

СОДЕРЖАНИЕ

Духовнер А. Н. Сигналы о готовности планеты Земля к межзвездной радиосвязи	1469
Жаров А. А., Кондратьев И. Г. О линейной трансформации электромагнитных волн в неоднородных изотропных плазменных слоях	1474
Демченко В. В. Параметрическое возбуждение нелинейных продольных колебаний магнитоактивной плазмы	1479
Еремин Б. Г., Костров А. В., Лунин Н. В., Степанушкин А. Д. Обнаружение плазменных волн в турбулентной плазме по сателлитам запрещенных переходов гелия	1489
Бабин А. А., Петряков В. Н., Фрейдман Г. И., Щелоков А. Н. Энергетические характеристики однорезонаторных параметрических генераторов света при сильном поглощении нерезонансной волны	1493
Бердников А. А., Пойзнер Б. Н., Портнова Т. С. Факторы, влияющие на устойчивость трехчастотного режима резонансного автогенератора с кубичной нелинейностью	1499
Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н. Операторные методы анализа стохастических негауссовых процессов и систем	1505
Калинин М. И. Кинетическое уравнение для линейной динамической системы с параметром, флуктуирующими по закону Пуассона	1516
Волков И. И., Семенычев В. К., Мотов В. В. Способ уменьшения смещения оценки дисперсии одного класса нецентрированных и нестационарных случайных процессов	1524
Миронов В. Л., Носов В. В. Случайные смещения изображения в фокусе телескопа при локации в турбулентной атмосфере	1530
Бетин А. А., Пасманик Г. А. Самовоздействие пучков некогерентного света в случайно-неоднородной среде. Влияние критической опалесценции	1534
Гончаренко А. М., Карпенко В. А., Столяров Ю. Д., Холомеев В. Ф. Приближение большого формата в задаче о распространении электромагнитных волн вдоль прямоугольного диэлектрического волновода	1546
Цимлинг Ш. Е. Синтез систем формирования винтовых электронных пучков	1550
Заиончковский В. В., Кондратенко А. Н. Об электродном методе диагностики радиационной плазмы	1561
Кац Л. И., Сафонов А. А., Сомов А. Ю. К расчету эффекта магнитосопротивления n-InSb в сильных электрических полях	1565
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Мальцев А. А. Оптимальная самосинхронизация в автоколебательной системе с эквидистантным спектром	1570
Лебедко Е. Г., Покровский Ю. П., Симовский Р. А., Иванов В. И. Экспериментальное определение вероятностных характеристик отражения оптических импульсов от водной поверхности	1573
Степанов А. В., Шелагин А. В. «Полное внутреннее отражение» от среды с мелкомасштабными неоднородностями	1574
Манева Г. М. О модели сверхсветового осциллятора	1577
Еремка В. Д., Кириченко А. Я., Солодовник В. А. О возбуждении косой гребенки электронным потоком	1580
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XVII, № 2, 3, 4, 1977 г.	1583

УДК 621.396.946

СИГНАЛЫ О ГОТОВНОСТИ ПЛАНЕТЫ ЗЕМЛЯ К МЕЖЗВЕЗДНОЙ РАДИОСВЯЗИ

A. H. Духовнер

Отмечено, что наиболее целесообразным признаком, характеризующим такие сигналы, являются различные интервалы между импульсами равных длительностей. Этот признак (интервалы времени) является объективным для Вселенной, и сигналы будут поняты цивилизациями более высокого и более низкого уровня развития, чем на Земле. Показаны параметры таких сигналов, позволяющие достигнуть наибольшую вероятность их приема внеземными цивилизациями и значительно большую пиковую мощность, чем достигнуто на Земле.

16 ноября 1974 года в США был послан мощный радиосигнал продолжительностью 3 минуты в сторону сферического скопления звезд, находящихся на краю Млечного пути. Вероятность приема этих сигналов небольшая, так как увеличение амплитуды было достигнуто концентрацией излученной энергии по направлению, а использованный код будет непонятен цивилизациям более низкого уровня развития, чем на Земле.

Увеличение направленности излучения является целесообразным, когда ориентировочно известно местоположение цели поиска или когда отраженный сигнал возвращается после относительно небольшого промежутка времени. Если же направление расположения абонента неизвестно, то количество информации при изотропной передаче I_1 больше, чем при переходе к направленному излучению, I_2 [1, 2]:

$$I_1 = \Delta f \Delta t \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right) \geq I_2 = \Delta f \frac{\Delta t}{g} \left(1 + \frac{g P_c}{P_{\text{ш}}} \right), \quad (1)$$

где Δt — продолжительность сеанса связи, P_c — мощность сигнала в точке приема при заданном расстоянии в случае изотропной передачи, g — численный коэффициент, характеризующий увеличение мощности и уменьшение времени облучения каждого абонента при направленном излучении.

На рис. 1 изображена одна из картин, составленная из дискретных сигналов черно-белого изображения, переданных 16 ноября 1974 года. Такая передача не позволяет увеличить пиковую мощность выбором наиболее целесообразного кода, при котором можно осуществить накопление и суммирование импульсов при передаче каждого сигнала. Вероятность приема таких сигналов незначительная также потому, что они могут быть расшифрованы только при зрительном восприятии. Сигналы о готовности планеты Земля к межзвездной радиосвязи (позвынья Земли) должны быть такими, которые могут быть расшифрованы различными органами

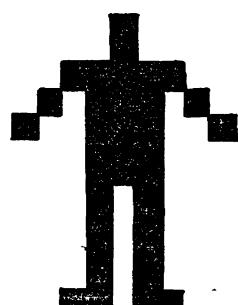


Рис. 1.

чувств, воспринимающими световые, звуковые, температурные, болевые и другие раздражения.

Сложные импульсы линейно-частотной модуляции (ЛЧМ), распространяющиеся в диспергирующей среде, приводят к образованию пиков мощности в отдельных точках пространства [3]. При некоторых условиях излучение импульсов ЛЧМ может быть использовано для расширения полосы частот и изменения дальностей образования пиков мощностей изменением параметров внутриимпульсной модуляции [3]. Но использование таких импульсов для передачи информации, даже в качестве сигналов о готовности планеты Земля к межзвездной радиосвязи, не увеличивает вероятность приема, так как изменения импульсов ЛЧМ после прохождения диспергирующей среды можно обнаружить только при наблюдении на экране осциллографа, а передача каждого элемента алфавита набором импульсов приводит к большому расходу мощности.

Признак, характеризующий информацию, должен быть основан на временных измерениях, так как они являются объективными для Вселенной. При этом дискретные изменения временных величин должны быть относительно большими, позволяющими регистрировать сигналы с выхода радиоприемного устройства, кроме как при помощи приборов и индикаторных устройств (инструментально), органами чувств.

Код Морзе и код двоичного основания ($M = 2^m$) являются субъективными для планеты Земля. Сигналы этих кодов будут непонятны внеземным цивилизациям. Сигналы кода Морзе могут быть приняты на слух и зрительно только после длительной тренировки, а сигналы двоичного кода только инструментально. Кроме этого, передача сигналов кодом Морзе и кодом двоичного основания связана с большим расходом мощности.

Временные изменения соответствуют передаче кодом модуляции импульсов по длительности (ДИМ) и передаче кодом временной импульсной модуляции (ВИМ). Минимальный расход мощности происходит при передаче кодом ВИМ. Каждый элемент алфавита в системах кода ВИМ, кроме циклического (тактового) импульса, при любой величине M передается только одним импульсом, а при двоичном кодировании в $m/2$ раз большим количеством импульсов. Поэтому в системах двоичного кода вероятность ошибки приема при заданной величине t_k и увеличении m стремится к единице [4]:

$$p_d = \Phi \left(\sqrt{\frac{2P_s t_k}{mN_0}} \right), \quad (2)$$

где P_s — средняя мощность передатчика, R — скорость передачи, $N_0/2$ — спектральная плотность мощности белого шума, $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}[1 - \text{erf}(\alpha/2)]$,

$$\text{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\gamma^2} d\gamma \text{ — функция ошибок.}$$

Вероятность ошибки приема совокупности ортогональных сигналов ВИМ при определенных условиях экспоненциально стремится к нулю и определяется неравенством

$$p_b \leq M \Phi \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right) < M \exp(-E_s/2N_0), \quad (3)$$

или

$$p_b < 2^{-Rt_k} \exp(-t_k P_s / N_0), \quad (4)$$

где E_s — общая энергия, расходуемая на передачу комбинации. Вероятность ошибки приема стремится к нулю экспоненциально с ростом t_k , пока R удовлетворяет неравенству

$$R < \frac{P_s}{2N_0} \frac{1}{\ln 2} \approx 0,72 \frac{P_s}{N_0}. \quad (5)$$

Для получения больших по абсолютной величине отрицательных значений показателя экспоненты при R , близких к 0,72, требуется очень большие значения длительностей комбинаций. Например, при передаче со скоростью 100 бит/с и $t_k = 1$ с номинальная полоса частот определяется неравенством

$$F_n \geq \frac{2^{Rt_k}}{2,4 t_k}. \quad (6)$$

Поэтому в [4] сделан вывод, что это «естественно нереально». Передача сигналов о готовности планеты Земля к межзвездной радиосвязи может быть осуществлена с малой скоростью, при которой достоверность приема будет высокой.

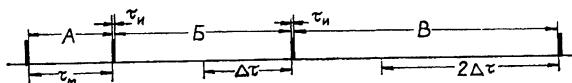


Рис. 2.

Наиболее широкое применение имеют системы циклической (тактовой) временной импульсной модуляции (ТВИМ). Для передачи сигналов внеземным цивилизациям целесообразно использовать код нециклической временной импульсной модуляции (НВИМ), рис. 2 [5, 6]. При передаче этим кодом расход мощности уменьшается [7] по сравнению с системами ТВИМ за счет исключения тактового импульса, а время передачи — за счет исключения второго интервала.

Увеличение пиковой мощности выше предела, достигнутого на Земле, может быть получено суммированием импульсов в антенном устройстве, рис. 3. Каждый импульс (рис. 3 а) генерируется одним из передатчиков $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N$ (рис. 3 б), включаемых поочередно коммутатором K . Мощность каждого из передатчиков $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N$ — максимально возможная на Земле. Линия задержки LZ_1 со временем задержки $(N-1)\tau_i$, линия LZ_2 со временем задержки $(N-2)\tau_i$, LZ_3, \dots, LZ_{N-1} и фазовращатели $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{N-1}$ обеспечивают суммирование импульсов по амплитуде в антенном устройстве.

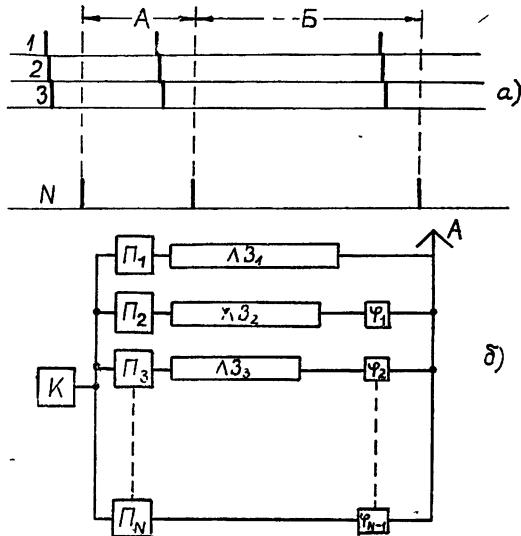


Рис. 3.

Длительность каждого импульса при фиксации сигналов на слух или зрительно должна быть не меньше 10 м/с. Эффективная полоса частот таких простых импульсов небольшая. Для перекрытия всего диапазона радиоволн, пригодного для связи с внеземными цивилизациями, необходимо будет осуществить поочередные передачи на большое коли-

чество несущих частот даже в том случае, если импульсы будут сложные, заполненные колебаниями ЛЧМ. Кроме этого, импульсы таких больших длительностей будут значительно затухать в линиях задержки. Затухание может быть уменьшено, если линии задержки (рис. 3 б) будут изготовлены из сверхпроводящих материалов [8]. Простые импульсы длительности в 1—10 мкс широко используются в диапазонах, пригодных для передачи сигналов внеземным цивилизациям в системах радиолокации, телевидения и телеметрии. Эффективная полоса таких импульсов $\Delta f_1 = \frac{2}{\tau_n}$ может быть выделена колебательными контурами средней добротности

$$Q = f_0/\Delta f_1,$$

где f_0 — резонансная (несущая) частота. Но такие относительно короткие импульсы могут быть приняты органами чувств только при использовании специальных устройств, наиболее простым из которых является реле. В момент прихода относительно короткого импульса реле включает источник света или источник звука на время, достаточное для их восприятия соответствующими органами чувств.

Минимальная величина интервалов τ_m (рис. 2) и дискретное приращение интервалов $\Delta\tau$ для определения информации (величин интервалов между импульсами) непосредственно органами чувств должны быть не меньше, чем несколько секунд. Интервалы с точностью в две секунды человек определяет без секундомера с достаточно высокой достоверностью без тренировки.

1) Для увеличения вероятности приема внеземными цивилизациями сигналов о готовности планеты Земля к межзвездной радиосвязи информация должна характеризоваться единым для Вселенной признаком. Наиболее целесообразным признаком являются интервалы времени в виде кода нециклической временной импульсной модуляции (НВИМ).

2) Минимальная величина интервала кода НВИМ и дискретные приращения интервала должны быть не меньше, чем несколько секунд, при которых сигналы, наряду с инструментальным приемом, могут быть зафиксированы непосредственно органами чувств.

3) Пиковая мощность может быть увеличена выше предела, достигнутого на Земле при использовании кода НВИМ больших интервалов и суммирования рядом расположенных импульсов, генерируемых N наиболее мощными передатчиками. После соответствующей задержки линиями из сверхпроводящих материалов импульсы должны суммироваться в антenne синфазно.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Гиддис, С. А. Каплан, Н. С. Кардашев и др., Внеземные цивилизации (Проблемы межзвездной связи), изд. Наука, М., 1969.
- В. И. Сифоров, Некоторые вопросы поиска и анализа радиоизлучений от других цивилизаций, Внеземные цивилизации, Труды Всесоюзного совещания в г. Бюрокане, изд. АН Армянской ССР, 1965.
- Л. М. Гиддис, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 9, 1448 (1973).
- Д. Ж. Возенкрафт, И. Джекобс, Теоретические основы техники связи, Перевод с английского, изд. Мир, М., 1969.
- А. Н. Духовнер, Сигналы и их преобразования в линейных радиотехнических цепях, изд. СЗПИ, 1970.
- А. Н. Духовнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 16, № 8, 92 (1973).

7. А. Н. Духовнер, Передача позывных радиосигналов внеземным цивилизациям, РЖК ОВ «Исследование космического пространства», 7, реф, 7, 62.364 (1974).
8. Г. В. Глебович, И. П. Ковалев, Широкополосные линии передачи импульсных сигналов, изд. Сов. радио, М., 1973

Северо-западный заочный политехнический институт

Поступила в редакцию
4 февраля 1976 г.

READINESS SIGNALS OF THE EARTH PLANET FOR INTERSTELLAR RADIO COMMUNICATION

A. N. Dukhovner

It is noted that the most advisable feature characterizing such signals is various intervals between pulses of equal durations. This feature (time intervals) is objective for the Universe and the signals will be understood by the intelligence of the higher and lower level development than on the Earth. The parameters of such signals are shown which permit to achieve the greatest probability of their reception by the extra-terrestrial intelligence and the more higher peak power than it has been achieved on the Earth:

УДК 538.576.2

О ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СЛОЯХ

A. A. Жаров, И. Г. Кондратьев

Обсуждается влияние пространственной дисперсии в плазме на отражательные характеристики неоднородных резонансных плазменных слоев, отличающихся характером перехода диэлектрической проницаемости ϵ через нулевое значение. Показано, что при наличии пространственной дисперсии полного экранирования не происходит, часть энергии просачивается через слой. На примере квадратичного слоя выяснено, что при наличии нуля ϵ выше первого порядка трансформация энергии падающего поля в продольные (плазменные) волны носит нерезонансный характер (резонансное поглощение отсутствует).

Как показано в [1], неоднородные изотропные плазменные слои $-x_0 \leq x \leq x_0$ с распределением диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(x) = (-1)^m x^m / x_0^m \quad (m > 1) \quad (1)$$

(потерями пренебрегается) являются идеальными экранами для волн поперечно-магнитного типа (TM по отношению к x-направлению) — имеет место так называемое резонансное экранирование. При этом экранируется вся область, лежащая за плоскостью, в которой ϵ проходит через нуль:

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad (x > 0). \quad (2)$$

При наличии потерь в плазме полного экранирования нет и часть энергии проходит сквозь слой. Представляет интерес проследить за характером изменения поля при условии (1) с учетом пространственной дисперсии, обусловленной тепловым движением частиц, чему и посвящена данная заметка. При этом удается разрешить открытый к настоящему времени вопрос о трансформирующих свойствах резонансных областей неоднородной плазмы с нулем ϵ выше первого порядка (см. обзоры [2–4]).

1. Пусть на плазменный слой (1) падает из вакуума плоская электромагнитная волна типа TM*:

$$\begin{aligned} H_y &= 1 \exp(-i\alpha_0 k_0 x - i\gamma k_0 z), \\ E_z &= -Z_0 \alpha_0 \exp(-i\alpha_0 k_0 x - i\gamma k_0 z), \\ E_x &= Z_0 \gamma \exp(-i\alpha_0 k_0 x - i\gamma k_0 z), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha_0 = \sqrt{1 - \gamma^2}$, $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$. Учитывая, что зависимость поля внутри слоя от координаты z описывается множителем $\exp(-i\gamma k_0 z)$,

* Используется практическая рационализированная система единиц; ϵ_0 , μ_0 — проницаемости вакуума, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость плазмы. Зависимость от времени принимается в виде $e^{i\omega t}$.

и опуская далее этот множитель, для компонент поля в слое в квазигидродинамическом приближении будем иметь (см., например, [5])

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \frac{\frac{d}{dx} \epsilon}{\epsilon - \gamma^2 \beta_T^2} \frac{dH_y}{dx} + k_0^2 (\epsilon - \gamma^2) H_y = \\ = - \gamma \beta_T^2 \frac{1}{Z_0} \frac{\frac{d}{dx} \epsilon}{\epsilon - \gamma^2 \beta_T^2} \frac{dE_x}{dx}; \quad (4)$$

$$\beta_T^2 \frac{d^2 E_x}{dx^2} + k_0^2 (\epsilon - \gamma^2 \beta_T^2) E_x = \gamma k_0^2 Z_0 (1 - \beta_T^2) H_y; \quad (4')$$

$$E_z = \frac{Z_0}{ik_0 (\epsilon - \gamma^2 \beta_T^2)} \frac{dH_y}{dx} - \frac{\gamma \beta_T^2}{ik_0 (\epsilon - \gamma^2 \beta_T^2)} \frac{dE_x}{dx}, \quad (4'')$$

где $\beta_T^2 = v_T^2/c^2 = \kappa T_0/m_0 c^2$ (κ — постоянная Больцмана, T_0 — температура плазмы, m_0 — масса электрона).

Решение даже однородного уравнения (4) с зависимостью $\epsilon(x)$ в виде (1) встречается, как отмечалось в [1], с определенными трудностями, которые к настоящему времени по существу не удалось преодолеть. Поэтому мы будем рассматривать далее слои с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_n(x)$, несколько отличающейся от (1) ($\epsilon_{ct}(x)$):

$$\epsilon_n(x) = \epsilon_{ct}(x) + \gamma^2 \beta_T^2 \quad (5)$$

(значок «н» в дальнейшем опускаем)*. Для «новых» слоев однородное уравнение (4) совпадает ($\gamma^2(1 - \beta_T^2) \rightarrow \gamma^2$) с соответствующим уравнением в отсутствие пространственной дисперсии. Это обстоятельство позволяет утверждать, что для отыскания корректного решения поставленной задачи можно воспользоваться тем же искусственным приемом, что и в случае «холодной» плазмы (подробности см. в [1, 6]), а именно: заменить реальное распределение проницаемости $\epsilon(x)$ следующим вспомогательным распределением:

$$\epsilon(x) = \gamma^2 \beta_T^2 + (-1)^m x^m / x_0^m \quad \begin{cases} -x_0 \leq x \leq -x_1 \\ x_1 \leq x \leq x_0 \end{cases}, \\ \epsilon(x) = \gamma^2 \beta_T^2 + (-1)^m x_1^m / x_0^m \quad (-x_1 < x < x_1), \quad (6)$$

найти решение задачи для выбранного вспомогательного распределения, в найденном решении сделать предельный переход к реальному распределению при $x_1 \rightarrow 0$. Указанная процедура и будет реализована ниже.

2. Поле на однородном участке вспомогательного слоя $-x_1 \leq x \leq x_1$ может быть представлено в виде суперпозиции обычных электромагнитных волн ($H \neq 0$) и безмагнитных плазменных волн ($H = 0$), существующих независимо. На неоднородных участках слоя $x_1 \leq |x| \leq x_0$ такая независимость нарушается и получить строгое выражение для полного поля представляется затруднительным. Мы ограничимся теми же при-

* Такие «подправленные» слои, с одной стороны, представляют самостоятельный интерес, а с другой — позволяют ответить на некоторые важные вопросы, относящиеся к исходным слоям, и, в частности, на основной интересующий нас здесь вопрос о наличии (или отсутствии) резонансного поглощения в областях с нулем ϵ выше первого порядка.

ближениями, что и в хорошо известном случае квазилинейного перехода диэлектрической проницаемости через нуль (см. [7, 8]), поскольку изменение характера перехода не приводит в этом плане к каким-либо специфическим особенностям. Не вдаваясь в подробности, запишем результирующее общее выражение для поля:

$$H_y(x) = C_1 H_y^{(1)}(x) + C_2 H_y^{(2)}(x), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_x(x) = & C_3 E_x^{(1)}(x) + C_4 E_x^{(2)}(x) - \\ & - Z_0 \frac{\gamma k_0^2 (1 - \beta_T^2)}{\beta_T^2} E_x^{(1)}(x) \int_{\Delta}^x \frac{H_y(x)}{\Delta} E_x^{(2)}(x) dx + \\ & + Z_0 \frac{\gamma k_0^2 (1 - \beta_T^2)}{\beta_T^2} E_x^{(2)}(x) \int_{\Delta}^x \frac{H_y(x)}{\Delta} E_x^{(1)}(x) dx \end{aligned} \quad (7')$$

(E_z -компоненты поля находятся с помощью (4''), где $H_y^{(1)}(x)$, $H_y^{(2)}(x)$ — два линейно-независимых решения однородного уравнения (4); $E_x^{(1)}(x)$, $E_x^{(2)}(x)$ — два линейно-независимых решения однородного уравнения (4'); $\Delta = E_x^{(1)}(x) \frac{d}{dx} E_x^{(2)}(x) - E_x^{(2)}(x) \frac{d}{dx} E_x^{(1)}(x)$. При достаточном удалении от резонансной области, $x \gg \left(\frac{m \beta_T x_0^{m/2}}{k_0}\right)^{2/(m+2)*}$, общее решение однородного уравнения (4') будет, очевидно, представлять собой суперпозицию двух плазменных волн, бегущих навстречу друг другу, а частное решение неоднородного уравнения — давать обычную связь $E_x(x)$ с $H_y(x)$: $E_x = Z_0 (\gamma/\epsilon) H_y(x)$.

Благодаря сильному затуханию Ландау на периферии слоя, возбуждаемое собственно плазменное поле (первые два члена в (7')) должно удовлетворять своего рода условию излучения (см. [8], а также [9]) — иметь вид (разумеется, при $x \gg \left(\frac{m \beta_T x_0^{m/2}}{k_0}\right)^{2/(m+2)}$) расходящихся от резонансной области продольных волн. В силу этого из двух линейно-независимых решений $E_x^{(1,2)}(x)$ в указанной части поля мы должны сохранить только то, которое не противоречит сформулированному условию излучения.

Соответствующие поля на различных участках слоя, а также поля падающей, отраженной и прошедшей волн должны удовлетворять следующим граничным условиям — условиям непрерывности H_y , E_z при $x = \pm x_0$ и H_y , E_z , E_x , $\frac{d}{dx} E_x$ при $x = \pm x_1$. Два последних условия являются

следствием условий непрерывности скоростей частиц плазмы и ее парциальных давлений на указанных границах.

Дальнейшее решение задачи и получение конкретных результатов требует конкретизации вида линейно-независимых решений однородных уравнений (4) и (4'). Мы будем рассматривать, так же как в [1], достаточно тонкие по сравнению с длиной падающей волны слои. Тогда решения однородного уравнения (4) $H_y^{(1,2)}(x)$ для слоев с целыми m ($m = 2, 3, 4, \dots$) могут быть представлены в виде рядов по степеням x ; соответствующие ряды приведены в [1]. Гораздо сложнее обстоит дело с уравнением (4') — решения этого уравнения, $E_x^{(1,2)}(x)$, записываются

* Предполагается, что толщина слоя значительно превышает дебаевский радиус.

через известные специальные функции (с учетом, что слои являются толстыми в масштабе длины плазменной волны) только для простейшего квадратичного слоя $m=2$, которым мы и вынуждены ограничиться.

3. В качестве двух линейно-независимых решений однородного уравнения (4') в случае квадратичного слоя выберем две следую-

щие функции Вебера [10]: $E_x^{(1)}(x) = D_{-1/2} \left(\sqrt{-2i \frac{k_0}{\beta_T x_0}} x \right)$, $E_x^{(2)} = D_{-1/2} \left(\sqrt{2i \frac{k_0}{\beta_T x_0}} x \right)$. При значениях $x \gg x_0 \sqrt{\beta_T/2k_0 x_0}$ справедливы

асимптотические представления этих функций: $D_{-1/2} \left(\sqrt{\mp 2i \frac{k_0}{\beta_T x_0}} x \right) \approx \left(\sqrt{\mp 2i \frac{k_0}{\beta_T x_0}} x \right)^{-1/2} \exp \left(\pm i \frac{k_0 x^2}{2 x_0 \beta_T} \right)$, согласно которым необхо-

димо (в силу условия излучения для плазменных волн) на участке $-x_0 < x < -x_1$ положить $C_4 = 0$, а на участке $x_1 < x < x_0$ $C_3 = 0$. Используя далее асимптотические представления функций Вебера и выполненная в формуле (7') $H_y(x)$ (как плавную функцию) из-под знака интеграла со значением на верхнем пределе (погрешность такой процедуры выходит за рамки принятых в работе приближений), убеждаемся, что при тех же значениях x неоднородное решение уравнения (4') (третий член в (7')) действительно переходит в $Z_0 \frac{1}{\epsilon} H_y(x)$, т. е. дает «холодную» связь между $E_x(x)$ и $H_y(x)$.

Удовлетворяя указанным выше граничным условиям, разрешая полученную систему двенадцати уравнений относительно коэффициента прохождения волны T , а также амплитуд плазменных волн C_3 , C_4 и делая, наконец, в соответствующих выражениях предельный переход $x_1 \rightarrow 0$ к рассматриваемому квадратичному слою, после весьма громоздких и трудоемких вычислений приходим к следующим окончательным результатам:

$$T \approx \beta_T^{7/4} 8 \gamma^3 (k_0 x_0)^{1/4} D_{-1/2}(0) \exp(i \alpha_0 k_0 x_0) i \alpha_0 k_0 H_y^{(1)}(-x_0) \times \quad (8)$$

$$\times \frac{2 i \alpha_0 k_0 H_y^{(1)}(x_0) H_y^{(2)}(x_0) + [H_y^{(1)}(x_0) H_y^{(2)}(x_0)]'}{[-i \alpha_0 k_0 H_y^{(1)}(-x_0) + H_y^{(1)'}(-x_0)][i k_0 \alpha_0 H_y^{(1)}(x_0) + H_y^{(1)'}(x_0)]};$$

$$K \approx \beta_T 2 \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \alpha_0^{-1} \gamma^3 \frac{\alpha_0^2 k_0^2 H_y^{(1)2}(-x_0)}{\alpha_0^2 k_0^2 [H_y^{(1)}(-x_0)]^2 + [H_y^{(1)'}(-x_0)]^2}, \quad (9)$$

где K — коэффициент трансформации падающей электромагнитной волны в плазменную, определяемый как отношение потока энергии, уносимой плазменными волнами, к потоку энергии в падающей волне; штрих означает дифференцирование по аргументу.

Таким образом, пространственная дисперсия в резонансном квадратичном слое, так же как и соударения внутри слоя, «снимает» полное экранирование и энергия просачивается через слой*. Трансфор-

* Следует только обратить внимание на то обстоятельство, что, хотя сам по себе факт просачивания энергии через резонансный квадратичный слой при наличии пространственной дисперсии не вызывает сомнения, коэффициент прохождения волны T через исходный слой (в частности, его зависимость от параметра β_T) может отличаться от приведенного выше выражения, относящегося к «подправленному» слою.

мирующие свойства квадратичного перехода диэлектрической проницаемости через нулевое значение принципиально отличаются от аналогичных свойств линейного перехода: коэффициент трансформации зависит от температуры, как $T_0^{1/2}$, что свидетельствует об отсутствии резонансного поглощения (поскольку при $T_0 \rightarrow 0$ рассматриваемый «подправленный» слой переходит, очевидно, в резонансный квадратичный плазменный слой).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 885 (1968).
2. В. Е. Голант, А. Д. Пилия, УФН, 104, № 3, 413 (1971).
3. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, УФН, 109, № 2, 225 (1973).
4. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, Вопросы теории плазмы, вып. 7, Госатомиздат, М., 1973.
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. А. А. Жаров, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 19, № 8, 1130 (1976).
7. Н. Г. Денисов, Диссертация, Горький, 1954.
8. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 45, вып. 6, 1978 (1963).
9. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1358 (1967).
10. Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. II, ИЛ, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
8 апреля 1976 г.,
после переработки
26 апреля 1977 г.

ON LINEAR TRANSFORMATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN INHOMOGENEOUS ISOTROPIC PLASMA LAYERS

A. A. Zharov, I. G. Kondrat'ev

The influence is discussed of spatial dispersion in plasma on reflective characteristics of inhomogeneous resonant plasma layers which differ in transition of the dielectric permittivity ϵ through the zero. The allowance for the spatial dispersion leads to removing the full shielding and leakage of a part of energy through the layer. It is shown by the example of the square layer that in the presence of zero ϵ being the first order higher the energy transformation of an incident field into longitudinal (plasma) waves is of nonresonant character (the resonant absorption is absent).

УДК 533.951

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

B. V. Демченко

Исследовано параметрическое возбуждение ВЧ-полем нелинейных продольных колебаний электронов в области гибридных резонансов холодной нерелятивистской плазмы. Показано, что неоднородность поля накачки и неоднородность равновесной плотности плазмы приводят к параметрической неустойчивости. Получены выражения для инкрементов неустойчивых колебаний и определена ширина зон неустойчивости. По порядку величины инкременты неустойчивых колебаний, обусловленные неоднородностями поля накачки (γ_E) или плотности плазмы (γ_N), равны

$$\gamma_E \sim k |\zeta_0| \omega_{pe}, \quad \gamma_N \sim \frac{|\zeta_0|}{L} \omega_{pe},$$

где $|\zeta_0| = |e| E_0/m_e \omega_0^2$ — амплитуда смещения электрона от положения равновесия, k , ω_0 — волновое число, частота и амплитуда поля накачки, L — характерный размер неоднородности плотности плазмы, ω_{pe} — плазменная частота электронов.

Исследование взаимодействия электромагнитного излучения большой мощности с магнитоактивной плазмой представляет интерес в связи с опытами по ВЧ-нагреву плазмы, в которых используется эффективное поглощение энергии высокочастотного поля в области гибридного резонанса [1].

Как известно (см., например, [2, 3]), при распространении электромагнитной волны в неоднородной плазме составляющая напряженности электрического поля, направленная вдоль градиента плотности плазмы, имеет особенность в области, где частота волны близка к одной из собственных частот колебаний плазмы. Вследствие резонансного возрастания амплитуды электрического поля в области плазменного (гибридного) резонанса, нелинейные слагаемые в уравнениях движения и непрерывности становятся по порядку величины равными линейным слагаемым. Поэтому в резонансной области линейная теория взаимодействия электромагнитных волн с плазмой теряет применимость.

В работе [4] исследовалось параметрическое возбуждение нелинейных продольных колебаний неоднородной плазмы в области верхнего гибридного резонанса однородным монохроматическим полем накачки. Нелинейность колебаний в упомянутой работе обусловлена, во-первых, строгим учетом нелинейных слагаемых в уравнениях движения и непрерывности, во-вторых, учетом нелинейных слагаемых, появляющихся из-за неоднородности равновесной плотности плазмы. Основной результат работы [4] заключается в выводе о возможности параметрической раскачки электронных колебаний на субгармонике частоты поля накачки. Зависимость амплитуды колебаний электронов от частоты носит присущий нелинейным колебательным системам гистерезисный характер.

Приведенный в работе [4] анализ параметрического воздействия ВЧ- поля на колебания частиц магнитоактивной плазмы ограничен част-

ным случаем «поперечных» колебаний, когда угол θ между направлением колебаний и статическим магнитным полем равен $\pi/2$. В настоящей работе, являющейся продолжением [4], исследовано параметрическое возбуждение нелинейных продольных колебаний электронов при значениях $\theta \neq (0, \pi/2)$. Показано, что нелинейные слагаемые в уравнениях движения, обусловленные неоднородностью поля накачки и неоднородностью равновесной плотности плазмы, приводят к параметрической неустойчивости. Получены выражения для инкрементов неустойчивых колебаний, определена ширина зон параметрической неустойчивости.

1. Параметрическое возбуждение нелинейных ВЧ-колебаний однородной плазмы неоднородным полем накачки. Рассмотрим воздействие неоднородного поля накачки $E_e = E_0 \sin(kr - \omega_0 t)$ на колебания электронов однородной плазмы в области верхнего гибридного резонанса. Как известно, в области гибридного резонанса колебания плазмы являются почти продольными, так что можно положить $E = -\text{grad } \phi$. Будем рассматривать одномерные колебания, когда все переменные величины зависят от пространственной переменной ξ (ось ξ лежит в плоскости xOz и составляет угол θ с осью z , вдоль которой направлено статическое магнитное поле B_0). Исходная система уравнений имеет вид

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m_e} \sin \theta (E + E_e) + \omega_{ce} v_y; \quad (1.1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_{ce} v_x; \quad (1.2)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m_e} \cos \theta (E + E_e), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n v_\xi) = 0; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = 4\pi e (n - n_0), \quad (1.5)$$

где $e < 0$, n_0 — равновесная плотность ионов, которые в случае ВЧ-электронных колебаний можно рассматривать как неподвижный фон, необходимый для поддержания квазинейтральности плазмы,

$$\omega_{ce} = \frac{|e| B_0}{m_e c}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_\xi \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$v_\xi = v_x \sin \theta + v_z \cos \theta.$$

Для решения системы уравнений (1.1) — (1.5) удобно перейти от эйлеровых к лагранжевым переменным* и считать смещение элемента плазмы ξ функцией времени и начальных координат, так что координаты элемента плазмы в момент времени t определяются соотношениями $x = x_0 + \zeta_x(x_0, z_0, t)$, $z = z_0 + \zeta_z(x_0, z_0, t)$.

Используя связь между эйлеровыми и лагранжевыми переменными и предполагая, что длина волны поля накачки значительно больше амплитуды смещения электрона от положения равновесия ($\epsilon = k|\zeta_{(x,z)}| \ll \ll 1$), выражение для электрического поля волны накачки запишем следующим образом:

* Решение задачи о свободных нелинейных продольных колебаниях однородной магнитоактивной плазмы в лагранжевых переменных приведено в работе [5].

$$\mathbf{E}_e = E_0 [-\sin(\omega_0 t) + (\sin \theta (k \zeta_x) + \cos \theta (k \zeta_z)) \cos(\omega_0 t)] + O(\varepsilon^2), \quad (1.6)$$

где символом $O(\varepsilon^2)$ обозначены слагаемые более высокого порядка малости по параметру ε .

Используя выражение (1.6), систему уравнений (1.1)–(1.5), подобно [4, 5], представим в виде векторного уравнения

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + P_0 \zeta = f(t) + \varepsilon g(t, \zeta), \quad (1.7)$$

где

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_z \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad f(t) = - \begin{pmatrix} F_x \\ F_z \end{pmatrix} \sin(\omega_0 t),$$

$$g(t, \zeta) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_z \end{pmatrix} \cos(\omega_0 t) [\sin \theta (k \zeta_x) + \cos \theta (k \zeta_z)], \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{e E_0}{m_e} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{11} = \omega_{pe}^2 \sin^2 \theta + \omega_{ce}^2,$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \omega_{pe}^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\alpha_{22} = \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta,$$

ε — введенный для удобства вычислений малый параметр, характеризующий отношение амплитуды колебаний электронов к характерному масштабу пространственного изменения амплитуды волны накачки; в окончательных результатах необходимо положить $\varepsilon = 1$.

Согласно общей теории устойчивости периодических движений неавтономных систем (см., например, [6, 7]) будем искать T -периодические ($T = 2\pi/\omega_0$), аналитические по ε , решения уравнения (1.7) в виде

$$\zeta(t, \varepsilon) = \overset{(0)}{\zeta}(t) + \varepsilon \overset{(1)}{\zeta}(t) + \dots \quad (1.8)$$

Подставляя выражение (1.8) в уравнение (1.7), получим, что «порождающее» решение $\overset{(0)}{\zeta}(t)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \overset{(0)}{\zeta}}{dt^2} + P_0 \overset{(0)}{\zeta} = f(t). \quad (1.9)$$

Так как в дальнейшем исследуется устойчивость решений уравнения (1.7) в первом — по параметру ε — приближении, выражения для поправок $\overset{(1)}{\zeta}(t), \overset{(2)}{\zeta}(t), \dots$ приводить не будем.

Решение уравнения (1.9) запишем следующим образом:

$$\overset{(0)}{\zeta}(t) = \mathbf{A} \sin(\omega_0 t), \quad (1.10)$$

$$A_x = \frac{\omega_0^2}{\Delta} F_x, \quad A_z = \frac{1}{\Delta} (\omega_0^2 - \omega_{ce}^2), \quad \Delta \equiv (\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2),$$

где $\omega_{1,2}$ — собственные частоты нелинейных продольных колебаний магнитоактивной плазмы, определяемые соотношениями [5]

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 \mp ((\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)^2 - 4 \omega_{pe}^2 \omega_{ce}^2 \cos^2 \theta)^{1/2}]. \quad (1.11)$$

Предположим, что невозмущенные колебания плазмы описываются выражениями (1.8). Для исследования устойчивости невозмущенных движений вводим малые отклонения (вариации) $\tilde{y} = \zeta - \zeta(t, \varepsilon)$. Подставляя величину ζ в уравнение (1.7) и отбрасывая слагаемые второго порядка малости относительно y получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + [P_0 + \varepsilon P_1(\omega_0 t)] y = 0. \quad (1.12)$$

Здесь

$$y = \begin{pmatrix} y_x \\ y_z \end{pmatrix}, \quad P_1(\omega_0 t) = -(k \zeta_0) \cos(\omega_0 t) \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega_{ce}^2 & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$\zeta_0 = |e| E_0 / m_e \omega_{pe}^2$ — смещение электрона плазмы под воздействием электрического поля волны накачки.

Входящая в уравнение (1.12) матрица $P_0 = P_0^\tau$ — постоянная, вещественная, симметрическая (индекс τ над матрицей означает операцию транспонирования). Матрица-функция $P_1(\omega_0 t)$ является периодической, симметрической и t -инвариантной:

$$P_1^\tau(t) = P_1(t) = P_1 \left(t + \frac{2\pi}{\omega_0} \right), \quad P_1(-t) = P_1(t).$$

Таким образом, задача о параметрической раскачке нелинейных продольных колебаний магнитоактивной плазмы свелась к решению системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами канонического типа. Необходимо отметить, что нелинейность уравнений (1.12) существенна, поскольку при выводе этих уравнений предполагалось, что $\frac{d}{dt}$ — лагранжева производная (нелинейные слагаемые

в уравнениях движения типа $(v \Delta) v$ порядка линейных слагаемых $\frac{dv}{dt}$).

Для удобства вычислений введем «нормальные» координаты по формулам

$$y_x = \xi + \eta, \quad y_z = k_1 \xi + k_2 \eta, \quad (1.13)$$

где коэффициенты распределения колебаний определяются выражениями

$$k_j = -\frac{1}{\alpha_{12}} (\alpha_{11} - \omega_j^2) = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22} - \omega_j^2}, \quad j = 1, 2. \quad (1.14)$$

Коэффициент k_1 соответствует колебаниям с частотой ω_1 , k_2 — колебаниям с частотой ω_2 . Легко показать, что колебания электронов в нормальных координатах описываются векторным уравнением

$$M \frac{d^2 \omega}{dt^2} + [Q_0 + \varepsilon Q_1(\omega_0 t)] \omega = 0, \quad (1.15)$$

где

$$\omega = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix}, \quad Q_0 = \begin{vmatrix} \Omega_1^2 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{vmatrix},$$

$$Q_1(\omega_0 t) = -(k \zeta_0) \cos(\omega_0 t) \begin{vmatrix} \Omega_1^2 - \omega_{ce}^2 & \omega_{ce}^2 \\ \omega_{ce}^2 & \Omega_2^2 - \omega_{ce}^2 \end{vmatrix},$$

$$q_j = 1 + k_j^2, \quad \Omega_j^2 = \alpha_{11} + 2k_j \alpha_{12} + k_j^2 \alpha_{22}, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, в новом базисе систему уравнений для определения устойчивости колебаний (1.15) по-прежнему является канонической.

Как показано в [7] (гл. V), в областях параметрической неустойчивости уравнение (1.15) имеет решение, растущее как $\exp [\gamma(\varepsilon)t]$. Значение инкремента колебаний $\gamma(\varepsilon)$ определяется формулой

$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon [-\Delta(\mu)]^{1/2} + O(\varepsilon^2), \quad (1.16)$$

в которой

$$\Delta(\mu) = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi_{jj}^{(0)}}{2\omega_j q_j} + \frac{\pi_{hh}^{(0)}}{2\omega_h q_h} - m\mu \right]^2 - \frac{1}{4} \left| \frac{\pi_{jh}^{(m)}}{\sqrt{\omega_j \omega_h q_j q_h}} \right|^2, \quad (1.17)$$

$j, h = 1, 2$; $\pi_{\lambda\lambda}^{(m)}$ — коэффициенты разложения функции $P_1(\omega_0 t)$ в ряд Фурье.

$$P_1(\omega_0 t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\omega_0 t) \|\pi_{\lambda\lambda}^{(m)}\|_1^2, \quad (1.18)$$

$\omega_j^2 = \Omega_j^2/q_j$ — собственные частоты колебаний плазмы, определяемые соотношением (1.11). Входящая в выражение (1.17) величина μ определяет ширину резонансной зоны при фиксированном значении параметра ε (см. рис. 1).

