, \frac{g^2}{|\epsilon|}, \frac{g^2}{|\eta|} \right\}, \quad (5)$$

то выражение (4) можно упростить:

$$k_z^2 = \left| \frac{\epsilon}{\eta} \right| k_{\perp}^2 + k_0^2 \epsilon \left(1 + \frac{g^2}{\epsilon^2 - \epsilon \eta} \right), \quad (6)$$

причем второе слагаемое в правой части равенства мало по сравнению с первым. Формула (6) определяет гиперболоид вращения, однополостной в случае

$$\max \{\omega_H; \omega_0\} < \omega < \omega_{uh} \quad (\epsilon < 0, \eta > 0) \quad (7)$$

и двухполостной в низкочастотных диапазонах:

- a) $\omega_{lh} < \omega < \min \{\omega_H, \omega_0\}$,
- b) $\omega < \Omega_H$.

Здесь ω_{uh} и ω_{lh} — частоты верхнего и нижнего гибридных резонансов (см. [¹⁰]).

При $k_{\perp} \rightarrow \infty$ (или $k_z \rightarrow \infty$) поверхность

$$k_z = \pm \left| \frac{\epsilon}{\eta} \right|^{1/2} k_{\perp} \quad (9)$$

* Под включением здесь понимается зависимость тока от времени, определяемая формулой (16).

является асимптотической для (4) и (6). Направление групповой скорости определяется нормалью к волновой поверхности, и короткие волны переносят энергию под углом ϑ к магнитному полю:

$$\vartheta \sim \vartheta_0 = \operatorname{arctg} \left| \frac{\epsilon}{\eta} \right|^{1/2} \quad \text{или} \quad \vartheta \sim \pi - \vartheta_0. \quad (10)$$

Эти волны эффективно возбуждаются достаточно малыми (или имеющими мелкую структуру) источниками, что и обуславливает возрастание полей таких излучателей в резонансной области.

Одним из методов описания резонансных полей является использование дисперсионного уравнения (9), которое соответствует предельному переходу $c \rightarrow \infty$ в исходных уравнениях. Такое приближение, обычно называемое квазистатическим, является вырожденным; что ясно, например, при рассмотрении зависимости показателя преломления от направления распространения.

Укажем здесь пределы применимости (9) в случае излучения заданных источников. Во-первых, необходимо, чтобы для значительной части пространственного спектра на волновой поверхности выполнялось условие (5). Во-вторых, нужно потребовать, чтобы набег фазы, обусловленный отличием (9) от (4), был мал. В резонансной области это приводит к условию

$$R \ll \frac{1}{\beta L}, \quad (11)$$

где $L = \left(\frac{|\epsilon| b^2 + |\eta| a^2}{|\epsilon| + |\eta|} \right)^{1/2}$ — эффективный размер излучателя, a и b — характерные размеры соответственно поперек и вдоль внешнего магнитного поля, $\beta = k_0^2 |\epsilon \eta|^{1/2} \left(1 + \frac{g^2}{\epsilon^2 - \epsilon \eta} \right)$, R — расстояние от источника. Для других направлений применимость квазистатики ограничена расстоянием порядка длины волны. В ближней зоне, где выполнены все эти условия, справедливо квазистатическое приближение. Если $c \rightarrow \infty$, то магнитное поле волны стремится к нулю, но, как отмечалось в [11], в выражение для вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} c \mathbf{H}]$$

входит конечная в квазистатическом пределе величина $c \mathbf{H}^*$. С учетом этого в квазистатическом приближении остается справедливым равенство

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V (\mathbf{E} \mathbf{j}^*) d\mathbf{R} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \oint_S [\mathbf{E} c \mathbf{H}^*] d\sigma \quad (12)$$

(Σ — поверхность, ограничивающая объем V), выражающее закон сохранения энергии в непоглощающей среде. Это ясно из того, что формула (12) является следствием уравнений поля, содержащих параметр c , справедливым при любом значении этого параметра. Тогда в силу известной теоремы математического анализа должны быть равны пре-

* Исчезновение магнитного поля в квазистатике несколько условно и связано с выбором гауссовой системы единиц. В системе СИ

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$$

и магнитное поле остается конечным в квазистатическом приближении $\mu_0 \rightarrow 0$.

делы левой и правой частей равенства (12) при $c \rightarrow \infty$, существование которых не вызывает сомнений.

Квазистатические поля определяются выражениями

$$E = \frac{1}{2\pi^2 \omega} \int \frac{\hat{k}(k j_k) e^{ikR} dk}{\epsilon k_{\perp}^2 + \eta k_z^2},$$

$$H = \frac{1}{2\pi^2 c} \int \frac{[\hat{k} \times \hat{k}] (k j_k) e^{ikR} dk}{k^2 (\epsilon k_{\perp}^2 + \eta k_z^2)} + \frac{i}{2\pi^2 c} \int \frac{|k j_k| e^{ikR} dk}{k^2}. \quad (13)$$

Здесь $j_k = \int j(R) e^{ikR} dR$ — пространственный спектр источника. Отметим некоторые свойства решений (13) (см. обзор [11] и приведенную там литературу). Дисперсионное уравнение и электрическое поле не зависят от g , магнитное поле

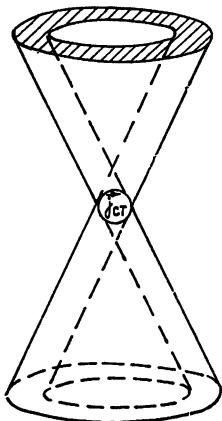


Рис. 1.

волны определяется всеми компонентами тензора ϵ . Поля в резонансной области, заштрихованной на рис. 1, спадают с расстоянием по закону $\sim R^{-1/2}$, вне ее $E \sim R^{-3}$, $H \sim R^{-2}$. Вектор Пойнтинга, в соответствии с (10), при $R \rightarrow \infty$ составляет фиксированный угол с магнитным полем и сосредоточен в резонансной области. Закон спадания $S \sim R^{-1}$ очевиден из условия сохранения полного потока энергии.

При распространении нестационарных плоских волн в диспергирующей среде время запаздывания сигнала определяется величиной групповой скорости (см. [12]), которая для коротких волн (5) равна

$$v_{gp} = \frac{2 |\epsilon \eta|^{1/2} |\epsilon - \eta|}{k |\epsilon' \eta - \epsilon \eta'|}, \quad (14)$$

где штрих означает производную по частоте. При $k \rightarrow \infty$ это выражение стремится к нулю, что обусловливает нестационарность резонансных полей локализованного излучателя при включении гармонического тока, поскольку при фиксированных R и t значительную часть пространственного спектра составляют волны с $v_{gp} < R/t$, которые «еще не пришли» в точку наблюдения. Для распределенного источника пространственный спектр на волновой поверхности ограничен $\tilde{k} \approx L^{-1}$, поэтому при его включении время запаздывания резонансных полей по порядку величины должно определяться минимальным значением групповой скорости:

$$t \approx \frac{R}{\tilde{v}}, \quad \tilde{v} \approx \frac{2 |\epsilon \eta|^{1/2} |\epsilon - \eta|}{|\epsilon' \eta - \epsilon \eta'|} L. \quad (15)$$

Довольно очевидно, что смысл величин, определяемых выражениями (15), различен для квазистатических полей и в волновой зоне.

Рассмотрим нестационарные процессы в низкочастотном случае $\omega \ll \Omega_H$ (8б), когда $\eta = -\omega_0^2/\omega^2$, ϵ не зависит от ω . Будем полагать, что гармонический источник частоты ω_c включается в момент времени $t = 0$:

$$j(R, t) = j(R) \exp(-i\omega_c t) h(t), \quad (16)$$

где $h(t)$ — единичная функция.

2. ПРОЦЕСС УСТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Исследование полей в дальней зоне* можно провести, используя найденное в [7] решение для гармонического источника. Нестационарное решение записывается в виде

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{H}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad (17)$$

где путь интегрирования проходит над всеми особенностями подынтегральной функции. Вычисляя эти интегралы методом перевала, найдем следующие асимптотические выражения для резонансных полей (в сферической системе координат R, φ, δ):

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= E_{\vartheta \text{ ст}} \frac{1-i}{2} \left\{ \frac{1}{2} + C \left(\frac{t - \varphi'(\omega_c)}{\sqrt{\pi \varphi''(\omega_c)}} + i \left[\frac{1}{2} + S \left(\frac{t - \varphi'(\omega_c)}{\sqrt{\pi \varphi''(\omega_c)}} \right) \right] \right) \right\}, \\ H_\varphi &= H_{\varphi \text{ ст}} \frac{1-i}{2} \left\{ \frac{1}{2} + C \left(\frac{t - \varphi'(\omega_c)}{\sqrt{\pi \varphi''(\omega_c)}} \right) + i \left[\frac{1}{2} + S \left(\frac{t - \varphi'(\omega_c)}{\sqrt{\pi \varphi''(\omega_c)}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где C и S — интегралы Френеля, $\varphi = \frac{R}{c} \sqrt{\omega_c^2 \varepsilon \cos^2 \delta + \omega_0^2 \sin^2 \delta}$, $E_{\vartheta \text{ ст}}$ и $H_{\varphi \text{ ст}}$ — стационарные решения, устанавливающиеся при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} E_{\vartheta \text{ ст}} &= \frac{i \omega_0 \omega_c^3 \sqrt{\varepsilon}}{c^2} j_{k\vartheta}(\mathbf{k}_s) \frac{\exp \left\{ i \frac{R}{c} \sqrt{\omega_c^2 \varepsilon \cos^2 \delta - \omega_0^2 \sin^2 \delta} \right\}}{R (\omega_c^2 \varepsilon \cos^2 \delta - \omega_0^2 \sin^2 \delta)^{3/2}}, \\ H_{\varphi \text{ ст}} &= \frac{i \omega_0 \omega_c^2 \sqrt{\varepsilon}}{c^2} j_{k\vartheta}(\mathbf{k}_s) \frac{\exp \left\{ i \frac{R}{c} \sqrt{\omega_c^2 \varepsilon \cos^2 \delta - \omega_0^2 \sin^2 \delta} \right\}}{R (\omega_c^2 \varepsilon \cos^2 \delta - \omega_0^2 \sin^2 \delta)}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{k}_{s\perp} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\omega_0 \omega_c \sin \delta}{\sqrt{\omega_c^2 \varepsilon \cos^2 \delta - \omega_0^2 \sin^2 \delta}}, \quad k_{sz} = \frac{\omega_c^2 \varepsilon \cos \delta}{\sqrt{\omega_c^2 \varepsilon \cos^2 \delta - \omega_0^2 \sin^2 \delta}},$$

\mathbf{r} — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Из (18) получаем

$$\begin{aligned} |E_\vartheta(t)| &\sim |H_\varphi(t)| \sim \\ &\sim \sqrt{\left[\frac{1}{2} + C \left(\frac{t - \varphi'(\omega_c)}{\sqrt{\pi \varphi''(\omega_c)}} \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S \left(\frac{t - \varphi'(\omega_c)}{\sqrt{\pi \varphi''(\omega_c)}} \right) \right]^2} \end{aligned} \quad (20)$$

Форма огибающей (20) является универсальной при любом законе дисперсии (необходимо только $\varphi''(\omega_c) \neq 0$), если речь идет о распространении нестационарных плоских волн (см. [12], § 21). Такой характер установления волновых полей связан с тем, что структура поля в дальней зоне определяется плоской волной, направление групповой скорости в которой совпадает с направлением от источника на точку наблюдения. Нестационарный процесс в этом случае характеризуется временем запаздывания

* Условия дальней зоны, где поля можно считать волновыми, в случае резонанса существенно отличаются от обычных (см. [7]).

$$t_3 = \varphi'(\omega_c) = \frac{R}{v_{rp}} = \frac{R \omega_c \epsilon \cos^2 \vartheta}{c \sqrt{\omega_c^2 \epsilon \cos^2 \vartheta - \omega_0^2 \sin^2 \vartheta}} \quad (21)$$

и временем установления

$$t_y = \sqrt{\pi \varphi''(\omega_c)} = \sqrt{\frac{\pi \epsilon R}{c}} \frac{\omega_0 \sin \vartheta \cos \vartheta}{(\omega_c^2 \epsilon \cos^2 \vartheta - \omega_0^2 \sin^2 \vartheta)^{3/4}}, \quad (22)$$

причем $t_y \ll t_3$, и можно считать, что при включении источника стационарная амплитуда поля устанавливается при $t \sim t_3$. Если $R = \text{const}$, то время запаздывания монотонно возрастает до бесконечности с ростом ϑ в области $0 < \vartheta < \vartheta_0$ (10). Установление полей на заданном расстоянии от источника начинается при $t = R \sqrt{\epsilon} / c$ вблизи направления $\vartheta = 0$, угловая ширина области, в которой амплитуды полей достигли стационарных значений, растет со временем. Для источника достаточно малых размеров поля (19) резко возрастают при условии

$$\sqrt{\omega_c^2 \epsilon \cos^2 \vartheta - \omega_0^2 \sin^2 \vartheta} \sim \frac{\omega_0 \omega_c \sqrt{\epsilon} L}{c}. \quad (23)$$

Из (21), (15) и (23) ясно, что в дальней зоне формулы (15) определяют время запаздывания и скорость распространения сигнала в направлении наибольшего значения стационарной амплитуды. При $t \gg t$ нестационарные процессы могут происходить лишь в области, где величины полей малы, поэтому характерная структура поля не меняется.

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

Поля в области применимости квазистатического приближения, создаваемые источником (16), можно записать в интегральной форме, используя выражения (13) и (17). Из общего решения видно, что огибающая в этом случае определяется формой и размерами источника. Возьмем конкретное распределение, на примере которого выясним основные свойства нестационарных полей в ближней зоне:

$$\mathbf{j}(R, t) = z_0 I_0 \frac{\delta(z) a}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}} h(t) \exp(-i\omega_c t). \quad (24)$$

Здесь используется цилиндрическая система координат r, φ, z ; z_0 — единичный вектор вдоль \mathbf{H}_0 . Введем потенциал Герца $\Pi = z_0 \Pi$, связанный с полями соотношениями

$$\mathbf{E} = \text{grad} \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \text{rot} \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (25)$$

Уравнение для фурье-компоненты Π_ω имеет вид

$$\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Pi_\omega + \gamma \frac{\partial^2 \Pi_\omega}{\partial z^2} = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{z\omega}. \quad (26)$$

Решение (26) для источника (24) записывается в простой форме ($z > 0$):

$$\Pi_\omega = \frac{i I_0}{(\omega - \omega_c) \omega \sqrt{\epsilon |\gamma|} \sqrt{r^2 - [z(\epsilon / |\gamma|)]^{1/2} + ia^2}}. \quad (27)$$

Для (27) интеграл по ω типа (17) может быть сведен к известным функциям:

$$\begin{aligned} \Pi(t) = & \frac{I_0}{\omega_0 V_\varepsilon R} \left[\exp(-i\omega_c t) - \exp\left(-\frac{\omega_0 t a}{V_\varepsilon z}\right) J_0\left(\frac{\omega_0 t r}{V_\varepsilon z}\right) + \right. \\ & \left. + 2i V_1\left(\frac{\omega_0 t r}{V_\varepsilon z w}, \frac{\omega_0 t r}{V_\varepsilon z}\right) - 2 V_2\left(\frac{\omega_0 t r}{V_\varepsilon z w}, \frac{\omega_0 t r}{V_\varepsilon z}\right) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где V_1 и V_2 — функции Ломмеля двух переменных (см. [13]),

$$\omega = \frac{(\omega_c/\omega_0) V_\varepsilon z - ia - i\tilde{R}}{r}, \quad \tilde{R} = \sqrt{r^2 - \left(z \frac{\omega_c V_\varepsilon}{\omega_0} + ia\right)^2}.$$

Формулы (25) и (28) определяют точное решение нестационарной задачи.

Рассмотрим подробнее процесс установления полей в резонансной области. При условиях $r \gg a$ и $\omega_c t \gg 1$ потенциал (28) можно приближенно записать в виде

$$\Pi(t) = \frac{I_0 \exp(-i\omega_c t)}{\omega_0 V_\varepsilon} \frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{i\omega_0 r t}{V_\varepsilon z}} - i\omega_c t + \frac{\omega_c t a}{V_\varepsilon z}\right)}{\sqrt{2r\left(r - \frac{\omega_c V_\varepsilon}{\omega_0} z - ia\right)}}. \quad (29)$$

Вычисляя поля на резонансной поверхности $r = \frac{\omega_c V_\varepsilon}{\omega_0} z$ по формулам (25), получим:

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= E_{\vartheta \text{ ст}} \left[\Phi(\sqrt{\xi}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\xi} \left(1 + \frac{2}{3} \xi\right) e^{-\xi} \right], \\ H_\varphi &= H_{\varphi \text{ ст}} \left[\Phi(\sqrt{\xi}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\xi} e^{-\xi} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$E_{\vartheta \text{ ст}} = -\frac{3(1-i) I_0 \omega_c^{1/2} (\omega_0^2 + \varepsilon \omega_c^2)^{3/4} \exp(-i\omega_c t)}{8 \varepsilon^{1/4} \omega_0^3 a^{5/2} R^{1/2}},$$

$$H_{\varphi \text{ ст}} = \frac{(1-i) I_0 \varepsilon^{1/4} (\omega_0^2 + \varepsilon \omega_c^2)^{1/4} \omega_c^{1/2} \exp(-i\omega_c t)}{4 c \omega_0 a^{3/2} R^{1/2}},$$

$\xi = t/\tilde{t}$ — безразмерное время, \tilde{t} определяется равенством (15),

$$\tilde{t} = \frac{R V_\varepsilon}{a \sqrt{\omega_0^2 + \varepsilon \omega_c^2}}, \quad \tilde{v} = \frac{a \sqrt{\omega_0^2 + \varepsilon \omega_c^2}}{V_\varepsilon}.$$

В области квазистатики огибающие для электрического и магнитного полей различны, зависимости $l(\xi) = E_\vartheta/E_{\vartheta \text{ ст}}$ и $h(\xi) = H_\varphi/H_{\varphi \text{ ст}}$ показаны на рис. 2. Ясно, что в этом случае нельзя выделить существенно различных характерных времен нестационарного процесса, как в волновой зоне (21) и (22), и можно считать, что выражения (15) опреде-

ляют время запаздывания (время установления) и скорость распространения квазистатического сигнала. При $t \ll \tilde{t}$

$$E_\vartheta = E_{\vartheta \text{ ст}} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \xi^{5/2} = - \frac{(1-i) I_0 (\omega_0^2 + \varepsilon \omega_c^2)^2}{5\sqrt{\pi} \varepsilon^{3/2} \omega_0^3 \omega_c^2} \frac{(\omega_c t)^{5/2}}{R^3} \exp(-i \omega_c t), \quad (31)$$

$$H_\varphi = H_{\varphi \text{ ст}} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \xi^{3/2} = \frac{(1-i) I_0 (\omega_0^2 + \varepsilon \omega_c^2)}{3\sqrt{\pi} c \varepsilon^{1/2} \omega_0 \omega_c} \frac{(\omega_c t)^{3/2}}{R^2} \exp(-i \omega_c t),$$

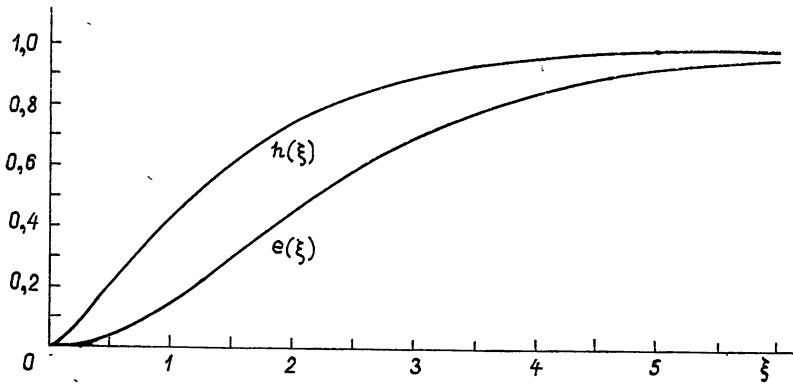


Рис. 2.

резонансные поля не зависят от размера источника и убывают с расстоянием по законам, характерным для нерезонансных квазистатических полей. Для точечного источника $a = 0$, $\tilde{t} = \infty$, выражения (31) справедливы при любых t , и поля на резонансной поверхности неограниченно возрастают. В случае распределенного излучателя при $t \sim \tilde{t}$ устанавливаются стационарные значения амплитуд, зависящие от характерного размера источника. В этом отношении аналогично устанавливается ток в добротном колебательном контуре на резонансной частоте при подключении гармонической ЭДС. Первоначально огибающая растет линейно и не зависит от активного сопротивления r_a , при $t \gg \tilde{t} \sim r_a^{-1}$ амплитуда тока постоянна и пропорциональна r_a^{-1} . Для резонансных квазистатических полей размер источника играет ту же роль, что сопротивление в колебательном контуре,

Таким образом, понятие групповой скорости может успешно применяться в квазистатике как для определения направления потока энергии, так и для качественного описания нестационарных процессов. При этом нужно иметь в виду, что вследствие вырожденности дисперсионного уравнения (9) для каждой точки наблюдения в резонансной области существует целый спектр плоских волн с различными значениями K и V_{gr} , приносящих энергию от источника. В результате интерференции этих волн, амплитуды и фазы которых зависят от распределения стороннего тока, получается сложная картина нестационарных полей, причем характерное время запаздывания сигнала определяется минимальным значением групповой скорости в спектре v . На достаточно большом расстоянии от источника всегда необходимо учесть «раз-

бегание» плоских волн, обусловленное кривизной волновой поверхности (4). В дальней зоне структура поля определяется плоской волной с заданным направлением групповой скорости и рассмотрение квазимонохроматического излучателя в этом случае сводится к исследованию нестационарных плоских волн. Величина v определяет здесь скорость распространения сигнала в направлении, в котором стационарные амплитуды полей достигают наибольших значений.

Автор благодарен Н. Г. Денисову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Электродинамика плазмы, под ред. А. И. Ахиезера, изд. Наука, М., 1974.
2. Л. Л. Ваньян, В. А. Юдович, Геомагнетизм и аэрономия, 9, 917 (1969).
3. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, 62, 924 (1972).
4. Е. Н. Ермакова, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 10, 1418 (1975).
5. E. Arbel and L. B. Felsen, Electromagnetic waves, Pergamon Press, 6, № 1, 421 (1963).
6. S. R. Seshadri, Electronics Record, 112, 1856 (1965).
7. Н. С. Беллюстин, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 17 (1975).
8. S. W. Lee and R. Mitra, Radio Sci., 2, № 8, 813 (1967).
9. Н. Г. Денисов, В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 351 (1973).
10. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.
11. А. А. Андронов, Ю. В. Чугунов, УФН, 116, вып. 1, 79 (1975).
12. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 апреля 1976 г.

TRANSIENT RESONANT FIELDS IN MAGNETOACTIVE PLASMA

N. S. Bellyustin

The peculiarities of nonstationary fields due to plasma resonance are discussed. The problem of switching on a oscillator of small enough dimensions is considered. It is shown that the characteristic time of growing resonance fields in the quasistatic region are inversely proportional to the source dimensions. The form of the signal envelopes depends on spatial source distribution and are different for electric and magnetic fields. The transient regime is similar to that in oscillating circuit at the resonance frequency. In the far zone the amplitude fields are changed according to the universal law described by Fresnel integrals.

УДК 533.951

ОБ УСИЛЕНИИ ПОЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, ПАДАЮЩИХ НА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ СЛОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

P. H. Кауфман

В квазиперечном приближении без учета влияния ионов рассмотрена задача о падении плоской волны на бесконечный плоский слой однородной магнитоактивной плазмы, когда внешнее магнитное поле H_0 параллельно границам слоя. Показано, что усредненный по толщине слоя вектор Пойнтинга прижимается к направлению вектора H_0 . Найдено отношение ρ плотности усредненного потока энергии в слое вдоль направления H_0 к плотности потока энергии падающей волны вдоль этого же направления. Исследована зависимость величины ρ (коэффициента усиления) от частоты падающей волны, ее угла падения и параметров слоя. Получено, что ρ всегда больше единицы и принимает наибольшее значение вблизи угла полного внутреннего отражения.

В настоящей работе исследуется эффект своеобразного резонансного усиления поля плоской волны в плоскопараллельном слое магнитоактивной плазмы, когда внешнее магнитное поле H_0 параллельно границам слоя*. Решение найдено в квазиперечном приближении без учета влияния ионов. Рассматриваемая модельная задача может быть полезна в связи с проблемами прохождения электромагнитных волн через неоднородные образования в магнитоактивной плазме.

1. Постановка задачи следующая. На бесконечный плоский однородный слой толщины h холодной магнитоактивной бесстолкновительной плазмы падает снизу под углом θ_1 плоская волна частоты $\omega \gg \omega_L$, где ω_L — нижняя гибридная частота; при этом внешнее магнитное поле H_0 параллельно границам слоя. Нас будет интересовать отношение потока энергии вдоль направления магнитного поля в слое к потоку энергии падающей волны вдоль этого же направления вне слоя. Таким образом, задача сводится к нахождению вектора Пойнтинга и его исследованию в зависимости от частоты и характерных параметров плазмы.

Выберем начало координат точку O на нижней границе слоя, ось z направим вверх, перпендикулярно границам, а ось x — вдоль вектора H_0 . Пусть плоскость падения совпадает с плоскостью XOZ .

Падающая снизу на слой волна, частично отразившись от его нижней границы, породит в магнитоактивном плазменном слое две преломленные волны, которые, в свою очередь, частично отразятся от верхней границы слоя, а частично пройдут через него.

Если зависимость от времени $\exp(i\omega t)$, то зависимость от координат для компонент поля плоской волны будет пропорциональна

* Под усилением поля в слое мы понимаем здесь такое явление, когда плотность потока энергии в слое параллельно вектору H_0 больше плотности потока энергии падающей волны вдоль этого же направления вне слоя.

$\exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} (x \sin \theta_I \pm qz) \right\}$, где $q = n \cos \theta$ (n — показатель преломления, θ — угол преломления), знак плюс соответствует волне, идущей вверх, а знак минус — волне, идущей вниз, т. е. отраженной.

В рассматриваемом нами случае направленности магнитного поля квартиков Букера [1, 2] сводится к биквадратному уравнению относительно q^2 . Введем обозначения $v = \omega_0^2/\omega^2$ и $u = \omega_H^2/\omega^2$, где ω_0 — ленгмюровская частота электронов, ω_H — их гирочастота.

В целях упрощения системы алгебраических уравнений относительно компонент поля будем считать, что $\omega < \omega_0$, т. е. $v > 1$, и

$$\frac{\sin^2 \theta_I}{\cos^4 \theta_I} \ll \frac{u}{4(v-1)}. \quad (1)$$

Тогда, соответственно знакам перед радикалом в точном решении, для q^2 получаем приближенные выражения:

$$q_+^2 = \cos^2 \theta_I - \frac{v(v-1)}{(v-1)+u \cos^2 \theta_I}, \quad q_-^2 = \cos^2 \theta_I - v. \quad (2)$$

(Соответствующие показатели преломления получаются из этих выражений заменой первого слагаемого на единицу.) Индекс «плюс» соответствует необыкновенной волне, индекс «минус» — обычной.

Так как $v > 1$, то $q_-^2 < 0$, т. е. обыкновенная волна затухает в слое. Для того, чтобы не затухала вторая, необыкновенная волна, необходимо, чтобы q_+^2 было числом положительным. Это требование при $\theta_I = 0$ приведет к неравенству $v-1 < \sqrt{u}$, решая которое относительно частоты, получим

$$\omega' < \omega < \omega_0, \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_H^2}{4}} - \frac{\omega_H}{2}. \quad (3)$$

Решая неравенство $q_+^2 > 0$ относительно $\cos^2 \theta_I$, получим

$$\cos^2 \theta_I > \cos^2 \theta_I^0 = \frac{2v}{1 + \sqrt{1 + \frac{4vu}{v-1}}}, \quad (4)$$

где угол θ_I^0 есть угол полного внутреннего отражения, ибо при $\theta_I = \theta_I^0$, $q_+ = 0$, т. е. угол преломления $\theta_+ = \pi/2$.

Итак, для каждой пары значений параметров слоя ω_0 и ω_H существует интервал частот $\Delta\omega$ (3), для которых в слое возможно существование незатухающей необыкновенной волны. Для каждой частоты из этого интервала существует свой допустимый диапазон углов падения $0 \leq \theta_I < \theta_I^0$, причем к углу θ_I^0 можно приближаться как угодно близко (при этом $q_+ \rightarrow 0$) при условии выполнения неравенства (1). Если же это условие, аналогичное условию квазипоперечного распространения, не выполняется, то допустимый интервал углов уменьшается.

2. Из граничных условий на плоскостях раздела можно найти амплитуды компонент электрического поля соответствующих волн, выраженные через компоненты $E_y^{(I)}$ и $E_{\parallel}^{(I)}$ падающей волны, где E_{\parallel} — компонента поля, перпендикулярная волновому вектору и лежащая в плоскости падения.

Вектор Пойнтинга, усредненный по времени, находится по формуле [2]

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [EH^*].$$

Для необыкновенной волны в слое получим (знак плюс опускаем)

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{|E_y^{(I)}|^2 \cos^2 \theta_I}{Q} \left[\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \sin \theta_I + \frac{\mu}{\rho} q \right] \left[(q^2 - \cos^2 \theta_I) \times \right. \\ &\quad \times \cos \left\{ 2 \frac{\omega}{c} q (h - z) \right\} + (q^2 + \cos^2 \theta_I) \left. \right], \\ S_y &= \frac{i n |E_y^{(I)}|^2 \cos^2 \theta_I}{Q} (q^2 - \cos^2 \theta_I) \left(\mu \cos 2\theta - \frac{\sin 2\theta}{\rho} \right) \times \\ &\quad \times \sin \left\{ 2 \frac{\omega}{c} q (h - z) \right\}, \\ S_z &= \frac{2 q |E_y^{(I)}|^2 \cos^3 \theta_I}{Q} \left[\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) q - \frac{\mu}{\rho} \sin \theta_I \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E_y}{E_{||}} = i \frac{\sqrt{u} n \cos^2 \theta_I}{(v-1) \sin \theta_I}, \quad \mu = \frac{E_L}{E_y} = i \frac{v \sqrt{u} \cos \theta}{(v-1)+u \cos^2 \theta_I}, \\ Q &= 4 q^2 \cos^2 \theta_I + (\cos^2 \theta_I - q^2)^2 \sin^2 \frac{\omega}{c} h q, \end{aligned}$$

(E_L — продольная компонента электрического поля преломленной волны, ρ — поляризация).

Из формул (5) видно, что если в падающей волне $E_y^{(I)} = 0$, то все три компоненты вектора Пойнтинга обращаются в нуль, т. е. необыкновенная волна в слое не возникает. Возникнет только затухающая обыкновенная волна, которая, пройдя через слой, выйдет из него с первоначальной поляризацией. Из формул для компонент поля следует также, что и для отраженной волны $E_y = 0$. Таким образом, в этом случае в указанном выше приближении плазма не проявляет свои магнитоактивные свойства.

Если же в падающей волне $E_{||}^{(I)} = 0$, а $E_y^{(I)} \neq 0$, то в слое возникает необыкновенная волна, у которой отличны от нуля все три компоненты поля. То же относится и к отраженной и прошедшей через слой волнам. Второй случай поляризации назовем основным и впредь и будем его рассматривать.

Особенностью полученных формул является осциллирующий характер зависимости от z компонент S_x и S_y . Период осцилляции Λ равен: $\Lambda = \lambda/2 \cos \theta$, где λ — длина волны в слое, $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ (λ_0 — длина волны в вакууме).

Усредним компоненты вектора Пойнтинга в слое по толщине слоя h . После преобразований получим

$$\bar{S}_x^h = \frac{\sin \theta_I \cos^2 \theta_I |E_y^{(I)}|^2}{Q} \left[(q^2 + \cos^2 \theta_I) - (\cos^2 \theta_I - q^2) \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right] F(q^2), \quad (6)$$

где

$$F(q^2) = 1 + \frac{q^2}{\cos^2 \theta_I} \frac{(1 - n^2)}{n^2} + \frac{(v - 1)^2 \sin^2 \theta_I}{n^2 u \cos^4 \theta_I}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c} h q; \quad (7)$$

$$\bar{S}_y^h = \frac{i n \cos^2 \theta_I |E_y^{(I)}|^2}{Q} (q^2 - \cos^2 \theta_I) \left(\mu \cos 2\theta - \frac{\sin 2\theta}{\rho} \right) \frac{1 - \cos 2\alpha}{2\alpha}, \quad (8)$$

$$\bar{S}_z^h = S_z.$$

Рассмотрим вопрос о направлении усредненного по толщине слоя вектора Пойнтинга. Имеем

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma}_x^h = \frac{\bar{S}_x^h}{S_z} = \frac{(q^2 + \cos^2 \theta_I) - (\cos^2 \theta_I - q^2) \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}}{2q \cos \theta_I} \operatorname{tg} \gamma_x^{(I)}, \quad (9)$$

где $\gamma_x^{(I)}$ — соответствующий угол наклона вектора Пойнтинга для преломленной волны, не отраженной еще от верхней границы, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \gamma_x^{(I)} = \frac{F(q^2)}{F(-\sin^2 \theta_I)} \operatorname{tg} \theta.$$

Легко видеть, что $\gamma_x^{(I)} > \theta$. Если выполняется условие

$$\alpha \gg 1, \quad \text{или} \quad h/\lambda_0 \gg 1/2\pi q, \quad (10)$$

имеем

$$\bar{S}_y^h = 0, \quad \operatorname{tg} \bar{\gamma}_x^h = \frac{q^2 + \cos^2 \theta_I}{2q \cos \theta_I} \operatorname{tg} \gamma_x^{(I)}, \quad (11)$$

т. е.

$$\bar{\gamma}_x^h > \gamma_x^{(I)} > \theta. \quad (12)$$

Таким образом, в этом случае усредненный по толщине слоя вектор Пойнтинга S^h ближе к направлению магнитного поля H_0 , чем волновой вектор преломленной волны и ее вектор Пойнтинга.

Из выражений (5) легко видеть, что неусредненный по толщине слоя h вектор Пойнтинга S при выполнении условия (10) равномерно осциллирует с периодом Λ возле направления вектора S^h .

Формулы (11) и следующие из них результаты получаются также из формул (8) и (9), если толщина слоя h содержит целое число периодов Λ , т. е. если $h = m\Lambda$, или $\alpha = m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). В этом случае усреднение по толщине слоя h эквивалентно усреднению по периоду Λ . Под слоем имеет место аналогичное явление с периодом осцилляции, равным $\Lambda_0 = \lambda_0/2 \cos \theta_I$.

Изложенная выше картина поведения вектора Пойнтинга является, очевидно, результатом интерференции падающих и отраженных от обеих границ слоя волн.

3. Плотность потока энергии в слое вдоль направления H_0 как функция от z определяется выражением для S_x из формул (5), т. е. это осциллирующая вдоль оси z функция. Усредненное по толщине слоя h значение плотности потока энергии вдоль направления магнитного поля определяется выражением \bar{S}_x^h (см. (6)). Плотность потока энергии падающей на слой волны вдоль вектора H_0 для случая основной поляризации ($E_{||}^{(I)} = 0$) определяется выражением

$$S_x^{(I)} = -\frac{\sin \theta_I}{2} |E_y^{(I)}|^2. \quad (13)$$

Рассмотрим отношение

$$p = \frac{\bar{S}_x^h}{\bar{S}_x^{(I)}} = \frac{2 \cos^2 \theta_I \left[(\cos^2 \theta_I + q^2) - \Phi \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right] F(q^2)}{4q^2 \cos^2 \theta_I + \Phi^2 \sin^2 \alpha}, \quad (14)$$

где $F(q^2)$ и α определяются выражениями (7), а $\Phi = \cos^2 \theta_I - q^2$ (см. (2)). Коэффициент p есть функция от параметров слоя ω_0 , ω_H и h , а также от частоты падающей волны ω и ее угла падения θ_I .

При $\theta_I = 0$ плотности потоков энергии $S_x^{(I)}$ и \bar{S}_x^h равны нулю и их отношение не имеет смысла. Рассмотрим предел этого отношения при $\theta_I \rightarrow 0$, который обозначим через $p(0)$ (ему соответствует $\Phi(0)$). Получим

$$p(0) = \frac{2 \left[2 - \Phi(0) - \Phi(0) \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right] [1 + \Phi(0)]}{4[1 - \Phi(0)] + \Phi^2(0) \sin^2 \alpha}. \quad (15)$$

При заданных параметрах слоя это есть функция от частоты, при этом $\Phi(0)$ как функция от частоты монотонно убывает в промежутке $\Delta\omega$ от единицы до нуля. Можно показать, что

$$2 < \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} p(0) = p_{\omega_0}(0) < 2 \frac{2}{3}.$$

Знаменатель в выражении (15) колеблется за счет второго слагаемого, содержащего $\sin^2 \alpha$. Это обуславливает наличие экстремумов у $p(0)$ как функции от частоты, равных

$$\begin{aligned} p_{\max}(0) &= \frac{[2 - \Phi(0)][1 + \Phi(0)]}{2[1 - \Phi(0)]}, \\ p_{\min}(0) &= \frac{2[1 + \Phi(0)]}{2 - \Phi(0)} \end{aligned} \quad (16)$$

соответственно при условиях

$$\alpha = m\pi \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{2m+1}{2}\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

У левого конца промежутка $\Delta\omega$ $\Phi(0) \approx 1$, и поэтому максимумы могут быть очень велики. Значения же минимумов ограничены:

$$1 < p_{\min}(0) < 4. \quad (18)$$

С ростом частоты $p_{\max}(0)$ и $p_{\min}(0)$ уменьшаются и при $\omega \rightarrow \omega_0$ стремятся к единице. Заметим также, что у правого конца промежутка $\Delta\omega$ $\Phi(0)$ мало, и поэтому второе слагаемое в знаменателе выражения (15) мало по сравнению с первым. Это приводит к тому, что $p(0)$ приближении к ω_0 становится монотонно убывающей функцией частоты, экстремумы исчезают.

Рассмотрим поведение p как функции от угла θ_I , при фиксированной частоте ω из промежутка $\Delta\omega$. Колебания знаменателя в выражении (14) также приведут к появлению экстремумов при условиях (17). Но теперь изменение α вызвано изменением q , обусловленным возраста-

нием угла θ_I . При этом q уменьшается (см. (2)), стремясь к нулю при $\theta_I \rightarrow \theta_I^0$ (если угол θ_I^0 допустим условием (1)). Легко видеть, что ввиду этого и знаменатель в формуле (14) уменьшается при выполнении условий (17), т. е. экстремальные значения коэффициента $p(\theta_I)$ увеличиваются с ростом угла θ_I . С увеличением угла θ_I α уменьшается, поэтому количество экстремумов и их характер обусловлены максимальным значением α при $\theta_I = 0$, которое зависит от взятой частоты ω . А именно, с увеличением θ_I от нуля ближайший экстремум будет того же типа и с тем же значением \tilde{m} (согласно формулам (17)), что и ближайший экстремум $p(0)$ для частот $\omega < \tilde{\omega}$ (т. е. с меньшими α). В соответствии с этим $p(\theta_I)$ будет вначале либо возрастать, либо убывать. При увеличении угла θ_I от нуля до θ_I^0 m будет меняться от \tilde{m} до единицы. Может случиться также, что $p(\theta_I)$ не будет иметь экстремумов, если начальное значение α слишком мало.

Из изложенного выше видно, что коэффициент p при любых допустимых значениях параметров больше единицы, что указывает на эффект усиления поля в слое. Первые из условий (17), эквивалентные тому, что толщина слоя h содержит целое число периодов Λ , играют роль резонансных условий, при которых происходит наибольшее усиление поля. Коэффициент p назовем коэффициентом усиления.

4. Приведем результаты численных расчетов, проведенных для параметров ионосферной плазмы, соответствующих высоте 2000 км над поверхностью Земли [3]: $\omega_0 = 5,675 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$, $\omega_H = 3,86 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$. Толщина слоя $h = 4,5 \text{ км}$. Допустимый интервал частот (3) следующий:

$$4,064 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1} < \omega < 5,675 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}. \quad (19)$$

Расчеты при вычислении $p(0)$ произведены через каждые $0,002 \times 10^6 \text{ c}^{-1}$. Функция $p(0)$ имеет в интервале (19) 22 максимума и 21 минимум, т. е. является быстроосциллирующей функцией от частоты. Положение экстремумов соответствует формулам (17).

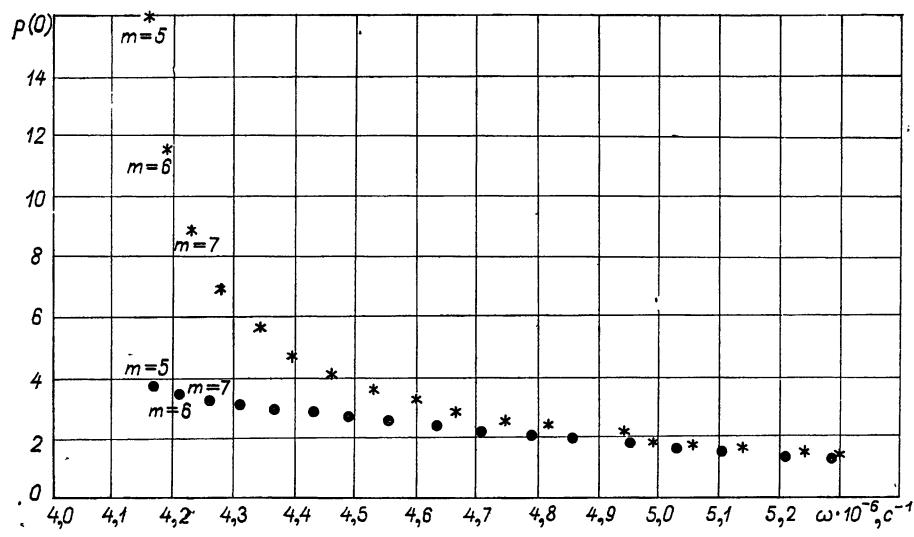


Рис. 1.

Экстремальные значения $p(0)$ для $m \geq 5$ изображены на рис. 1 (звездочки соответствуют максимумам, точки — минимумам). Значения

экстремумов убывают с ростом частоты, стремясь к единице. При этом значения $p_{\min}(0)$ соответствуют неравенствам (18), а диапазон изменения $p_{\max}(0)$ очень велик: первым четырем максимумам соответствуют значения 184,9; 81,6; 43,1; 24,4, так что их нельзя было изобразить на рисунке, последние же экстремумы ($m \geq 16$) не превышают 2,5 и почти не различимы между собой. Начиная с частоты $\omega = 5,3 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$, происходит монотонное убывание функции $p(0)$. На левом конце промежутка (19) значения $p(0)$ следующие: $p_{\omega'}(0) = 2,666$, при $\omega = 4,066 \times 10^6 \text{ c}^{-1}$ $p(0) = 7,7$.

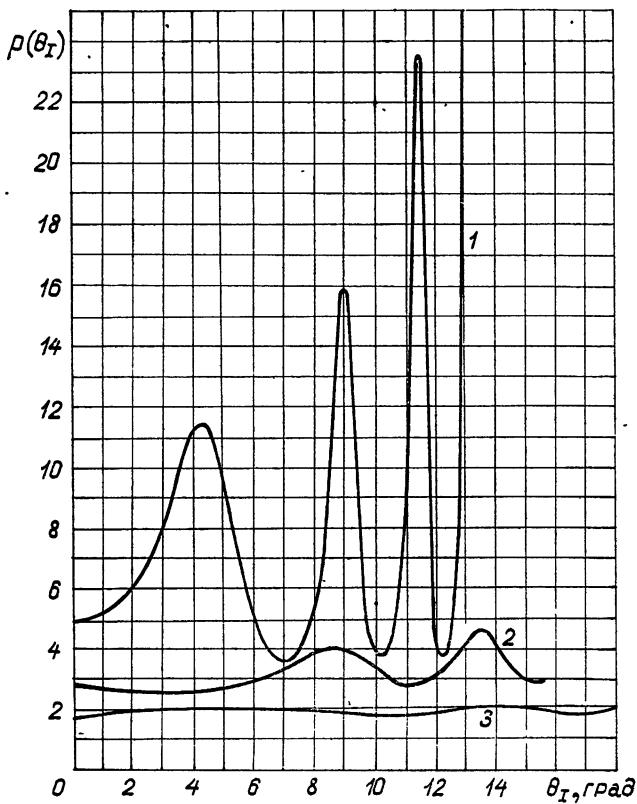


Рис. 2

На рис. 2 изображены графики $p(\theta_I)$ для нескольких частот из рассматриваемого промежутка: $\omega = 4,2 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ (кривая 1), $\omega = 4,5 \times 10^6 \text{ c}^{-1}$ (кривая 2), $\omega = 5 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ (кривая 3). Этим частотам соответствуют углы полного внутреннего отражения θ_I^0 , равные соответственно $14^\circ 57'$; $26^\circ 45'$; $38^\circ 58'$.

Заметим, что углы θ_I^0 возрастают с увеличением частоты, что следует из формулы (4). Правая часть неравенства (1), ограничивающего угол падения, также увеличивается с частотой. Но угол θ_I^0 возрастает быстрее. Если потребовать, например, чтобы правая часть неравенства (1) превышала левую часть не менее чем в четыре раза, то приведенные выше значения углов θ_I^0 для рассматриваемых частот

не входят в допустимые интервалы углов. В этом случае наибольшие значения углов падения соответственно равны $13^{\circ}30'$; $14^{\circ}57'$; 19° .

График $p(\theta_I)$ для каждой частоты рассмотрен в соответствующем допустимом интервале углов. Вычисления проводились через $0^{\circ}, 1^{\circ}$. Кривая 1 имеет резко выраженные экстремумы, положение которых соответствует формулам (17), где с увеличением θ_I m принимает соответственно значения 6,5 и 4 для максимумов и 5,4 и 3 для минимумов. Таким образом, в соответствии со сказанным в предыдущем пункте, кривая 1 имеет экстремумы того же типа и с теми же значениями m , что и функция $p(0)$ для $\omega < 4,2 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$. Если бы угол θ_I^0 входил в допустимый интервал углов θ_I , то рассматриваемая кривая имела бы все возможные значения экстремумов, соответствующие значениям m для максимумов, равным 3, 2, 1. Таким образом, поскольку $p_{\max}(\theta_I)$ возрастают с увеличением θ_I , наибольшее усиление поля происходит вблизи угла полного внутреннего отражения. Заметим, что экстремальные значения $p(\theta_I)$ примерно равны соответствующим экстремальным значениям функции $p(0)$, т. е. изменение угла θ_I от нуля до θ_I^0 при фиксированной частоте ω эквивалентно изменению частоты от ω до ω' при $\theta_I = 0$.

Кривая 2 расположена целиком ниже кривой 1, и ее экстремумы в допустимом интервале углов выражены менее резко, ибо этой кривой соответствует большая частота и соответственно этому большие значения m в точках экстремумов. Так, для первого экстремума (минимума) $m = 10$. Аналогичная картина имеет место для кривой 3.

Как видно из формул (16), величины параметров ω_0 , ω_H и h непосредственно не входят в выражение для экстремальных значений $p(0)$, а $\Phi(0)$ с увеличением частоты в любом допустимом промежутке частот $\Delta\omega$ меняется одинаково: от 1 до 0. Значения параметров скажутся на положении экстремумов в $\Delta\omega$, т. е. на величине $\Phi(0)$, а следовательно,

и на величине экстремальных значений $p(0)$. Действительно, $\alpha = \frac{\omega}{c} h q < \frac{\omega_0 h}{c}$ в промежутке $\Delta\omega$, и если ω_0 и h малы, так что $\omega_0 h / c < \pi$, то

$p(0)$ не достигнет даже своего первого экстремального значения. Чем больше ω_0 и h , тем больше экстремумов имеет $p(0)$. Величина экстремумов также зависит от параметров слоя. На самом деле, первому экстремуму соответствует $q_1 = \pi c / \omega h$. И чем больше ω , тем меньше q_1 , т. е. тем больше $\Phi(0)$ и, следовательно (см. (16)), тем больше будет величина первого экстремума. То же относится и к следующим экстремумам. Отсюда видно, что величины экстремумов увеличиваются при уменьшении ω_H и при увеличении ω_0 , ибо в обоих случаях промежуток $\Delta\omega$ начинается с больших частот. Как видно из выражения для q_1 , в этом же направлении действует и увеличение толщины слоя h .

Заметим, что в слое изотропной плазмы также имеет место аналогичный эффект усиления поля, но, разумеется, для частот $\omega > \omega_0$. В рассмотренной нами задаче ($\omega < \omega_0$) мы не можем совершить предельный переход к изотропному случаю, ибо при $\omega_H = 0$ необыкновенная волна исчезает и остается лишь затухающая обыкновенная волна.

В заключение автор благодарит Я. Л. Альперта за постановку вопроса и обсуждение, Ю. Н. Черкашина и А. В. Попова за полезные замечания, Р. В. Астахову и Г. Н. Борисову за помощь в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. K. L. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge University Press, 1966.
3. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1975.

Институт земного магнетизма, ионосфера и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
25 мая 1976 г.

ON FIELD AMPLIFICATION OF HIGH-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC
WAVES BEING INCIDENT ON A PLANE PARALLEL LAYER OF
MAGNETOACTIVE PLASMA

R. N. Kaufman

A problem of the plane wave incidence on a continuous plane layer of homogeneous magnetoactive plasma when the external magnetic field H_0 is parallel to layer boundaries is considered in the quasi-transverse approximation without taking into account the ion effect. It is shown that the Poynting vector averaged over layer thickness is closely adjoint to the vector direction H_0 . The ratio p of the averaged energy flux density in a layer along the direction H_0 to the energy flux density of an incident wave along the same direction is found. The dependence of the p value (amplification factor) upon the incident wave frequency, its angle of frequency, and layer parameters is investigated. p is obtained to be always larger than unity and has the greatest value near the angle of total internal reflection.

УДК 533.951

ОБ УГЛОВОЙ АНИЗОТРОПИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Б. С. Моисеев

Рассмотрено взаимное расположение вектора потока электромагнитной энергии S и волнового вектора k в магнитоактивной, многокомпонентной и однородной плазме при произвольном соотношении ее параметров. Определены области «захвата» потока энергии S постоянным магнитным полем H_0 , т. е. условия и диапазоны частот, при которых вектор S «прижимается» к вектору H_0 ($H_0 \wedge S < H_0 \wedge k$). Найдены также условия, при которых вектор S отклоняется от магнитного поля H_0 ($H_0 \wedge S > H_0 \wedge k$).

Исследовано угловое распределение плотности потока энергии электромагнитных волн в однородной магнитоактивной плазме. Рассмотрены диапазоны частот, где весь поток энергии ограничен конической поверхностью, ось которой совпадает с постоянным магнитным полем. Рассчитаны углы конусов, определяющих область прозрачности плазмы для данной частоты волн. Обсуждаются особенности этих зависимостей, появляющиеся в многокомпонентной плазме. Показано, что учет электрон-ионных столкновений вблизи плазменного резонанса в гидродинамическом приближении приводит к появлению в области непрозрачности поверхности волн.

Как известно, в магнитоактивной плазме вектор Пойнтинга S не коллинеарен волновому вектору k . Угловая зависимость этих векторов впервые была рассмотрена для бесстолкновительной плазмы в работе [1], где было показано, что вектор групповой скорости $u \parallel S$, и получена формула

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (H_0 \wedge u) = \operatorname{tg} \theta \frac{\partial (n \cos \theta)}{\partial \cos \theta} \left[\frac{\partial (n \cos \theta)}{\partial \cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial n}{\partial \cos \theta} \right]^{-1}, \quad (1)$$

где n — показатель преломления, θ — угол между вектором магнитного поля H_0 и волновым вектором k .

Свойства угла $\alpha(\theta, \omega)$ можно называть угловой анизотропией по аналогии с $n(\theta, \omega)$ — анизотропией показателя преломления. Рядом авторов был исследован характер изменения $\alpha(\theta, \omega)$ в различных конкретных случаях. В работе [2] было впервые показано, что для «электронных свистов», т. е. на частотах $\omega_L \ll \omega < \omega_H$ (ω — частота волны,

$\omega_L = \sqrt{\omega_H \Omega_H}$ — нижнегибридная частота, ω_H и Ω_H — гирочастоты электронов и ионов), предельное значение угла α , при котором волны гидрируются магнитным полем, для частот $\omega \ll \omega_H$ равно $19^{\circ}.5$. В работе [3] были рассчитаны зависимости α от ω/ω_H и θ во всем диапазоне частот $\omega_L \ll \omega < \omega_H$. В [1] и [4] была рассмотрена зависимость $\alpha(\theta, \omega)$ на различных частотах ($\omega \ll \Omega_H$ и $\omega \sim \Omega_H$, $\omega \ll \omega_H$ и $\omega \sim \omega_H$ и в окрестности ленгмюровской частоты электронов ω_0).

Однако общей картины угловой анизотропии магнитоактивной плазмы до настоящего времени не существует. Связано это со сложностью анализа выражения (1) в общем случае. Вместе с тем, на основе анализа свойств компонентов волнового вектора возможно общее рассмотрение вопроса о взаимном расположении векторов \mathbf{k} и \mathbf{S} в многокомпонентной плазме во всем диапазоне частот. Результаты такого исследования приведены в настоящей статье (разд. 1—4). В разд. 5 рассмотрены зависимости $S(\alpha, \omega)$ и $\alpha(\theta, \omega)$ для конкретных диапазонов частот.

1. ОБЩИЙ АНАЛИЗ СВОЙСТВ КОМПОНЕНТОВ ВОЛНОВОГО ВЕКТОРА

В системе координат с осью $z \parallel H_0$ компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_{0k}^2}{\omega^2 - \Omega_{Hk}^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\omega_H}{\omega} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_{Hk}}{\omega} \frac{\Omega_{0k}^2}{\omega^2 - \Omega_{Hk}^2}, \\ \varepsilon_3 &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \sum_{k=1}^N \frac{\Omega_{0k}^2}{\omega^2},\end{aligned}$$

где Ω_{Hk} , Ω_{0k} и ω_H , ω_0 — гирочастоты и ленгмюровские частоты соответственно ионов сорта $\langle k \rangle$ и электронов. Для определенности будем считать, что $\Omega_{H1} < \Omega_{H2} < \dots < \Omega_{HN}$. Выберем ось x так, чтобы волновой вектор \mathbf{k} волны $\sim \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ лежал в плоскости xz , т. е. $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$. Тогда из известной теоремы о перпендикулярности вектора \mathbf{S} к волновой поверхности получаем, что

$$\operatorname{tg} \alpha = - \operatorname{tg} \theta \frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2}. \quad (2)$$

Таким образом, исследование угловой анизотропии сводится к анализу наклона дисперсионной кривой в плоскости (k_x^2, k_z^2) . Этот наклон, как мы покажем ниже, определяется характерными свойствами компонентов волнового вектора.

