

СОДЕРЖАНИЕ

Коган Л. Р., Матвеевко Л. И. Система регистрации и обработки информации для сверхдальней интерферометрии	1265
Безродный В. Г., Блиох П. В., Шубова Р. С., Шульга В. Ф., Ямпольский Ю. М. О природе вариаций пространственной разности фаз СДВ радиосигналов в часы восхода и захода Солнца	1270
Борисов Н. Д., Гуревич А. В. К теории распространения коротких радиоволн в горизонтально неоднородной ионосфере	1275
Синицкий В. Б. Экспериментальное исследование распространения миллиметровых волн в условиях многолучевости	1285
Апресян Л. А., Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я., Яшнов В. А. О линейной трансформации волн в неоднородной анизотропной среде («квазивыврожденное» приближение геометрической оптики)	1296
Глушнев В. Г., Слуцкер Б. Д., Финкельштейн М. И. Об измерении затухания радиоволн восьмимиллиметрового диапазона в морском и пресноводном льдах и снеге	1305
Рядов В. Я., Фурашов Н. И. О поглощении атмосферным водяным паром в окне прозрачности $\lambda=0,87$ мкм	1308
Калмыков А. И., Курекин А. С., Лемента Ю. А., Островский И. Е., Пустовойтенко В. В. Особенности рассеяния СВЧ излучения на обрушивающихся морских волнах	1315
Алексеев Б. Ф., Гадаев В. Д. Множественные протонные спиновые эхо при двухимпульсном возбуждении	1322
Вышкинд С. Я., Смирнова Т. Н. Об особенностях работы волновых параметрических приборов с внутренней накачкой	1330
Пятаков П. А., Лямов В. Е. О функциональных преобразованиях сигналов при нелинейном взаимодействии объемных и поверхностных упругих волн в пьезоэлектрических кристаллах	1337
Гринько И. Е., Коткин А. Л., Кузнецов А. Н., Петухов Ю. М., Умарходжаев Р. М., Шушпанов И. А. Параметрический резонанс в присутствии поперечных возмущающих радиочастотных полей	1346
Алмаев Р. Х., Нерушев А. Ф., Семенов Л. П. Флуктуационные характеристики пучка излучения при наличии регулярной рефракции	1351
Гурбатов С. Н., Саичев А. И. О диффузии волновых пакетов в среде с пространственно-временными неоднородностями	1359
Малахов А. Н., Саичев А. И. О лагранжевом и эйлеровом описании статистических свойств световых волн	1368
Мартынов А. М. Расчеты интенсивностей спектров и границ применимости приближенных решений задачи о дифракции света на ультразвуке	1378
Раевский С. Б., Рудоясова Л. Г. Расчет волноводного резонатора, перестраиваемого металлическим стержнем, на основе метода частичных областей	1391
Романов Ю. А., Дряхлушин В. Ф. Плазменные волны в полупроводниках со сверхрешеткой. II	1395
Бузык Л. М. К теории магнетронного волновода	1399
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. Влияние флуктуаций средней яркости фона на точность измерения боковых лепестков диаграммы направленности антенны радиоастрономическим методом	1412

УДК 543.46

СИСТЕМА РЕГИСТРАЦИИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ СВЕРХДАЛЬНОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Л. Р. Коган, Л. И. Матвеевко

Разработана система регистрации и обработки данных радиоинтерферометра на основе вычислительного комплекса ЕС ЭВМ. В качестве запоминающего устройства использован накопитель внешней памяти НМЛ-67. Запись сигналов на НМЛ-67 организована в соответствии с форматом, используемым в ЕС ЭВМ, ввод информации и ее обработка на ЭВМ осуществляется программным образом. Приведены результаты расчета модельных экспериментов.

Метод сверхдальной (независимой) радиоинтерферометрии (ИСДБ), предложенный советскими учеными [1], в последнее время получил широкое применение в исследовании структуры компактных компонент источников космического радиоизлучения. Стремление к увеличению углового разрешения привело к созданию радиоинтерферометров глобальных размеров. В этой связи эксперименты по ИСДБ носят, как правило, международный характер и потому требуют взаимозаменяемой системы регистрации и обработки информации. В настоящее время за рубежом разработан ряд систем регистрации сигналов ИСДБ дискретного [2] и аналогового типа [3]. Первые советские системы регистрации для ИСДБ были созданы на основе накопителей МУЗ-25 [4]. Позже были построены системы регистрации на основе накопителей ЭВМ «Раздан» [5]. Оба накопителя имеют невзаимозаменяемые лентопротяжные механизмы, что приводит к необходимости их перевозки на обрабатывающий вычислительный центр.