Согласно [7] в рассматриваемом случае возможно параметрическое возбуждение колебаний при следующих значениях частоты поля накачки:

$$(1) \quad \omega_0 = 2\omega_1, \quad (2) \quad \omega_0 = 2\omega_2, \quad (3) \quad \omega_0 = \omega_2 + \omega_1.$$

Так как коэффициент $P_1^{(0)} = 0$, входящие в выражение (1.17) величины $\pi_{jj}^{(0)}, \pi_{hh}^{(0)}$ также равны нулю. Как следует из выражения (1.16), параметрическая неустойчивость возникает при $\Delta(\mu) < 0$, т. е. в интервале

$$-\left| \frac{\pi_{jh}^{(1)}}{\sqrt{\omega_j \omega_h q_j q_h}} \right| \leq \mu \leq \left| \frac{\pi_{jh}^{(1)}}{\sqrt{\omega_j \omega_h q_j q_h}} \right| \quad (j, h = 1, 2). \quad (1.19)$$

Значения инкрементов нарастания колебаний в резонансных зонах получим, исходя из выражения (1.16). В случае первого ($\omega_0 = 2\omega_1$) и второго ($\omega_0 = 2\omega_2$) основных резонансов

$$\gamma_E^{(2\omega_1)} = \frac{\varepsilon}{2} (\chi_j^2 - \mu^2)^{1/2}, \quad \chi_j^2 = \frac{(k\zeta_0)^2}{\omega_j q_j} (\omega_j^2 q_j - \omega_{ce}^2) \quad (j = 1, 2). \quad (1.20)$$

Инкремент колебаний при выполнении условия комбинационного резонанса ($\omega_0 = \omega_2 + \omega_1$) имеет вид

$$\gamma_E^{(\omega_2 + \omega_1)} = \frac{\varepsilon}{2} (\chi_{12}^2 - \mu^2)^{1/2}, \quad \chi_{12}^2 = (k\zeta_0)^2 \frac{\omega_{ce}^4}{4\omega_1 \omega_2 q_1 q_2}. \quad (1.21)$$

Для значений параметров $\sin \theta \sim \cos \theta, \omega_0 \sim \omega_{pe} \sim \omega_{ce}$ из (1.20), (1.21) имеем по порядку величины

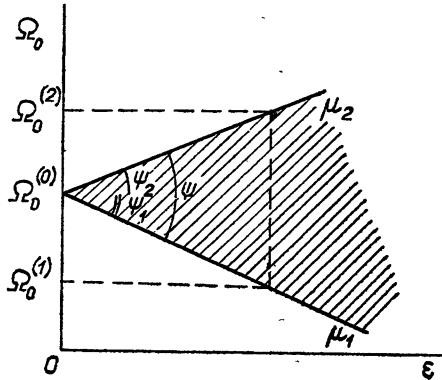


Рис. 1.

$$\gamma_E \sim (k\zeta_0) \omega_{pe}. \quad (1.22)$$

В частности, для значений $n_0 \sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $B_0 \sim 100 \text{ Гс}$, $k \sim 10 \text{ см}^{-1}$, $E_0 \sim 10 \text{ В/см}$ получим $\gamma_E \sim 10^9 \text{ с}^{-1} < \omega_{pe} \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$. В рассматриваемом случае инкремент неустойчивых колебаний γ_E меньше собственной частоты колебаний $\omega_j \sim \omega_{pe}$, поскольку при получении исходной системы уравнений предполагалось выполненным условие $\epsilon = k\zeta_0 \ll 1$.

Для определения ширины области параметрической неустойчивости воспользуемся рис. 1, из которого следует

$$\mu_2 = \operatorname{tg} \psi_2 = (\overset{(2)}{\omega_0} - \overset{(0)}{\omega_0})/\epsilon, \quad \mu_1 = \operatorname{tg} \psi_1 = -(\overset{(0)}{\omega_0} - \overset{(1)}{\omega_0})/\epsilon.$$

Следовательно, ширина области динамической неустойчивости определяется выражением

$$\Psi = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{1 + \mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}$$

и является, как легко убедиться, монотонной функцией параметров χ_j и χ_{12} .

2. Вынужденные нелинейные продольные колебания неоднородной плазмы. Геометрию задачи считаем совпадающей с использованной в п. 1 настоящей работы (градиент равновесной плотности плазмы направим вдоль оси ξ). Следуя работам [8], из системы уравнений (1.1) — (1.5) получим

$$\frac{d^3 \zeta_i}{dt^3} + \sum_{j=1}^2 a_{ij} \frac{d\zeta_j}{dt} = \frac{dE_i^{(e)}}{dt} \quad (i = 1, 2), \quad (2.1)$$

где $\zeta_1 \equiv \zeta_x$, $\zeta_2 \equiv \zeta_z$; коэффициенты a_{ij} определяются соотношениями (1.7). Входящая в коэффициенты a_{ij} плазменная частота $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 n_0 (\zeta_x, \zeta_z)/m_e$ в рассматриваемом случае неоднородной плазмы является функцией смещений электронов от положения равновесия. Функцию $E_i^{(e)}(t)$, играющую роль волны накачки, представим в виде

$$E_i^{(e)} = F_i \cos(\omega_0 t), \quad \left(\frac{F_x}{F_z} \right) = \frac{eE_0}{m_e} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

В сильнонеоднородной плазме, когда $|\zeta_{(x, z)}| \sim L$ (L — характерный размер неоднородности плотности), решение уравнений (2.1) можно найти только численным интегрированием. Аналитическое решение приведенной системы можно найти в практически интересном случае слабонеоднородной плазмы ($|\zeta_{(x, z)}|/L \ll 1$), когда плазменную частоту можно разложить в ряд по степеням смещения:

$$\omega_{pe}^2(\zeta_x, \zeta_z) = \omega_{p0}^2 + \sum_{n=1}^2 (\alpha_n \zeta_x^n + \beta_n \zeta_z^n) + \delta \zeta_x \zeta_z + O(\zeta^3), \quad (2.3)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\partial \omega_{pe}^2}{\partial x}, \quad 2\alpha_2 = \frac{\partial^2 \omega_{pe}^2}{\partial x^2}, \quad \beta_1 = \frac{\partial \omega_{pe}^2}{\partial z}, \quad 2\beta_2 = \frac{\partial^2 \omega_{pe}^2}{\partial z^2}, \quad 2\delta = \frac{\partial^2 \omega_{pe}^2}{\partial x \partial z},$$

а значения производных определены в точке гибридного резонанса.

В дальнейшем рассмотрим случай колебаний, близких к поперечным ($k_\perp \sim L_\perp^{-1} \gg k_\parallel \sim L_\parallel^{-1}$, где L_\perp, L_\parallel — характерные размеры неоднородности плотности плазмы в поперечном и продольном, по отношению к B_0 , направлениях), когда уравнения (2.1) преобразуются к виду

$$\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \zeta_j = F_i \cos(\omega_0 t) + Q_i(\zeta_x^2) + O(\zeta^3), \quad (2.4)$$

где

$$Q_x = -\alpha_H \zeta_x^2 \sin^2 \theta, \quad Q_z = -\alpha_H \zeta_x^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \alpha_H \equiv \alpha_1.$$

Решения уравнений (2.4) при $\alpha_H = 0$ («порождающие» решения) запишем следующим образом:

$$\overset{(0)}{\zeta_i} = -A_i \cos(\omega_0 t). \quad (2.5)$$

Величины A_x , A_z и Δ определены соотношениями (1.10).

Для исследования устойчивости «порождающих» решений (2.5) вводим малое отклонение $y = \zeta - \overset{(0)}{\zeta}(t)$. Как следует из уравнений (2.4), величина y в нормальных координатах (1.13) удовлетворяет векторному уравнению (1.14), где матрицы M и Q_0 определяются выражениями (1.15), а матрица $Q_1(\omega_0 t)$ имеет вид

$$Q_1(\omega_0 t) = \alpha_H \cos(\omega_0 t) \begin{vmatrix} \lambda_1 + k_1 \lambda_2, & \lambda_1 + k_1 \lambda_2 \\ \lambda_1 + k_2 \lambda_2, & \lambda_1 + k_2 \lambda_2 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1 = 2A_x \sin^2 \theta, \quad \lambda_2 = 2A_x \sin \theta \cos \theta.$$

Поскольку матрица Q_0 является диагональной, матрица $Q_1(\omega_0 t)$ — несимметрической ($Q_1^T \neq Q_1$), а параметр $\alpha_H > 0$ — малым, уравнение в вариациях (1.14) относится к классу уравнений, близких к каноническим. Поэтому формулы для областей параметрической неустойчивости и инкрементов неустойчивых колебаний, приведенные в первом разделе настоящей работы, в рассматриваемом случае неприменимы.

Как показано в [7] (гл. V), в системах, близких к каноническим, уравнение для добавок v к характеристическим показателям невозмущенной системы, определяющих устойчивость колебаний, записывается следующим образом:

$$v^2 \omega_0^4 - 2(\alpha + i\beta)v\omega_0^2 - (\gamma + i\delta) = 0. \quad (2.6)$$

Здесь

$$\alpha + i\beta = -\frac{1}{2}(\sigma_{j_1, j_1} \operatorname{sign} j_1 + \sigma_{j_2, j_2} \operatorname{sign} j_2) \omega_0^2,$$

$$\gamma + i\delta = (\sigma_{j_1, j_2} \sigma_{j_2, j_1} - \sigma_{j_1, j_1} \sigma_{j_2, j_2}) \omega_0^4 \operatorname{sign}(j_1, j_2); \quad (2.7)$$

$$j_1, j_2 = \pm 1, \pm 2, \quad j_2 > j_1.$$

Входящие в (2.7) величины σ_{jh} определяются выражением

$$\sigma_{j_1, j_2} = -\frac{1}{\omega_0^2} (Q_1^{(m_{j_2} - m_{j_1})} \mathbf{a}_{|j_1|}, \mathbf{a}_{|j_2|}) + \frac{\mu \omega_{j_1}}{\omega_0^2} \gamma_{j_1, j_2}, \quad (2.8)$$

где

$$Q_1(\omega_0 t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\omega_0 t) Q_1^{(m)},$$

$$\gamma_{j_1, j_2} = \begin{cases} 0, & j_1 \neq j_2 \\ 1, & j_1 = j_2 > 0 \\ -1, & j_1 = j_2 < 0 \end{cases}$$

$\alpha_x = (\omega_0/2\omega_x q_x)$ ($x = 1, 2$) — ортонормированные собственные векторы матрицы Q_0 , величина μ определяет ширину резонансной зоны.

Если мнимая часть хотя бы одного из корней уравнения (2.6) отрицательна, вещественная часть по крайней мере одного характеристического показателя положительна, что соответствует наличию параметрически неустойчивых колебаний плазмы.

Так как в рассматриваемом случае у матрицы-функции $Q_1(\omega_0 t)$ отличны от нуля лишь первые гармоники, в системе оказывается возможным выполнение следующих резонансных условий:

$$(1) \quad \omega_0 = 2\omega_1, \quad (2) \quad \omega_0 = 2\omega_2, \quad (3) \quad \omega_0 = \omega_2 + \omega_1, \quad (4) \quad \omega_0 = \omega_2 - \omega_1,$$

где собственные частоты колебаний плазмы определяются соотношениями (1.11).

1) *Первый основной резонанс* — $\omega_0 = 2\omega_1$ ($j_1 = -1, j_2 = 1$). По формулам (2.7) и (2.8) вычисляем коэффициенты σ_{jh} и находим

$$\alpha = \beta = \delta = 0, \quad \gamma = \mu^2 \omega_1^2 - \frac{\alpha_H}{4q_1^2} (\lambda_1 + k_1 \lambda_2)^2.$$

Из уравнения (2.6) получим выражение для добавок к характеристическим показателям:

$$\nu_{2,1} = \mp \frac{i}{\omega_0^2} \left[\frac{\alpha_H^2}{4q_1^2} (\lambda_1 + k_1 \lambda_2)^2 - \mu^2 \omega_1^2 \right]^{1/2}. \quad (2.9)$$

Следовательно, в области, определяемой неравенствами

$$-\frac{\alpha_H}{4\omega_1 q_1} (\lambda_1 + k_1 \lambda_2) < \mu < \frac{\alpha_H}{4\omega_1 q_1} (\lambda_1 + k_1 \lambda_2), \quad (2.10)$$

колебания плазмы имеют неустойчивый характер ($\operatorname{Re}(i\nu_1) > 0$).

Выражение для инкремента колебаний, обусловленного наличием градиента равновесной плотности плазмы, по порядку величины равно (для оценки положим $\sin \theta \sim \cos \theta, \omega_1 \sim \omega_{pe}$)

$$\gamma_N \sim \frac{|\zeta_0|}{L} \omega_{pe} \sim k_{\text{эфф}} |\zeta_0| \omega_{pe}, \quad (2.11)$$

где $|\zeta_0| = |e| E_0 / m_e \omega_{pe}^2$. Так как, по предположению, $|\zeta_0| \ll L$, инкремент всегда меньше собственной частоты колебаний плазмы, хотя и может достигать значительной величины.

2) *Второй основной резонанс* — $\omega_0 = 2\omega_2$ ($j_1 = -2, j_2 = 2$). Остается в силе формулы, описывающие параметрическую раскачку колебаний в области первого основного резонанса с заменой $\omega_1 \rightarrow \omega_2, q_1 \rightarrow q_2, k_1 \rightarrow k_2$. Для значений $\omega_0 \sim \omega_2 \sim \omega_{pe}$, $\sin \theta \sim \cos \theta$ максимально достижимый инкремент колебаний определяется выражением (2.11).

3) *Суммарный комбинационный резонанс* — $\omega_0 = \omega_2 + \omega_1$. В данном случае необходимо рассмотреть две возможности.

a) $j_1 = -1, j_2 = 2$. По формулам (2.7) и (2.8) получим

$$\alpha = -\frac{\mu}{2} (\omega_2 - \omega_1), \quad \gamma = \mu^2 \omega_1 \omega_2 - \frac{\alpha_H \omega_0^2}{16 \omega_1 \omega_2 q_1 q_2} (\lambda_1 + k_1 \lambda_2)(\lambda_1 + k_2 \lambda_2).$$

Следовательно, в области, ограниченной неравенствами

$$-\frac{\alpha_H}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2 q_1 q_2}} [(\lambda_1 + k_1 \lambda_2) (\lambda_1 + k_2 \lambda_2)]^{1/2} < \mu < \\ < \frac{\alpha_H}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2 q_1 q_2}} [(\lambda_1 + k_1 \lambda_2) (\lambda_1 + k_2 \lambda_2)]^{1/2}, \quad (2.12)$$

колебания плазмы являются неустойчивыми. Инкремент колебаний

$$\gamma_N = \frac{\alpha_H}{4\omega_0} \left[\frac{1}{\omega_1 \omega_2 q_1 q_2} (\lambda_1 + k_1 \lambda_2) (\lambda_1 + k_2 \lambda_2) \right]^{1/2} \quad (2.13)$$

по порядку величины равен

$$\gamma_N \sim k |\zeta_0| \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_1 \omega_2} \omega_0. \quad (2.14)$$

б) $j_1 = -2, j_2 = 1$. Остаются в силе все формулы пункта а).

4) Разностный комбинационный резонанс — $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$. «Порождающие» решения (2.5) всегда устойчивы, параметрическая раскачка колебаний отсутствует.

3. Заключение. Остановимся кратко на пределах применимости полученных в работе результатов.

1) В настоящей работе исследовано параметрическое возбуждение колебаний лишь в первой (основной) зоне Маттье. Известно, однако, что помимо основного субгармонического резонанса ($\omega_0 = 2\omega_j$) в колебательных системах с периодически изменяющимися параметрами возможна параметрическая раскачка колебаний на частотах $\omega_j = (\omega_0/2)n$, где $n = 2, 3, \dots$, ω_j — собственная частота колебаний системы. При этом ширина резонансных областей (зон параметрической неустойчивости) с увеличением n уменьшается пропорционально ϵ^n , где ϵ — малый параметр, характеризующий амплитуду возбуждающей силы (в нашем случае $\epsilon = k|\zeta_0| \ll 1$). Так же быстро с ростом n уменьшаются и значения инкрементов колебаний в этих областях. Следовательно, исследованные в настоящей работе резонансы представляются наиболее интересными с практической точки зрения.

2) В работе не принималось во внимание тепловое движение частиц плазмы. Следовательно, характерная фазовая скорость, которая в рассматриваемом случае сильно нелинейных колебаний порядка направленной скорости электронов, должна быть значительно больше тепловой скорости электронов, т. е.

$$v_E \sim \omega |\zeta_0| \gg v_{Te} = (T_e/m_e)^{1/2}. \quad (3.1)$$

3) Записывая уравнения движения (1.1) — (1.3), мы пренебрегли действием силы Лоренца на электроны. Условие подобного пренебрежения легко получить, если учесть, что по порядку величины

$$E \sim 4\pi enL, B \sim \frac{4\pi}{c} env_E L,$$

где L — характерное расстояние, на котором изменяются переменные величины, B — напряженность магнитного поля возмущения. Учитывая следующее из уравнений движения неравенство $v_E B/c \ll E$, получим условие

$$v_E \sim v_\Phi \ll c, \quad (3.2)$$

совпадающее с условием выделения продольных колебаний плазмы в магнитном поле.

4) Результаты, полученные в настоящей работе, справедливы лишь в односкоростном приближении, т. е. траектории электронов не должны пересекаться. Для получения математического критерия достаточно учесть связь между лагранжевой и эйлеровой производными:

$$v_{(x,z)} = \frac{d\zeta_{(x,z)}}{dt} = \frac{\partial\zeta_{(x,z)}}{\partial t} \left(1 - \frac{\partial\zeta_{(x,z)}}{\partial x} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

В рассматриваемом случае согласно неравенствам (3.1) и (3.2) скорости электронов являются величинами конечными, вследствие чего получим

$$\left| \frac{\partial\zeta_{(x,z)}}{\partial x} \right| < 1. \quad (3.4)$$

Условие (3.4) совпадает с условием отсутствия пересекающихся траекторий электронов, приведенным, к примеру, в монографии [9].

В заключение выражаю глубокую благодарность В. П. Силину и К. Н. Степанову за полезное обсуждение затронутых в работе вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
2. В. Е. Голант, А. Д. Пилия, УФН, 104, 413 (1971).
3. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, УФН, 109, 225 (1973).
4. V. V. Demchenko and I. A. El-Naggag, Nucl. Fusion, 11, 457 (1971).
5. К. Н. Степанов, ЖТФ, 33, 246 (1963).
6. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, изд. Наука, М., 1966.
7. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, изд. Наука, М., 1972.
8. В. В. Демченко, К. Н. Степанов, УФЖ, 14, 1020 (1969);
V. V. Demchenko and I. A. El-Naggag, Physica, 58, 144 (1972).
9. R. C. Davidson, Methods in Nonlinear Plasma Theory, Acad. Press, N. Y.—London, 1972.

Поступила в редакцию
23 февраля 1976 г.,
после переработки
15 марта 1977 г.

PARAMETRIC EXCITATION OF NONLINEAR LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF MAGNETOACTIVE PLASMA

V. V. Demchenko

The parametric excitation by HF field of nonlinear longitudinal electron oscillations in the region of hybrid resonances of a cold nonrelativistic plasma has been investigated. It is shown that the inhomogeneity of the pump field and that of the equilibrium plasma density results in the parametric instability. Expressions are derived for the increments of unstable oscillations and the widths of the instability regions are determined. The increments of unstable oscillations in the order of magnitude due to the inhomogeneities of the pump field (γ_E) or of the plasma density (γ_N) are equal to

$$\gamma_E \sim k |\zeta_0| \omega_{pe}, \quad \gamma_N \sim \frac{|\zeta_0|}{L} \omega_{pe},$$

where $|\zeta_0| = |e| E_0/m_e \omega_0^2$ is the amplitude of displacement of an electron from the equilibrium state, k , ω_0 , E_0 are the wave number, frequency and amplitude of the pump field; L is the characteristic size of the inhomogeneity of the plasma density, ω_{pe} is the electron plasma frequency.

УДК 533.951

ОБНАРУЖЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ ПО САТЕЛЛИТАМ ЗАПРЕЩЕННЫХ ПЕРЕХОДОВ ГЕЛИЯ

Б. Г. Еремин, А. В. Костров, Н. В. Лунин, А. Д. Степанушкин

По сателлитам запрещенных переходов гелия обнаружено возбуждение плазменных волн при воздействии на бесстолкновительную плазму интенсивного электромагнитного излучения. Возбуждение плазменных волн сопровождалось генерацией быстрых электронов в плазме.

Взаимодействие интенсивного электромагнитного излучения с бесстолкновительной плазмой сопровождается возбуждением спектра плазменных (продольных) волн. При достаточно большой напряженности поля плазменной волны для ее обнаружения может быть использован метод сателлитов запрещенных линий гелия. Известно [1], что присутствие внешнего высокочастотного электрического поля приводит к появлению сателлитов запрещенных линий гелия, интенсивность которых определенным образом связана с амплитудой внешнего поля, а расстояние по спектру от запрещенной линии определяется частотой внешнего поля. В работе [2] приведены расчетные штарковские профили некоторых линий гелия и кривые зависимости относительных интенсивностей сателлитов и разрешенных линий от среднеквадратичной напряженности поля в плазме. Экспериментальное обнаружение сателлитов и использо-

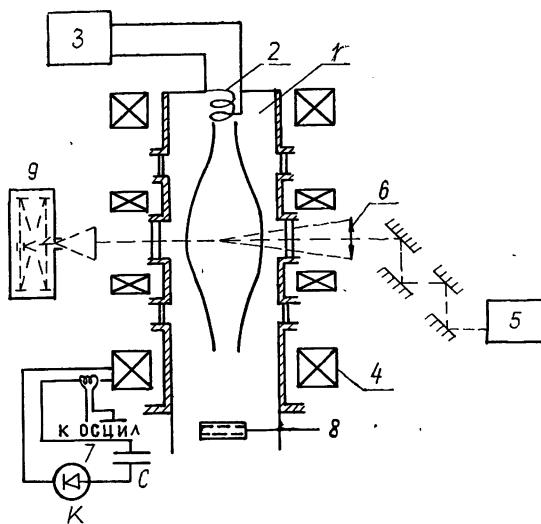


Рис. 1. Схема установки:
1 — вакуумная камера, 2 — индуктор, 3 — ВЧ генератор, 4 — соленоид,
5 — СВЧ генератор, 6 — квазиоптический тракт, 7 — источник питания
соленоида, 8 — многосеточный зонд, 9 — ДФС-12.

зование их для диагностики турбулентной плазмы было проведено в работах [3, 4], в которых исследовалась токовая турбулентность (θ - и Z -пинчи).

В настоящей работе этот метод применен для плазмы, которая турбулируется под действием интенсивного электромагнитного излучения в результате развития параметрической неустойчивости. Для измерений были использованы переходы: разрешенный $4'D - 2'P$ ($\lambda = 4922 \text{ \AA}$) и запрещенный $4'F - 2'P$.

Экспериментальная установка схематически изображена на рис. 1. Вакуумная камера диаметром 20 см и длиной 100 см помещалась в относительно слабое ($H_0 \approx 200 \text{ Э}$) магнитное поле. Пучок электромагнитных волн миллиметрового диапазона формировался системой квазиоптических преобразователей и фокусировался тefлоновой линзой в центр вакуумной камеры ($k \perp E_n \parallel H_0$, k — волновой вектор электромагнитной волны, E_n — напряженность поля волны накачки).

Гелиевая плазма ($T_e \approx 10 \text{ эВ}$, $T_i \approx 1 \text{ эВ}$) создавалась индукционным разрядом при давлении $p \sim 10^{-2} \text{ тор}$. Длина свободного пробега электрона при этих условиях существенно превышала размер области взаимодействия волнового пучка с плазмой, а частота поля ω_0 была много больше частот столкновений в плазме ($\omega_0 \gg v_{ei}, v_{em}$). Линейная трансформация поперечных волн в продольные была затруднена, так как вектор напряженности поля волны накачки перпендикулярен градиенту концентрации. Режим работы источника плазмы подбирался таким образом, чтобы за время импульса СВЧ ($\tau_i \approx 250 \text{ мкс}$) концентрация электронов в плазме увеличивалась и проходила через критическое значение ($N_{e \text{ кр}} = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$).

Анализ спектра излучения вблизи линии $HeI \lambda = 4922 \text{ \AA}$ производился монохроматором ДФС-12, который имел полуширину аппаратной функции $\Delta \sim 0,2 \text{ \AA}$, достаточную для разрешения сателлитов при плазменной частоте $\omega_{pe} = 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

При достижении критической концентрации плазмы в максимуме параболического слоя, имеющего по уровню 0,5 $N_{e \text{ max}}$ размер порядка 8 см, наблюдались ускоренные электроны. На рис. 2 представлена осциллограмма тока быстрых электронов, измеряемого многосеточным зондом, расположенным на оси вакуумной камеры. Энергия возникающих электронов значительно преувеличала тепловую энергию электронов невозмущенной плазмы, а момент их появления совпадал с моментом достижения критической концентрации в слое (рис. 2 в, 2 б).

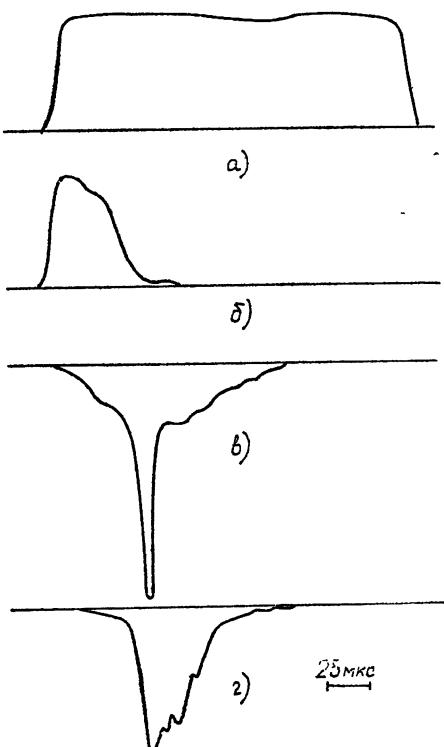


Рис. 2.

a) падающий СВЧ сигнал, *б)* проходящий сигнал, *в)* электронный ток на многосеточный зонд ($U_3 \sim 50 \text{ эВ}$), *г)* излучение ближнего сателлита запрещенного перехода $4'F - 2'P$.

Подробное исследование энергетического спектра быстрых электронов проведено в работе [6], где было показано, что в результате нелинейного взаимодействия волны накачки с плазмой появляются быстрые электроны, распределение которых в пространстве скоростей имеет пучковый характер. Образование пучков объясняется тем, что на нелинейной стадии параметрической неустойчивости в плазме создается нелинейная плазменная волна с основным масштабом, определяемым максимумом инкремента модуляционной неустойчивости [6, 7]. В результате взаимодействия плазмы с возбуждаемой нелинейной волной должны появляться пучки электронов вблизи скоростей $v_n = v_{\Phi_0}/n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, $v_{\Phi_0} = \omega_{pe}/k_0$ — фазовая скорость основного масштаба, что и наблюдалось в проведенных ранее экспериментах.

Метод запрещенных переходов в гелии позволил непосредственно обнаружить и исследовать возбуждение нелинейных плазменных волн. На рис. 2г показана осциллограмма излучения из плазмы ближнего сателлита запрещенного перехода $4'F - 2'P$. Резкое увеличение светимости сателлита вблизи критической концентрации указывало на возрастание высокочастотных электрических полей в плазме. В прозрачной плазме ($N_e < N_{e\text{кр}}$) интенсивность сателлита определялась электрическим полем волны накачки и была на пределе чувствительности приемной аппаратуры. Поэтому увеличение светимости сателлита при неизменной светимости основной линии позволяет сделать вывод о том, что в плазме возбуждались интенсивные высокочастотные поля, амплитуда которых значительно превышала амплитуду волны накачки.

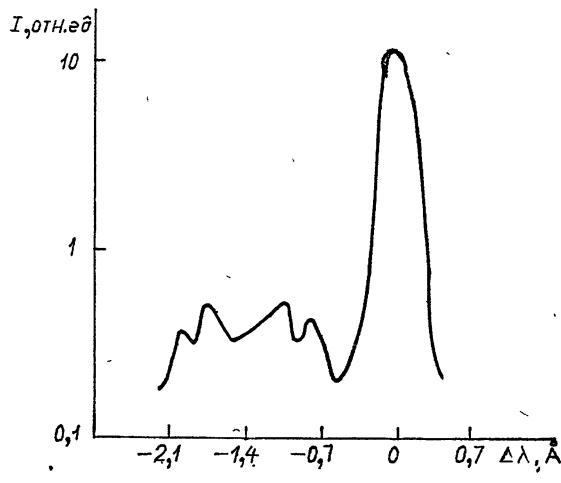


Рис. 3.

Рис. 3. Спектр излучения плазмы вблизи линии $\text{He I } \lambda = 4922 \text{ \AA}$; $\Delta\lambda = 0$ — положение разрешенной линии ($E_h = 2 \text{ кВ/см}$, $v/v_{Te} = 8,2 \cdot 10^{-2}$).

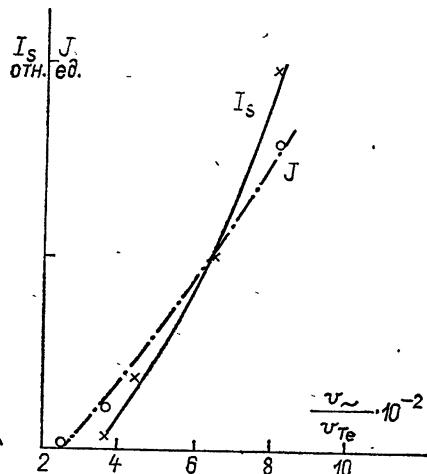


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость интенсивности ближнего сателлита (I_s) и тока быстрых электронов (I) с энергией $> 50 \text{ эВ}$ от напряженности поля волны накачки.

На рис. 3 представлен спектр излучения плазмы вблизи линии $\text{He I } \lambda = 4922 \text{ \AA}$ ($N_e \sim N_{e\text{кр}}$). Спектр снимался за много циклов работы установки, и хорошая повторяемость результатов упростила процедуру усреднения. Средняя квадратичная ошибка не превышала 10 %. Абсолютные измерения напряженности электрического поля в плазме по отношению интенсивностей ближнего или дальнего сателлитов и основной линии [2] в условиях эксперимента затруднены. Это связано с тем,

что источник излучения сателлитов находился вблизи области с критической концентрацией*, а вклад в излучение основной линии определялся всем слоем плазмы. Поэтому полученные экспериментальные данные позволили оценить снизу напряженности электрических полей, возбуждаемых в плазме. Из кривых рис. 3 следует, что при напряженности поля волны накачки порядка 2 кВ/см поле плазменной волны составляло примерно 9 кВ/см . Истинное электрическое поле в плазме превышало полученное значение. С другой стороны, в установившемся режиме оно, по-видимому, не должно превышать характерного плазменного поля $E_{\text{пл}}$ ($E_{\text{пл}}^2/8\pi = n_e T_e$), которое в условиях эксперимента составляло примерно 20 кВ/см .

На рис. 4 показаны зависимости отношения интенсивностей ближнего сателлита и основной линии и тока быстрых электронов с энергией $U \geq 50 \text{ эВ}$ на многосеточный зонд от напряженности поля волны накачки. Из полученных кривых видно, что пороги возбуждения плазменных волн и возникновения быстрых электронов практически совпадали. Надо отметить, что средняя энергия возникающих электронов при изменении амплитуды волны накачки, начиная с $E_n = 1 \text{ кВ/см}$ ($v/v_{Te} \approx \approx 4 \cdot 10^{-2}$), не изменялась и равнялась $T_{e\text{эфф}} = 150 \text{ эВ}$. Поэтому нарастание тока электронов при увеличении напряженности поля в падающей волне связано с увеличением концентрации ускоренных частиц.

Таким образом, в проведенных экспериментах обнаружено, что при воздействии на бесстолкновительную плазму интенсивной электромагнитной волны в плазме в результате развития параметрической неустойчивости возникали интенсивные плазменные волны с амплитудой электрического поля, значительно превышающей амплитуду поля волны накачки (по-видимому, вплоть до характерных плазменных полей $E_{\text{пл}}$).

Авторы благодарны А. Г. Литваку за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Baranger and B. Moser, Phys. Rev., **123**, 25 (1961).
2. W. W. Hicks, R. A. Hess and W. S. Cooper, Phys. Rev., **5**, 490 (1972).
3. Г. В. Зеленин, А. А. Куцин, М. Е. Мазинченко, О. С. Павличенко, В. А. Супруненко, ЖЭТФ, **56**, 1879 (1970).
4. H. J. Kunze, Phys. Fluids, **12**, 2669 (1969).
5. Б. Г. Еремин, А. В. Костров, А. Д. Степанушкин, Г. М. Фрайман, Физика плазмы, **2**, 414 (1976).
6. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, Т. Н. Федосеева, Г. М. Фрайман, Письма в ЖЭТФ, **20**, 544 (1974).
7. Г. М. Фрайман, ЖЭТФ, **64**, 1589 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
25 июня 1976 г.

DETECTION OF PLASMA WAVES IN TURBULENT PLASMA BY SATELLITES OF FORBIDDEN HELIUM TRANSITIONS

B. G. Eremin, A. V. Kostrov, N. V. Lunin, A. D. Stepanushkin

The excitation of plasma waves is discovered by satellites of forbidden helium transitions in the case of the collisionless plasma affected by intense electromagnetic radiation. The excitation of plasma waves was accompanied by generation of fast electrons in the plasma.

* Измерения распределения быстрых электронов по радиусу показали, что источник их генерации локализован в области размером около 1 см , лежащей в окрестности точки $\epsilon = 0$.

УДК 621.371.7

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОРЕЗОНАТОРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ СВЕТА ПРИ СИЛЬНОМ ПОГЛОЩЕНИИ НЕРЕЗОНАНСНОЙ ВОЛНЫ

A. A. Бабин, B. N. Петряков, G. I. Фрейдман, A. N. Щелоков

В приближении взаимодействия плоских волн рассмотрено влияние сильного поглощения нерезонансной волны и волны накачки на энергетические характеристики ОПГС и ОПГС с нерезонансным отражением накачки. Показано, что для обоих типов генераторов поглощение нерезонансного излучения приводит к качественному изменению поведения зависимости коэффициента преобразования обеих волн от превышения накачкой порогового значения. Пороговое значение плотности мощности накачки при этом медленно изменяется в зависимости от величины поглощения нерезонансной волны. Затухание накачки, не меняя характера этих зависимостей, приводит к уменьшению максимального коэффициента преобразования каждой из волн и увеличению порога.

Параметрическая генерация, как известно [1, 2], может наблюдаться и в том случае, когда частота одной из взаимодействующих волн (нерезонансной) попадает в полосу поглощения кристалла. При рассмотрении вопросов усиления и генерации излучения субмиллиметрового диапазона за счет его взаимодействия со световыми волнами также необходимо принимать во внимание то обстоятельство, что линейные потери волн субмиллиметрового диапазона могут быть весьма значительными. Поэтому представляет интерес исследование процессов параметрической генерации с учетом сравнительно сильного поглощения одной из взаимодействующих волн.

Остановимся на рассмотрении однорезонаторных параметрических генераторов света (ОПГС), которые обладают рядом преимуществ по сравнению с двухрезонаторным ПГС и являются более перспективными. Ограничимся в основном исследованием энергетических характеристик ОПГС, так как именно на эти параметры генератора в первую очередь влияет поглощение волн в кристалле. Для решения нелинейной задачи воспользуемся приближением взаимодействия плоских волн. Это существенно упрощает рассмотрение и в то же время дает возможность качественно проследить за физическими процессами, происходящими в ОПГС. В стационарном случае при выполнении условий фазового и пространственного синхронизма система уравнений для комплексных амплитуд накачки E_3 , резонансной E_p - и нерезонансной E_n -волн, взаимодействующих в нелинейном кристалле, имеет вид [3]

$$\frac{dE_{p,n}}{dz} + \alpha_{p,n} E_{p,n} = i \gamma_0 E_{n,p}^* E_3, \quad (1)$$

$$\frac{dE_3}{dz} + \alpha_3 E_3 = i \gamma_0 E_p E_{n,p}.$$

Здесь α_3 , α_p и α_n — коэффициенты линейного поглощения соответствующих волн, γ_0 — параметр их взаимодействия, пропорциональный корню

квадратному из плотности мощности накачки S_0 . Амплитуды E_3 , E_p , E_n в уравнениях (1) нормированы таким образом, что квадраты их модулей пропорциональны плотности потока квантов соответствующих волн.

Точное решение системы (1) известно лишь для случая одинаковых коэффициентов поглощения [4]. При $\alpha_3 \neq \alpha_p \neq \alpha_n$ для исследования энергетических характеристик ОПГС воспользуемся приближением заданной структуры поля резонансной волны [5]. При этом, естественно, на величину коэффициента поглощения резонансной волны α_p накладывается условие $\alpha_p d \ll 1$ (d — длина нелинейного кристалла), которое обычно выполняется в реальных ситуациях.

1. ОБЫЧНАЯ СХЕМА ОПГС

Для обычной схемы ОПГС с учетом граничных условий на зеркалах R_+ и R_- (R_+ и R_- — коэффициенты отражения зеркал по интенсивности) легко получить уравнение для определения стационарного значения амплитуды поля резонансной волны E_{p0} :

$$[1 + \alpha_p(d)] \sqrt{R} \exp(-\alpha_p d) = 1. \quad (2)$$

Здесь $R = R_+ R_-$, $\alpha_p(d) = \frac{\Delta E_p(d)}{E_{p0}}$ — относительная величина приращения

поля E_p в процессе усиления. Из выражения (2) можно определить как пороговое значение параметра усиления $G = \gamma_0 E_{30} d$ (E_{30} — амплитуда накачки на входе в нелинейный кристалл), соответствующее условию самовозбуждения генератора, так и его энергетические характеристики в стационарном режиме. Однако при произвольных значениях коэффициентов поглощения α_3 и α_n выражения для величин $\alpha_p(d)$ и $G_{\text{пор}}$ имеют (в отличие от случая прозрачной среды [6, 7]) довольно громоздкий вид [8].

Ситуация несколько упрощается в наиболее интересном с практической точки зрения случае слабого затухания накачки и резонансной волны. Будем считать вначале, что $\alpha_p = \alpha_3 = 0$. Полученные при этом результаты справедливы также (с соответствующими поправками) и при $\alpha_p d \ll 1$ (см. сноску к формулам (4 а)), а о влиянии затухания накачки на энергетические характеристики генератора будет сказано ниже. В этом случае выражение для $G_{\text{пор}}$ имеет вид*

$$G_{\text{пор}}^2 = \frac{(1 - \sqrt{R})(\alpha_n d)^2}{\sqrt{R}(\alpha_n d + \exp(-\alpha_n d) - 1)}. \quad (3)$$

Зависимость коэффициента преобразования (КП) по потокам фотонов резонансной $\eta_p = \frac{(1 - R)|E_{p0}|^2}{|E_{30}|^2}$ и нерезонансной $\eta_n = \frac{|E_n(d)|^2}{|E_{30}|^2}$

* При $\alpha_n d \gg 1$ выражение для порогового значения параметра усиления $G_{\text{пор}}$, полученное на основании точных формул работы [3], совпадает с (3) при выполнении условий $\frac{4(1 - \sqrt{R})}{\sqrt{R}[\alpha_n d + \exp(-\alpha_n d) - 1]} \ll 1$ и $\gamma_0^2 d / \alpha_n \ll 1$, которые, по сути дела, являются условиями применимости метода заданной структуры поля резонансной волны для определения $G_{\text{пор}}$. Отметим, что в формуле (1.6) работы [3] допущена опечатка: выражение, стоящее в квадратных скобках правой части (1.6 а), следует умножить на $\exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} d\right)$, а выражение (1.6 б) справедливо при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

волн от характерного параметра — превышения над порогом $S_0/S_{0 \text{ пор}} = G^2/G_{\text{пор}}^2$ — определяется соотношениями*

$$\eta_{p0} = 1 - \left[1 - \alpha_h d \frac{\sin 2 \Lambda d}{2 \Lambda d} - \frac{(2 \Lambda d)^2 - (\alpha_h d)^2}{4} \frac{\sin^2 \Lambda d}{(\Lambda d)^2} \right] \exp(-\alpha_h d); \quad (4a)$$

$$\eta_h = (\Gamma_0 d)^2 \exp(-\alpha_h d) \frac{\sin^2 \Lambda d}{(\Lambda d)^2}; \quad (4b)$$

$$\frac{G^2}{G_{\text{пор}}^2} = \frac{S_0}{S_{0 \text{ пор}}} =$$
(4b)

$$= \frac{2(\Gamma_0 d)^2 [1 - (1 - \alpha_h d) \exp(\alpha_h d)] (\alpha_h d)^{-2}}{\exp(\alpha_h d) - 1 + \frac{2(\Gamma_0 d)^2 - (\alpha_h d)^2}{2} \frac{\sin^2 \Lambda d}{(\Lambda d)^2} - \alpha_h d \frac{\sin 2 \Lambda d}{2 \Lambda d}}.$$

Здесь введены обозначения: $2\Lambda = \sqrt{4\Gamma_0^2 - \alpha_h^2}$, $\Gamma_0 = \gamma_0 E_{p0}$. Как видно из системы (4), зависимость коэффициента преобразования обеих волн от превышения над порогом задана параметрически через параметр $\Gamma_0 d$. На рис. 1 приведены кривые η_p и $(S_0/S_{0 \text{ пор}})$, построенные при различных значениях параметра затухания $\alpha_h d$.

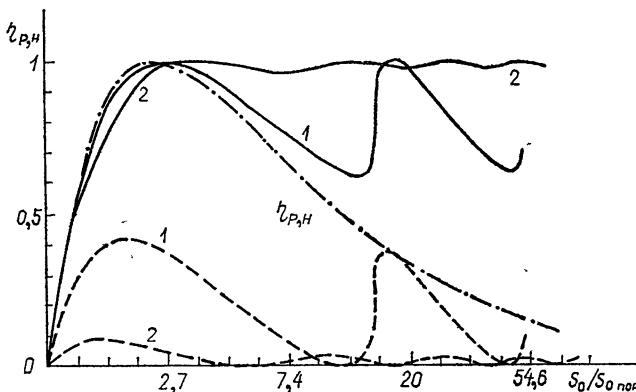


Рис. 1. Зависимости коэффициентов преобразования резонансной η_p (сплошные кривые) и нерезонансной η_h (пунктир) волни от превышения порога $S_0/S_{0 \text{ пор}}$ для значений $\alpha_h d = 0,01$ (штрих-пунктир), $\alpha_h d = 1$ (кривые 1) и $\alpha_h d = 4$ (кривые 2).

Из графиков рис. 1 видно, что при $\alpha_h d \ll 1$ зависимость $\eta_{p,h}(S_0/S_{0 \text{ пор}})$, как и следовало ожидать, совпадает с аналогичными зависимостями, полученными для случая $\alpha_p = \alpha_h = \alpha_3 = 0$ (см., например, [6]). Значительное затухание нерезонансной волны качественно меняет характер поведения кривых. При $\alpha_h d \geq 1$ зависимости η_p и η_h в области большого превышения порога являются не монотонно спа-

* В рассматриваемом случае ($\alpha_3 = \alpha_p = 0$) величину КП резонансной волны можно найти из соотношения Мэнли—Роу: $\eta_{p0} = [|E_{30}|^2 - |E_3(d)|^2] / |E_{30}|^2$, где $E_3(d)$ — амплитуда поля накачки, прошедшей через нелинейный кристалл. В рассматриваемом приближении влияние слабого затухания резонансной волны ($\alpha_p d \ll 1$) на величину η_p можно учесть с помощью простого соотношения [2]: $\eta_p = \eta_{p0} (1 - R_+) / (1 - r)$, здесь $r = R_+ R_- T_{kp}^2 T_{kp}$ — коэффициент пропускания (по интенсивности) кристалла для резонансной волны.

дающими, как при $\alpha_H d \ll 1$, а осцилляторными. Кроме того, увеличение параметра затухания $\alpha_H d$ приводит к быстрому уменьшению максимальной величины коэффициента преобразования нерезонансной волны, в то время как пороговое значение плотности мощности накачки довольно слабо зависит от параметра $\alpha_H d$ (см. рис. 2). Отметим еще одно важное обстоятельство: величина η_H^+ при наличии затухания α_H обращается в нуль при конечных значениях превышения порога.

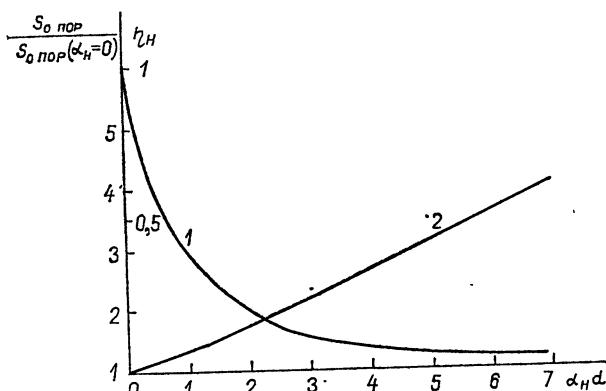


Рис. 2. Зависимость от параметра $\alpha_H d$ максимального значения коэффициента преобразования нерезонансной волны η_H^+ (кривая 1) и порогового значения плотности мощности накачки $S_0 \text{ пор}$ (кривая 2) (нормированной на значение $S_0 \text{ пор}$ при $\alpha_H = 0$).