Разрешим общее дисперсионное соотношение относительно k_x^2 и k_z^2 , а именно:

$$\begin{aligned}k_{x1,2}^2 \equiv P &= -\frac{1}{2\varepsilon_1} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right) (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2^2 \right] \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon_1^2} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right) (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2^2 \right]^2 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \left[\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \right)^2 - \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_2^2 \right]}, \\ k_{z1,2}^2 \equiv Q &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2\varepsilon_3} k_x^2 \pm \sqrt{\frac{k_x^4}{4\varepsilon_3^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_3} \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 \right)}. \quad (4)\end{aligned}$$

Верхний и нижний знаки перед радикалом в (3) (при $k_z^2 = 0$) соответствуют необыкновенной и обычной волнам. В (4) ветви не связанны с обычной и необыкновенной волнами, здесь верхний и нижний знаки (при $k_x^2 = 0$) соответствуют левополяризованной и правополяризованной волнам. Назовем точками ветвления первой группы для функ-

ций $\sqrt{P(k_z^2)}$ и $\sqrt{Q(k_x^2)}$ соответственно значения k_{z0}^2 и k_{x0}^2 , при которых выражения (3) и (4) обращаются нуль. Значения k_{zb}^2 и k_{xb}^2 , при которых в (3) и (4) обращаются в нуль подкоренные выражения, назовем точками ветвления второй группы. Они записываются в виде

$$k_{zb}^2_{1,2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} \varepsilon_3 \left(\varepsilon_3 \pm \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3 \left[1 - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}{\varepsilon_2^2} \right]} \right)^2; \quad (5)$$

$$k_{xb}^2_{1,2} = 2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_2^2 \varepsilon_3}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}{\varepsilon_2^2}} \right). \quad (6)$$

Действительные значения k_{xb}^2 лежат в диапазонах

$$\Omega_{Hk} < \omega < \omega_k, \quad \omega_H < \omega < \omega_H \frac{\omega_0^2}{\sum_{k=1}^N \Omega_{hk}^2}, \quad (7)$$

где ω_k — корни уравнения $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0$, удовлетворяющие условию $\Omega_{Hk} < \omega_k < \Omega_{Hk+1}$ ($k=1, \dots, N-1$), $\Omega_{HN} < \omega_N < \omega_H$. Из (3) и (4) следует, что в точках ветвления второй группы (5) или (6) наклон дисперсионной кривой $\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2}$ обращается в нуль или бесконечность. Прохождение дисперсионной ветвию точек ветвления (5) и (6) (в области $k_x^2, k_z^2 > 0$) определяется знаком производных

$$\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} \Big|_{k_x^2=0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0},$$

а именно:

$$\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} \Big|_{k_x^2=0} = -\frac{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2\varepsilon_3}, \quad (8)$$

где верхний знак соответствует левополяризованной волне;

$$\frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} = -\frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) - \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}{\varepsilon_1^2 \left(\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} - \varepsilon_3 \right)} \quad (9)$$

и

$$\frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} = \frac{\varepsilon_3 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} - \varepsilon_3 \right)}$$

соответственно для необыкновенной и обыкновенной волн.

Определение знака выражений (8) и (9) сводится к исследованию корней уравнений, получаемых при обращении в нуль числителя или знаменателя этих выражений. Так, из (8) получаем

$$\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0. \quad (10)$$

Корни уравнения, соответствующего верхнему знаку (обозначим их $\omega_k^{(1)}$), удовлетворяют условию $\Omega_{Hk} < \omega_k^{(1)} < \Omega_{Hk+1}$ ($k = 1, \dots, N - 1$), $\Omega_{HN} < \omega_N^{(1)}$. Из двух положительных корней уравнения, соответствующего нижнему знаку, один корень $\omega^* < \min(\omega_H, \omega_0)$, а другой больше $\max(\omega_H, \omega_0)$. Для выражения (9) имеем три уравнения

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 - \varepsilon_1 &= 0, \quad \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 = 0, \\ \varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) - \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) &= 0,\end{aligned}\tag{11}$$

корни которых (обозначим их соответственно $\omega_k^{(2)}, \omega_k^{(3)}, \omega_k^{(4)}$) удовлетворяют условиям $\Omega_{Hk} < \omega_k^{(i)} < \Omega_{Hk+1}$ ($k = 1, \dots, N - 1$), $\Omega_{HN} < \omega_N^{(i)} < \omega_H$, где $i = 2, 3, 4$. Исследование корней этих уравнений проводится в последующих разделах.

Из уравнений (3) и (4) видно, что дисперсионные кривые есть гиперболы, наклон асимптот которых $\left(\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2}\right)_{ac} = -1, -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}$. Поэтому в тех случаях, когда дисперсионная кривая не проходит (в области $k_x^2, k_z^2 > 0$) через точки ветвления (5) и (6), из сравнения наклона дисперсионной кривой с наклоном ее асимптоты $\left(\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2}\right)_{ac} = -1$ можно определить, используя формулу (2), взаимное расположение векторов \mathbf{k} и \mathbf{S} , т. е. найти условия, при которых поток энергии отклоняется от магнитного поля \mathbf{H}_0 ($\alpha > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) или «прижимается» к нему ($\alpha < 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$). В последнем случае мы будем говорить о «захвате» потока энергии \mathbf{S} магнитным полем \mathbf{H}_0 .

Если дисперсионная кривая проходит через точки ветвления (5) или (6), то для определения угловой анизотропии требуется анализ формулы (1). В разд. 2, 4 выделены условия и диапазоны частот, в которых дисперсионная ветвь проходит через эти точки ветвления. Детальное рассмотрение зависимости $\alpha(\theta)$ для различных конкретных случаев дано в разд. 5.

Анализ изменения наклона дисперсионной кривой, а следовательно, взаимной ориентации векторов \mathbf{k} и \mathbf{S} показывает, что целесообразно рассмотреть три характерных случая: только одна пара корней (5) или (6) имеет вещественные значения, комплексны обе пары корней и обе пары корней вещественны. К анализу этих случаев мы и перейдем.

2. СВОЙСТВА $\alpha(\theta)$, КОГДА ОДНА ПАРА КОРНЕЙ (5) ИЛИ (6) ИМЕЕТ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В точках ветвления функции $\sqrt{P(k_z^2)}$, как это следует из формул (2) и (3), составляющая потока энергии вдоль оси x $S_x = 0$. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $\sqrt{Q(k_x^2)}$, в точках ветвления которой $S_z = 0$. Отсюда следует, что когда $n^2(\theta)$ конечен при всех значениях θ , поток электромагнитной энергии может распро-

страняться во всех направлениях, поскольку дисперсионные кривые в плоскости (k_x^2, k_z^2) проходят, по крайней мере, через точки ветвления первой группы функций $\sqrt{P(k_x^2)}$ и $\sqrt{Q(k_x^2)}$. Из выражений (5) и (6) видно, что условие вещественности только одной пары корней имеет место в диапазонах частот, где $\epsilon_1 \epsilon_3 < 0$. На этих частотах одна из ветвей показателя преломления $n_\infty^2(\theta, \omega)$ (резонансная ветвь) обращается в бесконечность. Покажем, что в диапазонах частот, где $\epsilon_1 \epsilon_3 < 0$, поток энергии, соответствующий резонансной ветви $n_\infty^2(\theta)$, всегда ограничен конической поверхностью, ось симметрии которой совпадает с магнитной силовой линией.

Мы будем рассматривать произвольные соотношения параметров плазмы, выделяя при этом следующие случаи:

а) сильно разреженная плазма, когда ω_0 порядка гирочастот ионов ($0 < \omega_0 < \Omega_{H1}$, $\Omega_{Hm} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1}$, m — фиксированное число, $1 \leq m \leq N - 1$)*;

б) разреженная плазма ($\Omega_{HN} < \omega_0 < \omega_H$),

в) плотная плазма ($\omega_0 > \omega_H$).

Подробное исследование показывает, что в интервалах частот, где $\epsilon_1 \epsilon_3 < 0$ (резонансные диапазоны), корни (5) или (6) положительны (исключением являются рассмотренные ниже диапазоны (12)). Резонансная ветвь $n_\infty^2(\theta)$ лежит справа от точек ветвления (5) или выше корней (6). В связи с этим в случае, когда вещественны корни (5) ($\epsilon_3 > 0$), поток энергии заключен в конус (так как дисперсионная ветвь не проходит точек ветвления функции $\sqrt{Q(k_x^2)}$). В случае же, когда вещественны корни (6) ($\epsilon_3 > 0$), компонент S_x не обращается в нуль (так как дисперсионная ветвь не проходит через точки ветвления функции $\sqrt{P(k_x^2)}$), поэтому энергия распространяется вне конуса, ось которого направлена вдоль H_0 .

Для сильно разреженной плазмы при $p < k$ (p — наибольшее число, для которого справедливо неравенство $\omega_k < \omega^*$, $k < p$) для корней ω_k уравнения $\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 = 0$ имеем

$$\Omega_{Lk} < \omega_k \quad (p < k \leq N - 1), \quad \omega_L < \omega_N,$$

где Ω_{Lk} и ω_L — так называемые междуионные гибридные и нижнегибридная частоты — корни уравнения $\epsilon_1 = 0$, удовлетворяющие неравенствам $\Omega_{Hk} < \Omega_{Lk} < \Omega_{Hk+1}$, $\Omega_{HN} < \omega_L < \omega_H$. Отсюда и из формул (6) и (7) следует, что в диапазонах**

$$\Omega_{Lk} < \omega < \min(\omega_k, \omega_0), \quad \begin{cases} p < k \leq m, & \Omega_{Hm} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1} \\ p < k \leq N - 1, & \Omega_{HN} < \omega_0 \ll \omega_H \end{cases}, \quad (12)$$

$$\omega_L < \omega < \min(\omega_N, \omega_0), \quad p < N, \quad \Omega_{HN} < \omega_0 \ll \omega_H,$$

* Случай сильно разреженной плазмы (или сильных магнитных полей), не встречающийся в ионосфере Земли или в межзвездной среде, реализуется, по-видимому, для таких астрофизических объектов, как радиопульсары, сильная анизотропия излучения которых связана с гигантскими магнитными полями ($H_0 \approx 10^{13}$ Э).

** При $p = m$ или $p = N$ диапазоны (12) исчезают. В дальнейшем не оговаривается, но подразумевается, что соответствующие диапазоны исчезают, если границы изменения индекса $\langle k \rangle$ перекрываются.

$\epsilon_3 < 0$, $\epsilon_1 > 0$ и корни (6) отрицательны. При этом резонансная ветвь проходит через точку ветвления первой группы функции $\sqrt{P(k_z)}$ и не проходит через точки ветвления функции $\sqrt{Q(k_x^2)}$, т. е. компонента S_z не обращается в нуль, и весь поток электромагнитной энергии находится внутри некоторого конуса.

Таким образом, излучение, соответствующее резонансным ветвям $n_\infty^2(0)$, всегда ограничено конической поверхностью. Причем, если $\epsilon_3 < 0$, то поток энергии распространяется внутри конуса, если $\epsilon_3 > 0$ — вне конуса. Отметим, что этот результат не является следствием топологии фазовой поверхности. Так, например, для фазовой поверхности, топологически эквивалентной лемнискоиду (резонансные диапазоны), но с деформацией в виде достаточно резкого «провала», угловое распределение потока энергии не ограничено конической поверхностью. Полученный результат связан с расположением точек ветвления (5) и (6) в плоскости (k_x^2, k_z^2) и является следствием того, что дисперсионные кривые в этой плоскости есть кривые второго порядка.

Рассмотрим теперь нерезонансные ветви. Обозначим через $\omega_k^{(0)}$ корни уравнения $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ ($\Omega_{Hk} < \omega_k^{(0)} < \Omega_{Hk+1}$, $k = 1, \dots, N-1$, $\Omega_{HN} < \omega_N^{(0)}$). При $\epsilon_3 < 0$ $\omega_k < \omega_k^{(0)}$. Таким образом, на частотах (12) $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0$, поэтому там существует только резонансная ветвь. В остальных резонансных диапазонах частот при $\epsilon_3 < 0$ существенны корни (5), а при $\epsilon_3 > 0$ — корни (6) и вопрос о точках ветвления для нерезонансной дисперсионной ветви решается исследованием знака производных соответственно (8) и (9).

Рассматривая соответствующие диапазоны частот, можно показать,

что при $\epsilon_3 > 0$ выполняется неравенство $\frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_1} > \epsilon_3$, т. е. нерезонансная ветвь существует и соответствует обыкновенной волне. Легко видеть, что выражение (9) при этом отрицательно. При $\epsilon_3 < 0$ для нерезонансной ветви в формулу (8) нужно подставить $\min(\epsilon_1 \pm \epsilon_2) > 0$. При этом выражение (8) положительно в диапазонах

$$\omega^* < \omega < \omega_0; \quad (13a)$$

$$\max(\omega^*, \omega_k^{(1)}) < \omega < \min(\omega_0, \Omega_{Hk+1}), \begin{cases} r \leq k < m, \Omega_{Hm} < \omega_0 < \omega_m^{(0)} \\ r \leq k \leq m, \omega_m^{(0)} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1} \end{cases} \quad (13b)$$

для сильно разреженной плазмы и в разреженной плазме на частотах

$$\max(\omega^*, \omega_N^{(1)}) < \omega < \omega_0, \begin{cases} r < N, \Omega_{HN} < \omega_0 < \omega_N^{(0)} \\ r \leq N, \omega_N^{(0)} < \omega_0 < \omega_H \end{cases}, \quad (13b)$$

где $\omega_k^{(1)}$ ($1 \leq k \leq N$) — корни уравнения (10); r — наибольшее число, для которого справедливо неравенство $\omega^* > \Omega_{Hk}$ ($k \leq r$, $1 \leq r \leq N$). Если $\omega^* < \Omega_{H1}$, то (8) положительно также в случае, когда

$$\omega^* < \omega < \Omega_{H1}, \quad (13c)$$

при этом в (13б), (13в) нужно положить $r = 1$. В плотной плазме (8)

положительно при $\omega_H^2 < \omega_0^2 < \frac{4}{3} \omega_H^2$ ($\omega_N^{(1)} < \omega_H$), если

$$\omega_N^{(1)} < \omega < \omega_H. \quad (13d)$$

В остальных случаях для нерезонансной ветви выражение (8) отрицательно.

Таким образом, для нерезонансной ветви $n^2(\theta, \omega)$, за исключением диапазонов (13), производная $\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} < 0$. На частотах, где вещественны корни (5) (за исключением диапазонов (13)), для нерезонансной дисперсионной ветви $\left| \frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} \right| < 1$ и по формуле (2) $\alpha \leq \theta$; в диапазонах же, где вещественны корни (6), $\left| \frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} \right| > 1$ и $\alpha \geq \theta$. Причем знак равенства имеет место только при $\theta = 0$ или $\pi/2$.

Резюме. Таким образом, в интервалах частот, где имеются плазменные резонансы, одна из ветвей $n_\infty^2(\theta)$ (резонансная) соответствует потоку излучения, заключенному в конус ($\epsilon_3 < 0$) или вне его ($\epsilon_3 > 0$), а вторая ветвь (нерезонансная, если она существует) соответствует излучению, вектор потока энергии которого в первом случае «захвачен» магнитным полем ($\alpha \leq \theta$), а во втором — отклоняется от него ($\alpha \geq \theta$). Исключением являются диапазоны (13), в которых поток излучения, соответствующий резонансной ветви, заключен в конус, а для нерезонансной ветви при возрастании θ угол α вначале убывает в отрицательную сторону до некоторого предела, а затем возрастает, проходя через нуль. Когда α и θ становятся одного знака, $\alpha < \theta$.

3. СВОЙСТВА $\alpha(\theta)$, КОГДА КОРНИ (5) И (6) КОМПЛЕКСНЫ

Если во всей плоскости (k_x^2, k_z^2) дисперсионные кривые (3) и (4) не имеют действительных точек ветвления, то обе асимптоты имеют отрицательный наклон, а дисперсионные кривые лежат в тупоугольных секторах, образованных пересечением асимптот. При этом очевидно, что для обеих ветвей производная $\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} < 0$.

Такой случай реализуется при $\epsilon_1 \epsilon_3 > 0$ на частотах (см. (7))

$$\omega_k < \omega < \Omega_{Lk}, \quad k \leq p < N; \quad (14a)$$

$$\max(\omega_0, \omega_k) < \omega < \Omega_{Hk+1}, \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq N-1, \quad 0 < \omega_0 < \Omega_{H1} \\ m \leq k \leq N-1, \quad \Omega_{Hm} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1} \end{cases}; \quad (14b)$$

$$\begin{cases} \omega_0 < \omega < \Omega_{H1} \\ \omega_N < \omega < \omega_H \end{cases}, \quad 0 < \omega_0 < \Omega_{H1} \quad (14b)$$

в сильно разреженной плазме и в разреженной плазме в диапазонах

$$\max(\omega_0, \omega_N) < \omega < \omega_H, \quad \Omega_{HN} < \omega_0 < \omega_H; \quad (14c)$$

$$\omega_N < \omega < \omega_L, \quad k \leq p = N. \quad (14d)$$

Диапазон (14 д) существует и в плотной плазме. Здесь p , как и выше,—наибольшее число, для которого выполняется неравенство $\omega_k < \omega^*$, $k \leq p$. В диапазонах (14 а), (14 д) и (14 б) — (14 г) соответственно

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} < 1 \quad (\epsilon_3 < 0) \text{ и } \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} > 1 \quad (\epsilon_3 > 0).$$

Резюме. Из рассмотренного выше следует, что наклон дисперсионной кривой ограничен наклоном асимптоты $\left(\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2}\right)_{ac} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}$. При этом,

когда $\epsilon_3 < 0$, $\left|\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2}\right| < 1$ и поток энергии необыкновенной волны «захвачен» магнитным полем ($\alpha \leq \theta$). Если же $\epsilon_3 > 0$, то $\left|\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2}\right| > 1$ и поток энергии для обеих волн отклоняется от магнитного поля ($\alpha \geq \theta$).

4. СВОЙСТВА $\alpha(\theta)$, КОГДА КОРНИ (5) И (6) ВЕЩЕСТВЕННЫ

Область вещественности корней (5) и (6) находится внутри диапазонов (7) и при одновременном выполнении неравенства $\epsilon_1 \epsilon_3 > 0$.

Если $\epsilon_3 < 0$, то этому условию удовлетворяют диапазоны

$$\Omega_{Hk} < \omega < \omega_k, \quad k \leq p < N; \quad (15a)$$

$$\Omega_{Hk} < \omega < \min(\Omega_{Lk}, \omega_0), \quad p < k \leq m, \quad \Omega_{Hm} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1} \quad (15b)$$

в сильно разреженной плазме и частоты

$$\Omega_{Hk} < \omega < \omega_k \quad k \leq p = N; \quad (15c)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_{Hk} < \omega < \min(\Omega_{Lk}, \omega_0), \quad p < k \leq N-1 \\ \Omega_{HN} < \omega < \min(\omega_L, \omega_0), \quad p < N \end{array} \right\} \quad (15d)$$

в разреженной плазме; в плотной плазме этому случаю соответствуют частотные интервалы

$$\Omega_{Hk} < \omega < \omega_k, \quad k \leq N, \quad \omega_0 > \omega_H; \quad (15d)$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_H < \omega < \omega_0, \quad \omega_H^2 < \omega_0^2 < 2\omega_H^2 \\ -\frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} + \omega_0^2} < \omega < \omega_0, \quad \omega_0^2 > 2\omega_H^2 \end{array} \right\}. \quad (15e)$$

Если $\epsilon_3 > 0$, то область вещественности корней (5) и (6) находится в диапазонах частот

$$\max(\omega_0, \Omega_{Lk}) < \omega < \omega_k, \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq k \leq N-1, \quad 0 < \omega_0 < \Omega_{H1} \\ m \leq k \leq N-1, \quad \Omega_{Hm} < \omega_0 < \omega_m^{(0)}; \\ m < k \leq N-1, \quad \omega_m^{(0)} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1} \end{array} \right. \quad (16a)$$

$$\omega_L < \omega < \omega_N, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \omega_0 < \Omega_{H1} \\ \Omega_{Hm} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1} \end{array} \right. \quad (16b)$$

в сильно разреженной плазме и в разреженной плазме на частотах

$$\max(\omega_0, \omega_L) < \omega < \omega_N, \quad \Omega_{HN} < \omega_0 < \omega_N^{(0)}. \quad (16\text{в})$$

Наряду с этим условию вещественности корней удовлетворяет диапазон

$$\omega_u < \omega < \omega_H \frac{\omega_0^2}{\sum_{k=1}^N \Omega_{0k}^2}, \quad \omega_u = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}, \quad (17)$$

который существует при любых соотношениях параметров плазмы, если только магнитное поле не очень мало.

Рассмотрим первоначально случай, когда $\epsilon_3 < 0$. При этом корни (5) положительны, а (6) отрицательны. Поэтому прохождение дисперсионной кривой через точки ветвления (5) (в области $k_x^2, k_z^2 > 0$) определяется знаком производной (8), где для диапазонов (15 а) — (15 г) нужно брать нижний знак, а для (15 е) — верхний. Это связано с тем, что при $\epsilon_3 < 0$ в (15 а) — (15 г) $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0$, а в (15 е) $\epsilon_1 - \epsilon_2 < 0$. При этом получаем, что в интервалах частот (15 а), (15 в), (15 д) выражение (8) отрицательно, а на частотах (15 б), (15 г) — положительно.

При условии $\omega_0^2 > \frac{4}{3} \omega_H^2$ (см. (13 д)) корень уравнения (10) $\omega_N^{(1)}$ попадает внутрь диапазона (15 е). Поскольку при $\omega > \omega_N^{(1)}$ производная (8) положительна, то на частотах

$$\left. \begin{array}{l} \omega_H < \omega < \omega_0, \quad \omega_H^2 < \omega_0^2 < \frac{4}{3} \omega_H^2 \\ \omega_N^{(1)} < \omega < \omega_0, \quad \omega_0^2 > \frac{4}{3} \omega_H^2 \end{array} \right\} \quad (18\text{а})$$

выражение (8) положительно, а в интервалах частот

$$\left. \begin{array}{l} \omega_H < \omega < \omega_N^{(1)}, \quad \frac{4}{3} \omega_H^2 < \omega_0^2 < 2\omega_H^2 \\ -\frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} + \omega_0^2} < \omega < \omega_N^{(1)}, \quad \omega_0^2 > 2\omega_H^2 \end{array} \right\} \quad (18\text{б})$$

отрицательно.

Рассмотрим теперь диапазоны (16) ($\epsilon_3 > 0$). В этом случае значения точек ветвления (5) отрицательны, а (6) — положительны. При этом вопрос о прохождении дисперсионной кривой (в области $k_x^2, k_z^2 > 0$) через точки ветвления (6) определяется знаком производной (9). В свою очередь, знак выражения (9) зависит от расположения корней уравнений (11) относительно диапазонов (16). На основе подробного анализа можно показать, что при $\epsilon_3 > 0$ эти корни находятся внутри диапазонов (16). В случае необыкновенной волны имеем

$$\omega_k^{(0)} < \omega < \omega_k^{(3)}, \quad \frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} < 0; \quad (19\text{а})$$

$$\omega_k^{(3)} < \omega < \omega_k^{(4)}, \quad \frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} > 0; \quad (19\alpha)$$

$$\omega_k^{(4)} < \omega < \omega_k, \quad \frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} < 0, \quad (19\beta)$$

а для обыкновенной волны —

$$\max(\omega_0, \Omega_{Lk}) < \omega < \omega_k^{(2)}, \quad \frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} < 0; \quad (19\gamma)$$

$$\max(\omega_0, \omega_k^{(2)}) < \omega < \omega_k^{(3)}, \quad \frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} > 0; \quad (19\delta)$$

$$\omega_k^{(3)} < \omega < \omega_k, \quad \frac{\partial k_x^2}{\partial k_z^2} \Big|_{k_z^2=0} < 0. \quad (19\epsilon)$$

Для случая сильно разреженной плазмы индекс « k » пробегает соответственно значения: $1 \leq k \leq N$, $0 < \omega_0 < \Omega_{H1}$; $m \leq k \leq N$, $\Omega_{Hm} < \omega_0 < \omega_m^{(0)}$, $m < k \leq N$, $\omega_m^{(0)} < \omega_0 < \Omega_{Hm+1}$, в случае разреженной плазмы значение индекса « k » нужно положить равным N , при этом для обыкновенной волны нужно иметь в виду, что частота Ω_{Lk} при $k = N$ есть нижнегибридная частота ω_L .

В диапазоне (17) для обеих волн производная (9) отрицательна.

Резюме. На основании результатов настоящего раздела можно сделать следующее заключение об угловой анизотропии плазмы.

1) При отрицательном наклоне дисперсионной кривой в случае, если дисперсионная кривая расположена между асимптотой и корнями (5) (интервалы частот (15 а), (15 в), (15 д); (18 б)), угол $\alpha \leq \theta$ и имеет место «прижимание» вектора S к вектору H_0 , т. е. «захват» потока энергии волны постоянным магнитным полем. В случае же, когда дисперсионная кривая лежит между асимптотой и корнями (6) (частоты (19 а), (19 в), (19 г), (19 е)) угол $\alpha \geq \theta$ и поток энергии S отклоняется от магнитного поля H_0 . В диапазоне частот (17) расположение дисперсионных ветвей относительно точек ветвления (5) и (6) определяется условием $\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} < \varepsilon_3$. Отсюда следует, что поток энергии не-обыкновенной волны «захвачен» магнитным полем ($\alpha \leq \theta$), а поток обыкновенной — отклоняется от него ($\alpha \geq \theta$).

2) В диапазонах частот, где производная (8) положительна, т. е. дисперсионная кривая проходит (в области $k_x^2, k_z^2 > 0$) через точки ветвления (5) (частоты (15 б), (15 г); (18 а)), при возрастании θ угол α уменьшается до некоторого предельного отрицательного значения, а затем возрастает, оставаясь все время меньше θ .

3) В случаях, когда производная (9) положительна, дисперсионная кривая проходит через точки ветвления (6) (диапазоны частот (19 б), (19 д)) и при убывании θ от $\pi/2$ до 0 угол α возрастает от $\pi/2$ до некоторого положительного предела, а затем убывает, оставаясь больше θ .

На частотах $\omega > \omega_H \frac{\omega_0^2}{\sum_{k=1}^N \Omega_{0k}^2}$ корни (5) и (6) мнимые и картина

угловой анизотропии становится аналогичной рассмотренной в разд. 3 для случая $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} < 1$. При этом для обыкновенной и необыкновенной волн $\alpha \leqslant \theta$ и поток энергии «захвачен» магнитным полем H_0 . Однако при очень больших частотах наклоны асимптот сближаются и гиперболы стремятся к прямой. Это соответствует переходу к изотропному распространению ($\alpha = \theta$).

5. ОБ УГЛОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ УЗКИХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПУЧКОВ ВОЛН

Рассмотрим теперь угловое распределение плотности потока энергии $S(\alpha)$. Такое рассмотрение возможно при следующих двух различных условиях: 1) задан сторонний ток (источник), 2) задается какой-либо компонент электромагнитного поля (например, $E_x = 1$) плоских волн, распространяющихся под различными углами к магнитной силовой линии. В первом случае речь идет о диаграмме направленности источника, которая не является сферически симметричной даже в изотропной среде. Для анизотропной среды такая задача рассматривалась в ряде работ (см., например, [5]). Во втором случае постановка задачи об угловом распределении потока энергии связана с анизотропными свойствами среды.

В системе координат, введенной в разд. 1 (связанной с волновым вектором), рассмотрим пучок волн с однородным спектром $E_x(k_x) = 1$. Интеграл Фурье (в фиксированной системе координат x' , y' , z), представляющий такой пучок, расходится. Однако его можно сделать сходящимся, если считать $E_x(k_x) = \exp\left(-\varepsilon \frac{c}{\omega} k_x\right)$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Иными словами, мы рассматриваем пучок волн со всюду однородным спектром, за исключением области больших k_x , где спектральная интенсивность резко падает*. Поле пучка при $z = 0$ равно

$$E_{x'}(x', y', z = 0) = I_1 + I_2, \quad (20)$$

где

$$I_1 = \frac{c^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \exp\left[-\varepsilon \frac{c}{\omega} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} - i(k_x x' + k_y y')\right] \sim$$

$$\sim \frac{\frac{\omega}{c} r}{\left(\varepsilon^2 + \frac{\omega^2}{c^2} r^2\right)^{3/2}},$$

* Это замечание нужно только для сходимости интеграла Фурье. Для распределения потока энергии по углу в диапазонах частот, где имеются плазменные резоны, спектр можно считать всюду однородным, так как при углах, соответствующих плазменным резонансам (большие $|k|$), поток энергии, как видно из (21), и без того мал.

$$I_2 = -\frac{c^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \frac{i \epsilon_2}{(n^2 - \epsilon_1)} \times \\ \times \exp \left[-\epsilon \frac{c}{\omega} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} - i(k_x x' + k_y y') \right], \\ r^2 = x'^2 + y'^2.$$

Из (20) следует, что $I_{1\max} = I_1 \left(r \sim \frac{c}{\omega} \epsilon \right) \sim \frac{1}{\epsilon^2}$ и $|I_2| \ll \frac{1}{\epsilon^2}$, т. е. мы рассматриваем узкие $\left(r \sim \frac{c}{\omega} \epsilon \right)$ аксиально-симметричные (относительно оси $z \parallel H_0$) пучки.

Для достаточно больших z , где уже несущественна интерференция волн, угловое распределение плотности потока энергии $S(\alpha)$ пучка имеет вид

$$S = \frac{c}{8\pi} n \frac{\epsilon_2^2}{(n^2 - \epsilon_1)^2} \sqrt{(1+M)^2 \sin^2 \theta + (1+\Delta)^2 \cos^2 \theta}; \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \equiv \frac{S_x}{S_z} = \operatorname{tg} \theta \frac{1+M}{1+L}, \quad (22)$$

где

$$M = \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_3 \epsilon_2^2 n^2 \cos^2 \theta} \left(n^2 - \frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_1} \right)^2,$$

$$L = \frac{n^2 - \epsilon_1}{\epsilon_2^2 n^2 \cos^2 \theta} \epsilon_1 \left(n^2 - \frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_1} \right).$$

В резонансных диапазонах частот из (21), (22) видно, что анизотропия потока энергии может быть настолько большой, что все излучение оказывается заключенным внутри или вне конуса, ось которого совпадает с магнитным полем H_0 (см. разд. 2).

Из формулы (22) следует, что при $\epsilon_3 < 0$ может существовать характерный угол θ_0 ($\theta_0 \neq 0$) при котором α обращается в нуль, т. е. θ_0 соответствует точке ветвления дисперсионной зависимости k_x^2 (k_z^2) (см. (5)). Отсюда следует, что участки кривой $n^2(\theta)$, расположенные в интервале углов $0 < \theta < \theta_0$ и $\theta_0 < \theta < \theta_{\text{рез}}$, есть соответственно ветви 2 и 1 функции k_x^2 (k_z^2) (см. формулу (3)). При этом для ветви 2 значения $\operatorname{tg} \alpha > 0$, а для ветви 1 $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Если $\epsilon_3 > 0$, то аналогичное утверждение справедливо для ветвей функции k_z^2 (k_x^2), в точке ветвления которой $\alpha = \pi/2$, а ветви 2 и 1 относятся к интервалам углов θ : $\pi/2 > \theta > \theta_0$ и $\theta_0 > \theta > \theta_{\text{рез}}$. Здесь угол, соответствующий точке ветвления, также обозначен через θ_0 .

Так как дисперсионная кривая в плоскости (k_x^2 , k_z^2) представляет собой гиперболу, то после точки ветвления наклон дисперсионной кривой (область $\frac{\partial k_z^2}{\partial k_x^2} > 0$) изменяется монотонно (возрастает в интервале углов $\theta_0 < \theta < \theta_{\text{рез}}$ при $\epsilon_3 < 0$ и убывает в интервале $\theta_0 > \theta > \theta_{\text{рез}}$ при

$\varepsilon_3 > 0$), приближаясь к наклону асимптоты. При этом из формулы (2) видно, что $|\alpha|$ монотонно возрастает. Таким образом, для ветви 1 $|\alpha|$ достигает наибольшей величины на границе «обрезания» ветви, т. е. при $\theta = \theta_{\text{рез}}$. Величину угла соответствующего конуса излучения можно получить из общей формулы (22), рассматривая ее при условии резонанса ($n^2 \rightarrow \infty$):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}}. \quad (23)$$

Величину же угла конуса, ограничивающего поток энергии волны дисперсионной ветви 2, можно найти, исследуя на экстремум выражение (2). Этот угол обозначим через α_2 .

На рис. 1–3 представлены зависимости $\alpha(\theta)$, $S(\alpha)$ и $\alpha_{1,2}(\omega)$, рассчитанные соответственно для диапазонов частот: $\omega \ll \Omega_H$, $\omega \gtrless \Omega_H$ (протонная плазма); $\omega_L < \omega < \omega_H$; $\omega_0 < \omega < \omega_u$. Эти зависимости получены для случая плотной среды ($\omega_0 > \omega_H$), что оправдано как в условиях космической, так и в большинстве случаев лабораторной плазмы. На рис. 1 а для частот $\omega^2 \ll \Omega_H^2$ график $\alpha(\theta)$ приведен лишь в области значений $\alpha > 0$. Однако при θ , близких к 90° , угол α проходит через нуль. Эта область не показана на рисунке из-за малых значений α ($|\alpha| \sim 10^{-3}$). Картина углового распределения потока энергии пучка получается из рис. 1–3 б) при вращении кривой $S(\alpha)$ вокруг оси z ($\alpha = 0$). На рисунках введены обозначения:

$$\delta = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} + \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}, \quad \beta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}.$$

Отметим еще одно интересное явление, которое имеет место в многокомпонентной плазме. Оно связано с особенностью угловой анизотропии плазмы вблизи так называемых частот «пересечения» ω_{xk} ($\varepsilon_2 = 0$). Рассмотрим сначала резонансную ветвь n_∞^2 . Из (22) получаем, что в малой окрестности частоты ω_{xk} $\left(-\frac{\varepsilon_2^2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_1} \ll 1\right)$ угол конуса

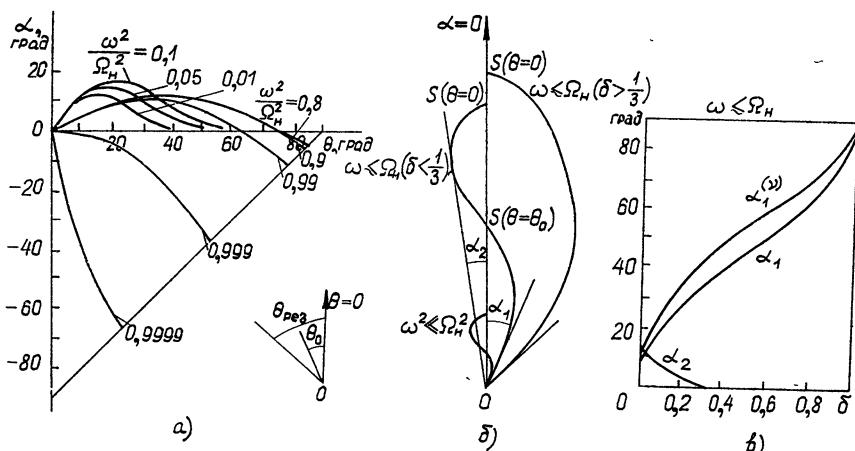


Рис. 1.

* Для ветви 1, как показано выше, $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Для угла конуса потока энергии в (23) взят модуль этого выражения.

излучения дисперсионной ветви $2 \operatorname{tg} \alpha_2 \sim |\epsilon_2|$, т. е. при $\omega \rightarrow \omega_{xk}$ угол $\alpha_2 \rightarrow 0$. Это означает, что действительная ветвь 2 исчезает и вся энергия распространяется в виде волн, соответствующих дисперсионной ветви 1 ($\alpha < 0$). Для этой ветви угол конуса излучения (см. (23)) по порядку величины такой же, как и в двухкомпонентной плазме ($\alpha_1 \sim 10^\circ$). Таким образом, в окрестности частот ω_{xk} поток энергии заключен в конус, угол которого (такой же (α_1, α_2)) значительно меньше соответствующего угла в двухкомпонентной плазме ($\alpha_2 = 12^\circ$), т. е. в окрестности частот «пересечения» значительно усиливается гидрование волны внешним магнитным полем.

Для нерезонансной ветви $n^2(\theta, \omega)$ при условии $\frac{\epsilon_2^2 \cos^2 \theta}{\epsilon_1^2 \sin^4 \theta} \ll 1$

$$\left(n^2 = \epsilon_1 - \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1 \sin^2 \theta} \right)$$

энергия распространяется квазизотропно ($\alpha \approx \theta$),

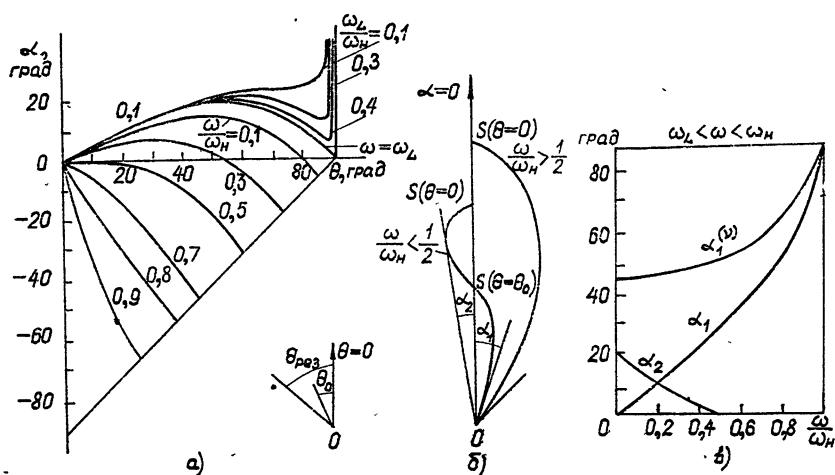


Рис. 2.

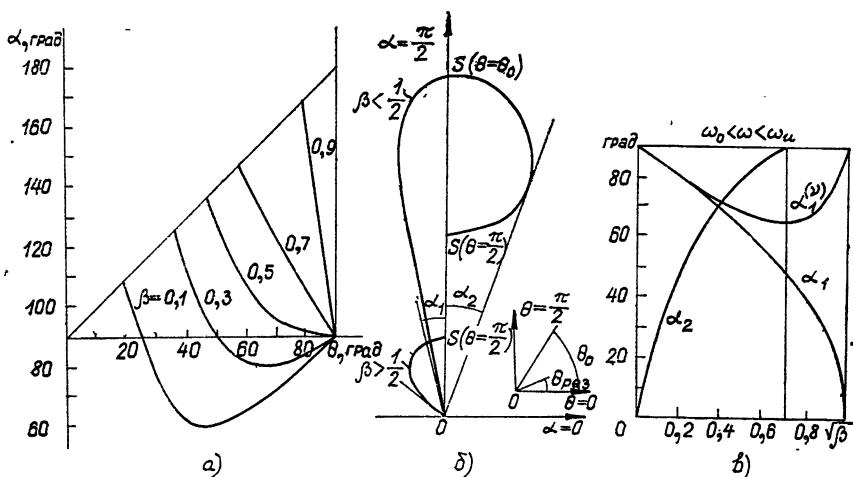


Рис. 3.

как и в плазме с одним сортом ионов [6], а при условии $\frac{\epsilon_2^2 \cos^2 \theta}{\epsilon_1^2 \sin^4 \theta} \gg 1$ $\left(n^2 = \epsilon_1 - \frac{|\epsilon_2|}{\cos \theta} \right)$ из (22) получаем, что $\alpha \approx \theta/2$; при малых θ квазиизотропность нарушается. Следовательно, в неоднородной среде в области взаимодействия волн ($\epsilon_2 = 0$) может происходить фокусировка или дефокусировка падающего пучка волн.

6. УГЛОВАЯ АНИЗОТРОПИЯ В БЛИЗИ ПЛАЗМЕННОГО РЕЗОНАНСА

Поскольку существование конической поверхности, ограничивающей поток излучения, связано с наличием резонанса (разрыв n^2), то очевидно, что угловая анизотропия сильно зависит от учета эффектов, ограничивающих n^2 . Введем частоту столкновений ν ($\nu \ll \omega$) и рассмотрим окрестность резонанса. В этой окрестности $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ и $|\mathbf{k}'| \sim |\mathbf{k}''|$. Вдали от границ рассматриваемых диапазонов частот (см. разд. 2) в тензоре диэлектрической проницаемости можно пренебречь ν , т. е. не учитывать диссипацию энергии*. Тогда $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ и $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{S} = 0$. Если задавать амплитуду волны на поверхности, проходящей через начало координат, то затухание определяется множителем $\exp(2\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})$. В направлении, параллельном вектору \mathbf{S} , затухание исчезает, т. е. энергия распространяется вдоль поверхности, которую можно рассматривать как границу раздела двух сред (на этой поверхности задана амплитуда волны). Это означает, что в окрестности плазменного резонанса существует поверхностная волна, затухающая во всех других направлениях. Угол, под которым эта волна распространяется по отношению к магнитному полю, равен

$$\operatorname{tg} \alpha_1(\nu) = \left(-\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{\epsilon_1 \epsilon_3} \right)^{1/2}.$$

Для условий, определенных в разд. 5, эта зависимость показана на рис. 1—3 в).

При гидровании волн в неоднородной среде и в кривом магнитном поле (например, ионные и электронные «свисты» в магнитосфере) волновой вектор может выйти за пределы резонансного конуса ($\theta = \theta_{\text{рез}}$) и стать комплексным. При этом объемная волна трансформируется в поверхностную волну, распространяющуюся вдоль резонансной поверхности (фронт волны «лежит» на этой поверхности, так как на ней фазовая скорость мала). Проходя некоторый путь в виде поверхностной волны, энергия может трансформироваться обратно в объемную и т. д. При этом всюду вектор потока энергии не выходит за пределы конической поверхности.

В заключение автор выражает благодарность Я. Л. Альперту за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, Изв. АН СССР, Серия физическая, 12, 241 (1948).
2. L. R. Storey, Philos. Trans. Roy. Soc., London A, 246, 113 (1953); Ann. Geophys., 14, 144 (1958).
3. R. L. Smith, J. Res. Nat. Bur. Stand., 64D, 505 (1960).
4. Ya. L. Al'pert, Space Science Rev., 6, 781 (1967).

* Считается, что фазовые скорости волн велики и затухание, связанное с движением частиц, мало.

5. Н. С. Беллюстин, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 17 (1975).
 6. Я. Л. Альперт, Волны и искусственные тела в приземной плазме, гл. 1, изд. Наука, М., 1974

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
31 мая 1976 г.

ANGULAR ANISOTROPY OF THE ENERGY FLUX OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A MULTI-COMPONENT MAGNETOACTIVE PLASMA

B. S. Moiseev

A mutual position of the vector of electromagnetic energy flux S and the wave vector k in a magnetoactive multicomponent and homogeneous plasma has been considered at the arbitrary relation of its parameters. The regions of "trapping" the energy flux S by the constant magnetic field H_0 are determined, i. e. the conditions and frequency ranges in which the vector S is adjacent to the vector H_0 ($\hat{H_0} \cdot S < \hat{H_0} \cdot k$). The conditions are found as well under which the vector S deflects from the magnetic field ($\hat{H_0} \cdot S > \hat{H_0} \cdot k$).

The angular distribution of the energy flux density of electromagnetic waves in a homogeneous magnetoactive plasma has been investigated. The frequency ranges where the whole energy flux is limited by a cone which axis coincides with the constant magnetic field. The cone angles determining the region of plasma transparency for the given frequency are calculated. The peculiarities of these dependences occurring in the multi-component plasma are discussed. It is shown that the account of electron-ion collisions near the plasma resonance in the hydrodynamic approximation results in appearance of a surface wave in the semiapparent region.

УДК 533.951

О НЕЛИНЕЙНОМ ЗАТУХАНИИ ЛАНДАУ ДЛЯ СИЛЬНОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

A. A. Веряев, B. N. Цытович

Получены общие формулы для торможения ленгмюровских солитонов и спайконов в неравновесной плазме, обусловленного процессами нелинейного затухания Ландау на пролетных частицах. Показано, что нелинейное затухание Ландау приводит к дополнительному дистанционному взаимодействию солитонов и спайконов.

1. Торможение ленгмюровских солитонов из-за процессов нелинейного затухания Ландау (индуцированного рассеяния на электронах и ионах) рассматривалось ранее в [1–3]. Однако при этом был рассмотрен случай равновесной плазмы. Вместе с тем в режиме сильной турбулентности функция распределения частиц скорее всего отличается от равновесной. Это сказывается в том, что не только появляются хвосты, соответствующие быстрым частицам [4], но и возникают также изменения в распределении частиц малых скоростей [5]. Настоящая работа посвящена исследованию процессов нелинейного затухания Ландау на пролетных частицах в неравновесной плазме. В [2, 3] рассматривалось торможение солитонов, взаимодействующих с отраженными частицами. Более строгое рассмотрение нелинейного затухания Ландау, учитывающее оба эти эффекта, может быть проведено в рамках используемой здесь кинетической модели. В работе исследовано также дистанционное взаимодействие ленгмюровских солитонов.

2. Для исследования сильных нелинейных движений в неравновесной плазме необходимо использование кинетической теории, построенной в [6]. Если в кубических нелинейностях пренебречь электронными нелинейностями, то динамические уравнения для ленгмюровского поля примут вид

$$\varepsilon_k E_k^+ = - \int \sum_{k, k_1} E_{k_1}^+ E_{k_2}^+ E_{k_3}^- \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3; \quad (1)$$

$$\sum_{k, k_1} = \frac{(k - k_1)^2}{4\pi n_0 m_e \omega_{pe}^2} \frac{\varepsilon_{k-k_1}^{(l)} (\varepsilon_{k-k_1}^{(e)} - 1)}{\varepsilon_{k-k_1}}. \quad (2)$$

Здесь E^+ и E^- — положительно и отрицательно частотные части ленгмюровского поля; $\varepsilon_k^{(e)}$ и $\varepsilon_k^{(l)}$ — электронная и ионная части полной диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(l)} + \varepsilon_k^{(e)} - 1$. В кинетическом подходе

$$\varepsilon_k^{(e,l)} = 1 + \frac{\omega_{p(e,l)}^2}{k} \int \frac{\frac{\partial \Phi^{(e,l)}}{\partial v}}{\omega - kv} dv,$$

$$\int \Phi^{(a)} dv = 1, \quad \omega_{pa}^2 = \frac{4\pi n_0 e_a^2}{m_a}. \quad (3)$$

Простоты ради здесь рассматривается одномерный случай. Когда $|E|$ имеет вид нелинейной волны, движущейся с постоянной скоростью v_0 , в уравнении (1) можно выделить члены, обязанные действительной части Σ_{k,k_1} :

$$\operatorname{Re} \sum_{k,k_1} \approx \frac{1}{4\pi n_0 T_e} \frac{1}{\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} - \frac{v_0^2}{v_s^2}}, \quad v_{T_l} \ll v_0 \ll v_{T_e}, \quad (4a)$$

$$v_s = v_{T_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2};$$

$$\operatorname{Re} \sum_{k,k_1} \approx \frac{1}{4\pi n_0 (T_e^{\text{eff}} + T_l^{\text{eff}})}, \quad v_0 \ll v_{T_l}, \quad (4b)$$

где $(T_a^{\text{eff}})^{-1} = -\frac{1}{m_a} \int \frac{1}{v-v_0} \frac{\partial \Phi^{(a)}}{\partial v} dv$ — эффективная температура, отличающаяся в общем случае от температуры T_a , определяемой по средней тепловой скорости $T_e = m_e \int v^2 \Phi^{(e)} dv (\int \Phi^{(e)} dv = 1)$ и входящей в выражение для линейной дисперсии ленгмюровских волн $\omega \approx \omega_{pe} + + 3k^2 T_e / 2\omega_{pe} m_e$. Вводя безразмерные величины $\tau = t/t_0$, $\xi = x/t_0 v_s$, $u = v_0/v_s$, $\epsilon = E^+(x, t) / \sqrt{4\pi n_0 T_e \mu}$, $\mu = 4m_e/3m_i$, $t_0 = 2/\mu\omega_{pe}$, $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$, получим из (4)

$$i \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \xi^2} = -\alpha |\epsilon|^2 \epsilon; \quad (5)$$

$$\alpha = \left(\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} - u^2 \right)^{-1}, \quad v_{T_l} < v_0 < \sqrt{\frac{T_e^{\text{eff}}}{m_l}}; \quad (6a)$$

$$\alpha = \frac{T_e}{T_e^{\text{eff}} + T_l^{\text{eff}}}, \quad v_0 \ll v_{T_l}. \quad (6b)$$

Решение (5) в виде уединенных импульсов (солитонов) имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\epsilon_0}{\operatorname{ch} \frac{\epsilon_0(\xi - u\tau)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}}} \exp \left[-i\Omega\tau + i\frac{u}{2}(\xi - u\tau) \right], \\ \Omega &= -\frac{u^2}{4} - \frac{\epsilon_0^2 \alpha}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Это решение обобщает известное решение [1] на случай произвольных распределений частиц. Заметим, что при уменьшении T_e^{eff} область существования солитонов (6 а) сужается и при $T_e^{\text{eff}} = T_l^{\text{eff}}$ обращается в нуль. Если и далее T_e^{eff} уменьшается, то имеются только солитоны с $v_0 < v_{T_l}$. Наконец, при $T_e^{\text{eff}} < 0$ в уравнении (6 а) правая часть всегда положительна, и поэтому солитоны, описываемые (7), существуют лишь

при $|T_e^{\text{eff}}| < T_i^{\text{eff}}$, $T_i^{\text{eff}} > 0$. Наоборот, когда T_e^{eff} увеличивается, то соответственно увеличивается и область существования солитонов, но при этом кубические нелинейности будут играть все меньшую роль, так как они пропорциональны $(T_e^{\text{eff}})^{-1}$, и нужно поэтому учитывать нелинейности пятой степени по полю. Спайконы, согласно [7], возникают только при условии $T_e^{\text{eff}} \gg T_e$ и $u^2 > T_e^{\text{eff}}/T_e$.

Число квантов N , энергия W и импульс P солитона задаются выражениями

$$N = \int |\varepsilon|^2 d\xi = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon_0}{\sqrt{\alpha}}, \quad (8)$$

$$W = \int \left(\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right|^2 - \alpha |\varepsilon|^4 + \frac{\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} + u^2}{2} - \alpha^2 |\varepsilon|^4 \right) d\xi = \quad (9)$$

$$= u^2 \varepsilon_0 \sqrt{\frac{1}{2\alpha} + \frac{\varepsilon_0^3 \sqrt{2\alpha}}{3}} \left[2\alpha \left(\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} + u^2 \right) - 3 \right];$$

$$P = \frac{1}{2} \int \left[i \left(\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \xi} \varepsilon - \varepsilon^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) + 2u \alpha^2 |\varepsilon|^4 \right] d\xi = \quad (10)$$

$$= u \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} + \frac{4}{3} u \varepsilon_0^3 \alpha \sqrt{2\alpha}$$

и являются интегралами движения, только если пренебречь мнимыми частями $\Sigma_{k,k}$.

3. Нелинейное затухание Ландау в данном подходе описывается мнимыми частями нелинейного матричного элемента (2). Учет $\text{Im } \Sigma_{k,k}$ приводит к дополнительным членам в правой части уравнения (5), которое, как легко видеть, приобретает вид

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \varepsilon = (-\alpha |\varepsilon|^2 + \delta v) \varepsilon, \quad (11)$$

где δv может быть интерпретирована как дополнительная вариация плотности, обязанная нелинейному затуханию Ландау. Из общих соображений легко видеть, что δv не может быть комплексной (это величина действительная). Это связано с тем, что часть $\Sigma_{k,k}$, ответственная за затухание Ландау, в фурье-представлении мима, но она, естественно, нечетна по ω . Проще всего рассчитать затухание солитонов в условиях, когда

$$\delta v \ll \alpha |\varepsilon|^2. \quad (12)$$

Тогда затухание представляет слабый эффект, и можно считать, что форма солитона остается в первом приближении неизменной, но его параметры u и ε_0 медленно меняются во времени. Определить зависимость этих параметров от времени проще всего, если найти зависимость от времени интегралов (8)–(10). Так как закон сохранения числа квантов справедлив для любого δv , то из (8) сразу имеем

$$\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\alpha}} = \text{const.} \quad (13)$$

Так как $T_e^{\text{eff}} = T_e^{\text{eff}}(u)$, то (13) описывает зависимость амплитуды от скорости. Для максвелловской плазмы $T_e^{\text{eff}} = T_e$ и зависимость α от u возникает только при $u > v_{T_i}$. При $u < v_{T_i}$ $\varepsilon_0 = \text{const}$. Второе уравнение получится, если рассчитать изменение импульса, при помощи (11):

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \int \delta v \frac{\partial |\varepsilon|^2}{\partial \xi} d\xi. \quad (14)$$

Используя (2), можно получить выражения для мнимых частей Σ_{k,k_1} : $\text{Im } \Sigma_{k,k_1} = \text{Im } \Sigma_{k,k_1}^{(i)} + \text{Im } \Sigma_{k,k_1}^{(e)}$, где $\text{Im } \Sigma_{k,k_1}^{(e)}$ описывает нелинейное затухание Ландау на электронах, а $\text{Im } \Sigma_{k,k_1}^{(i)}$ — соответственно на ионах.