Большой интерес представляет использование в ИСДБ вычислительного комплекса ЕС ЭВМ, накопители внешней памяти которого НМЛ-67 взаимозаменяемы и соответствуют международному стандарту. Кроме того, ЕС ЭВМ программно совместимы с ЭВМ серии IBM 360. Это позволяет использовать описанную ниже систему регистрации в системе глобального радиоинтерферометра.

От проектируемой системы записи требовалось формирование записываемых сигналов в соответствии с форматом, используемым в ЕС ЭВМ. Ввиду схемной сложности формирования строки ЦКС эта строка не писалась совсем. Возникающее из-за этого ухудшение достоверности записи в соответствии с техническими данными НМЛ-67 не превосходит 10^{-8} .

На рис. 1 приведена блок-схема разработанной системы регистрации. Сигнал, поступающий на вход системы, ограничивается (клипируется), считывается с частотой F_0 (равной удвоенной полосе пропускания радиометра) и подается на преобразователь последовательного кода в 8-разрядный (в соответствии с числом дорожек НМЛ-67) параллельный код. Сигнал частоты опроса F_0 синтезируется от высокостабильного стандарта частоты. Это обстоятельство практически исключает влияние нестабильного движения ленты в лентопротяжном механизме.

Специальная схема формирует сигнал на девятую дорожку нечетности «К». Операцию клипирования, заключающуюся в замене сигнала на +1, если он положителен, и на 0, если он отрицателен, выполняет устройство, обозначенное на блок-схеме рис. 1 цифрой 1 («ограничитель»).

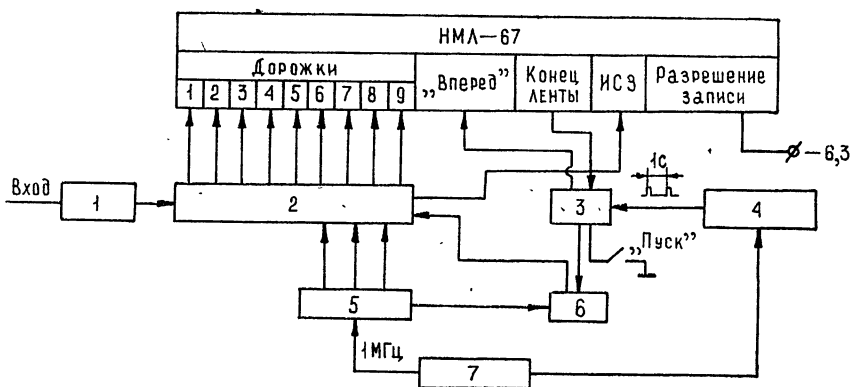


Рис. 1. Блок-схема системы регистрации:

1—ограничитель, 2—преобразователь последовательного кода в параллельный, 3—схема движения, 4—часы, 5—схема формирования вспомогательных сигналов, 6—схема формирования зон, 7—стандарт частоты.

Помимо совершенно очевидного упрощения процедуры обработки информации на ЭВМ, клипирование существенно снижает требования на стабильность коэффициентов усиления аппаратуры. Ухудшение чувствительности вследствие потери информации об амплитуде не превосходит 50% [6]. На самом деле двухуровневый способ записи сигнала по сравнению с многоуровневым дает даже выигрыш по чувствительности при одном и том же объеме памяти магнитной ленты за счет ее более эффективного использования. Максимальная плотность записи НМЛ-67 равна 32 байт/мм, что при скорости 2 м/с соответствует максимальной частоте считывания 64000 байт/с. В соответствии с этим нами была выбрана частота считывания по каждой дорожке 62,5 кГц.

Необходимые для работы преобразователя меандр с частотой 500 кГц и импульсы с частотой 62,5 кГц синтезируются из сигнала 1 МГц, поступающего от стандарта частоты.

Для обеспечения синхронизма работы накопителей на разных пунктах момент начала движения ленты и начала записи задается часами, управляемыми стандартом частоты. В ближайшие целые десять секунд после нажатия кнопки «пуск» в схеме движения вырабатывается импульс, по которому начинается движение магнитной ленты и вырабатывается сигнал «разрешение записи». Запись сигнала начинается через 18432×16 мкс после пуска лентопротяжного механизма. Этого времени достаточно для установления равномерного движения ленты. Таким образом, на обоих пунктах начало движения ленты и начало записи информации происходит одновременно с точностью синхронизма часов. При этом от оператора требуется быстродействие ~ 10 с. В момент прихода сигнала от маркера «конец ленты» в схеме движения вырабатывается импульс, останавливающий движение магнитной ленты.

Схема формирования зон и пауз между ними собрана на счетчиках импульсов, считывающих информацию в 8-разрядном регистре сдвига.

Основные характеристики системы регистрации приведены в табл. 1.