Полученные результаты имеют наглядную физическую интерпретацию. Действительно, в случае, когда затухания нет, поля E_p и E_n , достигнув максимальных значений при усиении в нелинейном кристалле, начинают отдавать свою энергию полю накачки E_3 . Полная обратная перекачка ($E_n = 0$, $E_p = E_p|_{z=0}$) произойдет при бесконечно большой величине превышения порога. Если же $\alpha_H \neq 0$, то поле E_n из-за линейных потерь может обращаться в нуль на конечном расстоянии $z = z^*$ от входной грани кристалла. Амплитуда E_p в этой точке имеет минимальное значение, поскольку при $z = z^*$ выполняются условия, аналогичные условиям на входе в нелинейный элемент.

2. ОПГС С НЕРЕЗОНАНСНЫМ ОТРАЖЕНИЕМ НАКАЧКИ

Проведенные рядом авторов [9, 10] исследования показали, что применение нерезонансного отражения накачки приводит к понижению порога самовозбуждения параметрических генераторов света и улучшению его энергетических характеристик. Кроме того, как показано в [2], использование зеркала на накачку улучшает спектральные характеристики излучения ПГС.

Используя аналогичную методику для определения стационарной амплитуды поля резонансной волны, легко получить систему уравнений для определения зависимостей КП резонансной и нерезонансной волн от превышения порога для исследуемого случая (полученные при этом результаты так же легко (см. сноску к формулам (4)) переносятся на случай $\alpha_H d \ll 1$):

* Величины $\eta_{n,z}^+$ и $\eta_{n,z}^-$ представляют собой КП нерезонансной волны, распространяющейся в направлении падающей и отраженной от зеркала R_3 накачки соответственно.

$$\eta_{\text{р.з}} = \eta_{\text{р0}} [1 + R_3 (1 - \eta_{\text{р0}})]; \quad (5a)$$

$$\eta_{\text{н.з}}^+ = (\Gamma_0 d)^2 \exp(-\alpha_n d) \frac{\sin^2 \Lambda d}{(\Lambda d)^2}, \quad \eta_{\text{н.з}}^- = \eta_{\text{н.з}}^+ \frac{|E_3(d)|^2}{|E_{30}|^2} R_3; \quad (5b)$$

$$\frac{G_3^2}{G_{\text{пор.з}}^2} = \frac{G^2}{G_{\text{пор}}^2} (1 + R_3) \left\{ 1 + R_3 \exp(-\alpha_n d) \left[1 - \frac{2(\Gamma_0 d)^2 - (\alpha_n d)^2}{2} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{\sin^2 \Lambda d}{(\Lambda d)^2} + \alpha_n d \frac{\sin 2 \Lambda d}{2 \Lambda d} \right] \right\}^{-1}. \quad (5b)$$

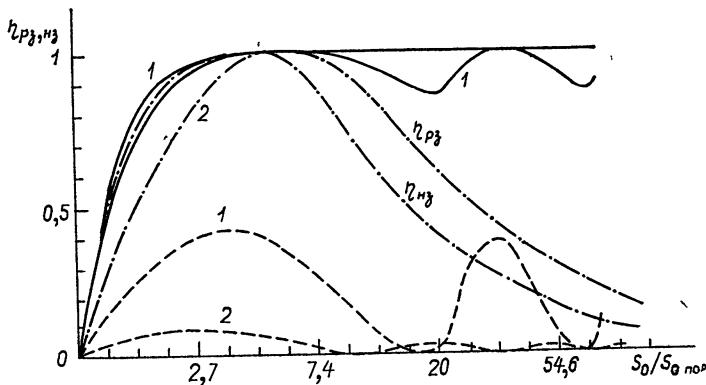


Рис. 3. Зависимости коэффициентов преобразования резонансной $\eta_{\text{р.з}}$ (сплошные кривые) и нерезонансной $\eta_{\text{н.з}}$ (пунктир) волн от превышения порога $S_0/S_0 \text{ пор}$ для значений $\alpha_n d = 0,01$ (штрих-пунктир), $\alpha_n d = 1$ (кривые 1) и $\alpha_n d = 4$ (кривые 2).

На рис. 3 представлены графики зависимости коэффициентов преобразования резонансной и нерезонансной волн от превышения порога при $\alpha_p = \alpha_3 = 0$ и $R_3 = 1$. Как видно из графиков рис. 3, характеристики ОПГС с нерезонансным отражением накачки при $\alpha_n d > 1$ практически не отличаются от аналогичных зависимостей для обычной схемы ОПГС, в то время как для случая $\alpha_n d \ll 1$ эти различия существенны. Следовательно, применение зеркала к накачке при значительном поглощении нерезонансной волны приводит лишь к понижению порога самовозбуждения генератора, поскольку $G_{\text{пор.з}}^2 = G_{\text{пор}}^2 \frac{1}{1 + R_3 \exp(-\alpha_3 d)}$.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что в обоих типах однорезонаторных параметрических генераторов линейное поглощение нерезонансной волны качественно меняет характер зависимости коэффициента преобразования резонансного и нерезонансного излучения от превышения накачкой порога самовозбуждения. При большом затухании ($\alpha_n d \gtrsim 1$) расширяется область превышения накачкой порогового значения, когда коэффициент преобразования резонансной волны близок к единице, но в то же время существенно уменьшается максимальная величина $\eta_{\text{н.з}}^{\max}$ нерезонансной волны*. Пороговое значение плотности мощности накачки при этом довольно слабо зависит от величины коэффициента поглощения нерезонансного излучения.

Поглощение накачки в нелинейном кристалле, как показывают

* Отметим, что для импульсной накачки с неоднородным поперечным расположением полученные результаты остаются в силе, поскольку для этого случая характерно большое превышение порога, когда $\eta \approx \text{const}$ при $\alpha_n d \gtrsim 1$.

вычисления, не приводит к существенным эффектам. В этом случае, как и следовало ожидать, с увеличением коэффициента затухания α_3 растет пороговое значение параметра усиления $G_{\text{пор}}^2 = \frac{(1 - \sqrt{R})(\alpha_3 d)^2 \exp(\alpha_3 d)}{\sqrt{R}(\text{ch } \alpha_3 d - 1)}$

и уменьшается максимальное значение ($\eta_p = \eta_n$) обеих волн. При этом зависимость $\eta_p^{\max}(\alpha_n d = 0; \alpha_3 d)$ от параметра $\alpha_3 d$ совпадает с зависимостью максимального значения коэффициента преобразования нерезонансной волны $\eta_n^{\max}(\alpha_n d; \alpha_3 d = 0)$ от величины $\alpha_n d$, приведенной на рис. 2.

Отмеченные обстоятельства в равной мере относятся как к обычным однорезонаторным параметрическим генераторам, так и к генераторам с нерезонансным отражением накачки.

В заключение авторы пользуются случаем поблагодарить М. М. Сущика за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Беляев, А. М. Киселев, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 8, 1182 (1971).
2. А. А. Бабин, Ю. Н. Беляев, Н. Н. Беляева, М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, А. Н. Щелоков, Научный отчет НИРФИ, Г. Р. 71053845, Горький, 1975.
3. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 631 (1970); А. А. Бабин, Н. Н. Беляева, Ю. Н. Беляев, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 71, 1(7) (1976).
4. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ВИНИТИ, М., 1964.
5. A. Siegman, Appl. Opt., 1, 739 (1962).
6. L. B. Kreuzer, Proc. of Conf. on Lasers and Optoelectronics, England, April, 1969.
7. В. М. Фортус, Диссертация, Горький, 1972.
8. В. Н. Петряков, Дипломная работа, ГГУ, Горький, 1975.
9. J. E. Bjorkholm, IEEE, QE-5, 293 (1969).
10. J. E. Bjorkholm, A. Ashkin and R. G. Smith, IEEE, QE-6, № 12, 797 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 июля 1976 г.

ENERGETIC CHARACTERISTICS OF SINGLE-CAVITY OPTICAL PARAMETRIC OSCILLATORS AT STRONG ABSORPTION OF A NONRESONANT WAVE

A. A. Babin, V. N. Petryakov, G. I. Freydman, A. N. Shchelokov

The strong absorption effect of a nonresonant wave and a pump wave on the energetic characteristics of a single-cavity optical parametric oscillator (SOPO) and SOPO with nonresonance pump reflection has been considered in the approximation of plane wave interaction. It is shown that for both types of oscillators the nonresonant radiation absorption results in a qualitative change of the behaviour of the dependence of the transformation coefficient of both waves on the pump increasing of the threshold. The threshold value of the power pump density depends slowly on absorption of a nonresonant wave. The pump attenuation without changing these dependences leads to decreasing the maximum transformation coefficient of each of the waves and to increasing the threshold.

УДК 621.373.4 + 621.385.6

ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХЧАСТОТНОГО РЕЖИМА РЕЗОНАНСНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

A. A. Бердников, Б. Н. Пойзнер, Т. С. Портнова

Исследуется трехчастотная модель резонансного автогенератора, отражающая ряд характерных свойств приборов сверхвысокочастотного и оптического диапазонов. Для анализа факторов, определяющих устойчивость трехчастотных колебаний с некратными частотами, с помощью ЭВМ построены области значений нормированных коэффициентов, входящих в уравнения генератора, при которых возможно возникновение одновременно всех видов колебаний (ВК) и многочастотный режим устойчив. Моделирование на ЭВМ показало, что результат процесса установления ВК зависит от их начальных условий, но нечувствителен к изменению на 180° фазы сигналов с комбинационными частотами. Эксперименты с многочастотным отражательным кристаллоном подтверждают ряд полученных выводов.

1. В последние годы опубликован ряд работ по общим вопросам устойчивости автоколебаний в генераторах с двумя степенями свободы (например, [1–8]). Взаимодействие колебаний в системах с тремя степенями свободы обычно исследуется применительно к конкретным автогенераторам различных частотных диапазонов. Впервые трехчастотный режим проанализирован Лэмбом [9] для газового генератора оптического излучения. Вид фазового пространства для трехволнового процесса показан в [8, 10]. Авторами [11, 12] исследовалась устойчивость трехчастотных колебаний для невозмущенного генератора и для синхронизованного ГБВ при фиксированных параметрах кубичной нелинейности. В [13] рассмотрена устойчивость одночастотного состояния в многоконтурном генераторе на тунNELЬНОМ диоде.

Для выяснения общих закономерностей трехчастотного процесса имеет смысл обратиться к некоторой «универсальной» модели резонансного автогенератора. В описывающих ее уравнениях заданным режимам работы соответствуют определенные значения коэффициентов. Поэтому анализ уравнений при различных соотношениях между коэффициентами дает представление о поведении многих автоколебательных систем.

Данное сообщение посвящено изучению устойчивости трехчастотного режима в генераторе с кубичной нелинейностью при различной степени амплитудно-фазового взаимодействия видов колебаний (ВК) с некратными частотами.

2. Динамику амплитуд A_m и фаз φ_m трех ВК отражает система уравнений [9]

$$\begin{aligned} \dot{A}_m &= \alpha_m A_m - \beta_m A_m^3 - \theta_{mk} A_k A_k^2 - \theta_{ml} A_m A_l^2 - \\ &\quad - (\eta_{ki} \cos \psi + \xi_{ki} \sin \psi) A_m A_k^2 A_l^2 / A_1 A_3, \\ \dot{\varphi}_m &= (\Omega_m - \nu_m) / \nu + \sigma_m + \rho_m A_m^2 + \tau_{mk} A_k^2 + \\ &\quad + \tau_{ml} A_l^2 - (\eta_{ki} \sin \psi - \xi_{ki} \cos \psi) A_k^2 A_l^2 / A_1 A_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где точки означают дифференцирование по безразмерному времени νt , индексы m, k, i циклически принимают значения: 1, 2, 3,

$$\psi = (2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3)t + 2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3. \quad (2)$$

Коэффициенты a_m в (1) характеризуют инкременты ВК в процессе установления. Отношения θ_{mk}/β_m и η_{ki}/β_m , ξ_{ki}/β_m описывают соответственно степень энергетической конкуренции ВК, вызванной их взаимным ограничивающим влиянием, и фазового взаимодействия ВК, обусловленного наличием сигналов комбинационной частоты $2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3$. Отличие частоты генерации видов колебаний ν_m от резонансной частоты колебательной системы Ω_m определяется коэффициентами линейного (σ_m) и нелинейного (ρ_m , τ_{mk} , τ_{mi}) затягивания частоты. С увеличением неэквидистантности частотного спектра фазовое взаимодействие, существенное при $|2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3| \leq Q_m$, где Q_m — добротность, становится все более нерезонансным, поэтому при $|2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3| \gg Q_m$ членами с комбинационной частотой в (1) можно пренебречь.

В случае квазидискретного характера взаимодействия активной среды с полем, например, в многочастотном отражательном клистроне [14] при двукратном пролете электронов через сетки резонатора или в модели МЦР-генератора с продольной структурой СВЧ-поля в виде двух δ-зазоров [6], зависимость наведенного тока i от СВЧ-напряжения имеет форму

$$i = S \sum_m q_m u_m - D \left(\sum_m q_m u_m \right)^3, \quad (3)$$

где q_m — вещественная, S и D — комплексные функции частоты. Следствием зависимости (3) является фиксированное соотношение между степенью энергетической конкуренции различных ВК:

$$\theta_{mk}/\beta_m = 4 \beta_k/\theta_{km} = q_k^2/q_m^2, \quad (4)$$

а также связь между коэффициентами, описывающими фазовое и амплитудное взаимодействие, в частности,

$$\eta_{31} = [(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \operatorname{Im} D / \operatorname{Re} D] (\theta_{21} \theta_{23})^{1/2} / v_2^2; \quad (5)$$

$$\xi_{31} = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) (\theta_{21} \theta_{23})^{1/2} / v_2^2. \quad (6)$$

3. Результаты исследования на ЭВМ системы уравнений (1) с учетом соотношений (4) — (6) показаны на плоскости параметров $x = \theta_{23}/\beta$ $y = \theta_{31}/\beta_3$ при заданном значении $z = \theta_{12}/\beta_1 = 1.9$. В силу (5), (6) изменение x и y приводит к изменению отношений η_{km}/β_m , ξ_{km}/β_m . На рис. 1 однократно заштрихованы области, соответствующие одновременному возникновению трех ВК. Двойной штриховкой отмечены области параметров, при которых трехчастотный режим устойчив в малом.

Рис. 1 а — 1 в иллюстрируют зависимость размера области устойчивости от соотношения между нормированными инкрементами (рис. 1 а: $\alpha_1/\beta_1 = 52 \times 10^{-4}$, $\alpha_2/\beta_2 = 77 \times 10^{-4}$, $\alpha_3/\beta_3 = 51 \times 10^{-4}$, $Q_m(2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3)/\nu_2 = 3\%$, рис. 1 б — значение α_2/β_2 уменьшено в 1,3 раза, рис. 1 в — α_3/β_3 увеличено в 1,5 раза по сравнению с рис. 1 а). Устойчивые многочастотные колебания, как показали исследования, возможны лишь при соотношении α_m/β_m : α_k/β_k в интервале от 1 до 5.

Рис. 1 г — 1 е отражают влияние сигналов с комбинационными частотами: рис. 1 г отличается от рис. 1 а увеличением всех η_{ki} , ξ_{ki} в 3 раза, рис. 1 д — в 10 раз; на рис. 1 е области устойчивости построены для тех же значений α_m/β_m , что и на рис. 1 а, но $Q_m(2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3)/\nu_2 = 6\%$. Вследствие увеличения неэквидистантности спектра область устойчи-

вости на рис. 1 е существенно меньше, чем на рис. 1 а. Устойчивый многочастотный режим, как показали расчеты на ЭВМ, возможен, если $Q_m(2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3)/\nu$ не превышает 12—20 %.

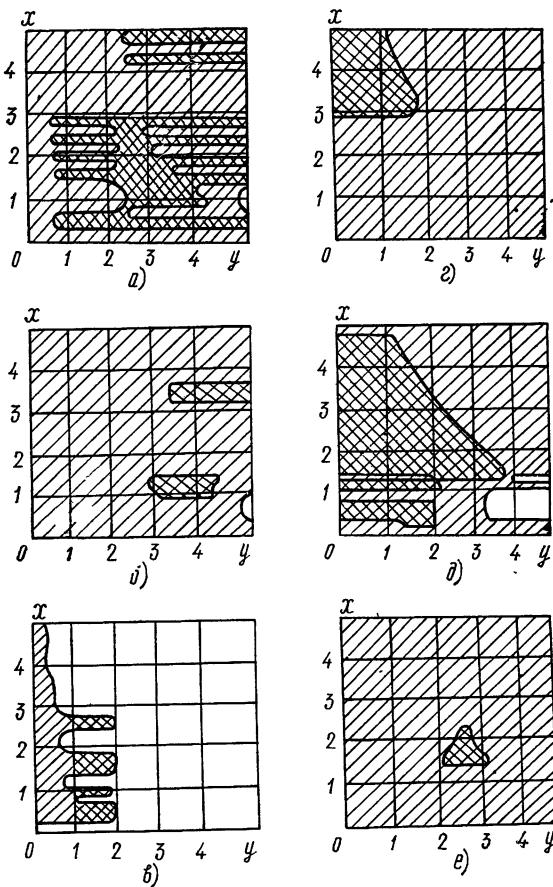


Рис. 1.

Сравнение рис. 1 а с рис. 1 г, 1 д свидетельствует о том, что рост осциллирующих членов сначала приводит к заметному сокращению областей устойчивости, но при дальнейшем увеличении η_{ki} , ξ_{ki} размер области устойчивости возрастает (рис. 1 д) и сохраняется почти неизменным. Уменьшение η_{ki} , ξ_{ki} ведет к периодическому изменению области устойчивости, сопровождающемуся сокращением ее размера. При отсутствии осциллирующих членов трехчастотные колебания неустойчивы, как и в случаях, когда $x, y, z > 1$, а соотношение (4) может и не выполняться [8], или когда $x = y = z = 2$ [11, 12].

При $z = 1,6$ [15] имеют место закономерности, аналогичные показанным на рис. 1. Следовательно, фазовое взаимодействие приводит к появлению устойчивых трехчастотных колебаний в некоторых областях параметров x, y, z при выполнении (4).

Изменение на π фазы осциллирующих членов не влияет на величину и знак суммы $(\eta_{ki} \cos \psi + \xi_{ki} \sin \psi)$, входящей в (1), в стационарном состоянии, но отражается на размере и конфигурации области устойчивости. При этом характер установления фазы ψ меняется, компенсируя

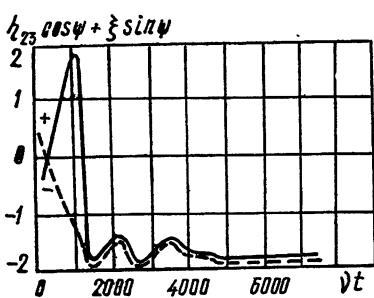


Рис. 2.

4. Для сравнения полученных результатов с экспериментальными данными по отражательному клистрону, резонансная камера которого связана с короткозамкнутой волноводной линией, надо учесть, что из (3) и [14] следуют соотношения

$$\begin{aligned} q_m &= \pi i M_m [2\pi(n + 0,75) + \delta_m]/4V_0, \\ S = D &= \exp(-j\delta_m) \quad (m = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (7)$$

определяющие зависимость коэффициентов в (1) от параметров клистрона. Здесь δ_m — отличие пролетного угла электронов на частоте v_m от оптимального, i_0 — постоянный ток на входе в резонатор, напряжение которого V_0 , M_m — коэффициент воздействия на частоте v_m , n — номер зоны генерации.

Расчет связанный системы с учетом потерь в резонаторе показывает, что нормированное сопротивление в плоскости электронного пучка

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= R(\gamma) C_e \omega_0 = [1/Q^2 + (1/\gamma - \gamma)^2]^{-1} \times \\ &\times \{1/Q^2 + I(1/\gamma - \gamma) - (2\gamma^2 a / \operatorname{tg}^2 \beta L) [1/Q^2 + (1/\gamma - \gamma)^2]\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma = \omega/\omega_0$, $\omega = 2\pi\nu$, $\beta = (2\pi/c)(v^2 - v_{kp}^2)^{1/2}$, v_{kp} — критическая частота в волноводе, $a = \omega_0^3 M^2 C_e / \rho$, C_e — эквивалентная емкость камеры с резо-

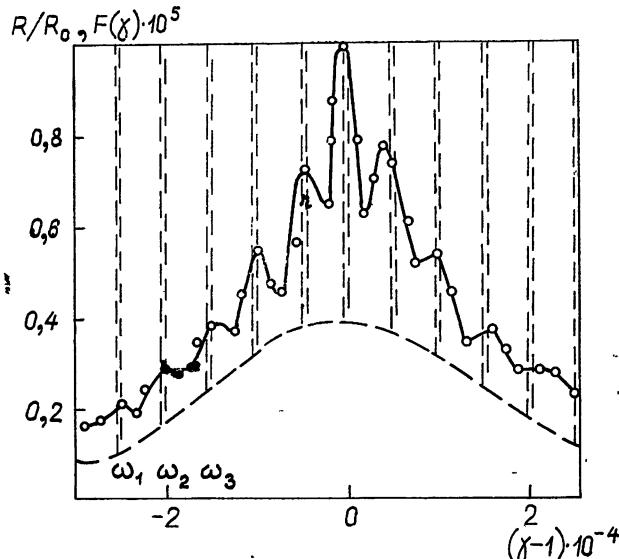


Рис. 3.

смену знака у коэффициентов η_{kl} , ξ_{kl} . На рис. 2 показано поведение множителя $(\eta_{23} \cos \phi + \xi_{23} \sin \phi)$ в процессе установления для указанных случаев (кривые помечены знаками + и -). Расчет на ЭВМ процессов установления с различной начальной фазой показал зависимость числа установившихся ВК от начальных условий, как и в генераторах с одинаковой для всех ВК степенью конкуренции [16].

нансной частотой ω_0 , M — индуктивность связи камеры с линией длиной l и волновым сопротивлением ρ . Теоретическая зависимость (8), рассчитанная при значениях параметров $a = 0,8$, $v_{kp} = 0,69 v_0$, при $l = 23 \text{ м}$ показана на рис. 3 пунктиром.

Проверка зависимости (8) проводилась по методике, предложенной Э. С. Воробейчиковым, на основе измерения тока в цепи отражателя при изменении частоты сигнала, подаваемого в волноводную линию, когда $u_0 = -1 \text{ В}$, $V_0 = 40 \text{ В}$. В предположении, что ток отражателя пропорционален сопротивлению в плоскости электронного пучка, получена зависимость нормированного сопротивления Z/Z_0 от нормированной частоты $\gamma = \omega/\omega_0$, показанная сплошной линией на рис. 3. Отличие экспериментальной и теоретической кривой обусловлено пре-небрежением потерями в линии колебательной системы. Согласно экспериментальному графику на рис. 3 вблизи центра зоны генерации $\frac{\alpha_m/\beta_m}{\alpha_k/\beta_k} = 2,1$, а вблизи края зоны $\frac{\alpha_m/\beta_m}{\alpha_k/\beta_k} = 1,2$.

Из сопоставления выражений (4) — (7) с результатами, представленными на рис. 1, следует, что рис. 1а относится к случаю, когда $u_0 = -366 \text{ В}$, $V_0 = 300 \text{ В}$, что соответствует низковольтному краю третьей зоны генерации. Поэтому вдали от частоты ω_0 значения $Z/Z_0(\gamma_1)$, $Z/Z_0(\gamma_2)$, $Z/Z_0(\gamma_3)$ (см. рис. 3) и пропорциональные им величины α_1 , α_2 , α_3 отличаются незначительно, главным образом за счет множителя $q_m \cos \delta_m$. Рис. 1б отражает ситуацию, когда это различие уменьшено за счет сокращения вдвое межвидового интервала $\omega_m - \omega_k = v/2l$ при удлинении волноводной линии до 23 м. Рис. 1в соответствует выбору напряжения на отражателе, близкого к оптимальному ($u_0 = -389 \text{ В}$, $V_0 = 300 \text{ В}$), когда отличие значений $Z/Z_0(\gamma_1)$, $Z/Z_0(\gamma_2)$, $Z/Z_0(\gamma_3)$ и, следовательно, α_1 , α_2 , α_3 максимально. Рис. 1е соответствует увеличенной вдвое степени неэквидистантности спектра генерации из-за возрастания затягивания частоты, пропорционального, согласно (7), $q_m \sin \delta_m$ при переходе от третьей к седьмой зоне.

Наблюдение процессов установления показало устойчивость многочастотного режима при работе на краю зоны генерации и неустойчивость возникающих многочастотных колебаний при работе в центре зоны генерации [17]. Эксперименты с волноводной линией различной длины обнаруживают отсутствие многочастотных режимов при $|u_0| < 65 \text{ В}$, $V_0 = 300 \text{ В}$, что соответствует высоким номерам ($n \geq 6$) зоны генерации, где возможна повышенная неэквидистантность спектра из-за электронного затягивания частоты.

Таким образом, полученные в итоге численного исследования результаты (рис. 1) согласуются с экспериментальными данными.

Авторы благодарят Э. С. Воробейчика за обсуждение постановки задачи и результатов. Авторы признательны рецензенту за конструктивную критику, способствовавшую улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Тондл, Колебания нелинейных механических систем, изд. Мир, М., 1973.
2. A. Tondl, On the Interaction Between Self-excited and Forced Vibrations, Prague, 1976.
3. В. А. Мельникова, Т. М. Таранович, Радиотехника и электроника, 19, № 12, 2564 (1974).
4. М. В. Литвинчук, В. А. Мельникова, Радиотехника и электроника, 21, № 3, 554 (1976).
5. В. А. Мельникова, Т. М. Таранович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 8, 1156 (1976).

6. И. Г. Зарницина, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 12, 1858 (1974).
7. Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 11, 1689 (1975).
8. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1307 (1972).
9. У. Лэмб, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966, стр. 283.
10. М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 5—6, 721 (1976).
11. В. А. Мельникова, сб. Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика, изд. ГГУ, 1974, стр. 41.
12. В. А. Мельникова, Т. М. Таранович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1327 (1974).
13. Е. Н. Дудник, С. А. Иванов, И. И. Минакова, Радиотехника и электроника, 20, № 9, 1977 (1975).
14. Э. С. Воробейчиков, А. М. Киреев, Ю. А. Корчагин, Б. Н. Пойзнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 8, 923 (1970).
15. E. S. Vorobejchikov and B. N. Pojzner, Book of Abstracts VII International Conference on Non-Linear Oscillations, Berlin, 1975, p. 183.
16. Э. С. Воробейчиков, Б. Н. Пойзнер, Т. С. Портнова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1535 (1973).
17. Э. С. Воробейчиков, Р. Ф. Замолдинов, Т. С. Портнова, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 5, 16 (1974).

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
31 мая 1976 года,
после доработки
14 февраля 1977 г.

FACTORS AFFECTING THE THREE-FREQUENCY REGIME STABILITY OF A RESONANT SELF-OSCILLATOR WITH CUBIC NONLINEARITY

A. A. Berdnikov, B. N. Pojzner, T. S. Portnova

A three-frequency model of a resonant self-oscillator displaying a number of the characteristic features of HF and optical band devices is investigated. To analyse the factors determining the stability of three-frequency oscillations with nonmultiple frequencies, the value regions of normalized coefficients involved in the oscillator equation are built using the electron computer. With these regions all modes may exist and the multi-frequency regime is unstable. The computer modelling showed that the result of settling down the modes depends on their initial conditions but nonsensitive to the change in the signal phase by 180° with combinational frequencies. The experiments with a multi-frequency reflective clystron support a number of conclusions derived.

УДК 538.56 · 519.25

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Ю. Е. Кузовлев, Г. Н. Бочков

Предлагаются методы описания и анализа стохастических процессов и систем, основанные на представлении статистических средних в виде матричных элементов линейных операторов и на использовании формального аппарата квантовой теории. Методы приводят к построению точных решений (в виде цепных дробей) для средних характеристик линейных систем с флуктуирующими параметрами, представляющими собой марковские процессы с произвольными одномерными вероятностными распределениями и временами корреляции. Показано, что наиболее простым образом в точные решения входят новые параметры вероятностных распределений, отличные от моментов и кумулянтов. Именно эти константы распределений выдвигаются на первый план при едином операторном описании негауссовых случайных процессов и систем. На примере осциллятора с флуктуирующей (по произвольному закону) частотой сравниванием с точным результатом найдены условия применимости приближения Бурре. Получены условия стохастической устойчивости систем первого и второго порядков с негауссовыми флуктуациями параметров.

Исследования стохастических систем — систем со случайно-изменяющимися параметрами — привлекают в настоящее время большое внимание в связи с задачами о движении частиц и волн в стохастических средах, проблемами обнаружения слабых сигналов, вопросами синтеза высокостабильных квантовых радиосистем и, в целом, в связи с общей проблемой создания адекватных реальным физическим и техническим ситуациям стохастических моделей процессов и систем.

Использующиеся методы приближенного анализа стохастических систем [1–5], такие как методы селективного суммирования рядов теории возмущений, способы решения кинетических уравнений для искомых плотностей вероятности, а также приемы общей корреляционной теории стохастических функционалов, дают хорошие результаты в предположении достаточной малости или быстроты случайно-изменяющихся параметров и приводят к точным результатам, когда параметры являются δ -коррелированными процессами [3, 5].

Особый принципиальный и практический интерес представляют точные результаты, полученные без всяких ограничений на быстроту, интенсивность и форму вероятностного распределения флуктуаций параметров. К настоящему времени известен точный результат [6, 7] для случая, когда флуктуирующий параметр является диахотомическим (двухзначным) марковским процессом с произвольными дисперсией и временем корреляции. Однако в этих работах (так же, как и в исследованиях, где используется традиционная гауссова модель флуктуаций параметра) по-прежнему существенно используется специфика вероятностного распределения случайного параметра, и поэтому дальнейшие обобщения не представляются возможными.

В данной работе предлагается общий метод анализа стохастических систем, который в широком классе случаев позволяет получить точные

выражения для средних характеристик систем в виде цепных дробей. Метод основан на операторном представлении (ОП) случайных процессов и систем. Использование ОП и формального аппарата квантовой теории* позволяет перейти от стохастического уравнения к детерминированному уравнению для операторов искомых случайных процессов. Определенная форма ОП (соотношение (2)) позволяет просуммировать в общем виде усредненный ряд теории возмущений, чем и определяется успех предлагаемого метода. Общим вопросам представлений посвящен разд. 1 статьи. В разд. 2 рассмотрены конкретные операторные представления произвольной случайной величины, а в разд. 3 ОП марковских процессов. Показано, что в ОП на первый план выдвигаются новые параметры вероятностных распределений, отличающиеся от привычных моментов и кумулянтов. Интересно, что именно эти параметры входят простым образом в точные решения. В разд. 4 ОП применяется к анализу стохастической системы с параметром, представляющим марковский процесс с произвольным одномерным распределением и временем корреляции. Рассмотрены примеры.

1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ОПЕРАТОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Рассмотрим стохастическую систему, описываемую уравнением

$$L \left[\eta(t); \frac{d}{dt} \right] x(t) = f(t), \quad (1)$$

где $\eta(t)$ — стационарный случайный процесс, $L \left[\eta(t); \frac{d}{dt} \right]$ — линейный дифференциальный оператор — некоторая функция двух некоммутирующих переменных $\eta(t)$ и $\frac{d}{dt}$, $f(t)$ — известная (случайная) функция времени. Поставим задачу определения среднего движения системы $x(t) \equiv \langle x(t) \rangle$ (в примерах будут рассмотрены также и высшие моменты решений).

Для нахождения $\langle x(t) \rangle$ прежде всего необходима полная статистическая информация о случайном параметре $\eta(t)$. Представим бесконечную (в общем случае) совокупность моментных функций процесса $\eta(t)$ следующей единой формой:

$$\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \dots \eta(t_n) \rangle = \langle O | TD(t_1) D(t_2) \dots D(t_n) | O \rangle. \quad (2)$$

Здесь $|O\rangle$ — вектор (в обозначении Дирака) из гильбертова пространства Γ , $D(t)$ — оператор (в представлении Гейзенberга), действующий в Γ , T — символ хронологического упорядочения, означающий, что операторы в (2) ставятся в порядке возрастания аргумента справа налево. Тройку Γ , $|O\rangle$, $D(t)$ будем называть здесь операторным представлением (ОП) случайного процесса $\eta(t)$. Изменение оператора $D(t)$ во времени определим формулой

* Заметим, что этот метод перекликается с общей теорией представления алгебры случайных величин операторами в гильбертовом пространстве, изложенной в [11]. Иной подход, приводящий к другой форме ОП, изложен в [12]. Основная идея ОП в связи между гауссовыми случайными процессами и бозонными квантовыми полями, а также между дихотомическими процессами и фермионными полями пришла в [12] из более ранних работ (см., например, [13]). В [12] исследовались квантовые поля, «порождаемые» так называемыми обобщенными коммутационными соотношениями, и их стохастическая реализация и получено ОП еще для одного типа случайных процессов с одномерным распределением $W(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$.

$$D(t) = e^{Ht} D e^{-Ht}, \quad (3)$$

где операторы D и H от времени не зависят. Если к тому же $H|O\rangle = 0$, $\langle O|H = 0$, то в моментные функции (2) войдут лишь разности аргументов, что отвечает стационарности процесса $\eta(t)$.

Таким образом, вся совокупность моментных функций заменяется парой операторов D и H из надлежаще подобранных гильбертова пространства Γ . Такая процедура, как будет видно, существенно облегчит и формализует анализ стохастического уравнения (1). Пространство Γ может оказаться как бесконечномерным, так и простым линейным пространством векторов конечной размерности (все операторы в таком случае будут представлять квадратные матрицы).

Будем всюду считать оператор D эрмитовым, так что все его собственные числа η вещественны. Соответствующий невырожденному η собственный вектор оператора D обозначим $|\eta\rangle$. Тогда согласно (2) моменты одномерного распределения будут равны

$$\langle \eta^n(t) \rangle = \langle O | D^n | O \rangle = \int \eta^n |\langle O | \eta \rangle|^2 d\eta, \quad (4)$$

где происходит интегрирование по собственным числам оператора D и использована ортонормированность его собственных векторов. Отсюда видно, что функция $W(\eta) = |\langle O | \eta \rangle|^2$ есть плотность вероятности одномерного распределения.

Очевидно, постулируя формулы (2), среднее $\langle x(t) \rangle$ также можно записать в виде $\langle x(t) \rangle = \langle O | X(t) | O \rangle$, где оператор $X(t)$ является причинным функционалом от $D(t)$. Стохастическое уравнение (1) тогда можно заменить операторным уравнением

$$L \left[D(t); \frac{d}{dt} \right] X(t) = If(t), \quad (5)$$

в котором I — единичный оператор. Переходя от представления Гейзенберга операторов $D(t)$ и $X(t)$ к операторам D и $\widetilde{X}(t)$ по формулам* $D = e^{-Ht} D(t) e^{Ht}$, $\widetilde{X}(t) = e^{-Ht} X(t) e^{Ht}$, получим для $\widetilde{X}(t)$ уравнение

$$L \left[D; \frac{d}{dt} + H \right] \widetilde{X}(t) = If(t) \quad (6)$$

с детерминированным оператором $L \left[D; \frac{d}{dt} + H \right]$, причем $\langle x(t) \rangle \equiv \langle O | \widetilde{X}(t) | O \rangle$. Поскольку оператор в левой части (6) теперь не зависит от времени, то к уравнению (6) можно применить преобразование Фурье или Лапласа. Из найденного уравнения следует, в частности, выражение для средней передаточной характеристики («восприимчивости») стохастической системы (2):

$$\bar{K}(p) = \langle O | \{L[D; p + H]\}^{-1} | O \rangle, \quad (7)$$

где (-1) означает обращение оператора. В свою очередь, $\bar{K}(p)$ связана преобразованием $\bar{K}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \bar{G}(\tau) d\tau$ со средней функцией Грина

* Имеет место чисто формальная аналогия с переходом в квантовой теории к так называемому представлению «взаимодействия» для $X(t)$ и к представлению Шредингера для операторов D , описывающих случайный параметр.

(«функцией реакции») стохастической системы (1) $\bar{G}(\tau) = \langle G(t, t_0) \rangle$ ($\tau = t - t_0$), где $G(t, t_0) \equiv X(t)$ при $f(t) = \delta(t - t_0)$.

2. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ОПЕРАТОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть случайная величина η распределена с плотностью вероятности $W(\eta)$ и все моменты распределения конечны. всякая неотрицательная функция $W(\eta)$ порождает последовательность ортонормированных с весом $W(\eta)$ полиномов $P_n(\eta)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $P_0(\eta) = 1$). Эти полиномы связаны рекуррентными соотношениями (известными из общей теории ортогональных полиномов, см., например, [8]):

$$\eta P_n(\eta) = S_n P_n(\eta) + \sqrt{R_{n+1}} P_{n+1}(\eta) + \sqrt{R_n} P_{n-1}(\eta),$$

где S_n и R_n — некоторые характеризующие функцию $W(\eta)$ константы, причем все R_n неотрицательны: $R_n \geq 0$. Введя бесконечномерный вектор-столбец $|\eta\rangle$ с компонентами $P_n(\eta)$, рекуррентные соотношения можно записать в матричной форме $|\eta\rangle = D|\eta\rangle$, где матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} S_0 & \sqrt{R_1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{R_1} & S_1 & \sqrt{R_2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{R_2} & S_2 & \sqrt{R_3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{R_3} & S_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (R_n \geq 0). \quad (8)$$

Отсюда вытекает равенство $\langle \eta^n \rangle = \langle O | D^n | \eta \rangle$, где вектор $|O\rangle \equiv \{1, 0, 0, 0, \dots\}$. Умножая это равенство на $W(\eta)$ и интегрируя по η , нетрудно получить

$$\langle \eta^n \rangle = \int \eta^n W(\eta) d\eta = \langle O | D^n | O \rangle. \quad (9)$$

Эта формула, аналогичная (2), (4), дает вместе с (8) ОП произвольной случайной величины (с конечными моментами). Из (9), в частности, имеем $\langle \eta \rangle = S_0$, $\langle \eta^2 \rangle = S_0^2 + R_1$, откуда видно, что S_0 есть среднее, а $R_1 \equiv \sigma^2$ — дисперсия. Из (8) и (9) нетрудно видеть также, что константы S_n (при $n > 0$) характеризуют асимметрию распределения (если все $S_n = 0$, то равны нулю все нечетные моменты).

Произвольной плотности вероятности однозначно сопоставляется матрица вида (8). Можно доказать и обратное: задавая в (8) константы S_n и R_n произвольно и независимо друг от друга, по формулам (9) получим моменты некоторого реального распределения. В этом важное отличие S_n и R_n от таких обычных параметров распределения, как моменты или кумулянты, возможные значения которых связаны сложными зависимостями*.

Введем функцию комплексного переменного z

$$h(z) \equiv \int \frac{W(\eta)}{\eta - z} d\eta = \left\langle O \left| \frac{1}{D - z} \right| O \right\rangle. \quad (10)$$

Матричный элемент (10) можно вычислить, пользуясь специальной формой (8) матрицы D :

* Заметим, что параметры S_n , R_n , появляющиеся в теории ортогональных полиномов [8], в статистических задачах ранее, по-видимому, не встречались.

$$h(z) = \frac{1}{S_0 - z - \frac{R_1}{S_1 - z - \frac{R_2}{S_2 - z - \dots}}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{S_n - z} \quad (11)$$

(здесь по определению $R_0 = 1$). Полученная цепная дробь является своего рода производящей функцией S_n, R_n *.

Приведем сводку констант S_n, R_n для некоторых распределений.

1) Альтернативное распределение:

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \delta(\eta - \sigma) + \frac{1}{2} \delta(\eta + \sigma),$$

$$R_1 = \sigma^2, \quad R_n = 0 \quad \text{при } n \geq 2, \quad S_n = 0.$$

2) Нормальное распределение:

$$W(\eta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$R_n = n\sigma^2, \quad S_n = 0.$$

3) Пуассоновское распределение:

$$W(\eta) = \exp\left(-\frac{\gamma^2}{\gamma^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\sigma^2}{\gamma^2}\right)^k \delta(\eta - k\gamma + \sigma^2/\gamma),$$

$$R_n = n\sigma^2, \quad S_n = n\gamma.$$

4) Гамма-распределение:

$$W(\eta) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} \eta^a e^{-\eta} \quad (\eta \geq 0),$$

$$R_n = n(n+a), \quad S_n = 2n+a+1. \quad (12)$$

5) Бета-распределение:

$$W(\eta) = \frac{\Gamma(2a+2)}{2^{2a+1} \Gamma^2(a+1)} (1-\eta^2)^a \quad (\eta^2 < 1),$$

$$R_n = \frac{n(n+2a)}{4(n+a)^2-1}, \quad S_n = 0. \quad (13)$$

Случай $a = 0$ соответствует равномерному распределению.

3. ОПЕРАТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим ОП для класса марковских процессов $\eta(t)$, двумерная плотность вероятности которых имеет вид

$$W_2(\eta_1; \eta_2; t) = W(\eta_1) W(\eta_2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\eta_1) P_n(\eta_2) e^{-\lambda_n t}, \quad (14)$$

где $P_n(\eta)$ — порождаемые весовой функцией (одномерной плотностью вероятности) $W(\eta)$ ортогональные полиномы, $\eta_i \equiv \eta(t_i)$, $t \equiv |t_1 - t_2|$.

* Зная константы S_n и R_n и, следовательно, функцию $h(z)$, можно, в принципе, найти и плотность вероятности. Полагая в (10) $z = a + i\epsilon$, переходя к пределу при

$\epsilon \rightarrow +0$, получим $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} h(a + i\epsilon) = \oint \frac{W(\eta)}{\eta - a} d\eta + i\pi W(a)$, $i\pi W(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} h(a + i\epsilon)$.

Нетрудно показать, что моментные функции такого процесса выражаются формулами (2), (3), причем: 1) оператор D есть матрица вида (8) и полностью определяется одномерным распределением, 2) оператор H представляет собой диагональную матрицу с элементами на диагонали $\lambda_n (\lambda_n \geq 0, \lambda_0 = 0)$, 3) вектор $|O\rangle$ такой же, как в предыдущем разделе.

Марковский процесс с двумерной плотностью (14) будем называть для краткости простым. Оправданием этому названию служат следующие его свойства, которые мы приведем без доказательства: 1) n -й кинетический коэффициент $K_n(\eta)$ простого процесса есть полином степени не выше n ; 2) простой процесс имеет экспоненциальную корреляционную функцию. Опираясь на первое из этих свойств, можно убедиться, что существуют только три типа простых марковских процессов с кинетическим оператором второго порядка (т. е. непрерывных процессов). Выпишем их кинетические коэффициенты ($K_n(\eta) = 0$ при $n \geq 3$) и временные константы λ_n .

1) Нормальный марковский процесс:

$$K_1 = -\eta, \quad K_2 = 2\sigma^2 = \text{const}, \quad \lambda_n = n\lambda.$$

2) Марковский процесс с одномерным гамма-распределением (12):

$$K_1 = -(\eta - a - 1), \quad K_2 = 2\eta, \quad \lambda_n = n\lambda.$$

3) Марковский процесс с одномерным бета-распределением (13):

$$K_1 = -\eta, \quad K_2 = (1 + a)^{-1}(1 - \eta^2), \quad \lambda_n = n\lambda + n(n-1)\frac{\lambda}{1+a}.$$

Все другие простые процессы имеют кинетический оператор бесконечного порядка.

Для дальнейшего выделим особо такие простые процессы, у которых временные константы $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda$. Формула (14) тогда принимает вид

$$W_2(\eta_1; \eta_2; t) = \delta(\eta_1 - \eta_2) W(\eta_1) e^{-\lambda t} + W(\eta_1) W(\eta_2) (1 - e^{-\lambda t}). \quad (15)$$

Процесс с таким двумерным распределением можно назвать скачкообразным. Он совершает скачки от одного значения к другому в распределенные по Пуассону моменты времени, причем его значение после скачка не зависит от предыдущих и имеет произвольную плотность вероятности* $W(\eta)$.

4. ТОЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ ЦЕПНОЙ ДРОБИ

Рассмотрим стохастическую систему (2) с дифференциальным оператором

$$L \left[\eta(t); \frac{d}{dt} \right] = L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) + \sum_{i,j} a_{ij} \left(\frac{d}{dt} \right)^i \eta(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^j. \quad (16)$$

Это произвольный оператор, зависящий от параметра $\eta(t)$ линейно.

В том случае, когда $\eta(t)$ является простым марковским процессом, среднюю передаточную характеристику можно вычислить по формуле (7) точно. Действительно, оператор $L[D; p + H]$ ввиду линейной зависимости от D , а также диагональности матрицы H представляет собой

* Определенный соотношением (15) процесс известен под названием процесса Кубо—Андерсона (см., например, [14]).

матрицу специального вида (8), имеющую ненулевые элементы лишь на главной и двух соседних с ней диагоналях. Поэтому матричный элемент (7) можно выразить аналогично (10), (11) цепной дробью. В результате для средней передаточной характеристики стохастической системы (16) получаем

$$\bar{K}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n M(p + \lambda_{n-1}; p + \lambda_n) M(p + \lambda_n; p + \lambda_{n-1})}{L_0(p + \lambda_n) + S_n M(p + \lambda_n; p + \lambda_n)}, \quad (17)$$

где $M(p, q) \equiv \sum_{ij} a_{ij} p^i q^j$, а «числитель» при $n = 0$ равен единице по определению. Соотношение (17) — один из основных результатов данной работы*.

Конечно, точное выражение (17) в общем случае достаточно сложно для анализа. Можно, однако, отметить ряд случаев, когда оно значительно упрощается. Выберем, например, в качестве модели реального процесса $\eta(t)$ такую, когда $R_N = 0$ при некотором N . Цепные дроби (11) и (17) становятся при этом конечными, а функция $h(z)$ — дробно-рациональной. Последнее, как видно из (10), (11), означает, что распределение, у которого $R_N = 0$, состоит из N атомов, т. е. одномерная плотность вероятности простого процесса $\eta(t)$ равна сумме N δ -функций. Таким образом, выбор данной модели соответствует определенному «квантованию» реального процесса. В частности, при $N = 2$ получим из (17) формулу для дихотомического марковского процесса $\eta(t)$ (с параметрами $R_1 = \sigma^2$, $S_0 = 0$, $S_1, \lambda_1 = \lambda$):

$$\bar{K}(p) = \left\{ L_0(p) - \sigma^2 \frac{M(p; p + \lambda) M(p + \lambda; p)}{L_0(p + \lambda) + S_1 M(p + \lambda; p + \lambda)} \right\}^{-1}. \quad (18)$$

Эта формула обобщает соотношение, найденное в упоминавшейся работе [6] для осциллятора с «дихотомической» частотой. Выражение (18), являющееся точным для дихотомического параметра, в ряде случаев может служить достаточно хорошим приближением и для произвольно распределенного параметра. Оно известно как приближение Бурре [9] (см. также пример 2). Последовательно усложняя модель процесса $\eta(t)$, можно получить целый ряд соответствующих точных результатов для средних характеристик стохастической системы, которые могут быть лучшими, чем приближение Бурре (в частности, например, нетрудно получить приближение Крейчнана [10]). Вместе с тем, рассмотренная процедура получения приближений проливает свет на «физический смысл» указанных приближений.

Если простой процесс $\eta(t)$ является скачкообразным (с двумерным распределением (15)), цепная дробь (17) легко выражается через его функцию $h(z)$:

$$\bar{K}^{-1}(p) = L_0(p) - \frac{M(p; p + \lambda) M(p + \lambda; p)}{M(p + \lambda; p + \lambda)} \{A(p) + h^{-1}(A(p))\}, \quad (19)$$

где $A(p) \equiv L_0(p + \lambda) M^{-1}(p + \lambda; p + \lambda)$.

* Заметим, что в упоминавшейся работе [12] получено операторное представление случайной величины с вероятностным распределением, которому можно сопоставить следующие константы: $S_n = 0$, $R_n = \sigma^2 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$, однако соответствующие стохастические λ -процессы изучались в [12] с точки зрения ОП только в трех случаях: $\lambda = 1; 0; -1$. Точные результаты были найдены лишь при $\lambda = 0; -1$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Система первого порядка:

$$\left[\frac{d}{dt} + b + \eta(t) \right] x(t) = f(t), \quad (20)$$

где $\eta(t)$ — простой марковский процесс. Формула (17) в данном примере принимает вид

$$K(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{p + b + S_n + \lambda_n} = \left\langle \frac{1}{p + b + \eta'} \right\rangle, \quad (21)$$

где случайная величина η' имеет распределение с константами $R'_n = R_n$, $S'_n = S_n + \lambda_n$. Отсюда ясно, что среднее (при $f \equiv 0$) можно записать как

$$\langle x(t) \rangle = x(0) e^{-bt} \langle e^{-t\eta'} \rangle \quad (t > 0).$$

Нетрудно найти условия стохастической устойчивости рассматриваемой системы в смысле k -го момента:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^2 R_n}{k(b + S_n) + \lambda_n} < \infty. \quad (22)$$

Следующие из (22) точные условия стохастической устойчивости системы (20) при различных вероятностных распределениях флюктуирующего параметра $\eta(t)$ приведены в табл. 1 (R , S — константы этих распределений вычислены в разд. 2). Дисперсия σ^2 и время корреляции λ^{-1} во всех случаях полагаются одинаковыми.

Таблица 1

Вероятностное распределение параметра, R , S — константы	Условия стохастической устойчивости системы (20)
1. Пуассоновское	при $\gamma > 0$ система устойчива по любому моменту, если $b > \sigma^2/\gamma$; при $a \leq 0$ и любом b все моменты, начиная с некоторого, неустойчивы
$W(\eta) = e^{-\frac{\sigma^2}{\gamma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\sigma^2}{\gamma^2} \right)^k \delta \left(\eta - k \gamma + \frac{\sigma^2}{\gamma} \right)$, $R_n = n \sigma^2$, $S_n = n \gamma$;	$b > \frac{k \sigma^2}{k \gamma + \lambda}$
случай $\gamma \rightarrow 0$ соответствует переходу к гауссовой форме:	$b > \frac{k \sigma^2}{\lambda}$
$W(\eta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2} \right)$; $R_n = n \sigma^2$, $S_n = 0$	$b > \frac{\lambda}{2k} \left(\sqrt{1 + \frac{4k^2\sigma^2}{\lambda^2}} - 1 \right)$
2. Альтернативное симметричное (дихотомический процесс)	$b > \frac{\lambda}{k} \left(\sqrt{1 + \frac{2k^2\sigma^2}{\lambda^2}} - 1 \right)$.
$W(\eta) = \frac{1}{2} \delta(\eta - \sigma) + \frac{1}{2} \delta(\eta + \sigma)$ (рис. 1а), $R_1 = \sigma^2$, $R_n = 0$ при $n \geq 2$, $S_n = 0$	$b > \sigma \frac{\sigma k}{\lambda}$ при $\frac{\sigma k}{\lambda} \ll 1$;
3. $W(\eta) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\sigma^2 - \eta^2}}$ (рис. 1б), $R_1 = \sigma^2$, $R_n = \frac{\sigma^2}{2}$ при $n \geq 2$, $S_n = 0$	$b > \sigma$ при $\frac{\sigma k}{\lambda} \gg 1$
4. $W(\eta) = \frac{1}{\pi \sigma} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{4\sigma^2}}$ (рис. 1в), $R_n = \sigma^2$, $S_n = 0$	

Пример 2. Система второго порядка (осциллятор):

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2(1 + \eta(t)) \right] x(t) = \delta(t), \quad (23)$$

где $\eta(t)$ есть опять простой марковский процесс. Напишем также вытекающее из (23) уравнение для $x^2(t)$:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{dt^2} + 4\omega_0^2 \right) + 2\omega_0^2 \left[\eta(t) \frac{d}{dt} + \frac{d}{dt} \eta(t) \right] \right\} x^2(t) = 2\delta(t). \quad (24)$$

Рассмотрим приближения Бурре для стохастических уравнений (23), (24) и покажем, как на основе точной формы (17) могут быть выведены условия применимости приближений.

Сделаем предварительно следующие предположения. Во-первых, будем считать, что $1 + S_n \geq 0$. Так как константы S_n характеризуют асимметрию распределения, то условия $1 + S_n \geq 0$ означают, что положительные значения квадрата частоты $\omega_0^2[1 + \eta(t)]$ более вероятны, чем отрицательные. Во-вторых, примем, что выполняются соотношения $a_n \equiv \frac{R_n}{R_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^4 \leq 1$. (Это слабые ограничения, например, для нормального процесса $a_n = 1/n^3$.) Заметим, что эти условия не являются совершенно необходимыми, а приняты для упрощения оценок. В-третьих, примем, что $\lambda_1 + R p_0 > 0$, где p_0 — те полюсы средней передаточной характеристики, которые при $R_1 = \sigma^2 \rightarrow 0$ переходят в нули $L_0(p)$.

Запишем $\bar{K}(p)$ для уравнения (23) в виде

$$\bar{K}^{-1}(p) = (p^2 + \omega_0^2) - \sigma^2 \omega_0^4 ((p + \lambda_1)^2 + \omega_0^2(1 + S_1) - \Delta(p))^{-1}$$

и рассмотрим поправку $\Delta(p)$ к приближению Бурре, соответствующему $\Delta(p) = 0$. Очевидно, можно пренебречь этой поправкой, если она много меньше свободного члена в полиноме $(p + \lambda_1)^2 + \omega_0^2(1 + S_1)$, т. е. если $|\Delta(p_0)| \ll \lambda_1^2$. Используя (17) и сделанные выше предположения, можно найти следующую оценку:

$$\frac{\Delta(p_0)}{\lambda_1^2} < \sigma^2 \left(\frac{\omega_0}{\lambda_1} \right)^4 \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{1},$$

где $\alpha \equiv \frac{R_3}{2R_1} \sigma^2 \left(\frac{\omega_0}{\lambda_1} \right)^4$, $\beta \equiv \frac{R_2}{R_1}$, причем β и $\frac{R_3}{2R_1}$ — коэффициенты порядка единицы. Отсюда заключаем, что достаточное условие применимости приближения Бурре для уравнения (23) есть

$$\sigma^2 (\omega_0 \tau)^4 \ll 1,$$

где через $\tau \equiv \lambda_1^{-1}$ обозначено время корреляции марковского процесса $\eta(t)$. Для уравнения (24) получим аналогичное условие

$$\sigma^2 (2\omega_0 \tau)^2 \ll 1.$$

Если первоначальное предположение $1 + S_n \geq 0$ заменить на $S_n \geq 0$ (которое выполняется для любого симметричного распределения), то можно получить более мягкие условия:

$$\sigma^2 \frac{(\omega_0 \tau)^4}{1 + (\omega_0 \tau)^2} \ll 1, \quad \sigma^2 \frac{(2\omega_0 \tau)^2}{1 + (2\omega_0 \tau)^2} \ll 1. \quad (25)$$

Эти условия менее жесткие в области медленных флуктуаций частоты, где большее значение приобретают детали распределения $\eta(t)$ (и, следовательно, существенней разница между предположениями $1 + S_n \geq 0$ и $S_n \geq 0$). Другое, сделанное вначале, предположение $\lambda_1 + \operatorname{Re} p_0 > 0$ означает, что время корреляции процесса $\eta(t)$ должно быть меньше характерного времени диссипации в системе (23).

Пример. 3. В последнем примере проанализируем стохастическую устойчивость осциллятора (23) в среднем квадратичном (или, что то же самое, устойчивость системы (24) в среднем) и сравним три различных случая, когда параметр $\eta(t)$ есть скалярный процесс с одним из следующих трех (существенно негауссовых) распределений —

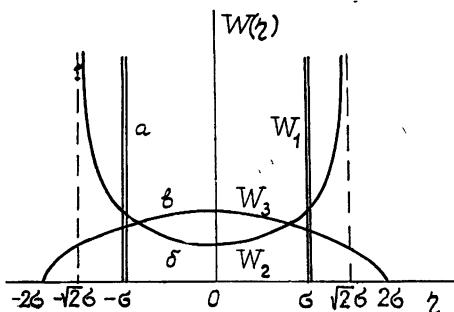


Рис. 1.

$$W_2(\eta) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\sigma^2 - \eta^2}}, \quad W_3(\eta) = \frac{1}{\pi\sigma} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{4\sigma^2}}, \quad (26)$$

изображенных на рис. 1. Здесь повсюду σ^2 — дисперсия. Эти распределения имеют следующие функции $h(z)$:

$$h_1(z) = \frac{z}{\sigma^2 - z^2}, \quad h_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{z^2 - 2\sigma^2}}, \\ h_3(z) = \frac{1}{2\sigma^2} \{ \sqrt{z^2 - 4\sigma^2} - z \}. \quad (27)$$

Дисперсию и время корреляции λ^{-1} во всех трех случаях будем считать одинаковыми. Подставляя (27) в (19) и полагая $\bar{K}^{-1}(p) = 0$, найдем уравнения для полюсов средней передаточной характеристики системы (24):

$$1) \sigma^2 = \frac{p(p+\lambda)(p^2+4\omega_0^2)[(p+\lambda)^2+4\omega_0^2]}{4\omega_0^4(2p+\lambda)^2} \equiv f(p),$$

$$2) \sigma^2 = f(p) \left\{ 1 - \frac{2p(p+\lambda)(p^2+4\omega_0^2)}{(2p+\lambda)^2[(p+\lambda)^2+4\omega_0^2]} \right\},$$

$$3) \sigma^2 = f(p) \left\{ 1 - \frac{4p(p+\lambda)(p^2+4\omega_0^2)}{(2p+\lambda)^2[(p+\lambda)^2+4\omega_0^2]} \right\}.$$

Каждое из этих уравнений имеет один действительный положительный корень, величина которого определяет степень неустойчивости осциллятора в среднем квадратичном. Обозначим эти корни соответственно через p_1, p_2, p_3 . Сравнивая правые части уравнений, нетрудно видеть, что при заданном значении σ^2 $p_1 < p_2 < p_3$.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что (при фиксированных дисперсии и времени корреляции) к более сильной стохастической неустойчивости в данном случае приводит распределение параметра $\tilde{W}_3(\eta)$ (рис. 1) с более далекими «хвостами». Примеры показывают также, что в ряде задач принятая модель флуктуаций параметра системы оказывается более легкой для строгого анализа, чем традиционная гауссова модель.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 4 (1974).
2. Л. А. Апресян, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 2 (1974).
3. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 2 (1975).
4. Г. Н. Бочков, А. А. Дубков, А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
5. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
6. R. C. Bourret, U. Frisch and A. Pouquet, Physica, 65, 2 (1973).
7. M. Auvergne and A. Pouquet, Physica, 66, 2 (1973).
8. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, Основы теории специальных функций, изд. Наука, М., 1974.
9. R. C. Bourret, Canad. J. Phys., 40, 782 (1962).
10. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., 2, 124 (1961).
11. Ж. Эмх, Алгебраические методы в статистической физике и квантовой теории поля, изд. Мир, М., 1976.
12. U. Frisch and R. Bourret, J. Math. Phys., 11, 364 (1970).
13. R. Bourret, Phys. Lett., 12, 323 (1964).
14. A. Brissaud and U. Frisch, J. Math. Phys., 15, 524 (1974).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 февраля 1976 г.,
после доработки
23 ноября 1976 г.

OPERATOR METHODS OF ANALYSING STOCHASTIC NON-GAUSSIAN PROCESSES AND SYSTEMS

Yu. E. Kuzovlev, G. N. Bochkov

The methods of describing and analysing the stochastic processes and systems based upon representation of the stochastic means as the matrix elements of linear operators and using a formal apparatus of the quantum theory are suggested. The methods leads to building exact solutions (as chain fractions) for the mean characteristics of linear systems with fluctuating parameters which represent themselves Markov's processes with arbitrary one-dimensional probability distributions and time correlations. It is shown that new parameters of probability distributions differing from the moments and cumulants enter the exact solutions in the most simple fashion. Just these constants of distributions are put in the forefront at a common operator description of non-Gaussian random processes and systems. By the example of a fluctuating (according to the arbitrary law) frequency, oscillator the applicability conditions of the Burre approximation are found by comparing with the exact result. The conditions of the stochastic stability of the first and second order systems with non-Gaussian parameter fluctuations are obtained.

УДК 538.56 : 519.25

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ, ФЛУКТУИРУЮЩИМ ПО ЗАКОНУ ПУАССОНА

М. И. Калинин

Рассматривается линейная динамическая система, возмущение которой описывается одним флюктуирующим параметром. Изменение этого параметра во времени представляет собой последовательность одинаковых по форме импульсов, центры которых статистически независимы между собой и число импульсов распределено по закону Пуассона. Исходя из уравнения Дайсона в одногрупповом приближении, выводится кинетическое уравнение для энергетических величин динамической системы. Коэффициенты этого кинетического уравнения выражены через амплитуду параметрического возбуждения колебаний динамической системы одиночным импульсом. Методом мажорантного процесса находятся предельные условия применимости полученного кинетического уравнения в зависимости от плотности импульсов на оси времени, их длительности и амплитуды.

В работе [1] произведено упрощение уравнения Дайсона, взятого в одногрупповом приближении и составленного для второго статистического момента линейной динамической системы с одним параметром, флюктуирующими по произвольному закону. Упрощение произведено путем пренебрежения запаздыванием (переход к уравнению Кубо) и применения процедуры усреднения по времени. На таком пути удается получить строгие оценки погрешности каждого из упомянутых приближений*. В результате указанного упрощения получена замкнутая система уравнений для диагональных элементов второго статистического момента невырожденной динамической системы, имеющих энергетический смысл. В случае, когда параметр флюктуирует по гауссову закону, система уравнений для диагональных элементов принимает вид кинетического уравнения.

В данной работе рассматривается другой интересный с физической точки зрения закон флюктуаций параметра динамической системы, когда изменение этого параметра во времени представляет собой последовательность одинаковых некоррелированных импульсов произвольной формы, длительности и амплитуды.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем динамическую систему, которая описывается стохастическим линейным дифференциальным уравнением в векторной форме с начальным условием

$$\frac{dz(t)}{dt} = [A + B\theta(t)]z(t), \quad z > 0; \quad z(0) = z_0. \quad (1)$$

* Усреднение по времени применяется также и непосредственно к стохастическому уравнению. В [2] качественно показано, что в случае гауссовых флюктуаций параметров результаты такого подхода и способа, предлагаемого в [1], совпадают.

Здесь $z(t)$ — вектор с компонентами $z_1(t), \dots, z_N(t)$. Матрица A невозмущенной динамической системы является диагональной и невырожденной,

$$A = \text{diag}(i\omega_1, i\omega_2, \dots, i\omega_N), \quad \omega_j \neq \omega_k, \quad \text{если } j \neq k. \quad (2)$$

Матрица B и вектор z_0 постоянны и неслучайны. Случайный процесс $\theta(t)$ задается в виде суммы последовательности импульсов

$$\theta(t) = \sum_{j=1}^n \theta_0(t - t_j) \quad (3)$$

и считается стационарным пуассоновским процессом [3] со средней плотностью импульсов на оси времени, равной n_1 . Как известно, кумулятивные функции такого пуассоновского процесса (3) равны

$$g_s(t_1, \dots, t_s) = n_1 \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(t_1 - t) \dots \theta_0(t_s - t) dt, \quad s = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Уравнением вида (1) описываются, например, маятниковые системы, применяемые в сейсмологии, гравиметрии, гравитационных экспериментах, при воздействии импульсного шума на подвес. Так, вертикальные флуктуации положения точки подвеса физического маятника приводят к соответствующим флуктуациям квадрата его собственной частоты.

Исследование поведения динамической системы (1) со случайным параметром $\theta(t)$ в виде суммы последовательности импульсов (3) связано с более простой задачей о параметрическом возбуждении колебаний динамической системы одиночным импульсом.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОДИНОЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ

Пусть параметры динамической системы возмущены неслучайным одиночным импульсом $\theta_0(t)$ с центром в нулевой момент времени. В этом случае она описывается уравнением

$$\frac{dz(t)}{dt} = [A + B\theta_0(t)]z(t). \quad (5)$$

Начальное условие $z(\eta_0)$ задается в момент η_0 , предшествующий возникновению импульса, когда динамическая система не возмущена. Тогда колебания системы до момента начала возмущения являются свободными и описываются вектором $z_0(t) = \exp[A(t - \eta_0)]z(\eta_0) = e^{At}z_0$. Здесь введено обозначение $z_0 = \exp(-A\eta_0)z(\eta_0)$ для состояния свободной динамической системы в нулевой момент времени $t = 0$ при условии, что в начальный момент η_0 оно описывалось вектором $z(\eta_0)$.

Будем интересоваться состоянием динамической системы в момент t после выключения импульса, когда система снова становится свободной. В этом случае легко убедиться, что ряд теории возмущений для вектора $z(t)$, удовлетворяющего уравнению (5), можно представить в виде

$$z(t) = z_0(t) + e^{At} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-At''} T(t', t'') e^{At''} z_0, \quad (6)$$

где матрица $T(t, t')$ определяется из уравнения*

* Уравнение (7) аналогично уравнению Липмана—Швингера в квантово-механической теории рассеяния.

$$T(t, t') = 2B\theta_0(t)\delta(t-t') + B\theta_0(t) \int_{t'}^t dt'' \exp [A(t-t'')] T(t'', t') \quad (7)$$

и отлична от нуля только в области, где $\theta_0(t)$ и $\theta_0(t')$ не равны нулю*. Формула (6) аналогична результату вычисления функции Грина в задаче о квантовомеханическом рассеянии потока частиц на одиночном рассеивателе с заданным потенциалом через T -оператор (см. [4], стр. 168). Двойной интеграл в правой части (6) играет при этом роль амплитуды возбуждения колебаний одиночным импульсом.

Для величины $\hat{Z}(t) = z(t) \cdot z^*(t)$, представляющей тензорное (внешнее) произведение вектора состояния динамической системы на его комплексно-сопряженное значение, справедливо уравнение вида (5), где вместо матриц A и B следует поставить матрицы \hat{A} и \hat{B} (с четырьмя индексами), определяемые выражениями

$$\hat{A} = A \cdot I + I \cdot A^*, \quad \hat{B} = B \cdot I + I \cdot B^*.$$

Через I здесь обозначена единичная $N \times N$ матрица.

Поскольку $\hat{Z}(t)$ удовлетворяет уравнению вида (5), то его значение в момент t после выключения импульса $\theta_0(t)$ определяется выражением

$$\hat{Z}(t) = \hat{Z}_0(t) + e^{\hat{A}t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-\hat{A}t'} \hat{T}(t', t'') e^{\hat{A}t''} \hat{Z}_0. \quad (8)$$

Матрица $\hat{T}(t, t')$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{T}(t, t') = 2\hat{B}\theta_0(t)\delta(t-t') + \hat{B}\theta_0(t) \int_{t'}^t dt'' \exp [\hat{A}(t-t'')] \hat{T}(t'', t'). \quad (9)$$

Отметим свойство матрицы $\hat{T}(t, t')$, связанное с законом сохранения полной энергии динамической системы, равной сумме $\sum_{j=1}^N \hat{Z}_{jj}(t)$ диагональных элементов величины $\hat{Z}(t)$. Если система консервативна и матрица B антиэрмитова,

$$B_{jk} + B_{kj}^* = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, N,$$

то верно равенство

$$\sum_{l=1}^N \hat{T}_{jkl}(t, t') = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

которое можно назвать «условием унитарности». Оно получается из аналогичного равенства для матрицы \hat{B} и уравнения (9) для $\hat{T}(t, t')$.

Приведем здесь также интегральное соотношение** между $\hat{T}(t, t')$ и $T(t, t')$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-\hat{A}t'} \hat{T}(t', t'') e^{\hat{A}t''} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' [I \cdot e^{-A^*t''} T^*(t', t'')] \times$$

* Это следует из уравнения (7).

** Соотношение (11) играет решающую роль при выводе кинетического уравнения (23) и (25) в следующем разделе.

$$\begin{aligned} & \times e^{A^* t''} + e^{-At'} T(t', t'') e^{At''} \cdot I] + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-At'} T(t', t'') e^{At''} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \times \\ & \times e^{-A^*\tau'} T^*(\tau', \tau'') e^{A^*\tau''}. \end{aligned} \quad (11)$$

Это соотношение получится, если приравнять выражение (8) для $\hat{Z}(t)$ тензорному произведению выражения (6) для $z(t)$ на его комплексно-сопряженное значение, получившееся равенство умножить на матрицу $e^{-\hat{A}t}$ и использовать в нем в качестве начального условия $\hat{Z}_0 = I$.

Результаты этого раздела позволяют записать замкнутую систему дифференциальных уравнений для диагональных элементов $\langle \hat{Z}_{jj}(t) \rangle$ второго статистического момента динамической системы с флюкутирующим параметром $\theta(t)$, равным сумме (3), в виде кинетического уравнения.

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В работе [1] при исследовании второго статистического момента динамической системы (1) с параметром $\theta(t)$, флюкутирующим по произвольному закону, использовалось уравнение Дайсона с матричным массовым оператором $\hat{M}(t, t')$ в одногрупповом приближении, равным сумме ряда

$$\begin{aligned} \hat{M}(t, t') = & 2 \hat{B} g_1(t) \delta(t - t') + \hat{B} \exp[\hat{A}(t-t')] \hat{B} g_2(t, t') + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{s-1}} dt_s \hat{B} \exp[\hat{A}(t - t_1)] \hat{B} \dots \\ & \dots \hat{B} \exp[\hat{A}(t_s - t')] \hat{B} g_{s+2}(t, t_1, \dots, t_s; t'). \end{aligned} \quad (12)$$

В случае стационарного случайного процесса $\theta(t)$ матрица $\hat{M}(t, t')$ зависит только от разности аргументов t и t' . Если параметр $\theta(t)$ равен сумме (3) и его кумулянтные функции даются формулами (4), то ряд (12) сворачивается в конечное выражение

$$\hat{M}(t-t') = n_1 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{T}(t-t'+\tau, \tau) d\tau. \quad (13)$$

Как видим, существует простая связь матрицы $\hat{M}(t-t')$ с матрицей $\hat{T}(t, t')$, определяющей поведение величины $\hat{Z}(t)$ динамической системы при возмущении ее параметров одиночным импульсом $\theta_0(t)$.

Упрощение исходного уравнения Дайсона в [1] производится в представлении взаимодействия (медленных амплитуд),

$$\hat{Z}_D(t) = e^{\hat{A}t} \hat{R}_D(t).$$

В результате упрощения получено усредненное (по времени) уравнение для второго статистического момента динамической системы вида

$$\frac{d}{dt} \hat{R}_y(t) = \hat{C} \hat{R}_y(t), \quad \hat{R}_y(0) = \hat{Z}_0. \quad (14)$$

Матрица \hat{C} согласно формулам (12) и (11) из [1] имеет элементы

$$\hat{C}_{jklm} = \Delta(\omega_k - \omega_j + \omega_l - \omega_m) \int_0^\infty \exp[i(\omega_m - \omega_l)t] \hat{M}_{jklm}(t) dt, \quad (15)$$

где

$$\Delta(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 0 \\ 0, & \omega \neq 0 \end{cases}. \quad (16)$$

С помощью условия (2) невырожденности динамической системы из уравнения (14) с матрицей \hat{C} , равной (15), получается замкнутая система уравнений для диагональных элементов второго статистического момента как в представлении взаимодействия $\hat{R}_y(t)$, так и в обычном представлении $\hat{Z}_y(t)$. Запишем эту систему в обычном представлении:

$$\frac{d}{dt} \hat{Z}_{jj}^{(y)}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{C}_{jjkk} \hat{Z}_{kk}^{(y)}(t). \quad (17)$$

Подстановка формулы (13) в (15) дает

$$\hat{C}_{jjkk} = n_1 \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty d\tau \hat{T}_{jjkk}(t + \tau, \tau) = n_1 \int_{-\infty}^\infty dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \hat{T}_{jjkk}(t', t''). \quad (18)$$

Воспользуемся соотношением (11) между матрицами $\hat{T}(t, t')$ и $T(t, t')$. Его $jjkk$ -компоненты позволяют выразить коэффициенты \hat{C}_{jjkk} через амплитуду параметрического возбуждения S_{jk} колебаний импульсом $\theta_0(t)$:

$$\hat{C}_{jjkk} = 2n_1 \delta_{jk} \operatorname{Re} S_{jj} + n_1 |S_{jk}|^2, \quad (19)$$

где

$$S_{jk} = \int_{-\infty}^\infty dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \exp(-i\omega_j t') T_{jk}(t', t'') \exp(i\omega_k t''). \quad (20)$$

Если матрица B антиэрмитова, то из условия унитарности (10) для $\hat{T}(t, t')$ и равенства (18) находим

$$\sum_{k=1}^N \hat{C}_{jjkk} = 0. \quad (21)$$

Подставляя (19) в (21), получаем условие унитарности для матрицы $T(t, t')$ в виде

$$2 \operatorname{Re} S_{jj} = - \sum_{k=1}^N |S_{jk}|^2. \quad (22)$$

Подстановка выражений (19) и (22) в уравнение (17) дает непосредственно кинетическое уравнение

$$\frac{d}{dt} \hat{Z}_{jj}^{(y)}(t) = \sum_{k=1}^N W_{jk} [-\hat{Z}_{jj}^{(y)}(t) + \hat{Z}_{kk}^{(y)}(t)], \quad (23)$$

где коэффициенты W_{jk} равны

$$W_{jk} = n_1 |S_{jk}|^2. \quad (24)$$

Когда матрица B не является антиэрмитовой, уравнения (17) приводятся к виду

$$\frac{d}{dt} \hat{Z}_{ji}^{(y)}(t) = \sum_{k=1}^N W_{jk} [-\hat{Z}_{jj}^{(y)}(t) + \hat{Z}_{kk}^{(y)}(t)] + \gamma_j \hat{Z}_{ji}^{(y)}(t), \quad (25)$$

где коэффициенты γ_j равны

$$\gamma_j = 2n_1 \operatorname{Re} S_{jj} + n_1 \sum_{k=1}^N |S_{jk}|^2. \quad (26)$$

Этот случай соответствует неконсервативной динамической системе, полная энергия которой не сохраняется.

Кинетическое уравнение (23) описывает процесс перераспределения энергии между степенями свободы динамической системы. Коэффициенты W_{jk} характеризуют скорость такого обмена энергиями. При этом полная энергия динамической системы сохраняется.

Равенства (24) и (26) для коэффициентов W_{jk} и γ_j показывают, что задача исследования средних энергетических характеристик динамической системы (1) с флюктуирующими параметром $\theta(t)$, равным (3), сводится к определению амплитуды параметрического возбуждения колебаний этой системы неслучайным импульсом $\theta_0(t)$.

Кинетические уравнения (23) и (25) являются приближенными. Для выяснения условий их применимости необходимо оценить погрешность, возникающую при переходе к усредненному по времени уравнению для второго статистического момента.

4. ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

В [1] получены оценки абсолютных погрешностей, возникающих на упомянутых во введении этапах упрощения уравнения Дайсона в одногрупповом приближении и погрешности самого одногруппового приближения. Суммируя их, получаем общую оценку абсолютной погрешности применения усредненного по времени уравнения (14)

$$\| \langle \hat{Z}(t) \rangle - \hat{Z}_y(t) \|_2 \leq \left[\frac{2t_0}{t_m} \left(1 + \frac{4t}{t_m} \right) + \frac{8N^2}{\Omega t_m} \left(1 + \frac{2t}{t_m} \right) \right] \exp(2t/t_m) \| \hat{Z}_0 \|_2. \quad (27)$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках в (27) оценивает погрешности перехода к одногрупповому приближению в уравнении Дайсона и перехода от уравнения Дайсона к уравнению Кубо [1]. Второе слагаемое оценивает погрешность процедуры усреднения по времени.

Марковское время релаксации t_m и временной масштаб флюктуаций t_0 параметра динамической системы определены формулами (7) и (8) из [1] и выражаются через абсолютные значения кумулянтных функций случайного процесса $\theta(t)$, Ω — минимальная вторая разность частот динамической системы, отличная от нуля:

$$\Omega = \min_{\{j, k, l, m\}} |\omega_k - \omega_j + \omega_l - \omega_m| \neq 0. \quad (28)$$

Эрмитова норма $\| \dots \|_2$ второго статистического момента равна корню квадратному из суммы квадратов модулей его элементов.

Для параметра $\theta(t)$, флюктуирующего по закону Пуассона (3) с кумулянтными функциями (4), величины t_m и t_0 оцениваются длительностью τ_0 одиночного импульса $\theta_0(t)$ и интенсивностью α возмущения параметров динамической системы этим одиночным импульсом с помощью следующих выражений:

$$\frac{2}{t_m} = n_1(e^\alpha - 1), \quad \frac{2t_0}{t_m} \leqslant 2n_1 \tau_0 \alpha^2 e^\alpha, \quad (29)$$

где τ_0 и α равны

$$\tau_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tau| |\theta_0(\tau)| d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} |\theta_0(\tau)| d\tau; \quad (30)$$

$$\alpha = 2 \|B\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |\theta_0(\tau)| d\tau. \quad (31)$$

Здесь $\|B\|_1$ — эрмитова норма матрицы, определяемая согласно [5].

С учетом (29) общая оценка (27) принимает вид

$$\begin{aligned} \|\langle \hat{Z}(t) \rangle - \hat{Z}_y(t)\| &\leqslant 2n_1 \alpha e^\alpha \left(\tau_0 \alpha + \frac{8N^2}{\Omega} \right) (1 + 2n_1 \alpha e^\alpha t) \times \\ &\times \exp(n_1 \alpha e^\alpha t) \|\hat{Z}_0\|_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда можно сформулировать два предельных условия применимости усредненного по времени уравнения (14).

Первое условие состоит в том, что плотность импульсов n_1 на оси времени стремится к нулю при ограниченном сверху выражении $n_1 \alpha e^\alpha t^*$ ($0 < t < t^*$). Иначе говоря,

$$n_1 \rightarrow 0, \quad n_1 \alpha e^\alpha t^* < \text{const}. \quad (33)$$

Согласно второму условию интенсивность α возмущения параметров одиночным импульсом стремится к нулю при ограниченности сверху того же выражения, что и в первом условии*:

$$\alpha \rightarrow 0, \quad n_1 \alpha e^\alpha t^* < \text{const}. \quad (34)$$

Условие (33) позволяет рассматривать возмущения параметров с произвольной конечной интенсивностью α импульсов, но при малой их плотности n_1 на оси времени. Условие (34) предполагает, что интенсивность α возмущения параметров одиночным импульсом $\theta_0(t)$ мала и допускает произвольную конечную плотность n_1 импульсов на оси времени.

Общая оценка (32) решает вопрос об условиях применимости кинетического уравнения (23) и (25) к отысканию диагональных элементов второго статистического момента, так как

$$|\langle \hat{Z}_{jj}(t) \rangle - \hat{Z}_{jj}^{(y)}(t)| \leqslant \|\langle \hat{Z}(t) \rangle - \hat{Z}_y(t)\|_2, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Отметим, что замкнутая система уравнений для диагональных элементов второго статистического момента получается лишь после применения процедуры усреднения по времени и является приближенной даже в случае дельта-коррелированности параметра.

* Может показаться, что при условии (34) второй статистический момент динамической системы достаточно точно представляется суммой его нескольких первых членов ряда теории возмущений, т. е. вычисляется методом малых возмущений. Однако на самом деле это, вообще говоря, не так, ибо условием применимости метода малых возмущений является $n_1 \alpha e^\alpha t^* \ll 1$.

Условие (34), предполагающее малую интенсивность α возмущения параметров системы одиночным импульсом, позволяет рассматривать случай, когда параметр $\theta(t)$, равный (3), можно считать гауссовым, не выходя за границы применимости кинетического уравнения. Действительно, согласно [3], случайный процесс (3) переходит в гауссов при $n_1 \tau_0 \gg 1$, что можно совместить с условием (34) при достаточно малой амплитуде одиночного импульса $\theta_0(t)$. В этом случае амплитуду параметрического возбуждения S_{jk} можно искать методом малых возмущений и ограничиться в ее разложении первым членом:

$$S_{jk} \approx B_{jk} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-i(\omega_j - \omega_k)t_1] \theta_0(t_1) dt_1, \quad (35)$$

Подставляя (35) в выражение (24), для W_{jk} , получаем

$$W_{jk} \approx |B_{jk}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp [i(\omega_j - \omega_k)t'] n_1 \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0(t' + \tau) \theta_0(\tau) d\tau. \quad (36)$$

Учитывая здесь выражение (4) для кумулянтных функций процесса (3), видим, что значения коэффициентов кинетического уравнения в пределе $n_1 \tau_0 \rightarrow \infty$ совпадают с их значениями (см. (20) из [1]), полученными для гауссовых флуктуаций параметра. Аналогичным способом получается выражение для коэффициентов γ_j в пределе $n_1 \tau_0 \rightarrow \infty$, которые, естественно, равны нулю, если матрица B является антиэрмитовой.

В заключение автор благодарит Ю. Н. Барабаненкова за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 20, № 3, 373 (1977).
2. C. Papapiccolaou and J. B. Keller, SIAM, J. Appl. Math., 21, № 2, 287 (1971).
3. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
4. Дж. Тейлор, Теория рассеяния, изд. Мир, М., 1975
5. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт метеорологической службы

Поступила в редакцию
15 марта 1976 г.,
после доработки
12 апреля 1977 г.

THE KINETIC EQUATION FOR A LINEAR DYNAMIC SYSTEM WITH THE PARAMETER FLUCTUATING ACCORDING TO POISSON LAW

M. I. Kalinin

A linear dynamic system which perturbation is described by one fluctuating parameter is considered. The change of this parameter in time represents itself a succession of equal-shape-impulses the centers of which are statistically independent of each other and the number of impulses is distributed according the Poisson law. Based upon the Dyson equation in the one-group approximation, the kinetic equation is deduced for the energetic values of the dynamic system. The coefficients of this kinetic equation are expressed through the amplitude of parametric excitation of oscillations of the dynamic system by a single impulse. The limit applicability conditions of the kinetic equation obtained as a function of the impulse density on the time axis, their duration and amplitude are found by the majorant process method.

УДК 538.56 : 519.25

СПОСОБ УМЕНЬШЕНИЯ СМЕЩЕНИЯ ОЦЕНКИ ДИСПЕРСИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЦЕНТРИРОВАННЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

И. И. Волков, В. К. Семенычев, В. В. Мотов

Предложен способ уменьшения смещения оценки дисперсии нецентрированных случайных процессов с математическим ожиданием, аппроксимируемым полиномом во времени.

Часто на практике случайные процессы описываются следующей моделью:

$$X(t) = \hat{X}(t) + m_x(t), \quad (1)$$

где $\hat{X}(t)$ — центрированная стационарная составляющая, $m_x(t) = \sum_{m=0}^{q-1} a_m t^m$, $q = 1, 2, \dots$, a_m — коэффициенты. Известный способ оценки дисперсии процессов такого класса требует последовательного включения центрирующего фильтра, квадратора, сглаживающего фильтра [1-3]. При стационарности $X(t)$ ($q = 1$, $m_x = \text{const}$) центрирование осуществляется при помощи фильтра с передаточной функцией $W_1(p) = \frac{T_1 p}{1 + T_1 p}$, постоянная времени которого для обеспечения малого смещения оценки дисперсии должна выбираться в десятки и сотни раз больше интервала корреляции, например, $\tau_k = \int_0^\infty |\rho_x(\tau)| d\tau$, сигнала $X(t)$

с нормированной корреляционной функцией $\rho_x(\tau)$ [1]. При $q > 1$ обращаются к еще более сложным в техническом отношении методам аппроксимации байесовских алгоритмов [2] к формированию при помощи устройства задержки кусочно-разностной последовательности q -го порядка сигнала $X(t)$ [3]. При этом центрирующий фильтр является наиболее сложным в технической реализации узлом, особенно в области инфразвуковых сигналов.

Высоких точностей при простой аппаратурной реализации центрирующего фильтра позволяет достичь метод оценки дисперсии σ_x^2 по блок-схеме рис. 1, где 1 — центрирующий фильтр с импульсной характеристикой $h(\tau)$, 2 — перемножитель, 3 — сглаживающий фильтр [4].

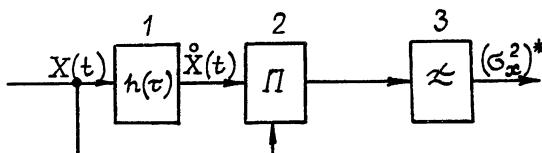


Рис. 1.

Полагая, что блоки 2 и 3 смещения в оценку дисперсии не вносят, получим следующее выражение для погрешности от смещенности, вызываемой центрирующим фильтром:

$$\gamma_c = \frac{M[(\sigma_x^2)^*] - \sigma_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{M \left[X(t) \int_0^\infty h(\tau) X(t-\tau) d\tau \right] - \sigma_x^2}{\sigma_x^2} = \gamma_{ct} + \gamma_{c0}, \quad (2)$$

где M — оператор математического ожидания; $\gamma_{ct} = \frac{m_x(t-\tau)}{\sigma_x^2} \int_0^\infty h(\tau) \times m_x(t-\tau) d\tau$ — составляющая погрешности от смещенности, зависящая от вида и параметров $m_x(t)$, $h(\tau)$; $\gamma_{c0} = \int_0^\infty h(\tau) \rho_x(\tau) d\tau - 1$ — составляющая погрешности от смещенности, зависящая от вида и параметров $\rho_x(\tau)$, $h(\tau)$.

С учетом (1) выражение для γ_{ct} представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma_{ct} &= \frac{m_x(t)}{\sigma_x^2} \int_0^\infty h(\tau) \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{j=0}^m a_m C_m^j (-1)^j t^{m-j} \tau^j d\tau = \\ &= \frac{m_x(t)}{\sigma_x^2} \sum_{j=0}^{q-1} C_j(t) \left[\int_0^\infty \tau^j h(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $C_j(t) = \sum_{m=j}^{q-1} a_m C_m^j (-1)^j t^{m-j}$, C_m^j — биноминальные коэффициенты.

Из выражения (3) видим, что, для того чтобы в рассматриваемом устройстве γ_{ct} равнялось нулю, следует выполнить следующие q условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty h(\tau) d\tau = 0, \\ \int_0^\infty \tau h(\tau) d\tau = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \int_0^\infty \tau^{q-1} h(\tau) d\tau = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Полагая $h(\tau) = \delta(\tau) - h_1(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция, получим, что γ_{c0} будет тем меньше, чем в большем диапазоне τ от 0 до, по крайней мере, τ_k функция $h_1(\tau)$ будет мало отличаться от нуля. Это условие будет выполнено, если обеспечить равенство нулю возможно большего числа производных $h_1(\tau)$ в точке $\tau = 0$:

$$h_1(\tau) = 0,$$

$$h_1^{(1)}(\tau) = 0,$$

$$h_1^{(2)}(\tau) = 0,$$

· · · · ·

Задача выбора $h(\tau)$ не имеет однозначного решения. Поставленным требованиям при простоте технической реализации удовлетворяет, например, импульсная характеристика канонического фильтра, состоящего из $(n+q)$ базовых фильтров нижних частот с постоянными временем T_0 и весового сумматора (см. рис. 2):

$$h(\tau) = \delta(\tau) + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(-1)^{k-1} C_{n+k}^k C_{n+q}^{n+k+1} \tau^{k+n}}{(k+n)! T_0^{k+n+1}} e^{-\tau/T_0}. \quad (5)$$

Здесь

$$-\sum_{k=0}^{q-1} \frac{(-1)^{k-1} C_{n+k}^k C_{n+q}^{n+k+1} \tau^{k+n}}{(k+n)! T_0^{k+n+1}} e^{-\tau/T_0} = -h_1(\tau).$$

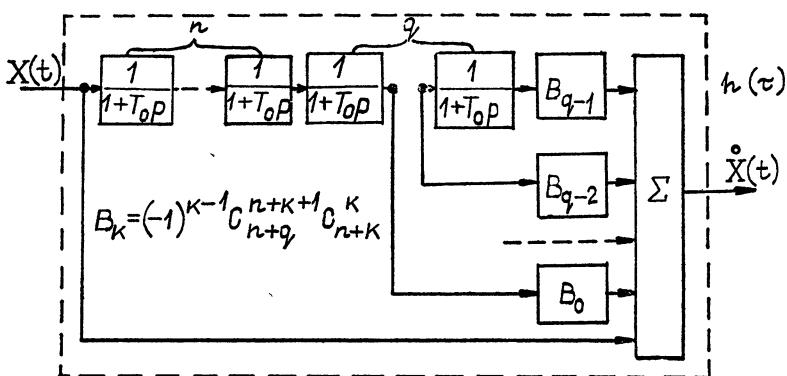


Рис. 2.