4. Рассмотрим вначале затухание на электронах:

$$\begin{aligned} \text{Im } \sum_{k,k_1}^{(e)} &= \frac{1}{4 \left(1 - \frac{\omega_{pl}^2 m_i}{(k - k_1)^2 T_e^{\text{eff}}} \right)^2} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial v} \Bigg|_{v=\frac{\omega-\omega_1}{k-k_1}} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\omega - \omega_1}{4 \pi n_0 T_e} \left(1 - \frac{(\omega - \omega_1)^2}{(k - k_1)^2 v_s^2} \frac{m_i}{m_e} \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее из равенств (15) написано для максвелловского распределения. Отсюда легко получить

$$\delta v_k^{(e)} = v_k \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{m_e}{m_i} \frac{i u k}{|k|}} \Psi(u). \quad (16)$$

Здесь $\Psi(u) = -\sqrt{2\pi} \frac{v_{T_e}}{u} \frac{\partial \Phi(u v_s)}{\partial u} \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \frac{m_i}{m_e}$. Для максвелловского распределения $\sqrt{2\pi} \Phi(u v_s) v_{T_e} \approx \exp\left(-\frac{u^2 m_e}{2 m_i}\right)$ и $\Psi(u) = 1$. В (16) v_k — компонента Фурье вариации плотности в отсутствие нелинейного затухания Ландау. В первом приближении в (16) вместо v_k можно подставить величину изменения плотности в солитоне, т. е. $v_{k,\omega} = -\alpha |\varepsilon|_{k,\omega}^2$. Тогда

$$\delta v_{k,\omega}^{(e)} = -\frac{k \delta(\omega - ku)}{\text{sh} \frac{k \pi}{\varepsilon_0 \sqrt{2\alpha}}}. \quad (17)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta v^{(e)} &= \int \delta v_{k,\omega}^{(e)} e^{-i\omega\tau + ik\xi} d\omega dk = \\ &= \sqrt{\frac{\pi m_e}{2 m_i}} \frac{2 u \Psi(u)}{\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} - u^2} \int_0^\infty \frac{k \sin k(\xi - u\tau)}{\text{sh} \left(\frac{k\pi \sqrt{\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} - u^2}}{\varepsilon_0 \sqrt{2}} \right)} dk. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) и (7) в (14), получим

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{3\sqrt{2}\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{u \Psi(u) \varepsilon_0^4}{\left(\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} - u^2 \right)^2} = \quad (19)$$

$$= - \frac{3\sqrt{2}\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \alpha^2 \Psi(u) \varepsilon_0^4,$$

где $\zeta(3) = 1,08$ — дзета-функция Римана от аргумента 3. Полученный результат позволяет найти уравнение для изменения во времени скорости солитона и сравнить его с вычисленным ранее. Для слабых солитонов $\varepsilon_0 \alpha \ll 1$ $\left(\frac{E_0^2}{4\pi n_0 T_e \left(\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} - u^2 \right)} \ll \frac{m_e}{m_i} \right)$ можно воспользоваться первым членом правой части (10) для импульса солитона

$$P \approx u \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \quad (20)$$

и, так как $\varepsilon_0 \alpha^{-1/2} = \text{const}$, получить

$$\frac{du}{d\tau} = - \frac{3\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \alpha^{5/2} u \Psi(u) \varepsilon_0^3 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Для сильного солитона ($\varepsilon_0 \alpha \gg 1$)

$$P \approx \frac{4}{3} \varepsilon_0^3 \alpha \sqrt{2\alpha} u \quad (22)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} + 5u^2 \right) \frac{du}{d\tau} = - \frac{9}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{u \Psi(u)}{\sqrt{\alpha}} \varepsilon_0. \quad (23)$$

Для максвелловского распределения ($\Psi(u) \approx 1$) получим экспоненциальное затухание скорости при $u^2 \ll 1/\sqrt{5}$ с характерным временем

$$\tau = \frac{\pi^{5/2}}{3\zeta(3)} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0^{3/2}} & (\varepsilon_0 \ll 1) \\ \frac{4}{3} \frac{1}{\varepsilon_0} & (\varepsilon_0 \gg 1) \end{cases} \quad (24)$$

Наибольший интерес, естественно, представляет случай $\varepsilon_0 \gg 1$, так как только в этом случае проявляется модуляционная неустойчивость. Отметим также, что длина пробега солитона, имеющего начальную скорость u порядка единицы ($v_0 \approx v_s$), всегда много больше его ширины ξ_0 . Так, при $\varepsilon_0 \gg 1$

$$\xi = \frac{4\pi^{5/2}}{9\zeta(3)} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon_0} = 7,2 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon_0} \gg \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon_0} = \xi_0. \quad (25)$$

Аналогичный результат, но при учете взаимодействия солитонов с непролетными электронами получен в [3].

5. Рассмотрим теперь нелинейное затухание Ландау на ионах. Заметим, что для солитонов с $u \gg v_{T_i}$ оно экспоненциально мало. Поэтому его нужно учитывать только для медленных солитонов. Действительно, из (2) получим для максвелловского распределения ионов

$$\text{Im} \sum_{k,k_i}^{(I)} = \alpha^2 \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} u \exp \left(- \frac{u^2 T_e}{2 T_i} \right) \frac{1}{4\pi n_0 T_e}, \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{T_e}{T_e^{\text{eff}} + T_i}.$$

При $u \gg \sqrt{T_i/T_e} = u_*$ затухание экспоненциально мало. Из (26) получим

$$\delta v = \alpha^2 u \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} \exp\left(-\frac{u^2 T_e}{2 T_i}\right) \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \frac{k \sin k(\xi - u\tau)}{\sinh\left(\frac{k\pi}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)} dk. \quad (27)$$

Это приводит к следующему выражению для изменения импульса солитона:

$$\frac{dP}{d\tau} = -\frac{3\sqrt{2}\zeta(3)}{\pi^{5/2}} u \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} \alpha^4 \varepsilon_0^4 \exp\left(-\frac{u^2 T_e}{2 T_i}\right). \quad (28)$$

В частном случае слабого солитона $\varepsilon_0 \ll 1$ из (10) и (28) получим

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{3\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \varepsilon_0^3 \alpha^{9/2} u \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} \exp\left(-\frac{u^2 T_e}{2 T_i}\right), \quad (29)$$

а для сильного солитона $\varepsilon_0 \gg 1$

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{9\zeta(3)}{4\pi^{5/2}} \varepsilon_0 \alpha^{5/2} u \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} \exp\left(-\frac{u^2 T_e}{2 T_i}\right). \quad (30)$$

Результат (29) позволяет провести простое сравнение с результатом в [2]. Из (29) следует, что длина пробега солитона с $u \sim \sqrt{T_i/T_e}$ будет

$$\xi_{0d} \approx \tau_d \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} \approx \frac{\pi^{5/2}}{3\zeta(3)\alpha^{9/2}} \frac{1}{\varepsilon_0^3}, \quad (31)$$

или в размерных переменных

$$\begin{aligned} \lambda = \xi_{0d} t_0 v_s &= r_d \left(\frac{T_e + T_i}{T_e} \right)^{9/2} \frac{4\pi^{5/2}}{3\sqrt{3}\zeta(3)} \times \\ &\times \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{4\pi n_0 T_e m_e}{E_0^2 m_i} \right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (32)$$

где $r_d = v_{T_e}/\omega_{pe}$ — радиус Дебая.

В [2] получено

$$\lambda = 8\sqrt{3\pi} r_d (k_1 r_d)_{t=0} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{T_e + T_i}{T_i} \right)^{1/2} \left(\frac{4\pi n_0 T_e}{E_0^2} \right)^{3/2}. \quad (33)$$

Здесь k_1 определяется по групповой скорости $(k_1 r_d) \approx \frac{1}{3} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} u \Big|_{\tau=0}$.

Подставляя $u \Big|_{\tau=0} \approx \sqrt{\frac{T_i}{T_e}}$, получим из (33)

$$\lambda = \frac{8\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \left(\frac{T_e + T_i}{T_e} \right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{4\pi n_0 T_e m_e}{E_0^2 m_i} \right)^{3/2}. \quad (34)$$

Численные множители в (32) и (34) есть соответственно 12,47 и 8,19, а дополнительный множитель $[(T_e + T_i)/T_e]^4$ в пределе $T_e \gg T_i$, для ко-

торого, как видно из наших результатов, справедливо (34) дает фактор 1. Это говорит о том, что эффекты взаимодействия солитонов с пролетными и непролетными ионами при $T_e/T_i \gg 1$ и $\varepsilon_0 \ll 1$ оказываются одинакового порядка.

Наибольший интерес все же представляет случай $\varepsilon_0 \gg 1$. Из (29) найдем

$$\xi_0 = \tau_0 u|_{\varepsilon=0} \approx \tau_0 \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} \approx \frac{4 \pi^{5/2}}{9 \zeta(3) \alpha^{5/2}} \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{7.2}{\alpha^{5/2} \varepsilon_0}. \quad (35)$$

В плазме с $T_e = T_e^{\text{eff}} \gg T_i$, $\alpha \approx 1$ и длина пробега солитона за счет взаимодействия с пролетными частицами лишь в 5,14 раза больше его ширины. В изотермической плазме $T_e = T_i$, $\alpha = 1/2$ и пробег $\xi_0 = 40,72/\varepsilon_0$ по нашим вычислениям в 20,36 раза больше его ширины. Наконец, пробег (35) всегда существенно меньше пробега (25), т. е. солитон довольно долго тормозится, пока его скорость больше v_{T_i} , а затем весьма быстро останавливается до $u = 0$. Таким образом, полный пробег солитона необходимо оценивать не по формулам (32) и (33), а по формулам (24) и (25).

6. Прежде чем рассмотреть затухание быстрых ленгмюровских солитонов (спайконов), сделаем несколько замечаний относительно общих уравнений, описывающих спайконы.

Возможны случаи, когда нелинейности пятого порядка по полю становятся сравнимыми и даже превосходят кубические нелинейности. Именно в этом случае и возможно существование спайконов. Напомним, что согласно [7] спайконы возникают, если пренебречь кубическими нелинейностями в случае, когда $T_e^{\text{eff}} \gg T_e$, и для скоростей $u^2 > T_e^{\text{eff}}/T_e$. Они описываются уравнением

$$i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} = -\beta |\varepsilon|^4 \varepsilon, \quad (36)$$

$$\beta = \beta(u) = \frac{3}{4} \frac{(T_e^{\text{eff}})^3}{T_e^3 \left(u^2 - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \right)^3} \int \frac{\frac{v_{T_e}}{2v} - u}{\mu \sqrt[3]{3v_{T_e}}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\frac{v_{T_e}}{2v} - u}{\mu \sqrt[3]{3v_{T_e}}} \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv,$$

где Φ — функция распределения электронов. Вывод уравнения (36) аналогичен тому, который приводит к уравнению (5), описывающему солитоны из общего уравнения (1). Он приведен в Приложении 1. Решение (36) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\operatorname{ch} \left[2 \sqrt{\frac{\beta}{3}} (\xi - u\tau) \varepsilon_0^2 \right]}} \exp \left[-i \Omega \tau + i \frac{u}{2} (\xi - u\tau) \right], \quad (37)$$

$$\Omega = -\frac{u^2}{4} - \frac{\varepsilon_0^4 \beta}{3}.$$

Затухание спайконов в основном обязано мнимой части $(T_e^{\text{eff}})^{-1}$, хотя существует мнимая часть и у величины $(T_e^{\text{eff}})^{-2}$ (она введена в Приложении 1). Нелинейное затухание Ландау в правой части уравнения (36) дает дополнительный член $\delta \varepsilon$. Величина $\delta \varepsilon$ вычислена в Приложении 1. Отсюда следует сохранение числа квантов при наличии затухания:

$$N = \int |\varepsilon|^2 d\xi = \frac{3}{V\beta(u)} \int \frac{d\xi}{\operatorname{ch} \xi} = \frac{\pi \sqrt{3}}{2 V\beta(u)} = \text{const.} \quad (38)$$

Таким образом, в отличие от медленных солитонов в данном случае неизменной остается скорость спайкона. Поэтому нелинейное затухание Ландау сводится к уменьшению его амплитуды ε_0 . Вместе с тем, уравнение (36) имеет место лишь при достаточно больших амплитудах. С уменьшением амплитуды кубические нелинейности, которые в данном случае имеют противоположный знак, станут сравнимыми с нелинейностями пятой степени по полю. Учесть нужно и то, что $\delta\rho$, обязанное мнимым частям нелинейного отклика пятой степени по полю $\Sigma_{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5}$, при больших T_e^{eff} может быть сравнимо с самой величиной ρ , обязанной действительным частям Σ' при приближении к порогу существования спайконов. Легко видеть поэтому, что спайконы должны быть короткоживущими в согласии с численными расчетами. Поступая аналогичным образом, как и при выводе затухания солитонов, определим изменение амплитуды спайкона во времени. Находим вариацию плотности $\delta\rho_{k\omega}$:

$$\delta\rho_{k\omega} = \beta\rho_{k\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{T_e^{\text{eff}}} = - \frac{i 3 u^2 \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{k}{|k|} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \Psi(u) \rho_{k\omega}}}{u^2 - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e}}, \quad (39)$$

где $\rho_{k\omega} = -\frac{3k}{8} \frac{\delta(\omega - ku)}{\operatorname{sh} \left(\frac{k\pi}{4\varepsilon_0^2} \sqrt{\frac{3}{\beta}} \right)}$ — спектральное разложение величины ρ .

В пространственном представлении в безразмерных переменных

$$\delta\rho = \frac{9}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{m_e}{m_i}} u^3 \frac{\Psi(u)}{u^2 - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e}} \int_0^\infty \frac{k \sin k(\xi - u\tau)}{\operatorname{sh} \left(\frac{k\pi}{4\varepsilon_0^2} \sqrt{\frac{3}{\beta}} \right)} dk. \quad (40)$$

Используя выражение (61), а также формулу для энергии спайкона (63) (Приложение 1), нетрудно получить

$$\frac{d\varepsilon_0}{d\tau} = - \frac{27\zeta(3)}{4\sqrt{6}\pi^{5/2}} V\beta \varepsilon_0^3 u^2 \Psi(u) \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} = -\Theta \varepsilon_0^3. \quad (41)$$

Легко теперь оценить время затухания спайкона

$$\tau = \frac{2}{\Theta \varepsilon_0^2}. \quad (42)$$

Заметим, что с ростом временного параметра τ амплитуда спайкона изменяется все медленнее. Обсудим некоторые черты проявления нелинейного затухания Ландау, обусловленные неравновесностью плазмы. Характер изменения энергии спайкона зависит от знака Ψ при скорости $v \sim u \sqrt{m_e/m_i} v_{T_e}$. Когда знак Ψ отрицательный, получается раскачка. Так как скорость спайкона остается постоянной, то происходит рост его амплитуды ε_0 . Для солитонов в этом случае при $u^2 - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$

использованные методы разложения становятся несправедливыми. Возможно в этом пределе $\left(u^2 \rightarrow \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \right)$ солитоны начнут размываться.

7. Рассмотрим далее другие возможные эффекты, к которым может приводить нелинейное затухание Ландау. К их числу в первую очередь нужно отнести эффекты, которые возникают при наличии большого числа солитонов. Известно, что в отсутствие затухания Ландау заметным взаимодействием является только ближнее взаимодействие, которое возникает, когда солитоны перекрываются. При этом возможно слияние солитонов. Процесс слияния можно исследовать по излучению звука при пересечении солитонов [8]. Дополнительное δv , связанное с затуханием Ландау, приводит к дополнительному излучению звука. Дополнительная компонента Фурье звука, обязанная этому процессу, равна

$$\delta v_{k\omega}^{(s)} = -i \frac{k^4}{(\omega^2 - k^2)^2} \left(\frac{\pi m_e}{2 m_i} \right)^{1/2} \frac{\omega}{|k|} \Psi_{k\omega}, \quad (43)$$

где $\Psi_{k\omega}$ — величина, определяемая компонентами Фурье полей двух сталкивающихся солитонов, приведена в [8]. Расчет дополнительного излучения звука при пересечении двух солитонов дает

$$\begin{aligned} \delta W^{(s)} = & \frac{\pi^4}{4} \frac{m_e}{m_i} \left\{ \int \frac{k^6}{2} (\Psi_{k|k|} \Psi_{-k-|k|} + \Psi_{k-|k|} \Psi_{-k|k|}) dk - \right. \\ & - \int k^8 (\Psi'_{k|k|} \Psi'_{-k-|k|} + \Psi'_{k-|k|} \Psi'_{-k|k|}) dk + \int |k|^7 (\Psi'_{k|k|} \times \\ & \times \Psi_{-k|k|} - \Psi_{k|k|} \Psi'_{-k-|k|} - \Psi'_{k-|k|} \Psi_{-k|k|} + \Psi_{k-|k|} \Psi'_{-k|k|}) dk \left. \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Штрих означает производную по частоте. Звук излучается на тех же частотах, на каких излучался без учета затухания Ландау. Дополнительная излученная энергия, как и следовало ожидать, в m_e/m_i раз меньше основного результата. Звук по-прежнему излучается интенсивно при условии $\varepsilon_{01} \approx \varepsilon_{02}$.

8. Интерес представляет дистанционное взаимодействие между солитонами, которое возникает при наличии нелинейного затухания Ландау и полностью отсутствует при неперекрытии солитонов без затухания Ландау. Действительно, обозначив через ξ_1 положение одного из солитонов ($\xi_1 = \xi_{10} + \int_0^\tau u_1 d\tau$, где ξ_{10} — его начальное положение в момент $\tau = 0$), получим, что создаваемая им вариация плотности δv из-за нелинейного затухания Ландау будет ($T_e = T_e^{\text{eff}}$),

$$\delta v(\xi, \tau) = \left(\frac{\pi}{2} \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{2u_1}{1-u_1^2} \int_0^\infty \frac{x \sin x (\xi - u \tau)}{\operatorname{sh} \frac{\pi x (1-u_1^2)^{1/2}}{\varepsilon_0 \sqrt{2}}} dx, \quad (45)$$

где u_1 — скорость этого солитона, $v_{T_i}/v_s \ll u_1 < 1$. Если $|\xi - \xi_1| \gg \xi_0 = \frac{(1-u_1^2)^{1/2}}{\varepsilon_0 \sqrt{2}}$, т. е. расстояние намного превосходит ширину солитона, то

$$\delta v(\xi, \tau) = -\sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{m_e}{m_i} \frac{u_1 \varepsilon_{01}}{1-u_1^2} \frac{1}{\xi_1 - \xi}}, \quad (46)$$

т. е. воздействие одного солитона на другие не падает экспоненциально с увеличением расстояния, а падает лишь, как $1/\xi$. Из (46) видно, что солитон впереди себя $\xi > \xi_1$ ($u_1 > 0$) создает увеличение плотности, которое убывает с ростом расстояния, как $1/\xi$. Покоящийся солитон не создает такого взаимодействия. Вычисляя изменение импульса одного солитона под воздействием другого, найдем систему уравнений, описывающих взаимодействие и индивидуальное торможение каждого из солитонов. Рассмотрим в качестве примера предел $v_{T_i}/v_s \ll u \ll 1$. Получим для двух солитонов, считая $u_1 = d\xi_1/d\tau$, $u_2 = d\xi_2/d\tau$, $T_e = T_e^{\text{eff}}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} &= -\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{\varepsilon_{02}}{\varepsilon_{01}^2 (\xi_1 - \xi_2)^2} \frac{d\xi_2}{d\tau} - \frac{18\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \varepsilon_{01} \frac{d\xi_1}{d\tau}, \\ \frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} &= -\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{02}^2 (\xi_1 - \xi_2)^2} \frac{d\xi_1}{d\tau} - \frac{18\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \varepsilon_{02} \frac{d\xi_2}{d\tau}. \end{aligned} \quad (47)$$

Система (47) не интегрируется до конца. В общем виде возможно найти лишь первый интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{d\tau} - \frac{\varepsilon_{01}^3}{\varepsilon_{02}^3} \frac{d\xi_1}{d\tau} &= \frac{\varepsilon_{01}}{\varepsilon_{02}} \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} - \frac{18\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \varepsilon_{02} \times \\ &\times \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \xi_2 + \frac{\varepsilon_{01}^4}{\varepsilon_{02}^3} \frac{18\zeta(3)}{\pi^{5/2}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \xi_1 + C. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь C — константа интегрирования.

Вероятно, наиболее интересно проявление дистанционного взаимодействия, когда один из солитонов много больше другого. Возможно в данном случае легкий солитон будет сильно увлекаться тяжелым. Взаимодействие в динамике легмюровских солитонов, по-видимому, может играть существенную роль, если взаимное расстояние между солитонами оказывается меньше их пробега в плазме.

9. Рассмотрим теперь ряд следствий, связанных с нелинейным затуханием Ландау для трехмерных движений. Заметим, что самосжатие трехмерных ямок плотности [9] должно обычно начинаться с звуковых скоростей. Более того, начальные скорости такого самосжатия существенно меньше v_{T_i} . На этом этапе дистанционное взаимодействие окажется весьма существенным, так как нелинейное затухание Ландау на ионах, как было показано, весьма значительно. Такое взаимодействие будет препятствовать изоляции ямок плотности и образованию так называемых каверн. Дополнительное $\delta v(\xi, \tau)$ в уравнении поля имеет вид

$$\delta v(\xi, \tau) = -\sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \frac{d\xi' v(\xi', \tau)}{4\pi(\xi - \xi')^2}}. \quad (49)$$

Уравнение, учитывающее такое взаимодействие, приобретает вид.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\xi \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta_\xi \right) E(\xi, \tau) &= -\operatorname{div}_\xi \left\{ \frac{T_e}{T_e^{\text{eff}}} |E(\xi, \tau)|^2 + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \frac{d\xi' |E^+(\xi', \tau)|^2}{4\pi^2 |\xi - \xi'|^2} \frac{T_e}{T_e + T_i}} \right\} E(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (50)$$

При условии $u \gg v_{T_i}/v_s$ нелинейное затухание Ландау определяется электронами. Имеем

$$\delta v(\xi, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{3\mu}{8\pi}} \int \frac{v(\xi', \tau)(\tau - \tau')}{(\xi - \xi')^4 |\tau - \tau'|} d\tau' d\xi'. \quad (51)$$

Насколько нам известно, роль указанных интегральных членов в проблеме саморазрежений плотности не анализировалась. Члены (51) могли бы быть особенно существенны в сверхзвуковой области сжатия, которая, как известно, очень чувствительна к малым возмущениям. Новый тип взаимодействия должен приводить к дополнительному излучению звука трехмерными движениями. Для автомодельных сверхзвуковых самосжатий типа найденных в [9]

$$v = \frac{\tau^2}{\xi^2} \Phi\left(\frac{\xi}{\tau^{2/3}}\right) \quad (52)$$

излучение звука должно иметь место и без дополнительного взаимодействия, обвязанного затуханию Ландау. Действительно, в случае, если саморазрежение начинается со скоростью, близкой к v_s и $\tau_0 = 1$, $\xi \sim 1$ на границе сжимающейся области, то, считая при $\tau = \tau_0$ $v = 1$ в сфере $|\xi| < 1$, легко вычислить компоненту Фурье плотности (52) v_k . Имеем

$$v_k |_{k=1} = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^1 \frac{\sin(k|\xi|\tau^{2/3})}{k|\xi|\tau^{2/3}} \xi^2 d\xi d\tau e^{-i|k|\tau}. \quad (53)$$

Эта величина входит в полную излученную энергию звука

$$W^s = 8\pi^5 \int (v_{k+k} v_{-k-k} + v_{k-k} v_{-k+k}) k^2 dk, \quad (54)$$

которая получается методом, изложенным в [8]. Подставив (53) в (54), получим (Приложение 2), что в звук уходит 90% от запасенной энергии, что указывает на несамосогласованность решения (52), пренебрегающего излучением звука в процессе образования каверн. В соответствии с этим наиболее вероятным должно быть такое сжатие, скорость которого не превосходит скорости звука. Но тогда интегральное взаимодействие (50) будет существенным. По-видимому, взаимное влияние соседних каверн может заключаться в потере устойчивости автомодельности сжатия.

В заключение выражаем благодарность А. С. Кингсепу за замечания к работе, способствовавшие ее улучшению.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В общем случае уравнение Пуассона в фурье-представлении с учетом нелинейностей, пропорциональных пятой степени поля, запишем так:

$$\begin{aligned} \epsilon_k E_k^+ = - \int \Sigma'_{k, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5} E_{k_1}^+ E_{k_2}^+ E_{k_3}^- E_{k_4}^+ E_{k_5}^- \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5) dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 dk_5. \end{aligned} \quad (55)$$

Напомним, что $k = \{k, \omega\}$. Используя стандартное разложение кинетического уравнения, можно прийти к следующему выражению для $\Sigma'_{k, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5}$:

$$\Sigma'_{k, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5} = \frac{1}{2(T_{\text{eff}}')^2} \frac{\epsilon_{k-k_1}^{(i)}}{\epsilon_{k_2+k_3}} \frac{\epsilon_{k_2+k_3}^{(i)}}{\epsilon_{k_4+k_5}} \frac{\epsilon_{k_4+k_5}^{(i)}}{\epsilon_{k_1+k_6}} \frac{1}{(4\pi n_0)^2}, \quad (56)$$

где $(T'_{\text{eff}})^{-2} = \frac{1}{m_e^2} \int \frac{1}{v-v_0} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{v-v_0} \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv$. Определим величины ν_k и ρ_k следующим образом:

$$\nu_{k'} = - \frac{1}{4\pi n_0 T'_{\text{eff}}} \frac{\varepsilon_{k'}^{(i)}}{\varepsilon_{k''}} \int E_{k_1}^+ E_{k_2}^- dk_2 dk_3 \delta(k' - k_2 - k_3); \quad (57)$$

$$\rho_{k'''} = - \frac{\varepsilon_{k'''}^{(i)}}{\varepsilon_{k''}} \int \nu_{k'} \nu_{k''} \delta(k''' - k' - k'') dk' dk''. \quad (58)$$

Здесь $k''' = k - k_1$, $k'' = k_4 + k_5$, $k' = k_2 + k_3$. Тогда уравнение сводится к

$$\varepsilon_k E_k^+ = \int \rho_{k-k_1} E_{k_1}^+ dk_1 = (\rho E^+)_k. \quad (59)$$

Переход от k представления к обычному пространственному приводит от уравнений (57) — (59) к следующей системе:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} &= \rho \varepsilon, \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2} - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} &= - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \beta' \nu^2, \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial \tau^2} - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} |\varepsilon|^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь β' и ранее введенная величина β связаны следующим соотношением: $\beta = \frac{\beta'}{\left(u^2 - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e}\right)^3}$. Введение величин ρ и ν приводит к тому,

что вместо одного интегродифференциального уравнения в пространственном представлении получается система трех дифференциальных уравнений. Если нужно учесть кубическую нелинейность, то это легко сделать, записав в первом из уравнений (60) нелинейный член в виде $(\rho + \nu)\varepsilon$. Система (60) сводится к уравнению (36), если искать решение в виде уединенного всплеска.

Укажем теперь, как получить один из интегралов системы (60), соответствующий энергии нелинейного возмущения, описываемого (60).

Умножим на $\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \xi}$ продифференцированное по ξ первое из уравнений (60). Сложим полученное с сопряженным ему выражением и проинтегрируем по ξ . Введя величину U , удовлетворяющую $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = - \frac{\partial U}{\partial \xi}$, а сле-

довательно, согласно (60), и $\frac{\partial U}{\partial \tau} = - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \beta' \nu^2$, и используя аналогичные соотношения для гидродинамической скорости w ($\frac{\partial w}{\partial \xi} = - \frac{\partial \nu}{\partial \tau}$; $\frac{\partial w}{\partial \tau} = - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} |\varepsilon|^2$), легко выделить выражение, производная от которого по времени равна нулю.

$$W = \int \left(\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right|^2 + \rho |\varepsilon|^2 + Uw + \nu p \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e} - \frac{\beta' y^3}{3} \right) d\xi. \quad (61)$$

Ради полноты изложения приведем интеграл системы (60), соответствующий импульсу возмущения. Получается он аналогично (61):

$$P = \frac{1}{2} \int \left[i \left(\varepsilon \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial \xi} - \varepsilon^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) + 2(\rho w + \nu U) \right] d\xi. \quad (62)$$

Используя (37), можно найти выражения величин W и P для спайков:

$$W_{sp} = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{3}{\beta}} u^2 - \frac{\pi}{2} \sqrt{3\beta} \frac{u^2 \varepsilon_0^4}{u^2 - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e}}; \quad (63)$$

$$P_{sp} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3}{\beta}} u - \frac{2\pi \sqrt{3\beta}}{u^2 - \frac{T_e^{\text{eff}}}{T_e}} \varepsilon_0^4. \quad (64)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Покажем, как вычислить (54). (54) при учете (53) сводится к вычислению интеграла

$$W^s = 2 \int \cos x(\tau - \tau') \frac{\sin \xi x \tau^{2/3}}{\xi x \tau^{2/3}} \frac{\sin \xi' x \tau'^{2/3}}{\xi' x \tau'^{2/3}} \times \\ \times \xi^2 d\xi \xi'^2 d\xi' d\tau d\tau' dx. \quad (65)$$

Границы интегрирования следующие: по τ , τ' , ξ , ξ' — от 0 до 1, по x — от 0 до ∞ . Нужно освободиться в (65) от произведения тригонометрических функций. Затем, интегрируя несколько раз по частям по τ и τ' , можно интеграл свести к следующим трем:

$$I_1 = 9\pi \int_0^1 d\tau \int_0^1 d\tau' \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 d\xi' \left(\tau^{1/3} + \frac{2}{3}\xi \right) \left(\tau'^{1/3} + \frac{2}{3}\xi' \right) \times \\ \times \delta(\tau - \tau' + \xi \tau^{2/3} - \xi' \tau'^{2/3}),$$

$$I_2 = 18 \int_0^\infty dx \int_0^1 d\tau \int_{-1}^1 d\xi' \int_{-1}^1 d\xi \sin [x(\tau - 1 + \xi \tau^{2/3} - \xi')] \times \\ \times \frac{\tau^{1/3} + \frac{2}{3}\xi}{x} \xi \xi',$$

$$I_3 = \frac{9}{2} \int_0^\infty dx \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 d\xi' \frac{\cos x(\xi - \xi') - \cos x(\xi + \xi')}{x^2} \xi' \xi,$$

I_2 и I_3 интегрируются тривиально, а I_1 — при помощи подстановки

$$x = \tau^{1/3} + \xi, \quad x' = \tau'^{1/3} + \xi', \quad y = \tau^{2/3}, \quad y' = \tau'^{2/3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Рудаков, ДАН СССР, **207**, 823 (1972).
2. В. В. Горев, А. С. Кингисеп, ЖЭТФ, **66**, 2048 (1974).
3. В. В. Горев, А. С. Кингисеп, Физика плазмы, **1**, 601 (1975).
4. В. В. Горев, Л. И. Рудаков, Письма в ЖЭТФ, **21**, 532 (1975).
5. Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **64**, 1261 (1973).
6. Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **70**, 1785 (1976).
7. Ф. Х. Хакимов, В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
8. A. N. Lebedev and V. N. Tsytovich, Physica Scripta, **11**, 266 (1975).
9. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **62**, 1745 (1972).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
5 июля 1976 г.

**NONLINEAR LANDAU DAMPING FOR STRONGLY-NONLINEAR WAVES
IN PLASMA**

A. A. Veryaev, V. N. Tsytovich

General formulas are obtained for the breaking of Langmuir solitons and spikons in a nonequilibrium plasma due to the process of nonlinear Landau damping by transient particles. The nonlinear damping is shown to result in a distant interaction between solitons and spikons.

УДК 551.510 535

ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НАГРЕВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ МЕТОДОМ ЧАСТИЧНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

В. А. Иванов, Г. П. Комраков, З. Н. Кротова, В. А. Рыжов

По данным измерений интенсивности частичных отражений на частоте $f = 5,75 \text{ МГц}$ получена величина относительных потерь энергии электронов δ при соударениях с тяжелыми частицами. Для температуры электронов $T_e = (250 \div 400) \text{ К}$ измеренная величина δ равна $(3 \pm 1,8) \cdot 10^{-3}$.

Основным параметром в элементарной теории, который характеризует нагревную нелинейность, является средняя относительная доля энергии δ (T_e), теряемая электроном при соударении с тяжелыми частицами. Ионосферные измерения δ обычно связаны с интерпретацией явлений самовоздействия и кроссмодуляции радиоволн. В настоящей работе приведены результаты измерений потерь энергии электронов методом частичных отражений. Сущность измерений δ этим методом заключается в том, что наблюдения частичных отражений выполняются в условиях «подсветки» ионосферы мощными радиоволнами [1, 2]. Из сравнения интенсивностей частичных отражений в сеансах наблюдений с «подсветкой» и без «подсветки» ионосферы можно получить сведения о величине δ .

Эксперимент проводился в г. Горьком на установке, которая состояла из двух передатчиков и комплекса приемной аппаратуры для регистрации частичных отражений. Один из передатчиков служит для нагрева электронного газа в D -, E -слоях ионосферы и имеет следующие характеристики: эквивалентная мощность излучения $P_1 G_1 \approx 25 \text{ МВт}$, частота $f_1 = 4,6 \text{ МГц}$, длительность импульса $\tau_1 = 2,7 \text{ мс}$, частота повторения импульсов $F_1 = 10 \text{ Гц}$, поляризация излучаемой волны — «необыкновенная». Частичные отражения создаются вторым передатчиком. Его параметры:

$$P_2 G_2 \approx 140 \text{ МВт}, \quad \tau_2 = 50 \text{ мкс}, \quad F_2 = 10 \text{ Гц}, \quad f_2 = 5,75 \text{ МГц},$$

поляризация — линейная и запуск импульса производится с запаздыванием $\Delta\tau = 2,5 \text{ мс}$ относительно переднего фронта «греющего» импульса. Здесь P — мощность передатчика и G — коэффициент усиления антенны. При сравнительно небольшой длительности импульса второй передатчик вызывает заметные эффекты нагрева электронов в ионосфере. Легко показать, что в случае $\delta v_0 \tau_2 \ll 1$ возмущение температуры электронов при вертикальном зондировании ионосферы

$$\Delta\Theta_{\pm} = (\Theta - 1)_{\pm} \approx \frac{E_{\pm}^2}{E_p^2} \frac{\delta v_0 \tau_2}{(1 \pm f_H/f_2)^2}, \quad (1)$$

где $\Theta = T_e/T$, T_e и T — температуры электронов и тяжелых частиц, E_p — плазменное поле, E_{\pm} — амплитуда поля обыкновенной (+) и необыкновенной (—) компоненты излучения; f_H — гирочастота электро-

нов и ν_0 — эффективная частота столкновений электронов с молекулами в невозмущенной ионосфере. Как следует из выражения (1), возмущения температуры $\Delta\Theta_2 = \Delta\Theta_+ + \Delta\Theta_-$ уменьшаются с высотой по экспоненциальному закону. Наибольшие возмущения температуры электронов возникают на высотах $h \sim 75-85$ км. Согласно оценкам величина $\Delta\Theta_2 \approx 0,7$ и $\Delta\Theta_2 \approx 0,1$ соответственно на высотах $h = 75$ км и $h = 85$ км. Изменения температуры электронов, обусловленные действием поля $E_1 \sim \sqrt{P_1}$, достигают на тех же высотах соответственно величин $\Delta\Theta_1 \sim 0,5$ и $\Delta\Theta_1 \sim 0,2$. Таким образом, в общем случае необходимо учитывать воздействие на ионосферную плазму поля $E_2 \sim \sqrt{P_2}$. В отсутствие внезапных ионосферных возмущений частичные отражения на частоте $f_2 = 5,75$ МГц принимаются обычно с уровней рассеяния, расположенных выше 70—75 км. Здесь же находится максимум температуры электронов $\Theta_1 (P_1)$. Выше максимума характерный пространственный масштаб изменений температуры порядка 10—15 км. Для приема и регистрации сигналов обратного рассеяния использовалась аппаратура, описание которой приведено в работе [3]. Наблюдения частичных отражений проводились в полуденные часы с длительностью отдельного сеанса не менее 10 минут. На рис. 1 показаны снимки двух осциллограмм частичных отражений: (а) — без нагрева ($t < 0$), б) — с нагревом ($t > 0$), разделенных во времени моментом включения «греющего» передатчика ($t \geq 0, P_1 \neq 0$). Видно, что внешние различия в характере поведения частичных отражений несущественны. Количественные изменения интенсивностей рассеянных волн в «нагретой» ионосфере обнаруживаются только при усреднении интенсивностей по времени. На рис. 2 приведены средние экспериментальные зависимости $A(h) = (\overline{A_0^2}/\overline{A_x^2})^{1/2}$ (время указано местное). Здесь A_0 и A_x — амплитуды частично отраженных обычной и необыкновенной волн. Черта сверху означает усреднение по времени. Пунктирная кривая (1) относится к случаю $P_1 = 0$, а зависимость (2) соответствует сеансам с дополнительной «подсветкой» ионосферы ($P_1 \neq 0$). За время с 9^{35} до 12^{08} было проведено четыре сеанса на-

30.04.76 г.

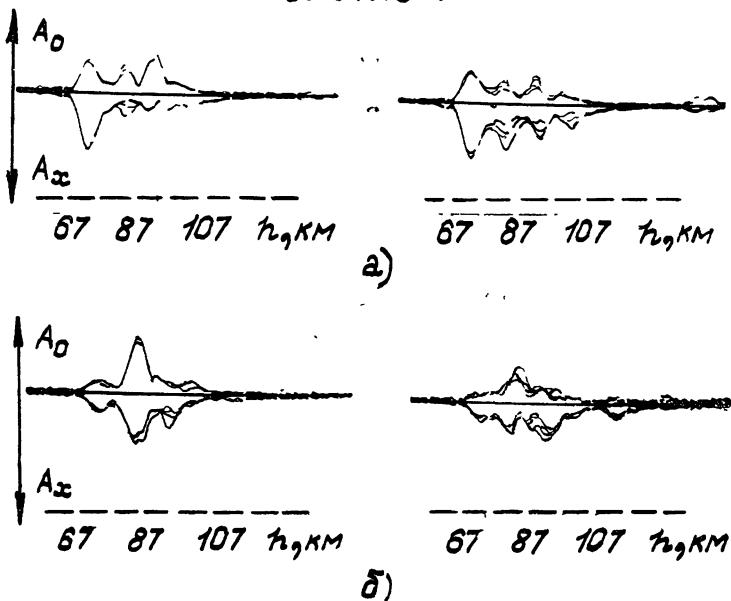


Рис. 1.

блодений частично отраженных сигналов с «подсветкой» D -слоя и четыре сеанса без «подсветки». Длительность каждого сеанса была порядка 10—15 минут. Сеансы наблюдений с нагревом и без нагрева ионосферы проводились последовательно. Зависимости $A(h)$ отношения интенсивностей рассеянных волн, полученные в отдельных сеансах измерений, затем усреднялись по всем четырем сеансам. Именно эти средние зависимости $A(h)$ представлены на рис. 2. Как известно, отношение средних интенсивностей рассеянных волн и коэффициент корреляции их амплитуд позволяют найти концентрацию электронов $N_0(h)$ и частоту столкновений $\nu_0(h)$ в D -слое [4]. Однако корреляционный метод очень чувствителен к влиянию радиопомех на результаты измерений электронной концентрации. Поэтому в описываемом эксперименте профиль $N_0(h)$ находился из сравнения дифференциального поглощения обычной и необычной волн, имея в виду, что профиль $\nu_0(h)$ известен с относительной точностью $\sim 20\text{--}30\%$ [5]. Обработка экспериментальных данных заключалась в нахождении электронной концентрации по невозмущенной зависимости (1), которая использовалась для определения возмущенного профиля частоты столкновений из соответствующей зависимости (2) (см. рис. 2). При этом предполагалось, что концентрация электронов не изменяется в течение 1—2 сеансов наблюдений. Для линейной зависимости частоты столкновений электронов с молекулами от температуры отношение $\nu(h)/\nu_0(h)$ определяет относительную температуру электронов в D -слое. Полученный из эксперимента невозмущенный профиль электронной концентрации приведен на рис. 3 (пунктирная кривая (1)). Здесь же показан профиль $\nu_0(h)$. Из сравнения функций $A(h)$ для невозмущенной и возмущенной ионосферы можно найти величину $N = N_0 \nu/\nu_0$. Зависимость этой величины от высоты показана на рис. 3 сплошной линией. Видно, что изменения частоты столкновений почти во всей области высот превышают ошибки измерений, т. е. эффект нагрева электронов очевиден. Погрешность измерений концентрации N_0 сильно зависит от уровня помех, который нестационарен во времени. Имея в виду это обстоятельство, в качестве ошибки измерений можно взять относительную величину среднеквадратичных отклонений электронной концентрации в различных сеансах от среднего профиля $N_0(h)$. Как показывают измерения, величина отклонений

$\frac{\sqrt{\Delta N^2}}{N_0}$ находится в пределах 0,3—0,4. Эта оценка погрешности содержит, очевидно, ошибки измерений и средние изменения профиля $N_0(h)$

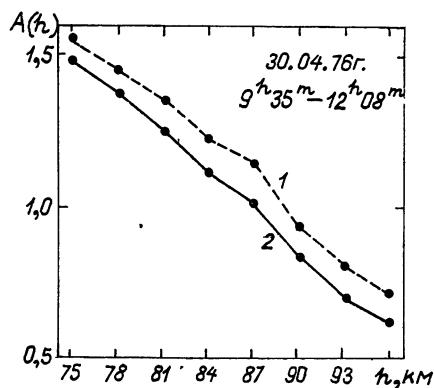


Рис. 2.

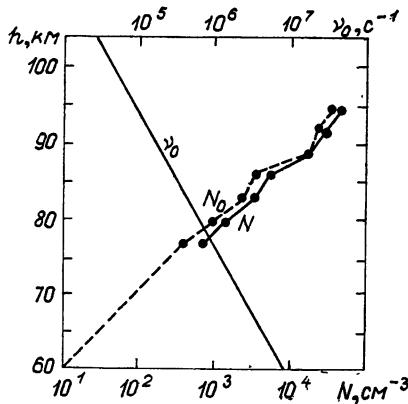


Рис. 3.

за время продолжительности наблюдений. Полученная из эксперимента эффективная температура электронов $\Theta(h) = T_e/T = v/v_0$ показана на рис. 4 (пунктирная линия). Следует иметь в виду, что зависимость $\Theta(h)$ представляет среднюю температуру электронов в объеме рассеяния, вертикальный размер которого $L = \frac{c\tau_2}{2}$. Как видно из рис. 4, эффект нагрева электронов особенно заметно проявляется в области высот 75—85 км. Колебания температуры электронов по высоте безусловно связаны с ошибками измерений. Причем, характерный масштаб амплитуды колебаний может служить мерой этих ошибок. Для сравнения с экспериментом были получены численные решения уравнения температуры электронов при учете самовоздействия волны в D-слое. При длительности импульса $\tau_1 = 2,7 \text{ мс}$ температура электронов ниже 95 км устанавливается на стационарном уровне. Выше 95 км возмущения температуры малы и по существу не контролируются при эквивалентной мощности $P_1 G_1 \leq 25 \text{ МВт}$.

Расчетные зависимости температуры электронов $\theta_2(h)$ для нескольких значений $\delta = \text{const}$ показаны на рис. 4 (сплошные линии). При выполнении расчетов использовался экспериментальный профиль электронной концентрации, приведенный на рис. 3. На высотах ниже 75 км профиль выбран в соответствии с результатами других измерений концентрации электронов [6]. Температура электронов в интервале 75—90 км зависит, конечно, от концентрации электронов N_0 ниже 75 км, однако расчеты показывают, что эта зависимость несущественна для вариаций $\Delta N_0/N_0 \leq 0,5$. Как видно из рис. 4, расчетная величина температуры близка к экспериментальной при $\delta \sim 10^{-3}$. Для более точной оценки δ существенным является то обстоятельство, что поле передатчика частичных отражений оказывает заметное воздействие на ионосферную плазму. При $\delta v_0 \tau_2 \ll 1$ величина возмущений температуры $\Delta \Theta_2$ не зависит от величины δ и эти возмущения можно рассчитать по формуле (1). При этом поглощение волны в D-слое достаточно учесть в приближении линейной теории. При учете возмущений $\Delta \Theta_2$ связь температуры электронов $\Theta_1(h)$ с экспериментальными характеристиками определяется соотношением

$$\Theta_1(h) = \frac{v}{v_0} - \Delta \Theta_2, \quad (2)$$

где $v/v_0 = \Theta(h)$ — температура электронов, определяемая из эксперимента. Сравнение экспериментальных и расчетных величин Θ_1 приводит

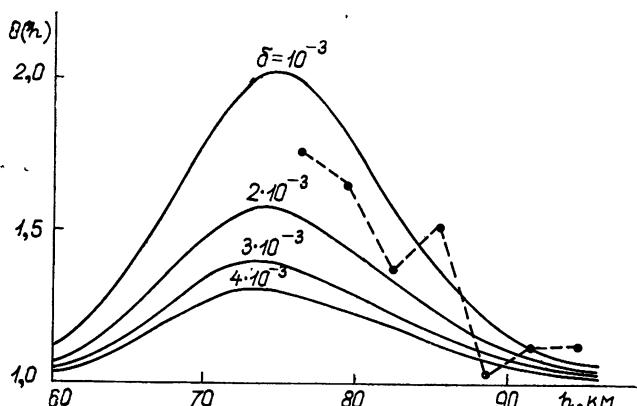


Рис. 4.

к значениям $\delta = (3 \pm 1,8) \cdot 10^{-3}$ *. Погрешность оценки δ складывается из ошибок измерений и погрешности теоретического расчета температуры электронов. Экспериментальная ошибка температуры $\Theta = v/v_0$ определяется точностью измерений электронной концентрации. Как показывает анализ дисперсии отношения A_0/A_x в отдельных сеансах наблюдений, а также сравнение средних величин $A(h)$ в различных сеансах, относительная ошибка $|\Delta A|/A$ составляет $(2 \div 3) \cdot 10^{-2}$ в интервале 75—90 км. При $h \sim 75$ км величина $|\Delta A|/A \approx 3 \cdot 10^{-2}$ на нижней границе измерений. Это связано с увеличением отношения полезный сигнал/помеха на этих высотах. При учете ошибки $|\Delta A|/A$ точность измерений электронной концентрации $|\Delta N|/N$ составляет 0,2—0,3. Средняя относительная ошибка определения параметра δ ниже 90 км 0,4—0,6. Выше 90 км эта ошибка резко возрастает, так как возмущения температуры электронов здесь очень малы ($\Delta\Theta/\Theta \ll |\Delta N|/N$ и $\Delta\delta/\delta \sim 1$).

В заключение отметим, что увеличение точности измерений δ может быть связано с более оптимальным выбором параметров экспериментальной установки $\tau_2 = 15—20$ мкс, $f_2 = 2—3$ МГц, $P_1 G_1 = 100—300$ МВт.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Рыжов, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 2, 196 (1972).
2. В. В. Писарева, В. А. Рыжов, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 10, 1490 (1973).
3. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 9, 1452 (1971).
4. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 5, 695 (1972).
5. Л. А. Скребкова, Геомагнетизм и аэрономия, 15, № 4, 664 (1975).
6. K. Maeda, J. Geomagn. Geoelectr., 23, 133 (1971).
7. W. A. Kissick, Ionospheric Research, Scientific Report. № 361 (1976).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
25 октября 1976 г.

MEASUREMENTS OF THE PARAMETERS OF HEAT NONLINEARITY IN THE LOWER IONOSPHERE BY THE PARTIAL REFLECTION METHOD

V. A. Ivanov, G. P. Komrakov, Z. N. Krotova, V. A. Ryzhov

The relative energy losses of electrons δ during collisions with heavy particles are obtained from the measurement data of intense partial reflections at the frequency $f = 5.75$ MHz. For the electron temperature $T_e = (250 \div 400)$ K the measured value of δ is equal to $(3 \pm 1.8) \cdot 10^{-3}$.



* Современные кроссмодуляционные измерения дают величину $\delta = (2 \div 4) \cdot 10^{-3}$ [7].

УДК 551.510.535

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В ИОНОСФЕРЕ КРОССМОДУЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ

З. Н. Кротова, В. А. Рыжов, И. С. Шлюгер

Приведены результаты экспериментального исследования взаимодействия импульсных радиоволн в ионосфере на частотах 1—5 МГц. В рамках элементарной теории по данным измерений глубины кроссмодуляции импульсов получен основной параметр нагревной нелинейности в D-слое. Измерения указывают на наличие температурной зависимости средних относительных потерь энергии электронов при соударениях с тяжелыми частицами. Для температуры электронов $T_e \sim 3 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^3$ К величина этих потерь равна $(1,8-3,4) \cdot 10^{-3}$.

Явление кроссмодуляции радиоволн лежит в основе одного из современных методов исследования нижней ионосферы. В частности, при взаимодействии сравнительно слабых волн кроссмодуляционный метод используется для измерений электронной концентрации в D-слое [1]. Если поле одной из взаимодействующих волн существенно превышает характерное плазменное поле для тепловых эффектов, то появляется возможность выполнения детальных измерений параметров, характеризующих тепловую нелинейность в ионосфере. Результаты экспериментального исследования нелинейных явлений, которые возникают в D-, E-областях ионосферы при распространении очень мощного радиоимпульса, подробно описаны в работе [2]. В настоящей статье рассматриваются дополнительные результаты кроссмодуляционных измерений, выполненных на той же установке в 1972—1973 гг. Цель этих измерений состояла в том, чтобы получить данные о величине средней относительной доли энергии, теряемой электронами при столкновениях с нейтральными молекулами в D-слое.

1. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для исследования нагревной нелинейности был поставлен эксперимент, который состоял из цикла измерений параметров кроссмодуляции сопутствующих импульсов. Этот тип кроссмодуляции характеризуется тем, что возмущаемый импульс распространяется с некоторым запаздыванием относительно возмущающего импульса. Он позволяет исследовать процессы релаксации и квазистационарные возмущения температуры электронов в ионосфере. Традиционная схема взаимодействия встречных импульсов для условий описываемого эксперимента в значительной мере утрачивает преимущества из-за большой длительности возмущающего импульса. В эксперименте возмущения температуры электронов возникали в результате воздействия на ионосферу мощного импульсного излучения на частоте $f_0 = 1,35$ МГц при длительности импульса $T_i = 600$ мкс и плавном изменении мощности передатчика P на 20 дБ. При этом поперечный масштаб возмущенной области на уровне E-слоя составляет 40—50 км*.

* В D-слое поле мощного передатчика достигает наибольшей величины $\sim 10 E_p$. Более полные сведения о параметрах передатчика приведены в работе [2].

Зондирование «нагретой» ионосферы осуществлялось импульсами ионосферной станции длительностью $\tau_i = 100 \text{ мкс}$. Тактовые частоты мощного передатчика и ионосферной станции были соответственно равны 25 и 50 Гц. Возмущающая волна имела «обыкновенную» поляризацию, зондирующий импульс — линейную. Осциллограммы отраженных импульсов ионосферной станции фотографировались камерой с наибольшей частотой съемки 10 кадров в минуту. При таком способе регистрации ионосферных отражений разрешающая способность приемника по глубине кроссмодуляции была не менее 1%. Наблюдения кроссмодуляции импульсов проводились в диапазоне частот ионосферной станции $f = (1,8—5) \text{ МГц}$. При вертикальном зондировании диапазон ограничен сверху частотами, для которых ионосфера становится прозрачной, а на частотах ниже 1,8 МГц оказывается существенным влияние помех на измерения параметров кроссмодуляции.

Кроссмодуляцию импульсов можно характеризовать параметром $R = \ln \frac{A_0}{A}$, где A и A_0 — амплитуды принимаемых отраженных импульсов ионосферной станции, которые распространяются в возмущенной и невозмущенной ионосфере. В идеальном случае методика измерений заключается в том, чтобы снять характеристику $R(f, \tau, P)$ за время наблюдения меньше или порядка характерного времени изменения средних параметров ионосферы ($\sim 10^3 \text{ с}$). Здесь P — мощность передатчика, выраженная в децибелах (0 дБ соответствует максимальной мощности передатчика), и τ — время запаздывания зондирующего импульса относительно возмущающего импульса. Отсчет времени запаздывания ведется от момента $\tau = 0$, который соответствует началу процесса релаксации температуры электронов в среде. В действительности, за время наблюдений параметры ионосферы изменяются, так как время одного сеанса, необходимое для снятия набора дискретных характеристик $R_{ikl}(f_i, \tau_k, P_l)$, составляло обычно 1—2 часа. Удлинение сеансов наблюдений связано с одной, ранее не отмечавшейся, особенностью кроссмодуляции импульсов. Эксперимент показывает, что кроме флюктуаций амплитуд A и A_0 , обусловленных случайными неоднородностями ионосферы, наблюдаются значительные флюктуации коэффициента кроссмодуляции*. На рис. 1 показана серия осциллограмм зондирующих импульсов на частоте $f = 1,8 \text{ МГц}$ при мощности «возмущающего» передатчика $P = -7 \text{ дБ}$. Промежуток времени между съемками двух соседних осциллограмм здесь занимает около 10 с. Из рис. 1 видно, как изменяются во времени амплитуды импульсов и их отношение $x = \frac{A_0}{A}$ ($x > 1$). На частотах $\sim 2 \text{ МГц}$ флюктуации отношения амплитуд обычно больше, чем на частотах 3—5 МГц. Аналогичная картина наблюдается при увеличении мощности передатчика. Для мощности $P > -15 \text{ дБ}$ относительный среднеквадратичный уровень

флюктуаций коэффициента кроссмодуляции $\frac{\sqrt{\Delta R^2}}{R}$ изменяется в пред-

лах от 0,1 до 0,15 (черта означает усреднение величин по времени). Наличие флюктуаций x означает, что случайные процессы $A(t)$ и $A_0(t)$ не коррелированы полностью. На рис. 2 показана зависимость коэффициента корреляции амплитуд от мощности передатчика. Видно, что коэффициент корреляции существенно отличается от единицы при

* Этот термин введен для обозначения величины параметра $R = \ln \frac{A_0}{A}$.

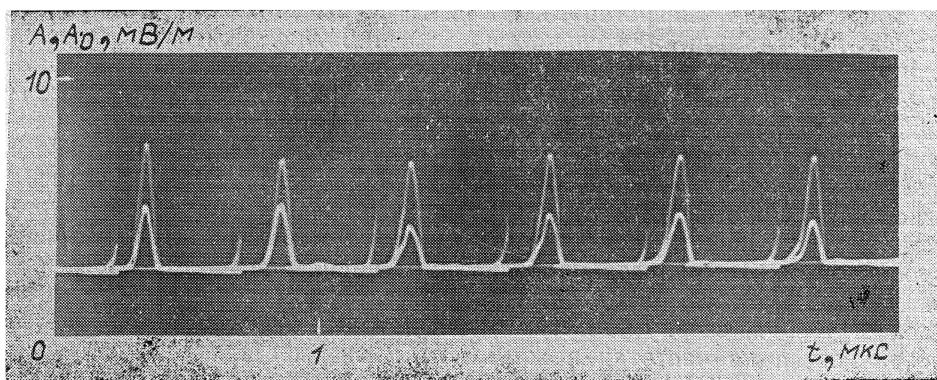


Рис. 1.

$P > -7 \text{ дБ}$. Для дальнейшего анализа полученные характеристики $R_{ikl}(t)$ усреднялись за время $\Delta t \sim 2-5 \text{ мин.}^*$. Рассмотрим основные результаты эксперимента. Усредненный коэффициент крос modуляции $R(f, \tau, P)$ характеризует процессы релаксации и квазистационарные возмущения температуры электронов. Измерения показывают, что процесс релаксации можно описывать соотношением

$$R(f, \tau, P) = R(f, 0, P) e^{-\tau/\tau_0}. \quad (1)$$

Величина τ_0 характеризует эффективный процесс релаксации температуры электронов. В отличие от [2] этот параметр в пределах погрешности измерений не зависит от частоты зондирования и мощности передатчика, но очень существенно зависит от времени наблюдений. Введенное в работе [2] время релаксации $\tau_{\text{рел}}$ сильно зависит от частоты и мощности P (см. рис. 14 [2]). Несовпадение параметров $\tau_{\text{рел}}$ и τ_0 объясняется некоторым различием в физическом содержании этих понятий.

Величина $\tau_{\text{рел}}$ определяется не только физическими процессами в ионосфере, но зависит также от чувствительности приемника ионосферной станции по глубине крос modуляции. При определении параметра τ_0 согласно формуле (1) чувствительность приемника исключается (по крайней мере для мощности $P > -15 \text{ дБ}$). На рис. 3 приведена зависимость τ_0 от времени суток. Суточный ход времени релаксации является следствием того, что высотное распределение температуры электронов в поле мощной волны зависит от электронной концентрации в D -слое.

В утренние часы концентрация электронов ниже 80 км мала и эффективный нагрев электронов происходит на больших высотах, где характерные масштабы времени нагревных процессов быстро растут**. Напротив, вблизи местного полудня по мере роста средней электронной концентрации в слое максимум температуры

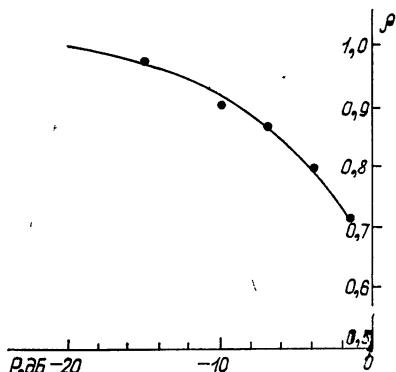


Рис. 2.