Таблица 1

Частота считывания по каждой дорожке	62,5 кГц
Плотность записи	$5 \cdot 10^5$ бит/с
Объем памяти одной ленты (750 м)	$2 \cdot 10^8$ бит
Длина зоны	2^{14} байт
Длина промежутка между зонами	2^{10} байт
Число зон на ленте	1600

Система записи собрана на интегральных схемах, включающих в себя схемы «или — не» по высоким уровням (2ЛБ042), «или — не» по низким уровням (2ЛБ041) и триггер (2ТК041). Логические уровни этих схем 0 и +3 В. Предельная частота работы триггера 500 кГц.

Для согласования логических уровней, принятых в микросхемах 204 серии и в накопителях НЛМ-67, были использованы типовые ячейки из накопителя—схемы «и — не» (4И-10) и усилители — формирователи 2УЗ-10. Для унификации разработанные платы конструктивно выполнены так же, как и ячейки накопителя. На рис. 2 приведены фотографии некоторых плат прибора и его общий вид.

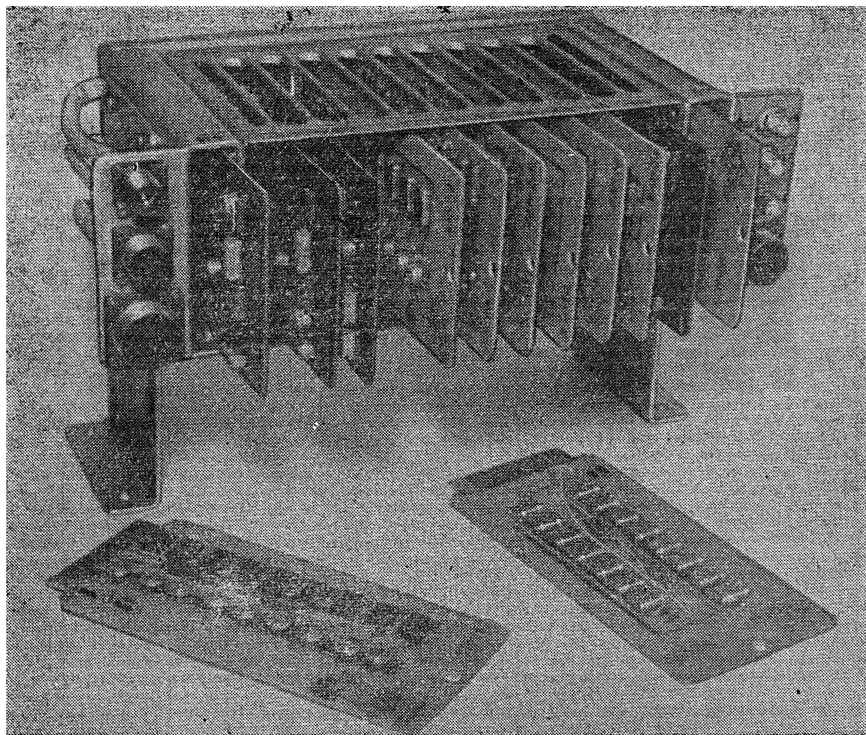


Рис. 2. Общий вид прибора.

Для проверки параметров системы была вычислена кросс-корреляционная функция сигналов, записанных на двух лентах. Обработка была выполнена на стандартной машине ЕС1020 с памятью 64К и быстродействием 10^5 операций в секунду.

На рис. 3 показан пример расчета кросс-корреляционной функции сигналов с двух магнитных лент в полосе 0 — 50 кГц. Полоса взята меньше предельной (250 кГц) для получения большего числа точек в пределах зоны корреляции. Полученное значение кросс-корреляцион-

ной функции клипированных сигналов $r(\tau)$ соответствует теории [7]:

$$r(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sin \frac{\pi}{5} k}{\frac{\pi}{5} k \left(1 + \frac{\text{ш}}{c}\right)}. \quad (1)$$

Расчет приведен при двух соотношениях шум/сигнал ($1 - \text{ш}/c = 0$; $2 - \text{ш}/c = 3$) для 15 значений сдвигов ($k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$). Был проведен также эксперимент с монохроматическим сигналом частоты 250 кГц, записанным на обе ленты совместно с шумами в полосе 0—250 кГц. Результаты расчетов максимального значения кросс-корреляционной функции для разных соотношений шум/сигнал сведены в табл. 2.

Таблица 2

ш/с	0	5	10
$r_{\text{теор}}$	1,00	0,106	0,058
$r_{\text{изм}}$	0,95	0,102	0,053

Отличие измеренного коэффициента корреляции $r_{\text{изм}}$ от теоретического $r_{\text{теор}}$, по-видимому, связано с неидеальностью ограничителя и потерей информации на магнитной ленте при записи/чтении.