Число q базовых фильтров выбираем исходя из порядка полинома, описывающего закон изменения математического ожидания сигнала $X(t)$ на интервале наблюдения, а число n базовых фильтров определяется допустимым в измерениях значением γ_c , которое равно

$$\gamma_c = \gamma_{c0} = - \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k C_{q+n}^{n+k+1} \frac{C_{n+k}^k}{(k+n)!} \frac{1}{T_0^{k+n+1}} \int_0^\infty \tau^{k+n} e^{-\tau/T_0} \rho_x(\tau) d\tau. \quad (6)$$

При уменьшении порядка полинома условие $\gamma_{ct} = 0$ сохраняется, а γ_{c0} при данном n становится еще меньше.

Наибольшее значение γ_{c0} для встречающихся на практике видов корреляционных функций анализируемого сигнала имеет место при $\rho_x(\tau) = e^{-|\alpha|\tau}|$. Для этого случая на рис. 3 представлена зависимость γ_{c0} от величин αT , q , n . Из соотношения (6) и графиков на рис. 3 видно, что постоянная времени T_0 может быть довольно мала (соизмерима с τ_k), а обеспечение $\gamma_{c0} \rightarrow 0$ достигается увеличением числа n фильтров.

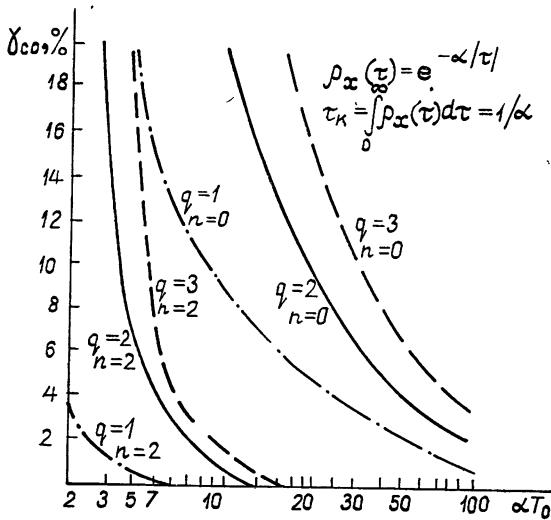


Рис. 3.

Для сравнения укажем, что значение γ_0 при $q=1, n=0$ ($m_x=\text{const}$, $\gamma_{ct}=0$) соответствует погрешности, достигаемой при постоянной времени $T_1=T_0$ центрирующего фильтра и стационарном процессе $X(t)$ дисперсиометром известной структуры.

Можно показать, что дисперсия оценки дисперсии данным методом при импульсной характеристике сглаживающего фильтра $3 h_2(\tau) = \frac{1}{T_2} e^{-\tau/T_2}$ не превысит величины

$$\begin{aligned}
 D &= \sigma_x^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_2) h_2(\tau_4) h(\tau_1) h(\tau_3) m_x(t-\tau_2) m_x(t-\tau_4) \times \\
 &\times \rho_x(\tau_3 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \sigma_x^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_2) h_2(\tau_4) h(\tau_1) h(\tau_3) \times \\
 &\times h(\tau_3) [\rho_x(\tau_2 - \tau_4) \rho_x(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4) + \rho_x(\tau_2 - \tau_3 - \tau_4) \rho_x(\tau_4 - \tau_1 - \tau_2)] \times \\
 &\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \leq \frac{4\sigma_x^2 \tau_K}{T_2} \left(\int_0^\infty |H(\tau)| d\tau \right) (m_{x\max}^2 + \sigma_x^2),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $H(\tau) = \int_0^\infty h(u) h(\tau+u) du$, $m_{x\max}$ — максимальное значение математического ожидания сигнала в установившемся режиме на интервале наблюдения.

Таким образом, центрирующий фильтр в предложенной структуре дисперсиометра эффективно уменьшает смещение оценки дисперсии, прост в аппаратурной реализации, требует знания лишь порядка полинома, аппроксимирующего $m_x(t)$, не требует перестройки при его уменьшении. Из (7) видно, что выбором величины постоянной времени T_2 сглаживающего фильтра 3 всегда возможно обеспечить заданную величину дисперсии оценки D .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выходной сигнал $Z(x)$ сглаживающего фильтра 3 равен

$$Z(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} m_x(t - \tau_2) h_2(\tau_2) \dot{X}(t - \tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) d\tau_2 d\tau_1 + \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_2) h(\tau_1) \dot{X}(t - \tau_2) \dot{X}(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Его дисперсия при условии, что $\int_0^{\infty} h_2(\tau) d\tau = 1$, равна

$$D_z = \sigma_x^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_2) h_2(\tau_4) h(\tau_1) h(\tau_3) m_x(t - \tau_2) m_x(t - \tau_4) \times \\ \times \rho_x(\tau_3 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 + \sigma_x^4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_2) h_2(\tau_4) h(\tau_1) h(\tau_3) \times \\ [\rho_x(\tau_2 - \tau_4) \rho_x(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 - \tau_4) + \rho_x(\tau_2 - \tau_3 - \tau_4) \rho_x(\tau_4 - \tau_1 - \tau_2)] \times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4.$$

Последнее выражение может быть использовано для точной оценки дисперсии предложенным способом. Однако желательно получить более простое выражение, оперирующее более общими характеристиками, например, такими, как τ_k , не требующее знания конкретного вида $\rho_x(\tau)$.

Принятая методика перехода к оценке сверху всех трех составляющих последнего выражения в принципе одинакова, поэтому рассмотрим ее лишь на одном примере.

$$\text{Делаем замену } \tau = \tau_3 - \tau_1, \quad \tau_3 = \tau + \tau_1, \quad H(\tau) = \int_0^{\infty} h(\tau_1) h(\tau + \tau_1) d\tau_1.$$

Тогда

$$\sigma_x^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_2) h_2(\tau_4) h(\tau_1) h(\tau_3) m_x(t - \tau_2) m_x(t - \tau_4) \rho_x(\tau_3 + \tau_4 - \tau_1 - \tau_2) \times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 = \sigma_x^2 \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau) \rho_x(\tau + \tau_4 - \tau_2) h_2(\tau_2) h_2(\tau_4) m_x(t - \tau_2) \times \right. \\ \times m_x(t - \tau_4) d\tau_2 d\tau_4 d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau) h_2(\tau_2) h_2(\tau_4) \rho_x(\tau_4 - \tau_2 - \tau) \times \\ \left. \times m_x(t - \tau_2) m_x(t - \tau_4) d\tau_2 d\tau_4 d\tau \right].$$

После замены $\tau_4 - \tau_2 = u$, $\tau_4 = u + \tau_2$

$$I_1 = 2\sigma_x^2 \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau) h_2(\tau_2) h_2(u + \tau_2) \rho_x(\tau + u) m_x(t - \tau_2) m_x(t - u - \tau_2) \times \right. \\ \times d\tau_2 d\tau du + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau) h_2(\tau_2) h_2(u + \tau_2) \rho_x(\tau - u) m_x(t - \tau_2) \times \\ \left. \times m_x(t - u - \tau_2) d\tau_2 d\tau du \right].$$

При $m_x(t) \leq m_{x \max}$, $h_2(\tau) = \frac{1}{T_2} e^{-\tau/T_2}$

$$\int_0^\infty h_2(\tau_2) h_2(u + \tau_2) m_x(t - \tau_2) m_x(t - u - \tau_2) d\tau_2 \leq m_{x \max}^2 h_2(u),$$

откуда

$$I_1 \leq 2\sigma_x^2 m_{x \max}^2 \left| \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(u) H(\tau) \rho_x(\tau + u) du d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(u) H(\tau) \rho_x(\tau - u) du d\tau \right| \leq \frac{4m_{x \max}^2 \sigma_x^2 \tau_k}{T_2} \int_0^\infty |H(\tau)| d\tau.$$

Во второй и третьей составляющих выражения для дисперсии оценки дисперсии предложенным методом используется соотношение

$$\int_0^\infty h_2(u + \tau_4) h_2(\tau_4) d\tau_4 = \frac{h_2(u)}{2} \quad \text{при } h_2(\tau) = \frac{1}{T_2} e^{-\tau/T_2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Я. Мирский, Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, изд. Энергия, М., 1972.
- А. Ф. Романенко, Г. А. Сергеев, Апроксимативные методы анализа случайных процессов, изд. Энергия, М., 1974.
- Ю. Я. Зотов, Ю. А. Шикунов, Авт. свид. № 228351, Офиц. бюллетень № 31, 1968, стр. 98.
- И. И. Волков, В. В. Мотов, С. А. Прохоров, В. К. Семенчев, Авт. свид. № 484527, Офиц. бюллетень № 34, 1975, стр. 118.

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию
23 февраля 1976 г.,
после доработки
22 марта 1977 г.

THE METHOD OF LESSENING THE BEAS MEASUREMENT OF DISPERSION OF ONE CLASS OF NON-CENTRARY AND NONSTATIONARY RANDOM PROCESSES

Volkov, I. I., Semenichev, V. K., Motov, V. V.

Propose the method to lessen beas measurement of dispersion non-centrarity random processes with mathematical expectation approximate polynomially in time.

УДК 522.2

СЛУЧАЙНЫЕ СМЕЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ФОКУСЕ ТЕЛЕСКОПА ПРИ ЛОКАЦИИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

В. Л. Миронов, В. В. Носов

Рассмотрены случайные смещения изображения объектов, лоцируемых в турбулентной атмосфере, в фокусе приемного телескопа. В качестве отражающих объектов выбраны зеркальный диск и уголковый отражатель. Показано, что в рассматриваемом приближении дисперсия смещений изображения диска равна удвоенной дисперсии смещений изображения источника, удаленного от телескопа на удвоенное расстояние. Явление компенсации смещений изображения уголка объясняется поворотом (при отражении) относительно оптической оси пространственного распределения поля падающей на уголок волны.

В связи с развитием лазерной локации возникает вопрос о флуктуациях параметров волн, отраженных от лоцируемых объектов в условиях турбулентной атмосферы.

В настоящей работе рассмотрены случайные смещения локационных изображений в фокусе приемного телескопа. В качестве отражающих объектов выбраны зеркальный диск и уголковый отражатель. Задача об отражении световой волны в случайно-преломляющей среде формулируется с помощью обобщенного на случай плавно-неоднородных сред принципа Гюйгенса — Френеля [1]. Функция Грина в соответствующем интегральном представлении для комплексной амплитуды поля задается в приближении геометрической оптики для флуктуаций фазы, а флуктуации амплитуды поля элементарного источника не учитываются.

Будем считать, что поле волны, падающей на отражатель, $u_i(x, \rho)$ имеет в начальной плоскости $x = 0$ комплексную амплитуду $u_0(\rho)$. В плоскость $x = \text{const}$ поместим отражатель, характеризуемый амплитудным коэффициентом отражения $R(\rho)$. Отраженное поле $u_r(x, \rho)$ попадает на приемную линзу телескопа, расположенную в плоскости $x = 0$. В результате в фокальной плоскости линзы, имеющей амплитудный коэффициент пропускания $T(\rho)$ и фокусное расстояние F , появляется некоторое поле.

Случайные смещения изображения отражателя будем характеризовать координатами центра тяжести ρ_c распределения интенсивности в фокальной плоскости телескопа. Аналогично [2] для вектора ρ_c можно получить следующее представление:

$$\rho_c = \frac{F}{ik} \frac{\int d^2 \rho u_r(x, \rho) T(\rho) \nabla_\rho [u_r^*(x, \rho) T(\rho)]}{\int d^2 \rho T^2(\rho) |u_r(x, \rho)|^2}, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Для того, чтобы найти величину $u_r(x, \rho)$, воспользуемся принципом Гюйгенса — Френеля и приближением френелевской дифракции. Согласно [3] комплексную амплитуду поля отраженной световой волны, прошедшей турбулентный слой толщиной x , можно записать в виде

$$u_r(x, \rho) = \frac{ke^{ikx}}{2\pi ix} \int d^2\rho' u_i(x, \rho') R(\rho') \times \\ \times \exp \left[\frac{ik}{2x} (\rho - \rho')^2 + \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_1 \left(\xi, \frac{\xi}{x} \rho + \left(1 - \frac{\xi}{x} \right) \rho' \right) \right], \quad (2)$$

где $\varepsilon_1(x, \rho)$ — флюктуирующая часть диэлектрической проницаемости среды. С помощью представления (2) удается количественно описать статистические характеристики флюктуаций интенсивности световой волны, распространяющейся без отражения [3, 4]. Для поля, падающего на отражатель, применим аналогичное приближение.

В качестве конкретного примера рассмотрим коллимированный световой пучок с начальным распределением поля $u_0(\rho) = u_0 \exp(-\rho^2/2a_i^2)$, где a_i — радиус пучка, падающий на отражатель с гауссовым коэффициентом отражения $R(\rho) = R_0 \exp(-\rho^2/2a_r^2)$ (a_r — радиус отражателя).

В приближении френелевской дифракции волны на излучающей апертуре и на отражателе, когда выполняются условия $ka_i^2/x \gg 1$, $ka_r^2/x \gg 1$, из соотношения (2) для $u_r(x, \rho)$ можно построить асимптотическое разложение по минимальному из параметров ka_i^2/x , ka_r^2/x . Подставив функции $u_0(\rho)$ и $R(\rho)$ в выражение (2), оценим члены предлагаемого разложения (начиная со второго) по среднеквадратическому отклонению. В результате находим, что при условиях $ka_i^2/x \gg 1$, $ka_r^2/x \gg 1$, $D_s(\sqrt{x\lambda}) \ll \pi$, где $D_s(\sqrt{x\lambda})$ — структурная функция флюктуаций фазы сферической волны, вычисленная на радиусе первой зоны Френеля, амплитуду отраженного поля можно записать следующим образом:

$$u_{r\pm}(x, \rho) = u_0(\rho) R(\rho) \times \\ \times \exp \left\{ i2kx + \frac{ik}{2} \int_0^x d\xi [\varepsilon_1(\xi, \rho) + \varepsilon_1(x - \xi, \pm \rho)] \right\}. \quad (3)$$

Представление $u_{r+}(x, \rho)$ справедливо для волны, отраженной плоским зеркальным диском. При отражении от уголкового отражателя (поле $u_{r-}(x, \rho)$) необходимо учесть поворот вокруг оси $0x$ на угол π пространственного распределения поля падающей на него волны. Последнее эквивалентно замене $u_i(x, \rho')$ на $u_i(x, -\rho')$ в выражении (2).

Подставим найденные представления для отраженного поля (3) в формулу (1), где примем $T(\rho) = T_0 \exp(-\rho^2/2a_t^2)$ (a_t — радиус телескопа). Для случайноговектора координат центра тяжести изображения отражателя в фокусе телескопа $\rho_{c\pm}$ в этом случае будем иметь

$$\rho_{c\pm} = -\frac{F}{2\pi a^2} \int_0^x d\xi \int d^2\rho \exp \left(-\frac{\rho^2}{a^2} \right) \nabla_\rho [\varepsilon_1(\xi, \rho) + \varepsilon_1(x - \xi, \pm \rho)],$$

где $1/a^2 = 1/a_i^2 + 1/a_r^2 + 1/a_t^2$.

При вычислении интересующих нас средних квадратов смещений изображений диска $\langle \rho_{c+}^2 \rangle$ и уголка $\langle \rho_{c-}^2 \rangle$ воспользуемся корреляционной функцией поля ε_1 , записанной в марковском приближении [5]. В результате после вычисления соответствующих интегралов будем иметь

$$\langle \rho_{c+}^2 \rangle = 2\pi x F^2 \int d^2 \mathbf{x} \Phi_e(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2 a^2}{2}\right), \\ \langle \rho_{c-}^2 \rangle \equiv 0, \quad (4)$$

где $\Phi_e(\mathbf{x})$ — трехмерный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости среды.

Из соотношений (4) следует, что в рассматриваемом приближении изображение углкового отражателя в фокусе телескопа не смещается. Это явление компенсации смещений обусловлено поворотом пространственного распределения поля падающей на уголок волны. Аналогичный результат отмечен в [6], где выражение для отраженного поля $u_r(x, \rho)$ было записано из качественных соображений.

Рассмотрим теперь смещения изображения диска. Спектральную плотность атмосферной турбулентности $\Phi_e(\mathbf{x})$ зададим с учетом внешнего масштаба [7]. В итоге получим

$$\langle \rho_{c+}^2 \rangle = 4 \frac{A_0 \pi^2 \Gamma(1/6)}{\sqrt{2}} C_e^2 x F^2 (2a)^{-1/3} [1 - (1 + \beta)^{-1/6}], \quad (5)$$

где $A_0 = 0,033$, $\beta = 2/x_0^2 a^2$, $x_0 = 2\pi/L_0$, L_0 — внешний масштаб атмосферной турбулентности, C_e^2 — структурная характеристика поля ϵ_1 . Из выражения (5) следует, что дисперсия смещений изображения диска в фокусе телескопа определяется наименьшим из радиусов a_i , a_r , a_t .

Представляется интересным сравнить выражение (5) для среднего квадрата смещений локационного изображения диска в фокусе телескопа с выражением, получающимся при замене диска на когерентный световой источник (коллимированный пучок) таких же размеров. Используя аналогичное (3) приближение для поля световой волны, прошедшей слой x турбулентной атмосферы, для среднего квадрата смещений изображения источника в фокусе телескопа $\langle \rho_{cl}^2 \rangle$ будем иметь

$$\langle \rho_{cl}^2 \rangle = \frac{A_0 \pi^2 \Gamma(1/6)}{\sqrt{2}} C_e^2 x F^2 (2a_0)^{-1/3} [1 - (1 + \beta_0)^{-1/6}], \quad (6)$$

где $1/a_0^2 = 1/a_s^2 + 1/a_t^2$, a_s — радиус источника ($a_s = a_r$), $\beta_0 = 2/x_0^2 a_0^2$.

Будем считать, что $a_0 = a$. Это равенство возможно, когда $a_i \gg a_r$ или $a_i \gg a_t$. Сравнивая выражения (5), (6), заметим, что для дисперсии угловых смещений локационного изображения диска $\sigma_+^2(x) = \langle \rho_{c+}^2 \rangle / F^2$ выполняется соотношение

$$\sigma_+^2(x) = 4 \sigma_i^2(x) = 2 \sigma_i^2(2x), \quad (7)$$

где $\sigma_i^2(x) = \langle \rho_{cl}^2 \rangle / F^2$ — дисперсия угловых смещений изображения источника.

Согласно (7) дисперсия смещений локационного изображения диска оказывается больше дисперсии смещений изображения источника, удаленного от телескопа на удвоенное расстояние. Это явление возникает в результате корреляции флуктуаций фазы падающей и отраженной волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 886 (1969).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

3. В. А. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 252 (1974).
4. В. А. Банах, В. Л. Миронов, Квантовая электроника, 2, № 10, 2163 (1975).
5. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
6. R. F. Lutomirski and R. E. Warren, Appl. Opt., 14, № 4, 840 (1975).
7. В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 247 (1974).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
21 июня 1976 г.

RANDOM IMAGE DISPLACEMENTS AT THE TELESCOPE FOCUS DURING
LOCATION IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

V. L. Mironov, V. V. Nosov

Random image displacements of objects located in the turbulent atmosphere at the focus of the receiving telescope are considered. Mirror disc and angular reflector are chosen as reflecting objects. It is shown that in the considered approximation the dispersion of displacements of the disc image is equal to the double dispersion of image displacements of the source far distant from the telescope at the double distance. The compensation phenomenon of displacement of the corner image is explained by rotation (at reflection) of spatial field distribution of a wave incident on the corner.

УДК 538.56 : 535

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ НЕКОГЕРЕНТНОГО СВЕТА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. ВЛИЯНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ОПАЛЕСЦЕНЦИИ

A. A. Бетин, Г. А. Пасманик

Резюмируются результаты теоретического анализа эффектов самовозействия в случайно-неоднородной среде с широкополосной и узкополосной индикаторами рассеяния. Найденные соотношения используются для исследования процесса самофокусировки в веществе, находящемся в околокритическом состоянии, когда, с одной стороны, нарастание флуктуаций показателя преломления приводит к увеличению порогов нелинейных эффектов, а с другой — аномальное изменение параметров среды ведет к их существенному снижению. Проведенные с учетом обоих факторов оценки для случая непрерывной стрикционной самофокусировки в растворах смесей показывают, что при температуре, близкой к критической, пороговая мощность самофокусировки может быть существенно уменьшена.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что случайные вариации показателя преломления оказывают существенное влияние на эффекты самовозействия световых пучков, сопровождающие прохождение мощного оптического излучения через конденсированные среды. При анализе физических особенностей указанных процессов удобно различать предельные случаи широкополосной и узкополосной индикаторов рассеяния на случайных неоднородностях среды по сравнению с диаграммой направленности исходного некогерентного пучка (соответственно мелко- и крупномасштабные флуктуации показателя преломления). В первом случае случайная неоднородность приводит к эффективному ослаблению основного лепестка диаграммы направленности и появлению широкого крыла из-за линейного рассеяния на мелкомасштабных флуктуациях. Закон ослабления основного лепестка, по крайней мере, на трассах, где это ослабление не превышает величины порядка $e^5 \div e^6$, можно считать экспоненциальным (закон Бугера) и процесс самовозействия описывать аналогично процессам в диссипативных средах [1]. Во втором случае из-за рассеяния на случайных неоднородностях происходит уширение диаграммы направленности светового пучка как целого по закону, близкому к диффузионному, и эффекты самовозействия на расстояниях, превышающих характерную длину линейного рассеяния, происходят так же, как в многомодовых пучках [2]. Для описания нелинейных эффектов в последнем случае удобно воспользоваться приближением, основанном на малости длины продольной корреляции флуктуаций линейной и нелинейной части показателя преломления по сравнению с характерным масштабом линейного рассеяния или нелинейного самовозействия волны.

Результаты теоретического анализа обоих предельных случаев резюмируются ниже и используются для исследования эффектов самовозействия в веществе, находящемся в околокритическом состоянии,

как с мелко-, так и с крупномасштабными флюктуациями показателя преломления (соответственно низко- и высокомолекулярные жидкости вблизи критической точки). Особенности таких процессов при $T \rightarrow T_c$ (T_c — критическая температура) связаны, во-первых, с резким возрастанием молекулярного рассеяния (критической опалесценции) и, во-вторых, с аномальным изменением параметров вещества (изотермической сжимаемости, удельной теплоемкости и других), определяющих пороги ряда нелинейных эффектов (стрикционная самофокусировка, тепловое самоиздействие волн и т. п.). В работе показано, что влияние указанных факторов может существенно изменить оценки для тех или иных нелинейных эффектов вблизи критической точки, а в некоторых случаях привести к значительному снижению пороговой мощности.

2. ВЫВОДЫ ТЕОРИИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Распространение электромагнитного излучения в нелинейной случайно-неоднородной среде можно описывать параболическим уравнением для комплексной амплитуды электрического поля \mathcal{E} , которое в системе координат r , $\eta = t - z/v_{tr}$ (v_{tr} — групповая скорость волны) имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} + \frac{ik \delta \epsilon^L}{2\epsilon^L} \right) \mathcal{E} = \frac{ik \epsilon^{NL}}{2\epsilon^L} \mathcal{E}, \quad (1)$$

где k — волновой вектор в среде, $\delta \epsilon^L = 2\delta n^L(r)$ — флюктуирующая часть диэлектрической проницаемости, связанная с не зависящими от поля (т. е. линейными) хаотическими неоднородностями показателя преломления, ϵ^{NL} — нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости ϵ^L , удовлетворяющая уравнению типа

$$\hat{M} \left(\frac{\partial}{\partial \eta}, \nabla_r \right) \epsilon^{NL} = g |\mathcal{E}|^2, \quad (2)$$

\hat{M} — линейный оператор, описывающий изменение ϵ^{NL} в слабом поле, g — коэффициент нелинейности, зависящий от конкретного характера нелинейного процесса. Рассмотрим подробнее оба предельных случая мелко- и крупномасштабных флюктуаций показателя преломления.

a) *Мелкомасштабные флюктуации.* Коэффициент экстинкции, характеризующий экспоненциальное ослабление интенсивности основной волны, определяется по формуле (без учета нелинейных эффектов) [3]

$$h = \frac{1}{V |\mathcal{E}|^2} \int d\theta' |\mathcal{E}'|^2 R_0^2, \quad (3)$$

где $|\mathcal{E}'|^2$ — интенсивность поля однократного рассеяния, R_0 — радиус-вектор от какой-либо точки внутри рассеивающего объема V до точки, в которой определяется поле \mathcal{E}' ; интегрирование ведется по всем направлениям.

Полагая флюктуации диэлектрической проницаемости статистически однородными и δ -коррелированными вдоль продольной координаты, примем

$$F_{\epsilon}(r - r') = \langle \delta \epsilon^L(r_{\perp}, z) \delta \epsilon^L(r'_{\perp}, z') \rangle = B_{\epsilon}(r_{\perp} - r'_{\perp}) \delta(z - z'), \quad (4)$$

где

$$B_{\epsilon}(r_{\perp} - r'_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' F_{\epsilon}(r - r'). \quad (5)$$

Тогда элементарный расчет показывает, что

$$h = \frac{k^2 B_e(0)}{4}. \quad (6)$$

Далее учтем то обстоятельство, что излучение, рассеянное на мелкомасштабных флюктуациях, т. е. рассеянное под углами $\theta \gg \theta_0$ (где θ_0 — расходимость входного пучка), имеет очень малый радиус поперечной корреляции ($\approx 1/k\theta$), и сколь-нибудь заметного эффекта самовоздействия этого излучения ожидать не приходится из-за относительно малой плотности мощности и большой расходимости [2]. Поэтому рассеяние на мелкомасштабных флюктуациях приводит к эффективному ослаблению основного излучения (т. е. излучения с угловым спектром, лежащим в пределах $k\theta_0$), самовоздействие которого можно описывать уравнением для диссипативных сред:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \mathcal{E} + \frac{1}{2} h \mathcal{E} = \frac{ik \epsilon^{NL}}{2\epsilon^L} \mathcal{E}. \quad (7)$$

Некоторые результаты численного исследования безынерционной самофокусировки ($\epsilon^{NL} \sim |\mathcal{E}|^2$) в диссипативной среде, приведенные в [1], позволяют заключить, что минимальную (критическую) мощность $P_{\text{кр. н}}$, при которой возможна самофокусировка одномодового светового пучка в случайно-неоднородной среде с мелкомасштабными флюктуациями $\delta\epsilon^L$, можно, аппроксимируя результаты расчетов на ЭВМ, оценить из соотношения

$$P_{\text{кр. н}}/P_{\text{кр.}} = 1 + 1,5 h z_d, \quad (8)$$

по крайней мере, вплоть до значений параметра $h z_d$ порядка 8–10 ($P_{\text{кр.}}$ — критическая мощность одномодового пучка в однородной среде,

$z_d = \frac{r_0}{\theta_d} = kr_0^2$ — дифракционная длина уширения луча). Для многомодовых пучков с расходимостью $\theta_0 \gg \theta_d$ при оценке $P_{\text{кр. н}}$ по формуле (8) следует: $z_d \rightarrow z_d^{\text{мн}} = r_0/\theta_0$ и $P_{\text{кр.}} \rightarrow P_{\text{кр. н}}^{\text{мн}}$, где $P_{\text{кр. н}}^{\text{мн}} = P_{\text{кр.}}(\theta_0/\theta_d)^2$ — минимальная мощность, при которой возможна самофокусировка многомодового пучка [2]. При $h z_d \geq 8-10$ зависимость $P_{\text{кр. н}}/P_{\text{кр.}}$ от параметра $h z_d$ переходит в близкую к квадратичной, что в асимптотике качественно согласуется с результатами аналитических расчетов, основанных на составлении и решении уравнения для эффективной ширины пучка (см. (9)) в поглощающей среде (С. Н. Власов, частное сообщение). В среде с инерционной нелинейностью ($\epsilon^{NL} \sim \int d\eta |\mathcal{E}|^2$) критическая энергия самовоздействия также остается практически неизменной при $h z_d < 1$, а при $h z_d > 1$ возрастает с увеличением параметра $h z_d$.

б) *Крупномасштабные флюктуации.* Исследование самофокусировки в случайно-неоднородных средах может быть проведено различными способами. Для среды с безынерционной нелинейностью удается составить уравнение для эффективной ширины пучка [6]

$$a^2 = \frac{\iint r_{\perp}^2 |\mathcal{E}|^2 d^2 r_{\perp}}{\iint |\mathcal{E}|^2 d^2 r_{\perp}}, \quad (9)$$

решение которого показывает, что при δ -коррелированных вдоль z флюктуациях диэлектрической проницаемости a^2 является полиномом

третьей степени от z^* . Другой способ основан на использовании различных вариантов теории возмущений, когда пренебрегается флюктуациями интенсивности и $\langle |\mathcal{E}|^2 \rangle$ заменяется на $\langle |\mathcal{E}|^2 \rangle$ [4, 5]. В этом случае, учитывая также условие (4), можно получить уравнение для некоторых усредненных величин и также найти закон изменения радиуса пучка.

Наконец, возможен подход, основанный на предположении о том, что изменение фазы или амплитуды поля, связанное с рассеянием волны на линейных и нелинейных (т. е. наведенных самой же волной) флюктуациях диэлектрической проницаемости, является малым на длине продольной корреляции излучения [2]. Закон распределения поля многомодового пучка при этом будет близок к нормальному (см. Приложение), что позволяет корреляционные функции высших порядков выразить через корреляционную функцию второго порядка и, тем самым, получить для нее замкнутое уравнение (см. Приложение). Тогда в безабберационном приближении для пучка с гауссовой корреляционной функцией в среде с инерционной нелинейностью $(\hat{M} = \frac{\partial}{\partial \eta} + T_2^{-1})$

в предположении слабой зависимости усредненных параметров поля от тонкой структуры индикаторы рассеяния можно получить уравнение для радиуса пучка $r_0(z, \eta)$ (см. Приложение):

$$\frac{\partial^2 r_0(z, \eta)}{\partial z^2} - \frac{1}{k^2 r_0^3(z, \eta)} \left[N(0) + k^2 d \int_0^z dz' r_0^2(z', \eta) \right] + \frac{v \epsilon^L r_0^2}{2k^2 P_{\text{кр}}^{\text{мн}} T_2} \times \\ \times r_0(z, \eta) \int_0^\eta \frac{B(\eta') \exp[-(\eta - \eta')/T_2] d\eta'}{r_0^4(z, \eta')} = 0, \quad (10)$$

где $d = \Delta_{\rho_\perp} B_{\epsilon| \rho_\perp=0}$, $N(0) = 4 \frac{\pi r_0^2}{\pi \rho_0^2}$ — среднее число неоднородностей

в пучке в плоскости $z = 0$. Это уравнение, фактически, обобщает результаты, полученные в [6], на среды с инерционной нелинейностью. Интересно отметить, что при $T_2 \rightarrow 0$ (10) совпадает также с уравнениями, полученными в [4, 5] для одномодового пучка со слабыми флюктуациями интенсивности.

При безинерционной нелинейности из уравнения (10) следует, что минимальная мощность, при которой возможна самофокусировка коллимированного пучка, оценивается по формуле

$$P_{\text{кр. н}}/P_{\text{кр. мн}} = 1 + \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} (z_n/z_a)^2, \quad (11)$$

где $z_n = (r_0^2/d)^{1/3}$ — характерная длина уширения пучка падающего излучения из-за наличия флюктуаций линейной части показателя преломления среды.

В нестационарном случае (инерционная нелинейность) формула (11) остается без изменения, только отношение $P_{\text{кр. н}}/P_{\text{кр. мн}}$ в левой части следует заменить на $W_{\text{кр. н}}^{\text{сл. н}}/W_{\text{кр. мн}}^{\text{сл. н}}$ ($W_{\text{кр. мн}}^{\text{сл. н}}$ — критическая энергия самофокусировки многомодового пучка для однородной среды). Из формул (8) и (11) следует, что при z_n , малом по сравнению с характерной длиной рассеяния (как на мелко-, так и крупномасштабных флюктуациях), влияние случайных неоднородностей практически не изменяет

* Этот вывод, полученный в рамках квазиоптического уравнения, годится как для мелкомасштабных, так и для крупномасштабных флюктуаций.

пороговую (или критическую) мощность (энергию), характеризующую эффекты самовоздействия. В обратном случае пороги нелинейных эффектов резко возрастают.

3. ЭФФЕКТЫ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ В ВЕЩЕСТВЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ОКОЛОКРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

На основании полученных выше результатов обсудим возможности эффективного самовоздействия волн в среде, температура которой близка к критической (например, незначительно превышает ее). Предположим, что изменение температуры из-за дополнительного нагрева среды при прохождении через нее светового пучка и смещение критической точки [3], вызванное нелинейными эффектами, малы по сравнению с разницей между исходной и критической температурами. В этом случае для оценки эффектов самовоздействия можно воспользоваться результатами предыдущего раздела, не исследуя детально процессов, происходящих в среде.

Для определения параметров, характеризующих молекулярное рассеяние, выпишем выражение для функции корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости. Рассмотрим для примера бинарный раствор вблизи критической точки, для которого функцию корреляции

$$F_\epsilon(\rho) = Y_c^2 \frac{\langle \delta c(r - \rho/2) \delta c(r + \rho/2) \rangle}{c^2} \quad (12)$$

(c и δc — соответственно средняя и возмущенная концентрации растворенного вещества, $Y_c = \left(c \frac{\partial \epsilon}{\partial c} \right)_{\rho, T}$) аппроксимируем приближенным выражением, принятым в классической теории Орнштейна—Цернике [7]:

$$F_\epsilon(\rho) = Y_c^2 \frac{k_B T \exp(-|\rho|/\rho_k)}{4\pi f^* |\rho|}, \quad (13)$$

где $\rho_k = (\beta_c f^*)^{1/2}$ — средний радиус корреляции, $\beta_c = \left(c \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{\rho, T}$ — производная от химического потенциала бинарного раствора по концентрации растворенного вещества, f^* — постоянная, характеризующая межмолекулярное взаимодействие, k_B — постоянная Больцмана.

При $T \rightarrow T_c$ значение $\beta_c \sim \tau^{-\gamma}$ ($\tau = \frac{T - T_c}{T_c}$, γ — критический показатель, равный примерно $1,2 - 1,4$ [7, 8]) стремится к бесконечности и, следовательно, $\rho_k \sim \tau^{-1/2}$ также неограниченно возрастает. Подставляя (13) в (5), найдем

$$B_\epsilon(\rho_\perp) = \frac{Y_c^2 k_B T}{2\pi f^*} K_0(|\rho_\perp|/\rho_k), \quad \Delta_{\rho_\perp} B_\epsilon = \frac{B_\epsilon(\rho_\perp)}{\rho_k^2}. \quad (14)$$

Здесь $K_0(x) = \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{ch} t) dt$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого порядка. Функция $B_\epsilon(\rho_\perp)$ логарифмически расходится при $|\rho_\perp| \rightarrow 0$ ($B_\epsilon(\rho_\perp) \sim \ln |\rho_\perp|$ при $|\rho_\perp| \rightarrow 0$) (рис. 1).

Из физических соображений, однако, очевидно, что мелкомасштабные возмущения плотности, скоррелированные на расстоянии, значительно меньшем λ , практически не дадут сколь-нибудь заметного вклада в интегральную интенсивность рассеянного излучения, так как в рамках применимости квазиоптического приближения рассеяние происходит, в основном, в направлениях, близких к оси пучка. Поэтому значение $K_0(|\rho_\perp|/\rho_k)|_{\rho_\perp=0}$ можно оценить, подставив вместо $\rho_\perp = 0$ величину $|\rho_\perp| = \lambda$. Результат не будет существенно зависеть от λ , поскольку для малых $|\rho_\perp|$ расходимость функции $K_0(\rho_\perp)$ — логарифмическая и $K_0(|\rho_\perp| \approx \lambda) \approx -\ln \lambda/\rho_k$. Так как практически по порядку величины значение ρ_k не очень сильно превышает λ , то можно считать, что $K_0(|\rho_\perp| = \lambda)$ составляет величину около единицы или нескольких единиц*.

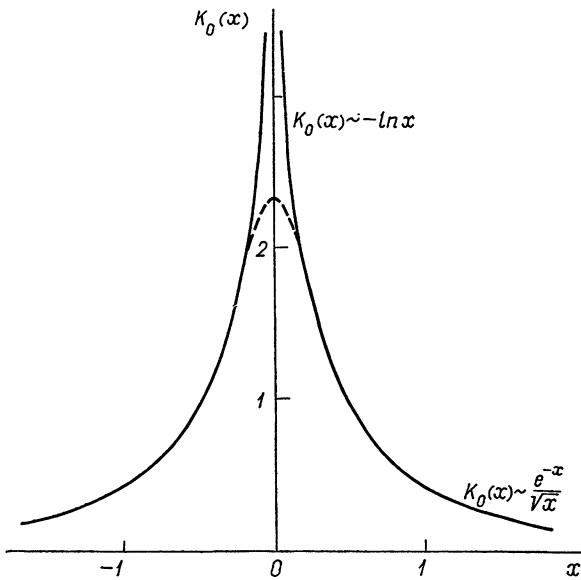


Рис. 1.

Рассмотрим далее отдельно рассеяние на мелко- и крупномасштабных флуктуациях.

Рассеяние на мелкомасштабных флуктуациях вблизи критических точек обычно происходит в низкомолекулярных жидкостях, у которых радиус действия межмолекулярных сил составляет величину порядка нескольких ангстрем. Действительно, аппроксимируя радиус корреляции соотношением [7]

$$\rho_k = l \tau^{-1/2} \quad (15)$$

* Устранение в окончательном результате логарифмической расходимости, связанной с недостатками квазиоптического описания рассеяния волн на флуктуациях диэлектрической проницаемости с функцией корреляции $B_e(|\rho_\perp| \rightarrow 0) \rightarrow \infty$, можно сделать иным путем, заменив просто функцию $B_e(\rho_\perp)$ на эффективную функцию $B_e^{\text{эфф}}(\rho_\perp)$, всюду совпадающую с $B_e(\rho_\perp)$, за исключением малого интервала $|\rho_\perp| < \lambda$ (см. пунктирную линию на рис. 1), соответствующую функции $B_e^{\text{эфф}}(\rho_\perp)$, причем из-за слабой логарифмической расходимости в нуле моменты $\iint \rho_\perp^m B_e(\rho_\perp) d^2 \rho_\perp$ с достаточно хорошей точностью совпадают с моментами $\iint \rho_\perp^m B_e^{\text{эфф}}(\rho_\perp) d^2 \rho_\perp$.

(l — радиус действия межмолекулярных сил вдали от критической точки), нетрудно заметить, что условие «мелкомасштабности» $\theta \gg \theta_0$ (θ — характерный угол, определяющий ширину диаграммы направленности рассеянного излучения), или $\rho_k \approx \lambda/\theta \ll \lambda/\theta_0$, выполняется для

$$\tau > \left(\frac{l\theta_0}{\lambda} \right)^{2/1}.$$

Для низкомолекулярных жидкостей ($l \sim 5 \text{ \AA}$) при $\theta_0 \approx 10^{-2}$ и $\lambda \approx 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$ получим $\tau > 10^{-7}$ (при $T_c \approx 300 \text{ K}$ это соответствует $\Delta T = T - T_c \gtrsim 3 \cdot 10^{-5} \text{ K}$). При выполнении последнего условия индикатриса рассеяния шире диаграммы направленности основного пучка.

Коэффициент экстинкции

$$h \approx \frac{k^2 Y_c^2 k_B T}{8\pi f^*} \sim \frac{k^2 Y_c^2 l}{8\pi} \quad \left(f^* \sim \frac{k_B T}{l} \right). \quad (16)$$

Из (16) следует, что при приближении к критической точке величина h , характеризующая интегральную (по углам) интенсивность рассеяния, остается постоянной. Поскольку при этом ширина индикатрисы рассеяния уменьшается ($\theta \approx \lambda/\rho_k \sim \tau^{1/2}$), то спектральная яркость рассеянного излучения увеличивается. При достаточно малом радиусе пучка параметр $h z_d$ может быть заметно меньше единицы. Тогда, согласно соотношению (8), критическая мощность самовоздействия в среде, температура которой близка к критической, практически не будет отличаться от соответствующего значения для однородной среды. Например, для $l \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, $Y_c = \left(c \frac{\partial \epsilon}{\partial c} \right)_{P,T} \approx \epsilon_2 - \epsilon_1 \approx 0,1$ находим $h \approx 0,2 \text{ см}^{-1}$. Если при этом $r_0 \approx 10^{-2} \text{ см}$ и $\theta_0 = 2 \cdot 10^{-2}$, то $z_d = r_0/\theta_0 \approx 0,5 \text{ см}$ и $h z_d \approx 0,1$.

Для определения закона изменения критической мощности при $T \rightarrow T_c$ рассмотрим в качестве примера эффект самовоздействия, связанный с концентрационной нелинейностью [9]. Для одномодового излучения и импульсов с длительностью t_0 , меньшей, чем время установления равновесного значения температуры $t_T = S/\chi$ (χ — коэффициент темпе-

ратуропроводности), критическая мощность $P_{kp}^{(1)} = \frac{4\pi(\epsilon^L)^2 v_{3B} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{P,S}}{k^2 c^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial c} \right)_{P,T}^2}$. Для

импульсов с длительностью $t_0 > t_T$ (в частности, для непрерывного

излучения) $P_{kp}^{(2)} = \frac{4\pi(\epsilon^L)^2 v_{3B} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{P,T}}{k^2 c^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial c} \right)_{P,T}^2}$. Вдали от критической точки зна-

чения $\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{P,S}$ и $\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{P,T}$ одного порядка и примерно равны

$\frac{c(1-c)[m_1 c + (1-c)m_2]}{k_B T}$ (c — концентрация растворенного вещества, m_1 и m_2 — соответственно масса молекул растворенности вещества и растворителя). Считая $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial c} \right) \approx \frac{3(\epsilon_2 - \epsilon_1)\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \approx 0,1$, $\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right) \sim 10^{10} \text{ эрг/см}^3$ и $k \approx 10^6 \text{ см}^{-1}$, получаем, что в обычных условиях $P_{kp}^{(1)} \approx P_{kp}^{(2)} \approx (10^2 \div$

$\div 10^3$) кВт. При $T \rightarrow T_c$ параметры $\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P, S}$ и $\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P, T}$ стремятся к нулю соответственно с показателями $\alpha \approx 0,2$ и $\gamma \approx 1,3$ [8]. Отсюда следует, что $P_{kp}^{(1)} \sim \tau^\alpha$ и $P_{kp}^{(2)} \sim \tau^\gamma$.

Наиболее резко падает при $\tau \rightarrow 0$ критическая мощность самофокусировки непрерывного излучения. Например, при $\tau \approx 10^{-4}$ значение $P_{kp}^{(2)}$ примерно в 10^5 раз меньше соответствующего значения, типичного для вещества, находящегося во внеクリтической области. Поскольку при $\tau \rightarrow 0$ критическая мощность падает, то при использовании мощных и достаточно узких (или сфокусированных) световых пучков наблюдение непрерывной самофокусировки подобного типа в обычных средах становится вполне возможным.

Действительно, обычное значение критической мощности (вдали от точки $T = T_c$) для нелинейности указанного типа и одномодовых пучков составляет, как указывалось выше, величину порядка $P_{kp} \approx (10^2 \div 10^3)$ кВт. Для многомодового пучка с расходимостью $\theta_0/\theta_d \approx 10$ получим $P_{kp}^{mn} \approx P_{kp}^{dn} (\theta_0/\theta_d)^2 \approx (10 \div 100)$ МВт. Если теперь $T \rightarrow T_c$, то при $\tau \approx 10^{-4}$ можно ожидать уменьшения критической мощности до величины порядка $P_{kp} \approx (10^2 \div 10^3)$ Вт, что, к примеру, соответствует значениям мощности многомодового аргонового лазера*. Указанные эффекты можно наблюдать в бинарных растворах типа метанолциклогексан, триэтиламин—вода и др.