ниже 80 км мала и эффективный нагрев электронов происходит на больших высотах, где характерные масштабы времени нагревных процессов быстро растут**. Напротив, вблизи местного полудня по мере роста средней электронной концентрации в слое максимум температуры

* Знак усреднения в дальнейшем опускается

** Крос modуляционные измерения выполнялись в период декабря 1972 г. и января 1973 г.

электронов понижается и находится где-то в области высот 75—80 км [2, 3]. Эти представления подтверждаются измерениями величины R . Например, в полдень коэффициент кроссмодуляции превышает величину параметра, измеренного в утренние часы. Отсюда следует, что в полдень менее всего существенна нестационарность процесса установле-

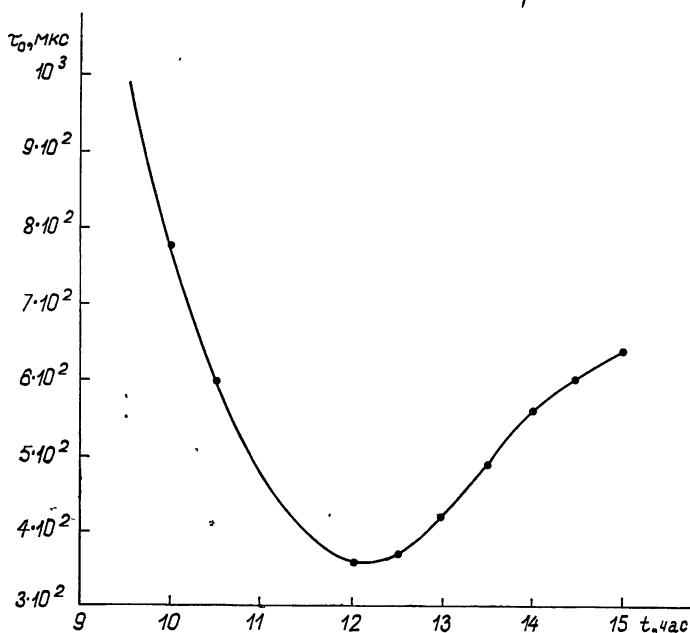


Рис. 3.

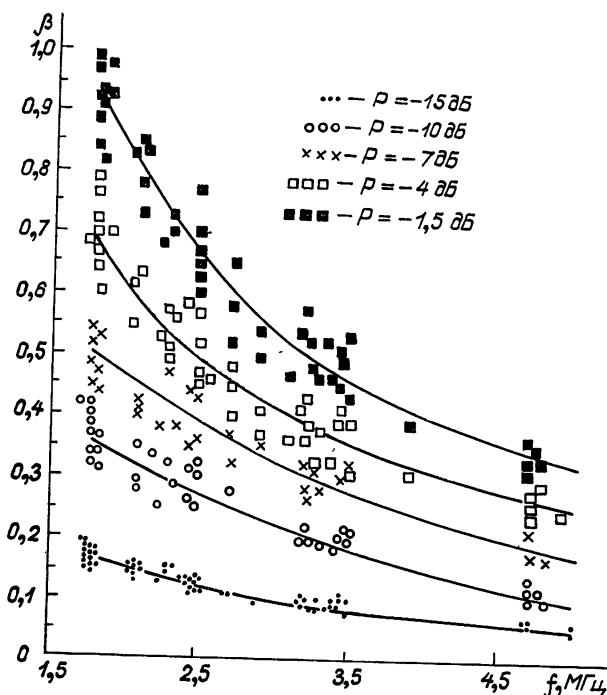


Рис. 4.

ния температуры электронов. Частотная зависимость коэффициента кроссмодуляции $R(f, 0, P)$ представлена на рис. 4. Здесь приведены данные измерений в промежутке 10—15 часов местного времени. Разброс значений параметра R обуславливается ошибками измерений, а также изменением условий распространения зондирующих импульсов в ионосфере в различные сеансы наблюдений. Утренние сеансы наблюдений (8—10 часов) были исключены из рассмотрения. Это связано с тем, что интерпретация утренних сеансов требует учета различных экспериментальных факторов, которые усложняют расчет параметров тепловой нелинейности. Во-первых, вариации коэффициента кроссмодуляции и времени релаксации минимальны в полдень. Приведенная на рис. 3 зависимость $\tau_0(t)$ получена в результате усреднения времени релаксации в различных сеансах измерений. Для утренних сеансов величина τ_0 составляет 500—1000 мкс, в 14—15 часов она находится в пределах от 450 до 700 мкс. Наименьший разброс величины τ_0 наблюдается в полдень: время релаксации изменяется в интервале 300—400 мкс. Во-вторых, утром наиболее сильно проявляется нестационарность процесса нагрева электронов. В-третьих, следует иметь в виду, что прием отраженных импульсов происходил без разделения обыкновенной и необыкновенной волн. Очевидно, наиболее благоприятными являются такие условия измерений, когда одна из поляризаций отсутствует при приеме сигналов. В полдень линейное поглощение необыкновенной волны на 15—30 дБ превышает поглощение обыкновенной волны ($f = 5 \text{ МГц}$). Эта оценка получена в результате пересчета на частоту $f = 5 \text{ МГц}$ экспериментальных данных о поглощении радиоволн на частотах 2,2; 4,1 и 8,9 МГц [4]. Пересчет поглощения на частоту $f = 5 \text{ МГц}$ выполнен в предположении, что отклоняющее поглощение для необыкновенной волны составляет 30% от полного линейного поглощения. Таким образом, необыкновенная компонента отсутствует в период дневных наблюдений кроссмодуляции (в 10—14 часов).

2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРОССМОДУЛЯЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Коэффициент кроссмодуляции зависит от величины, пространственной формы и расположения возмущений электронной температуры в ионосфере, которые возникают под действием поля мощной волны. Если не детализировать условия распространения зондирующих импульсов, то коэффициент кроссмодуляции

$$R(f, 0, P) = \frac{\omega}{c} \int (\chi - \chi_0) dh, \quad (2)$$

где $\omega = 2\pi f$, χ и χ_0 — показатели поглощения волны в возмущенной и невозмущенной ионосфере. В соответствии с замечаниями в предыдущем разделе предположим, что ионосферная станция принимает обыкновенную волну. В квазипротодольном приближении показатель поглощения обыкновенной волны

$$\chi \approx \frac{1}{2\omega} \frac{\omega_p^2 v}{(\omega + \omega_L)^2 + v^2}, \quad (3)$$

где $\omega_L = \omega_H \cos \alpha$, v — эффективная частота столкновений электронов с молекулами, ω_H — гирочастота электронов, ω_p — плазменная частота электронов, α — угол между волновым вектором и вектором напряженности постоянного магнитного поля. Если вариации температуры электронов таковы, что соблюдается условие $(\omega + \omega_L)^2 \ll v^2$, то коэф-

фициент кроссмодуляции $R(f) \approx \text{const}$. При соблюдении обратного условия $(\omega + \omega_L)^2 \gg v^2$ параметр $R(f) \sim (\omega + \omega_L)^{-2}$. Реальные условия эксперимента приводят к сильному ограничению класса функций $R(f)$. В D -слое зависимость $R(f)$ определяется, в основном, областью высот, где выполняется условие $(\omega + \omega_L)^2 \gg v^2$. Условие $(\omega + \omega_L)^2 \ll v^2$ соблюдается в нижней части D -слоя, вкладом которой в интегральное поглощение волны можно пренебречь. При условии $(\omega + \omega_L)^2 \gg v^2$ функция $R(f)$ монотонно убывает с ростом частоты, т. е. качественный характер зависимости кроссмодуляции от частоты согласуется с экспериментом (см. рис. 4).

В элементарной теории тепловая нелинейность характеризуется параметрами v и δ , где δ — средняя относительная доля энергии, теряемая электроном при соударении с молекулой. Соотношение (2) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции $v(h)$. Если решение этого уравнения считать известным, то при некоторых предположениях можно найти параметры нелинейности $\delta(T_e)$ и $v(T_e)$. Здесь T_e — эффективная температура электронов. Другой способ определения параметров состоит в искусственном выборе функций $\delta(T_e)$ и $v(T_e)$, которые соответствовали бы экспериментальной зависимости $R(f)$. Основанием метода является то, что интервал вероятных значений δ достаточно узкий, а зависимость частоты столкновений от температуры фактически известна. Именно таким способом параметр δ определялся в настоящей работе.

Получаемый из измерений коэффициент кроссмодуляции можно представить в виде

$$R(f, 0, P) = \frac{\omega}{c} \int_{h_1}^{h_2} (x_1 + x_2 - 2x_0) dh, \quad (4)$$

где h_1 — нижняя граница D -слоя, h_2 — высота отражения мощной волны, x_1 и x_2 — коэффициенты поглощения зондирующей волны в нагретой ионосфере до отражения и после отражения заднего фронта возмущающего импульса. Отличие x_1 от x_2 связано с релаксацией температуры электронов. Процесс остывания электронов выражается приближенной зависимостью

$$T_e(t) = T + (T_{e0} - T) e^{-\delta v t}, \quad (5)$$

где T — температура электронов в невозмущенной плазме, $T_{e0} = T_e(0)$ — температура электронов в начальный момент времени $t = 0$. Нелинейное поглощение зондирующей волны наиболее существенно в области высот, где выполняется условие $v \leq \omega$. В этом случае показатель поглощения $x_2(t) \sim v \sim T_e(t)$. Учитывая соотношение (5) и приближенную связь x_2 и T_e , выражение (4) можно представить в виде

$$R(f, 0, P) = (1 + e^{-t_0/\tau_{\text{эфф}}}) \int_{h_1}^{h_2} (x_1 - x_0) dh, \quad (6)$$

где

$$e^{-t_0/\tau_{\text{эфф}}} \equiv \frac{\int_{h_1}^{h_2} (x_1 - x_0) e^{-\delta v t} dh}{\int_{h_1}^{h_2} (x_1 - x_0) dh}, \quad t_0 = \frac{2 [Z(f) - Z(f_0)]}{c},$$

$Z(f)$ — действующая высота зондирующего импульса. Если δ и v не зависят от координаты h , то $\tau_{\text{эфф}} \equiv (\delta v)^{-1}$ — время релаксации темпера-

туры электронов. Таким образом, параметр $\tau_{\text{эфф}}$ характеризует эффективный процесс релаксации и его можно отождествить с экспериментальным параметром τ_0^* . Производя в выражении (6) замену $\tau_{\text{эфф}}$ на τ_0 , получим

$$\beta(f) \equiv \frac{R(f, 0, P)}{1 + e^{-t_0/\tau_0}} = \frac{\omega}{c} \int_{h_1}^{h_2} (\kappa_1 - \kappa_0) dh. \quad (7)$$

Для волн с частотами $f > f_0$ точка отражения находится выше точки отражения мощного импульса. Формула (7) получена в предположении, что за время распространения зондирующего импульса $\Delta\tau$ в эффективной области возмущений электроны не остывают. В этом случае релаксация температуры происходит в процессе распространения импульса в области высот, заключенной между точками отражения возмущаемой и возмущающей волн. Время релаксации здесь значительно больше или порядка $\Delta\tau(t_0 \gg \Delta\tau)$. Как показывает эксперимент, нелинейное поглощение мощного импульса вследствие его самовоздействия в ионосфере велико на высотах $h \sim 80-85$ км [2, 3]. Если учесть, что интенсивная волна отражается на высотах $h_2 \approx 90-95$ км, то легко получить оценку $\Delta\tau \approx 50$ мкс. При $\tau_0 \gg \Delta\tau$ учет времени $\Delta\tau$ в выражении (7) не имеет большого значения. Функция $\beta(f)$ описывает кроссмодуляцию импульсов до момента отражения интенсивной волны от ионосферы. Она приведена на рис. 5. Видно, что относительный разброс значений меньше по сравнению с коэффициентом кроссмодуляции R .

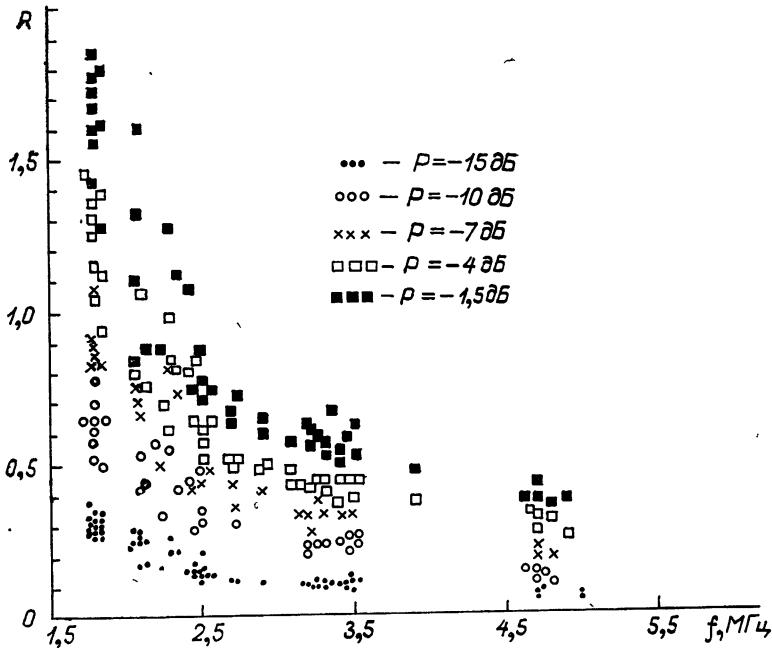


Рис. 5.

* При δ и ν , зависящих от T_e , выражения (5) и (6) не являются точными. Смысл выполненных преобразований заключается в том, чтобы показать эквивалентность параметров τ_0 и $\tau_{\text{эфф}}$, а также найти приближенный способ разделения коэффициента кроссмодуляции на две части, связанные с квазистационарным нагревом электронов падающей волной и релаксацией температуры электронов

Разброс значений β вызывается изменениями электронной концентрации в D -слое от сеанса к сеансу наблюдений кроссмодуляции, а вариации R зависят также от параметров ионосферы вне области возмущений. При длительности возмущающего импульса $\sim 500 \text{ мкс}$ температура электронов устанавливается на стационарном уровне вплоть до высоты $h \sim 90 \text{ км}$. В этом случае для расчета зависимости коэффициента кроссмодуляции от частоты можно рассматривать стационарную задачу, а температуру электронов искать аналогично [3]. Однако в отличие от [3] рассмотрим более общее уравнение для стационарной температуры электронов:

$$\frac{d\theta}{dh} = 2(\theta - 1) \frac{\frac{\lambda s^2}{4+s^2} - \frac{1}{h} - \frac{\omega_0}{c} \chi_1(s, h)}{1 + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \left(\alpha_2 + \frac{2\alpha_1 s^2}{4+s^2}\right)}, \quad (8)$$

где

$$s = \frac{\nu(T_e)}{\omega_0}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \quad \theta = \frac{T_e}{T}, \quad \nu(T_e) = \nu_0 \theta^{\alpha_1},$$

$$\delta(T_e) = \delta_0 \theta^{\alpha_2}, \quad \nu_0 \equiv \nu(T), \quad \delta_0 \equiv \delta(T), \quad \nu_0(h) = \nu_{00} e^{-\lambda(h-h_0)}.$$

Экспериментальные исследования эффективных сечений рассеяния электронов на молекулах кислорода и азота, основных атмосферных компонентов, показывают, что для воздуха величина $\alpha_1 \approx 0,8-1$ [5, 6, 7]. Для расчетов кроссмодуляции использовались профили электронной концентрации, полученные методом частичных отражений в г. Горьком (Зименки, загородная лаборатория НИРФИ). Наблюдения частичных отражений проводились одновременно с измерениями кроссмодуляции (на частоте 5,75 МГц).

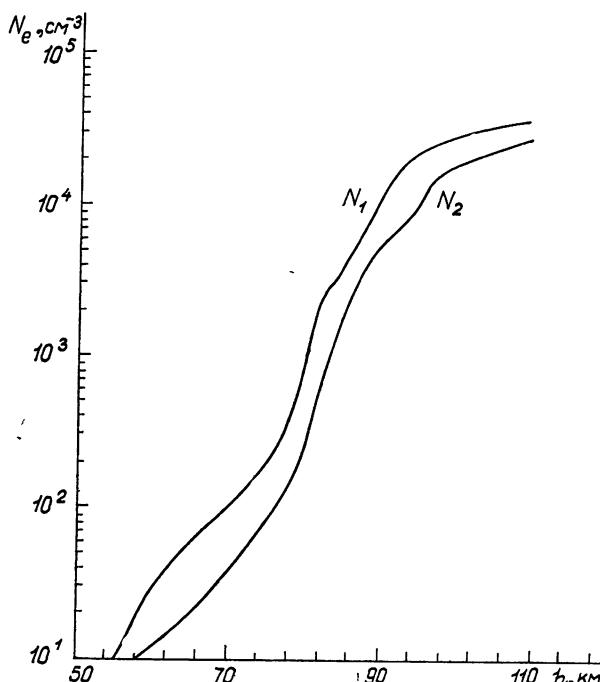


Рис. 6.

Частичные отражения регистрировались в промежутке с 11 до 13 часов (на частоте 5,75 МГц интенсивность частичных отражений достаточно велика только в полуденное время). Как правило, профили электронной концентрации начинаются с высот 77—80 км. Ниже 80 км профили выбраны в соответствии с данными измерений концентрации, полученных различными методами [8]. Зависимости концентрации электронов N_e от высоты, которые были взяты для конкретных расчетов, показаны на рис. 6. Приведенные зависимости отличаются от реальных измерений концентрации, однако относительные отклонения последних от одного из профилей N_1 или N_2 не превышают в среднем 100%, и эти профили можно использовать для количественных оценок величины β независимо от времени наблюдений кроссмодуляции. Интегрирование дифференциального уравнения (8) и численные расчеты функции $\beta(f)$ проводились на БЭСМ-4 для следующих значений параметров: $T = 300$ К, $\lambda = 0,146 \text{ км}^{-1}$, $v_{00} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$, $h_1 = 50 \text{ км}$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\delta_0 = 2 \cdot 10^{-3}$. Результаты вычислений β представлены на рис. 7. Здесь также показаны усредненные экспериментальные зависимости кроссмодуляции от частоты (пунктирные линии, ср. с рис. 5). Как видно из рис. 7, для аппроксимаций $\delta(T_e) = \text{const} = 2 \cdot 10^{-3}$ и $v(T_e) \sim T_e$ измерения на частотах $f > 3 \text{ МГц}$ вполне удовлетворительно согласуются с расчетом коэффициента кроссмодуляции. На частотах ниже 3 МГц величина $\delta = (2,4 - 3) \cdot 10^{-3}$. Наличие различных значений δ является, по-видимому, следствием зависимости этого параметра от эффективной температуры электронов с характерными величинами $\delta_0 \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$ и $\alpha_2 \approx -0,11$. При этом следует отметить, что отличия экспериментальных зависимостей от расчетных на рис. 7 не выходят за пределы экспериментального разброса величины кроссмодуляции, поэтому нельзя сделать строгий вывод о наличии температурной зависимости δ . Разброс значений β обусловливается погрешностью измерений, а также изменениями параметров ионосферы во время наблюдений кроссмодуляции и, в основном, изменением электронной концентрации. Флуктуации вели-

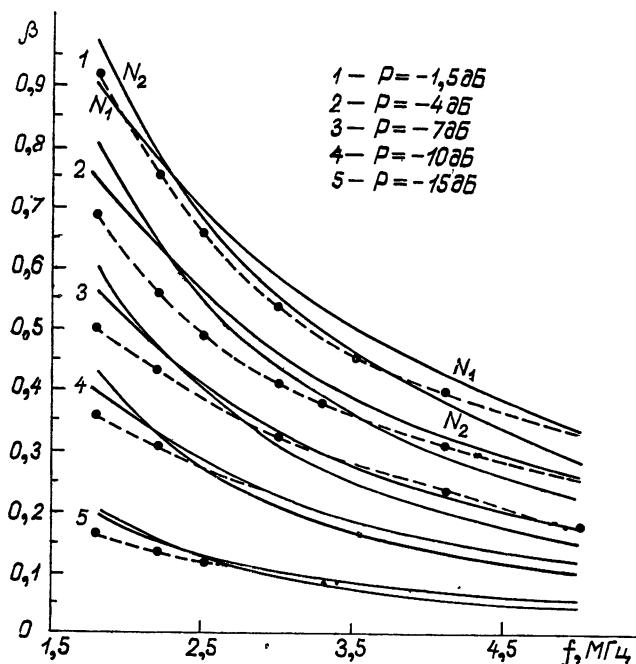


Рис. 7.

чины β менее всего связаны с вариациями эффективной частоты столкновений электронов с молекулами. Согласно измерениям сезонные вариации $\Delta\nu_0/\nu_0$ составляют 30—50% [9]. В пределах одного месяца вариации частоты столкновений не превышают 4—6%. Это подтверждается комплексными измерениями интегрального поглощения радиоволн [4]. Как показывают расчеты, относительные изменения частоты столкновений $\Delta\nu_0/\nu_0 \sim 20\%$ приводят к вариациям коэффициента кроссмодуляции $\Delta\beta/\beta \sim 5\%$.

Для определения зависимости δ от температуры было проведено сравнение расчетов коэффициента кроссмодуляции с отдельными сеансами измерений. Для каждого сеанса использовался соответствующий экспериментальный профиль концентрации электронов. Считая, что параметр δ слабо зависит от температуры, расчеты кроссмодуляции выполнялись при $\delta = \text{const}$. В результате сравнения экспериментальных и теоретических величин β получаются различные значения δ , которые представлены на рис. 8 в зависимости от мощности передатчика. Видно, что средняя величина δ уменьшается с ростом мощности. Если учесть, что нелинейное поглощение зондирующего импульса происходит в узком слое ионизации толщиной 5—10 км, то характерные масштабы δ_0 и α_2 можно найти из приближенного соотношения

$$\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\alpha_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}, \quad \delta_0 = \delta_1 \theta_1^{-\alpha_2}, \quad (9)$$

где θ_1 и θ_2 — наибольшие температуры электронов в D -слое для мощности передатчика $P = -15 \text{ dB}$ и $P = -1,5 \text{ dB}$; δ_1 и δ_2 — соответствующие им значения параметра δ . В полуденные часы наибольшая температура электронов не очень сильно зависит от концентрации электронов. Например, для концентрации $N_2 \ll N_e \ll N_1$ величины $\theta_1 = 1,93 - 2,1$ и $\theta_2 = 9 - 11,3$. Отсюда получим $\alpha_2 = -(0,12 \div 0,14)$ и $\delta_0 \approx 2,7 \cdot 10^{-3}$. Как видно из рис. 8, значения δ заключены в пределах $(1,6 - 3,4) \cdot 10^{-3}$, если не учитывать зависимость параметра от температуры электронов. При этом измерения параметров кроссмодуляции показывают количественное соответствие результатов эксперимента и теоретических расчетов относительных потерь энергии электронов при

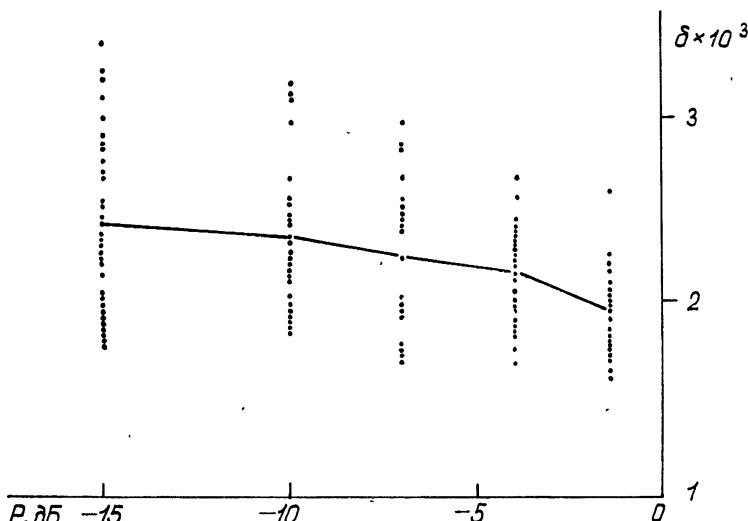


Рис. 8.

их соударениях с молекулами в нижней ионосфере [7]. Расхождение с теорией имеется в оценке масштаба α_2 . Теория приводит к значениям $\alpha_2 \sim -(1-1,5)$. Несмотря на значительный разброс величины β эксперимент обнаруживает зависимость δ от температуры электронов, но полученные оценки α_2 не отражают фактическую зависимость $\delta(T_e)$. Они соответствуют минимальному масштабу изменений δ . Это обусловлено, в частности, самим способом получения δ . Дальнейшее уточнение характеристик тепловой нелинейности может быть связано лишь с повышением точности измерений и, в частности, с увеличением времени усреднения мгновенных значений коэффициента кроссмодуляции. В связи с этим необходимо усовершенствовать методику измерений для исследования временных флуктуаций β или R . Общая оценка параметра δ сохраняется и в этом случае, если температурная зависимость частоты столкновений не сильно отличается от линейной. Численный анализ коэффициента кроссмодуляции показывает, что величина $\Delta\beta/\beta \approx 0,5 \times \Delta\alpha_1/\alpha_1$ для сравнительно небольших изменений α_1 . Для зависимости $v \sim T_e^{5/6}$ [7] приведенные выше оценки δ сохраняются с относительной точностью порядка 10—15 %. В заключение отметим, что анализ кроссмодуляционных измерений был выполнен в рамках элементарной теории. Результаты строгого кинетического расчета существенно отличаются от элементарного при выполнении условия $(\omega + \omega_H) < v(T_e)$. При условии $(\omega + \omega_H) > v(T_e)$ тепловые эффекты достаточно точно описываются формулами элементарной теории. Это условие выполняется в той части D -слоя, которая расположена выше максимума электронной температуры и дает наибольший вклад в нелинейное поглощение зондирующего импульса.

Авторы выражают признательность Е. А. Бенедиктову, Л. В. Гришкевичу и В. А. Иванову за предоставленную возможность использовать данные эксперимента по наблюдениям частичных отражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. Lee and A. J. Ferrago, *J. Geophys. Res.*, **74**, № 5 (1969).
2. А. В. Гуревич, И. С. Шлюгер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 9 (1975).
3. Н. Кротова, Н. Д. Крупеня, В. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **20**, № 1, 72 (1977).
4. Л. А. Скrebкова, Геомагнетизм и аэрономия, **15**, № 4 (1975).
5. A. V. Phelps, *J. Appl. Phys.*, **31**, № 10 (1960).
6. M. H. Mentzoni, *Radio Sci.*, **69D**, № 2 (1965).
7. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
8. K. Maeda, *J. Geomagn. Geoelectr.*, **21**, 557 (1969); **22**, 551 (1970); **23**, 133 (1971).
9. W. R. Piggot and E. V. Thrane, *J. Atm. Terr. Phys.*, **28**, 712 (1966).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
8 апреля 1976 г.

INVESTIGATION OF THERMAL PHENOMENA IN THE IONOSPHERE BY THE CROSS-MODULATION METHOD

Z. N. Krotova, V. A. Ryzhov, I. S. Shlyuger

The results of experimental investigation of interaction between impulse radio-waves in the ionosphere at the frequencies of 1—5 Mc/s are given. In the framework of the elementary theory the main parameter of the heated nonlinearity in D -layer is obtained from the measurement data on the impulse cross-modulation depth. The measurements point to the presence of weak temperature dependence of mean relative electron energy losses in collisions with heavy particles. For the electron temperature $T_e \sim 3 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^3$ K the value of these losses is equal to $(1,8 - 3,4) \cdot 10^{-3}$.

УДК 621.371.25

ОСОБЕННОСТИ ЛУЧЕВЫХ И КАУСТИЧЕСКИХ КАРТИН В НЕОДНОРОДНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СЛОЕ

Ю. И. Орлов

Исследованы особенности лучевой и каустической картин в ограниченном по нормали неоднородном параболическом слое в случае точечного источника, расположенного внутри и вне слоя. Получены необходимые и достаточные условия образования особых каустик с несколькими линиями возврата внутри и вне слоя и условия возникновения в пространстве зон четырехкратного и пятикратного облучения. На плоскости независимых параметров задачи выделены характеристические области, каждой из которых соответствует определенный вид каустики и лучевой картины. Данная полная классификация лучевых картин и каустик в зависимости от параметров неоднородного слоя и положения точечного источника.

Как известно, исследование топологии лучей и каустик является важным этапом при решении задач распространения волн в неоднородных средах с помощью лучевого метода и его квазилучевых обобщений. При этом анализ каустик определяют не только структуру лучевой картины (положение различных областей многолучевости), но и характер волнового поля внутри и вне неоднородной среды (положение зоны тени, областей интерференции и фокусировки). Несмотря на то, что структура лучей в неоднородном параболическом слое рассматривалась во многих работах (см., например, [1–5]), ряд интересных и важных особенностей каустик оказался неисследованным. Анализ этих особенностей необходим в связи с тем, что неоднородный параболический слой является наиболее частой аппроксимацией неоднородностей среды в различных задачах распространения волн, в частности, при определении радиолокационного поперечника рассеяния тел в ионосфере [6, 7], при расчете характеристик излучения источников при наличии плазмы, при исследовании структуры поля в задачах диагностики плазмы, в задачах гидроакустики [5, 8], а также ионосферного и тропосферного распространения радиоволн [1–3, 5].

В данной работе приводятся результаты исследования лучевых и каустических картин в неоднородном параболическом слое ($-2|z_m| \leq z \leq 0$, $|z_m|$ — полутолщина слоя):

$$\varepsilon(z) = 1 - \delta^{-2} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{z_m} \right)^2 \right], \quad \delta = [1 - \varepsilon(z_m)]^{-1/2}, \quad (1)$$

в зависимости от параметров слоя δ , z_m и от положения источника волны ($z = z_0$, $r = 0$ — цилиндрические координаты источника). В случае внешнего ($z_0 > 0$) и внутреннего ($z_0 < 0$) источников получены необходимые и достаточные условия образования особых каустик с несколькими линиями возврата и исследована эволюция каустики на всей плоскости независимых параметров задачи. Отметим, что в случае плазменного слоя (1) $\delta = \omega/\omega_{kp}$, где $\omega_{kp} = (e^2 N_m / \epsilon_0 m)^{1/2}$ — критическая частота слоя, а $N_m = N(z_m)$ — электронная концентрация в максимуме слоя.

1. ВНЕШНИЙ ИСТОЧНИК ($z_0 > 0$)

В случае источника, расположенного в свободном пространстве $z > 0$, траектории лучей внутри параболического слоя (1) при $\theta \geq \theta_{kp} \equiv \arccos(\delta^{-1})$ описываются уравнениями

$$r = z_0 \operatorname{tg} \theta \pm |z_m| \delta \sin \theta \ln \left\{ (1 \pm \delta \cos \theta) \left[1 - \frac{z}{z_m} + \delta \sqrt{\epsilon(z) - \sin^2 \theta} \right]^{-1} \right\}, \quad (2)$$

где θ — угол падения, а верхний (нижний) знак берется на участке луча до (после) поворота, т. е. при $r \leq r_n$ ($r \geq r_n$), где

$$r_n = z_0 \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} |z_m| \delta \sin \theta \ln \{(1 + \delta \cos \theta)(1 - \delta \cos \theta)^{-1}\}.$$

При $\theta < \theta_{kp}$ ($\delta > 1$) лучи определяются уравнением (2), взятым с верхним знаком; и, как можно показать, не образуют каустик.

Параметрические уравнения каустики семейства лучей (2) при $\theta > \theta_{kp}$ находятся из (2) при условии $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$ и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{r}{|z_m|} &= \frac{1}{\xi} \sqrt{\delta^2 - \xi^2} \left(s - \xi \ln \frac{1 - \xi}{t + a} \right), \\ s &= \frac{1}{\delta^2} \xi^2 \left[\xi \ln \frac{1 - \xi}{t + a} + \frac{\delta^2 - \xi^2}{1 - \xi} + \frac{\xi(\delta^2 - \xi^2)}{a(t + a)} \right] \equiv \varphi(t, \xi, \delta), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\xi = \delta \cos \theta$ — параметр точки на каустике, а $s = z_0 / |z_m|$, $t = 1 - z/z_m$, $a = \sqrt{t^2 + \xi^2 + 1}$.

Исследуем вид каустики (3). Каустика (3) может пересекать границу слоя $z = 0$ в точках, определяемых экстремумами зависимости координат точек выхода лучей из слоя $r_b = 2r_n - z_0 \operatorname{tg} \theta$ от угла падения θ . При $\frac{dr_b}{d\theta} \leq 0$ каустика образуется в свободном пространстве ($z \geq 0$); ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{r}{|z_m|} &= \frac{1}{\delta^2} (\delta^2 - \xi^2) \left(\frac{2\xi}{1 - \xi^2} - \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right), \\ \frac{z + z_0}{|z_m|} &= \frac{1}{\delta^2} \xi^2 \left[\frac{2(\delta^2 - \xi^2)}{1 - \xi^2} + \xi \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где ξ — параметр точки на каустике, а δ — параметр каустики. На каустике в свободном пространстве (4) могут существовать точки возврата, узлы, петли или изолированные каустические фокусы [4] (рис. 2).

Аналогичные особенности могут возникать и на каустике (3) внутри параболического слоя. Координаты точек возврата этой каустики определяются из (3) при условии $\varphi'_\xi(t, \xi, \delta) = 0$, откуда

$$\delta = \left\{ \xi^2 + \frac{3\xi(1 - \xi) \left[\xi + \frac{\xi^2(1 - \xi)}{a(t + a)} - (1 - \xi) \ln \frac{1 - \xi}{t + a} \right]}{2 - \xi + \frac{\xi(1 - \xi)^2}{a^3(t + a)^2} [3a^2(t + a) - \xi^2(t + 2a)]} \right\}^{1/2} \equiv \psi(t, \xi). \quad (5)$$

Разрешив систему трех уравнений (3), (5) относительно θ , z и r при заданных z_0 , z_m и δ , можно определить лучевую (θ) и цилиндрические (z , r) координаты точек возврата каустики (3).

Результаты расчетов корней θ , z , r уравнений (3), (5) на ЭВМ позволяют выделить на плоскости независимых параметров задачи $\{\delta; s \equiv z_0/|z_m|\}$ характеристические области A_{ij} (рис. 1), каждой из которых соответствует определенный вид каустики и лучевой картины (рис. 2). Границы $\Gamma_{3,4}$ и Γ'_3 (рис. 1) характеристических областей описываются параметрическими уравнениями

$$\delta = \psi(t, \xi^0(t)), \quad s = \varphi(t, \xi^0(t), \delta), \quad (6)$$

где t — параметр точки на границе, $\xi^0 = \xi^0(t)$ — корень уравнения $\psi_\xi(t, \xi^0) = 0$, а функции $\varphi(t, \xi, \delta)$ и $\psi(t, \xi)$ — те же, что и в выражениях (3), (4). Границы $\Gamma_{1,2}$ и Γ'_1 (рис. 1) определяются уравнениями

$$\delta = \psi(1, \xi), \quad s = \varphi(1, \xi, \delta), \quad (7)$$

где ξ — параметр точки на границе. При этом на Γ_2 $\delta = 1,0365$ при $s = 0$. Уравнение границы Γ_5 есть $\delta = 1,0754$. Изображенная пунктиром на рис. 1 линия Γ_0 определяет параметры δ, s , при которых две линии возврата каустики (3) располагаются на одинаковом уровне z (рис. 2, 14).

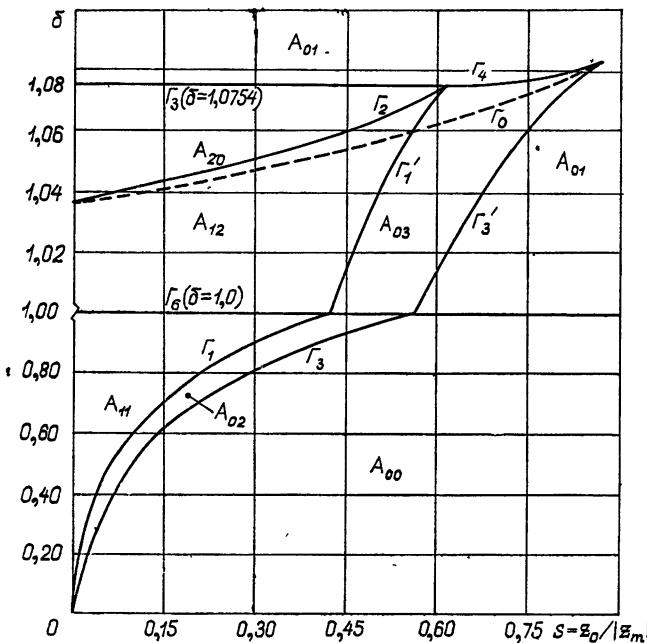


Рис. 1. Характеристические области A_{ij} на плоскости независимых параметров задачи $\{\delta, s\}$ в случае внешнего источника (i — число линий возврата каустики, расположенных вне слоя, j — внутри слоя; масштаб по оси δ — неравномерный).

Как следует из рис. 2, при $\delta < 1$, когда $\epsilon(z_m) < 0$, на каустике (3) внутри слоя (1) могут возникнуть две линии заострения (рис. 2, 1—3), при этом область каустической петли является зоной четырехлучевости. При удалении источника от границы слоя (при увеличении $z_0/|z_m|$ и $\delta = \text{const}$) петля на каустике «стягивается» в фокальную линию F_k (рис. 2, 4), после чего каустика становится неособой и разграничивает зону геометрической тени и зону двукратного облучения.

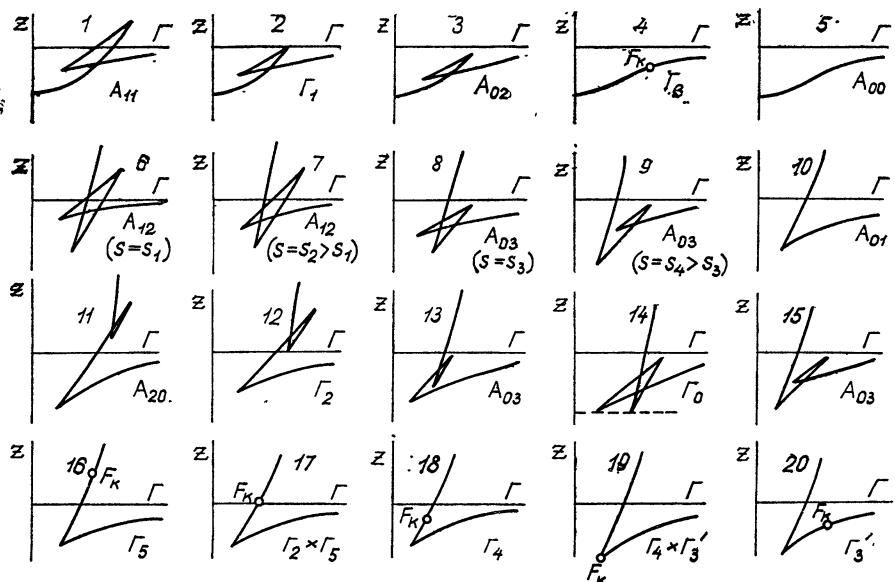


Рис. 2. Зависимость вида каустики от параметров слоя и положения внешнего источника.

На графиках 1 — 5: $\delta < 1,0$; 6—10: $1,0 < \delta < 1,036$; 11—15: $1,036 < \delta < 1,0754$
(F_K — каустический фокус).

При $\delta > 1$, когда $\varepsilon(z_m) > 0$ и когда существует область прямого прохождения, в лучевой картине могут возникнуть зоны пятикратного облучения (случаи 6—9, 11—15 на рис. 2). Эти зоны ограничены ветвями каустики, исходящими из одного (каустическая петля) или трех каустических узлов (каустическая «звезда»). Как следует из рис. 2, в случае $\delta < 1,0754$ при удалении источника от слоя (1) петля «перетягивается» с каустики (4) отраженных лучей на каустику (3) внутри слоя и при $(\delta, s) \equiv \Gamma_3$ стягивается в изолированный каустический фокус F_K . Только в области A_{01} (рис. 1) каустика приобретает наиболее простой вид (с одним круговым ребром возврата, рис. 2, 10), который обычно и рассматривается в литературе (см., например, [1—3]).

2. ВНУТРЕННИЙ ИСТОЧНИК ($z_0 < 0$)

В случае безграничной ($-\infty < z < \infty$) неоднородной среды с параболической зависимостью $\varepsilon(z)$, определяемой (1), рефракция лучей от точечного источника, как известно, сопровождается фокусировкой поля на каустике без особых точек (при $\delta < 1$) или с одной особой линией — линией возврата (при $\delta > 1$). Как показано ниже, наличие границ слоя приводит к тому, что фокусировка лучей происходит на каустиках значительно более сложной геометрии.

Очевидно, что лучи и каустики внутри параболического слоя (1) совпадают со случаем безграничной неоднородной среды (1). Существенно более сложными являются лучевая картина и форма каустики вне слоя.

Уравнения каустики лучей, вышедших из слоя в свободное пространство $z > 0^*$, имеют вид

$$z = -\cos^2 \theta_b \frac{dr_b}{d\theta_b}, \quad r = r_b - \cos \theta_b \sin \theta_b \frac{dr_b}{d\theta_b}, \quad (8)$$

* В силу симметрии слоя (1) достаточно рассмотреть лишь случай $z_0 > z_m$ $|z_0| < |z_m|$ и исследовать лучи при $z > 0$.

где r_b и θ_b — соответственно координата и угол выхода луча из неоднородной среды при $z = 0$. В случае параболического слоя (1)

$$r_b = \pm |z_m| \delta \sin \theta_b \ln \left\{ \left(1 \pm \delta \cos \theta_b \right) \left[1 - \frac{z_0}{z_m} + \delta \sqrt{\varepsilon(z_0) - \sin^2 \theta_b} \right]^{-1} \right\},$$

$$\theta_b = \arcsin (\sqrt{\varepsilon(z_0)} \sin \theta),$$
(9)

где θ — угол выхода луча из источника, отсчитываемый от отрицательного направления оси z , а знаки выбираются из условия $\pm 1 = \operatorname{sgn}(\theta - \pi/2)$.

Как следует из (8), (9) при $\theta \rightarrow \pi/2$ каустика в свободном пространстве ($z > 0$) асимптотически уходит на бесконечность под углом $\theta_b = \arcsin \sqrt{\varepsilon(z_0)}$. В случае $\delta > 1$ при $\theta \rightarrow \theta_{kp}$, где $\sin^2 \theta_{kp} = (\delta^2 - 1)/\delta^2 \varepsilon(z_0)$, каустика (8) имеет еще одну ветвь, уходящую на бесконечность под углом $\theta_b = \arcsin \sqrt{1 - \delta^{-2}}$. Дальнейший анализ уравнений каустики (8), (9) проводится аналогично (3), и результаты этого анализа адекватны результатам применения лучевой теоремы взаимности [9].

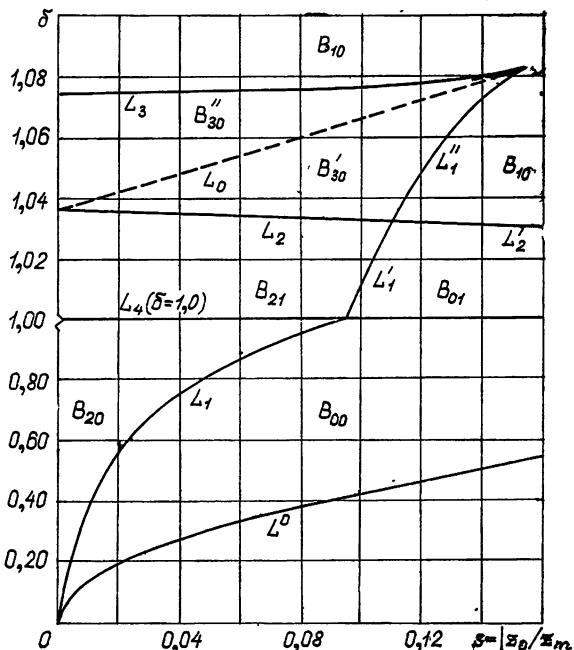


Рис. 3. Характеристические области B_{ij} в случае внутреннего источника (i — число линий возврата вне слоя, j — внутри слоя; масштаб по оси δ — неравномерный).

Результаты исследования каустики (8), (9) обобщены в виде характеристических областей B_{ij} (рис. 3) на плоскости независимых параметров задачи $\{\delta, s \equiv |z_0/z_m|\}$. При переходе через границы областей B_{ij} каустика (8) качественно меняет свою форму (рис. 4). Кривая L^0 на рис. 4 соответствует границе области $\varepsilon(z_0) \geq 0$ и определяется уравнением $\delta = \sqrt{s(2-s)}$.

Как видно из рис. 4, в случае $\delta < 1$ каустика может быть либо неособой (в B_{00}), либо образовывать в свободном пространстве $z > 0$ две

неособой (в B_{00}), либо образовать в свободном пространстве $z > 0$ две линии возврата (в B_{20}), которые при $(\delta, s) \in L_1$ стягиваются в каустический фокус F_K .

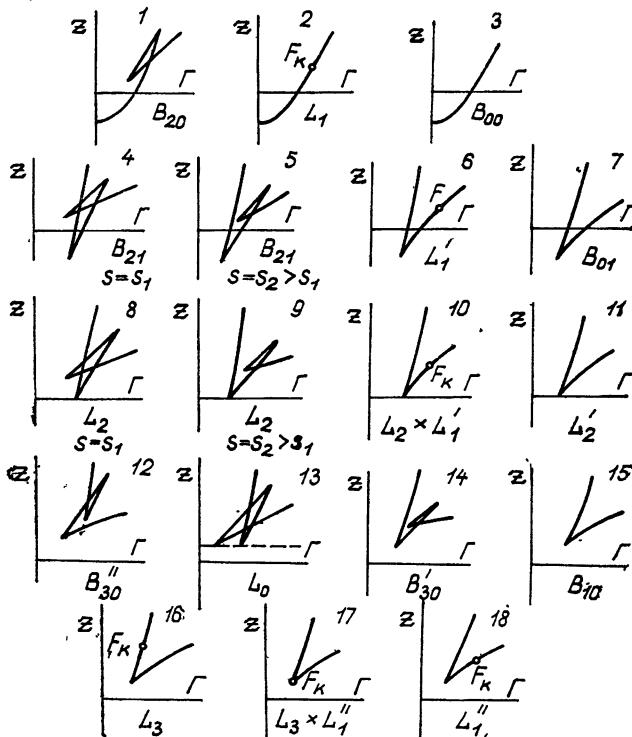


Рис. 4. Классификация каустик в зависимости от параметров слоя и координат внутреннего источника.

В случае $\delta > 1$, когда $\epsilon(z_m) > 0$, на каустике в свободном пространстве $z > 0$ появляются дополнительные особенности, связанные с образованием сложных каустических «петель» или «звезд» (каустики 4, 5, 8, 9, 12, 13 на рис. 4). Указанные области соответствуют зонам пятилучевости, в которых через точку наблюдения проходит пять лучей, вышедших из параболического слоя (1). При увеличении величины δ или $|z_0/z_m|$ области пятилучевости сначала вырождаются в фокальные линии F_K (каустики 6, 10, 16—18 на рис. 4), а затем полностью исчезают. В результате каустика приобретает вид, изображенный на рис. 4, (7, 15), а лучевая картина становится аналогичной случаю безграничной неоднородной среды с параболическим профилем $\epsilon(z)$, когда образуются зоны трехлучевости.

Полученные в работе результаты (рис. 1—4) дают полную классификацию лучевых картин и каустик в неоднородном параболическом слое (1) в зависимости от его параметров δ , z_m и от координаты z_0 источника. Резюмируя полученные результаты, отметим, что для параболического слоя (1) только при $\delta < 1,0835$ и $z_0/|z_m| < 0,8675$ (внешний источник) и при $\delta < 1,0835$ и $|z_0/z_m| < 0,156$ (внутренний источник) в лучевой и каустической картинах могут возникать характерные особенности. Эти особенности приводят к появлению в пространстве особых зон фокусировок поля (на особых каустиках) и зон пятикратного (при $\delta > 1$) или четырехкратного (при $\delta < 1$) облучения, где поле источника имеет сложный интерференционный характер.

В заключение автор выражает глубокую признательность Ю. А. Кравцову за интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1: K. G. Budden, *Radio waves in the ionosphere*, The Univ. Press, Cambr., 1961.
2. J. M. Kelso, *Radio ray propagation in the ionosphere*, McGraw-Hill, N. Y., 1964.
3. Я. Л. Альперт, *Распространение радиоволн и ионосфера*, изд. АН СССР, М., 1960.
4. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 1, 30 (1967).
5. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, изд. Наука, М., 1973.
6. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1358 (1967).
7. С. Д. Жерносек, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 231 (1970).
8. Л. М. Бреховских, *Акустика океана*, изд. Наука, М., 1974.
9. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 2, 317 (1968).

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
26 ноября 1976 г.

RECOLIARITIES OF RAY AND CAUSTIC PATTERNS IN AN INHOMOGENEOUS PARABOLIC LAYER

Yu. I. Orlov

The peculiarities of ray and caustic pattern in the normally limited inhomogeneous parabolic layer are studied in the case of a point source situated inside and outside the layer. Necessary and sufficient conditions of formation of peculiar caustics with several inverse lines inside and outside the layer are obtained as well as the conditions of occurrence in the space of zones of four and fivefold irradiation. The characteristic regions are isolated on a plane of independent parameters, the definite form of caustics and ray pattern corresponding to each of parameters. The total classification of ray patterns and caustics is given depending on the parameters of the inhomogeneous layer and position of the point source.

УДК 535.8

СУБМИЛЛИМЕТРОВЫЙ ШИРОКОДИАПАЗОННЫЙ СУПЕРГЕТЕРОДИННЫЙ РАДИОМЕТР

Ю. В. Лебский, В. П. Мезенцев, Л. И. Федосеев, А. А. Швецов

Описывается устройство и приводятся характеристики супергетеродинного радиометра диапазона волн $\lambda = 0,8 \div 1,24$ мм.

Одной из важных задач практического освоения субмиллиметрового диапазона волн является создание высокочувствительной приемной аппаратуры. В последнее время наметился определенный успех в продвижении одного из классических методов радиоприема — супергетеродинного — в этот диапазон. К предпосылкам такого продвижения можно отнести следующее: 1) разработку схемы входных цепей супергетеродина на базе устройств типа интерферометра Цендера—Маха [1], 2) широкое использование во входных цепях сверхразмерных волноводов [2], 3) применение диодов с барьером Шоттки в рассматриваемом диапазоне [3], 4) существенное улучшение параметров полупроводниковых структур, усилителей промежуточной частоты и гетеродинных ламп обратной волны [4]. Как показывает опыт разработки описываемого ниже радиометра, исходя из упомянутых предпосылок, удается заметно уменьшить имевшую место существенную разницу в чувствительности супергетеродинов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн [3, 5, 6].

Функциональная схема радиометра приведена на рис. 1. В основном она напоминает описанную в [1]. Отличие состоит в использовании для дополнительного подавления шума гетеродина интерферометра III, включенного в тракт гетеродина. Необходимость этой меры связана с применением более качественного усилителя промежуточной частоты (УПЧ), аналогичного использованному в [7].

В соответствии с переходом к более низкой промежуточной частоте разность хода в интерферометре увеличена до 18—19 см, а также применены смесители с коаксиальным выходом [8].

Смесительная камера, в которой смонтированы диод Шоттки и петлевой элемент связи, соединяется с интерферометром так же, как и гетеродин (лампа обратной волны [4]), через пирамидальный переход к сверхразмерному волноводу сечением $11 \times 5,5$ мм². Это же сечение имеет тракт квазиоптического обтюраторного коммутатора I [9].

Коммутатор имеет два входа, что дает возможность производить измерения интенсивности нулевым методом или сканировать диаграмму направленности. Наличие двух выходов позволяет использовать коммутатор одновременно в двух радиометрах [11] (на схеме рис. 1 ко второму выходу подсоединенна согласованная нагрузка). Частота коммутации 825 Гц.

Интерферометры II и III идентичны. Частотные зависимости потерь в каждом из них ($L_{\text{свч}}$) и развязки плеч (D) приведены на рис. 2.

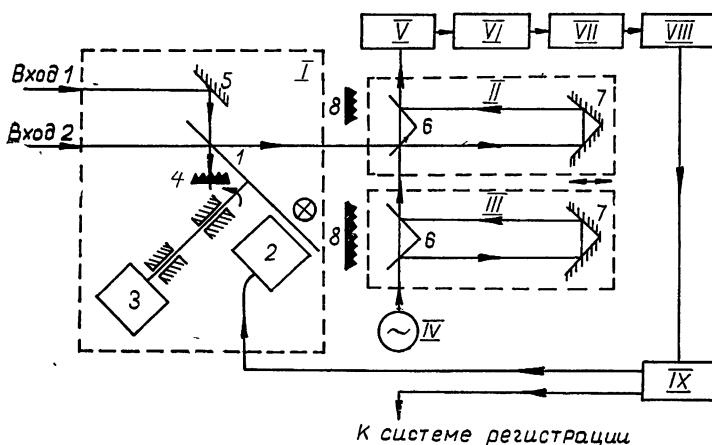
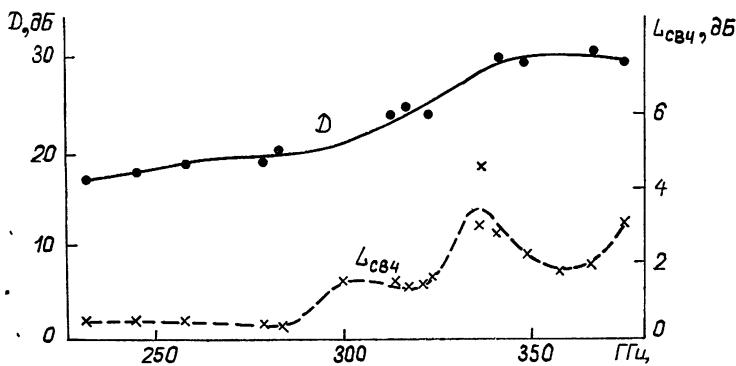


Рис. 1. Блок-схема радиометра:

I—коммутатор (I—диск обтюратора, 2—фотоэлектрический датчик опорного напряжения, 3—двигатель обтюратора, 4—согласованная нагрузка, 5—плоский отражатель); II, III—интерферометр Цендерса—Маха (6—полупрозрачные слюдянные пластинки, 7—уголковый отражатель, 8—согласованная нагрузка); IV—гетеродин; V—смеситель; VI—согласующий трансформатор; VII—усилитель промежуточной частоты; VIII—второй детектор; IX—низкочастотный блок.

Рис. 2. Частотная зависимость развязки плеч интерферометра (D) и потерь ($L_{\text{свч}}$) в нем.

Флуктуационный порог чувствительности радиометра ΔT_{\min} при одновременном приеме по основному и зеркальному каналам и постоянной времени выходной цепи 1 с оценивался по записи уровня собственных шумов и излучения согласованной нагрузки, охлаждаемой кипящим азотом. С лучшими образцами смесительных диодов на волне 0,8 мкм получена чувствительность 1,5 К, чему соответствуют шумовая температура $T_{\text{ш}} \approx 19000$ К и значение минимальной обнаружимой мощности $\approx 1,7 \cdot 10^{-14}$ Вт ($8 \cdot 10^{-19}$ Вт — в режиме линейного приемника с полосой 1 Гц).

Таблица позволяет сопоставить основные характеристики описываемого радиометра с соответствующими параметрами субмиллиметровых супергетеродинов, работающих на близких волнах.

Кроме существенного превосходства в чувствительности разработанный радиометр отличается от других и своей диапазонностью. Пример зависимости ΔT_{\min} от частоты приведен на рис. 3. Столь широкое перекрытие диапазона с хорошей степенью равномерности достигнуто благодаря возможности широкой перестройки гетеродина и входных цепей, в основу которых положен принцип интерферометра.

Таблица

$\lambda, \text{мм}$	$\Delta T_{\min}, \text{К}$	$T_{\text{ш}}, \text{К}$	Полоса про- пускания $УПЧ, ГГц$	Потери пре- образова- ния, дБ (одноканаль- ный режим)	Примечание
0,90	9	205000	1,3	21,8	[³] Преобразование на гармонике частоты гетеродина
0,87	25	280000	0,3	$\leq 35,0$	[⁶] Настоящая работа
0,80	1,5	19100	0,4	14,2	[¹⁰] Преобразование на гармонике частоты гетеродина
0,60	16,5	390000	1,6	24,8	

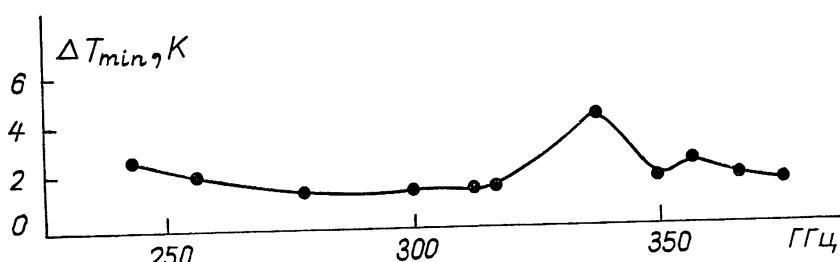


Рис. 3. Зависимость флюктуационного порога чувствительности от частоты гетеродина.

Авторы благодарят А. П. Наумова за консультации и А. Г. Кислякова за полезные замечания, сделанные им по прочтении рукописи статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. И. Федосеев, Ю. Ю. Кулаков, Радиотехника и электроника, 16, № 4, 544 (1971).
- J. Bleed, A. Bresson, R. Papoulaig and J. G. Wegrowe, L'onde Electr., 44, 80 (1964).
- В. Н. Воронов, А. Д. Гинзбург, А. И. Наумов, Д. Г. Павельев, В. М. Ускова, Л. И. Федосеев, А. А. Швецов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 7, 1125 (1973).
- М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. П. Парилов, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 4, 136 (1965).
- P. F. Goldsmith, R. L. Plambeck and R. Y. Chiao, IEEE Trans. MTT-22, № 12, 1115 (1974).
- P. F. Goldsmith, R. L. Plambeck and R. Y. Chiao, Astrophys., 196, L39 (1975).
- В. Н. Калиниченко, Ю. В. Лебский, В. П. Мезенцев, В. М. Тевелевич, Л. И. Федосеев, А. М. Штанюк, II Всесоюзная школа-семинар по радиоприемным устройствам СВЧ, краткие тексты докладов, 125, Ереван, 1974.

8. О. Ф. Гришин, Ю. П. Зайцев, В. В. Иляхина, В. А. Мальцев, В. П. Мезенцев, Всесоюзный симпозиум по приборам, технике и распространению миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере, Труды симпозиума, 74, М., 1976.
9. В. Н. Воронов, Р. Киракосян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 1439 (1973).
10. S. Y. Chang and J. D. Lester, Proc. IEEE, 54, № 4, 459 (1966).
11. С. А. Пелюшенко, VIII Всесоюзная конференция по радиоастрономии, Тезисы докладов, 76, Пущино, 1975.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
31 августа 1976 г.

A SUBMILLIMETER WIDE-BAND SUPERHETERODYNE RADIOMETER

Yu. V. Lebskii, V. P. Mesentsev, L. I. Fedoseev, A. A. Shvetsov

A device is described and the characteristics of superheterodyne radiometer at the wavelength $\lambda = 0.8 \div 1.24$ mm are given.

УДК 621.373.42

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИНХРОНИЗИРОВАННОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ НА ИНЕРЦИОННОМ АКТИВНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

С. Л. Артеменков, С. М. Смольский

С помощью аппарата фазовой плоскости изучены процессы установления амплитуды и фазы синхронных колебаний в автогенераторе на инерционном двухполюснике. Показано, что область гистерезиса схемы расширяется за счет возникновения устойчивого предельного цикла и возможного перескока в режим биений.

При проектировании автогенераторов (АГ), находящихся под воздействием внешнего периодического сигнала, часто недостаточно уметь определять параметры стационарных синхронных колебаний и анализировать локальную устойчивость режимов. Например, для оценки времени вхождения системы в синхронизм, для построения областей притяжения стационарных точек необходимо изучить переходные процессы на основе количественного или качественного решения нелинейных дифференциальных уравнений. В настоящее время эта задача может считаться решенной [1] лишь для АГ на безынерционных активных элементах (АЭ), которые можно характеризовать единственной вещественной нелинейностью: характеристикой анодного тока лампы или (в рамках квазилинейного метода [2]) усредненной по первой гармонике крутизной.

Современные генераторные диоды СВЧ-диапазона являются существенно инерционными, поэтому их надо характеризовать уже комплексной крутизной, что затрудняет анализ. Еще сложнее изучать процессы в транзисторных АГ СВЧ, поскольку транзистор нужно представлять не одним, а четырьмя усредненными нелинейными и комплексными параметрами. Последнее обстоятельство, как отмечалось в [3], может привести даже к сингулярным укороченным уравнениям.

Опыт практической работы с синхронизированными АГ на инерционных АЭ, а также данные периодической печати указывают на возможность гистерезисных явлений и разного рода скачков при перестройке схемы, причем часто наблюдаются перескоки с синхронного режима в квазигармонический и наоборот. Подробно описать эти явления на основе изучения только локальной устойчивости режимов нельзя.

Цель настоящей статьи — двоякая: во-первых, с помощью аппарата фазовой плоскости изучить переходные процессы в синхронизированном АГ на инерционном АЭ и, во-вторых, проверить, когда выполнение широко известных условий устойчивости в малом обеспечивает и глобальную устойчивость синхронных колебаний.

УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим АГ, представленный по высокой частоте параллельным соединением одиночного контура с собственной частотой ω_0 , добротностью Q и резонансной проводимостью G_k , инерционного двухполюсника с комплексной крутизной (электронной проводимостью) $Y(U)$ =

$= G(U) + iB(U)$, зависящей от амплитуды колебаний U , и синхронизирующего источника тока с амплитудой $I_{\text{вн}}$ и частотой $\omega_{\text{вн}}$. Укороченные уравнения для этой динамической системы получаются обычным образом (см., например, [1, 4, 5]):

$$\begin{aligned} T \frac{dU}{dt} - \left\{ \frac{G(U)}{G_k} - 1 \right\} U &= \frac{I_{\text{вн}}}{G_k} \cos \varphi, \\ TU \frac{d\varphi}{dt} - \left\{ \frac{B(U)}{G_k} - (\omega_{\text{вн}} - \omega_0) T \right\} U &= -\frac{I_{\text{вн}}}{G_k} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $T = 2Q/\omega_0$, φ — фаза синхронных колебаний. При выводе (1) использовались стандартные предположения метода медленно меняющихся амплитуд: считалось, что скорость изменения амплитуды и фазы имеет порядок затухания относительно амплитуды и частоты. Физическим обоснованием этих предпосылок является близость системы к консервативной (высокая добродатность избирательной цепи).

Для качественного анализа системы (1) необходимо принять какую-либо аппроксимацию нелинейностей $G(U)U$ и $B(U)U$. Составляющие электронной проводимости G и B могут зависеть от амплитуды самым разным образом [9]. Вместе с тем, достаточно точные качественные (и количественные) результаты могут быть получены уже для линейной аппроксимации $G(U)$ и $B(U)$ [4, 6], если провести аппроксимирующую прямую в точке автономного режима U^0 с наклоном, равным соответствующему значению производной:

$$G(U) = G(U^0) + \frac{dG(U^0)}{dU} (U - U^0),$$

$$B(U) = B(U^0) + \frac{dB(U^0)}{dU} (U - U^0).$$

Тогда уравнения (1) будут содержать квадратичную нелинейность и после простых преобразований запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} + a(a - 1) &= F \cos \varphi, \\ a \frac{d\varphi}{d\tau} + a\xi + a(a - 1) \operatorname{tg} \alpha &= -F \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tau = t/T'$ — безразмерное время, $T' = T/g$, $g = -\left(\frac{U^0}{G_k}\right) \frac{dG}{dU} \Big|_{U=U^0}$, $F = -I_{\text{вн}}/(U^0 G_k g)$ и $a = U/U^0$ — нормированные амплитуды внешней силы и синхронных колебаний, $\xi = (\omega_{\text{вн}} - \omega_0)T'$ — нормированная расстройка частот, $\operatorname{tg} \alpha = \{(dB/dU)/(dG/dU)\}|_{U=U^0}$. Параметр «расфазирования» α отличен от нуля только для АЭ с нелинейной реактивностью и в первом приближении равен сдвигу фаз между напряжением и током в контуре генератора [4]. Отметим, что систему (2) можно было выписать сразу на основе общих результатов [4].

СТАЦИОНАРНЫЕ СИНХРОННЫЕ РЕЖИМЫ И ИХ ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Стационарные режимы удобно анализировать на плоскости резонансных характеристик (РХ), т. е. с помощью кривых $a(\xi)$, уравнение для которых находится из (2) приравниванием нулю производных и исключением φ :

$$a^2(a-1)^2 + a^2 \{\xi + (a-1) \operatorname{tg} \alpha\}^2 = F^2. \quad (3)$$

Поведение характеристик подробно изучено, например, в [4, 5], здесь мы только отметим, что при $\alpha=0$ (безынерционный АЭ) они являются симметричными, а при $\alpha \neq 0$ симметричность теряется (рис. 1 а).

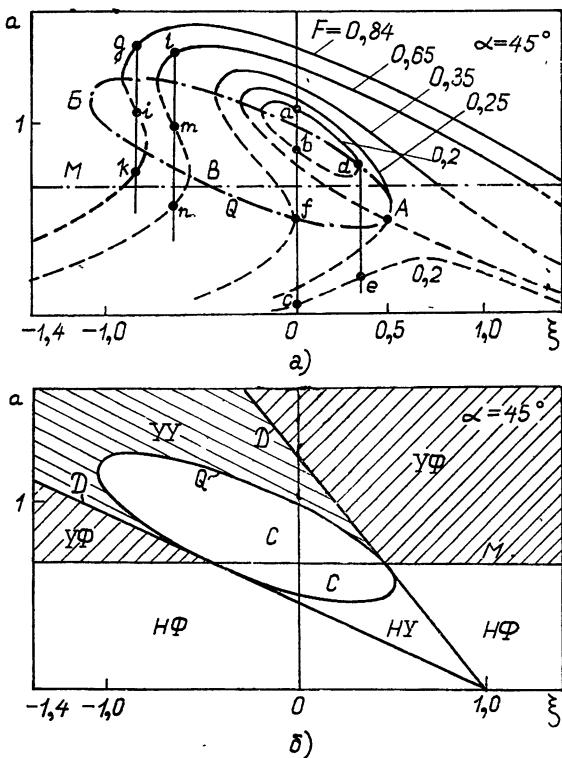


Рис. 1. Резонансные характеристики (а) и типы особых точек (б) захваченного АГ на инерционном АЭ.

Условия локальной устойчивости синхронных колебаний для выбранной аппроксимации имеют вид

$$a > \frac{2}{3}, \quad (4)$$

$$\xi^2 + \xi(3a-2)\operatorname{tg} \alpha + (a-1)(2a-1)(1+\operatorname{tg}^2 \alpha) > 0$$

и определяют две границы: M (горизонтальную прямую) и Q , которая при $\alpha < 70^\circ$ является замкнутой кривой, а при $\alpha > 70^\circ$ — разомкнутой. Учитывая общую интерпретацию условия положительности свободного члена характеристического уравнения [4], заметим, что РХ, пересекаясь с границей Q , имеют вертикальные касательные.

Из рассмотрения рис. 1 а следует, что при $F < 0,25$ РХ состоят из двух ветвей: верхней замкнутой (часть которой устойчива) и нижней разомкнутой неустойчивой. При $F = 0,25$ ветви сливаются в точке A с координатами $a = 0,5$; $\xi = (\operatorname{tg} \alpha)/2$ и при дальнейшем росте F РХ представляет собой одну разомкнутую ветвь. Легко видеть, что при $\xi < 0$ имеется область, называемая обычно гистерезисной, где одной расстройке соответствуют две устойчивые стационарные точки. Ширина

этой области по оси частот зависит от амплитуды воздействия и для заданного α легко вычисляется [6]. На основе приведенного рассмотрения РХ обычно делается вывод о том, что для всех F и ξ , находящихся вне этой области, синхронные колебания, соответствующие устойчивым участкам РХ, всегда глобально устойчивы. Ниже показывается, что это заключение является неверным.

Для завершения анализа поведения системы при малых возмущениях вокруг стационарных режимов необходимо указать тип особых точек, для чего на рис. 1 б наряду с границами M и Q построена граница $D = 0$, где D — дискриминант характеристического уравнения (на рисунке область устойчивости заштрихована). Как видим, устойчивость на границе Q теряется за счет слияния устойчивого узла и седла, а на границе M — за счет превращения устойчивого фокуса в неустойчивый. Линия $D = 0$ разделяет области узлов и фокусов.

БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ

Для исследования процессов установления с помощью аппарата фазовой плоскости получим уравнение фазовых траекторий системы, разделив первое уравнение системы (2) на второе:

$$\frac{da}{d\varphi} = - \frac{a \{F \cos \varphi - a(a-1)\}}{F \sin \varphi + a\xi + a(a-1) \operatorname{tg} \alpha}. \quad (5)$$

Это уравнение содержит три параметра: F , ξ и a , причем параметр a определяется только автономным режимом, а амплитуда F и частота ξ внешней силы при синхронизации могут меняться. Ясно, что перед построением фазовых портретов целесообразно провести их систематизацию, т. е. выделить в пространстве параметров области с эквивалентной топологической структурой портретов. Проще всего это осуществляется с помощью бифуркационных диаграмм, построенных, в нашем случае, на плоскости F , ξ . Эти диаграммы позволяют поставить в соответствие определенному множеству значений параметров типичный фазовый портрет, что сводит к минимуму количество портретов, необходимое для описания переходных процессов. Частично этот вопрос можно решить на основе результатов анализа локальной устойчивости состояний равновесия.

Если исключить амплитуду a из пар уравнений, включающих уравнение РХ (3) и уравнение каждой границы устойчивости (M , Q и D), то мы получим на плоскости F , ξ линии, соответствующие этим границам. Эта процедура достаточно сложна с вычислительной точки зрения, поэтому бифуркационные диаграммы для разных α рассчитывались на ЭВМ БЭСМ-6. На рис. 2 а, б они представлены для сформированного случая $\alpha = 0$ (в том числе и для безынерционного АЭ) и для случая $\alpha = 45^\circ$. Диаграммы для $\alpha = 0$ симметричны, поэтому на рис. 2 а представлена только правая их половина. Области, которые соответствуют разному количеству или типу особых точек уравнения (5), обозначены разными цифрами, причем здесь же указаны типы особых точек в каждой области. Так, например, для $\alpha = 0$, $F = 0,2$, $\xi = 0,18$ (область II на рис. 2 а) фазовый портрет содержит три особых точки: неустойчивый фокус, седло и устойчивый узел.

Важно отметить, что построенные здесь бифуркационные диаграммы имеют не только теоретический, но и большой практический интерес, так как по ним легко рассчитать ширину полосы синхронизма генератора. Действительно, для заданной амплитуды внешнего сигнала максимальная возможная расстройка ξ , при которой устойчивость еще

сохраняется, определяется самыми правой и левой кривыми на рис. 2 а, б, соответствующими границам M или Q . Этот результат полностью подтверждается полученными ранее формулами для расчета полосы [6].

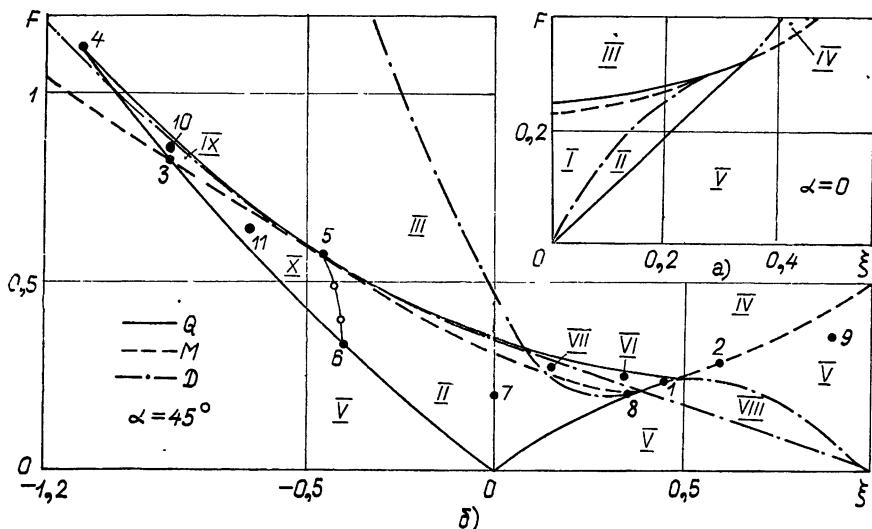


Рис 2 Бифуркационные диаграммы синхронизированного (а) и расфазированного (б) синхронизированного АГ.

I(II) — УУ, С, НУ (Φ); III — УУ; IV — УФ; V — НФ, предельный цикл;
 VI(VII) — УФ, С, НУ (Φ); VIII — НУ (предельный цикл); IX — УУ, С, УФ;
 X — УУ, С, НФ, предельный цикл.

Бифуркационные диаграммы не позволяют ответить на вопрос о существовании, количестве и характере устойчивости предельных циклов уравнения (5). Вместе с тем, этот вопрос весьма важен, и даже частичный ответ на него существенно облегчает построение фазовых портретов.

Следуя классической работе [1], с помощью метода кривой контакта можно показать, что при малых расстройках относительно максимума РХ (линия максимумов определяется уравнением $a = 1 - \xi/\tan \alpha$) предельных циклов на фазовом портрете не существует вовсе, а при больших расстройках — существует единственный устойчивый предельный цикл. Эти выводы справедливы только для крайних случаев, поскольку для средних расстроек метод контактной кривой результатов не дает. Однако исследование бифуркации решения уравнения (5) на границе M показывает, что для малых a эта граница является, по терминологии [7], безопасной. Это означает, что при пересечении ее сверху вниз устойчивый фокус становится неустойчивым и из него рождается устойчивый предельный цикл. Поскольку в области гистерезиса граница M , как видно из рис. 1, влияет на устойчивость (участок 3—5 на бифуркационной диаграмме рис. 2 б), то из соображений непрерывности ниже нее должна существовать область X, где вокруг нижней неустойчивой точки на фазовом портрете имеется устойчивый предельный цикл. Истинность такого разбиения подтверждается выводами относительно существования, единственности и расположения предельного цикла, которые можно получить на основе критерия Бендиксона. Аналогичный результат для уравнения Ван-дер-Поля получен Картрайт [8].

При $\alpha > 19^\circ$ на правой половине бифуркационной диаграммы область гистерезиса пропадает и появляется область, где существуют три

неустойчивые особые точки и устойчивый предельный цикл. Около этой области на небольшом участке $1-2$ (рис. 2 б) граница M становится опасной, т. е. здесь выше линии M возможно одновременное существование двух предельных циклов: устойчивого и неустойчивого. Следует сказать, однако, что эти особенности наблюдаются в чрезвычайно узкой области, поэтому их практически можно не принимать во внимание.

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СИНХРОНИЗИРОВАННОГО АВТОГЕНЕРАТОРА

Перед непосредственным построением фазовых портретов отметим, что для системы (5) область физически нереализуемых отрицательных амплитуд (область $a < 0$) топологически отделена от области $a > 0$. Поэтому далее мы будем рассматривать только верхнюю полуплоскость фазовой плоскости a, φ . Учитывая, кроме того, что (5) содержит гармонические функции φ , далее потреты исследуются лишь на участке $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Отметим, что переход от системы (2) к уравнению (5), сопровождающийся делением на a , справедлив только при $a \neq 0$. Если же a стремится к нулю, то второе уравнение (2) становится уравнением с малым параметром при производной, т. е. скорость изменения фазы будет возрастать. В предельном случае $a = 0$ фаза меняется скачком ($\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \infty$), что не является следствием дефектности принятой идеализации (как, например, в [3]), а свидетельствует о неопределенности значения фазы при нулевой амплитуде колебания.

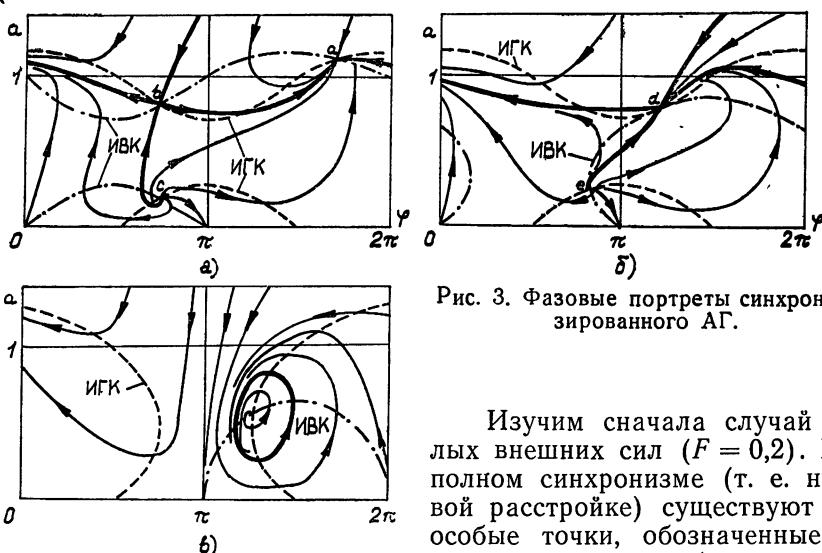


Рис. 3. Фазовые портреты синхронизированного АГ.

Изучим сначала случай малых внешних сил ($F = 0,2$). При полном синхронизме (т. е. нулевой расстройке) существуют три особые точки, обозначенные на рис. 1 а так: «*a*», «*b*» и «*c*», которые являются соответственно

устойчивым узлом, седлом и неустойчивым фокусом. Как видим из фазового портрета (рис. 3 а), областью притяжения устойчивого синхронного режима в точке «*a*» является вся плоскость. Построенный портрет соответствует точке 7 бифуркационной диаграммы (рис. 2 б). Если теперь увеличивать расстройку ξ , то устойчивый узел и седло будут сближаться. Если расстройка соответствует границе устойчивости Q (точка 8 на рис. 2 б), то изоклины горизонтальных (ИГК) и вертикальных (ИВК) касательных к фазовым траекториям касают-

ся друг друга (рис. 3 б), и в этой точке («*d*» на рис. 1 а) седло и узел сливаются и образуют особую точку второго порядка — седло-узел. Из слившихся сепаратрис седла образуется устойчивый предельный цикл, движение по которому вокруг фазового цилиндра соответствует квазипериодическому режиму биений. При дальнейшем увеличении ξ седло-узел исчезает (область V на рис. 2 б).

Обсудим теперь, к чему приведет увеличение внешнего сигнала, скажем, при полном синхронизме ($\xi = 0$). Теперь уже при возрастании F будут сближаться седло и нижний неустойчивый фокус (а потом — узел), и при $F = 0,35$ они сливаются в седло-узел (точка *f* на рис. 1 а), который затем исчезает. При дальнейшем росте F система переходит в широкую область IV на рис. 2 б, где существует единственная устойчивая особая точка. Если теперь при большом значении F , скажем $F = 0,35$, увеличивать расстройку, то точка стационарного режима, двигаясь по РХ, дойдет до границы M , после чего устойчивость фокуса теряется (переход в область V на рис. 2 б) и вокруг него возникает устойчивый предельный цикл (рис. 3 в). Движение по нему опять соответствует квазигармоническому режиму, но, в отличие от рис. 3 б, здесь уже фаза колебаний меняется около стационарного значения.

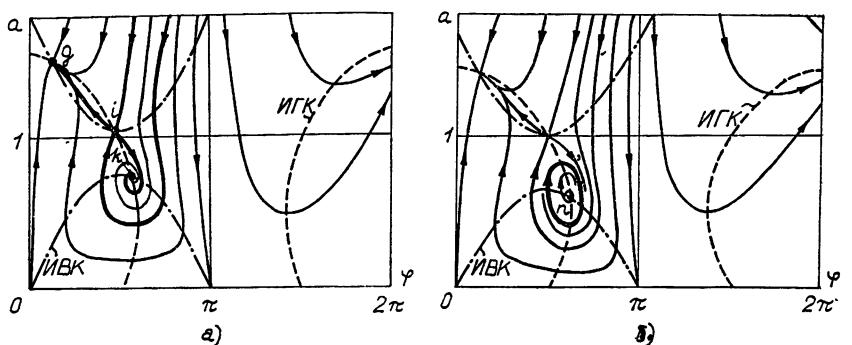


Рис. 4. Фазовые портреты синхронизированного АГ в области гистерезиса.

Рассмотрим теперь самый интересный случай, когда выбранные значения F и ξ соответствуют области гистерезиса генератора (области 5—4—3—6—5 на рис. 2 б). Пусть для $F = 0,84$ расстройка ξ выбрана равной $-0,85$, т. е. уравнение стационарного режима имеет три решения: *g*, *i*, *k*, два из которых (*g* и *k*) локально устойчивы. В этом случае фазовая плоскость системы (рис. 4 а) делится сепаратрисами седла *i* на области притяжения верхнего устойчивого узла и нижнего устойчивого фокуса (или узла). Область притяжения нижней точки является узкой и не включает малые амплитуды, поэтому после повторного включения АГ установится режим *g*. Если же при включенном АГ выключается синхронизирующий источник, то после его повторного включения может установиться тот или другой режим в зависимости от начальной разности фаз, поскольку амплитуда автономных колебаний $a = 1$ может соответствовать любой области притяжения.

При переходе за счет изменения ξ через границу Q сверху или снизу происходит слияние седла и соответственно верхнего или нижнего устойчивого узла, после чего седло-узел исчезает. При переходе точки *k* через границу M эта точка превращается в сложный фокус и происходит ветвление решения с образованием неустойчивого фокуса и устойчивого предельного цикла.

Пусть теперь $F = 0,65$ и $\xi = -0,65$, тогда, как следует из рис. 1 а, система имеет одну устойчивую (l) и две неустойчивые (m и n) особые точки. Поэтому, на первый взгляд, ожидать здесь каких-либо скачков при повторном включении не приходится. Однако анализ фазового портрета (рис. 4 б) указывает на возможность срыва устойчивости синхронного режима в точке l , поскольку вокруг неустойчивого фокуса n имеется устойчивый предельный цикл. Таким образом, ширина области гистерезиса фактически возрастает по сравнению с вычисленной в [6] на основе анализа локальной устойчивости. Отмеченная особенность типична для генераторов именно на инерционных АЭ, где экспериментально при включении синхросигнала (или при импульсной синхронизации) часто наблюдаются перескоки из синхронного режима в квазигармонический. Ясно, что этот экспериментальный факт легко объясняется на основе рис. 4 б, поскольку если при включении сигнала начальная разность фаз соответствует области притяжения предельного цикла, то реализуется режим биений. Этот вывод очень важен практически еще и потому, что инерционность современных АЭ может быть столь высокой, что область гистерезиса расширяется почти на всю полосу синхронизма и отмеченные явления возникают принципиально.

Точное нахождение на бифуркационной диаграмме границы возникновения нижнего предельного цикла затруднено. Пользуясь критерием Бендиксона о траекторной устойчивости, положение этой границы можно определить приближенно (с завышением области перескоков), она соответствует линии 5—6 на рис. 2 б. В области X существует цикл (и возможны перескоки в режим биений), а при приближении к границе 5—6 этот цикл расширяется и на границе 5—6 проходит через седло, т. е. соответствует слившимся сепаратрисам. При переходе через линию 5—6 в область II сепаратрисы разрываются, цикл пропадает и вся плоскость становится областью притяжения синхронного режима.

Отметим, что здесь обсуждались далеко не все разные по характеру фазовые портреты, а лишь самые интересные. Для АГ на безынерционном АЭ $a = 0$ и система (2) оказывается подобной классической [1]. Полученные выше результаты при этом упрощаются и качественно соответствуют [1]. Например, область гистерезиса в этом случае оказывается настолько малой по размерам, что учитывать ее практически не нужно, поэтому в [1] о ней не упоминается. Инерционность АЭ приводит к существенному качественному изменению свойств синхронизированных АГ и, как показано выше, к новым явлениям, возникающим при больших a .

ВЫВОДЫ

На основе общих уравнений синхронизированного неизохронного автогенератора [4] получены укороченные и характеристическое уравнения одноконтурной системы на инерционном двухполюснике. Изучена локальная устойчивость режимов и проведена классификация возможных фазовых портретов, что позволило свести до минимума их число, необходимое для описания переходных процессов. На основе классических методов теории колебаний выделены области, где возможно возникновение предельных циклов, а также рассмотрены различные бифуркационные случаи. В результате исследования глобальной устойчивости изучены переходные процессы при всевозможных качественно разных сочетаниях параметров и обнаружено, в частности, что область гистерезиса фактически увеличена по сравнению с рассчитываемой по известным формулам за счет образования устойчивого предельного цикла наряду с устойчивой особой точкой. Это объясняет встречающийся на практике факт перескока из синхронного режима в режим биений при включении внешнего сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, сб. Труды А. А. Андронова, изд АН СССР, М., 1956.
2. Ю. Б. Кобзарев, ЖТФ, 5, № 2, 216 (1935).
3. В. М. Богачев, С. М. Смольский, Изв высш уч зав — Радиофизика, 17, № 2, 228 (1974).
4. В. М. Богачев, С. М. Смольский, в сб Полупроводниковые приборы в технике электросвязи, под ред И. Ф. Николаевского, вып. 12, изд. Связь, М, 1973, стр. 160.
5. В. А. Малышев, Изв высш уч зав — Радиоэлектроника, 4, № 5, 513 (1961).
6. С. М. Смольский, Изв высш. уч зав. — Радиоэлектроника, 18, № 10, 111 (1975).
7. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М., 1949
8. M. L. Cartwright, Forced oscillations in non-linear systems, Princeton University Press (Annals of Mathematic Studies, № 20), 1950.
9. И. В. Лебедев, Техника и приборы СВЧ, т. 2, изд. Высшая школа, М, 1972.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
3 мая 1976 г.

TRANSIENT PROCESSES IN LOCKED OSCILLATOR USING INERTIAL ACTIVE DEVICE

S. L. Artemenkov, S. M. Smol'sky

By means of the phase plane method the synchronous oscillations amplitude and phase transients in the oscillator using inertial one-port device have been studied. It is shown that since there appears the stable limit cycle and jumping to quasiharmonic oscillations becomes possible the hysteresis area gets expanded.

УДК 538.56 : 519.25

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ И СЛУЧАЙНЫМ СИГНАЛАМИ

М. И. Калинин

Рассматривается линейная динамическая система, параметры которой подвергаются возмущению детерминированным сигналом и стационарным случайнм процессом. Для второго статистического момента системы получено приближенное локальное уравнение (уравнение Кубо). После усреднения по времени оно применяется к исследованию вопроса о влиянии гауссовых флуктуаций частоты гармонического осциллятора на основной параметрический резонанс, вызванный синусоидальным возмущением частоты. Показано, что случайные флуктуации частоты в зависимости от их спектра и от степени расстройки синусоидального сигнала могут как способствовать, так и препятствовать проявлению параметрического резонанса.

При проведении некоторых экспериментальных работ может представить интерес исследование поведения динамической системы, которая подвергается одновременному параметрическому возбуждению периодическим детерминированным и случайнм сигналами. В частности, возможно такое положение, когда уровень детерминированного сигнала хотя и близок к пороговому значению, но все-таки не достаточен для наступления параметрического резонанса в системе. При этом возникает вопрос о том, будет ли способствовать дополнительное случайное параметрическое возбуждение системы наступлению в ней параметрического резонанса.

Этот вопрос исследуется в данной работе на примере линейной динамической системы и, более подробно, гармонического осциллятора с флуктуирующей частотой.

1. Линейная динамическая система описывается N -компонентным вектором состояния $z(t)$, подчиняющимся стохастическому дифференциальному уравнению с неслучайным начальным условием:

$$\frac{dz(t)}{dt} = [A + B\theta(t)]z(t), \quad z(0) = z_0. \quad (1)$$

Здесь A и B — постоянные неслучайные матрицы, причем A предполагается диссипативной или консервативной. Вещественная случайная функция $\theta(t)$ является суммой неслучайной ограниченной функции $\mu(t)$ и стационарного случайнго процесса $\xi(t)$:

$$\theta(t) = \mu(t) + \xi(t). \quad (2)$$

Закон флуктуаций $\xi(t)$ задается набором кумулянтных функций $g_s(t_1, \dots, t_s)$ ($s = 1, 2, \dots$).

В [1] для исследования второго статистического момента $\langle \hat{Z}(t) \rangle = \langle z(t) \times z^*(t) \rangle$ используется уравнение Дайсона в одногрупповом

приближении. Это уравнение в случае стационарных флуктуаций параметра $\theta(t)$ может быть упрощено так же, как это сделано в [2] при переходе к уравнению Кубо ([9] из [2]). Действительно, согласно [3, 4] кумулянтные функции случайного процесса $\theta(t)$, определяемого выражением (2), есть: $g_1 + \mu(t)$, $g_s(t_1, \dots, t_s)$ ($s = 2, 3, \dots$). Следовательно, функция $\mu(t)$ приводит согласно [1] к появлению дополнительного локального члена в уравнении Дайсона и не оказывает влияния на процесс пренебрежения нелокальностью. Вследствие этого, для второго статистического момента динамической системы (1) с параметром (2) можно записать локальное уравнение, соответствующее приближению Кубо:

$$\frac{d\hat{Z}_K(t)}{dt} = \left[\hat{A} + \hat{B}\mu(t) + \int_0^\infty \hat{M}(t') e^{-\hat{A}t'} dt' \right] \hat{Z}_K(t), \quad (3)$$

$$\hat{Z}_K(0) = \hat{Z}_0.$$

Здесь $\hat{M}(t)$ — матричный массовый оператор уравнения Дайсона для системы (1) с $\theta(t) = \xi(t)$, равный сумме (11) из [1]. Если $\xi(t)$ есть стационарный гауссов процесс с нулевым средним значением, то

$$\hat{M}(t) = \hat{B}e^{\hat{A}t} \hat{B} \langle \xi(t) \xi(0) \rangle. \quad (4)$$

Матрицы \hat{A} и \hat{B} (с четырьмя индексами) равны

$$\hat{A} = A \times I + I \times A^*, \quad \hat{B} = B \times I + I \times B^*.$$

Для погрешности применения уравнения (3) к вычислению второго статистического момента справедливы общие оценки работы [2].

2. Применим уравнение (3) к исследованию основного параметрического резонанса осциллятора с флуктуирующей частотой:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 [1 + \theta(t)] y(t) = 0. \quad (5)$$

Здесь неслучайный положительный декремент затухания считаем малым, $\beta \ll \omega_0$; случайная функция $\theta(t)$ имеет вид (2), при этом $\mu(t) \sim \sim \sin \nu t$. Обычным преобразованием

$$y(t) = e^{-\beta t} x(t)$$

член с затуханием исключается и уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 [1 + \tilde{\theta}(t)] x(t) = 0, \quad (6)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а функция $\tilde{\theta}(t)$ равна

$$\tilde{\theta}(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \theta(t) \equiv h \sin \nu t + \xi(t).$$

Амплитуда синусоидального сигнала предполагается малой, $h \ll 1$, а $\xi(t)$ считается гауссовым стационарным случайным процессом с нулевым средним значением.

Переходя к переменным

$$z_1(t) = \frac{1}{2} \left[x(t) + \frac{1}{i\omega} \frac{dx(t)}{dt} \right], \quad z_2(t) = \frac{1}{2} \left[x(t) - \frac{1}{i\omega} \frac{dx(t)}{dt} \right],$$

получим для вектора $(z_1(t), z_2(t))$ уравнение вида (1). Для второго статистического момента осциллятора можно записать приближенное уравнение Кубо (3) с матричным массовым оператором $\hat{M}(t)$, равным (4). Оно представляет собой систему трех дифференциальных уравнений для трех функций $\langle \hat{Z}_{11}(t) \rangle \equiv \langle \hat{Z}_{22}(t) \rangle$, $\langle \hat{Z}_{12}(t) \rangle$, $\langle \hat{Z}_{21}(t) \rangle$ с осциллирующими коэффициентами. Переходя к представлению взаимодействия по формулам

$$\langle \hat{Z}_{11}(t) \rangle = R_1(t), \quad \langle \hat{Z}_{12}(t) \rangle = e^{i\nu t} R_2(t), \quad \langle \hat{Z}_{21}(t) \rangle = e^{-i\nu t} R_3(t),$$

приводим эту систему к виду, допускающему применение метода усреднения по времени [5]. В результате получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}_1(t)}{dt} &= 4S(2\omega)\bar{R}_1(t) + \frac{\hbar\omega}{4} [\bar{R}_2(t) + \bar{R}_3(t)], \\ \frac{d\bar{R}_2(t)}{dt} &= \frac{\hbar\omega}{2} \bar{R}_1(t) + [2S(2\omega) - 4S(0) - i\Delta] \bar{R}_2(t), \\ \frac{d\bar{R}_3(t)}{dt} &= \frac{\hbar\omega}{2} \bar{R}_1(t) + [2S(2\omega) - 4S(0) + i\Delta] \bar{R}_3(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь черта сверху обозначает значение $R_i(t)$ в приближении усредненного по времени уравнения. Величина Δ равна отклонению частоты ν сигнала от резонансной (расстройка) и предполагается малой:

$$\Delta = \nu - 2(\omega - k) \quad (|\Delta| \ll \nu).$$

Величины $S(\Omega)$ и k определяются равенствами

$$\begin{aligned} S(\Omega) &= \frac{\omega^2}{4} \int_0^\infty \langle \xi(t) \xi(0) \rangle \cos \Omega t dt, \\ k &= \frac{\omega^2}{4} \int_0^\infty \langle \xi(t) \xi(0) \rangle \sin 2\omega t dt, \end{aligned} \quad (8)$$

$S(\Omega)$ характеризует спектральную плотность флюктуации частоты с точностью до множителя. Одним из условий применимости системы (7) является неравенство $1/\omega t_m \ll 1$ (см. [2]), где марковское время релаксации t_m определено в [2]. Из него следуют ограничения* на коэффициенты уравнений (7): $S(0) \ll \omega$, $S(2\omega) \ll \omega$, $|k| \ll \omega$.

Предполагая решение системы (7) в виде $\bar{R}_i(t) = e^{\lambda t}$, получаем характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{aligned} [\lambda - 4S(2\omega)] \{[\lambda - 2S(2\omega) + 4S(0)]^2 + \Delta^2\} - \\ - (\hbar\omega/2)^2 [\lambda - 2S(2\omega) + 4S(0)] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

* В рассматриваемом случае малого декремента затухания $\beta \ll \omega_0$ (высокой добротности системы) эти ограничения от добротности не зависят. Отметим, что из достаточных условий применимости, найденных в [2], не следует никаких ограничений на отношение $S(0)/S(2\omega)$.

Корни этого уравнения λ_i ($i = 1, 2, 3$) определяют поведение второго статистического момента осциллятора. Если все корни уравнения (9) имеют отрицательные действительные части, то происходит затухание колебаний. Если же некоторые λ_i имеют положительные действительные части, то можно определить критическое затухание:

$$\beta_{kp} = \frac{1}{2} \max_{\{i\}} \operatorname{Re} \lambda_i. \quad (10)$$

При $\beta > \beta_{kp}$ происходит затухание колебаний и осциллятор теряет энергию. Если же $\beta < \beta_{kp}$, то происходит раскачка осциллятора.

Найдем критическое затухание в некоторых частных случаях.

$$1) \quad 2S(0) + S(2\omega) \ll \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 - \Delta^2}, \quad |\Delta| < \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (11)$$

Условие (11) соответствует случаю «малых» флюктуаций частоты, когда расстройка мала, т. е. осциллятор без флюктуаций частоты находится в резонансной зоне. В этом случае

$$\beta_{kp} = \frac{\hbar\omega}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{2\Delta}{\hbar\omega}\right)^2} + S(2\omega) - 2S(0) + \frac{1}{2} \frac{S(2\omega) + 2S(0)}{1 - (2\Delta/\hbar\omega)^2}. \quad (12)$$

Из выражения (12) видно, что флюктуации частоты влияют на резонанс осциллятора различным образом в зависимости от их вида. Если $S(2\omega) \ll S(0)$ (низкочастотные флюктуации), то шум при достаточно малых расстройках ($|\Delta| < \hbar\omega\sqrt{2}/4$) препятствует проявлению параметрического резонанса; при достаточно больших расстройках ($|\Delta| > \hbar\omega\sqrt{2}/4$), удовлетворяющих условию (11), шум начинает способствовать раскачке осциллятора. Если же $S(2\omega) \gg S(0)$ (спектр флюктуаций сосредоточен в полосе около 2ω), то шум всегда способствует наступлению резонанса в осцилляторе.

$$2) \quad S(2\omega) + 2S(0) \ll \sqrt{\Delta^2 - \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2}, \quad |\Delta| > \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (13)$$

При таком условии один только синусоидальный сигнал не способен раскачивать осциллятор (система находится вне резонансной зоны).

$$\beta_{kp} = S(2\omega) - 2S(0) + \frac{S(2\omega) + 2S(0)}{1 - (\hbar\omega/2\Delta)^2} > 0. \quad (14)$$

Как видно из выражения (14), флюктуации частоты любого типа способствуют наступлению параметрического резонанса.

Если в двух рассмотренных случаях положить $S(2\omega) + 2S(0) = 0$ (отсутствие флюктуаций частоты), то получится результат обычного параметрического резонанса [5] осциллятора.

$$3) \quad S(2\omega) + 2S(0) \gg \frac{\hbar\omega}{2}, \quad S(2\omega) + 2S(0) \gg |\Delta|. \quad (15)$$

В этом случае основную роль в резонансе системы играют случайные флюктуации частоты.

$$\beta_{kp} = 2S(2\omega) + \frac{(\hbar\omega/4)^2}{S(2\omega) + 2S(0)}. \quad (16)$$

Наличие шума приводит к резонансу при условии, что $\beta < \beta_{kp}$. Сину-

соидальный сигнал в этом случае также способствует резонансу, независимо от величины расстройки.

Если в формуле (16) положить $h = 0$, то критическое затухание переходит в его значение, полученное в [^{2, 6}].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 7, 981 (1974).
2. Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **20**, № 3, 373 (1977).
3. М. Кендалл, А. Стьюарт, Теория распределений, изд. Наука, М., 1966.
4. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 11, 1736 (1974).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974.
6. G. Papanicolaou and J. B. Keller, SIAM, J. Appl. Math., **21**, № 2, 287 (1971).

Всесоюзный научно-исследовательский
институт метрологической службы

Поступила в редакцию
8 июня 1976 года.

ON SIMULTANEOUS PARAMETRIC EXCITATION OF A DYNAMIC SYSTEM BY DETERMINATE AND RANDOM SIGNALS

M. I. Kalinin

A linear dynamic system is under consideration the parameters of which are excited by a determinate signal and a stationary random process. An approximate local equation (the Kubo equation) is obtained for the second statistical moment of the system. After time averaging this equation is applied to investigate the influence of the Gaussian frequency fluctuations of a harmonic oscillator upon the basic parametric resonance caused by the frequency sinusoidal disturbance. It is shown that, depending on noise spectrum and sinusoidal signal detuning, random frequency fluctuations can assist and prevent to manifestation of parametric resonance.

УДК 538.56 : 519.25

МОМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗА СЛУЧАЙНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

A. I. Саичев

Получены точные формулы, выражающие моменты корреляционной функции интенсивности за одномерным фазовым экраном через структурную функцию вносимых экраном фазовых искажений. Моменты корреляционной функции интенсивности являются полиномами конечной степени от расстояния до фазового экрана. Обсуждается асимптотическое поведение корреляционной функции интенсивности на больших расстояниях от фазового экрана. Отмечено, что обобщение полученных результатов на случай двумерного фазового экрана не вызывает принципиальных затруднений.

1. Статистика волн за случайным фазовым экраном изучена достаточно хорошо [1-5]. Однако анализ флуктуаций интенсивности волны за экраном наталкивается на большие вычислительные трудности. Тем не менее некоторые характеристики флуктуаций интенсивности находятся довольно легко. К ним относятся, в частности, моменты корреляционной функции интенсивности и ее асимптотическое поведение на больших расстояниях от экрана. В данной работе анализируются вышеупомянутые характеристики флуктуаций интенсивности.

Ниже рассматривается волна за одномерным экраном. Обобщение результатов работы на случай двумерного экрана не вызывает принципиальных затруднений.

2. Будем считать, что амплитуда волны за экраном удовлетворяет уравнению

$$2ik \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0.$$

Полагая, что волна статистически однородна по y , введем функцию $B(x, \rho, s) = \left\langle E\left(x, y + \frac{s}{2}\right) E^*\left(x, y - \frac{s}{2}\right) E\left(x, y + \rho - \frac{s}{2}\right) E^*\left(x, y + \rho + \frac{s}{2}\right) \right\rangle - |B_E(s)|^2$, $B_E(s) = \langle E(x, y) E^*(x, y + s) \rangle$.

Ее фурье-образ

$$\Phi(x, \rho, u) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(x, \rho, s) e^{-iks} ds$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + u \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0. \quad (1)$$

Если на фазовый экран, изменяющий фазу на нормальную случайнную функцию $\phi(y)$, перпендикулярно падает плоская волна единичной интенсивности, то граничное условие уравнения (1) имеет вид

$$\Phi_0(\rho, u) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikus} B_0(\rho, s) ds,$$

$$B_0(\rho, s) = \exp \left[-D \left(\frac{s}{l} \right) \right] \left[\exp \left\{ -D(\tau) + \frac{1}{2} \left[D \left(\tau - \frac{s}{l} \right) + D \left(\tau + \frac{s}{l} \right) \right] \right\} - 1 \right]. \quad (2)$$

Здесь $D(\tau) = \frac{1}{2} \langle [\varphi(y) - \varphi(y + \rho)]^2 \rangle = \sigma^2 [1 - K(\tau)]$, $\tau = \rho/l$, l — характерный масштаб фазовых искажений. Решение уравнения (1) вместе с (2) таково: $\Phi(x, \rho, u) = \Phi_0(\rho - ux, u)$. Корреляционная функция интенсивности следующим образом выражается через Φ_0 :

$$B_I(x, \rho) = \langle I(x, y) I(x, y + \rho) \rangle - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\rho - ux, u) du. \quad (3)$$

Отсюда моменты корреляционной функции интенсивности $P_{2n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2n} B_I d\tau = \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m} (-1)^m z^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2(n-m)} \frac{\partial^{2m} B_0(\rho, s)}{\partial \gamma^{2m}} \Big|_{s=0} d\tau$. Здесь $z = \frac{x\sigma}{kl^2}$ — отношение x к характерному радиусу кривизны фазовых искажений экрана [2], $\gamma = s\sigma/l$. Таким образом, $P_{2n}(x)$ — конечные полиномы x , что является следствием полиномиального представления моментов поля в однородной среде, отмеченного в [6]. Из вида $P_{2n}(x)$ следует, что для существования моментов корреляционной функции и приведенных ниже асимптотических разложений необходима конечность структурной функции фазовых искажений и конечность всех ее производных.

Приведем явные выражения первых четырех моментов:

$$P_0(x) = P_2(x) = 0, \quad P_4(x) = 12a_1 z^2 + 3a_2 z^4, \\ P_6(x) = 180a_3 z^2 + 45(4ba_1 + a_4)z^4 + 15(3ba_2 + a_5)z^6 - \frac{1}{\sigma^2} 15a_6 z^6. \quad (4)$$

Сюда входят следующие безразмерные коэффициенты:

$$b = -K^{(2)}(0), \quad a_1 = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau, \quad a_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [K^{(2)}(\tau)]^2 d\tau, \\ a_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 K(\tau) d\tau, \quad a_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 K^{(2)}(\tau) d\tau, \\ a_5 = \int_{-\infty}^{\infty} [K^{(2)}(\tau)]^3 d\tau, \quad a_6 = \int_{-\infty}^{\infty} K^{(2)}(\tau) K^{(4)}(\tau) d\tau.$$

В области эффективной фокусировки $z \sim 1$ слагаемые разных степеней вносят в моменты (4) одинаковый вклад.

Найденные выражения для моментов корреляционной функции интенсивности могут быть полезны, например, для определения по известным моментам вида структурной функции фазовых искажений экрана.

Отметим, что момент $P_4(x)$, вычисленный в приближении геометрической оптики, совпадает с точным выражением (4). При $\sigma^2 \gg 1$ и высшие моменты на любых расстояниях мало отличаются от соответствующих моментов, найденных в геометрооптическом приближении. Так, $P_6(x)$ отличается от геометрооптического на последнее слагаемое. Близость точных моментов к найденным в геометрооптическом приближении объясняется, как видно из работы [5], тем, что в приближении геометрической оптики функция $\Phi(x, \rho, u)$ удовлетворяет тому же уравнению (1). Изменяется лишь граничное условие (2), в котором в приближении геометрической оптики

$$B_0(\rho, s) = \exp \left[\frac{K^{(2)}(0) \gamma^2}{2} \right] \left\{ \exp \left[-\frac{K^{(2)}(\tau) \gamma^2}{2} \right] - 1 \right\}.$$

Точное выражение для $B_0(\rho, s)$ (2) можно записать в виде

$$B_0(\rho, s) = \exp \left[\frac{K^{(2)}(0) \gamma^2}{2} \right] \prod_{n=2}^{\infty} \exp \left[\frac{K^{(2n)}(0) \gamma^{2n}}{2n! \sigma^{2n-2}} \right] \times \\ \times \left[\exp \left\{ -\frac{K^{(2)}(\tau) \gamma^2}{2} \right\} \prod_{n=2}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{K^{(2n)}(\tau) \gamma^{2n}}{2n! \sigma^{2n-2}} \right\} - 1 \right].$$

Отсюда видно, что в точном выражении экспоненты, входящие в геометрооптическое $B_0(\rho, s)$, доминируют на функции более медленные по γ при $\sigma \gg 1$. Соответственно производные от них по γ , а значит и вклад в $P_{2n}(x)$, гораздо меньше, чем вклад от $B_0(\rho, s)$ в геометрооптическом приближении. Физически же близость точных моментов к вычисленным в приближении геометрической оптики связана с тем, что на вид моментов мало влияют особенности интенсивности вблизи каустик, формирующие $B_I(x, \rho)$ при малых ρ , а крупномасштабные корреляции поля, определяющие вид моментов, при $\sigma \gg 1$ удовлетворительно описываются в приближении геометрической оптики.

3. При больших z $P_n \sim z^n$. В то же время известно [1], что сама корреляционная функция стремится к независящей от x функции $|B_E(\rho)|^2$. Кажущийся парадокс объясняется тем, что при больших x в корреляционной функции интенсивности, наряду с $|B_E(\rho)|^2$, имеются малые по амплитуде, но медленно спадающие компоненты, которые и приводят к росту моментов. Заметим, что эти медленные составляющие ответственны и за сохранение известного инварианта

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_I(x, \rho) d\rho = 0,$$

которому не удовлетворяет $|B_E(\rho)|^2$.

Рассмотрим подробнее стремление корреляционной функции и спектра интенсивности к стационарному состоянию. Для этого запишем легко выводимое из (2), (3) равенство:

$$S[x, x] = \int_{-\infty}^{\infty} B_I e^{ix\rho} d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (\alpha \Omega)^{2n} S_n[\Omega], \quad (5)$$

$$S_n[\Omega] = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2n} e^{-D(\Omega)} \left[\exp \left\{ -D(\tau) + \frac{1}{2} [D(\tau - \Omega) + D(\tau + \Omega)] \right\} - 1 \right] d\tau,$$

$$\Omega = \frac{xx}{kl}, \quad \alpha = \frac{kl^2}{x}.$$

При $\Omega \gg 1$ оно переходит в стационарный спектр:

$$S[x, \kappa] \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (\alpha\Omega)^{2n} S_n[\infty] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\tau} [e^{-D(\tau)} - \exp(-\sigma^2)] d\tau = \\ = S_{\infty}[\kappa] \quad (\kappa \neq 0).$$

Чтобы получить асимптотическое разложение корреляционной функции, перепишем (5) следующим образом:

$$S[x, \kappa] = S_{\infty}[\kappa] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (\alpha\Omega)^{2n} \tilde{S}_n[\Omega], \\ \tilde{S}_n[\Omega] = S_n[\Omega] - S_n[\infty].$$

Отсюда искомое разложение корреляционной функции интенсивности имеет вид

$$B_I(x, \rho) = e^{-D(\tau)} - e^{-\sigma^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} B_n(\alpha\tau) \alpha^{2n+1}, \quad (6)$$

где

$$B_n(p) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\Omega d\tau e^{-i\Omega p} (\Omega\tau)^{2n} \left[\exp \left\{ -D(\Omega) - D(\tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} [D(\tau - \Omega) + D(\tau + \Omega)] \right\} - e^{-D(\Omega)} - e^{-D(\tau)} + e^{-\sigma^2} \right].$$

Оценки входящих сюда интегралов показывают, что при $\sigma^2 \gg 1$ на расстояниях $z \gg 1$, а при $\sigma^2 \sim 1$ в зоне Фраунгофера в (6) можно ограничиться первыми двумя слагаемыми. Следовательно, дисперсия интенсивности на таких расстояниях стремится к стационарному значению по закону $1/x$.

Автор благодарен А. Н. Малахову за внимание к работе, а также И. Г. Якушкину за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. E. Salpeter, *Astrophys. J.*, **147**, № 2, 433 (1967).
2. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 9, 1427 (1971).
3. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 11, 1684 (1974).
4. И. Г. Якушкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 9, 1350 (1974).
5. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 5, 699 (1974).
6. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 9, 1353 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
5 ноября 1976 г.

MOMENTS OF THE INTENSITY CORRELATION FUNCTION BEHIND A RANDOM PHASE SCREEN

A. I. Saichev

Precise formulas are obtained, which express the moments of the intensity correlation function behind a one-dimensional phase screen by means of the structural function of phase distortion made by the screen. The moments of the intensity correlation function are the finite power polynomials of the distance to the phase screen. An asymptotic behaviour of the intensity correlation function at long distances from the phase screen is under discussion. It is noted that the generalization of the results obtained for a case of the two-dimensional phase screen is not very difficult.