Рассеяние на крупномасштабных флюктуациях вблизи критических точек возможно в высокомолекулярных жидкостях, у которых радиус действия межмолекулярных сил составляет величину до нескольких сотен ангстрем. Условие «крупномасштабности» $\theta \ll \theta_0$, или $\rho_k = \lambda/\theta \gg \lambda/\theta_0$, выполняется для

$$\tau < \left(\frac{l \theta_0}{\lambda} \right)^{2/1} .$$

Так, например, для критической опалесценции растворов полимеров, у которых при степени полимеризации (количество мономерных звеньев) $p \approx 10^3$ величина $l \approx (2 \div 4) \cdot 10^2$ Å, найдем, что при $\theta_0 \approx 2 \cdot 10^{-2}$ и $\lambda \approx 5 \cdot 10^3$ Å индикаторика рассеяния уже диаграммы основного пучка, если $\tau \leq 10^{-4}$ (при $T_c \approx 300$ К это соответствует $\Delta T = T - T_c \geq 0,03$ К).

Длина линейного рассеяния

$$z_\lambda = \left(\frac{r_0}{\Delta \rho_\perp B_\epsilon|_{\rho_\perp=0}} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{r_0^2 \rho_k^{2f*}}{Y_c^2 k_B T} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{r_0^2 \rho_k}{Y_c^2 l} \right)^{1/3}. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что вблизи критической точки $z_\lambda \sim \rho_k^{2/3} \sim \sim \tau^{-1/3} \rightarrow \infty$. Этот, на первый взгляд, странный результат объясняется тем, что при $\tau \rightarrow 0$ индикаторика рассеяния резко вытягивается вдоль линии распространения светового пучка, т. е. многократно рассеянные лучи в среднем распространяются в направлении самого пучка.

Оценим теперь условия, при которых возможно наблюдение эффекта самовоздействия в околоскритической среде с крупномасштабными флюктуациями показателя преломления. Пусть, например, коллимированный пучок непрерывного многомодового излучения с параметрами $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ см, $r_0 \approx 10^{-2}$ см, $\theta_0 \approx 2 \cdot 10^{-2}$ проходит через критический

* Переход к одномодовым достаточно узким (или сфокусированным) пучкам, минимальное значение критической мощности можно еще более уменьшить (в рассматриваемом примере при $\tau = 10^{-4}$ на 2 порядка).

раствор полибутилметакрилата в изопропиловом спирте ($T_c = 10,8^\circ\text{C}$ [10]), температура которого выше критической на $\Delta T = \tau T_c = 3 \cdot 10^{-2}\text{K}$ ($\tau \approx 10^{-4}$).

Полагая $\gamma = 1,4$, $l \approx 3 \cdot 10^{-6}\text{ см}$ и учитывая, что $Y_c = \left(c \frac{\partial \varepsilon}{\partial c} \right)_{p, T} \approx \approx \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \approx 0,1$, находим $z_d = 0,5\text{ см}$. Поскольку $z_d = r_0/\theta_0 \approx 0,5\text{ см}$, то $z_d/z_L \approx 1$ и, следовательно, $P_{kp}^{sl, n} \approx P_{kp}$. С другой стороны, как было показано выше, вблизи критической точки мощность P_{kp} падает по сравнению с обычным значением P_{kp} , типичным для вещества, находящегося во внеокритической области, в τ^{-1} раз. В нашем случае $\tau^{-1} \approx 5 \cdot 10^5$ и поэтому вблизи критической точки P_{kp} падает примерно в $5 \cdot 10^5$ раз. Учитывая, что для многомодового пучка $P_{kp}^{sl, n}/P_{kp}^{dn} \approx (\theta_0/\theta_d)^2 \approx 10^2$ и что $P_{kp}^{dn} \approx (10^2 \div 10^3)\text{ кВт}$, находим вблизи критической точки $P_{kp}^{sl, n} \approx P_{kp}^{dn} \approx (20 \div 200)\text{ Вт}$; эта величина, как уже отмечалось, соответствует значениям мощности многомодового аргонового лазера.

Так же как и в случае низкомолекулярных жидкостей, найденные критические мощности могут быть значительно уменьшены при использовании одномодовых сфокусированных или достаточно узких пучков непрерывного излучения (в приведенном примере вплоть до величины порядка 1 Вт).

Авторы благодарят В. И. Беспалова и В. И. Таланова за обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выразим из (2) ε^{NL} через квадрат модуля поля и подставим в (1). Домножим полученное уравнение на $\mathcal{E}^*(z, r_\perp, \eta_2)$ и сложим с комплексно-сопряженным уравнением, домноженным на $\mathcal{E}(z, r_\perp, \eta_1)$. Усредним полученное соотношение, а для расцепления членов типа $\langle \delta\varepsilon^L \mathcal{E}(z, r_\perp, \eta_1) \mathcal{E}^*(z, r_\perp, \eta_2) \rangle$ воспользуемся условием δ -коррелированности флуктуаций $\delta\varepsilon^L$ (см. (4)). Для расцепления нелинейных членов типа $\langle |\mathcal{E}(z, r'_\perp, \eta')|^2 \mathcal{E}(z, r_\perp, \eta_1) \mathcal{E}^*(z, r_\perp, \eta_2) \rangle$ предположим, что радиус поперечной корреляции рассматриваемого пучка некогерентного излучения r_0 значительно меньше среднего радиуса огибающей r_0 , а длина продольной корреляции некогерентного поля $z_k = (1/4)k r_0^2$ является достаточно малой по сравнению с характерным масштабом z^* изменения волны из-за рассеяния на линейных и нелинейных флуктуациях диэлектрической проницаемости. Тогда независимо от детального характера линейного или нелинейного рассеяния поле в любой заданной плоскости $z \neq 0$ можно представить как сумму случайных независимых полей, излучаемых $N = (z_N/z_k)^2$ -некоррелированными источниками, расположенными в плоскости, отстоящей от заданной на величину z_N , превышающую z_k , но меньшую, чем z^* ($1 \ll N \leq N^* = (z^*/z_k)^2$). Очевидно, что при $N \gg 1$ в силу центральной предельной теоремы закон распределения поля будет близок к нормальному и корреляционную функцию 4-го порядка $\langle |\mathcal{E}(z, r'_\perp, \eta')|^2 \times \times \mathcal{E}(z, r_\perp, \eta_1) \mathcal{E}^*(z, r_\perp, \eta_2) \rangle$ с точностью до членов порядка $1/N$ можно заменить суммой произведений корреляционных функций 2-го порядка,

Окончательное уравнение для корреляционной функции $B(r_1, r_2) = \langle \mathcal{E}(z, r_\perp, \eta_1) \mathcal{E}^*(z, r_\perp, \eta_2) \rangle$ имеет вид*

* Используемое приближение фактически совпадает с приближением хаотизированных фаз [11], широко применяемым для исследования слабой турбулентности [12, 13].

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} (\Delta_{\perp_1} - \Delta_{\perp_2}) + \frac{k^2}{4} [B_\epsilon(0) - B_\epsilon(r_{\perp_1} - r_{\perp_2})] \right\} B(r_1, r_2) = \\ = \frac{ikg}{2\varepsilon^L} \left\{ \int dr' G(r_1 - r') [B(r', r') B(r_1, r_2) + B(r_1, r') B(r', r_2)] - (\Pi.1) \right. \\ \left. - \int dr' G(r_2 - r') [B(r', r') B(r_1, r_2) + B(r_1, r') B(r', r_2)] \right\},$$

где $G(r)$ — функция Грина уравнения $\hat{M}G(r) = \delta(r)$ (r — совокупность переменных z, r_\perp, η); интегрирование в (П.1) проводится по области определения всех переменных, входящих в уравнение (2).

Для нахождения условий применимости усредненного описания на примере среды с инерционной кубической нелинейностью ($\hat{M} = \frac{\partial}{\partial \eta} + T_2^{-1}$) оценим расстояние z^* в первом (борновском) приближении теории возмущений. Результат представляется в виде

$$\frac{1}{z^*} = \frac{1}{z^{NL}} + \frac{1}{z_\epsilon}, \quad (\Pi.2)$$

где $z_\epsilon = \frac{(2\varepsilon^L)^2}{k^2 B_\epsilon(0)}$ — длина затухания среднего поля в случайно-неоднородной среде, $z^{NL} \approx \left(\frac{P_{kp}}{P_0 v}\right) z_k$ — характерное расстояние, на котором флюктуации ε^{NL} приводят к заметному изменению амплитуды или фазы волны. В последнем соотношении $P_{kp} = \frac{(\varepsilon^L)^2 v_{rp}}{2k^2 g T_2}$ — критическая мощность самофокусировки, $P_0 = \frac{1}{4} \pi \rho_0^2 \frac{P}{\pi r_0^2}$ — мощность на масштабе

поперечной корреляции (P — полная мощность пучка), $v = \sqrt{\tau_0/T_2}$ ($\tau_0 \ll T_2$) и $v = 1$ ($\tau_0 \gg T_2$), τ_0 — время корреляции амплитуды излучения. В нестационарном случае при длительности импульса $t_0 < T_2$ значение $z^{NL} = \left(\frac{W_{kp}}{W_0 v'}\right) z_k$, где $W_{kp} = P_{kp} T_2$ — критическая энергия самофокусировки, $W_0 = P_0 t_0$ — энергия на масштабе корреляции, $v' = \sqrt{\tau_0/t_0}$. В силу сказанного выше условие применимости используемого приближения $N^* = (z^*/z_k)^2 \gg 1$ сводится к следующему:

$$\left(\frac{z_k}{z^{NL}} + \frac{z_k}{z_\epsilon} \right)^2 \ll 1. \quad (\Pi.3)$$

При $\delta\varepsilon^L = 0$ условие (П.3) совпадает с условием применимости усредненного описания для исследования самофокусировки некогерентных пучков в однородной нелинейной среде [2]. Если интересоваться одномоментной функцией корреляции, то для среды с инерционной кубической нелинейностью ($\hat{M} = \frac{\partial}{\partial \eta} + T_2^{-1}$) при $\tau_0 \ll t_0, T_2$ вклад членов в правой части (П.1), пропорциональных $B(r_1, r') B(r', r_2)$, в преобразование пространственной статистики будет мал по сравнению с оставшимися нелинейными членами. Поэтому, не затрагивая вопросов перекачки энергии по временному спектру, а ограничиваясь только

исследованием процессов преобразования интенсивности интегрального по частотам излучения, можно для дальнейшего анализа воспользоваться уравнением

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{k} \nabla_{r_\perp} \nabla_{\rho_\perp} + \frac{k^2}{4} [B_\epsilon(0) - B_\epsilon(\rho_\perp)] \right\} B(z, r_\perp, \rho_\perp, \eta) = \\ = \frac{ikg}{2\varepsilon L} B(z, r_\perp, \rho_\perp, \eta) \int_0^\eta d\eta' \exp\left(-\frac{\eta - \eta'}{T_2}\right) \left[B\left(z, r_\perp + \frac{\rho_\perp}{2}, \eta'\right) - B\left(z, r_\perp - \frac{\rho_\perp}{2}, \eta'\right) \right]. \quad (\text{П.4})$$

Предположим, что на входе в нелинейную среду падающее излучение имеет гауссову функцию корреляции:

$$B(z, r_\perp, \rho_\perp, \eta)|_{z=0} = B(\eta) \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{r_0^2} - \frac{\rho_\perp^2}{\rho_0^2} + i\alpha_0 \rho_\perp r_\perp\right).$$

Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$B(z, r_\perp, \rho_\perp, \eta) = B(\eta) \exp\left[\varphi(z, \eta) - \frac{r_\perp^2}{r_0^2(z, \eta)} - \frac{\rho_\perp^2}{\rho_0^2(z, \eta)} + i\alpha_0(z, \eta) \rho_\perp r_\perp\right]. \quad (\text{П.5})$$

Заменим нелинейный член в (П.4) его параболической аппроксимацией от поперечных координат (безаберрационное приближение). Для упрощения расчетов функцию корреляции линейных флуктуаций диэлектрической проницаемости среды также аппроксимируем параболической зависимостью от координаты ρ_\perp . Такая аппроксимация означает переход к так называемому диффузионному приближению [14], формально справедливому при радиусе поперечной корреляции поля, меньшем характерного размера поперечной корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости*. Подставляя (П.5) в (П.4) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $r_\perp^n \rho_\perp^m$, получим систему уравнений для функций φ , α_0 , ρ_0 , r_0 . Исключая из этой системы α_0 , φ , ρ_0 , приходим к искомому уравнению для эффективной (энергетической) ширины пучка $r_0(z, \eta)$ (см. 10)).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, в сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1968, стр. 428.
2. Г. А. Пасманик, ЖЭТФ, 66, 490 (1974).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Либкин, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959, стр. 496.
4. В. В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 7, 1053 (1970); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 6, 865 (1971).
5. В. А. Петрищев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 9, 1416 (1971).
6. В. А. Петрищев, Диссертация, ГГУ, Горький, 1975.
7. Г. Стенли, Фазовые переходы и критические явления, изд. Мир, М., 1973.
8. М. А. Анисимов, УФН, 114, 249 (1974).

* Фактически при расчете интегральных характеристик многократно рассеянного излучения диффузионное приближение, в основе которого лежит физически очевидное предположение о слабой зависимости усредненных параметров пучка от тонкой структуры индикаторы рассеяния, выполняется при менее жестких условиях, а полученные с его использованием результаты (в части линейного рассеяния) совпадают с результатами, найденными другими, более строгими методами.

9. N. Bloembergen, W. H. Lowdermilk, M. Matsuoka and C. S. Wang, Phys. Rev., A., Gen. Phys., 3, 404 (1971); N. Bloembergen, W. H. Lowdermilk and C. S. Wang, Phys. Rev. Lett., 25, 1476 (1970).
10. В. Е. Эскин, Рассеяние света растворами полимеров, изд. Наука, М., 1973.
11. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, изд. Наука, М., 1971.
12. Б. Б. Кадомцев, в сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., 1964, стр. 188.
13. Б. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1971.
14. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 декабря 1975 г.,
после доработки
20 апреля 1977 г.

**SELF-ACTION OF AN INCOHERENT LIGHT BEAM IN A
RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM. THE CRYTICAL OPALESCENCE
EFFECT**

A. A. Betin, G. A. Pasmanik

The results of theoretical analysis of self-action effects in a randomly-inhomogeneous medium with broadbanding and narrowbanding scattering indicatrices are summarized. The relations found are used to investigate the self-focusing process in a medium being in the near-crytical state when, on one hand, the increase in the refractive index fluctuations leads to the growth of the thresholds of nonlinear effects and, on the other, the anomalous change in the medium parameters results in their essential decrease. The estimations made with taking into account both factors for the case of noncontinuous striction self-focusing in mixture solitons indicate that at the temperature close to the crytical one, the threshold power of self-focusing may be essentially decreased.

УДК 621.372.826

ПРИБЛИЖЕНИЕ БОЛЬШОГО ФОРМАТА В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

*А. М. Гончаренко, В. А. Карпенко, Ю. Д. Столяров,
В. Ф. Холомеев*

Исследованы свойства прямоугольного диэлектрического волновода. С помощью метода частичных областей граничная задача сведена к решению системы однородных алгебраических уравнений. Проведены экспериментальные измерения волноводных показателей преломления. На основе сопоставления расчетных и экспериментальных результатов установлены границы применимости теории.

В работах [1–5] предложены различные приближенные методы расчета прямоугольных диэлектрических волноводов (ПРДВ). В настоящем сообщении приближенное решение граничной задачи сведено к решению однородной системы линейных алгебраических уравнений. Экспериментально установлены границы применимости такого подхода.

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения с диэлектрической проницаемостью ϵ , превышающей диэлектрическую проницаемость окружающей среды ϵ_0 . Разобьем плоскость поперечного сечения системы (рис. 1) на три частичные области. Область I ограничена плоскостями $x = \pm b$, области II и III задаются соответственно неравенствами $x > b$ и $x < -b$. Решение уравнений Максвелла ищем в виде бегущих вдоль оси волновода гармонических волн $E = E(x, y) \exp(ihz - i\omega t)$, $H = H(x, y) \exp(ihz - i\omega t)$. Здесь h — постоянная распространения, ω — циклическая частота. При этом поперечные составляющие поля во всех точках системы, за исключением границы раздела сред, выражаются посредством дифференцирования через продольные E_z и H_z , которые удовлетворяют волновому уравнению. Вследствие симметрии системы относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$ возможно существование четырех независимых групп, отличающихся четностью по x и y . Поле определенной четности в области I в общем случае должно представляться

в виде суммы возможных решений плоского волновода, удовлетворяющих условию ограниченности на бесконечности ($y \rightarrow \pm\infty$) [6]. При больших форматах достаточно рассмотреть лишь волноводные решения в этой области, поскольку при $|y| > a$ поля спадают, согласно эксперименту [7]. Эти решения состоят из двух независимых типов волн, отличающихся поляризацией. Для первого типа $H_y = 0$, а для второго — $E_y = 0$. Таким образом, продольные компоненты электрического и магнитного полей в области I приближенно можно представить в виде суммы волноводных решений двух типов:

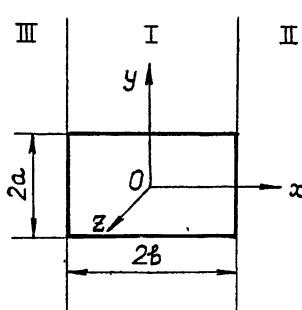


Рис. 1.

$$E_z(x, y) = \sum_{k=1}^l A_k \varphi_k(x, y) + \sum_{n=1}^m B_n \bar{\varphi}_n(x, y), \quad (1)$$

$$H_z(x, y) = \sum_{k=1}^l A_k \psi_k(x, y) + \sum_{n=1}^m B_n \bar{\psi}_n(x, y),$$

где l и m — допустимое число волноводных решений первого и второго типов соответственно. Во внешних областях II и III поля представим в виде интегралов Фурье:

$$E_z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) \exp [i\lambda y \pm \sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0} (x \pm b)] d\lambda, \quad (2)$$

$$H_z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} b(\lambda) \exp [i\lambda y \pm \sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0} (x \pm b)] d\lambda,$$

где знак «+» соответствует области III, а знак «—» — области II, $k_0 = \omega/c$ — постоянная распространения плоских волн в свободном пространстве.

Амплитуды $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, а также A_k , B_n и постоянная распространения h , полностью определяющие поле ПРДВ, находятся из условия согласования полей на границах $x = \pm b$. Вследствие симметрии системы относительно плоскости $x = 0$, достаточно учесть граничные условия лишь на одной границе, например, $x = b$. Так, из условия непрерывности E_y - и E_z -компонент получаем выражения $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ через фурьеобразы функций, входящих в разложение (1) при $x = b$:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \sum_{k=1}^l \hat{A}_k \varphi_k(b, \lambda) + \sum_{n=1}^m \overset{\wedge}{\varphi}_n(b, \lambda), \\ b(\lambda) &= \frac{k_0^2 \varepsilon_0 - h^2}{ik_0 \sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0}} \sum_{k=1}^l \hat{A}_k \chi_k(b, \lambda) + \\ &\quad + \frac{h\lambda}{ik_0 \sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0}} a(\lambda), \end{aligned} \quad (3)$$

где, например, $\overset{\wedge}{\varphi}_k(b, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(b, y) \exp(-i\lambda y) dy$. Здесь

$$\chi_k(b, y) = \frac{i}{k_0 \tilde{\varepsilon}(y) - h^2} \left[h \frac{\partial \varphi_k(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=b} - k_0 \frac{\partial \psi_k(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=b} \right], \quad \tilde{\varepsilon}(y) = \varepsilon$$

при $|y| < a$, $\tilde{\varepsilon}(y) = \varepsilon_0$ при $|y| > a$. Условия непрерывности касательных составляющих H_y и H_z с учетом (3) запишутся следующим образом:

$$\sum_{n=1}^m B_n \left[\bar{\chi}_n(b, y) + \frac{i}{k_0 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 - k_0^2 \varepsilon_0}{\sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0}} \overset{\wedge}{\varphi}_n(b, \lambda) \exp(i\lambda y) d\lambda \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^l A_k \frac{i}{k_0 V 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0}} \times \\
 &\quad \times [\lambda h \overset{\wedge}{\chi}_k(b, \lambda) - (\lambda^2 - k_0^2 \varepsilon_0) \overset{\wedge}{\varphi}_k(b, \lambda)] \exp(i \lambda y) d\lambda, \\
 \sum_{n=1}^m B_n \left[\bar{\Psi}_n(b, y) + \frac{ih}{k_0 V 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0}} \overset{\Delta}{\bar{\varphi}}_n(b, \lambda) \exp(i \lambda y) d\lambda \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^l A_k \left\{ -\psi_k(b, y) - \frac{1}{k_0 V 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + h^2 - k_0^2 \varepsilon_0}} \times \right. \\
 &\quad \left. \times [(k_0^2 \varepsilon_0 - h^2) \overset{\wedge}{\chi}_k(b, \lambda) + h \lambda \overset{\wedge}{\varphi}_k(b, \lambda)] \exp(i \lambda y) d\lambda \right\}, \tag{4}
 \end{aligned}$$

где $\bar{\chi}_n(b, y) = \frac{i}{k_0^2 \varepsilon_0 - h^2} \left[h \frac{\partial \bar{\Psi}_n(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=b} + k_0 \tilde{\varepsilon}(y) \frac{\partial \bar{\varphi}_n(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=b} \right]$.

Независимо от четности при всех значениях $x \in [-b; b]$ функции $\bar{\chi}_n(x, y)$ являются ортогональными, а функции $\psi_k(x, y)$ ортогональными с весом $\tilde{\varepsilon}^{-1}(y)$. Умножая первое уравнение из (4) на $\chi_{n'}^*(b, y)$, а второе — на $\tilde{\varepsilon}^{-1}(y) \psi_{k'}^*(b, y)$ и интегрируя по y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, приходим к системе $(m+l)$ однородных алгебраических уравнений относительно $(m+l)$ неизвестных амплитуд разложений A_k и B_n :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^m B_n D_{nn'} + \sum_{k=1}^l A_k C_{kn'} &= 0, \quad n' = 1, 2, \dots, m, \\
 \sum_{n=1}^m B_n \bar{D}_{nk'} + \sum_{k=1}^l A_k \bar{C}_{kk'} &= 0, \quad k' = 1, 2, \dots, l. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Вид матричных элементов $D_{nn'}$, $C_{kn'}$, $\bar{D}_{nk'}$, $\bar{C}_{kk'}$ следует из (4) и достаточно очевиден. Равенство нулю определителя системы (5) дает характеристическое уравнение для определения постоянных распространения, а коэффициенты A_k , B_n , определяющие поля ПРДВ, находятся из (5) с точностью до постоянного множителя. Следует заметить, что вышеизложенный подход позволяет находить лишь те волноводные типы колебаний, критические толщины которых превышают величину

$$L_{kp} = \left(\frac{2a}{\lambda_0} \right)_{kp} = \frac{1}{2\sqrt{n^2 - 1}}, \quad \text{где } 2a — \text{размер грани волновода, } n —$$

относительный показатель преломления, λ_0 — длина волны в вакууме.

Система (5) численно решалась в двухвольновом приближении ($l = m = 1$), которое позволяет исследовать волноводные типы колебаний с критическими толщинами, лежащими в области от L_{kp} до $2L_{kp}$. Экспериментальные измерения волноводных показателей преломления от приведенной толщины волновода $L = 2a/\lambda_0$ проводились в миллиметровом диапазоне волн по методике, изложенной в [7]. Кроме того, использовались экспериментальные результаты работы [8]. Теоретические

и экспериментальные данные сравнивались для волноводов из полистирола ($\epsilon = 2,56$) с форматами $\Phi = b/a = 1,5; 2$. На рис. 2 приведены расчетные кривые и данные эксперимента. Как видно из рисунка, для $\Phi = 1,5$ наблюдается значительное расхождение с экспериментом в области малых и больших замедлений. Для $\Phi = 2$ совпадения данных расчета и эксперимента находятся в пределах одного процента.

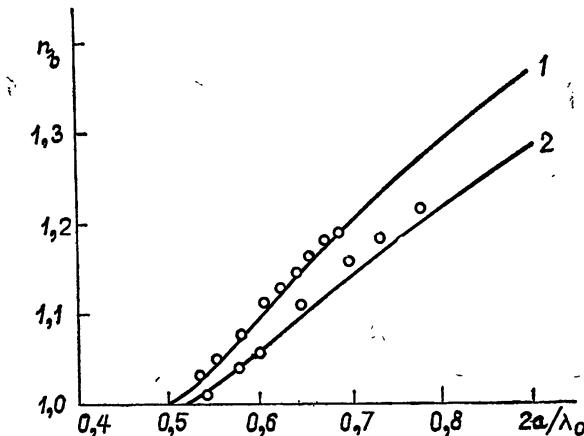


Рис. 2. Зависимость волноводного показателя преломления от приведенной толщины волновода. Кривые 1, 2 — расчет для $\Phi = 2$ и $\Phi = 1,5$ ($n^2 = 2,56$) соответственно, кружочки — эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Schlosser, Arch. Electr. Uberts., 18, № 7, 403 (1964).
2. W. Schlosser, H. G. Unger, Advances in Microwave, N. Y., Acad. Press, 1966, p. 319.
3. J. E. Goeil, BSTJ, 48, № 7, 2133 (1969).
4. Г. И. Веселов, Г. Г. Воронина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 12, 1891 (1971).
5. А. П. Горобец, Л. Н. Дерюгин, В. Е. Сотин, Радиотехника и электроника, 20, № 1, 86 (1975).
6. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд. Наука, М., 1969.
7. Доклады НТК по итогам НИР МЭИ до 1968—1969 гг. (апрель 1970 г.), секция радиотехническая, стр. 24, изд. МЭИ, М., 1969.
8. Г. Д. Рожков, Диссертация, МЭИ, Москва, 1974.

Институт физики АН БССР

Поступила в редакцию
27 октября 1975 г.,
после доработки
14 февраля 1977 г.

LARGE FORMAT APPROXIMATION IN THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION ALONG A RECTANGULAR-DIELECTRIC WAVEGUIDE

A. M. Goncharenko, V. A. Karpenko, Yu. D. Stolyarov, V. F. Kholomeev

The properties of a rectangular dielectric waveguide are investigated. Using the partial region method the boundary problem is reduced to solving the system of uniform algebraic equations. Experimental measurements of waveguide refractive indexes have been made. The applicability limits of the theory are established by comparing estimated and experimental results.

УДК 621.3.032.266

СИНТЕЗ СИСТЕМ ФОРМИРОВАНИЯ ВИНТОВЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Ш. Е. Цимлинг

Описан синтез магнетронно-инжекторных пушек, использующихся для формирования интенсивных винтовых электронных пучков (ВЭП) в мазерах на циклотронном резонансе (МЦР). Применимость метода синтеза связана здесь с существованием в области пушки ламинарных потоков, которые в переходной области трансформируются в ВЭП. Определена конфигурация электродов. Получены расчетные формулы для нахождения основных параметров пушек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Повышение выходной мощности МЦР [1] в значительной степени определяется возможностями увеличения первенства электронно-оптической системы. Однако еще в режиме температурного ограничения эмиссии при некотором предельном токе пучка силы пространственного заряда вызывают столь сильный рост скоростного разброса [2, 3], что дальнейшее увеличение тока становится бесполезным. Можно показать [3], что предельный ток МЦР в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых волн определяется статическим объемным зарядом в пушке*.

Компенсация скоростного разброса, обусловленного пространственным зарядом, возможна в принципе путем коррекции формы электродов и распределения магнитного поля. Однако наличие пересекающихся траекторий и связанный с этим неадиабатический характер поля пространственного заряда существенно затрудняют подобную оптимизацию.

Как показано в разд. 2, электронные пучки в пушке могут быть сделаны ламинарными при сохранении «турбулентности» в рабочем пространстве. Распределение поля объемного заряда в инжекторе становится регулярным, и открывается возможность для оптимизации. В частности, применим метод синтеза, сводящийся к решению внутренней и внешней задач для соответствующего потока (см., например, [4]).

Ниже метод синтеза использован при нахождении формы электродов в плоской модели магнетронно-инжекторной пушки (МИП), для которой внутренняя и внешняя задачи решаются сравнительно просто. Согласно [5] плоская модель в первом приближении удовлетворительно описывает свойства реальных аксиально-симметричных пушек, характеризующихся сравнительно большим отношением радиуса катода к расстоянию анод — катод.

2. ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА

Исходной моделью плоской МИП является бесконечный плоский диод, помещенный в однородное магнитное поле, наклоненное к плоскости катода ($y = 0$) под углом φ (рис. 1). Согласно рис. 1 электрическое

* В [3] рассмотрена типичная для электронно-оптических систем МЦР магнетронно-инжекторная пушка (МИП).

и магнитное поля имеют компоненты $E(0, -E_k, 0)$ и $B(B_k \cos \varphi, 0)$. Все величины здесь зависят только от y . Это обеспечивает в принципе отсутствие позиционного разброса [2] осцилляторных скоростей. Выбранная модель отличается от плоской пушки Кайно—Тэйлора [6] (см. также [4, 7]) наличием электрического поля на катоде.

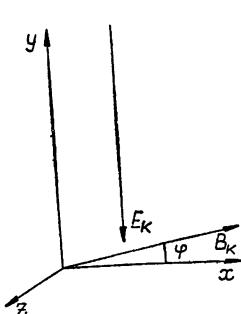


Рис. 1.

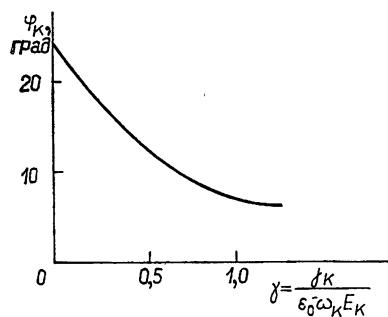


Рис. 2.

Рис. 1. Электрическое и магнитное поля в плоской МИП.
Рис. 2. Зависимость критического угла наклона магнитного поля к плоскости катода от параметра γ .

Задача сводится к совместному решению уравнений движения, уравнения Пуассона и уравнения непрерывности. Подобно [8] решение проводится методом полного тока. В результате, полагая начальные скорости и потенциал равными нулю, а координаты начала траектории $x_0, 0, z_0$, приходим к следующим выражениям для координат электронов и потенциала на траектории:

$$\omega_k(x - x_0) = M \sin \varphi \left(\frac{\Phi^3}{6} - \Phi + \sin \Phi \right) + N \sin \varphi \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1 + \cos \Phi \right); \quad (1)$$

$$\omega_k y = M \cos \varphi \left(\frac{\Phi^3}{6} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Phi - \sin \Phi \right) + N \cos \varphi \left(\frac{\Phi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - \cos \Phi \right); \quad (2)$$

$$\omega_k(z - z_0) = M \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1 + \cos \Phi \right) + N (\Phi - \sin \Phi); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \eta U = & M^2 \left(\frac{\Phi^4}{8} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi \sin \Phi + 1 - \cos \Phi \right) + \\ & + MN \left(\frac{\Phi^3}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Phi - \Phi \cos \Phi \right) + N^2 \left(\frac{\Phi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - \cos \Phi \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В (1) — (4) $\eta = e_0/m_0$ — удельный заряд электрона, $\omega_k = \eta B_k$ — гиро-частота, отнесенная к магнитному полю на катоде, $\Phi = \omega_k t$ — угол пролета, $M = \eta j_k \cos \varphi / \epsilon_0 \omega_k^2$ — приведенная плотность тока, $N = \frac{\eta E_k}{\omega_k} \cos \varphi$ — приведенное электрическое поле на катоде, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Уравнения (1) — (4) отличаются от уравнений Брауде [8] дополнительными членами, связанными с ненулевым наклоном магнитного поля к поверхности катода, а также тем, что здесь не рассматриваются двух-

поточные состояния. Поэтому (1) — (4) справедливы лишь при отсутствии точек возврата траекторий, т. е. при

$$\frac{dy}{dt} \geq 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} \geq 0. \quad (5)$$

Учитывая (2), получаем из (5)

$$\varphi \geq \operatorname{arctg} \left[-\frac{\gamma(1 - \cos \Phi) + \sin \Phi}{\Phi + \gamma \frac{\Phi^2}{2}} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$$\varphi \geq \arccos \left[\frac{1 + \gamma \Phi}{\gamma(\Phi - \sin \Phi) + 1 - \cos \Phi} \right]^{1/2},$$

где

$$\gamma = \frac{M}{N} = \frac{j_k}{\epsilon_0 \omega_k E_k}. \quad (7)$$

Знаки равенства в (6) определяют критический угол φ_k как функцию параметра γ (рис. 2). Последний характеризует режим диода (для полного пространственного заряда $\gamma = \infty$, при нулевом токе пучка $\gamma = 0$). В любом режиме ламинарному потоку соответствует область над кривой рис. 2. Отметим, что для пушки Кайно—Тэйлора ($\gamma = \infty$) ламинарный поток имеет место при всех $\varphi > 0$. На рис. 3 в качестве иллюстрации приведены рассчитанные по формулам (1), (2) траектории в плоскости $z = \text{const}$ при $\varphi = 15^\circ$ и $\gamma = 0,5$ (эти значения согласно рис. 2 удовлетворяют (6)).

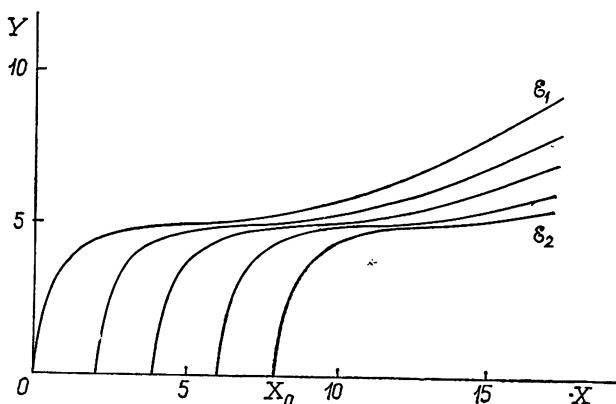


Рис. 3. Траектории электронов в плоскости; $\gamma = 0,5$; $\varphi = 15^\circ$.

Осцилляторные скорости в рабочем пространстве МЦР, отделенном от пушки переходной областью с нарастающим магнитным полем (см., например, [3]), находятся из условия сохранения поперечного адиабатического инварианта

$$J_\perp = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P} dq. \quad (8)$$

Интегрирование должно проводиться по контуру осцилляторного движения. Обобщенный импульс в (8)

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - e_0 \mathbf{A}, \quad (9)$$

где $p = m\mathbf{v}$, а магнитный векторный потенциал \mathbf{A} имеет компоненты

$$A_x = B_k z' \sin \varphi, \quad A_y = 0, \quad A_z = B_k y' \cos \varphi. \quad (10)$$

Штрихом обозначены координаты в той системе отсчета, в которой электроны совершают чисто периодическое движение. Они легко получаются из (1) — (3) путем отбрасывания непериодических членов. В результате с помощью (8) — (10) находим

$$2\pi J_{\perp} = \oint (p_x dx' + p_y dy' + p_z dz') - e_0 \oint A dq = \\ = \frac{m_0}{\omega_k} \int_0^{2\pi} [(x')^2 + (y')^2 + (z')^2] d\Phi - m_0 \int_0^{2\pi} (x' z' \sin \varphi + y' z' \cos \varphi) d\Phi.$$

Окончательно после подстановки в подынтегральное выражение x^1 , y^1 и z^1 получаем

$$J_{\perp} = \frac{m_0^2}{2e_0 B_k} (M^2 + N^2). \quad (11)$$

В пространстве взаимодействия, где магнитное поле B_0 однородно, а электрическое поле можно положить равным нулю, в нерелятивистском приближении (см., например, [9])

$$J_{\perp} = \frac{m_0^2 v_{\perp}^2}{2e_0 B_0}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) осцилляторная скорость в рабочем пространстве

$$v_{\perp} = N \sqrt{\alpha(1 + \gamma^2)}, \quad (13)$$

где коэффициент перемагничивания $\alpha = B_0/B_k$. С увеличением плотности тока γ (ср. (7)) возрастает, но одновременно снижается N . Последний фактор, как показывают оценки, играет большую роль. Поэтому с ростом тока пучка и при прочих равных условиях осцилляторная скорость уменьшается.

3. ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА

Для решения внешней задачи методом аналитического продолжения следует [10] сначала граничную траекторию \mathcal{E} , заданную параметрическими уравнениями

$$X = X_{\mathcal{E}}(\Phi), \quad Y = Y_{\mathcal{E}}(\Phi), \quad (14)$$

перевести в прямую линию с помощью конформного преобразования

$$W = X + jY = X_{\mathcal{E}}(\Theta) + jY_{\mathcal{E}}(\Theta). \quad (15)$$

При этом плоскость комплексного переменного $X + jY$ переходит в плоскость $\Theta = \Phi + j\Psi$, а траектория — в действительную ось $\Psi = 0$.

Форма электродов определяется из дифференциального уравнения эквипотенциалей в плоскости Φ, Ψ [10]:

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{\operatorname{Re}[E_{\Phi}(\Theta) - jE_{\Psi}(\Theta)]}{\operatorname{Im}[E_{\Phi}(\Theta) - jE_{\Psi}(\Theta)]}. \quad (16)$$

Здесь

$$E_{\Phi} = -\frac{dU(\Phi)}{d\Phi}, \quad (17)$$

$$E_{\Psi} = - \frac{dU(\Phi)}{d\Phi} \operatorname{tg} \vartheta, \quad (17)$$

где ϑ — угол, который электрическое поле составляет с граничной траекторией.

Ограничим электронный пучок траекториями \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , начинающимися в точках O и X_0 (рис. 3). Поскольку эти траектории одинаковы, решения задачи Коши для областей над и под пучком будут отличаться только из-за разного соответствия границ при конформном преобразовании (15). Последнее при учете (1) — (3) и после отделения действительных и мнимых частей имеет вид

$$X = \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{\Phi^2 - \Psi^2}{2} + \cos \Phi \operatorname{ch} \Psi - 1 + \gamma \left(\frac{\Phi^3 - 3\Phi\Psi^2}{6} - \Phi + \sin \Phi \operatorname{ch} \Psi \right) \right] - \\ - \left[\Phi \Psi \operatorname{tg}^2 \varphi + \sin \Phi \operatorname{sh} \Psi + \gamma \left(\frac{3\Phi^2\Psi - \Psi^3}{6} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Psi - \cos \Phi \operatorname{sh} \Psi \right) \right]; \quad (18)$$

$$Y = \operatorname{tg} \varphi \left[\Phi \Psi - \sin \Phi \operatorname{sh} \Psi + \gamma \left(\frac{3\Phi^2\Psi - \Psi^3}{6} - \Psi + \cos \Phi \operatorname{sh} \Psi \right) \right] + \\ + \left[\frac{\Phi^2 - \Psi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi - \cos \Phi \operatorname{ch} \Psi + \gamma \left(\frac{\Phi^3 - 3\Phi\Psi^2}{6} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Phi - \sin \Phi \operatorname{ch} \Psi \right) + 1 \right]. \quad (19)$$

Здесь и ниже использованы (как и на рис. 3) безразмерные переменные

$$X = \frac{\omega_k}{N \cos \varphi} x, \quad Y = \frac{\omega_k}{N \cos \varphi} y, \quad G = \frac{\eta}{N^2} U. \quad (20)$$

Используя (16) — (20), а также то, что электрическое поле на границе направлено вдоль оси y (рис. 1), а потому $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{X'(\Phi)}{Y'(\Phi)}$, находим

$$\frac{d\Psi}{d\Phi} = \frac{H [(C^2 + D^2) \operatorname{ctg} \varphi + BC - AD] + F (AC + BD)}{F [(C^2 + D^2) \operatorname{ctg} \varphi + BC - AD] - H (AC + BD)}, \quad (21)$$

где

$$H = \Phi \operatorname{tg}^2 \varphi + \sin \Phi \operatorname{ch} \Psi + \gamma \left[\frac{3(\Phi^2 - \Psi^2)}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Phi \sin \Phi \operatorname{ch} \Psi - \right. \\ \left. - \Psi \cos \Phi \operatorname{sh} \Psi - \cos \Phi \operatorname{ch} \Psi + 1 \right] + \quad (22)$$

$$+ \gamma^2 \left(\frac{\Phi^3 - 3\Phi\Psi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Phi - \Phi \cos \Phi \operatorname{ch} \Psi - \Psi \sin \Phi \operatorname{sh} \Psi \right);$$

$$F = \Psi \operatorname{tg}^2 \varphi + \cos \Phi \operatorname{sh} \Psi + \gamma (3\Phi\Psi \operatorname{tg}^2 \varphi + \Phi \cos \Phi \operatorname{sh} \Psi + \Psi \sin \Phi \operatorname{ch} \Psi + \\ + \sin \Phi \operatorname{sh} \Psi) + \gamma^2 \left(\frac{3\Phi^2\Psi - \Psi^3}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Psi + \Phi \sin \Phi \operatorname{sh} \Psi - \Psi \cos \Phi \operatorname{ch} \Psi \right); \quad (23)$$

$$A = \Phi - \sin \Phi \operatorname{ch} \Psi + \gamma \left(\frac{\Phi^2 - \Psi^2}{2} + \cos \Phi \operatorname{ch} \Psi - 1 \right); \quad (24)$$

$$B = \Psi - \cos \Phi \operatorname{sh} \Psi + \gamma (\Phi\Psi - \sin \Phi \operatorname{sh} \Psi); \quad (25)$$

$$C = \Phi \operatorname{tg}^2 \varphi + \sin \Phi \operatorname{ch} \Psi + \gamma \left(\frac{\Phi^2 - \Psi^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi - \cos \Phi \operatorname{ch} \Psi + 1 \right); \quad (26)$$

$$D = \cos \Phi \operatorname{sh} \Psi - \Psi \operatorname{tg}^2 \varphi + \gamma (\Phi \Psi \operatorname{tg}^2 \varphi + \sin \Phi \operatorname{sh} \Psi). \quad (27)$$

Точка $\Phi = 0, \Psi = 0$ является особой для (21) и точкой разветвления для функции $\Theta = \Theta(W)$, дающей отображение плоскости X, Y на плоскость Φ, Ψ . Поэтому вычисление нулевой эквипотенциали следует начинать не с нуля ($X = 0, Y = 0$), а с некоторой соседней точки, которую легко найти, рассмотрев поведение интегральных кривых (22) и конформное преобразование в окрестности начала координат. Пренебрегая членами порядка выше первого, получаем из (21)–(27) уравнение

$$\frac{d \Psi}{d \Phi} = \frac{\Phi}{\Psi}, \quad (28)$$

согласно которому нуль является седловой точкой. Проходящие через него интегральные кривые наклонены к оси Φ под углами $\pm \pi/4$. Разложим правые части (1) и (2) в ряды по Φ до членов второго порядка включительно. Тогда, переходя к безразмерным переменным и совершая аналитическое продолжение, получаем из (15), что конформное преобразование в окрестности начала координат имеет вид

$$W = X + jY = j \frac{\Theta^2}{2 \cos^2 \varphi}. \quad (29)$$

Таким образом, вблизи начала координат задний электрод совпадает с плоскостью $Y = 0$ ($X < 0$), а передний — с плоскостью $Y = 0$ ($X > 0$) (см. рис. 4 линии OA' и OB' соответственно). Поэтому при нахождении нулевой эквипотенциали целесообразно численное интегрирование начинать с точек

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= h, & \Psi_0 &= h \text{ (задний электрод),} \\ \Phi_0 &= h, & \Psi_0 &= -h \text{ (передний электрод),} \end{aligned} \quad (30)$$

где h — шаг интегрирования. При расчете ненулевых эквипотенциалей можно, очевидно, начинать интегрирование (16) непосредственно от точек на граничных траекториях пучка. Если ведется расчет эквипотенциали, пересекающей траекторию в точке $\Phi = \Phi_a, \Psi = 0$, то соответствующий безразмерный потенциал рассчитывается по формуле (4) с учетом (20).