УДК 530.145

О МЕТОДАХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ДИНАМИКЕ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

B. I. Кляцкин

Получено замкнутое уравнение в вариационных производных для среднего значения функции Грина линейного стохастического уравнения. Закон распределения флуктуаций параметров не конкретизируется. Анализируются приближенные методы перехода от этого уравнения к интегральным уравнениям. Получены приближенные уравнения, обобщающие известные уравнения Крейчнана и Бурре на случай негауссовых флуктуаций параметров.

При изучении статистических характеристик решений динамических задач с флуктуирующими параметрами в настоящее время широко используются методы, заимствованные из квантовой теории поля (см., например, монографии [1, 2] и обзорные работы [3, 4]). Суть их заключается в построении ряда теории возмущения для статистических характеристик интересующей нас величины и в исследовании его методами квантовой теории поля. При этом каждый член ряда удобно представлять в графическом виде (в виде так называемых диаграмм Фейнмана), где каждому элементу графика сопоставляется определенная функция или оператор, т. е. каждый график сопоставляется определенному аналитическому выражению. Мы не будем рассматривать диаграммную технику как таковую, а получим основные результаты ее непосредственно, используя функциональные методы, развитые в [5]. При этом мы не будем ограничиваться конкретным характером флуктуаций параметров.

Исходным стохастическим уравнением является линейное интегральное (или интегродифференциальное) уравнение для функции Грина

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \quad (1)$$

$$+ \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2) S(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'),$$

где через \mathbf{r} обозначены все аргументы функций S и f , включая и индексные, по которым интегрирование заменяется суммированием. Функция $f(\mathbf{r})$ является случайным полем, а функция $S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является функцией Грина задачи в случае отсутствия флуктуаций параметров, т. е. при $f(\mathbf{r}) \equiv 0$. Величина $\Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ в ряде задач может быть и оператором. В этом случае запись в форме (1) подразумевает, что оператор Λ действует на все, что стоит справа от него. Переход от нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнению типа (1) осуществляется путем перехода к эквивалентному линейному стохастическому уравнению в частных производных (уравнению Лиувилля), характеристики которого является решение соответствующей системы. Функция S в этом случае будет функцией Грина для стохастического уравнения Лиувилля, и величина Λ будет связана

с дифференциальным оператором. Для задач, описываемых линейной системой уравнений, величина $\Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ будет функцией.

Для простоты будем далее считать Λ функцией, а не оператором. Операторный характер Λ несущественно усложняет дальнейшее рассмотрение. В самом деле, в случае, когда величина Λ является оператором, можно ввести дельта-функцию по переменным, на которые действует этот оператор, с соответствующим интегрированием и перейти к рассматриваемому случаю.

Решение уравнения (1) является функционалом поля $f(\mathbf{r})$, т. е. $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S[\mathbf{r}, \mathbf{r}', f(\tilde{\mathbf{r}})]$. Уравнение (1) можно решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения функцию S_0 . Усредненный полученный ряд по ансамблю реализаций поля $f(\mathbf{r})$, получим итерационный ряд для функции $\langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$, в который будут входить все моменты поля $f(\mathbf{r})$. Далее можно, перегруппировав члены этого ряда, выразить правую часть разложения через саму функцию $\langle S \rangle$. При этом возникают новые неизвестные функции, определяемые соответствующими итерационными рядами, которые, по аналогии с квантовой теорией поля, называются массовой и вершинной функциями (см., например, [1-3]).

Рассмотрим вместо (1) вспомогательное уравнение

$$S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f + \eta] = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \quad (1')$$

$$+ \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) [f(\mathbf{r}_2) + \eta(\mathbf{r}_2)] S[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; f + \eta],$$

где $\eta(\mathbf{r})$ — произвольная детерминированная функция. Интересующую нас функцию $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ получим, полагая в (1') $\eta(\mathbf{r}) \equiv 0$, т. е.

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f] = S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f + \eta]_{\eta=0}.$$

Усредним уравнение (1'). Для расщепления корреляции $\langle f S \rangle$ можно воспользоваться соответствующими формулами, полученными в [5], в результате чего получаем уравнение

$$\begin{aligned} G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta] &= S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ &\times \eta(\mathbf{r}_2) G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta] + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ &\times \left\langle \Omega_{\mathbf{r}_2} \left[\frac{\delta}{i \delta f(\tilde{\mathbf{r}})} \right] S[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; f + \eta] \right\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функционал $\Omega_r[v(\tilde{\mathbf{r}})] = \frac{\delta}{i \delta v(\mathbf{r})} \Theta[v(\tilde{\mathbf{r}})]$, а $\Theta[v(\tilde{\mathbf{r}})]$ — логарифм характеристического функционала поля $f(\mathbf{r})$. Через функционал $G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta]$ обозначена величина $\langle S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f + \eta] \rangle$. Учитывая далее, что функционал $S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f + \eta]$ является функционалом от аргумента $f(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})$, можно заменить операцию вариационного дифференцирования по $f(\mathbf{r})$ на дифференцирование по $\eta(\mathbf{r})$ и переписать уравнение (2) в виде замкнутого уравнения в вариационных производных, аналогичного уравнению Швингера в квантовой теории поля:

$$\begin{aligned} G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta] &= S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \times \\ &\times \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \left[\eta(\mathbf{r}_2) + \Omega_{\mathbf{r}_2} \left[\frac{\delta}{i \delta \eta(\tilde{\mathbf{r}})} \right] \right] G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta]. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) для функционала G можно решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения величину S_0 . Полагая в полученном разложении $\eta = 0$, получаем итерационный ряд для функции $\langle S(r, r') \rangle$.

Для упрощения дальнейшего изложения запишем уравнение (3) в символическом виде (имея в виду, что не составляет труда на каждом этапе восстановить полную запись соответствующих выражений):

$$G = S_0 + S_0 \Lambda \left(\eta + \Omega \left[\frac{\delta}{i \delta \eta} \right] \right) G. \quad (3')$$

Следуя [2], введем теперь функционал G^{-1} , обратный к G , такой, что

$$G^{-1} G = 1, \quad G G^{-1} = 1. \quad (4)$$

Здесь под единицей понимается соответствующая дельта-функция. Введем в рассмотрение также функционал

$$\Gamma = - \frac{\delta G^{-1}}{\delta \eta}, \quad (5)$$

который назовем вершинным функционалом.

Варьируя (4) по полю η , получаем равенство

$$\frac{\delta G}{\delta \eta} = G \Gamma G, \quad (6)$$

подстановка которого в (3') приводит к уравнению

$$G = S_0 + S_0 \Lambda \eta G + S_0 Q G. \quad (7)$$

Функционал

$$Q = \Lambda \left\{ \Omega \left[\frac{\delta}{i \delta \eta} \right] G \right\} G^{-1} \quad (8)$$

назовем массовым функционалом.

Умножая теперь (7) справа на G^{-1} , а слева на S_0^{-1} (и интегрируя по соответствующим аргументам), получаем уравнение для функционала G^{-1} :

$$S_0^{-1} - G^{-1} = \Lambda \eta + Q. \quad (9)$$

Варьируя теперь (9) по полю η , получаем уравнение для функционала Γ :

$$\Gamma = \Lambda + \frac{\delta}{\delta \eta} Q. \quad (10)$$

Система функциональных уравнений (7), (10) замкнута относительно функционалов G и Γ . Их решения, однако, связаны соотношением (6). Уравнение (10) для Γ можно решать итерациями, выбрав в качестве нулевого приближения величину Λ . Если выражать при этом вариационные производные G по η с помощью формулы (6), то мы придем к интегральным уравнениям для Γ и G с бесконечным числом членов, каждое из которых не содержит других функционалов кроме Γ и G . Полагая теперь $\eta = 0$, можно получить замкнутую систему интегральных уравнений.

Остановимся теперь более подробно на случае, когда поле $f(r)$ является гауссовым случайным полем с корреляционной функцией $B(r, r') = \langle f(r) f(r') \rangle$. В этом случае функционалы

$$\Theta [v(\tilde{r})] = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}'),$$

$$\Omega_r [v(\tilde{r})] = i \int d\mathbf{r}' B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}'),$$

и для массового функционала получаем выражение

$$Q = \Lambda B G \Gamma, \quad (11)$$

а уравнения (7), (10) принимают вид

$$G = S_0 + S_0 \Lambda \eta G + S_0 \Lambda B G \Gamma G, \quad (12)$$

$$\Gamma = \Lambda + \Lambda B G \Gamma G \Gamma + \Lambda B G \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta}.$$

Полагая теперь $\eta = 0$, получаем замкнутую систему уравнений:

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q \langle S \rangle \quad (\text{уравнение Дайсона}),$$

$$Q = \Lambda B \langle S \rangle \tilde{\Gamma}, \quad (13)$$

$$\tilde{\Gamma} = \Lambda + \Lambda B \langle S \rangle \tilde{\Gamma} \langle S \rangle \tilde{\Gamma} + \dots \quad (\tilde{\Gamma} = \Gamma|_{\eta=0}).$$

Система уравнений (13) очень сложна и в настоящее время еще мало изучена. Простейший путь упрощения ее заключается в обрывании бесконечного ряда в уравнении $\tilde{\Gamma}$. Если это сделать на самом первом шаге, то мы приходим к замкнутому нелинейному уравнению (приближение Крейчнана [6]):

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q_K \langle S \rangle, \quad Q_K = \Lambda B \langle S \rangle \Lambda. \quad (14)$$

Если теперь в выражении для массовой функции Q_K заменить $\langle S \rangle$ на S_0 , то мы приходим к линейному уравнению (приближение Бурре [7, 8]):

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 \Lambda B S_0 \Lambda \langle S \rangle. \quad (15)$$

Отметим, что ясных условий применимости приближений (14), (15) в настоящее время не имеется.

Функционал Γ и, следовательно, функция $\tilde{\Gamma}$ тесно связаны с величиной $\langle SS \rangle$. В самом деле, легко видеть, что уравнение (1) эквивалентно функциональному уравнению

$$\frac{\delta S[r, r', f]}{\delta f(r_0)} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_3 S[\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, f] \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_3) S[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; f] \quad (16)$$

с «начальным» условием

$$S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f]_{f=0} = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

И, следовательно, выражение (6) при $\eta = 0$ можно переписать в виде

$$\langle S \Lambda S \rangle = \langle S \rangle \tilde{\Gamma} \langle S \rangle.$$

Таким образом, различные приближения для функции Γ эквивалентны определенным гипотезам расщепления корреляции $\langle SS \rangle$. Так, приближение Крейчнана (14) соответствует равенству

$$\langle S \Lambda S \rangle = \langle S \rangle \Lambda \langle S \rangle,$$

а приближение Бурре (15) эквивалентно требованию

$$\langle S \Lambda S \rangle = S_0 \Lambda \langle S \rangle.$$

В общем же случае, расщепляя корреляцию $\langle SS \rangle$ с помощью формулы, полученной в [5], можно записать операторное выражение

$$\langle S \Lambda S \rangle = G \left[B \frac{\delta}{\delta \eta} \right] \Lambda G [\eta] |_{\eta=0},$$

эквивалентное, по своей сути, введению вершинной функции.

Ометим теперь, что в случае гауссова поля $f(\mathbf{r})$ знание функционала $G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta]$ эквивалентно знанию функционала $\Phi[\mathbf{r}, \mathbf{r}', v] = \langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r})} \rangle$, описывающего все статистические корреляции функции $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ с полем $f(\mathbf{r})$, введенного в [2]. В самом деле, согласно [5] можно записать функционал Φ в виде

$$\Phi[\mathbf{r}, \mathbf{r}', v] = \langle e^{i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r})} \rangle \langle S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}}) + i \int d\mathbf{r}_1 B(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_1) v(\mathbf{r}_1)] \rangle,$$

откуда получаем равенство

$$\begin{aligned} \Phi[\mathbf{r}, \mathbf{r}', v] \exp \left(\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_1) v(\mathbf{r}_2) \right) = \\ = G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i \int d\mathbf{r}_1 B(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_1) v(\mathbf{r}_1)]. \end{aligned}$$

Остановимся теперь на уравнении Дайсона общего вида (7). Заметим, что функционал $\Omega[v]$ может быть представлен в виде ряда Тейлора [5] по v :

$$\Omega[v] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1} v^n,$$

где K_n — кумулянтные функции случайного поля $f(\mathbf{r})$. Следовательно, массовый функционал (8) можно записать в виде

$$Q = \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\{ \frac{\delta^n}{\delta \eta^n} G \right\} G^{-1}, \quad (8')$$

где вариационные производные по η от функционала G вычисляются по формуле (6). Структура уравнения Дайсона в этом случае очень сложна. Простейшие пути упрощения этого уравнения совершенно аналогичны случаю гауссовых флуктуаций параметров.

Если считать, что $\Gamma = \Lambda$, то выражение (6) принимает вид $\frac{\delta G}{\delta \eta} = G \Lambda G$ и, следовательно,

$$\frac{\delta^n G}{\delta \eta^n} = n! (G \Lambda)^n G = \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda} (\lambda G \Lambda)^n G.$$

При этом мы приходим к обобщенному уравнению Крейчнана:

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q_K \langle S \rangle, \quad (14')$$

$$Q_K = \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1} \{ \langle S \rangle \Lambda \}^n = \Lambda \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda} \Omega[\lambda \langle S \rangle \Lambda].$$

Если же в (14') заменить $\langle S \rangle$ в Q_K на S_0 , то получаем обобщенное уравнение Бурре*:

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q_B \langle S \rangle, \quad (15')$$

$$Q_B = \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1} (S_0 \Lambda)^n = \Lambda \int_0^{\infty} d\lambda e^{-\lambda} \Omega [\lambda S_0 \Lambda].$$

В заключение отметим, что описанный функциональный подход можно применять и к задачам, описываемым нелинейными уравнениями в частных производных с флуктуирующими параметрами. Для этих задач можно написать линейное уравнение в вариационных производных для характеристического функционала решения задачи и исследовать это уравнение аналогичным методом.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидродинамика, 11, изд. Наука, М., 1967.
- 2 В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- 3 Е. Б. Гледзер, А. С. Монин, УМН, 29, вып. 3 (177), 111 (1974).
- 4 Л. А. Апресян, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 2, 165 (1974).
- 5 В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
6. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., 2, 124 (1961).
7. R. C. Bourret, Canad. J. Phys., 40, 782 (1962).
8. R. C. Bourret, Nuovo Cim., 26, 1 (1962).
9. В. М. Филькенберг, ЖЭТФ, 53, 401 (1967).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
16 июня 1976 г

ON METHODS OF THE FIELD QUANTUM THEORY IN THE DYNAMICS OF LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

V. I. Klyatskin

A closed equation is obtained in the variation derivatives for the Green mean function of linear stochastic equation. The distribution law of parameter fluctuations is not concretized. Approximate methods of transition from this equation to integral equations are analyzed. Approximate equations are obtained which generalize the known Kraichnan—Bourret equations for a case of non-Gaussian parameter fluctuations.

* Отметим, что обобщенное уравнение Бурре (15') совпадает с так называемым «одногрупповым приближением уравнения Дайсона», построенным в работе [9].

УДК 621.371.24 . 535 2

**ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ СМЕЩЕНИЙ
ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА
В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ**

A. С. Дрофа

Приведены расчет и экспериментальные данные измерений временных функций корреляции смещений центра тяжести параллельного и сфокусированного световых пучков в приземном слое турбулентной атмосферы. Проведено исследование изменения временных корреляционных функций в зависимости от интенсивности флуктуаций скорости переноса оптических неоднородностей поперек трассы. Результаты исследования показывают, что флуктуации скорости ветра на трассе могут существенно влиять на вид временных функций корреляции.

При распространении ограниченных световых пучков в турбулентной атмосфере флуктуации показателя преломления воздуха приводят к флуктуациям направления распространения пучков. Для ряда задач, связанных с передачей энергии и информации лазерными системами в реальной атмосфере, необходимо знать величины таких случайных смещений и их временной характер. Экспериментальные исследования случайных смещений пучков, проведенные в приземном слое атмосферы [1-3], и выполненные в [1, 4] расчеты показали существенную зависимость пространственной корреляции смещений пучков от величины внешнего масштаба атмосферной турбулентности. В настоящей работе приведены результаты исследования временных функций корреляции смещений центра тяжести параллельного и сфокусированного лазерных пучков с учетом флуктуаций скорости переноса оптических неоднородностей на трассе в приземном слое атмосферы.

Для пространственной корреляционной функции x - и y -компонентов вектора смещения центра тяжести можно записать, используя результаты работ [1, 4], следующие выражения:

$$B_x(\rho) = -\pi^2 L^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 a_{\text{эфф}}^2(\xi L) \right] \Phi_\epsilon(x) J_0(x\rho) x dx,$$
(1)

$$B_y(\rho) = -\pi^2 L^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^\infty d\xi (1-\xi)^2 \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 a_{\text{эфф}}^2(\xi L) \right] \Phi_\epsilon(x) J_0(x\rho) x dx,$$

где L — длина трассы, $\Phi_\epsilon(x)$ — спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха, $J_0(x)$ — функция Бесселя, $a_{\text{эфф}}$ — эффективный радиус пучка в турбулентной среде. В случае слабых флуктуаций интенсивности можно пользоваться приближением [4]:

$$a_{\text{эфф}}^2(L) = a^2 \left[\left(1 - \frac{L}{F} \right)^2 + \Omega^{-2} \right],$$
(2)

где $2a$ — диаметр пучка на входе в среду, F — радиус кривизны фазового фронта в центре излучающей апертуры, $\Omega = ka^2/L$ — число Френеля, λ — длина волны излучения, $k = 2\pi/\lambda$.

Выполним дифференцирование в (1) и предположим, что вектор разноса пучков ρ имеет только x -компоненту $\rho(x, 0)$, т. е. разнос пучков параллелен поверхности Земли. Тогда получим

$$B_{x,y}(x) = \pi^2 L^3 \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \int_0^\infty \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 a_{\text{эфф}}^2(\xi L) \right] \times \Phi_\epsilon(x) [J_0(x x) \mp J_2(x x)] x^3 dx. \quad (3)$$

При $x = 0$ из (3) следует выражение для дисперсии смещений центра тяжести лазерного пучка $\sigma_c^2 = B_x(0) = B_y(0)$, зависящее [3, 4] от режима дифракции и фокусировки излучения на трассе и от отношения диаметра лазерного пучка к величине внешнего масштаба турбулентности $2a/L_0$.

Вид спектра флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха $\Phi_\epsilon(x)$ в приземном слое атмосферы в области внешнего масштаба турбулентности в настоящее время окончательно не установлен, поэтому в исследованиях для этой области спектра используются различные модельные описания [5]. Расчет пространственных корреляционных функций $B_x(x)$ и $B_y(x)$ будем проводить с использованием кармановской модели спектра:

$$\Phi_\epsilon(x) = AC_\epsilon^2(x^2 + x_0^2)^{-11/6}, \quad (4)$$

где $A = 0,033$, C_ϵ^2 — структурная характеристика флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха, $x_0 = 2\pi/L_0$, L_0 — внешний масштаб турбулентности. Модель (4) совпадает с колмогоровским видом спектра в инерционном интервале волновых чисел ($x \gg x_0$) и позволяет ввести конечный размер для внешнего масштаба.

Измерения смещений центра тяжести лазерного пучка ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$) проводились на горизонтальной трассе длиной $L = 355 \text{ м}$ на полигоне высотной метеорологической мачты Института экспериментальной метеорологии. Средняя высота распространения пучка над поверхностью Земли $h = 2,3 \text{ м}$. Измерения смещений параллельного и сфокусированного пучков с одинаковым начальным диаметром ($2a = 9,5 \text{ см}$) проводились с помощью позиционно-чувствительного элемента — разрезного фотодиода с маской [3], коэффициент пропускания T которой изменяется в зависимости от одной из координат x по закону $T(x) = a|x|$. Ось симметрии маски совмещается с границей раздела двух элементов разрезного фотодиода. Тогда электрический разностный сигнал с разрезного фотодиода будет пропорционален [3] x -координате центра тяжести лазерного пучка (при постоянном полном потоке прошедшего трассу излучения). Регистрация сигнала с разрезного фотодиода, пропорционального флюктуациям смещений центра тяжести луча в одном из направлений, производилась с помощью системы автоматической перфорации на перфоленту с временем квантования $\Delta t = 0,03 \text{ с}$. По реализациям длительностью 2 мин на ЭВМ рассчитывалась временная нормированная автокорреляционная функция смещений центра тяжести пучка в одной из плоскостей (объем выборки — 4200 чисел).

Синхронно с измерениями флюктуаций смещений пучка на середине трассы проводились измерения и регистрация на перфоленту величины и направления горизонтальной составляющей скорости ветра. В качестве датчика скорости ветра использовался серийно выпускаемый

дистанционный анеморумбограф М-49. Постоянная времени датчика — 2 с.

Сопоставление теории с экспериментом проводилось в предположении гипотезы «замороженной турбулентности», когда переход от временных корреляционных функций $R(t)$ к пространственным $B(x)$ осуществляется по формуле

$$R_{x,y}(t) = B_{x,y}(vt), \quad (5)$$

где v — перпендикулярная трассе составляющая скорости ветра.

На рис. 1 и 2 представлены графики нормированных временных функций корреляции смещений, построенных в зависимости от аргумента vt , в направлении оси x (горизонтально поверхности Земли) и оси y (вертикальные смещения) для параллельного и сфокусированного лазерных пучков. Экспериментальные точки получены осреднением по 2—3 сериям измерений при различных поперечных средних скоростях ветра (от 1 до 4 м/с). Горизонтальные отрезки на графиках — среднеквадратичные ошибки измерений, определяемые, в основном, погрешностью измерений средней скорости ветра. На графиках представлены данные измерений, проведенных в условиях, когда направление средней скорости ветра во время эксперимента было приблизительно перпендикулярно трассе (угол между направлением скорости ветра и трассой составлял не менее 70°).

На этих же рисунках приведены результаты расчета нормированных пространственных корреляционных функций смещений пучка в двух взаимно перпендикулярных направлениях: $b_x(x) = B_x(x)/\sigma_c^2$ и $b_y(x) = B_y(x)/\sigma_c^2$. Расчет $b_x(x)$ и $b_y(x)$ для параллельного и сфокусированного лазерных пучков проводился численным интегрированием по формулам (3) для значений параметров, совпадающих с условиями эксперимента. Оценка внешнего масштаба турбулентности L_0 в приземном слое атмосферы обычно принимается равной $L_0 = \times h$ [9], где h — высота над поверхностью Земли, \times — постоянная Кармана, равная 0,4. Так как наши эксперименты проводились на высоте 2,3 м, то в расчетах принимались $L_0 = 1$ м и $2a/L_0 = 0,1$.

Экспериментальные данные на рис. 1, 2 подтверждают неравнopravность горизонтального и вертикального направления смещений пучка. Кроме того, на графиках заметно уменьшение радиуса корре-

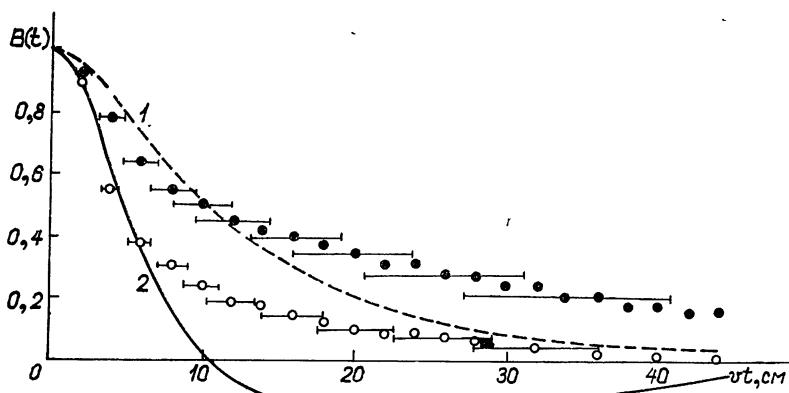


Рис. 1. Корреляция вертикальных (1) и горизонтальных (2) смещений сфокусированного лазерного пучка (горизонтальными отрезками отмечены среднеквадратичные отклонения экспериментальных точек)

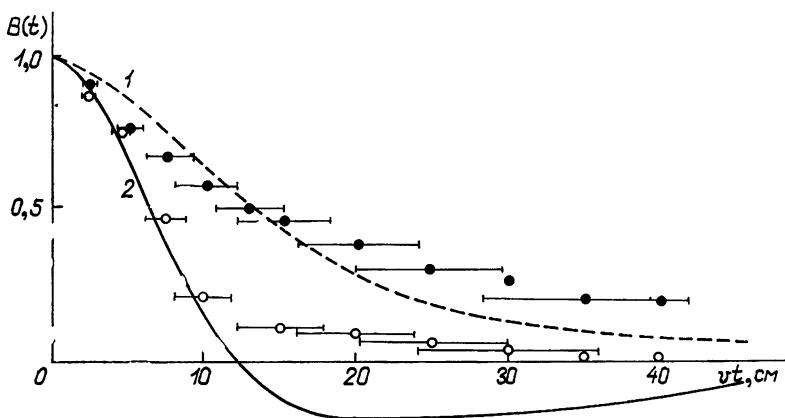


Рис. 2. Корреляция вертикальных (1) и горизонтальных (2) смещений параллельного лазерного пучка.

ляции смещений пучка лазера при его фокусировке, как и предсказывает теоретический расчет.

Однако, несмотря на совпадение рассчитанных радиусов корреляции r_k с экспериментальными (определенными по уровню 0,5), видно, что форма экспериментально измеренных корреляционных функций в пределах погрешности измерений не совпадает с расчетной. Измерения корреляционных функций, проведенные при других направлениях средней скорости ветра (под более острыми углами к трассе) показали, что в этих условиях и радиус корреляции, определяемый по формуле $r_k = vt_k$, в большинстве случаев не совпадал с расчетным. Причиной этого может быть то, что при сравнении экспериментальных временных корреляционных функций с расчетными пространственными по формуле (5) предполагалось постоянство скорости переноса оптических неоднородностей поперек трассы. В условиях реальной атмосферы скорость ветра испытывает значительные флуктуации, причем различные на различных участках трассы. Это приводит к тому, что картина распределения интенсивности луча движется не как единое целое и не с постоянной скоростью. Приближение «замороженной турбулентности» является довольно грубым, и для корректного расчета временных корреляционных функций следует учесть флуктуации скорости переноса.

Проведем расчет временных корреляционных функций смещений пучка с учетом флуктуаций скорости ветра. Выражение для временной корреляционной функции можно получить [6], усредняя $B(vt)$ по флуктуациям скорости переноса оптических неоднородностей v . Так как скорость движения дифракционной картины распределения интенсивности пучка обусловлена суммарным действием всех неоднородностей вдоль трассы, можно считать, что флуктуации скорости переноса распределены по нормальному закону. Расчет временной корреляционной функции проводился по формуле

$$R(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(vt) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (v - \bar{v})^2 \right] dv = R(t, \sigma/\bar{v}), \quad (6)$$

где \bar{v} — средняя скорость ветра поперек трассы, σ^2 — дисперсия флуктуаций поперечной составляющей скорости ветра, величина σ/\bar{v} характеризует интенсивность флуктуаций скорости ветра, $B(vt)$ определяется

формулой (3). Результаты расчета на ЭВМ временных корреляционных функций горизонтальных и вертикальных смещений коллимированного лазерного пучка ($\Omega \gg 1$) в зависимости от величины параметра σ/\bar{v} приведены на рис. 3. Из графиков $R_x(t)$ и $R_y(t)$ видно, что при малых флуктуациях скорости ветра радиус корреляции временных корреляционных функций изменяется незначительно, но форма их изменяется существенно. Когда же флуктуации скорости по величине становятся сравнимыми со средней скоростью ветра ($\sigma/\bar{v} = 1$), изменяется и масштаб корреляции.

На рис. 3 приведены также результаты экспериментальных измерений временных корреляционных функций, когда средняя скорость ветра перпендикулярна трассе (данные те же, что и на рис. 2). В этом случае флуктуации скорости переноса неоднородностей поперек трассы обусловлены только флуктуациями модуля скорости воздушного потока u . Во время экспериментов на трассе флуктуации модуля скорости ветра не измерялись, однако величину σ_u/u можно оценить, используя данные измерений флуктуаций скорости ветра, проведенные другими авторами на полигоне ИЭМ. По данным [7] при безразличной стратификации атмосферы величина σ_u/u в приземном слое равна $\approx 0,2$, а при

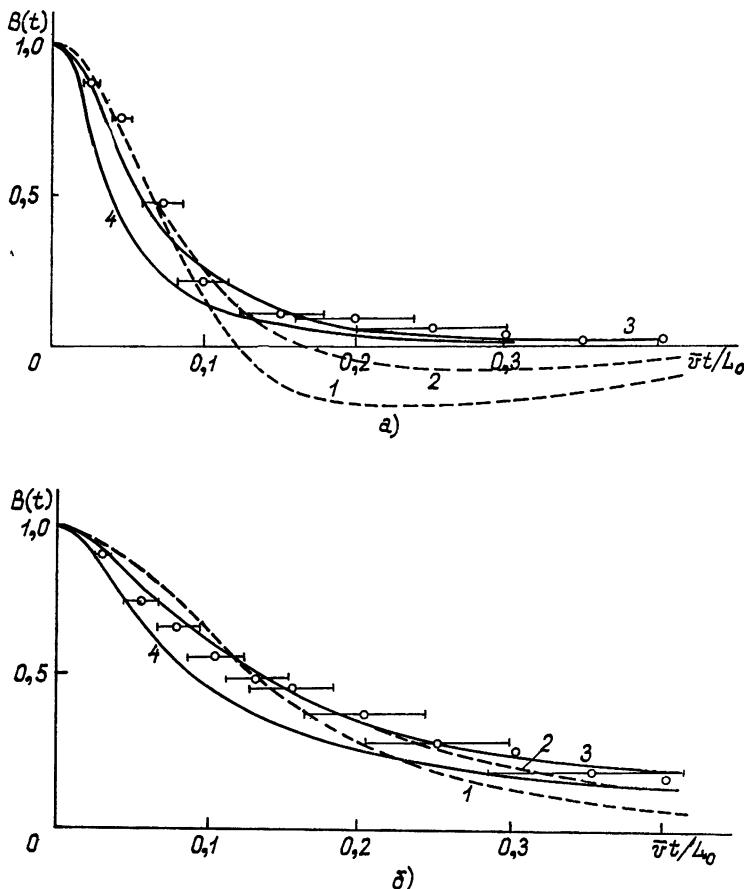


Рис. 3. Временная корреляция горизонтальных (а) и вертикальных (б) смещений параллельного лазерного пучка при различной интенсивности флуктуаций поперечной составляющей скорости ветра $\sigma/v = 0(1), 0,2(2), 0,4(3), 1(4)$.

неустойчивой стратификации может достигать значения 0,3—0,4. Наши измерения проводились при умеренно сильной неустойчивости атмосферы (число Ричардсона в слое 1—3 м равно $Ri \approx -0,2$). Сравнение экспериментально измеренных $R_x(t)$ и $R_y(t)$ с расчетом (рис. 3) показывает, что в пределах погрешности измерений совпадение при $\sigma/\bar{v} = 4$ можно считать хорошим.

В случае, когда направление средней скорости ветра параллельно трассе, определяющими являются флуктуации направления скорости ветра. Подставляя в (6) выражение $B_{x,y}(vt)$ (3) для коллимированного пучка в ближней зоне дифракции ($\Omega \gg 1$) и положив $\bar{v} = 0$, можно получить

$$R_{x,y}(t) = \frac{1}{3} \pi^2 L^3 \int_0^\infty d x \exp \left[-\frac{a^2 x^2}{2} \left(1 + \frac{\sigma^2 t^2}{a^2} \right) \right] \times \\ \times \Phi_e(x) x^3 \left[I_0 \left(\frac{\sigma^2 t^2 x^2}{4} \right) \pm I_1 \left(\frac{\sigma^2 t^2 x^2}{4} \right) \right], \quad (7)$$

где $I_v(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Результаты численного интегрирования (7) для нормированных корреляционных функций приведены на рис. 4. Там же приведены данные экспериментальных измерений $R_x(t)$ и $R_y(t)$. Экспериментальные значения на каждом графике получены по нескольким сериям измерений при $\bar{v} = 0$. Величина σ_\perp вычислялась по формуле $\sigma_\perp = u \sigma_a$, где σ_a^2 — дисперсия флуктуаций направления скорости ветра. Величина σ_a во время измерений была равна $\approx 13^\circ$, средняя скорость ветра $u \approx 3 \text{ м/с}$. Горизонтальными отрезками на графиках показаны среднеквадратичные отклонения, обусловленные, в основном, погрешностью измерений величины и направления скорости ветра. Несмотря на довольно большую погрешность измерений из графиков рис. 4 видно, что при скорости ветра, параллельной трассе, временной радиус корреляции смещений пучка действительно определяется флуктуационной составляющей скорости ветра.

Таким образом, приведенные результаты показывают, что влияние флуктуаций скорости ветра на трассе на временную корреляцию смещений центра тяжести светового луча может оказаться существенным,

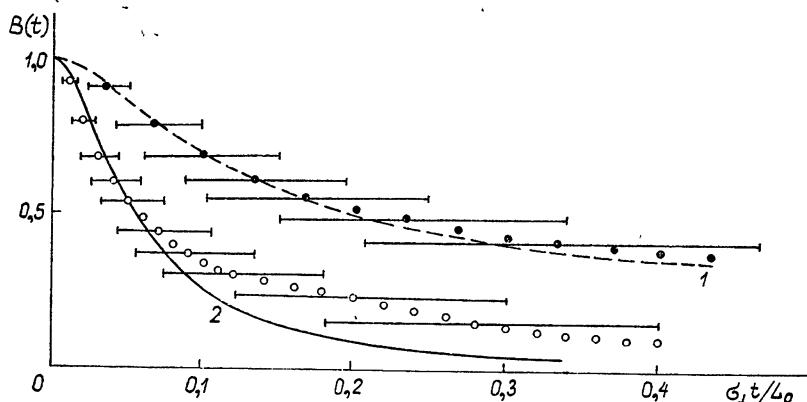


Рис. 4. Временная корреляция вертикальных (1) и горизонтальных (2) смещений параллельного лазерного пучка при направлении скорости ветра вдоль трассы.

и при теоретическом расчете временных характеристик смещений светового пучка этот эффект необходимо учитывать.

В заключение автор благодарит М. И. Воробьеву за помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Гельфер, А. И. Кон, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 2, 245 (1973).
2. М. А. Каллистратова, В. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 5, 723 (1972).
3. А. С. Дрофа, Труды ИЭМ, вып. 12 (31), 138 (1976).
4. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 10, 1501 (1974).
5. В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 2, 274 (1974).
6. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
7. Н. Ф. Мазурин, Труды ИЭМ, вып. 6(44), 146 (1974)

Научно-исследовательский
институт экспериментальной метеорологии

Поступила в редакцию
31 марта 1976 г.

TIME CORRELATION OF GRAVITY CENTER DISPLACEMENTS OF A LIGHT BEAM IN THE LOWEST ATMOSPHERIC LAYER

A. S. Drofa

Calculation and experimental data are given on measurements of time correlation functions of gravity center displacements of parallel and focused light beams in the lowest layer of turbulent atmosphere. Investigation is made of the change in the time correlation functions as a function of the fluctuation intensity of the velocity of optical inhomogeneity transport across the path. The results of the investigation show that the wind velocity fluctuations can influence greatly the time correlation functions.

УДК 621.378 325

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНЕГО МАСШТАБА АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ДИСПЕРСИЮ СЛУЧАЙНЫХ СМЕЩЕНИЙ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

М. И. Воробьев, А. С. Дрофа

Приводятся методика и результаты измерений смещений центра тяжести лазерного пучка в приземном слое атмосферы на горизонтальной трассе 355 метров. Измерения дисперсии смещений центра тяжести проведены для параллельного и сфокусированного лазерных пучков разных диаметров. Проведено исследование зависимости дисперсии смещений от величины внешнего масштаба турбулентности с использованием двух моделей спектра флуктуаций показателя преломления воздуха при различных режимах дифракции и условиях фокусировки лазерного пучка. Показано, что экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическим расчетом дисперсии с использованием кармановского вида спектра турбулентности.

В связи с перспективами использования лазеров для целей оптической связи и при решении других задач использования узконаправленных световых пучков в условиях атмосферы необходимо учитывать влияние турбулентных флуктуаций показателя преломления воздуха, приводящих к случайным смещениям положения центра тяжести светового пучка. В работах [1, 2] было показано, что при размерах излучающих апертур, сравнимых с внешним масштабом атмосферной турбулентности, становится существенной зависимость пространственной корреляции и дисперсии смещений пучков от величины внешнего масштаба турбулентности. Имеющиеся экспериментальные данные [3, 4] не позволяют обнаружить влияние внешнего масштаба турбулентности на дисперсию смещений лазерного пучка из-за большого разброса экспериментальных данных.

В настоящей работе приведены результаты измерений дисперсии смещений центра тяжести лазерного пучка в приземном слое атмосферы и проведено исследование зависимости дисперсии от величины внешнего масштаба турбулентности с использованием двух моделей спектра флуктуаций показателя преломления воздуха при различных дифракционных размерах излучающих апертур и режимах фокусировки лазерного пучка.

Для дисперсии смещений центра тяжести лазерного пучка для случая слабых флуктуаций интенсивности в работе [1] было получено выражение

$$\sigma_{cm}^2 = \pi^2 L^3 \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \int_0^\infty x^3 \Phi_\epsilon(x) \exp\left[-\frac{1}{2} x^2 a_3^2(\xi L)\right] dx, \quad (1)$$

где L — длина трассы, $a_3^2(L) = a^2 [(1 - L/F)^2 + \Omega^{-2}] = a^2 q^2(L)$, $2a$ — диаметр пучка на входе в турбулентную среду, F — радиус кривизны фазового фронта в центре излучающей апертуры, $\Omega = ka^2/L$ — число

Френеля, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения, $\Phi_\epsilon(x)$ — спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха.

Вид спектра $\Phi_\epsilon(x)$ в области внешнего масштаба в настоящее время окончательно не установлен, поэтому при расчетах флуктуаций поля световых волн в тех случаях, когда крупномасштабная часть спектра играет существенную роль, используются различные модельные описания для этой области спектра. В расчетах [1, 2] для $\Phi_\epsilon(x)$ использовалась модель

$$\Phi_{\epsilon 1}(x) = AC_\epsilon^2 x^{-\frac{11}{3}} [1 - \exp(-x^2/x_0^2)], \quad (2)$$

где $A = 0,033$, C_ϵ^2 — структурная характеристика диэлектрической проницаемости воздуха, $x_0 = 2\pi/L_0$, L_0 — внешний масштаб турбулентности.

Проведем также расчет дисперсии смещений пучка, используя кармановскую модель [6]

$$\Phi_{\epsilon 2}(x) = AC_\epsilon^2 (x^2 + x_0^2)^{-\frac{11}{6}}. \quad (3)$$

Модели (2) и (3) совпадают с колмогоровским видом спектра $\Phi_\epsilon(x)$ в инерционном интервале ($x/x_0 \gg 1$) и позволяют ввести конечный размер для внешнего масштаба.

Интегрирование (1) приводит к следующему выражению для дисперсии смещений пучка:

$$\sigma_{cm}^2 = \sigma_0^2 f(2a/L_0, \Omega, L/F), \quad (4)$$

где

$$\sigma_0^2 = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \pi^2 A C_\epsilon^2 L^3 (2a)^{-\frac{1}{3}} \quad (5)$$

— дисперсия, вычисленная в [5] для колмогоровского спектра $\Phi_\epsilon(x)$, функция $f(2a/L_0, \Omega, L/F)$ описывает влияние внешнего масштаба на дисперсию в зависимости от режима дифракции и условий фокусировки пучка. Используя (2) и (3), можно получить:

$$f_1(2a/L_0, \Omega, L/F) = 3 \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 q^{-\frac{1}{3}} (\xi L) [1 - (1 + 1/\beta)^{-\frac{1}{6}}]; \quad (6)$$

$$f_2(2a/L_0, \Omega, L/F) = \frac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 q^{-\frac{1}{3}} (\xi L) \left[e^\beta \left(1 + \frac{6}{5} \beta\right) \times \right. \\ \left. \times \Gamma\left(\frac{1}{6}, \beta\right) - \frac{6}{5} \beta^{\frac{1}{6}} \right], \quad (7)$$

где $\beta = \beta(L) = x_0^2 a_s^2(L)/2$, $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$ — неполная гамма-функция. Графики функций $f(2a/L_0)$, полученных численным интегрированием (6) и (7) для параллельного и сфокусированного пучков ($\Omega = 63$), приведены на рис. 1. Из графиков видно, что при диаметрах лазерного пучка, приближающихся к величине внешнего

масштаба, величина дисперсии σ_{cm}^2 уменьшается, причем ход зависимости заметно отличается для моделей спектра турбулентности (2) и (3). Экспериментальная проверка расчета функций $f(2a/L_0)$ является целью настоящей работы.

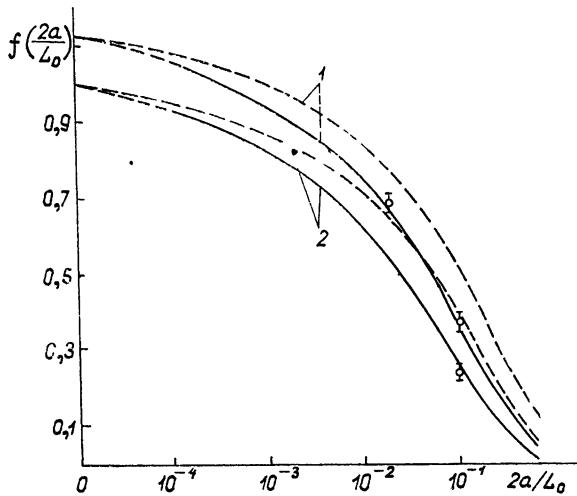


Рис. 1. График функции $f(2a/L_0)$ для сфокусированного (1) и параллельного (2) пучков (сплошная линия — расчет для кармановского спектра турбулентности, штриховая — для спектра вида $\Phi_\epsilon(x) = AC_\epsilon^2 x^{-\frac{11}{3}} [1 - \exp(-x^2/x_0^2)]$; вертикальными отрезками отмечены среднеквадратичные отклонения экспериментально измеренных $f(2a/L_0)$.

Измерения дисперсии смещений центра тяжести лазерного пучка ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$) проводились на горизонтальной трассе длиной $L = 355 \text{ м}$. Высота распространения пучка над довольно однородной поверхностью земли $h = 2,3 \text{ м}$. Измерения смещений центра тяжести пучка проводились с помощью позиционно-чувствительного датчика — разрезного фотодиода с маской, коэффициент пропускания T которой изменяется в зависимости от одной из координат x по закону $T(x) = a|x|$. Ось симметрии маски совмещается с границей раздела элементов разрезного фотодиода. Тогда электрический разностный сигнал с фотодиода будет пропорционален x -координате центра тяжести луча [7]. Дисперсия смещений σ_{cm}^2 измерялась аналоговым способом с помощью вольтметра среднеквадратичного значения (ВСКЗ) по формуле

$$\sigma_{cm}^2 \sim \frac{1}{P^2} \overline{(E - \bar{E})^2}, \quad (8)$$

где P — полный поток прошедшего трассу излучения, E — разностный сигнал с разрезного фотодиода, черта сверху обозначает осреднение во времени. ВСКЗ позволяет получать на выходе напряжение, пропорциональное дисперсии входного сигнала, осредненное за 30 с. Ограниченнная частотная полоса пропускания ВСКЗ ($0,2 \text{ Гц} — 10 \text{ кГц}$) вносили несущественную ошибку в величину измеряемой таким способом дисперсии смещений центра тяжести пучка.

Синхронно с измерениями σ_{cm}^2 на середине трассы производились измерения структурной характеристики флюктуаций температуры воз-

духа C_T^2 . Для этого измерялся квадрат разности флюктуаций температуры с двух датчиков, разнесенных вертикально на расстояние $\rho = 7,7 \text{ см}$, и вычисление величины C_T^2 производилось по формуле [8]

$$C_T^2 = \frac{2}{(T_1 - T_2)^2 \rho} \cdot \frac{1}{3}. \quad (9)$$

В качестве датчиков флюктуаций температуры использовались термисторы типа МТ-57 с постоянной времени в спокойном воздухе $0,07 \text{ с}$. Вычисление квадрата разности флюктуаций температуры производились с помощью ВСКЗ. Диапазон значений C_T^2 , измеряемых нашим устройством — $0,04 - 10^{-5} \text{ град}^2/\text{см}^{2/3}$, погрешность измерения C_T^2 — около 10% .

Выходные сигналы с ВСКЗ, пропорциональные $(E - \bar{E})^2$ и C_T^2 , и сигнал с фотодиода ФД-24К, регистрирующего полный поток излучения P , записывались на диаграммную ленту многоканального самописца, и по формулам (5), (8) и (9) вычислялись величина дисперсии $\sigma_{\text{см}}^2$ и теоретическое значение σ_0^2 .

Прежде чем перейти к результатам эксперимента, следует сделать замечание относительно методики подобных исследований распространения излучения на протяженных трассах. Малость характерного масштаба времени турбулентности приземного слоя атмосферы (секунды) позволяет ограничиться при измерениях сравнительно короткими интервалами наблюдений. При этом для получения статистически устойчивых результатов необходимо выбирать относительно стационарные состояния атмосферы. В принципе повышения точности можно добиться увеличением продолжительности измерений. Однако измерения обнаруживают, что временные изменения C_T^2 являются существенно нестационарным случайнм процессом с изменяющейся во времени дисперсией, и за время нескольких минут величина C_T^2 может изменяться на порядок. В [9] показано, что для того, чтобы избежать смещенностей в оценках нелинейных характеристик турбулентности (какой является структурная характеристика C_T^2), необходимо выбирать время наблюдения из условия $T_{\text{в}} \ll T_{\text{набл}} \ll T_{\text{н}}$, где $T_{\text{в}}$ и $T_{\text{н}}$ — характерные временные масштабы мелкомасштабной и крупномасштабной структур. Оптимальный временной интервал для оценки мелкомасштабной турбулентности в приземном слое при этом получается $2-3 \text{ мин}$. В случае $T_{\text{набл}} \approx T_{\text{н}}$ (такие условия реализуются при измерениях величины C_T^2 «градиентным» методом [10]) измерения дают неустойчивые результаты, и это приводит к большому разбросу экспериментальных данных, наблюдаемому у ряда авторов [3, 4] при сравнении интенсивности флюктуаций параметров лазерного излучения с измеряемой на трассе величиной C_T^2 .

Анализ одновременных записей структурной характеристики C_T^2 и дисперсии смещений центра тяжести $\sigma_{\text{см}}^2$ показал также, что довольно часто наблюдается несинхронность низкочастотных изменений C_T^2 и $\sigma_{\text{см}}^2$. Запаздывание или опережение во времени в большинстве случаев определялось величиной и направлением средней скорости ветра на трассе, и максимальные временные сдвиги (до 5 мин) наблюдались при малых скоростях ветра вдоль трассы. По-видимому, этот сдвиг по фазе изменений $\sigma_{\text{см}}^2$ и величины C_T^2 (измеряемой в одной точке трассы) можно объяснить модуляционным переносом мелкомасштабной турбулентности крупномасштабной структурой нижнего слоя атмосферы [9] и неодинаковым вкладом различных участков трассы в величину дисперсии смещений центра тяжести лазерного пучка.

Для сравнения данных измерения σ_{cm}^2 с теоретическим расчетом данные непрерывных записей σ_{cm}^2 и C_T^2 снимались с диагностической ленты самописца и дополнительно осреднялись за 3 мин, причем для уменьшения ошибок, связанных с фазовым рассогласованием и нестационарностью наблюдавшихся процессов, из рассмотрения исключались переходные периоды, во время которых происходили сильные изменения величин C_T^2 и σ_{cm}^2 . Таким образом удалось существенно уменьшить разброс точек при сравнении измеряемой величины σ_{cm}^2 с теоретической σ_0^2 .

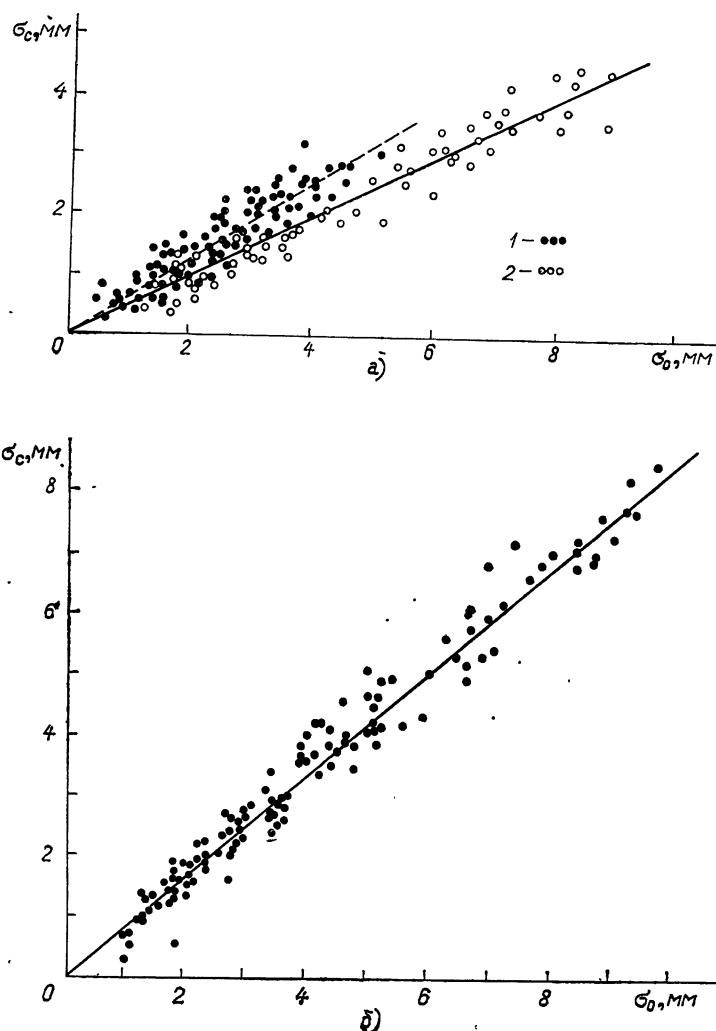


Рис. 2. Зависимость среднеквадратичных значений измеренной экспериментально величины σ_{cm} от теоретического значения σ_0 для сфокусированного (1) и параллельного (2) пучка с начальным диаметром $2a = 9,5$ см (а) и сфокусированного пучка с $2a = 2$ см (б).

Зависимости измеренных среднеквадратичных значений смещений центра тяжести σ_{cm} от теоретического значения σ_0 приведены на рис. 2. Прямые регрессии на графиках проведены по методу наименьших квадратов. График рис. 2 а показывает, что смещения параллельного

пучка заметно меньше смещений сфокусированного пучка того же диаметра. Кроме того, из рис. 2 видно, что экспериментальные точки лежат значительно ниже прямой полного совпадения σ_{cm} и σ_0 , причем наклон прямой регрессии меньше для луча большего диаметра. Это указывает на влияние внешнего масштаба турбулентности на дисперсию смещений пучка. По тангенсу угла наклона прямых регрессии определялись экспериментальные значения функции $f(2a/L_0) = \sigma_{cm}^2/\sigma_0^2$. Результаты обработки экспериментальных данных приведены в таблице.

Оценка внешнего масштаба турбулентности в приземном слое атмосферы принимается равной $L_0 = \kappa h^{\frac{3}{4}}$, где κ — постоянная Кармана, равная 0,4, h — высота над поверхностью Земли. Так как наши эксперименты проводились на высоте $h = 2,3$ м, то величину внешнего масштаба мы приняли равной 1 м. Величины экспериментально полученных значений $f(2a/L_0)$ при $L_0 = 1$ м нанесены на график рис. 1. Как видно из рис. 1 и таблицы, экспериментальные данные в пределах погрешности измерений хорошо согласуются с расчетными значениями $f_2(2a/L_0)$, полученными для кармановского вида спектра турбулентности (7).

Таблица
Данные измерений дисперсии смещений пучка

Условия фокусировки луча	$2a$ (см)	Ω	Число экспериментальных точек	Коэффициент корреляции между σ_{cm} и σ_0	Экспериментальные значения $f(2a/L_0)$	Рассчитанные значения $f_2(2a/L_0)$ при $L_0 = 1$ м
Фокус.	2	3	133	0,97	$0,69 \pm 0,02$	0,675
Фокус.	9,5	63	98	0,96	$0,38 \pm 0,02$	0,365
Парал.	9,5	63	75	0,95	$0,24 \pm 0,02$	0,260

Таким образом, результаты наших измерений подтверждают факт влияния величины внешнего масштаба турбулентности на дисперсию смещений центра тяжести лазерного пучка, а также могут служить косвенной оценкой вида спектра атмосферной турбулентности в приземном слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 10, 1501 (1974).
2. Э. И. Гельфер, А. И. Кон, А. И. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 245 (1973).
3. Э. И. Гельфер, Н. И. Муравьев, С. Е. Финкельштейн, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 12, 1838 (1971).
4. М. А. Каллистратова, В. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1200 (1971).
5. В. И. Кляцкин, А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 9, 138 (1972).
6. В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 247 (1974).
7. А. С. Дрофа, Труды ИЭМ, вып. 12(31), 138 (1976).

8. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967
9. В. Н. Иванов, А. Е. Орданович, Л. И. Петрова, Изв. АН СССР, ФАО, 7, № 3, 263 (1971)
10. М. А. Каллистратова, Д. Ф. Тимановский, Изв. АН СССР, ФАО, 7, № 1, 73 (1971).

Научно-исследовательский
институт экспериментальной метеорологии

Поступила в редакцию
31 марта 1976 г.

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF AN EXTERNAL SCALE OF
ATMOSPHERIC TURBULENCE UPON DISPERSION OF RANDOM
DISPLACEMENTS OF LIGHT BEAMS

M. I. Vorob'yov, A. S. Drofa

Procedure and results of measurements of the gravity center displacement of a laser beam in the lowest atmospheric layer along the 355m horizontal path are presented. Measurements of dispersion of gravity center displacements are made for parallel and focused laser beams with different diameters. Investigation is made of the dependence of displacement dispersion versus the external turbulent scale, using two models of the fluctuation spectrum of the air refractive index under different diffraction and laser beam focusing conditions. It is shown that experimental data agree well with theoretical calculation of the dispersion for the Karman turbulent spectrum.

УДК 538.574

МЕТОД ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ ВЕКТОРА ПОЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Ю. В. Березин

Изложен метод измерения вектора поля частично поляризованной радиоволны. Показано, что с помощью данного метода доступны для непосредственного наблюдения все четыре фазоквадратурные компоненты вектора поля. Прямые измерения 4-фазоквадратурных компонент ортогональных проекций поля позволяют полностью описать и исследовать поведение вектора поля в плоскости волнового фронта.