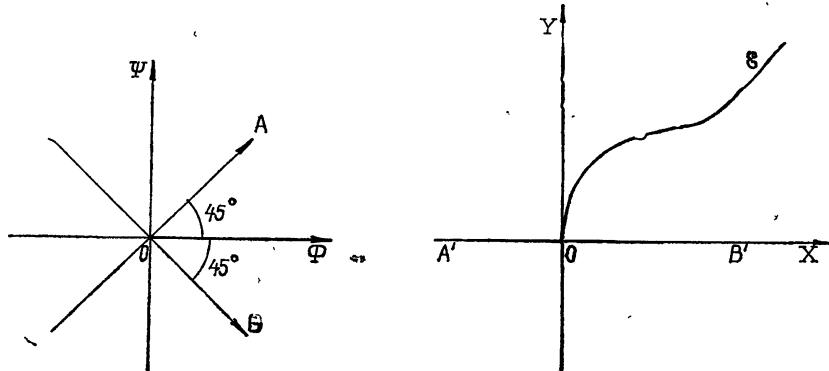


Рис. 4. Конформное преобразование.

Луч 0Φ переходит в граничную траекторию S . В окрестности начала координат OA и OB переходят соответственно в $0A'$ и $0B'$.

На рис. 5 показаны эквипотенциали и траектории (пунктир) в плоскости X , Y для параметров пучков, указанных в табл. 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5
γ	0	0,1	0,3	0,5	1,0
φ	30	25	20	15	10

Во всех вариантах условие $\varphi > \varphi_k$ выполнено (ср. с рис. 2). Переход от плоскости Θ к плоскости W дает реализуемые формы эквипотенциалей, если преобразующая функция однолистна. Расчеты показали, что для параметров таблицы конформность сохраняется до $\Psi = 2$.

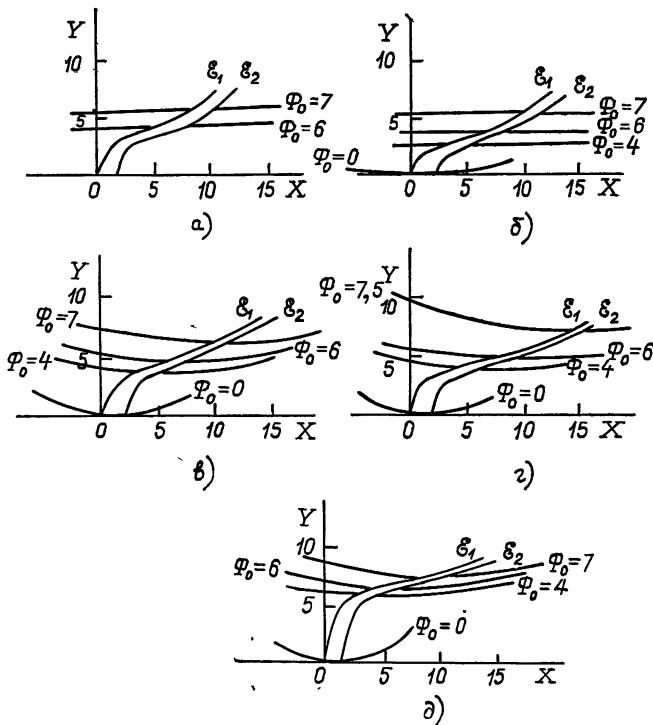


Рис. 5. Эквипотенциали и траектории для пучков с различными параметрами; а) $\gamma = 0$, $\varphi = 30^\circ$; б) $\gamma = 0,1$, $\varphi = 25^\circ$; в) $\gamma = 0,3$, $\varphi = 20^\circ$; г) $\gamma = 0,5$, $\varphi = 15^\circ$; д) $\gamma = 1,0$, $\varphi = 10^\circ$ (Φ_0 — анодные потенциалы).

4. КОНФИГУРАЦИЯ ЭЛЕКТРОДОВ И РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПУШЕК

Приведенный расчет позволяет определить геометрию электродов пушки, формирующей пучок с заданным током и адиабатическим инвариантом. Однако если не изменить форму анода, то весь пучок попадет на этот электрод. В системах формирования ламинарных пучков необходимость коррекции анода связана с внесением рассеивающей анодной линзы и не вызывает серьезных затруднений. В пушках, предназначенных для формирований ВЭП, применение отверстий в анодах должно в общем приводить к резким изменениям электростатического поля в пространстве и соответственно к неконтролируемым нарушениям адиабатичности. Последовательное решение задачи об оптимизации формы анода связано с большими трудностями.

В качестве наводящего можно использовать то соображение, чтобы коррекция приводила к малым возмущениям электростатического поля на катоде и возможно более плавным его изменениям в остальных областях пушки. Указанный подход соответствует так называемому «принципу суперпозиции», развитому в [10], и условиям адиабатичности. Примером может служить пушка со слабым пространственным зарядом. На рис. 6 а показана исходная форма анода, соответствующая рис. 5 а, а на рис. 6 б даны электроды реальной пушки, обеспечивающей малый скоростной разброс, что подтверждено численными расчетами [5]. Как видно, при коррекции приосевая область анода должна быть удалена, а ту часть анода, которая расположена на периферии, следует плавно изогнуть вдоль пучка. При этом конфигурация анода над эмитирующими пояском практически не меняется и электрическое поле на катоде остается прежним. Электрическое поле в дальней зоне изменяется плавно, и оба сформулированных выше условия можно считать выполненными. Отметим, что по мере увеличения ширины пояска соблюдение этих условий затрудняется и скоростной разброс возрастает.

На основе подобного подхода сравнительно просто найти конфигурацию электродов пушки при наличии пространственного заряда, взяв в качестве исходных эквипотенциали на рис. 5. Так, на рис. 7 показана электродная система для $\gamma = 0,5$, $\varphi = 15^\circ$.

Ясно, что выбранная геометрия может рассматриваться как отправная для последующих уточнений. Надежным методом контроля является непосредственный расчет траекторий с учетом пространствен-

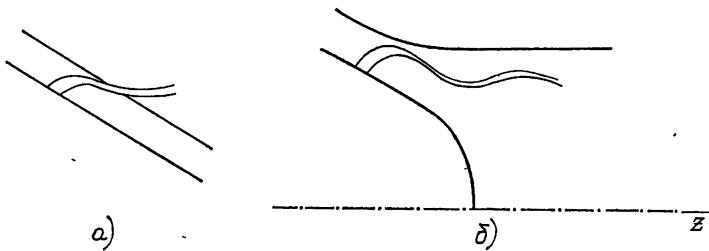


Рис. 6. Коррекция электродов в пушке с малым пространственным зарядом;
а) исходная форма, б) окончательная форма электродов.

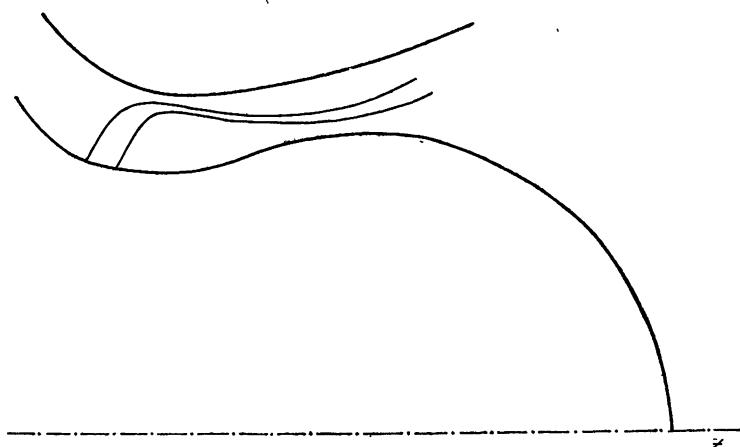


Рис. 7. Конфигурация электродов пушки для $\gamma = 0,5$; $\varphi = 15^\circ$.

ногого заряда. Если трудность проведения подобного расчета не слишком велика, то комбинация обоих методов (синтеза и анализа) дает приемлемую основу для проектирования систем формирования интенсивных ВЭП. В первом приближении можно ограничиться вычислением позиционного скоростного разброса без учета пространственного заряда. Этот расчет имеет смысл, если одновременно контролировать малость возмущения электрического поля на катоде по сравнению с исходной формой электродов типа рис. 5.

Расчет основных параметров пушки основан на следующих уравнениях, справедливых для плоской модели в адиабатическом и параксиальном (по магнитному полю) приближениях:

$$I = 2\pi R_k t_l d j_k; \quad (31)$$

$$E_k^{(0)} = U_a/d; \quad (32)$$

$$\alpha = \frac{B_0}{B_k} = \frac{R_k^2}{R_0^2}; \quad (33)$$

$$v_{\perp} = \sqrt{t_{\perp} 2\eta U_0} = \frac{E_k \cos \varphi}{B_k} \sqrt{\alpha (1 + \gamma^2)}; \quad (34)$$

$$\gamma = \frac{j_k}{\epsilon_0 \eta E_k B_k}; \quad (35)$$

$$\frac{\eta B_k^2 d}{E_k \cos^2 \varphi} = H_a; \quad (36)$$

$$t_E = \frac{E_k}{E_k^{(0)}} = \frac{H_a}{G_a}; \quad (37)$$

$$R_a = R_k + d \cos \psi. \quad (38)$$

В этих уравнениях E_k и $E_k^{(0)}$ — напряженность электрического поля на катоде при учете пространственного заряда и в холодном диоде соответственно; $t_l = l/d$ — отношение ширины эмиттирующего пояска к расстоянию анод — катод (рис. 7); R_k — радиус эмиттера; t_{\perp} — отношение осцилляторной энергии электронов в рабочем пространстве к их полной энергии.

Уравнение (33) — следствие параксиальности пучка по магнитному полю. Уравнение (34) — интеграл энергии в нерелятивистском приближении и следствие сохранения поперечного адиабатического инварианта (ср. с (13)). Уравнение (36) и функция

$$H_a = \frac{\Phi_a^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi - \cos \Phi_a + 1 + \gamma \left(\frac{\Phi_a^3}{6} \operatorname{tg}^2 \varphi + \Phi_a - \sin \Phi_a \right) \quad (39)$$

получаются при делении (2) на $N \cos \varphi$ и подстановке в правую часть $\Phi = \Phi_a$ — угла пролета до анодной эквипотенциали. Левая часть (36) — безразмерное расстояние катод — анод. Функция G_a определена соотношением (4) при учете (20).

Выразим с помощью (31) — (38) основные параметры пушки через остальные величины. После подстановки численных значений физических констант получаем (I — в А, U — в кВ, E — в кВ/мм, B — в кГс, j_k — в A/cm^2 , длины — в мм).

$$I = 1,07 \frac{t_E t_l \gamma t_{\perp}^{1/2} U_0^{1/2} E_k^{(0)} R_0 H_a \cos \varphi}{(1 + \gamma^2)^{1/2}}; \quad (40)$$

$$j_k = 10,4 \frac{t_E^{5/3} \gamma (1 + \gamma^2)^{1/3} (E_k^{(0)})^{5/3} B_0^{1/3} \cos^{2/3} \varphi}{t_{\perp}^{1/3} U_0^{1/3}}; \quad (41)$$

$$U_a = 1,32 \frac{t_{\perp}^{2/3} U_0^{2/3} (E_k^{(0)})^{2/3} H_a \cos^{2/3} \varphi}{t_E^{1/3} (1 + \gamma^2)^{2/3} B_0^{2/3}}; \quad (42)$$

$$\alpha = 1,52 \frac{t_{\perp}^{1/3} U_0^{1/3} B_0^{2/3}}{t_E^{2/3} (E_k^{(0)})^{1/3} (1 + \gamma^2)^{1/3} \cos^{2/3} \varphi}. \quad (43)$$

Формулы (40) — (43), а также (32), (33), (37), (38) позволяют рассчитать основные конструктивные параметры пушки, если известны величины B_0 , U_0 , R_0 , t_{\perp} , $E_k^{(0)}$, t_l , φ , γ , Φ_a . Среди них первые четыре величины определяются задаваемыми частотой колебаний, энергией электронов в рабочем пространстве и условиями эффективности взаимодействия; $E_k^{(0)}$ — допустимая напряженность поля (по электрическому пробою промежутка анод—катод)*. Коэффициент t_l ограничен допустимым позиционным скоростным разбросом. Коэффициент t_E характеризует степень уменьшения электрического поля на катоде под действием пространственного заряда (ср. (42)). Для обычных МИП t_E не ниже 0,9, тогда как для пушек, получаемых методом синтеза, t_E можно уменьшать до 0,5 с последующей численной или экспериментальной проверкой скоростного разброса. Согласно (37) t_E связан с G_a и H_a , которые определяются через γ и Φ_a (уравнения (4), (20) и (39)). Угол пролета до анода, Φ_a , является в некоторой степени свободным параметром. Однако использование чрезмерно больших Φ_a дает излишне большие U_a и d , тогда как при малых Φ_a не успевают сформироваться осциллирующие траектории. Компромиссные значения Φ_a близки, по-видимому, к 2π . Задание t_E и Φ_a определяет γ с помощью (4), (20), (39), (37).

Величина угла φ , если $\cos \varphi \approx 1$, слабо влияет на параметры пушки. Отметим, что увеличение φ затрудняет, как правило, применение широких эмиттеров из-за возрастания позиционного скоростного разброса. Поэтому угол φ следует выбирать по возможности малым, т. е. на 10—20% превышающим φ_k , который определяется по величине γ из рис. 2.

Какие же токи и первеанс характерны для пушек, спроектированных описанным выше способом. Оценим I и $P = I/U_0^{3/2}$, взяв в качестве расчетных следующие величины: $\gamma = 0,3$, $\varphi = 20^\circ$, $\Phi_a = 6$, $t_l = 0,5$, $t_{\perp} = 0,8$, $U_0 = 30 \text{ кВ}$, $R_0 = 10 \text{ мм}$, $E_k^{(0)} = 3 \text{ кВ/мм}$. Из (39), (4), (20) и (37) $H_a = 5,8$, $G = 10,5$, $t_E = 0,55$. По (40) $I \approx 70 \text{ А}$, $P = 12 \frac{\text{мкА}}{\text{Б}^{3/2}}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Схема определения параметров пушек и численный пример показывают, что предлагаемый метод позволяет сравнительно просто спроектировать электронно-оптическую систему с достаточно большим первеанном и током пучка. Напомним, однако, что расчет основывался

* Если при подстановке $E_k^{(0)}$ и остальных величин в (41) j_k превышает достижимую плотность тока для выбранного типа эмиттера, то вместо $E_k^{(0)}$ следует задавать $(j_k)_{\max}$, а $E_k^{(0)}$ находить из (41).

на некоторых идеализациях, главными из которых являются пренебрежение цилиндричностью и влиянием пространственного заряда в переходной области. Учет отмеченных факторов существенно усложняет расчетную процедуру. Если тем не менее использовать метод в сочетании с траекторным анализом, учитывающим пространственный заряд, то такая комбинированная методика является достаточно надежной и может быть положена в основу проектирования высокоеффективных систем формирования винтовых пучков.

Автор благодарен Л. В. Грицкой и В. Г. Трошину за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. И. Юлпатор, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. Ш. Е. Цимлинг, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 8, 1247 (1972).
3. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 1, 141 (1973).
4. С. И. Молоковский, А. Д. Сушкин, Интенсивные электронные и ионные пучки, изд. Энергия, М., 1972.
5. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимлинг, ЖТФ, 18, № 8, 1695 (1973).
6. G. S. Kinloch and N. J. Taulor, IRE Trans., ED-9, № 1, 1 (1962).
7. И. В. Алямовский, Электронные пучки и электронные пушки, изд. Сов. радио, М., 1965.
8. С. Я. Брауде, ЖТФ, 10, № 3, 217 (1940).
9. Л. Д. Ландау, Е. Н. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
10. П. Кирштейн, Г. Кайно, У. Уотерс, Формирование электронных пучков, изд. Мир, М., 1970.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
30 марта 1976 г.,
после доработки
29 ноября 1976 г.

SYNTHESIS OF SYSTEMS FORMATION OF SCREW ELECTRON BEAMS

Sh. E. Tsimring

The synthesis of magnetron-injection guns used to form intensive screw electron beams in cyclotron resonance masers is described. The applicability of the synthesis method is due to the existence of laminar streams in the gun region which are transformed into screw electron beams in the transient region. The electrode configuration is determined. Estimated formulas are obtained for finding the main parameters of the guns.

УДК 533.9.082

ОБ ЭЛЕКТРОДНОМ МЕТОДЕ ДИАГНОСТИКИ РАДИАЦИОННОЙ ПЛАЗМЫ

B. B. Заиончковский, A. N. Кондратенко

Методом общего анализа исходных уравнений несамостоятельного разряда в ионизованном газе получен общий вид вольт-амперной характеристики, что позволяет на основе ее экспериментального определения вычислять концентрации свободных носителей заряда в плазме. Для газов с электронной проводимостью значения концентраций могут быть получены двумя независимыми способами. Экспериментальная проверка обоих методов расчета для ксеноновой плазмы, образованной воздействием гамма-излучения, дала расходимость в значениях концентраций менее 20% от среднего значения.

Интерес к исследованиям радиационной плазмы, получаемой воздействием на газ внешнего ионизирующего излучения, определяется современным развитием технических средств, обеспечивающих создание высокоинтенсивных потоков проникающей радиации, например, мощных гамма-излучателей на основе изотопа Co^{60} , ускорителей электронов высоких энергий и т. д. Определение концентраций свободных носителей заряда для расчета электропроводности такой плазмы является одной из важных задач ее диагностики. Примером могут служить получившие в последнее время широкое распространение исследования так называемых электро-ионизационных лазеров, в которых используется несамостоятельный тлеющий разряд повышенного давления с ионизацией газа вспомогательным пучком быстрых электронов. В этих работах (например, [1, 2]) оценка величины концентрации электронов в плазме производится либо путем использования омического участка вольт-амперной характеристики нестационарной формы разряда, либо на основе расчета ионизационных потерь электронного пучка в газе.

В данной работе рассмотрена возможность использования для целей диагностики радиационной плазмы нелинейного начального участка вольт-амперной характеристики стационарного несамостоятельного разряда. В этом случае процессы переноса заряда в ионизованном газе для одномерной модели можно описать, пренебрегая диффузионным дрейфом носителей заряда, следующей системой уравнений [3] (система единиц СИ):

$$\frac{d}{dx}(n_p b_p E) = \nu - \beta n_p n_n, \quad -\frac{d}{dx}(n_n b_n E) = \nu - \beta n_p n_n, \quad (1)$$

$$\frac{\epsilon_0}{e_0} \frac{dE}{dx} = n_p - n_n, \quad n_p(0) = 0, \quad n_n(d) b_n = \gamma n_p(d) b_p,$$

$E(x)$ — напряженность электрического поля в промежутке между анодом ($x = 0$) и катодом ($x = d$), b_p , b_n — подвижности положительных и отрицательных носителей заряда соответственно, принимаемые в даль-

нейшем не зависимыми от E , n_p , n_n — концентрации положительных и отрицательных носителей заряда соответственно, β — коэффициент рекомбинации в парных соударениях, ν — частота образования пар свободных носителей заряда в единице объема газа, принимаемая постоянной во всем промежутке, γ — второй коэффициент Таунсенда, $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — диэлектрическая проницаемость вакуума. Используя плотность тока $j = e_0 E (b_p n_p + b_n n_n)$ как параметр и исключив из (1) n_p и n_n , приходим к краевой задаче 2-го рода относительно E , решение которой позволяет рассчитать вольт-амперную характеристику разряда из дополнительного граничного условия

$$\int_0^d E(x; j) dx = U, \quad (2)$$

где U — разность потенциалов между электродами. Хотя эта задача при условии $\gamma = 0$ исследована различными приближенными способами (например, методом последовательных приближений Ми [4] или с помощью рядов Зеелигером [5]), применение результатов этих исследований для целей диагностики затруднительно вследствие сложности необходимых расчетов.

Покажем, что в важном частном случае, когда в некоторой части межэлектродного промежутка существует область квазинейтральной плазмы, вид вольт-амперной характеристики разряда может быть получен методом общего функционального анализа исходных уравнений задачи. Введением безразмерных переменных

$$\begin{aligned} z(x) &= (b_p + b_n)^2 (b_p b_n j)^{-1} e_0 \nu x, \\ y(z) &= e_0 (b_p + b_n)^{\nu/2} \beta^{-1/2} E(z), \end{aligned} \quad (3)$$

преобразуем систему уравнений (1) к виду

$$\frac{\epsilon_0 \beta (b_p + b_n)}{2 e_0 b_p b_n} \frac{d^2 y^2}{dz^2} = 1 - \left(1 + \frac{\epsilon_0 \beta}{2 e_0 b_p} \frac{dy^2}{dz} \right) \left(1 - \frac{\epsilon_0 \beta}{2 e_0 b_n} \frac{dy^2}{dz} \right) y^{-2}; \quad (4)$$

$$\left(\frac{dy^2}{dz} \right)_{z=0} = - \frac{2 e_0 b_p}{\epsilon_0 \beta}; \quad (5)$$

$$\left(\frac{dy^2}{dz} \right)_{z=z(d)} = \frac{2 e_0 b_n}{\epsilon_0 \beta} \left[1 - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \left(1 + \frac{b_p}{b_n} \right) \right]. \quad (6)$$

Так как для произвольной точки плазменного столба $\left(\frac{dE}{dx} = 0 \right)$

справедливо частное решение $y(z) = 1$, можно разделить краевую задачу (4) — (6), рассматривая ее отдельно на интервалах $[0, x_0]$ и $[x_0, d]$, где x_0 — некоторая точка внутри области квазинейтральной плазмы. В этом случае для промежутка $[0, x_0]$ краевым условием при $x = x_0$ можно выбрать асимптотическое поведение функции $y(z)$ при больших значениях аргумента:

$$y(\infty) = 1, \quad (7)$$

так как условие квазинейтральности плазмы должно выполняться тем точнее, чем меньше j . Так как уравнение (4) и граничные условия (5) и (7) такой задачи не зависят в явном виде от j , то не зависят в явном

виде от j функция $y(z)$ и ее первообразная $Y(z)$ ($y = \frac{dY}{dz}$). При этом в соответствии с (7) справедливо предельное равенство

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = z. \quad (8)$$

Используя приближение $Y[z(x_0)] \approx z(x_0)$, оправдываемое предположением о существовании квазинейтральной плазмы в окрестности x_0 , находим

$$U_1 = \int_0^{x_0} E(x) dx = e_0^{-2} v^{-3/2} \beta^{1/2} b_p b_n (b_p + b_n)^{-3} j^2 \int_0^{z(x_0)} y(z) dz = \\ = e_0^{-1} \beta^{1/2} v^{-1/2} (b_p + b_n)^{-1} x_0 j + k_1 j^2, \quad (9)$$

где U_1 — разность потенциалов между точками $x = 0$ и $x = x_0$; k_1 — постоянная интегрирования, не зависящая от j .

Аналогичное рассмотрение можно провести для области $[x_0, d]$, произведя в исходных уравнениях замену переменной $x' = d - x$. Суммируя оба результата, окончательно приходим к вольт-амперной характеристике вида

$$U = e_0^{-1} \beta^{1/2} v^{-1/2} (b_p + b_n)^{-1} dj + k j^2 = r j + k j^2. \quad (10)$$

На основе проведенного анализа можно предположить справедливость и обратного утверждения: наличие начального линейного участка характеристики $U/j = f(j)$ несамостоятельного разряда указывает на существование области квазинейтральной плазмы в некоторой части межэлектродного промежутка для всех значений j внутри интервала линейности. Исходя из экспериментального значения коэффициента r можно вычислить концентрации свободных носителей заряда в плазме [3]:

$$n = v^{1/2} \beta^{-1/2} = d [r e_0 (b_p + b_n)]^{-1}. \quad (11)$$

Выражение для коэффициента k в общем случае неизвестно, однако для газов с электронной проводимостью $(b_p/b_n \ll 1)$ оно без труда рассчитывается путем использования кусочно-линейного представления напряженности электрического поля [6] в модели Томсона [7]:

$$k = (4 \epsilon_0 b_p e_0^3 v^3)^{-1/2} \left[1 + \frac{\gamma \beta \epsilon_0}{e_0 b_n} \right] (1 + \gamma)^{-2}. \quad (12)$$

В этом случае получаем независимое дополнительное соотношение:

$$n = k^{-1/3} (e_0 \beta)^{-1/2} (4 \epsilon_0 b_p)^{-1/6}. \quad (13)$$

Хорошее совпадение результатов вычислений n из соотношений (11) и (13) получено для ксеноновой плазмы. Вольт-амперная характеристика несамостоятельного разряда (в координатах j , U/j) для макета с плоскопараллельными электродами представлена на рисунке. Одномерность модели обеспечивалась охранным кольцом на одном из электродов, центральная часть которого была включена в цепь измерения тока. Ионизация ксенона в межэлектродном промежутке ($d = 4 \text{ см}$) осуществлялась воздействием гамма-излучения внешнего источника (изотоп Co^{60}) с мощностью экспозиционной дозы излучения в месте установки макета $630 \frac{P}{c}$. В соответствии с данными, приведенными в [8], для разряда в Хе при давлении 3 atm и температуре 300 K при-

нималось $b_n = 0,047 \text{ м}^2 \cdot B^{-1} \cdot c^{-1}$, $b_p = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot B^{-1} \cdot c^{-1}$, $\beta = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \cdot c^{-1}$, $\gamma < 10^{-2}$ (электроды выполнены из нержавеющей стали).

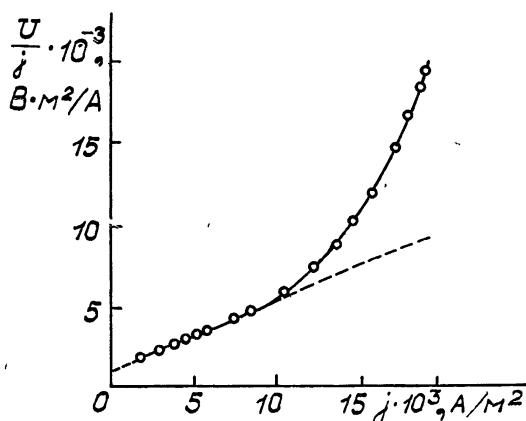


Рис. 1.

Для экспериментальных значений $r = 900 \text{ м}^2 \cdot BA^{-2}$ и $k = 4,5 \cdot 10^5 \text{ м}^4 \cdot BA^{-2}$ находим соответственно: $n = 6 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$, $n = 8,5 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$. Используя среднее значение $v = 7,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3} \cdot c^{-1}$, находим плотность тока насыщения $j_{\text{нас}} = e_0 v d = 0,48 \text{ A} \cdot \text{м}^{-2}$. Как видно из рисунка, линейная часть характеристики $U/j = f(j)$ разряда в Xe ограничивается плотностью тока $j \leq 0,025 j_{\text{нас}}$. Так как в исходной системе уравнений величины j , v и d входят в (6) только в виде параметра j/vd , то условие $j \leq 0,025 j_{\text{нас}}$ должно определять существование области квазинейтральной плазмы в некоторой части межэлектродного промежутка в общем случае несамостоятельного разряда в Xe при указанном выше давлении. В связи с этим заметим, что полученное условие ограничения плотности тока проводимости может быть выбрано в качестве критерия применимости приближенной теории и для нестационарного несамостоятельного разряда в Xe в модели с плазменным столбом [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов и др., Письма в ЖЭТФ, 14, 421 (1971).
2. Е. П. Велихов и др., ЖЭТФ, 65, 543 (1973).
3. В. Л. Грановский, Электрический ток в газе, изд. Наука, М., 1971.
4. G. Mie, Ann. Rhys., 13, 857 (1904).
5. R. Seeliger, Ann. Phys., 33, 319 (1910).
6. В. В. Заюнчковский, А. Н. Кондратенко, УФЖ, 20, 574 (1975).
7. I. J. Thomson and G. P. Thomson, Conduction of Electricity through Gases, Cambridge, 1933, v. 2.
8. И. Мак-Даниель, Процессы столкновений в ионизованных газах, изд. Мир, М., 1967.

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
21 мая 1976 г.

ON ELECTROD METHOD OF DIAGNOSTICS OF RADIATION PLASMA

V. V. Zaitonchkovsky, A. N. Kondratenko

A general form of the volt-ampere characteristics is obtained by the method of a general analysis of initial equations of non-autonomous discharge in ionized gas that permits to calculate the concentration of free carriers of the charge in plasma on the basis of its experimental determination. The values of concentrations for gases with electron conductivity may be obtained by two independent methods. An experimental verification of both methods of the calculation for kseon plasma formed by gamma-radiation effect yielded the divergence in the concentration values less than 20% of the mean value.

УДК 537.212

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТА МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ n -InSb В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Л. И. Кац, А. А. Сафонов, А. Ю. Сомов

Приведены результаты расчета магнитосопротивления n -InSb в сильных электрических полях при 77 К в приближении смещенной максвелловской функции распределения носителей с учетом непарараболичности зоны проводимости для рассеяния на полярных оптических фонах и ионизованных примесях. Получено хорошее согласие теории с проведенным экспериментом по разогреву электронов импульсными электрическими полями напряженностью до 200 В/см. Изучение поведения магнитосопротивления в сильных электрических полях позволило сформулировать ограничения на режимы работы магниторезистивного датчика.

В материалах с высокой подвижностью, а именно такие материалы и представляют интерес с точки зрения практического использования магниторезистивного эффекта, разогрев носителей заряда начинает играть существенную роль уже в сравнительно небольших полях (порядка 10—50 В/см для n -InSb при 77 К). Поэтому магниторезистор, к которому для повышения его чувствительности приложено постоянное электрическое поле, как правило, работает в условиях разогрева носителей. Это положение относится и к случаю высокочастотного магнитного поля, когда сильным может оказаться индуцированное электрическое поле.

Так как магниторезистивный эффект является одним из классических методов изучения кинетики носителей заряда в полупроводнике, существует обширная литература, в том числе и по влиянию разогрева носителей на магнитосопротивление полупроводников. Тем более что косвенным образом эти задачи решаются при изучении подвижности носителей в сильных полях [1—4]. Однако попытка сопоставления результатов теории и эксперимента оказалась корректной лишь в узком температурном интервале. Такое сравнение поведения подвижности проведено в работе [4] в широком интервале температур в отсутствие магнитного поля и отмечается значительное расхождение данных расчета и эксперимента при температурах выше 30—50 К. В качестве одной из возможных причин этого автор [4] рассматривает существенную непарараболичность зоны проводимости n -InSb в указанной температурной области. Теоретический расчет относительного магнитосопротивления и дрейфовой скорости носителей в n -InSb при 77 К с учетом непарараболичности зоны проводимости проведен в [5], где, однако, рассеяние на полярных оптических фонах рассматривалось в приближении низкотемпературного времени релаксации. Это приближение является оправданным только в области теплых электронов, когда $T/T_0 \ll 1$ и $T/\theta \ll 1$. Вследствие этого расчет $\Delta\rho/\rho$ в зависимости от поля дал относительно небольшое уменьшение $\Delta\rho/\rho$ при разогреве (так, в поле 200 В/см рассчитанное значение относительного магнитосопротивления уменьшилось лишь в 1,1 раза по сравнению с его значением в слабых

полях), что плохо согласуется с полученными нами экспериментальными результатами.

В данной работе предпринята попытка построения расчетной модели зависимости $\Delta\rho/\rho$ от электрического поля, соответствующей результатам корректно поставленного эксперимента. Особенностью рассматриваемой модели является отсутствие ограничения на величину разогрева носителей. При этом условия эксперимента по величинам электрических и магнитных полей и температурному интервалу соответствуют реальным условиям работы магниторезистора как элемента измерительной цепи [6]. Проведенное сравнение позволит сформулировать конкретные рекомендации по электрическим режимам работы магниторезисторов.

Расчет элементов тензора проводимости и относительного магнитосопротивления проведен в приближении смещенной максвелловской функции распределения с эффективной электронной температурой T , аналогичной [5]. Выражения для интегралов столкновений для рассеяния на полярных оптических фононах и ионизированных примесях взяты в виде, предложенном в работе [7]. Закон дисперсии энергии носителей рассматривается в форме кэйновского [8].

Выражение для эффективной электронной температуры в данном приближении определяется из уравнения баланса энергии носителей, полученного из кинетического уравнения Больцмана домножением на ε и интегрированием по импульсному пространству:

$$\sigma_{xx}^0 F^2 = \frac{4}{3} e n F_0 N_0 k \theta \sqrt{\frac{kT}{2m}} \left[\exp\left(\frac{\theta}{T_0} - \frac{\theta}{T}\right) - 1 \right] \frac{J_2(T)}{J_1(T)},$$

где n — концентрация носителей, N_0 — равновесная планковская функция распределения фононов, m — эффективная масса, T_0 — температура решетки, e — заряд электрона, F — напряженность сильного электрического поля, σ_{ij}^0 — компоненты тензора проводимости. Выражение для F_0 определено в работе [7], а интегралы $J_1(T)$ и $J_2(T)$ имеют вид

$$J_1(T) = \int_0^\infty x^{3/2} (x - 1) \sqrt{\gamma} \exp(-x) dx,$$

$$J_2(T) = \int_0^\infty \Phi(x) (2\gamma - 1) \left(2\gamma + \frac{2k\theta}{\varepsilon_g} - 1 \right) \exp(-x) dx,$$

где $\gamma = 1 + \varepsilon/\varepsilon_g$, ε_g — ширина запрещенной зоны, а функция $\Phi(x)$ дана в работе [7].

При получении уравнения баланса энергии считалось, что электрическое поле F ориентировано по оси x , магнитное поле H по z , а также предполагалось, что форма образца близка к оптимальной для наблюдения магниторезистивного эффекта (отношение длины образца к его толщине мало).

Компоненты тензора σ_{ij}^0 определяются из уравнения баланса импульса:

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{\omega_p^2 v}{\omega_c^2 + v^2} \frac{J_{3/2}(T)}{J_{1/2}(T)},$$

$$\sigma_{xy}^0 = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega_c^2 + v^2} \frac{J_{3/2}(T)}{J_{1/2}(T)},$$

где $\omega_p^2 = e^2 n / m$, $\omega_c = eH/mc$, v — скорость света.

В выражениях для компонент тензора проводимости зависимость эффективной частоты соударений носителей с передачей импульса следующим образом определяется механизмами рассеяния:

а) для рассеяния на полярных оптических фононах —

$$\nu = \frac{2e F_0 N_0}{3 \sqrt{2m k T}} \frac{J_3(T)}{J_{1/2}(T)},$$

б) для рассеяния на ионизованных примесях —

$$\nu = \frac{\pi e^4 N_D}{\varepsilon_L^2 \sqrt{2m} (kT)^{3/2}} \frac{J_4(T)}{J_{1/2}(T)},$$

где N_D — концентрация ионизованных примесей.

Интегралы $J_{k/2}(T)$, $J_3(T)$ и $J_4(T)$ имеют вид

$$J_{k/2}(T) = \int_0^\infty x^{3/2} \gamma^{k/2} \exp(-x) dx,$$

$$J_3(T) = \int_0^\infty \left(2\gamma + 2 \frac{k\theta}{\varepsilon_g} - 1 \right) (2\gamma - 1) [A_1(T) + A_2(T)] \exp(-x) dx,$$

$$J_4(T) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{x}{\gamma}} \left[\ln(\xi + 1) - \frac{\xi}{\xi + 1} \right] \exp(-x) dx,$$

где

$$A_1(T) = \sqrt{x\gamma} \left[\exp\left(\frac{\theta}{T_0} - \frac{\theta}{T}\right) \Lambda(x) \sqrt{\frac{x + \theta/T}{\gamma + k\theta/\varepsilon_g}} - \Phi(x) \sqrt{\frac{x}{\gamma}} \right],$$

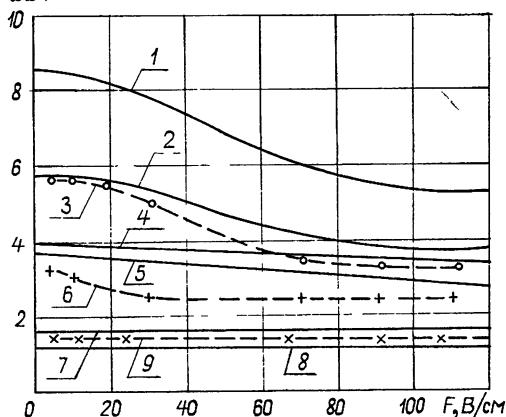
$$A_2(T) = \sqrt{\left(\gamma + \frac{k\theta}{\varepsilon_g}\right) \left(x + \frac{\theta}{T}\right)} \left[\sqrt{\frac{x}{\gamma}} \Lambda(x) - \exp\left(\frac{\theta}{T_0} - \frac{\theta}{T}\right) \times \right. \\ \left. \times \Phi(x) \sqrt{\frac{x + \theta/T}{\gamma + k\theta/\varepsilon_g}} \right],$$

$\sigma_{xx}^0, \text{OM}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$

а выражения для $\Lambda(x)$ и ξ даны в работе [7].

Рис. 1. Зависимость проводимости n -InSb при 77К от напряженности электрического поля.

Кривые 1, 4 и 7 — расчет для полярного оптического рассеяния ($H=0$, 200 и 500 Э соответственно); 2, 5 и 8 — расчет для полярного оптического рассеяния и рассеяния на ионизованных примесях ($H=0$, 200 и 500 Э соответственно); 3, 6 и 9 — эксперимент ($H=0$, 200 и 500 Э соответственно).



Расчет проводимости σ_{xx}^0 как функции электрического поля для трех значений магнитного поля (0, 200 и 500 Э) представлен на рис. 1. Кривые 1, 4 и 7 соответствуют рассеянию на полярных оптических фононах, а 2, 5 и 8 — на полярных оптических фононах и ионизованных примесях ($N_D = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$). Данные эксперимента хорошо согласуются

ются с рассчитанными значениями для случая комбинированного рассеяния на полярных оптических фононах и ионизованных примесях. Длительность импульсов греющего поля в эксперименте была равна 3 мкс, частота следования импульсов 50 Гц. Образец *n*-InSb имел подвижность $5 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, концентрацию $2,3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, размеры $10 \times 4 \times 0,3 \text{ мм}^3$.

Результаты расчета и экспериментально снятые значения относительного магнитосопротивления $\Delta\rho/\rho$ в процентах к его значению в слабых полях для $H = 200 \text{ Э}$ даны на рис. 2. И теория, и данные эксперимента говорят о более резкой зависимости $\Delta\rho/\rho$ от поля, чем это предсказывалось в [5] (относительное магнитосопротивление уменьшилось более чем в два раза).

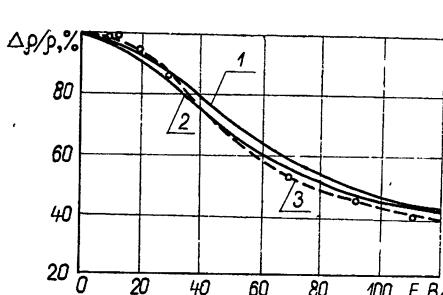


Рис. 2.

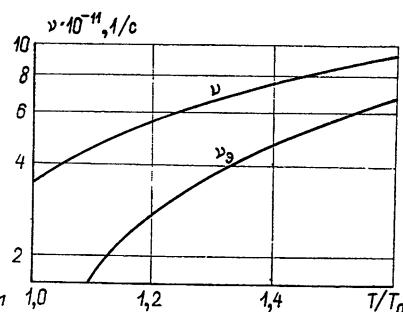


Рис. 3.

Рис. 2. Зависимость относительного магнитосопротивления от напряженности электрического поля в процентах к его значению в слабых полях при $H = 200 \text{ Э}$. Кривая 1 — расчет для полярного оптического рассеяния, 2 — расчет для полярного оптического рассеяния и рассеяния на ионизованных примесях, 3 — эксперимент. Рис. 3. Теоретические зависимости средних частот рассеяния импульса и энергии от относительной электронной температуры.

Точность эксперимента, определяемая в основном точностью измерения импульсных значений тока и напряжения, не хуже $\pm 5\%$. С учетом этого согласно рис. 2 необходимо отметить хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных. Это обстоятельство, с одной стороны, является доказательством справедливости принятой расчетной модели для исследованного типа материала, с другой стороны, оказывается возможным сделать ряд практически важных выводов, в частности, что электрические поля в пределах 100—200 В/см существенным образом снижают магниторезистивный эффект. Это явление следует учитывать, например, при рассмотрении ударной ионизации в магнитном поле, при интерпретации результатов по пинч-эффекту в магнитном поле. Важен практически и тот факт, что повышение чувствительности магниторезисторов за счет увеличения дрейфового поля невозможно, т. е. устройства типа СВЧ-измерителей мощности, работающие на магниторезистивном эффекте [6], для достижения максимальной чувствительности и сохранения линейности характеристик должны располагаться в канализирующей системе в области минимальных значений электрических полей. Если учесть, что в прямоугольном волноводе $72 \times 34 \text{ мм}^2$ при проходящей мощности 100 кВт даже на расстоянии 1 мм от узкой стенки электрическое поле оказывается порядка 300 В/см, магниторезистивный датчик должен представлять пленку, толщина которой лежит в микронной области.

Практический интерес представляет и вопрос о неупругом характере рассеяния носителей на полярных оптических фононах при температуре ниже дебаевской ($\theta = 260 \text{ K}$). С этой целью были вычислены

средние частоты рассеяния энергии и импульса носителей. Результаты расчета представлены на рис. 3. Видно, что уже при $T/T_0 = 1,5$, чему соответствует $F = 120 \text{ В/см}$, значения ν и ν_s сравнимы по порядку величины. Это подтверждается также и результатами работы [9], в которой приведены данные по измерению времен релаксации энергии и импульса носителей методом сравнения стационарной и микроволновой проводимостей. Вследствие того, что рассеяние носителей в сильных электрических полях становится существенно неупругим, инерционность датчиков, работающих на эффекте разогрева (при этом инерционность определяется величиной ν_s) и на гальваномагнитных эффектах (инерционность связана с ν), оказывается одного порядка. При малых электрических полях инерционность магниторезистора на несколько порядков может быть меньше инерционности датчика на «горячих электронах». Это обстоятельство является еще одним доводом для использования магниторезисторов в слабых электрических полях.

Таким образом, в данной работе получено хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных по влиянию электрического поля на величину магниторезистивного эффекта и сформулированы ограничения на режимы работы магниторезистивного датчика в сильном электрическом поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Frohlich and B. V. Raghava re, Proc. Phys. Soc., B69, 433, 21 (1956).
2. R. Stratton, Proc. Roy. Soc., A246, 1246, 406 (1958).
3. H. Fujisada, S. Kataoka and A. C. Beer, Phys. Rev. B: Solid State, 3, № 10, 3249 (1971).
4. M. A. Kinch, Brit. J. Appl. Phys., 17, № 10, 1257 (1966).
5. I. Licea, Phys. Stat. Sol. (B), 39, № 1, 255 (1970).
6. Л. И. Кац, Д. Шехтер, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 3, 405 (1974).
7. Н. Н. Григорьев, И. М. Дыкман, П. М. Томчук, ФТТ, 10, № 4, 1058 (1968).
8. Е. О. Капе, J. Phys. Chem. Sol., 1, № 4, 249 (1957).
9. C. Dattagreyan and H. Hartnagel, Phys. St. Sol., 32, № 1, K45 (1969).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
10 мая 1976 г.

ON CALCULATION OF MAGNETO-RESISTANCE EFFECTS OF n-InSb IN STRONG ELECTRIC FIELDS

L. I. Kats, A. A. Safonov, A. Yu. Somov

The results of calculation of the magneto-resistance of n-InSb in strong electric fields at 77 K are given in the approximation of the bias Maxwell carrier distribution function. The conductivity zone for scattering by polar optical phonons and ionized mixtures are taken into account. A good agreement is obtained between the theory and the experiment made on heating the electrons by impulse electric fields of the intensity up to 200 v/cm. The study of the behaviour of the magneto-resistance in strong electric fields permitted to formulate the restrictions on the magneto-resistive transmitter operation.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.391.62—505.7

**ОПТИМАЛЬНАЯ САМОСИНХРОНИЗАЦИЯ
В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ЭКВИДИСТАНТНЫМ СПЕКТРОМ**

A. A. Мальцев

1. Рассмотрим модель N -модовой автоколебательной системы с эквидистантным спектром, схема которой показана на рис. 1 (u_k — напряжение на k -м контуре). Будем полагать, что расстояние между собственными частотами мод Δ много больше полосы контуров: $\Delta \gg \omega_k/Q_k = 1/rC$, $r_k = r$, $C_k = C$ ($k = 1, 2, \dots, N$), а настройка частот контуров осуществляется за счет L_k . Характеристики нелинейных активных элементов представим в виде

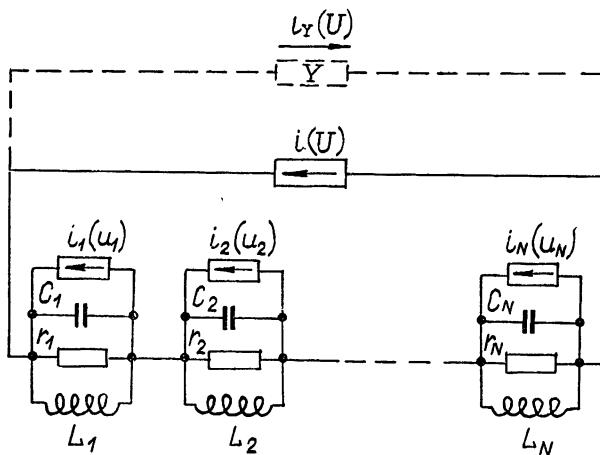


Рис. 1.

$$i_k(u_k) = s_0 u_k + \frac{s_1}{2} u_k^2 - \frac{s_2}{3} u_k^3, \quad i(U) = \frac{s_2^{\text{CB}}}{3} U^3, \quad (1)$$

где

$$U = \sum_{k=1}^N u_k, \quad s_0, s_2 > 0, \quad |s_2^{\text{CB}}| \ll s_2.$$

Последнее условие позволяет считать взаимную связь между модами слабой и значительно упрощает анализ работы системы.

Наличие в элементе связи нелинейности третьего порядка приведет к тому, что синхронные взаимодействия в системе будут осуществлять комбинационные тона только третьего порядка [1]. Каждое тройное взаимодействие мод с номерами $1 < l - r, l, l + r < N$ даст в уравнения для фаз члены вида

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{l-r} &= \delta_{l-r} - \dots - \lambda_{l-r}^{\text{TP}} \sin \vartheta_{l-r} - \dots + \xi_{l-r}(t), \\ \dot{\varphi}_l &= \delta_l - \dots - \lambda_l^{\text{TP}} \sin \vartheta_{l,r} - \dots + \xi_l(t), \\ \dot{\varphi}_{l+r} &= \delta_{l+r} - \dots - \lambda_{l+r}^{\text{TP}} \sin \vartheta_{l,r} - \dots + \xi_{l+r}(t), \end{aligned} \quad (2a)$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_{l-r}^{\text{tp}} &= -\frac{s_2^{\text{cb}}}{8C} \frac{R_l^2 R_{l+r}}{R_{l-r}}, \quad \lambda_{l+r}^{\text{tp}} = -\frac{s_2^{\text{cb}}}{8C} \frac{R_l^2 R_{l-r}}{R_{l+r}}, \\ \lambda_l^{\text{tp}} &= s_2^{\text{cb}} R_{l-r} R_{l+r} / 4C,\end{aligned}\quad (3a)$$

δ_k — малые расстройки, R_l — амплитуда напряжения на l -м контуре, $\xi_l(t)$ — малые случайные функции, представляющие шумы системы. Каждое четырехмодовое взаимодействие с номерами $1 \leq l-r, l, m, m+r \leq N$ дает члены

$$\begin{aligned}\varphi_{l-r} &= \delta_{l-r} - \dots - \lambda_{l-r}^{\text{чет}} \sin \vartheta_{lmr} - \dots + \xi_{l-r}(t), \\ \varphi_l &= \delta_l - \dots - \lambda_l^{\text{чет}} \sin \vartheta_{lmr} - \dots + \xi_l(t), \\ \varphi_m &= \delta_m - \dots - \lambda_m^{\text{чет}} \sin \vartheta_{lmr} - \dots + \xi_m(t), \\ \varphi_{m+r} &= \delta_{m+r} - \dots - \lambda_{m+r}^{\text{чет}} \sin \vartheta_{lmr} - \dots + \xi_{m+r}(t),\end{aligned}\quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_{l-r}^{\text{чет}} &= -\frac{s_2^{\text{cb}}}{4C} \frac{R_l R_m R_{m+r}}{R_{l-r}}, \quad \lambda_l^{\text{чет}} = \frac{s_2^{\text{cb}}}{4C} \frac{R_{l-r} R_m R_{m+r}}{R_l}, \\ \lambda_m^{\text{чет}} &= \frac{s_2^{\text{cb}}}{4C} \frac{R_{l-r} R_l R_{m+r}}{R_m}, \quad \lambda_{m+r}^{\text{чет}} = -\frac{s_2^{\text{cb}}}{4C} \frac{R_{l-r} R_l R_m}{R_{m+r}}.\end{aligned}\quad (36)$$

Согласно [1] обобщенные разности фаз ϑ_{lr} и ϑ_{lmr} выражаются в виде линейных комбинаций через $\vartheta_k = -\varphi_k + 2\varphi_{k+1} - \varphi_{k+2}$ ($k = 1, 2, \dots, N-2$). Стационарные значения амплитуд мод R_{0k} в первом приближении можно считать равными

$$R_{0k} \approx R_0 = 2 \sqrt{\frac{(s_0 - 1/r)}{s_2}}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\lambda_l^{\text{tp}} = -2\lambda_{l-r}^{\text{tp}} = -2\lambda_{l+r}^{\text{tp}} = -\lambda_{l-r}^{\text{чет}} = \lambda_l^{\text{чет}} = \lambda_m^{\text{чет}} = -\lambda_{m+r}^{\text{чет}} = \lambda, \quad (5)$$

где

$$\lambda = (s_0 - 1/r) s_2^{\text{cb}} / s_2 C.$$

2. Предположим, что собственные частоты контуров образуют строго эквидистантный спектр

$$\omega_k = \omega_1 + (k-1)\Delta \quad (\omega_1 \gg \Delta). \quad (6)$$

Тогда стационарным решением системы (2) будет

$$\varphi_k^0 = -\varphi_k + 2\varphi_{k+1} - \varphi_{k+2} = 0. \quad (7)$$

Поправки к собственным частотам (6) при этом равны нулю. Довольно громоздкие вычисления показывают, что достаточным условием устойчивости стационарного режима (7) является $s_2^{\text{cb}} > 0$.

Как нетрудно видеть, при таком стационарном режиме суммарное колебание на выходе системы $U(t)$ имеет вид коротких «пиковых», следующих через время $T = 2\pi/\Delta$. Отметим, что на фазовую устойчивость стационарного режима генерации не влияет добавка в связь (1) линейных и квадратичных элементов, поскольку на них не образуются комбинационные тона третьего порядка. Поэтому осуществлять ста-

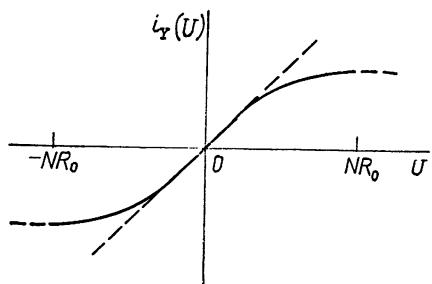


Рис. 2.

ционарный «пичковый» режим генерации практически, по-видимому, удобнее с помощью пассивного нелинейного элемента с насыщением (на рис. 1 изображен пунктиром), токовая характеристика которого показана на рис 2*.

3. Используя (2) и (5), можно найти уравнения для флуктуаций фаз в стационарном режиме генерации,

$$\dot{\varphi}_k + \sum_{l=1}^N a_{kl} \varphi_l = \xi_k(t),$$

и показать, что для дополнительных миноров A_{kl}^{kl} , получаемых из матрицы (a_{kl}) путем вычеркивания k -х и l -х строк и столбцов, справедливо условие оптимальности связи [1]:

$$A_{kl}^{kl} = (l - k)^2 A \quad (A = \text{const}).$$

Таким образом, если ширина спектральных линий свободных мод одинаковая: $\Delta\Omega_k^{\text{своб}} = \Delta\Omega^{\text{своб}}$ (для естественных дробовых и тепловых шумов это следует из сделанных выше предположений о параметрах схемы), то связь с помощью пассивного нелинейного элемента с насыщением является оптимальной и приводит в синхронном режиме (7) к уменьшению ширины всех спектральных линий системы. Например, для естественной ширины спектральных линий согласно [1] получаем

$$\Delta\Omega_n^{\text{сих}} = \left[\frac{1}{N} + \frac{12}{N(N^2-1)} n^2 \right] \Delta\Omega^{\text{своб}}, \quad (8)$$

где n — номер моды, считая от центра.

Как видно из (8), минимальную ширину спектральной линии имеет центральная мода $n = 0$ ($\Delta\Omega_0^{\text{сих}} = \Delta\Omega^{\text{своб}}/N$), а ширина спектральных линий боковых мод увеличивается от центра к краям спектра. Полученную зависимость можно объяснить тем, что комбинационные тона, ответственные за самосинхронизацию в системе с эквидистантным спектром, не создают «возвращающей силы» при симметричных уходах частот боковых мод (при пульсациях спектра около центральной частоты).

За исключением указанной особенности, самосинхронизация системы с эквидистантным спектром с помощью нелинейного элемента с насыщением очень похожа на взаимную синхронизацию одночастотных генераторов, связанных через сопротивления [3].

Поскольку при выбранной связи квадратурные составляющие синхронизирующих комбинационных тонов равны нулю, то можно доказать, что оптимальность режима будет сохраняться во всей области синхронизации рассматриваемой системы (т. е. учет достаточно малых расстроек δ_l в исходных уравнениях (2) не влияет на конечное выражение для ширины спектральных линий (8)).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 8, 1211 (1973).
2. И. М. Бетеров, В. И. Лисицын, В. П. Чеботаев, Радиотехника и электроника, 14, № 6, 1127 (1969).
3. В. И. Канавец, А. Ю. Стабинис, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 8, 1264 (1972).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
16 июля 1976 г.

* Наша система может служить моделью хорошо известных способов получения сверхкоротких лазерных импульсов путем стабилизации многомодовых режимов работы лазера с помощью насыщающихся фильтров (см., например, [2]).

УДК 53.08

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТРАЖЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ОТ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е. Г. Лебедько, Ю. П. Покровский, Р. А. Симовский, В. И. Иванов

В работе [1] приведены результаты исследований характера отражения импульсного оптического излучения от морской поверхности. Однако в указанной работе исследование распределений вероятностей отражения сигналов в зависимости от угла визирования не проводилось, а распределение амплитуд отраженных сигналов не дано из-за недостаточной статистической устойчивости полученных данных.

В настоящем сообщении описываются результаты эксперимента по отражению оптических импульсов от взволнованной водной поверхности, параметры которой близки к морской.

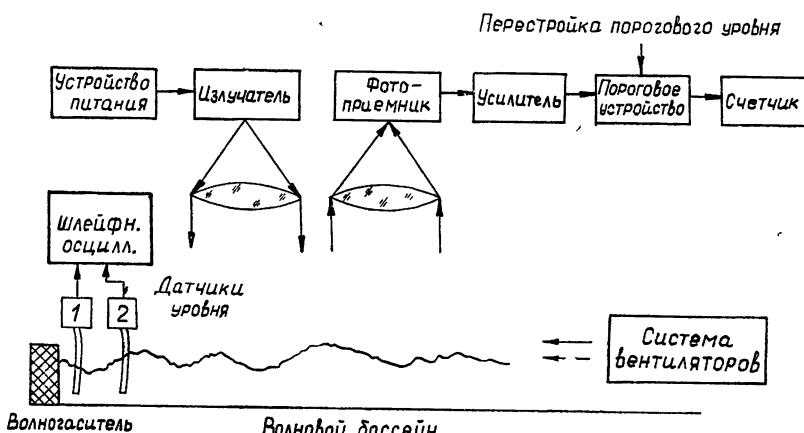


Рис. 1.

Основные характеристики экспериментальной установки, блок-схема которой приведена на рис. 1, следующие: мощность импульсов излучения 1 Вт при длительности на уровне 0,5, от амплитудного значения 0,1 мкс, частота посылок 1 кГц, угол проекции от -2° до 25° (угол визирования φ измерялся по направлению ветра). Для проведения исследований уровень срабатывания порогового устройства устанавливается по величине α отношения порог/шум соответственно равной 10, 20, 30, 60. Углы расходности пучка светильника соответствуют значениям коэффициента $k = 0,04; 0,12; 0,36$, определяемого отношением линейного размера облученной поверхности к средней длине морской волны. Статистическая достоверность полученных результатов обеспечивается большим числом посыпаемых импульсов (при каждом измерении это число составляло $5 \cdot 10^5$).

На рис. 2 представлены функции плотности вероятности отражения импульсных сигналов от взволнованной водной поверхности в зависимости от угла визирования для трех указанных значений коэффициента K при отношении порог/шум, равном 10. Из полученных кривых видно, что имеется оптимальный угол расходности пучка, соответствующий коэффициенту $K_2 = 0,12$.

Полученные кривые аппроксимируются гауссовой функцией распределения плотности вероятности со смешанным максимумом в направлении по ветру.

В работе [2] получены аналогичные данные для случая отражения солнечного света от взволнованной водной поверхности. Сравнение результатов [2] с полученными позволяет подтвердить предположение о том, что при отражении импульсных оптических сигналов главную роль в механизме случайности играет функция распределения плотности вероятности волновых склонов. Изменение максимума кривых на рис. 2 в зависимости от K можно связать с перераспределением энергии в пучке при его расширении. Для малых K энергетическая освещенность в центре пятна максимальна и спадает к краям. Поэтому, считая, что отражающие в направлении на приемник площадки распределены по пятну равномерно, получим, что при увеличении K , когда энергетическая освещенность все более равномерно распределяется по пятну, доля отраженной энергии увеличивается и увеличивается вероятность прихода отраженного сигнала.

женных импульсов. При дальнейшем расширении пучка доля отраженной энергии от периферии начинает уменьшаться из-за сильного снижения вероятности нужной ориентации отражающих площадок. Таким образом, должно существовать значение K , при котором вероятность прихода отраженных импульсов максимальна, что подтверждается рис. 2 (максимум при K_2)

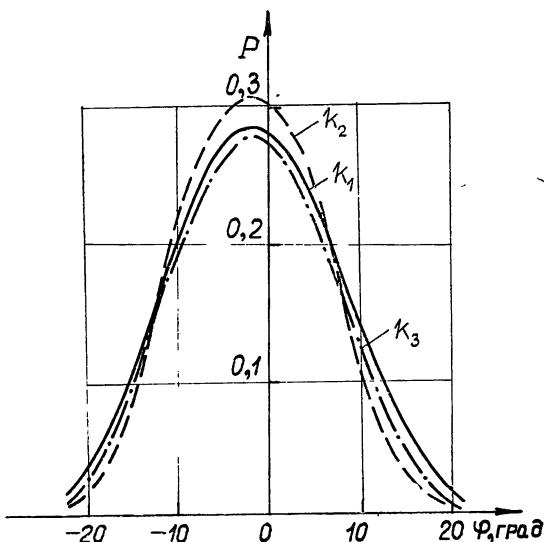


Рис. 2.

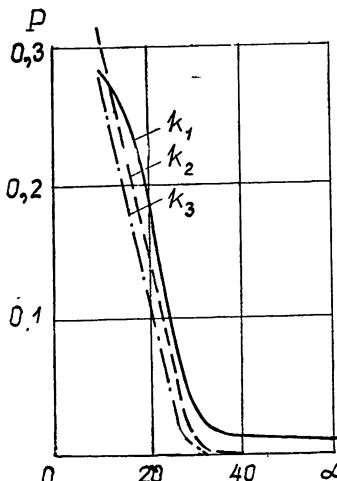


Рис. 3.

На рис. 3 приведены интегральные функции распределения вероятности превышения амплитудой отраженного импульса порогового значения для различных K . Из приведенных графиков следует, что вероятность прихода высокоамплитудных импульсов с увеличением K уменьшается монотонно всюду, за исключением области малых порогов, где также наблюдается максимум при K_2 . Кривые рис. 3 для $\alpha < 30$ можно аппроксимировать распределением Рэлея. При $\alpha > 30$ указанная аппроксимация неудовлетворительна, что можно объяснить также более равномерным распределением энергии по пучку, и, следовательно, снижением доли высокоамплитудных импульсов среди всех пришедших к приемнику.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Д ж е л а л я н, ТИИЭР, № 5 (1968).
2. С. Cox and W. Munk, J. Opt. Soc. Am., 44, № 11 (1954).

Ленинградский институт точной
механики и оптики

Поступила в редакцию
19 марта 1976 г.

УДК 538.574 2

«ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ» ОТ СРЕДЫ С МЕЛКОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

A. B. Степанов, A. B. Шелагин

Исследование прохождения волн разной природы через неоднородные среды посвящено большое количество работ*. В то же время «полное внутреннее отражение» волн рассматривалось в связи с относительно малым числом задач (см., на-

* Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в монографиях [1-4] и обзорах [5-8].

пример, [9]). В настоящей заметке мы вычислим поправки к коэффициенту отражения скалярной волны, падающей на неоднородную среду. При этом ограничимся рассмотрением отражения когерентной волны $\langle \psi \rangle$. Отличие от единицы коэффициента отражения этой волны дает возможность оценить ослабление волнового поля $\langle \psi \rangle$ за счет диссипативных эффектов и некогерентного рассеяния в среде. Такую формулировку допускают, например, задача об отражении электромагнитных волн от объема, занятого плазмой, при $\omega < \omega_{\text{пл}}$ ($\omega_{\text{пл}}$ — плазменная частота, соответствующая средней плотности заряженных частиц) и анализ взаимодействия ультрахолодных нейтронов со стенками ловушки [10–12].

Когерентная волна $\langle \psi \rangle$ удовлетворяет уравнению Дайсона (см., например, [2]) с эффективным нелокальным потенциалом («массовым оператором»). В приближении Бурре [2, 6, 7] ядро этого интегрального оператора имеет вид

$$\cdot M(r|r') \approx M_1(r|r') = \langle \delta U(r) \delta U(r') \rangle G_0(r|r'). \quad (1)$$

Здесь $\langle \delta U(r) \delta U(r') \rangle$ — корреляционная функция флуктуаций потенциала, $\delta U(r) = U(r) - \langle U \rangle$ и G_0 — функция Грина волнового уравнения при $\delta U \equiv 0$.

При рассмотрении прохождения волны с $E > \langle U \rangle > 0$ ($E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ — энергия частицы массы m , k_0 — ее волновой вектор в вакууме)*, как правило, функцию

$\mathcal{G}_0(r|r')$ в «массовом операторе» выбирают в виде, соответствующем однородной среде, заполняющей все пространство. В случае «полного внутреннего отражения» это приближение неудовлетворительно. Действительно, принимая во внимание, что $G_0(r|r') \approx \langle G_0^\infty(r|r') \rangle$ — действительная функция, и пренебрегая потерями в среде ($\text{Im } U(r) = 0$), получим $\text{Im } M_1 = 0$. Это означает, что некогерентное рассеяние в такой модели в случае полного отражения не приводит к ослаблению когерентного поля $\langle \psi \rangle$. Поэтому стандартная процедура введения эффективного показателя преломления среды оказывается некорректной. Такой результат сохраняется и при учете всех членов ряда теории возмущений для «массового оператора». Физическая причина неадекватности этой модели заключается в том, что при $E < \langle U \rangle$ в непоглощающей среде равна нулю плотность состояний и нет потока излучения (или частиц), падающего на «эффективную неоднородность». Соответственно не имеет смысла понятие рассеяния на неоднородностях в такой среде. Наличие границы среды приводит к потоку, вытекающему из среды, когда внутри нее имеется источник. В качестве такого «источника» может служить неоднородность среды. При этом $\text{Im } G_0(r|r')$ отлична от нуля и в уравнении Дайсона для когерентной волны $\langle \psi \rangle$ содержится слагаемое, описывающее затухание $\langle \psi \rangle$ вследствие некогерентного рассеяния на неоднородностях среды.

В случае мелкомасштабных неоднородностей (характерный размер неоднородности среды l мал по сравнению с x^{-1} — длиной, на которой существенно меняется волновое поле в среде) удобно воспользоваться следующим выражением для корреляционной функции:

$$\langle \delta U(r) \delta U(r') \rangle = B_0 \delta(r - r'), \quad (2)$$

где для изотропной среды

$$B_0 \equiv B_3 = \langle (\delta U)^2 \rangle l^3. \quad (3)$$

В случае слоисто-неоднородной среды соответственно имеем

$$\langle \delta U(z) \delta U(z') \rangle = B_0 \delta(z - z'); \quad (4)$$

$$B_0 \equiv B_1 = \langle (\delta U)^2 \rangle l. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала отражение от слоистой среды, ограничиваясь для простоты случаем нормального падения волны. При этом уравнение Дайсона можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 \right) \langle \psi(z) \rangle = 0 \quad (z < 0 \text{ (вакуум)}); \quad (6a)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - x^2 \right) \langle \psi(z) \rangle + (a + b e^{-2xz}) \langle \psi(z) \rangle = 0 \quad (z > 0 \text{ (среда)}). \quad (6b)$$

* Для определенности мы рассмотрим отражение скалярной волны де Броиля.

Здесь

$$a = \left\langle \left(\frac{2m}{\hbar^2} \delta U \right)^2 \right\rangle \frac{l}{2x}, \quad b = a \frac{x + ik_0}{x - ik_0}, \quad x = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\langle U \rangle - E)}.$$

Когерентное поле будем искать в виде

$$\langle \psi(z) \rangle = e^{ik_0 z} + \beta e^{-ik_0 z} \quad (z < 0); \quad (7a)$$

$$\langle \psi(z) \rangle = CJ_q(c e^{-xz}) \quad (z > 0), \quad (7b)$$

где J_q — функция Бесселя первого рода порядка q , $c = b/x^2$, $q^2 = 1 - a/x^2$.

Таким образом, когерентное поле в среде представляет собой неоднородную волну, затухающую вглубь среды не экспоненциально. Коэффициент отражения когерентной волны $|\beta|^2$ находим с помощью стандартных условий непрерывности на границе двух сред. Его удается записать в виде произведения двух сомножителей:

$$|\beta|^2 = |X|^2 |Y|^2. \quad (8)$$

Первый из них —

$$|X|^2 = \left| \left[1 + i \frac{x}{k_0} \frac{c J_{q+1}(c)}{J_q(c)} \frac{1}{1 - i \frac{x}{k_0} q} \right] \left[1 - i \frac{x}{k_0} \frac{c J_{q+1}(c)}{J_q(c)} \frac{1}{1 + i \frac{x}{k_0} q} \right]^{-1} \right|^2 \quad (9)$$

— учитывает влияние границы, а второй —

$$|Y|^2 = \left| \frac{1 - i \frac{x}{k_0} q}{1 + i \frac{x}{k_0} q} \right|^2 \quad (10)$$

— определяет коэффициент отражения в приближении «эффективного показателя преломления», когда пренебрегается вкладом отраженной волны в M_1 . С точностью до членов порядка $\delta^2 = \left\langle \left(\frac{\delta U}{\langle U \rangle} \right)^2 \right\rangle$, $\epsilon = \frac{\text{Im} \langle U \rangle}{\text{Re} \langle U \rangle}$, $\epsilon \delta^2$ имеем

$$|\beta|^2 = 1 - \delta^2 l \text{Re} x \frac{E/\text{Re} \langle U \rangle}{1 - E/\text{Re} \langle U \rangle} + 2 \epsilon \left(\frac{E/\text{Re} \langle U \rangle}{1 - E/\text{Re} \langle U \rangle} \right)^{1/2} + \frac{\epsilon \delta^2}{2} l \text{Re} x \frac{(E/\text{Re} \langle U \rangle)^{3/2}}{(1 - E/\text{Re} \langle U \rangle)^{5/2}}. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь отражение от среды с изотропными неоднородностями. Используя известное разложение отраженной волны в интеграл Фурье и для простоты пренебрегая поглощением в среде, получим в области энергий $E \ll U_0$ следующее приближенное выражение для $\text{Im} M_1$:

$$\text{Im} M_1(r | r') = B_3 \delta(r - r') \left[-\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{2}{3} x_1 \left(\frac{E}{\langle U \rangle} \right)^{3/2} e^{-2x_1 z} \right], \quad (12)$$

$$x_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \langle U \rangle}.$$

Таким образом, и в этой модели снова приходим к уравнению Дайсона с экспоненциально убывающим в среде потенциалом. Коэффициент отражения снова имеет вид (8) — (10), но параметры c^2 и q^2 определяются следующими соотношениями: $c^2 = \frac{i}{\pi} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^2 \frac{2}{3x_1} \left(\frac{E}{\langle U \rangle} \right)^{3/2} B_3$, $q^2 = (x_1^2 - a)/x_1^2$. Здесь

$$x_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left(\langle U \rangle - E + \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m} \right) = \frac{2m}{\hbar^2} (\langle U \rangle - E \cos^2 \theta),$$

$$a = \frac{2m}{\hbar^2} B_3 \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{l}, \quad k_{2\perp} = k_0^2 \sin^2 \theta,$$

θ — угол падения волны.

Выражение, аналогичное (11), при $\epsilon = 0$ имеет вид

$$|\beta|^2 \approx 1 - \frac{(ik_0)^3}{6\pi} \delta^2 \frac{x_1 k_0 \cos \theta}{x_\perp^2}. \quad (13)$$

В случае изотропных неоднородностей ослабление когерентной волны за счет некогерентного рассеяния на неоднородностях менее эффективно, чем в случае слоисто-неоднородной среды.

Авторы выражают глубокую признательность Ю. А. Кравцову и С. М. Рытову за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
3. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
4. Л. А. Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
5. А. Б. Шмелев, УФН, 106, № 3, 459 (1972).
6. Ю. Н. Барabanenkov, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, № 1, 3 (1970).
7. Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 115, № 2, 239 (1975).
8. Ю. Н. Барabanenkov, УФН, 117, № 1, 49 (1975).
9. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 1, 84 (1974).
10. А. Steuengl, Zs. Physik, 254, № 3, 169 (1972).
11. В. К. Игнатович, Сообщения ОИЯИ Р4-7055, Дубна, 1973.
12. А. В. Степанов, А. В. Шелагин, Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 1, 12 (1974); А. В. Степанов, Физика элементарных частиц и атомного ядра, 7, № 4, 989 (1976).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
28 июня 1976 г.

УДК 531.35

О МОДЕЛИ СВЕРХСВЕТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Г. М. Манева

В [1] было указано на то, что световое « пятно », образованное при пересечении светового луча с экраном, может быть источником излучения. При этом скорость такого источника может превышать скорость света в вакууме. В [2] было рассмотрено черенковское излучение аналогичного источника в вакууме. Другие примеры сверхсветовых источников приведены в [3-5].

Ниже мы остановимся на случае, когда « зайчик », образованный пересечением пучка заряженных частиц с плоской границей раздела двух сред, движется по синусоиде. В этом случае излучение имеет много общего с излучением заряженной частицы в ондуляторе с той, однако, разницей, что скорость « источника » в нашем случае не ограничена требованиями теории относительности.

Пусть на плоскую границу раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 (z > 0)$ и $\epsilon_2 (z < 0)$ падает пучок заряженных частиц, скорость которого нормальна к границе раздела $\mathbf{u} (0, 0, -u)$, а точка пересечения пучка с границей движется по закону $x = a \sin \Omega t$, $y = vt$. Рассмотрим падение заряженной нити с формой синусоиды, лежащей в плоскости, параллельной оси x и составляющей угол ψ с осью y . Фурье-компоненту плотности тока

$$\begin{aligned} j_\omega = -\frac{q}{2\pi} \exp \left(-i\omega \frac{z}{u} \right) \int_{-L}^L \exp \left(i\omega \frac{\xi \sin \psi}{u} \right) \delta(y - \xi \cos \psi) \times \\ \times \delta \left[x - a \sin \left(\xi \frac{\Omega}{u} \sin \psi \right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $J_\omega(0, 0, j_\omega)$, q — линейная плотность заряда и $2L$ — длина нити (в конечных результатах будем считать $L \rightarrow \infty$). Точка пересечения движется со скоростью $\mathbf{v}(v_x, v_y, 0)$, причем $v_y \equiv v = \frac{u}{\operatorname{tg} \psi}$ может быть сделана произвольно большой. Считаем, что скорость $v_x = a \Omega \cos \Omega t \ll v_y$.

Суммируя поле переходного излучения всех элементарных участков нити, на достаточно больших расстояниях $R \gg L$ в предельном случае бесконечно длинной нити получаем фурье-компоненту вектора Герца для $\omega > 0$ в среде с ϵ_i ($i = 1, 2$) в виде

$$\Pi_\omega^l(R) = -\frac{2 q c u \exp\left(l \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_l} R\right)}{\sin(\psi) \omega^2 R} F_l(\sin \theta \cos \varphi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_l} a \sin \theta \sin \varphi\right) \times \\ \times \delta\left[n \Omega + \omega \left(\frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_l} \cos \theta - 1\right)\right], \quad (2)$$

где $\Pi_\omega^l(0, 0, \Pi_\omega^l)$, $R(\sin \theta \sin \varphi; \cos \theta; \sin \theta \cos \varphi)$ и

$$F_{1,2}(z) = \frac{z}{\pm \epsilon_{1,2} z + [\epsilon_{1,2}^2 z^2 \pm \epsilon_{1,2} (\epsilon_2 - \epsilon_1)]^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \epsilon_{1,2} \frac{(c/u) \mp [\epsilon_{1,2} z^2 \pm (\epsilon_2 - \epsilon_1)]^{1/2}}{\epsilon_{1,2} z^2 \pm (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (c^2/u^2)} + \frac{\epsilon_{2,1} (c/u) \mp \epsilon_{1,2} [\epsilon_{1,2} z^2 \pm (\epsilon_2 - \epsilon_1)]^{1/2}}{(c^2/u^2) - \epsilon_{1,2} z^2} \right\}, \quad (3)$$

в (3) верхние знаки соответствуют первому индексу. При выводе (2) учтен предел $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin L z}{\pi z} = \delta(z)$.

Плотность энергии, излучаемой в единицу времени в единичном интервале частот в телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ в среде ϵ_l , равна

$$\frac{dW_{\omega, \theta, \varphi}^l}{dt} = \frac{2 q^2 v}{\pi \omega \cos^2 \psi} [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi] |F_l(\sin \theta \cos \varphi)|^2 \times \\ \times J_0^2\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_l} a \sin \theta \sin \varphi\right) \delta\left(\cos \theta - \frac{c}{v \sqrt{\epsilon_l}}\right) d\Omega d\omega + \frac{2 q^2 u^2}{\pi c \sin^2 \psi} \times \\ \times [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi] |F_l(\sin \theta \cos \varphi)|^2 \sum_{n \neq 0} J_n^2\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_l} a \sin \theta \sin \varphi\right) \times \\ \times \delta\left[n \Omega + \omega \left(\frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_l} \cos \theta - 1\right)\right] d\Omega d\omega. \quad (4)$$

В (2) и (3) $J_n(z)$ — функции Бесселя порядка n . Это выражение в случае падения нити из вакуума на идеальный проводник совпадает с результатом, полученным С. В. Афанасьевым (частное сообщение).

Первое слагаемое в (4) описывает энергию, излученную черенковскими волнами, причем для достаточно большой скорости $v > c/\sqrt{\epsilon_l}$ эффект Черенкова наблюдается в любой среде. Для $a = 0$ интенсивность черенковского излучения максимальна и совпадает с энергией излучения равномерно и прямолинейно движущегося сверхсветового источника [6]. Зависимость интенсивности от азимутального угла φ выражается формулой

$$\frac{dW_\varphi^l}{dt} = \int_0^\infty d\omega \frac{2 v q^2}{\pi \omega \cos^2 \psi} \left[\frac{c^2}{v^2 \epsilon_l} + \sin^2 \varphi \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon_l}\right) \right] \times \\ \times \left| F_l\left(\cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon_l}}\right) \right|^2 J_0^2\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_l} a \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon_l}}\right) d\varphi. \quad (5)$$

Как видно, интенсивность черенковского излучения обращается в нуль для некоторых частот и углов φ , для которых аргумент $\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_l} a \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon_l}}$ является нулем функции $J_n(z)$.

Второй член в формуле (4) описывает энергию излучения ондулятора, возникающего при любой скорости v . Излучение происходит на допплеровских частотах $\omega = \frac{1}{|1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_i} \cos \theta|}$, причем при достаточно большой скорости $v > c/\sqrt{\epsilon_i}$ аномальный

эффект Допплера может, в принципе, наблюдаться в любой среде.

Интенсивность излучения на n -й гармонике

$$\begin{aligned} \frac{dW_{n,\theta,\varphi}^i}{dt} = & \frac{2q^2 u^2}{c \pi \sin^2 \psi} \frac{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)}{|1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_i} \cos \theta|} |F_i(\sin \theta, \cos \varphi)|^2 \times \\ & \times J_n^2 \left(\frac{n \Omega}{|1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_i} \cos \theta|} \frac{a}{c} \sqrt{\epsilon_i} \sin \theta \cos \varphi \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Для данного источника отсутствует острая направленность излучения вперед, что характерно для релятивистского движения ондулятора, при $v \rightarrow c/\sqrt{\epsilon_i}$. В случае большой скорости $v \gg c/\sqrt{\epsilon_i}$, используя формулу Шотта

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(nz) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} - 1 \right) \quad (|z| < 1), \quad (7)$$

получаем энергию, излученную в единицу времени на всех частотах:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\theta,\varphi}^i}{dt} = & \frac{q^2 u^2}{c \pi \sin^2 \psi} \frac{[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi]}{|1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_i} \cos \theta|} |F_i(\sin \theta \cos \varphi)|^2 \times \\ & \times \left\{ \left[1 - \frac{\Omega^2 a^2 \epsilon_i \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_i} \cos \theta\right)^2 c^3} \right]^{-1/2} - 1 \right\} d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (5) и (8), с возрастанием $v \rightarrow \infty$ преобладающая энергия излучается черенковскими волнами, а часть энергии, выражаемая формулой (8), стремится к нулю.

Предложенная выше модель сверхсветового источника позволяет (в случае $\psi = \pi/2$) рассмотреть излучение осциллятора. Точка пересечения нитью плоскости разделя движется по закону $x = a \sin \Omega t$. Очевидно, скорость движения осциллятора $v_x = \Omega a \cos \Omega t$ при соответственном подборе Ω и a , может быть сделана сколь угодно большой. Отсчитывая угол θ от оси x , получаем для энергии, излучаемой в единицу времени в единичный телесный угол на частоте $n \Omega$, выражение

$$\begin{aligned} \frac{dW_{n,\theta,\varphi}^i}{dt} = & \frac{2q^2 u^2}{\pi c} [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi] |F_i(\sin \theta \sin \varphi)|^2 \times \\ & \times J_n^2 \left(n \frac{\Omega a}{c} \sqrt{\epsilon_i} \cos \theta \right) d\Omega \quad (n = 1, 2). \end{aligned} \quad (9)$$

Из разложения в ряд $J_n(nz)$ видно, что для $a \Omega < \frac{c}{\sqrt{\epsilon_i}}$ максимум излучения на малых частотах приходится на первую гармонику $n = 1$. В этом случае, используя (7), находим полное излучение на всех частотах:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\theta,\varphi}^i}{dt} = & \frac{q^2 u^2}{\pi c} [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi] |F_i(\sin \theta \sin \varphi)|^2 \times \\ & \times \left[\left(1 - \frac{\Omega^2 a^2}{c^2} \epsilon_i \cos^2 \theta \right)^{-1/2} - 1 \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Формула (10) справедлива и для $a \Omega > \frac{c}{\sqrt{\epsilon_i}}$ для точек наблюдения с $\cos \theta <$

$\frac{c}{\Omega a \sqrt{\epsilon_l}} = \cos \theta_0$. При стремлении угла $\theta \rightarrow \theta_0$ энергия излучения бесконечно возрастает, аналогично случаю излучения сверхсветового электрона.

Для очень больших скоростей $\Omega a \gg c/\sqrt{\epsilon_l}$ интенсивность излучения с частотой $n \Omega$ (для $\theta \neq \pi/2$)

$$\begin{aligned} \frac{dW_{n\theta\varphi}^l}{dt} &= \frac{2 q^2 u^2}{\pi^2 a \Omega \sqrt{\epsilon_l} n \cos \theta} [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi] \times \\ &\times |F_l(\sin \theta \sin \varphi)|^2 \left[1 + (-1)^n \sin \left(2n \frac{\Omega a}{c} \sqrt{\epsilon_l} \cos \theta \right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, в вышеприведенной модели при $a \Omega \rightarrow \infty$ излучение осциллятора стремится к нулю.

Автор благодарен Б. М. Болотовскому за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 62, 173 (1972)
2. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, вып 4 (1972); Эйнштейновский сборник, изд. Наука, М., 1972
3. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 4 (1972).
4. С. В. Афанасьев, Б. М. Болотовский, Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 10 (1972).
5. С. В. Афанасьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 18, № 10 (1975).
6. Г. М. Манева, Вестник МГУ, 2 (1975).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
28 июня 1976 г.,
после доработки
17 февраля 1977 г.

УДК 621.385.6

О ВОЗБУЖДЕНИИ КОСОЙ ГРЕБЕНКИ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

В. Д. Еремка, А. Я. Кириченко, В. А. Солодовников

Применение многомерных и косых периодических систем в электронике позволяет создать приборы СВЧ с новыми качествами, в частности, неоднородную в направлении, перпендикулярном движению электронного потока, периодическую систему — косую гребенку можно использовать с целью расширения диапазона рабочих частот генераторов и усилителей, повышения их выходной мощности [1].

Известны результаты применения косых периодических систем в лампах с попечным взаимодействием [2, 3]. Экспериментально изучены поля косой штыревой замедляющей системы [4]. В 1963 г. А. Ф. Величко и Г. Я. Левиным (частное сообщение) проведены исследования энергетических характеристик взаимодействия электронного потока с полями косых гребенок. Однако результаты исследования частотных характеристик колебаний косой гребенки, возбуждаемой электронным потоком, в литературе не описаны. В настоящем сообщении приведены некоторые результаты экспериментальных исследований, проведенных с целью изучения частотных характеристик колебаний косой гребенки в миллиметровом диапазоне.

Волновое число β_η в направлении, параллельном боковым ограничивающим плоскостям такой структуры, связано с волновыми числами β_z и β_y прямой гребенки соотношением [1]

$$\beta_\eta = \beta_z \sin \psi_0 - \beta_y \cos \psi_0 \quad (1)$$

(обозначения соответствуют принятым в [1]).

Следовательно, замедление косой гребенки n_η можно записать через замедление прямой гребенки n_z в виде

$$n_\eta = n_z \sin \psi_0 - \cos \psi_0. \quad (2)$$

Если замедление прямой гребенки велико ($n_z \sim 10$), а косая гребенка имеет небольшой перекос ($\psi_0 \approx \pi/2$), то согласно (2) можно утверждать, что при движении электронного потока вдоль оси η косой гребенки синхронизм его с бегущей волной осуществляется при

$$v_{e\eta} \sin \psi_0 \approx v_z, \quad (3)$$

где $v_{e\eta}$ — скорость электронного потока, v_z — фазовая скорость волны прямой гребенки.

В случае возбуждения косой гребенки электронным потоком, ширина которого меньше расстояния между ограничивающими боковыми плоскостями, можно корректировать частоту возбуждаемых колебаний при $v_e = \text{const}$ путем юстировки потока в плоскости взаимодействия $x = 0$, т. е. изменяя угол ψ между направлением, параллельным образующим щелей гребенки, и траекторией электронного потока.

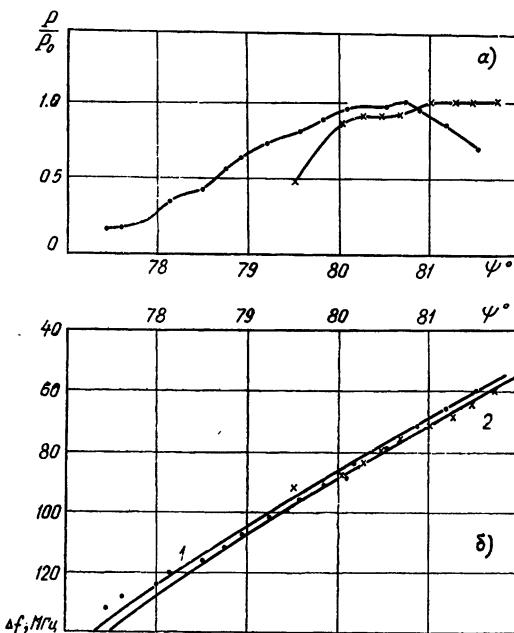


Рис. 1. а) Экспериментальная зависимость генерируемой мощности $P/P_0 = f(\psi)$; $f_0 = 36,25 \text{ ГГц}$ — точки, $f_0 = 36,45 \text{ ГГц}$ — крестики; б) зависимость изменения частоты генерируемых колебаний $\Delta f = f(\psi)$; 1 — $\alpha = 1,75 \text{ МГц/В}$, $f_0 = 36,25 \text{ ГГц}$, сплошная линия — расчет, точки — эксперимент; 2 — $\alpha = 1,62 \text{ МГц/В}$, $f_0 = 36,45 \text{ ГГц}$, сплошная линия — расчет, крестики — эксперимент.

На рис. 1а, б представлены результаты исследования изменения частоты Δf и относительной интенсивности возбуждаемых колебаний P/P_0 в зависимости от угла ψ при постоянной скорости электронного потока v_e . Расчетные кривые изменения частоты получены с помощью приближенного соотношения

$$\Delta f = f - f_{\psi=\pi/2} = \alpha U_\psi \sin^2 \psi, \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{df}{dU}$ — крутизна частотно-вольтовой характеристики (предполагается линейная зависимость изменения частоты с напряжением). Результаты показывают, что при юстировке потока в плоскости $x = 0$ можно управлять частотой возбуждаемых колебаний в пределах 0,1—0,4% от центральной частоты $f_{\psi=\pi/2}$. Следует отметить, что скорость изменения частоты мала при $\psi \approx \pi/2$ (т. е. для прямой гребенки) и растет с уменьшением угла ψ , что следует из (4). Таким образом, возбуждение косой гребенки оказывается чувствительным даже к сносу электронов при бриллюзновской фокусировке.

Дисперсионные зависимости $\epsilon/v = f(\lambda)$ (при изменении ψ смещаются практически параллельно оси ординат (рис. 2). Видно, что для резонансной ЛОВО фазовые условия отражения медленной поверхностной волны от концов периодической структуры

при изменении ψ меняются слабо, поэтому частотные разрывы дисперсионной зависимости наблюдаются при постоянной частоте.

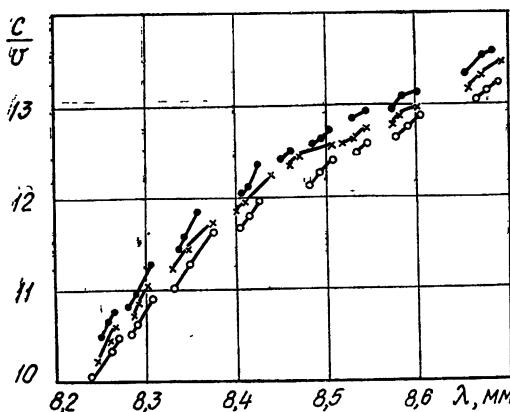


Рис. 2. Дисперсионные зависимости косой гребенки при $\psi_1 = 85^\circ$ (точки); $\psi_2 = 80^\circ$ (крестики), $\psi_3 = 75^\circ$ (кружки).

Представленные результаты указывают на дополнительную возможность управления частотой автоколебаний ЛОВО с косой периодической системой путем юстировки электронного потока в плоскости $x = 0$ пространства взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. D. A. Dunn and W. A. Hartman, Proc. IRE, 44, № 7, 888 (1956).
3. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 4, 764 (1963).
4. В. П. Сазонов, Вопросы радиоэлектроники, серия 1, Электроника, вып. 3, 100 (1963).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
13 апреля 1976 г.