В общем случае, первоначально полностью поляризованное электромагнитное поле, после прохождения через некоторую неоднородную среду или отражения от некоторого объекта, превращается в частично поляризованное. Наиболее полную информацию о поле можно получить при учете его векторного характера. Сочетание методов поляризационного и когерентного приемов позволяет реализовать прямые измерения вектора поля $\vec{E}(t)$. Методику измерений можно пояснить следующим образом. Введем прямоугольную систему координат x, y, z , ось z направим в направлении распространения волны. В этой системе вектор $\vec{E}(t)$ будет характеризоваться проекциями $E_x(t)$ и $E_y(t)$. В плоскости x, y разместим пару линейных антенн, направленных по осям x, y . Наведенные в них ЭДС будут равны

$$\begin{aligned} E_x(t) &\sim U_x(t) = A_x(t) \cos \psi_x(t), \\ E_y(t) &\sim U_y(t) = A_y(t) \cos \psi_y(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\psi_{x,y}(t) = \omega_0 t + \varphi_{x,y}(t) + \varphi_0,$$

$$\varphi_0 = \text{const},$$

$A_{x,y}(t)$, $\varphi_{x,y}(t)$ — амплитуды и фазы проекций вектора поля, медленно меняющиеся во времени. В соответствии с (1) поведение вектора $\vec{E}(t)$ в плоскости x, y будет полностью определено, если измерены амплитуды и фазы проекций поля относительно фазы опорного напряжения U_0 , когерентного с напряжением $U_{x,y}(t)$:

$$U_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2)$$

Синтез вектора поля $\vec{E}(t)$ можно осуществить различными способами. Наглядным является синтез с помощью электроннолучевой трубы. При подаче на ортогональные отклоняющие пластины трубы напряжений $U_x(t)$ и $U_y(t)$ картину, видимую на ее экране, можно отождествить с поведением вектора $\vec{E}(t)$ в плоскости x, y . Вектор $\vec{E}(t)$ будет вращаться с частотой $\omega = d\psi/dt$.

Для того, чтобы сделать видимым мгновенное положение вектора $\vec{E}(t)$, следует применить электронное стробоскопирование. Смысл

стробоскопирования состоит в исключении временных изменений $\vec{\mathcal{E}}(t)$ с частотой ω_0 и сохранении вариаций, обусловленных производной $d\varphi/dt$. Используя для этих целей опорное напряжение $U_0(t)$, этот прием позволяет видеть мгновенное значение вектора $\vec{\mathcal{E}}(t)$ через промежутки времени $T = 2\pi/\omega_0$. Как следует из (1), частота видимого вращения вектора $\vec{\mathcal{E}}(t)$ будет равна

$$\Omega(t) = \omega(t) - \omega_0. \quad (3)$$

Обозначая через t_c моменты стробоскопирования вектора $\vec{\mathcal{E}}(t)$, можно показать, что его координаты в эти моменты времени равны

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(t_c) &\sim U_x(t_c) = A_x(t_c) \sin \varphi_x(t_c), \\ \mathcal{E}_y(t_c) &\sim U_y(t_c) = A_y(t_c) \sin \varphi_y(t_c). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $U_{x,y}(t_c)$ и $A_{x,y}(t_c)$ измеряются на экране электроннолучевой трубы, формулы (4) позволяют определить $\varphi_{x,y}(t_c)$ и, таким образом, полностью охарактеризовать величины $\mathcal{E}_x(t_c)$ и $\mathcal{E}_y(t_c)$. Последовательность моментов подсвета t_c также представляет собой шкалу времени, причем вследствие когерентности напряжений $U_{x,y}(t)$ и $U_0(t)$ шкала времени t_c эквивалентна шкале времени t . Поэтому в формулах (4) значок «с» у символа t можно опустить, введя при этом специальное обозначение для величин $\mathcal{E}_x(t_c)$ и $\mathcal{E}_y(t_c)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(t_c) &= E_{xs}(t), \\ \mathcal{E}_y(t_c) &= E_{ys}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с (1), с учетом обозначений (4), проекции вектора $\vec{\mathcal{E}}(t)$ в плоскости x, y будут равны

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(t) &= E_{xc}(t) \cos \omega_0 t - E_{xs}(t) \sin \omega_0 t, \\ \mathcal{E}_y(t) &= E_{yc}(t) \cos \omega_0 t - E_{ys}(t) \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (6)$$

где $E_{xs}, E_{ys}, E_{xc} = A_x(t_c) \cos \varphi_x(t_c)$, $E_{yc} = A_y(t_c) \cos \varphi_y(t_c)$ — фазо-квадратурные компоненты вектора поля $\vec{\mathcal{E}}(t)$.

При данном способе измерения непосредственно определяются величины E_{xs}, E_{ys}, A_x и A_y . Компоненты E_{xc}, E_{yc} можно определить с помощью (4) и (6) и, таким образом, полностью охарактеризовать поведение вектора $\vec{\mathcal{E}}(t)$ в плоскости волнового фронта. Настоящий метод является обобщением и логическим развитием известных методов измерения вариаций фазы [1, 2], поляризации [3, 4] и скалярного поля [5, 6].

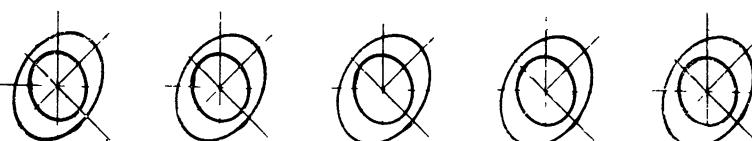


Рис. 1.

Метод применялся при изучении флуктуаций вектора поля радиоволны, отраженной от ионосферы при импульсном вертикальном зондировании. На рис. 1 представлен образец записи флуктуаций вектора

поля двух магнитоионных компонент. На каждом кадре видны поляризационные эллипсы, соответствующие обыкновенной $\vec{\mathcal{E}}^0$ и необыкновенной $\vec{\mathcal{E}}^x$ волнам, и точки на них, соответствующие положениям мгновенных значений векторов $\vec{\mathcal{E}}^0(t_c)$ и $\vec{\mathcal{E}}^x(t_c)$. На последовательности кадров видно, что положение концов векторов $\vec{\mathcal{E}}^0$ и $\vec{\mathcal{E}}^x$ меняется с течением времени, причем вращение векторов $\vec{\mathcal{E}}^0$ и $\vec{\mathcal{E}}^x$ происходит в разные стороны, что связано со свойствами отражающей среды (слой F2 ионосферы).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Гусев, Л. А. Драчев, Радиотехника и электроника, 1, вып 6, 747 (1956).
2. Л. А. Драчев, Приборы и техника эксперимента, № 2, 56 (1958).
3. Д. Б. Канарейкин, Н. Ф. Павлов, В. А. Потехин, Поляризация радиолокационных сигналов, изд. Сов. радио, М., 1968
4. Ю. В. Березин, Геомагнетизм и аэрономия, 10, 1003 (1970).
5. С. Ф. Миркотан, И. А. Бирюлин, сб. Ионосферные исследования, изд. АН СССР, № 9, 18 (1961)
6. А. П. Гапонов, В. В. Толстов, В. Н. Кайнара, Ю. М. Бородавко, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, тезисы докладов, Ионосферное распространение радиоволн, секция 1, изд. Наука, М., 1972, стр. 326.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
29 сентября 1976 г.

A METHOD OF DIRECT MEASUREMENT OF THE FIELD VECTOR OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE

Yu. V. Berezin

A method of measuring the field vector of a partially polarized radio wave is presented. It is shown that using this method all four phase-quadrature components of the field vector are possible for direct observations. Direct measurements of four phase-quadrature components of field orthogonal projections enable one to present and investigate completely the field vector behaviour in the wave front plane.

УДК 621.396.67

**ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СХЕМЫ
В КОРРЕЛЯЦИОННОМ МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ДИАГРАММ
НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН**

Г. П. Болотов, Б. В. Кияшко

Рассматривается двухканальная схема корреляционного измерения диаграмм направленности радиоантенны. Показано, что относительная задержка сигналов исследуемой и эталонированной антенн при использовании двухканальной схемы значительно слабее влияет на выходной сигнал, чем в одноканальной схеме. Получены выражения для среднего значения выходного сигнала и отношения сигнал/шум

Представлены результаты измерения отношения сигнал/шум на выходе макета двухканального коррелятора.

В последнее время для измерения диаграмм направленности больших радиоантенны стали чаще использовать излучение естественных источников космического происхождения — Солнца, звезд и т. д. [1, 2]. Использование этих источников удобно тем, что их излучение практически является плоской волной. Кроме того, их движение стабильно, подчиняется хорошо изученным законам и может быть точно рассчитано. Это позволяет измерять диаграмму направленности антенны, используя суточное вращение Земли.

Однако при этом необходимо применять специальные методы выделения довольно слабого сигнала на фоне помех как космического, так и земного происхождения, что особенно существенно при измерении боковых лепестков диаграммы [3]. Весьма привлекательным методом ослабления помех является корреляционный метод, имеющий большую чувствительность. Схема корреляционного приемника приведена на рис. 1.

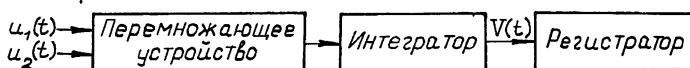


Рис. 1.

На входы перемножающего устройства подается сигнал с исследуемой антенны $u_1(t)$ и сигнал со вспомогательной антенны $u_2(t)$, которая все время направлена на выбранный источник радиоволн. В качестве вспомогательной используется эталонированная антenna с малым уровнем боковых лепестков. Процесс на выходе устройства можно записать в виде [4, 5]

$$V(t) = \int_{-\infty}^t u_1(t') u_2(t') h(t - t') dt', \quad (1)$$

где $h(t)$ — импульсная характеристика интегратора.

Представляя входные процессы следующим образом:

$$u_1(t) = ku_c(t) + u_{\text{ш}_1}(t), \quad u_2(t) = u_c(t + \tau) + u_{\text{ш}_2}(t), \quad (2)$$

где $u_c(t)$ — сигнал выбранного источника, $u_{\text{ш}_i}(t)$ — внутренний шум усилителя и внешние помехи, $u_{\text{ш}_i}(t)$ — внутренний шум усилителя вспомогательной антенны, k — величина, пропорциональная коэффициенту усиления исследуемой антенны, τ — задержка, обусловленная разнесением антенн в пространстве, и считая процессы $u_c(t)$, $u_{\text{ш}_1}(t)$ и $u_{\text{ш}_2}(t)$ статистически независимыми и стационарными, можно написать следующие выражения для среднего значения сигнала на выходе устройства и отношения сигнал/шум [6, 7]:

$$\langle V \rangle = k \langle u_c(t)u_c(t + \tau) \rangle = kB_c(\tau); \quad (3)$$

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{\langle V \rangle}{\sigma_v} = \frac{kB_c(\tau)}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} W(x)[B_{11}(x)B_{22}(x) + B_{12}(x + \tau)B_{21}(x - \tau)]dx}}, \quad (4)$$

где $B_{ij}(x)$ — корреляционные функции процессов u_1 и u_2 , $W(x) = \int_0^{\infty} h(t)h(t + x)dt$ — переходная характеристика интегратора.

Если входные процессы имеют прямоугольные спектры с шириной Π и средней частотой $f_0 \gg \Pi$, а интегратор представляет собой RC -цепочку, то при условии, что время интегрирования значительно превышает задержку τ и время корреляции $1/\Pi$, получим выражения

$$\langle V \rangle = k \sigma_c^2 \frac{\sin \pi \Pi \tau}{\pi \Pi \tau} \cos 2\pi f_0 \tau; \quad (5)$$

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{2 \sqrt{\Pi T} \frac{\sin \pi \Pi \tau}{\pi \Pi \tau} \cos 2\pi f_0 \tau}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_{\text{ш}_1}^2}{k^2 \sigma_c^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_{\text{ш}_2}^2}{\sigma_c^2} \right) + \frac{\sin 2\pi \Pi \tau}{2\pi \Pi \tau} \cos 4\pi f_0 \tau}}. \quad (6)$$

Как видно из (5) и (6), среднее значение сигнала и отношение сигнал/шум зависят от задержки τ , которая при движении источника изменяется. Измерение задержки τ или вычисление ее довольно сложно, так как антенны обычно отличаются по конструкции и по типу. Указанная зависимость включает в себя медленную функцию задержки τ с характерным периодом $1/\Pi$, а также быстропеременную функцию с периодом $1/f_0$.

Ниже предлагается схема двухканального коррелятора, в котором исключена быстропеременная зависимость параметров выходного процесса от задержки τ . На рис. 2 представлена блок-схема коррелятора.

Схема работает следующим образом. Смесители См_1 и См_2 с помощью гетеродинов Γ_1 и Γ_2 переносят высокочастотные входные сигналы на более низкие частоты:

$$u_3 = A_1(t) \cos[(\omega_0 - \omega_{r1})t - \varphi_1(t) + \varphi_{r1}],$$

$$u_4 = A_2(t) \cos[(\omega_0 - \omega_{r2})t - \varphi_2(t) + \varphi_{r2}], \quad (7)$$

где $A_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ — амплитуды и фазы процессов на выходах антенных усилителей. Смеситель См_4 производит выделение разностной частоты полученных напряжений:

$$u_5 = A_1(t)A_2(t) \cos[(\omega_{r1} - \omega_{r2})t + \varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \varphi_{r2} - \varphi_{r1}]. \quad (8)$$

Напряжение u_5 с помощью смесителей См₅ и См₆ переносится к нулевой частоте. Для этого используется напряжение разностной частоты гетеродинов Γ_1 и Γ_2 , в результате чего влияние их нестабильностей уменьшается. Опорное напряжение на смеситель См₆ подается через фазовращатель Φ_1 , сдвигающий фазу на 90° . На выходах интеграторов И₁ и И₂ с переходной характеристикой $h(t)$ образуются низкочастотные процессы

$$\begin{aligned} u_6 &= \int_{-\infty}^t A_1(t') A_2(t') \cos[\varphi_2(t') - \varphi_1(t')] h(t - t') dt', \\ u_7 &= \int_{-\infty}^t A_1(t') A_2(t') \sin[\varphi_2(t') - \varphi_1(t')] h(t - t') dt', \end{aligned} \quad (9)$$

которые с помощью смесителей См₇ и См₈ переносятся на вспомогательную несущую частоту Ω гетеродина Γ_3 , причем напряжения на выходах смесителей сдвинуты на 90° с помощью фазовращателя Φ_2 . Складывая эти напряжения и выделяя огибающую с помощью детектора АД, получаем выходное напряжение $V(t)$, которое представляет собой низкочастотный процесс, связанный с сигналами u_6 и u_7 выражением

$$V(t) = \sqrt{u_6^2(t) + u_7^2(t)}. \quad (10)$$

Используя (9) и предполагая, что на выходе хотя бы одного интегратора сигнал больше шума, можно приближенно преобразовать выражение (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} V(t) &= u_6 \cos \omega_0 \tau + u_7 \sin \omega_0 \tau = \\ &= \int_{-\infty}^t A_1(t') A_2(t') \cos[\varphi_2(t') - \varphi_1(t') - \omega_0 \tau] h(t - t') dt'. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное выражение совпадает с выражением (1), если положить $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2n\pi}{\tau}$. Отсюда можно сразу написать выражения для среднего значения сигнала и отношения сигнал/шум, используя (5) и (6) :

$$\langle V \rangle = k \sigma_c^2 \frac{\sin \pi \Pi \tau}{\pi \Pi \tau}; \quad (12)$$

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{2\sqrt{\Pi T} \frac{\sin \pi \Pi \tau}{\pi \Pi \tau}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_{w_1}^2}{k^2 \sigma_c^2} \right) \left(1 + \frac{\sigma_{w_2}^2}{\sigma_c^2} \right) + \frac{\sin 2\pi \Pi \tau}{2\pi \Pi \tau}}}. \quad (13)$$

В выражениях (12) и (13) содержится лишь медленная зависимость от τ с периодом $1/\Pi$, а быстропеременная зависимость с периодом $1/f_0$ отсутствует. Таким образом, двухканальный коррелятор эквивалентен одноканальному, у которого задержка существует только по огибающей, а задержка по несущей отсутствует.

Для исследования практических возможностей предложенного корреляционного метода был изготовлен макет двухканального коррелятора по схеме рис. 2. Высокочастотная одноканальная часть схемы, не тре-

бующая особой проверки, в эксперименте не использовалась. Смесители См₅ и См₆ строились по балансной схеме на ферритовых кольцах, смесители См₇ и См₈ изготовлены из вибропреобразователей на частоту 50 Гц. Интеграторы И₁ и И₂ представляли собой однозвездные RC-цепочки, эффективную полосу пропускания которых можно было изменять от 0,4 Гц до 3 Гц. Максимальная ширина полосы определялась частотой вибропреобразователей. Напряжение с детектора регистрировалось с помощью самописца Н-110, время усреднения которого равнялось 400 с.

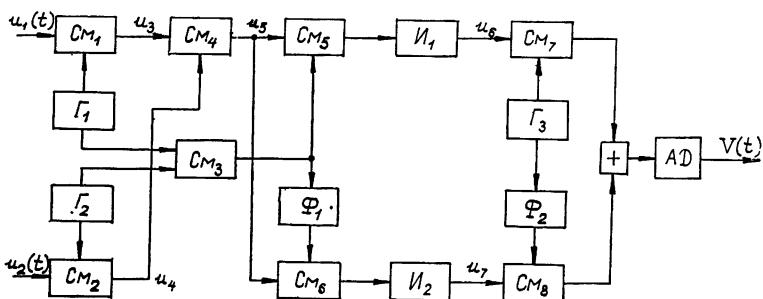


Рис. 2.

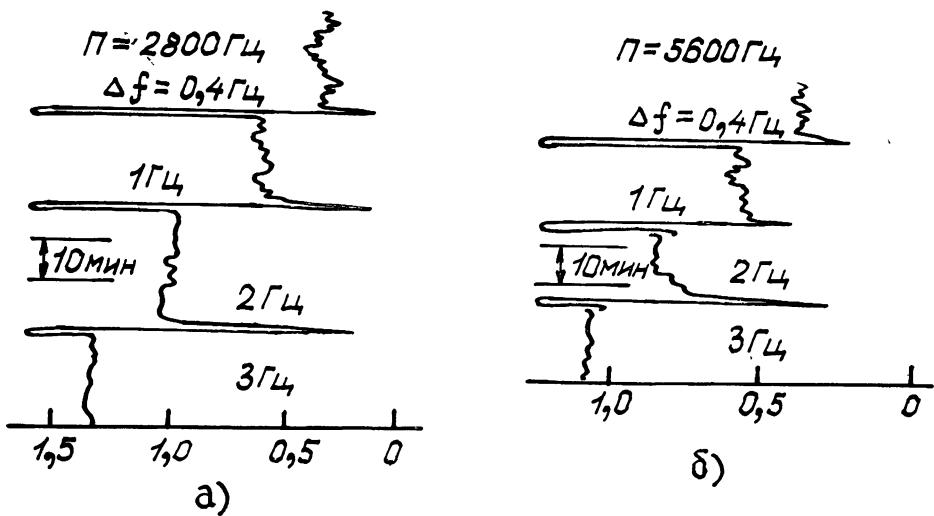


Рис. 3.

На первые входы смесителей См₅ и См₆ подавалось напряжение с генератора шума типа Г2-37, которое имитировало сигнал эталонированной антенны. На вторые входы смесителей подавалось ослабленное напряжение этого же генератора, что имитировало сигнал исследуемой антенны; а также шумовое напряжение второго генератора. Выходы обоих генераторов шума подключались к кварцевым фильтрам со средней частотой 5 МГц. Полоса фильтров выбиралась равной 2800 и 5600 Гц из условий получения величин выигрышей, измерение которых допускалось динамическим диапазоном системы, равным 50 дБ. В эксперименте на выходе измерялись величины среднего значения сигнала и среднеквадратичного значения шума. Последнее измерялось путем отключения генератора шума, имитировавшего сигнал исследуемой ан-

тены, от вторых входов смесителей и регистрации среднего значения сигнала линейного детектора. На рис. 3 представлены фотографии лент самописца с записью среднеарифметического значения шума при различных величинах эффективной полосы интеграторов Δf и полосы входных шумовых процессов Π . По результатам измерений вычислялся коэффициент увеличения отношения сигнал/шум γ по формуле.

$$\gamma = \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вход}}} \quad (14)$$

Полученное значение γ сравнивалось с теоретическим, вычисленным на основании формулы (13). Результаты вычислений экспериментальных и теоретических значений γ для различных величин полос Δf и Π представлены в таблице.

Таблица

$\Delta f, Гц$	0,4	1,0	2,0	3,0
$\gamma_{\text{эксп}}$	74	49	32	25
$\gamma_{\text{теор}}$	83	53	37	31

$\Delta f, Гц$	0,4	1,0	2,0	3,0
$\gamma_{\text{эксп}}$	124	81	55	44
$\gamma_{\text{теор}}$	118	75	53	43

Как видно, экспериментальные значения γ отличаются от теоретических не более чем на 20 %. Причиной различия могут быть ошибки при измерении ширины полос интеграторов Δf , которые достигали 10 %, некоторая неидентичность характеристик кварцевых фильтров, а также недостаточный баланс смесителей См₅ и См₆. Отсутствие в эксперименте зависимости выходного сигнала от произвольных фазовых сдвигов напряжений на входах смесителей См₅ и См₆ также хорошо согласуется с проведенным выше теоретическим анализом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Радиоастрономические методы измерений параметров антенн, М., 1964.
2. Н. М. Цейтлин, Применение методов астрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966.
3. R. Gene Smith, IEEE Trans on Anten. and Propag., AP-14, № 1 (1966).
4. Ф. Ланге, Корреляционная электроника, Судпромгиз, Л., 1963.
5. В. R. Mayo, D. K. Cheng, IRE Trans. on Comm. Systems, CS-10, № 3 (1962).
6. В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, М., 1960.
7. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, М., 1966.

**APPLICATION OF TWO-CHANNEL SCHEME IN THE CORRELATION
METHOD OF MEASURING THE RADIATION PATTERN***G. P. Bolotov, B. V. Kiyashko*

A two-channel scheme of the correlation measurement of the radiation patterns of radio antennas is considered. It is shown that a relative signal delay of investigated and reference antennas, when a two-channel scheme is used, influences upon the output signal more weakly than in a single-channel scheme. Expressions are derived for the mean value of the output signal and the signal/noise ratio.

The results of measuring the signal/noise ratio at the output of a two-channel correlation model are presented.

УДК 621.3 032.266

О ПАРАКСИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВО ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

[B. N. Данилов], B. A. Сыровой

Исследуется применимость параксиального приближения к расчету электродов в электронной пушке, формирующей пучок со значительным изменением кривизны границы поперечного сечения. Обсуждается роль конформного отображения, распрямляющего границу пучка, и предлагается конструктивный алгоритм построения такого отображения для сечений, близких к многоугольнику. Приведено решение задачи о формировании почти прямоугольных «вырезов» из плоского и сферического диодов, а также из криволинейного течения с круговыми траекториями. Область применимости параксиального приближения оценена сравнением с точным решением для эллиптического и почти прямоугольного пучков, потенциал в которых изменяется по закону плоского диода.

ВВЕДЕНИЕ

Различные применения интенсивных электронных потоков, такие, как, например, обработка поверхностей, прорезание отверстий, возбуждение активных сред, требуют формирования пучков, не обладающих аксиальной симметрией и, в частности, течений, близких в поперечном сечении к прямоугольнику.

Если для слаботочных пучков эта задача может быть решена с помощью маски и соответствующих диафрагм, то при формировании мощных электронных потоков на всем протяжении ЭОС и, в особенности, в прикатодной зоне пушки необходим тщательный синтез электродов, обеспечивающих желаемую геометрию течения и требуемое распределение параметров пучка на мишени.

Наиболее простым и гибким инструментом синтеза электронных пушек является параксиальное приближение, обеспечивающее решение как внутренней, так и внешней задач теории формирования. Параксиальное разложение для потенциала φ представляет собой асимптотический ряд по геометрическому малому параметру $\epsilon_* = a_*/L_*$, где a_* — характерный поперечный размер области, L_* — наименьший масштаб продольной неоднородности (включая радиус кривизны траекторий). Для осесимметричных течений параксиальная теория развита в [1] с использованием криволинейных координат, связанных с траекториями частиц, что позволило устраниТЬ неравномерность в окрестности катода при решении уравнений пучка. Однако для внешней задачи ряд по ϵ_* , построение которого сводится к решению последовательности квазидномерных задач, расходится с приближением к катоду, так как особенность в этом случае существенно двумерна, вне зависимости от того, используются ли криволинейные [1] или цилиндрические координаты R, z^* . Область сходимости такого разложения ограничивается

* Разложения по ϵ_* , учитывающие члены порядка ϵ_*^2 , в которых не предпринято каких-либо мер по устранению неравномерности в прикатодной области, будем называть прямыми (нерегуляризованными) параксиальными разложениями.

углом в 45° по отношению к оси пучка. В дальнейшем речь будет идти о прямых разложениях для пучков O -типа, нулевая эквипотенциаль для которых не выходит далеко за пределы этого конуса*.

На рис. 1 представлены кривые $\varphi = \text{const}$ вне цилиндрического пучка (круговая «вырезка» из плоского диода), рассчитанные по точному решению (пунктир) и параксиальной теории. Видно, что относительная ошибка в определении координат эквипотенциалей $\varphi \geq 0$ не превышает 15 %.

Относительная простота параксиального приближения и обнадеживающие результаты, которые оно дает для осесимметричных течений, побуждали к распространению теории на геометрически более сложные потоки и вместе с тем ставили вопрос о пределах применимости этого метода. Так, правомерность прямых разложений для пучков с резко меняющейся кривизной сечения заранее не очевидна, ибо при этом в задаче появляется новый малый характерный размер — радиус закругления, много меньший поперечного размера пучка.

В работе [3] при весьма общих предположениях решена внутренняя задача для трехмерных пространственно-неоднородных пучков; там же приведено решение внешней задачи для круглого пучка с искривленной осью. Модифицированное параксиальное приближение, учитывав-

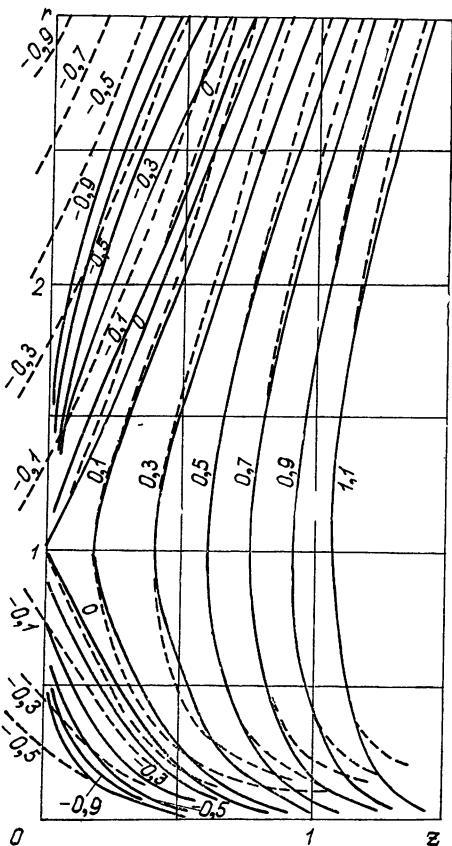


Рис. 1.

ющее члены порядка ε^3 , построено для решения внутренней и внешней задач в [4] и специализировано для случая обычной параксиальной теории, в которой плотность по сечению пучка однородна; поток при этом имел произвольное сечение и пространственную ось. Конкретное выражение для потенциала вне эллиптического пучка приведено в [5].

К нерегуляризованным разложениям близки ряды по криволинейной координате, построенные в работах [6] для нескольких эллиптических пучков с прямой осью**.

В [7] приосевое разложение по ε_* предлагается использовать для расчета пучков с сильно вытянутым эллиптическим сечением в коорди-

* В пучках M -типа кривая $\varphi = 0$ составляет с осью пучка угол в $120-135^\circ$. В такой ситуации прямое разложение непригодно даже в качественном отношении и должно быть заменено значительно более сложным приближением, равномерным в прикатодной зоне [2].

** Первое параксиальное приближение получается суммированием ряда с коэффициентами [6], в которых сохранены члены со второй производной от потенциала на границе пучка по продольной координате; второе параксиальное приближение — при сохранении четвертых производных и т. д.

натах, связанных с траекториями частиц [1]. Предложение это основывается на ошибочном утверждении [7] о том, что малость углов наклона траекторий к оси пучка является единственным требованием, выполнение которого гарантирует справедливость параксиального разложения в пространственном случае*. В действительности это разложение имеет смысл в области с безразмерным поперечным масштабом порядка ϵ_* , и только в пределах круга этого радиуса допустимы «вырезки» различной формы, в том числе эллипс с большим отношением полуосей a/b (например, $a = \epsilon_*$, но $b = \epsilon_*/10$).

Упомянутые выше проблемы, связанные с неравномерностью прямых разложений и резким изменением кривизны сечения, отсутствуют, если речь идет о точном решении задач или правильном выделении особенности. В [9] приведено выражение для потенциала вне цилиндрического пучка с произвольным гладким сечением, в [10] рассмотрено формирование произвольной «вырезки» из течения в сферическом диоде, а в [11] — из потока с круговыми траекториями. Наконец, в [12] построена равномерная в прикатодной зоне асимптотика для квазицилиндрического пучка с произвольным сечением, основанная на возмущении точного решения [9]. При этом для пучка было использовано параксиальное приближение [3], регуляризованное переходом к системе координат, связанной с траекториями; решение внешней задачи построено с использованием квазиконформного отображения, распрямляющего границу потока.

Таким образом, в настоящее время имеется достаточно полный набор решений задачи о формировании пространственно-неоднородных пучков с произвольным сечением. Однако попытка использовать эти решения для контуров, отличных от эллипса, натолкнулась на ряд не-предвиденных трудностей. Оказалось, что к контуру Г, при помощи которого аппроксимируется сечение пучка, должны предъявляться требования «повышенной гладкости», специфические для решений внешней задачи, использующих аппарат аналитического продолжения. Эллипс, по-видимому, является единственным готовым контуром, удовлетворяющим этим требованиям. Однако эллипс представляет собой слишком грубую аппроксимацию прямоугольника. Коэффициент заполнения при отношении полуосей, равном отношению сторон, не превышает 80%, если эллипс вписан в прямоугольную мишень, и 43%, если эллипс описан вокруг нее.

Цель данной работы состоит в построении алгоритма оптимальной аппроксимации многоугольного контура, использовании результата в наиболее простом параксиальном решении внешней задачи, установлении применимости решения путем сравнения с точными выражениями для эллиптического и почти прямоугольного пучков с прямолинейными траекториями. Эти эталонные выражения можно интерпретировать как главный член решения в прикатодной области электронных пушек, в которой прямые параксиальные разложения сильно неравномерны.

* Параксиальное решение для течения с круговыми траекториями (формула (2.6) настоящей работы), как известно, получается разложением функции R^{-2} , входящей в качестве множителя в точное выражение для φ , вблизи оси $R = R_0$; решение это теряет смысл, если эллипс, ограничивающий сечение пучка, ориентирован так, что на его большей оси R претерпевает значительное изменение: угол наклона траекторий к оси пучка при этом равен нулю. Отмеченный факт является следствием существенной неоднородности потенциала в сечении пучка. Для «вырезок» из однородного потока в плоском диоде [7] размеры полуосей могут быть произвольными и не ограничены кругом радиуса ϵ_* . При описании пучков, меньший характерный размер сечения которых равен ϵ_* , а больший значительно превосходит эту величину, в общем случае необходимо использовать не параксиальную, а приповерхностную асимптотику [8].

1. О ВЫБОРЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И КОНТУРА, ОГРАНИЧИВАЮЩЕГО СЕЧЕНИЕ ПУЧКА

Поскольку пространственная задача Коши для потенциала вне пучка в параксиальном приближении оказывается квазидвумерной [4], а точные или приближенные решения, правильно выделяющие особенность на катоде, сводятся к последовательности двумерных задач [9–12], то речь будет идти о построении конформного отображения, которое на комплексной плоскости w распрямляет границу потока.

Начиная с работ, посвященных формированию криволинейных ленточных пучков [13, 14], и кончая публикациями, относящимися к аксиально-носимметричным [15] и трехмерным [4, 6, 9–12] конфигурациям, построение конформной системы координат u , v , связанной с границей течения $v = 0$, является существенным элементом теории. Наиболее простой способ получения такой системы [13] состоит в аналитическом продолжении параметра t в уравнениях границы $x = x_e(t)$, $y = y_e(t)$:

$$t \rightarrow w = u + iv, \quad x + iy = x_e(w) + iy_e(w). \quad (1.1)$$

Однако до сих пор ускользал от внимания тот факт, что такая система в общем случае позволяет построить решение лишь вблизи $v = 0$: при аналитическом продолжении, как правило, возникают особые точки и области неоднозначности координатной сетки u , v , другими словами, формула (1.1) не определяет конформного отображения. Если трудности, связанные с построением такого отображения остаются непреодоленными, то выражения в [4, 6, 9–15] для потенциала вне пучка, ограниченного заданным контуром, носят формальный характер. Поясним сказанное примерами.

Пусть потенциал и нормальная составляющая поля заданы на одной ветви гиперболы $xy = v^2$, $x, y > 0$, которая при малом v пригодна для аппроксимации пучка с прямым углом, стороны которого являются ее асимптотами (рис. 2 а; область, занятая электронами, заштрихована). Задавая параметризацию $x_e = t$, $y_e = v/t$, вместо (1.1) получаем

$$x + iy = w + iv/w. \quad (1.2)$$

Эта функция близка к функции Жуковского; обратная функция имеет точки ветвления $x + iy = \pm 2v \exp(i\pi/4)$, одна из которых (C_1) попадает в область внешней задачи. Известно, что взаимно-однозначное соответствие для (1.2) будет иметь место лишь в том случае, когда обойти вокруг C_1 нельзя, не обойдя одновременно вокруг C_2 . Однозначную ветвь обратной функции можно выделить между гиперболами $xy = v^2$, $x, y > 0$ и $xy = -2v^2$, $x, y < 0$. Учитывая, однако, что v должно быть достаточно малым (радиус скругления имеет порядок v), обнаруживаем, что третий квадрант, в котором проявляются все эффекты, связанные с формированием пучка, обладающего большой кривизной границы, остается недосягаемым. Отображение (1.2) будет взаимно-однозначным, если между C_1 и C_2 проведен разрез, но такая область уже не имеет отношения к поставленной задаче. Угадать «правильную» параметризацию контура, аналитическое продолжение которой порождает конформное отображение, по-видимому, труднее, чем построить само отображение.

Еще один пример неудачной параметризации представлен на рис. 2 б. Это фурье-аппроксимация прямоугольника с отношением сторон $a/b = 5$ по гармоникам полярного угла ϕ (полюс расположен в центре прямоугольника, n — число гармоник). Видно, что приближение рядом Фурье отличается мелкомасштабной волнистостью, доходящей до самопресечений, а при больших x контур ближе к эллипсу, чем

к прямоугольнику. Ясно, что аналитическое продолжение для такого контура лишено смысла.

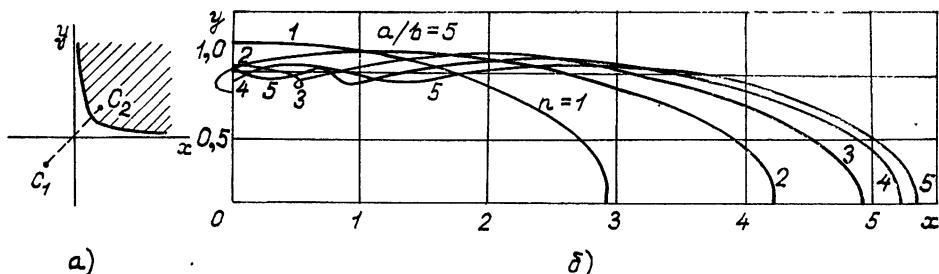


Рис. 2.

Из сказанного, в частности, следует, что многозначность потенциала и запрещенные области [16], возникающие в задаче расчета пушки со скрещенными полями, вызваны не физическими причинами, как указывается в [16], а имеют сугубо математическую природу: результаты [16] основаны на аналитическом продолжении (1.1), а конформное отображение не было найдено.

Оказалось, однако, что конформность отображения еще не гарантирует решения внешней задачи. При построении точного решения для пучка в виде «вырезки» из плоского диода с почти прямоугольным сечением* было обнаружено, что сетка u, v должна порождаться конформным отображением «повышенной гладкости»: среди координатных линий внутри и вне Γ недопустимы линии с изломами. Отдалить особые точки от Γ можно при помощи подходящей фильтрации, связанной со сглаживанием аппроксимирующего контура. Такая фильтрация будет реализована, если подвергнуть функцию $x + iy = f(\tau)$, осуществляющую отображение внешности единичного круга на внешность Γ , следующим преобразованиям.

Аппроксимируем заданный контур Γ в первом приближении N -угольником. Тогда $f(\tau)$ представляется выражением, полученным с использованием интеграла Кристоффеля — Шварца:

$$x + iy = c \int_1^{\tau} \prod_{i=1}^N (t - a_i)^{\alpha_i - 1} \frac{dt}{t^2} + c_1 = c \int_1^{\tau} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{a_i}{t}\right)^{\alpha_i - 1} dt + c_1, \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = N + 2, \quad \tau = e^{tu-v}.$$

Здесь a_i — внешние углы N -угольника, измеренные в долях π , a_i — точки единичной окружности, отвечающие его вершинам.

Заметим особо, что в (1.3) и используемых ниже формулах $v < 0$.

Раскладывая интегrand в ряд по t^{-1} и выполняя интегрирование, получаем отображение, которое в качестве линии $v = 0$ дает скругленный многоугольник:

$$x + iy = c \left(\tau + b_1 \ln \tau - \sum_{k=1}^n \frac{b_{k+1}}{k} \tau^{-k} \right), \quad (1.4)$$

* В. Н. Данилов, В. А. Сыровой, Радиотехника и электроника, 12, № 7 (1977). Это решение используется ниже для проверки точности параксиального приближения.

$$\begin{aligned}
 b_1 &\equiv \sum_{k=1}^N A_{k1}, \quad b_2 = \sum_{k=1}^N A_{k2} + \frac{1}{2!} \sum_{k, j=1}^N A_{k1} A_{j1}, \\
 b_3 &= \sum_{k=1}^N A_{k3} + \frac{1}{2!} \sum_{k, j=1}^N A_{k1} A_{k2} + \frac{1}{3!} \sum_{k, j, l=1}^N A_{k1} A_{j1} A_{l1}, \\
 b_4 &= \sum_{k=1}^N A_{k4} + \frac{1}{2!} \sum_{k, j=1}^N (A_{k1} A_{j3} + A_{k2} A_{j2}) + \\
 &+ \frac{1}{3!} \sum_{k, i, l=1}^N A_{k1} A_{j1} A_{l2} + \frac{1}{4!} \sum_{k, j, l, m=1}^N A_{k1} A_{j1} A_{l1} A_{m1}, \\
 k \neq j \neq l \neq m, \quad A_{ks} &= \frac{(1 - \alpha_k)(2 - \alpha_k) \dots (s - \alpha_k) \alpha_k^s}{s!}.
 \end{aligned}$$

Константы c , a_j (три из a_j можно задать произвольно) определяются по известным координатам вершин N -угольника из системы интегральных уравнений, выписываемых на основании (1.3). При обратном подходе они могут рассматриваться как свободные параметры, набор которых задает некоторый контур*.

Таким способом, разумеется, нельзя аппроксимировать контур с узкими щелями: эти щели будут отфильтрованы вместе с изломами, они «не видны» из бесконечности.

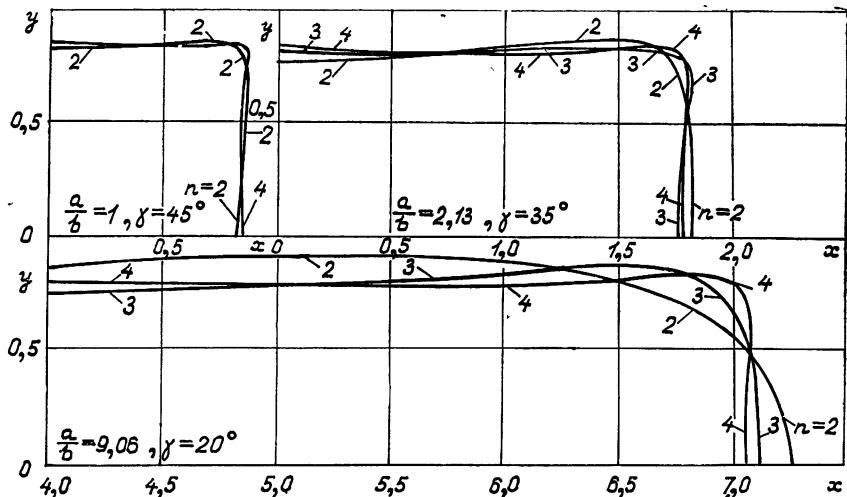


Рис. 3.

Результаты применения этого алгоритма к прямоугольникам с разным отношением сторон приведены на рис. 3 для $n = 2, 3, 4$. Разложение (1.4) при этом принимает вид

* Логарифмический член должен отсутствовать в разложении (1.4) в силу однозначности исходной функции (1.3): $b_1 \equiv 0$. При обратном подходе подбираемые константы a_k должны удовлетворять связям $|a_k| = 1$, $b_1 = 0$.

$$x + iy = c \left(\tau + \sum_{k=1}^n c_k \tau^{1-2k} \right), \quad \tau = e^{iu-v},$$

$$c_1 = \cos 2\gamma, \quad c_2 = -\frac{1}{6}(1 - c_1^2), \quad c_3 = -\frac{1}{10}c_1(1 - c_1^2), \quad (1.5)$$

$$c_4 = \frac{1}{56}(1 - 6c_1^2 + 5c_1^4), \quad c = \frac{c_0}{1 - c_1}.$$

При $n = 1$ формулы (1.4) дают эллипс с полуосами $a = c_0(1 + c_1)/(1 - c_1)$, $b = c_0$. Видно, что сравнительно малое число гармоник в (1.4) дает приемлемую аппроксимацию прямоугольника ($c_0 = 1$). На рис. 4а кривизна контура k_r при разных n приведена в функции полярного угла ψ . Увеличение n выражается в более резкой локализации области с большой кривизной и возрастании значения k_r в скругленном угле. На остальной части контура (рис. 4 б) кривизна достаточно мала, а ее осцилляции умеренны.

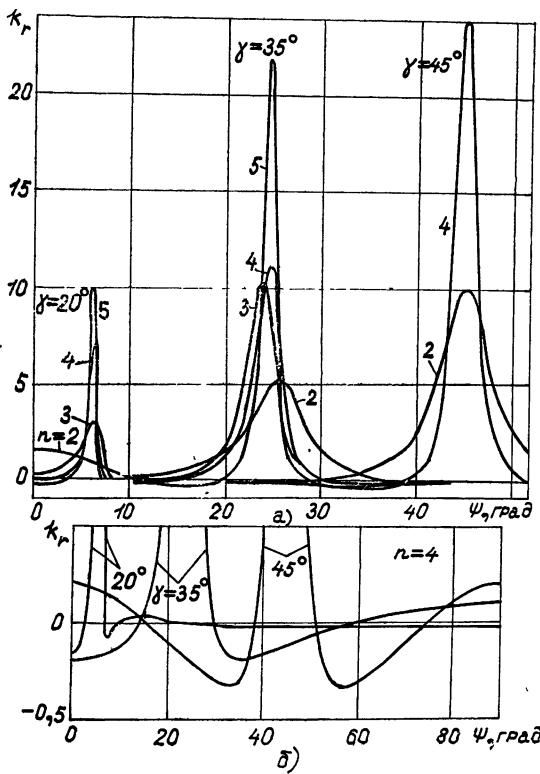


Рис. 4.

2. ПАРАКСИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ С ПОЧТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

В параксиальной теории [4] потенциал в пучке ϕ_i представлялся в виде суммы двух слагаемых: $\phi_i = \Psi + \Pi_i$, где Ψ — гармоническая функция, обеспечивающая заданный потенциал и поле на оси пучка, а Π_i — член, обусловленный пространственным зарядом и удовлетворяю-

ший уравнению Пуассона с нулевыми условиями на оси; при сохранении членов порядка ϵ_*^2 имеем $\Pi_i = \frac{1}{4} \rho \sigma^2$ (σ — квазицилиндрический радиус, аналогичный цилиндрической координате для прямой оси). Во внешней задаче [4] $\varphi = \Psi + \Pi$, причем Π удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа, условиям сопряжения с Π_i по функции к производной на границе потока и выражается через одинарный интеграл. Иная возможность [1] построения решения внешней задачи в параксиальном приближении состоит в представлении потенциала в виде $\varphi = \varphi_i + S$, где S — решение двумерного уравнения Пуассона с членом $(-\rho)$ в правой части и с однородными условиями на границе течения*. Выражение для S представляется двойным интегралом**,

$$S = -\rho(\zeta) \operatorname{Re} \int_0^v d\xi \int_0^{v-\xi} \sqrt{g(u+i\xi, \eta)} d\eta, \quad (2.1)$$

и получено по методу Римана (функция Римана при этом равна единице). Здесь ζ — продольная криволинейная координата ($\zeta = 0$ — уравнение катода), $g(u, v)$ — детерминант метрического тензора системы u, v ; квазиконстанты c_0, γ в (1.5) в параксиальном приближении являются медленно меняющимися функциями ζ .

Учитывая, что для системы (1.4)

$$\begin{aligned} c^{-2} \sqrt{g(u, v)} = & e^{-2v} - 2c_1 \cos 2u + e^{2v} (c_1^2 - 6c_2 \cos 4u) + \\ & + e^{4v} (6c_1 c_2 \cos 2u - 10c_3 \cos 6u) + e^{6v} (9c_2^2 + 10c_1 c_3 \cos 4u - \\ & - 14c_4 \cos 8u) + e^{8v} (30c_2 c_3 \cos 2u + 14c_1 c_4 \cos 6u) + \\ & + e^{10v} (25c_3^2 + 42c_2 c_4 \cos 4u) + 70c_3 c_4 e^{12v} \cos 2u + 49c_4^2 e^{14v}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

и выполняя интегрирование в (2.1), получаем решение задачи в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} S = & -\rho c^3 \left\{ \left[\frac{1}{4} (e^{-2v} + c_1^2 e^{2v}) - \frac{1}{4} (1 + c_2^2) + \frac{1}{2} (1 - c_1^2) v + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} c_1 (1 - \operatorname{ch} 2v) \cos 2u \left. \right] + \left[\frac{1}{4} c_2^2 (e^{6v} - 1) - \frac{3}{2} c_2^2 v - \right. \\ & - \frac{3}{4} c_1 c_2 \left(\operatorname{sh} 2v - \frac{2}{3} e^{4v} + \frac{1}{2} e^{2v} + \frac{1}{6} e^{-2v} \right) \cos 2u + \\ & + \frac{3}{4} c_2 \left(\operatorname{sh} 4v - e^{4v} + \frac{2}{3} e^{2v} + \frac{1}{3} e^{-4v} \right) \cos 4u \left. \right] + \\ & + \left[\frac{1}{4} c_3^2 (e^{10v} - 1) - \frac{5}{2} c_3^2 v - \frac{15}{8} c_2 c_3 \left(\operatorname{sh} 2v + \frac{1}{6} e^{2v} - \frac{4}{15} e^{8v} + \right. \right. \end{aligned}$$

* Эти два подхода приводят к любопытному тождеству, включающему одинарный и двойной интегралы: $\Pi - S = \Pi_i$.

** Подставляя в (2.1) $g = \gamma' \cos 2w$, что соответствует точному отображению внешности квадрата ($\Gamma: v = \epsilon$), легко убедиться, что на диагонали $u = \pi/4$ эквипотенциали испытывают излом $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$. Этот факт является прямым доказательством необходимости использования отображения «повышенной гладкости» в параксиальной теории.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{10} e^{-2v} \Big) \cos 2u - \frac{5}{12} c_1 c_3 \left(\operatorname{sh} 4v + e^{4v} - \frac{6}{5} e^{6v} + \frac{1}{5} e^{-4v} \right) \cos 4u + \\
 & + \frac{5}{12} c_3 \left(\operatorname{sh} 6v + \frac{6}{5} e^{4v} - \frac{3}{2} e^{6v} + \frac{3}{10} e^{-6v} \right) \cos 6u \Big] + \\
 & + \left[\left(\frac{1}{4} c_4^2 (e^{14v} - 1) - \frac{7}{2} c_4^2 v - \frac{35}{12} c_3 c_4 \left(\operatorname{sh} 2v + \frac{1}{10} e^{2v} - \frac{6}{35} e^{12v} + \right. \right. \right. \\
 & + \frac{1}{14} e^{-2v} \Big) \cos 2u - \frac{21}{20} c_2 c_4 \left(\operatorname{sh} 4v + \frac{1}{3} e^{4v} - \frac{10}{21} e^{10v} + \right. \\
 & + \frac{1}{7} e^{-4v} \Big) \cos 4u - \frac{7}{24} c_1 c_4 \left(\operatorname{sh} 6v + \frac{3}{2} e^{6v} - \frac{12}{7} e^{8v} + \right. \\
 & + \frac{3}{14} e^{-6v} \Big) \cos 6u + \frac{7}{24} c_4 \left(\operatorname{sh} 8v + \frac{12}{7} e^{6v} - 2 e^{8v} + \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{2}{7} e^{-8v} \right) \cos 8u \right] \Big\}, \quad \varphi = \varphi_i + S, \quad v \leq 0. \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

В квадратных скобках сосредоточены члены, появляющиеся при увеличении n от 1 до 4 в (1.5). Выражение в первой квадратной скобке отвечает решению для эллиптического пучка, приведенному в [5, 7].

Рассмотрим несколько специализаций формул (2.3), соответствующих «вырезкам» из потоков, описываемых известными точными решениями; отношение полуосей сечения при этом не зависит от ζ .

Для «вырезки» из плоского диода имеем (U — потенциал на оси пучка)

$$\zeta = z, \quad \varphi_i = U = z^{4/3}, \quad \rho = \frac{4}{9} z^{-2/3}, \quad c_0 = 1. \tag{2.4}$$

Для сходящегося или расходящегося потока, образованного «вырезкой» из сферического диода, потенциал в пучке задается параметрически [17]:

$$\begin{aligned}
 \zeta = \sigma, \quad \varphi_i = U = t^{2/3} I_{2/3}^2(t) I_{-1/3}^{-2}(t), \quad \sigma = t^{2/3} I_{-1/3}^2(t), \\
 \rho = \sigma^{-2} \frac{d}{d\sigma} \left(\sigma^2 \frac{d}{d\sigma} U \right), \quad c_0 = \sigma, \quad I_v(t) = J_v(it). \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Здесь σ — сферический радиус, I_v — функция Бесселя мнимого аргумента; нормировка φ_i и σ приведена в [17]; квазиконстанта c пропорциональна σ в соответствии с характером течения.

Если в двух приведенных примерах $\varphi_i = U$, то при формировании «вырезки» из течения с круговыми траекториями это не так:

$$\begin{aligned}
 \zeta = \psi, \quad \varphi_i = U(1 + 2ks + 3k^2 s^2), \quad U = \left(\sin \frac{3}{2} k\psi \right)^{4/3}, \\
 \rho = U'' + 4U, \quad c_0 = 1. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Роль продольной координаты играет здесь полярный угол в плоскости поворота траекторий; попечная координата s лежит в той же плоскости и ортогональна оси пучка, кривизна k которой постоянна. Параксиальному разложению (2.6) отвечает точное решение [18].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПОЛЯ, ФОРМИРУЮЩЕГО ПОЧТИ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ И ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ «ВЫРЕЗКИ» ИЗ ПЛОСКОГО ДИОДА

На рис. 5 представлены эквипотенциальные кривые, рассчитанные по формулам (2.3), (2.4), в диагональной плоскости s, z для скругленного квадрата с использованием трех ($n = 2$) и пяти ($n = 4$) членов ряда (1.5). Пунктиром изображено точное решение для того же контура. Видно, что основной эффект — поворот эквипотенциалей в сторону, противоположную направлению ускорения в области, прилегающей к скругленному углу, — правильно «схватывается» прямым разложением. Максимальное отличие от точного решения имеет место при малых z для нулевой (не считая отрицательных) эквипотенциали, причем относительная ошибка в определении координат электрода не превышает 35 %. Увеличение кривизны (от 10 до 24) при переходе от $n = 2$ к $n = 4$ не только не привело к возрастанию ошибки, но даже уменьшило ее.

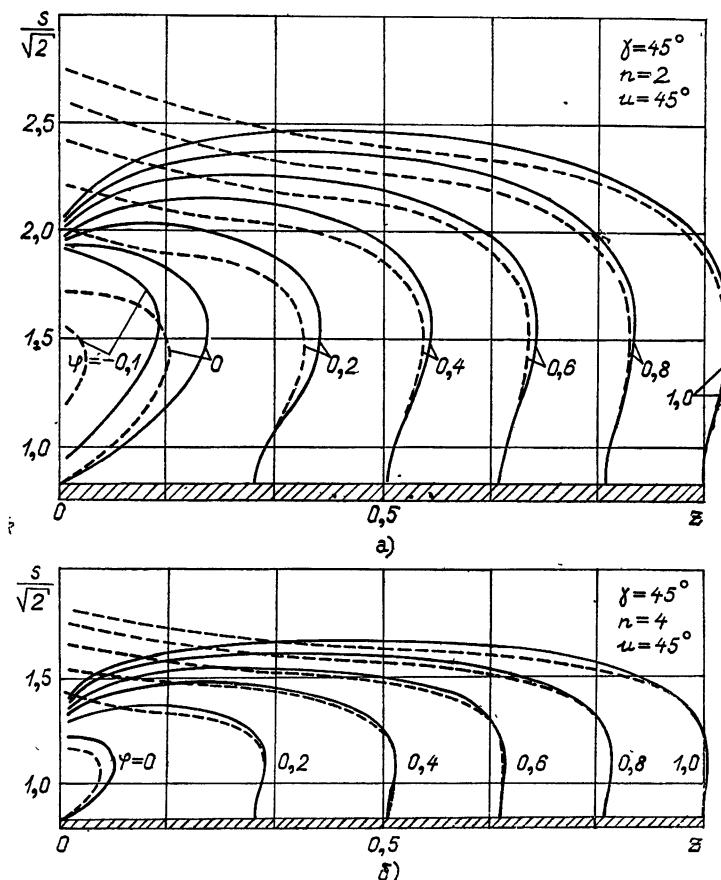


Рис. 5.

Поворот эквипотенциалей приводит к образованию параболической «складки» в нулевом электроде и «ребра» в ускоряющем электроде, входящем в эту «складку» (рис. 6 а, правый верхний угол). В сечении $z = 0,2$ отличие эквипотенциалей $\varphi = 1$ оказывается более значительным, чем в плоскости s, z : точное решение дает электрод, более похо-

жий на клин, в то время как параксиальная теория приводит к параболической кривой с малой кривизной, поперечный размер которой на срезе рисунка почти втрое превышает точное значение.

Рис. 6 б иллюстрирует поведение поля для квадрата при $n = 4$ в том же сечении $z = 0,2$. Параксиальное решение так же, как и точное, отразило появление параболических «складок» вблизи плоскостей симметрии контура. Соотношение эквидистанций $\varphi = 1$ в «складках» примерно такое же, как на рис. 6 а. Аналогичное соответствие точного и приближенного решений имеет место на рис. 6 в, представляющем ход кривых $\varphi = \text{const}$ вблизи края скругленного прямоугольника с отношением сторон порядка 9. Рис. 6 г показывает, что при удалении от катода отличие параксиального решения от точного быстро убывает.

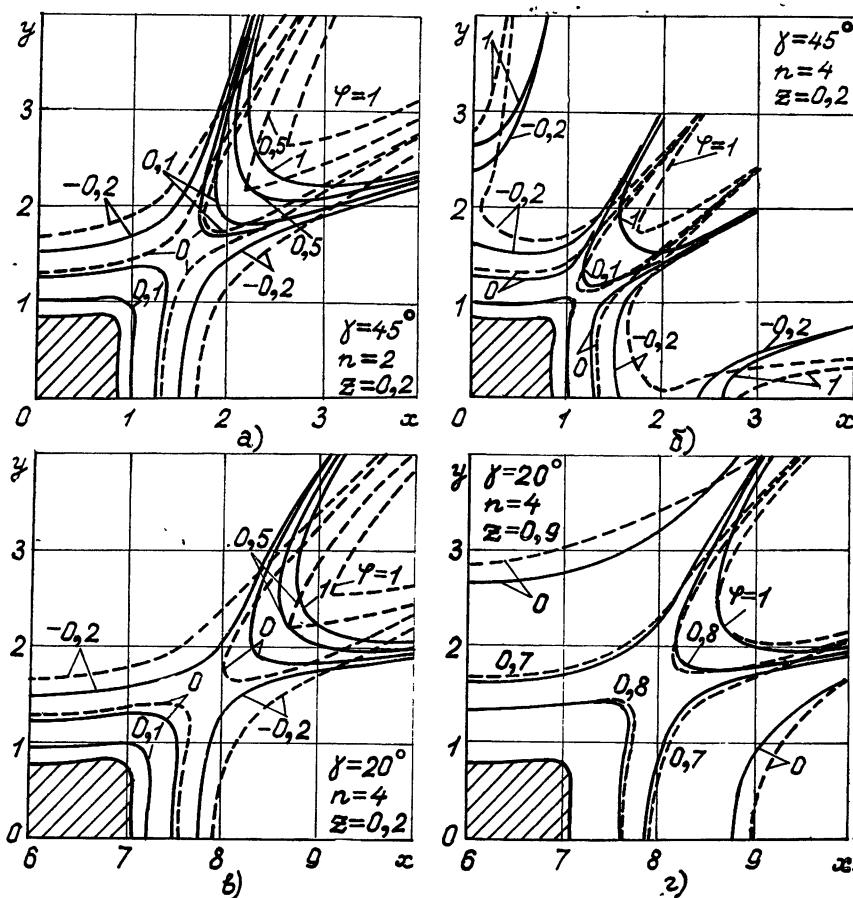


Рис. 6.

На рис. 7 приведено сравнение приближенного [5, 7] и точного [19] решений задачи о формировании эллиптического пучка. Из анализа результатов следует, что при отношении полуосей $a/b \leq 1,5$ предпочтение должно быть отдано не параксиальному приближению, а двучленному асимптотическому разложению [9], дающему явное уравнение нулевой эквидистанции [19]; использование этого подхода приводит к меньшей ошибке. Явное уравнение ненулевых электродов $\varphi = \varphi_0$ легко

получается из рассмотрения первых членов ряда [6] и для произвольного цилиндра имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\sqrt{g_0}}{6 z_0} v^2 \left(1 + \frac{2}{3} k_T g_0 v \right), \quad \varphi_0 = z_0^{4/3}, \quad g_0 = g(u, 0). \quad (2.7)$$

В сечениях $z = \text{const}$ параксиальная теория дает эллипсоидальный овал с меньшим отношением полуосей по сравнению с точным решением (рис. 7 в).

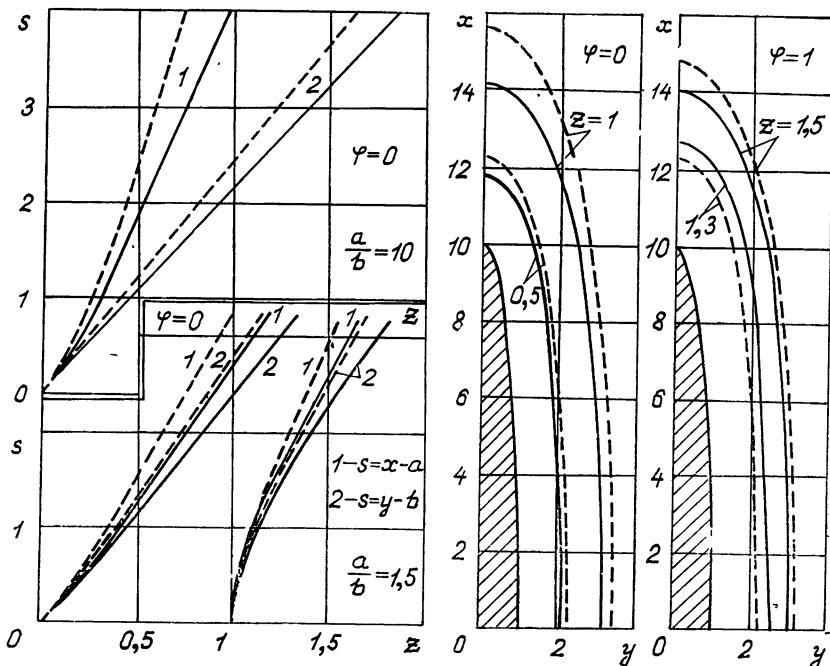


Рис. 7.

Подводя итог, можно сказать, что параксиальное приближение во внешней задаче теории формирования пригодно для описания пучков с резким изменением кривизны сечения, по крайней мере, при не слишком большой кривизне оси. Хотя это приближение в трехмерном случае дает ошибку, в несколько раз большую, чем в осесимметричном, даже такая погрешность не является чрезмерной, если учесть обязательный этап создания ЭОС — приданье синтезированным электродам формы, приемлемой с точки зрения технологии.

Для пучков, сечение которых представляет собой произвольную, но достаточно малую деформацию круга, с параксиальным приближением успешно конкурируют явные уравнения нулевого и ускоряющего электродов, полученные на основе локальных характеристик этих поверхностей (угол наклона, кривизна и т. д.) на границе пучка. Последние формулы не только более просты, но и более универсальны: для их получения нет необходимости строить конформную систему «повышенной гладкости», так как локальные характеристики могут быть вычислены в любой системе типа (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Т. Овчаров, Радиотехника и электроника, 7, № 8 (1962); 12, № 12 (1967)
2. В. Н. Данилов, Радиотехника и электроника, 16, № 1 (1971).
3. В. Н. Данилов, ПМТФ, № 5 (1968).
4. В. Н. Данилов, сб. Некорректные задачи, изд. Наука, М., 1974, ч. 1, стр. 38
5. В. Н. Данилов, Н. А. Никольская, Н. В. Романова, Б. В. Руденко, Методы расчета электронно-оптических систем, сер. Электроника СВЧ, ЦНИИ Электроника, М., вып 4(34), 1974, стр. 50.
6. В. А. Сыровой, ПМТФ, № 3 (1967), № 4 (1967)
7. В. В. Пензяков, В. Н. Олейников, Радиотехника и электроника, 20, № 5 (1975).
8. В. Н. Данилов, Радиотехника и электроника, 14, № 4 (1969), сб Некорректные задачи, изд. Наука, М., 1974, ч 1, стр 61
9. В. А. Сыровой, ПММ, 34, № 1 (1970)
10. В. А. Сыровой, ЖТФ, 41, № 12 (1971).
11. В. А. Сыровой, Радиотехника и электроника, 19, № 9 (1974)
12. В. Н. Данилов, В. А. Сыровой, ПММ, 35, № 4 (1971).
13. R. J. Lomax, J Electr. Contr., 3, № 4 (1958).
14. P. T. Kirstein, Proc. IRE, 46, № 10 (1958).
15. K. J. Harker, J. Math. Phys., 4, № 7 (1963).
16. П. Кирштейн, Г. Кайно, У. Уотерс, Формирование электронных пучков, изд. Мир, М., 1970, стр 423
17. В. Л. Кан, ЖТФ, 18, № 4 (1948).
18. B Meltzer, J. Electr., 2, № 2 (1956).
19. С. А. Пегов, В. А. Сыровой, Радиотехника и электроника, 19, № 10 (1974)

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
12 июля 1976 г

PARAXIAL APPROXIMATION IN THE EXTERNAL PROBLEM OF SPATIAL ELECTRON STREAM FORMATION

[*V. N. Danilov*] , *V. A. Syrovoy*

The applicability of paraxial approximation to calculation of electrodes in an electron gun which forms a stream with a considerable change in the curvature of the cross section boundary is investigated. The role of the conform image rectifying the stream boundary is discussed. The constructive algorithm of building such an image for the sections close to a multiangle is suggested. The solution of the problem of forming rectangular sections of plane and spherical diodes as well as of a curvilinear flow with helical trajectories is presented. The applicability limits of the paraxial approximation are estimated by comparing with an exact solution for elliptic and almost rectangular stream the potential of which varies in accord with the plane diode law.

УДК 538.576.3 . 621.372.413

КОАКСИАЛЬНЫЙ ОРОТРОН

Е. И. Нефёдов

Рассмотрена предложенная автором конструкция коаксиального оротрона — генератора дифракционного излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Основу прибора составляет открытый резонатор с внешним цилиндрическим зеркалом и внутренним фокусирующим зеркалом в виде гиперболоида вращения. Дифракционная решетка наносится на цилиндрическое зеркало. Для возбуждения электромагнитных колебаний используется полый цилиндрический электронный поток. Вывод энергии волноводный или квазиоптический. Приведены данные расчета электронного КПД.

1. Проблема исследования и освоения волновых процессов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов поставила перед физикой и, в первую очередь, электроникой СВЧ задачу создания стабильных перестраиваемых генераторов колебаний, обладающих достаточно высокой выходной мощностью. Определенные задачи из этого цикла проблем успешно решаются и с помощью «классических» приборов СВЧ электроники (клистроны, ЛБВ, ЛОВ и др.). Однако в силу ряда причин принципиального, конструктивного и технологического характера для применения более перспективными оказались приборы, в основу действия которых заложены два новых физических принципа: идея Франка о дифракционном излучении электрона, которая позднее была реализована в эффекте Смита—Парселла [1] (по существу — индуцированное черенковское излучение), и идея циклотронного резонанса в криволинейных электронных потоках, выдвинутая Гапоновым [2] (индукционное циклотронное излучение, связанное с релятивистскими эффектами). На основании этих фундаментальных физических открытий в последние годы были предложены и реализованы два новых класса электронных приборов: гиromонотроны (мазеры на циклотронном резонансе) [2] и генераторы дифракционного излучения — оротроны [1, 3, 4]. В настоящей заметке обсуждается одна из возможных конструкций оротрона — коаксиальная [5].

В реализованных к настоящему времени конструкциях оротронов используются плоские дифракционные структуры и ленточные электронные потоки [6, 7]. Исключение составляет предложенное в [8] устройство, где применен коаксиальный открытый резонатор с бочкообразным внешним зеркалом. Более перспективным представляется оротрон [5] на основе открытого коаксиального резонатора с цилиндрическим внешним зеркалом и внутренним (фокусирующим) зеркалом в виде гиперболоида вращения [9].

2. Схема рассматриваемого прибора показана на рис. 1, где представлены два варианта оротрона: с волноводным (а) и квазиоптическим (дифракционным) выводом (б) энергии. Основу оротрона составляет открытый коаксиальный цилиндрический резонатор, состоящий из цилиндрического внешнего зеркала 1 с кольцевой дифракционной структурой 2. Внутреннее фокусирующее зеркало 3 представляет собой ги-

перболоид вращения, внутренняя полость которого — цилиндрический волновод — предназначена для вывода энергии (через щели 4) из резонатора. Кроме того, вывод энергии (в схеме а) можно осуществить через «прозрачную» дифракционную решетку 2, формируя диаграмму излучения с помощью кольцеобразной перископической системы 5; при этом зеркало 5 может производить коррекцию квазиоптического пучка 6. Полярный электронный поток 7 создается кольцевой пушкой 8 (или системой пушек); отработанные электроны отводятся на коллектор 9. В схеме б) вывод энергии дифракционный (или квазиоптический) 10. Такой вывод предназначен для приборов коротковолновой части миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов*.

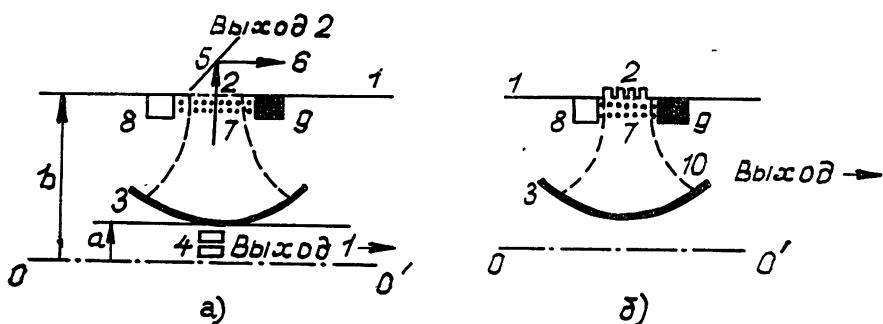


Рис. 1.

3. Размеры открытого резонатора оротрона таковы, что расстояние ($b - a$) между зеркалами 1 и 3 составляет несколько полуволн $q \sim 10$; $q = 1, 2, \dots [3]$. Длина волны генерации приближенно определяется так: $\lambda = 2\pi/k \approx 2(b - a)/q$. Таким образом, перестройка частоты в оротроне может происходить либо непрерывно за счет изменения расстояния между зеркалами 1 и 3**, либо за счет «перескока» на другой тип колебаний (иное значение q). В работе [9] было показано, что при $ka \gg 1$ и отсутствии азимутальной зависимости полей ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) открытый резонатор рассматриваемого типа с достаточно высокой степенью точности описывается своим двумерным аналогом***.

В силу симметрии резонансной системы и электронного потока коаксиальный оротрон, по существу, представляет прибор, в котором взаимодействие полого электронного потока с дифракционной структурой локально (например, в плоскости рисунка) происходит так же, как и у безгранично широкого плоского потока с плоской дифракционной структурой. Стало быть, имея полярный поток в коаксиальном оротроне, можно получить «чистые» волновые пучки дифракционного излучения, избежать возникновения пучков другой поляризации и других

* Эффективность возбуждения линзовой и диафрагменной линий кольцевыми структурами (типа 5 и 10) обсуждалась в работе [10].

** Непосредственное изменение расстояния ($b - a$) в схемах, показанных на рис. 1, исключено. Впрочем, незначительное изменение конструкции резонатора позволяет превратить его в перестраиваемый [11].

*** Измеренное значение частоты отличалось от расчетного на 0,01%, а добротность (в схеме а) составляла величину порядка 5000. При этом задача достижения максимальной добротности в исследованных в [9] резонаторах не ставилась.

явлений, обязанных конечной ширине электронного потока в плоском оротроне [7]*.

4. Высказанные соображения о характере взаимодействия электромагнитного поля с электронным потоком в коаксиальном оротроне и результаты [9] позволяют при первоначальном анализе его свойств воспользоваться моделью неограниченно широкого потока в резонансных приборах *O*-типа [3, 12, 15]. Мы приведем здесь результаты расчета электронного КПД из решения нелинейного уравнения движения в приближении заданного поля открытого резонатора [15]. В отличие от [15] пренебрегаем влиянием пространственного заряда, но учтем распределение высокочастотного поля вдоль пространства взаимодействия:

$F \exp\{-\hat{a}(\zeta - d)^2\}$, где нормированная амплитуда поля есть $F = E/2\beta_e u_0$, $\hat{a} = A\beta_e^{-2}$, параметр расстройки $\hat{b} = (v_0 - v_\Phi)/v_\Phi$, u_0 — напряжение пучка, v_0 , v_Φ — скорости движения пучка и волны, d — нормированная эффективная длина пространства взаимодействия.

Для следующего набора параметров $\hat{b} = 0,144$, $\hat{a} = 0,00063$, $d = 45,1$ и $F = 0,019$ электронный КПД составляет величину 30 %. При этом длина пространства взаимодействия оказывается порядка 7 длин замедленных волн. Следует отметить, что указанная величина КПД может быть увеличена**.

5. Описанная конструкция коаксиального оротрона обладает рядом преимуществ. Основная его особенность заключается в существенно большей поверхности дифракционной решетки, у которой происходит взаимодействие электронного потока с высокочастотным полем, и, в силу этого, в возможности генерировать большие мощности. В коаксиальном оротроне используется кольцевой электронный поток, что предпочтительнее по сравнению с плоским потоком [12]. Волновые пучки дифракционного излучения являются однородными и однополяризационными и позволяют легко осуществить волноводный или квазиоптический вывод высокочастотной энергии из прибора (ср. [13]). Таким образом, электронный прибор непосредственно в линии возбуждает нужный тип колебаний, например, волну H_{01} цилиндрического волновода, симметричные волны в квазиоптических линиях передачи и т. п. Незначительное изменение конструкции прибора дает возможность получить перестройку по частоте в широком диапазоне. Коаксиальная конструкция прибора удобна для создания оптимального (по длине взаимодействия) магнитного поля, а также для осуществления (например, за счет скачков фазы) «возврата» в пространство взаимодействия выпавших из синхронизма электронов.

Отмеченные обстоятельства позволяют надеяться, что предложенный коаксиальный оротрон окажется перспективным для применения в физике и технике диапазона миллиметровых и субмиллиметровых волн.

В заключение автор считает своим исключительно приятным долгом выразить благодарность Б. М. Болотовскому, Б. З. Каценеленбауму,

* Оценочные расчеты показали, что пусковой ток для первой азимутальной моды в два раза выше, чем для основного симметричного колебания. При этом не учитывалось изменение резонансной частоты несимметричного колебания по сравнению с рабочим типом. Эффект расщепления частот, возможно (при обеспечении высоких значений добротности резонатора), окажется полезным для подавления паразитных типов колебаний.

** Как любезно сообщил автору В. К. Юллатов, в расчетах, проведенных в НИРФИ (г. Горький), при длине пространства взаимодействия в 6 длин замедленных волн КПД был равен 33% (плоская модель оротрона).

В. И. Таланову, М. Б. Цейтлину и В. П. Шестопалову за внимание к работе и участие в ее обсуждении, а также В. К. Юллатову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 88, № 2, 209 (1966), 94, № 3, 377 (1968).
- 2 А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма в ЖЭТФ, 2, № 9, 430 (1965); А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
- 3 Ф. С. Русин, Г. Д. Богомолов, в сб. Электроника больших мощностей, вып. 5, изд. Наука, М., 1968, стр. 45.
- 4 В. П. Шестопалов, Дифракционная электроника, Харьков, изд. ХГУ, 1976.
- 5 Е. И. Нefёдов, Радиотехника и электроника, 22, № 9, 1327 (1977)
- 6 Ф. С. Русин, в сб Электроника больших мощностей, вып. 5, изд. Наука, М., 1968, стр. 9.
- 7 А. С. Сысоев, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 7, 1075 (1974).
- 8 Н. Н. Суслов, В. П. Шестопалов, Авт. свид. № 347833 от 03.04.70 (Бюлл. открытий, изобретений, 1972, № 24, стр. 173).
- 9 Е. И. Нefёдов, И. М. Российский, А. Т. Фиалковский, А. М. Храпко, Радиотехника и электроника, 19, № 12, 2629 (1974).
- 10 Г. П. Веселков, Е. И. Нefёдов, Квантовая электроника, 1, № 11, 2459 (1974).
- 11 Е. И. Нefёдов, А. М. Храпко, Электронная техника, серия Электроника СВЧ, № 12, 114 (1974).
- 12 Л. А. Вайнштейн, В. А. Солицев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
- 13 С. Н. Власов, И. М. Орлова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 1, 148 (1974).
- 14 А. А. Кураев, СВЧ приборы с периодическими электронными потоками, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
- 15 А. И. Денисов, В. Е. Чайка, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 8, 1022 (1972).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
20 октября 1976 г

COAXIAL OROTRON

E. I. Nefyodov

The author suggests and considers the construction of a coaxial orotron — mm and submm diffraction radiation oscillator. On open resonator with an external focusing mirror as the hyperboloid of rotation is the basis of the device. The diffraction array is plot on the cylinder mirror. A full cylinder electron stream is used to excite electromagnetic oscillations. The energy output is waveguide or quasioptical. The calculation data of electron efficiency are given.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.4

**НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛЯ УГЛОВЫХ РАЗМЕРОВ ИСТОЧНИКОВ
СПОРАДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ НА ВОЛНЕ 52 см**

Е. Н. Виняйкин, В. А. Сеняткин

В последние годы было открыто спорадическое радиоизлучение атмосферы Земли (околоземного космического пространства) на дециметровых и сантиметровых волнах [1]. Для выяснения физической природы этого радиоизлучения весьма важно знание угловой структуры или хотя бы угловых размеров его источников. С целью оценки угловых размеров источников спорадических импульсов в июле—сентябре 1974 г. на полигоне НИРФИ «Старая Пустынь» проводились наблюдения на волне 52 см (577 МГц).

Наблюдения проводились на радиотелескопах с параболическими рефлекторами диаметром 7 м (РТ-7) и 8 м (РТ-8); расстояние между телескопами составляло около 100 м. Облучателями являлись полуволновые вибраторы с рефлекторами. Ширина диаграммы направленности на уровне 0,5 по мощности составляла $5^{\circ}30'$ у РТ-7 и $4^{\circ}50'$ у РТ-8; фактор $(1 - \beta_{\text{рд}})$ соответственно равнялся 0,65 и 0,60. В качестве приемников использовались стандартные радиометры с чувствительностью 1 К при постоянной времени $\tau_a = 4$ с и с шириной полосы пропускания 10 МГц.

Наблюдения проводились в дневное время (в июле было проведено также шестьочных сеансов) при фиксированных положениях антенн радиотелескопов. Луч РТ-8 направлялся на полюс мира (азимут $A = 180^{\circ}$, угол места $h = 55^{\circ}39'$), а луч РТ-7 выставлялся также в плоскости меридиана ($A = 180^{\circ}$) под углом места $h = 30^{\circ}$. Поляризация обеих антенн была горизонтальной. С целью контроля за состоянием антенно-фильтрного тректа один-два раза в день производилась калибровка радиотелескопов по радиоизлучению источника Кассиопея-А. Кроме калибровки радиотелескопов в целом каждые два часа производилась калибровка приемников путем подключения на вход эталонного шумового генератора.

Было проведено 370 часов (июль — 190, август — 180) одновременных наблюдений на РТ-7 и РТ-8. За это время было зарегистрировано семь всплесков естественного (но не грозового и не от Солнца) происхождения. Все эти всплески принимались одновременно на обоих радиотелескопах. Список спорадических радиоимпульсов и их параметров приведен в табл. 1.

Таблица 1

Дата 1974 г.	РТ-7, $A = 180^{\circ}$, $h = 30^{\circ}$			РТ-8, $A = 180^{\circ}$, $h = 55^{\circ}39'$		
	t_h , час. мин.	τ_i , мин.	$T_{\text{ам}}$, К	t_h , час. мин	τ_i , мин.	$T_{\text{ам}}$, К
6.07	9.15	6,5	48	9.15	5	20
9.07	9.41,5	1	22	9.41,5	2,5	40
10.07	15.18,7	2,3	67	15.18,7	2,3	90
11.07	8.55	7	45	8.55	6	40
22.07	9.51	10,5	25	9.51	10,5	18
1.08	11.08,7	1,3	26	10.55	25	58
2.08	9.29,75	3,25	83	9.29,75	3	14

В табл. 1 t_h — московское время начала всплеска в часах и минутах, измерявшееся с точностью $\pm 0,1$ мин, τ_i — длительность импульса в минутах, $T_{\text{ам}}$ — максимальная антенная температура или «амплитуда» импульса.

Следует заметить, что в таблице учтены лишь те из принимавшихся всплесков, «амплитуда» которых в 2—3 раза превышала локальный уровень флуктуаций антенной температуры с квазипериодом от минут до десятков минут, постоянно наблюдавшихся в дневное время. Уровень флуктуаций оценивался «шириной дорожки»

$\Delta T_a = 2 |T_a - \tilde{T}_a|$, где усреднение производилось за 1 час, \tilde{T}_a — локальное среднее значение антенной температуры, временная зависимость которого на интервале в 1 час представлялась линейной функцией. На рис. 1 приведены усредненные по месяцам суточные зависимости величины ΔT_a для июля (250 часов наблюдений, косая штриховка), августа (210 часов, штриховка в клетку) и сентября (177 часов, без штриховки) при наблюдениях на РТ-8. Из рис. 1 видно, что «ширина дорожки» обладает явно выраженной суточной переменностью. Вблизи полудня значения ΔT_a заметно превышали аппаратурное значение ≈ 6 К, которое реализовалось лишь в ночные и утренние часы. Уровень флуктуаций уменьшался от июля к сентябрю. Флуктуации антенной температуры наблюдались на обоих радиотелескопах

Вернемся к данным табл. 1. Средняя «амплитуда» всплесков $\langle T_{\text{я}m} \rangle$, приведенная к главному лепестку диаграммы направленности, составляла $\langle T_{\text{я}m \text{PT-7}} \rangle = \langle T_{\text{амPT-7}} \rangle [(1 - \beta_{\text{gl}}) \eta]^{-1} = 69$ и $\langle T_{\text{я}m \text{PT-8}} \rangle = 67$ К*. Равенство средних яркостных «амплитуд» на низких и высоких углах места приводит к оценке нижней границы для средних угловых размеров θ_u источников спорадических импульсов

$$\theta_u > 26^\circ, \quad (1)$$

где

$$26^\circ \approx h_{\text{PT-8}} - h_{\text{PT-7}}.$$

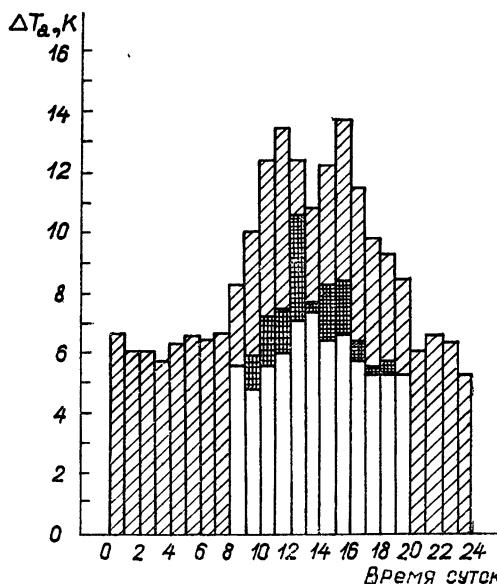


Рис. 1.

Спорадические импульсы начинались почти одновременно на обоих радиотелескопах. Исключение составил всплеск 1.08. Его длительность на высоких углах места была больше, чем на низких, и начался он значительно раньше на высоких углах.

На рис. 2 приведен всплеск радиоизлучения типа «шумовая буря» [1] от 22.07.74 г., принятый на РТ-8 (а) и РТ-7 (б). Этот всплеск достаточно длительный для изучения корреляции флуктуаций его интенсивности. Коэффициент взаимной корреляции

* Фактор $\beta_{\text{gl}}\eta$ у РТ-7 равнялся 0,15, а у РТ-8 — 0,075. Если бы принимались не спорадические радиоимпульсы в главном луче, а мощные искусственные сигналы в боковых лепестках, то из-за того, что $T_{\text{абок}} \sim \beta_{\text{gl}}\eta$, величина $\langle T_{\text{амPT-7}} \rangle$ была бы в два раза больше величины $\langle T_{\text{амPT-8}} \rangle$. Измеренные же величины равняются соответственно 45 и 40 К.

$\rho_{7,8}(\tau=0) = 0,34 \pm 0,11$. Предположим, что функция угловой корреляции является гауссовой: $\rho(\theta, \tau=0) = \exp[-(0/\theta_0)^2]$. При $\rho(26^\circ) = 0,34$ имеем $\theta_0 = 25^\circ$ — угловой радиус корреляции флуктуаций интенсивности.

Анализ временных автокорреляционных функций $\rho_{7,7}(\tau)$ и $\rho_{8,8}(\tau)$ того же всплеска показывает, что интервал корреляции $\tau_0 = (4 \div 5)\tau_a = 16 \div 20$ с. Это означает, что записи всплеска существенно слажены интегрирующей цепочкой, а истинный интервал корреляции τ_0 ист. $\lesssim 1$ с.

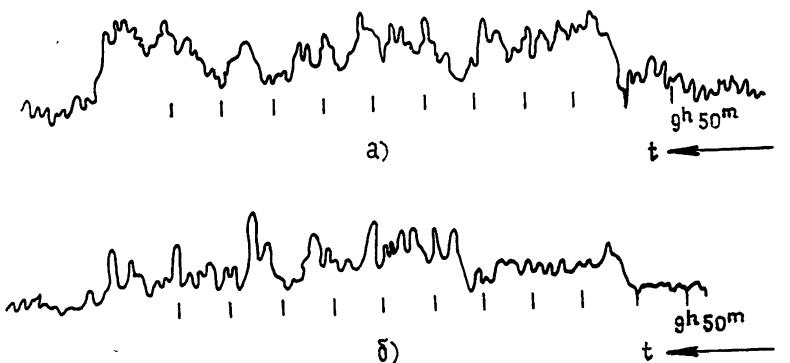


Рис. 2.

В заключение обсудим возможные причины флуктуаций антенной температуры*.

1. В результате технической деятельности больших и средних городов возникает интегральное радиоизлучение со сплошным спектром (см., например, [2]), которое может распространяться на сотни километров из-за рассеяния в тропосфере. Суточный ход ΔT_a в таком случае связан с естественной суточной переменностью радиофона городов [2]. Сезонное уменьшение можно объяснить ухудшением условий распространения из-за уменьшения приземного значения показателя преломления n_0 при переходе от лета к зиме [3, 4].

2. Интегральное радиоизлучение, связанное с существованием многочисленных удаленных грозовых очагов, также может привести к флуктуациям антенной температуры. Суточный и сезонный ход в этом случае объясняется соответствующими изменениями грозовой активности [5].

Авторы благодарны В. А. Разину за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Л. Н. Бондарь, А. М. Стародубцев, М. Р. Зелинская, К. М. Стрежнева, М. С. Китай, А. И. Сергеева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 323 (1973).
2. Y. W. Swenson and W. W. Soschong, Science, 181, 543 (1973).
3. М. П. Долуханов, Распространение радиоволн, изд. Связь, М., 1965.
4. А. И. Калинин, В. Н. Троицкий, А. А. Шур, в сб. Распространение радиоволн, изд. Наука, М., 1975.
5. Дж. А Чалмерс, Атмосферное электричество, Гидрометеоиздат, Л., 1974.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
25 октября 1976 г.

* Вклад радиоизлучения спокойного Солнца в антеннную температуру при наблюдениях на РТ-8 не превышал 4 К.

ФОРМА ИМПУЛЬСОВ СУПЕРЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

B. A. Горшков, P. I. Соколовский

• Среди обширного класса суперлюминесцентных (СЛ) лазеров особое место занимают лазеры на растворах красителей, возбуждаемых сверхкороткими импульсами света [1–3], для которых в настоящее время развита теория пространственной когерентности [4, 5] и тонкой структуры спектра [6]. Настоящее сообщение содержит теорию формирования огибающей импульса СЛ в рамках одномерной модели.

Направим ось z вдоль оси излучающей трубки и примем за основу следующие уравнения, описывающие изменение интенсивности излучения I и разности населенности комбинирующих уровней N

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial I}{\partial t} &= \sigma NI - \tilde{\gamma} I, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= -2\sigma NI + Q(t - z/u_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u — групповая скорость импульса света при $N = 0$, σ — сечение взаимодействия, Q — импульс накачки, распространяющийся вдоль оси z со скоростью u_0 , $\tilde{\gamma}$ — параметр, описывающий нерезонансные потери света в среде. Предполагается, что длительность импульса много меньше времени продольной релаксации и поляризация среды следует за полем, в соответствии с условиями экспериментов [1–3]. Уравнение (1) следует дополнить граничными условиями

$$z = 0, \quad I(0, t) = I_0(t); \quad t \rightarrow -\infty, \quad N(-\infty) = N_0, \quad (2)$$

где $I_0(t)$ — форма импульса на входном торце СЛ лазера, начиная с которого развивается СЛ, N_0 — начальное значение разности населенностей комбинирующих уровней.

Уравнения (1) отличаются от рассмотренных в работе [7] наличием источника в правой части второго уравнения и $\tilde{\gamma} \neq 0$. При $\tilde{\gamma} = 0$ система уравнений (1) может быть проинтегрирована и

$$I(z, \xi) = \frac{I_0(\xi) G(\xi, z) \exp \left(2\sigma \int_{-\infty}^{\xi} I_0(\xi) d\xi \right)}{G_0^{-1} + 2\sigma \int_{-\infty}^{\xi} d\xi I_0(\xi) G(\xi, z) \exp \left(2\sigma \int_{-\infty}^{\xi} I_0(\xi) d\xi \right)}, \quad (3)$$

где

$$\xi = t - z/u, \quad v = 1/u_0 - 1/u; \quad q(t) = \int_{-\infty}^t Q(t) dt;$$

$$G(\xi, z) = \exp \left\{ -\frac{\sigma}{v} \int_{-\infty}^{\xi} [q(\xi - vz) - q(\xi)] d\xi \right\},$$

$$G_0(z) = \exp \left(\sigma \int_0^z N_0 dz \right).$$

Проанализируем формулу (3). Когда скорость импульса инверсии больше u^* , изменение функции $G(\xi, z)$ происходит в интервале $(vz, 0)$, границы которого размыты на величину порядка длительности импульса накачки. Если начальные участки импульсов инверсии и $I_0(\xi)$ не накладываются, то световой импульс движется, как следует из (3), в среде с подготовленной инверсией. Формула (3) переходит в аналогичную формулу работы [7] с $G(z) = G_0(z)G(\infty, z)$. Если начальные фронты импульсов накладываются, то происходит, как показывают простые примеры, либо понижение темпов сжатия импульса (например, прямоугольного), либо даже увеличение его ширины (см. начальный участок кривой τ от z на рис. 1) для лоренцева

* Такую ситуацию можно реализовать, например, при сканировании луча накачки вдоль кюветы с раствором [8].

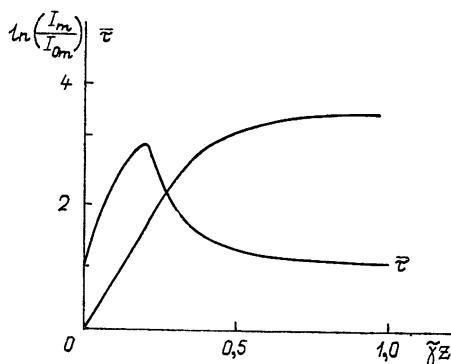


Рис. 1.

импульса. Иными словами, нестационарность усиления приводит к удлинению импульсов по отношению к выводам работы [7]. Физически полученный результат совершенно прозрачен. Передний фронт импульса люминесценции начинает снимать инверсию ранее, чем она достигла максимального значения, и, следовательно, условия для преимущественного усиления переднего фронта [7] не достигнуты.

Рассмотрим теперь случай $\nu = 0$, $G_0 = 1$. Предполагая начальные импульсы достаточно малоинтенсивными:

$$2\sigma \int_{-\infty}^{\infty} I_0(t) dt \ll 1,$$

приведем решение (3) к виду

$$I(z, \xi) = \frac{I_0(\xi) \exp(\sigma q(\xi) z)}{1 + 2\sigma \int_{-\infty}^{\xi} I_0(\xi') e^{\sigma q(\xi') z} d\xi'}. \quad (3')$$

Из формулы (3') следует, что интенсивность светового импульса в точках $\xi = \text{const}$ с ростом z растет экспоненциально, пока насыщение мало. Симметричный импульс преобразуется в асимметричный, более короткий импульс, передний фронт которого всегда круче заднего. Когда $\nu > 0$, нестационарность усиления всегда уширяет импульс, поддерживая его задний фронт.

Нерезонансные потери светового поля в среде ($\gamma \neq 0$) приводят к формированию стационарного импульса СЛ. Стационарный импульс бежит в среде со скоростью импульса накачки. Дифференциальное уравнение для функции $I(\eta)$, описывающей стационарный импульс, удобно записать в безразмерных переменных:

$$\frac{\alpha}{G_\gamma} (\ln \tilde{I})'' = -\alpha \tilde{I}' + \tilde{I} - \tilde{Q}. \quad (4)$$

Здесь \tilde{I} , \tilde{Q} введены равенствами: $I = Q_0 \tilde{I}/2\gamma$, $Q = Q_0 \tilde{Q}$, Q_0 — максимальное значение $Q(\xi)$, время измеряется в единицах τ , где τ — длительность импульса накачки, $\alpha = \nu/\gamma\tau$, $G_\gamma = \sigma Q_0 \tau / \gamma$.

Усиление на длине $1/\gamma$ в СЛ лазерах достаточно велико ($G_\gamma \gg 1$), и членом, содержащим производную от логарифма, можно пренебречь. Полученное уравнение интегрируется элементарно, и решение

$$I = -\frac{1}{2\nu} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' Q(\xi') \exp \left[\frac{\gamma}{\nu} (\xi - \xi') \right]$$

дает стационарный импульс, если $\nu < 0$. Следовательно, стационарный импульс СЛ образуется тогда, когда импульс накачки распространяется со скоростью, превосходящей групповую скорость n .

Процесс установления стационарного импульса может быть исследован только с помощью ЭВМ. На рис. 1 изображены значения максимальной амплитуды, нормированной к максимальной амплитуде начального импульса, и полуширины импульса СЛ

(в единицах длительности импульса накачки) в зависимости от пути z , пройденного в среде для $\alpha = -1$, $\alpha/G_1 = -0.1$ (импульс накачки и начальный импульс лоренцевой формы). Из рисунка видно, что формирование стационарного импульса происходит на расстоянии порядка $1/\gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. B. Mimoia, J. Appl. Phys., 43, 758 (1972).
2. C. Lin, T. K. Gustafson and A. Dienes, Opt. Commun., 8, 210 (1973).
3. Б. С. Непорент, В. В. Крюков, Г. В. Лукомский, Б. Б. Шилов, Оптика и спектроскопия, 35, 531 (1973).
4. В. И. Беспалов, Г. А. Пасманик, ДАН СССР, 210, 309 (1973).
5. У. А. Абдулин, В. А. Горшков, И. Л. Клюкач, Г. А. Ляхов, Р. Ю. Орлов, Л. С. Телегин, Квантовая электроника, 2, 967 (1975).
6. И. Л. Клюкач, Р. И. Соколовский, Письма в ЖТФ, 1, 1088 (1975).
7. L. M. Frantz and J. S. Nodvik, J. Appl. Phys., 34, 2346 (1963).
8. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, 577 (1972).

Московский институт стали и сплавов

Поступила в редакцию
9 ноября 1976 года

УДК 538.574.5 : 538.951

ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМОЙ

М. Б. Каневский, Ю. А. Рыжов

1. Рассеяние электромагнитных волн на неоднородностях плазмы в условиях плазменного резонанса приводит к аномальному поглощению энергии этих волн. Причиной аномального поглощения является статистическая трансформация их энергии в энергию плазменных квазиелектростатических колебаний, возникающих вблизи резонансных направлений (в пространстве волновых векторов \mathbf{k}). В работе [1] было получено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной магнитоактивной плазмы при $u = \omega_H^2/\omega^2 < 1$ ($\omega_H = eH/mc$, e , m — заряд и масса электрона, H — величина магнитного поля, ω — частота электромагнитной волны). Располагая антиэрмитовой частью тензора $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$, легко подсчитать коэффициент поглощения $\chi(\vartheta)$ при любом фиксированном угле ϑ между волновым вектором \mathbf{k} и магнитным полем \mathbf{H} . При $u < 1$ имеет место резонанс для необыкновенной волны. Квадрат, коэффициента преломления $n_1^2(\vartheta)$ обращается в бесконечность при $\vartheta = \vartheta_p$, где ϑ_p — корень уравнения $N(\vartheta) = \epsilon \sin^2 \vartheta + \eta \cos^2 \vartheta = 0$, а ϵ и η — компоненты среднего тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, который в системе отсчета с осью z , направленной вдоль магнитного поля, имеет вид

$$\epsilon_{np} = \begin{vmatrix} \epsilon & -ig & 0 \\ ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{1-u-v}{1-u}, \quad \eta = 1-v, \quad g = \frac{\sqrt{u}v}{1-u}, \quad v = \frac{4\pi e^2 \langle N \rangle}{m \omega^2},$$

$\langle N \rangle$ — средняя электронная плотность. Этот случай наиболее интересен для ионосферных приложений и в ряде работ привлекается для объяснения аномального поглощения обыкновенных волн в экспериментах по воздействию мощных радиоволн на ионосферную плазму [2, 3]. Случай $u > 1$ в ионосферных экспериментах практически не реализуется. Тем не менее этот случай может быть интересен для проблемы нагревания лабораторной плазмы до температур термоядерных реакций. При $u > 1$ резонансной является обыкновенная волна ($n_2^2(\vartheta) \rightarrow \infty$ при $\vartheta \rightarrow \vartheta_p$), и аномальное поглощение связано с возбуждением этой волны. Для резонанса при $u > 1$ необходимо выполнение условия $v > 1$, что и предполагается в дальнейшем. Поскольку расчет здесь аналоги-

чен расчету для случая $u < 1$, мы его опустим и приведем лишь окончательные результаты.

2. Для случая холодной плазмы с мелкомасштабными ($k_0 l \ll 1$, $k_0 = \omega/c$) изотропными флуктуациями диэлектрической проницаемости с корреляционной функцией $\langle \Delta \epsilon_{nl}(r_1) \Delta \epsilon_{qp}(r_2) \rangle = B_{nlqp}(0) \exp(-|r_1 - r_2|^2/l^2)$ тензор эффективной диэлектрической проницаемости имеет вид [1]

$$\epsilon_{np}^{\text{эфф}}(\omega) = \epsilon_{np}(\omega) + \operatorname{Re} \xi_{np}(\omega) + i \operatorname{Im} \xi_{np}(\omega),$$

где $\xi_{np}(\omega)$ определяется выражением (1), а ξ_{np} — тензор вида

$$\xi_{np} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{33} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\xi_{11} = \xi_{22}, \quad \xi_{12} = -\xi_{21},$$

$$\xi_{11}(\omega) = -\frac{1}{8\sqrt{\pi}} D_1 [I_1(n_1) + I_1(n_2)] + \frac{k_0^2 l^2}{4} D_3 [I_3(n_1) + I_3(n_2)] + \frac{k_0^2 l^2}{4} D_4 [I_4(n_1) + I_4(n_2)] + \frac{k_0^2 l^2}{8\sqrt{\pi}} D_5 [I_5(n_1) + I_5(n_2)],$$

$$\begin{aligned} \xi_{12}(\omega) = & -\frac{B_{1112}}{4\sqrt{\pi}} [I_1(n_1) + I_1(n_2)] + k_0^2 l^2 \eta B_{1112} [I_4(n_1) + I_4(n_2)] + \\ & + i \frac{k_0^2 l^2}{2} D_1 \left[\frac{(\eta - 2\varepsilon) \sqrt{u}}{1+u} - g \right] [I_3(n_1) + I_3(n_2)] + \\ & + i \frac{k_0^2 l^2}{4\sqrt{\pi}} \eta D_1 \left(\frac{2\varepsilon \sqrt{u}}{1+u} + g \right) [I_5(n_1) + I_5(n_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{33}(\omega) = & -\frac{D_2}{4\sqrt{\pi}} [I_2(n_1) + I_2(n_2)] - \frac{k_0^2 l^2}{2} \varepsilon D_2 \{2[I_4(n_1) + I_4(n_2)] - [I_3(n_1) + I_3(n_2)]\} + \\ & + \frac{k_0^2 l^2}{4\sqrt{\pi}} (\varepsilon^2 - g^2) D_2 [I_5(n_1) + I_5(n_2)], \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{\beta^2 \sigma^2 (1+u)}{(1-u)^2}, \quad D_2 = \beta^2 \sigma^2, \quad D_3 = D_1 \left(\eta - 2\varepsilon - \frac{4g\sqrt{u}}{1+u} \right), \quad D_4 = -2\eta D_1,$$

$$D_5 = 2\eta D_1 \left(\varepsilon + \frac{2g\sqrt{u}}{1+u} \right), \quad B_{1112} = \frac{i \beta^2 \sigma^2 \sqrt{u}}{(1-u)^2},$$

$\beta = 4\pi e^2/m \omega^2$, $\sigma^2 = \langle \Delta N^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуаций электронной плотности; интегральные выражения для функций $I_k(n_{1,2})$ см. в [1].

Поскольку при $\sigma^2 \ll 1$ поправка к реальной части тензора $\epsilon_{np}(\omega)$ мала, выражения для $\operatorname{Re} \xi_{np}(\omega)$ здесь не приводятся. Что же касается $\operatorname{Im} \xi_{np}(\omega)$, то эта величина определяет поглощение в магнитоактивной плазме и выражается через $\operatorname{Im} I_k(n_2)$. Мнимые части функций $I_k(n_1)$, определяющие вклад в антиэрмитову часть тензора $\epsilon_{np}^{\text{эфф}}(\omega)$, обусловленный рассеянием в необыкновенную волну, малы по сравнению с $\operatorname{Im} I_k(n_2)$.

После вычислений имеем:

$$\operatorname{Im} I_1(n_2) = \frac{4\pi}{v-1} \frac{\sin^4 \vartheta_p}{\cos \vartheta_p} \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{k_0^2 l^2}{8\alpha} \right) W_{-3/4, -3/4} \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} I_2(n_2) &= \frac{4\pi}{v-1} \sin^2 \vartheta_p \cos \vartheta_p \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{k_0^2 l^2}{8\alpha} \right) W_{-3/4, -3/4} \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right), \\ \operatorname{Im} I_3(n_2) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2(v-1)} \frac{\sin^4 \vartheta_p}{\cos \vartheta_p} \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right)^{-1/4} \exp \left(-\frac{k_0^2 l^2}{8\alpha} \right) W_{-5/4, -1/4} \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right), \quad (3) \\ \operatorname{Im} I_4(n_2) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2(v-1)} \frac{\sin^2 \vartheta_p}{\cos \vartheta_p} \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right)^{-1/4} \exp \left(-\frac{k_0^2 l^2}{8\alpha} \right) W_{-1/4, -1/4} \left(\frac{k_0^2 l^2}{4\alpha} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\sin^2 \vartheta_p = \frac{(u-1)(v-1)}{uv}$, $\alpha = \frac{u-1}{u-1+2v}$, $W_{\lambda, \mu}(z)$ — функция Уиттекера.

Мы не выписываем выражение для $\operatorname{Im} I_5(n_2)$, поскольку соответствующий интеграл имеет множителем малый параметр $(k_0 l)^3$ и вносит незначительный вклад в $\operatorname{Im} \xi_{np}(\omega)$.

При $u-1 \ll 1$ формулы (3) справедливы без каких-либо ограничений на v сверху, если же $u-1 \gtrless 1$, то имеет место ограничение

$$v \ll \frac{\sqrt{u}-1}{k_0^2 l^2}. \quad (4)$$

Напомним, что здесь предполагается выполненным условие $v > 1$, в противном случае резонанс обыкновенной волны отсутствует.

Формулы (3) определяют антиэрмитову часть тензора эффективной диэлектрической проницаемости и могут быть использованы для вычисления коэффициента поглощения. Коэффициент поглощения χ находится из формулы $2\gamma_{1,2}^2 = \sqrt{n_{1,2}^4 + \gamma_{1,2}^2} - n_{1,2}^2$, где $n_{1,2}^2$ — квадрат показателя преломления соответственно необыкновенной и обыкновенной волн, а для величин $\gamma_{1,2}$ в частных случаях продольного ($\vartheta = 0$) и поперечного ($\vartheta = \pi/2$) распространения легко получить

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}(\vartheta = 0) &= \frac{sv}{(1 \mp \sqrt{u})^2}, \quad \gamma_1 \left(\vartheta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{sv}{\epsilon(1-u)^2} \left[\frac{\epsilon^2 + g^2}{\epsilon} (1+u) + 4g\sqrt{u} \right], \\ s &= \frac{\sigma^2 v}{8\sqrt{\pi} \langle N \rangle^2} \operatorname{Im} I_1(n_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Выписывать величину $\gamma_2(\vartheta = \pi/2)$ не имеет смысла, поскольку при $v > 1$ обыкновенная волна поперек магнитного поля распространяться не может.

3. В заключение сделаем следующие замечания. При $\alpha \gg k_0^2 l^2$ первая и вторая формулы в (3) переходят в известные выражения квазистатического приближения [3].

В случае $u > 1$, вообще говоря, не исключена ситуация, когда рассеяние в необыкновенную волну будет преобладающим. Так будет, в частности, при $u-1 \ll 1$, $v < 1$, когда резонанс отсутствует, но $n_1^2 \gg 1$, $n_1^2 \gg n_2^2$ и поглощение определяется процессом возбуждения необыкновенных хаотических волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
2. В. В. Васильков, А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 69, 1(7), 176 (1975).
3. Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 18, № 9, 1273 (1975).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
5. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, 62, 3, 924 (1972).

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ЗАМКНУТОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

B. И. Кляцкин

Рассмотрим задачу Коши для стохастической системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = z(t) g(t) F_i(x) \quad (i = 1, \dots, N), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $g(t)$ и $F_i(x)$ — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайный процесс, статистические характеристики которого описываются характеристическим функционалом

$$\Phi_t [v(\xi)] = \left\langle \exp \left[i \int_0^t d\xi z(\xi) v(\xi) \right] \right\rangle = \exp \{ \theta_t [v(\xi)] \}. \quad (2)$$

Уравнения (1) обладают особенностью, позволяющей решить задачу о нахождении статистических характеристик его решения. Дело в том, что если ввести новое «случайное» время

$$\tau = \int_0^t d\xi z(\xi) g(\xi), \quad (3)$$

то уравнения (1) принимают форму «детерминированных» уравнений:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = F_i(x), \quad x(\tau = 0) = x_0. \quad (1')$$

Следовательно, решение системы (1) имеет вид

$$x_i(t) = x_i(\tau) = x_i \left(\int_0^t d\xi z(\xi) g(\xi) \right). \quad (4)$$

Варьируя (4) по $z(\xi)$ и используя (1), получаем равенство

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial z(\xi)} = \frac{g(\xi)}{z(t) g(t)} \frac{dx_i}{dt} = g(\xi) F_i(x(t)). \quad (5)$$

Таким образом, вариационные производные решения $x(t)$ выражаются через решение в тот же момент времени. Это позволяет сразу написать замкнутые уравнения для статистических характеристик задачи (1).

Получим уравнение для одноточечной плотности вероятностей:

$$P_t(x) = \langle \varphi_t(x) \rangle, \quad \varphi_t(x) = \delta(x(t) - x), \quad (6)$$

где усреднение производится по ансамблю реализаций процесса $z(t)$. Для этого напишем стохастическое уравнение для функции $\varphi_t(x)$:

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = -z(t) g(t) \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x) \varphi_t(x), \quad \varphi_0(x) = \delta(x_0 - x) \quad (7)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Усредним уравнение (7). Тогда, согласно [1],

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \left\langle \dot{\theta}_t \left[\frac{\delta}{t \delta z(\xi)} \right] \varphi_t(x) \right\rangle \quad \left(\dot{\theta}_t = \frac{d}{dt} \theta_t \right). \quad (8)$$

Рассмотрим теперь действие оператора $\delta/\delta z(\xi)$ на функцию $\varphi_t(x)$. Используя формулу (5), получаем выражение

$$\frac{\delta}{\delta z(\xi)} \delta(x(t) - x) = -g(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x) \varphi_t(x). \quad (9)$$

Следовательно, уравнение (8) можно переписать в виде замкнутого операторного уравнения

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = \theta_t \left[\lg(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} F_t(x) \right] P_t(x), \quad P_0(x) = \delta(x_0 - x), \quad (10)$$

конкретный вид которого определяется характером процесса $z(t)$.

Для двухвременной плотности вероятностей аналогичным образом получаем уравнение (для $t > t_1$) $P(x, t; x_1, t_1) = \langle \delta(x(t) - x) \delta(x(t_1) - x_1) \rangle$,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \theta_t \left\{ \lg(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial x_i} F_t(x) + \theta(t_1 - \xi) \frac{\partial}{\partial x_{i1}} F_t(x_1) \right] \right\} P(x, t; x_1, t_1), \quad (11)$$

с начальным условием

$$P(x, t_1; x_1, t_1) = \delta(x - x_1) P_{t1}(x_1), \quad (12)$$

где функция $P_{t1}(x_1)$ удовлетворяет уравнению (10), а $\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$.

Если процесс $z(t)$ — гауссов с характеристиками

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = B(t, t'), \quad (13)$$

то уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = g(t) \int_0^t d\xi g(\xi) B(t, \xi) \left[\frac{\partial}{\partial x_i} F_t(x) \right]^2 P_t(x). \quad (14)$$

Заметим, что если мы теперь введем новое время по формуле

$$\tau = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 g(t_1) g(t_2) B(t_1, t_2), \quad (15)$$

то уравнение (14) примет вид

$$\frac{\partial P_\tau(x)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_t(x) \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(x) P_\tau(x), \quad P_0(x) = \delta(x - x_0). \quad (14')$$

Отметим, что к этому же уравнению приводит статистическая задача о нахождении одноточечных характеристик решения системы уравнений

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \tilde{z}(\tau) F_i(x), \quad x(\tau = 0) = x_0, \quad (16)$$

где $\tilde{z}(\tau)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс, т. е.

$$\langle \tilde{z}(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{z}(\tau) \tilde{z}(\tau') \rangle = 2\delta(\tau - \tau'). \quad (17)$$

Уравнение (14'), вообще говоря, может иметь стационарное решение. Это стационарное распределение вероятностей не будет зависеть от интенсивности флуктуаций $z(t)$. Конкретный вид его определяется из асимптотического вида решения (14') при $\tau \rightarrow \infty$, а время τ (15), связанное с интенсивностью флуктуаций z , будет определять время выхода на стационарное распределение.

К задачам типа (1) приводит класс задач, описываемый системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = z(t) F_i(x) - \lambda x_i, \quad x(0) = x_0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad (18)$$

где $F_i(x)$ — однородные полиномы степени k . Вводя новые функции $x_i(t) = e^{-\lambda t} \tilde{x}_i(t)$, мы придем к задаче (1) с $g(t) = e^{-\lambda(k-1)t}$. В важном частном случае ($k = 2$) и при функциях $F_i(x)$, таких, что $x_i F_i(x) \equiv 0$, система уравнений (18) описывает системы гидродинамического типа с линейным трением [2]. При этом взаимодействие между компонентами носит случайный характер.

Для систем гидродинамического типа при $\lambda = 0$ и для любой реализации процесса $z(t)$ имеет место закон сохранения энергии: $x_i^2 = 2E = \text{const}$. В этом случае имеется стационарное распределение вероятностей $P_\infty(x)$, которое является равномерным распределением на сфере $x_i^2 = 2E$, если нет дополнительных интегралов движения. При наличии дополнительных интегралов движения (как это имеет место, например,

при конечномерных аппроксимациях двумерного движения жидкости [2]) стационарное распределение вероятностей будет сосредоточено на области фазового пространства, допустимого интегралами движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
2. Ф. В. Должанский, В. И. Кляцкин, А. М. Обухов, М. А. Чусов, Нелинейные системы гидродинамического типа, изд. Наука, М., 1974.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
15 ноября 1976 г.