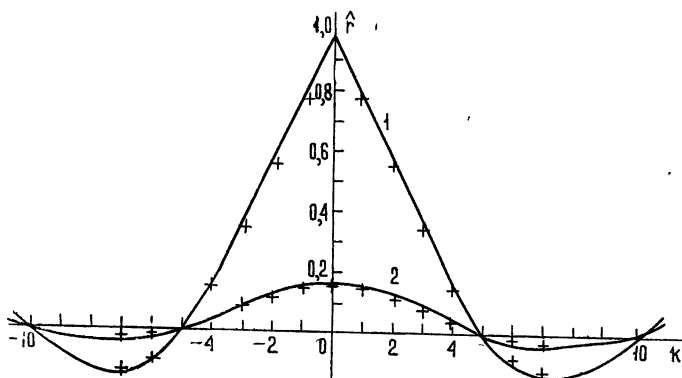


Рис. 3. Кросс-корреляционные функции клипированного сигнала при разных соотношениях ш/с (кресты—результаты счета на ЭВМ).

Разработанная система может быть использована в других научных экспериментах, в которых требуется регистрация большого объема информации и последующая обработка ее на ЭВМ.

Авторы благодарны Л. В. Макаровой, принявшей участие в монтаже и настройке системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Матвеевко, Н. С. Кардашев, Г. Б. Шоломицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 651 (1965).
2. C. Vane, V. G. Clark, K. I. Kellermann, M. N. Cohen, D. L. Jounsey, Science, 157, 189 (1967).
3. N. W. Broten et al., Science, 156, 1532 (1967).
4. В. А. Алексеев и др., Изв. Арм. ССР, серия Техн. наук, 25, 4 (1972).

5. В. А. Алексеев и др., Радиотехника и электроника, 17, 332 (1972).
6. Л. Р. Коган, Радиотехника и электроника, 12, 2306 (1971).
7. J. H. Van Vleck, D. Middleton, Proc. IEEE, 54, 1 (1966).

Институт космических исследований
АН СССР

Поступила в редакцию
9 октября 1975 г.

A SYSTEM FOR DATA RECORDING AND PROCESSING FOR VLBI
INTERFEROMETRY

L. P. Kogan, L. I. Matveenko

A system for recording and processing the interferometer data is developed based on a computer complex ES. A computer external memory NML-67 is used as a storage device. The record of a signal by NML-67 is arranged in accord with the format utilized in the computer complex ES. Data input and processing are realized by the program. The results of calculation of the model experiments are given.

УДК 621.371.22

О ПРИРОДЕ ВАРИАЦИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАЗНОСТИ ФАЗ СДВ РАДИОСИГНАЛОВ В ЧАСЫ ВОСХОДА И ЗАХОДА СОЛНЦА

В. Г. Безродный, П. В. Блюх, Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга,
Ю. М. Ямпольский

Обсуждаются возможные механизмы объяснения обнаруженных экспериментально вариаций пространственной разности фаз СДВ радиосигналов в часы восхода и захода Солнца: перемещение локализованной в окрестности терминатора неоднородности поля, связанной с изменением условий распространения нормальных волн на переходе «день—ночь» (на восходе), и движение за терминатором интерференционной картины поля ночной части волновода (на заходе). Проведен расчет, результаты которого сопоставляются с экспериментальными данными, полученными авторами.

Измерения, проведенные рядом авторов на разных частотах и на трассах различной протяженности, показали, что пространственная разность фаз СДВ радиосигналов в часы восхода и захода Солнца претерпевает значительные вариации [1, 2]. Эти вариации связаны с движением вдоль трассы терминатора (линии «день—ночь») и регулярно повторяются от суток к суткам. В настоящем сообщении мы обсуждаем возможные механизмы, с помощью которых можно объяснить наблюдаемые явления. На их основе проведены расчеты, результаты которых сравниваются с экспериментальными данными.

Рассмотрим сначала явления, которые приводят к появлению вариаций разности фаз в часы восхода. Наибольшие изменения величины разности фаз в это время приходится на период прохождения терминатором приемных пунктов. В связи с этим можно предположить, что они обусловлены локальным возмущением поля в окрестности терминатора. Это возмущение возникает в результате изменения на терминаторе условий распространения нормальных волн и переносится с его скоростью. Если форма возмущения постоянна вдоль терминатора и не изменяется при его перемещении, то вариации параметров сигнала в пространственно-разнесенных точках повторяют друг друга, но с некоторым запаздыванием τ_0 . Его величина определяется скоростью движения терминатора, величиной и направлением пространственного разноса:

$$\tau_0 = \frac{d(\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)}{V} \quad (1)$$

Здесь V — широтная составляющая скорости движения терминатора, d — величина разноса, α — угол между измерительной базой и меридианом, β — угол между направлением терминатора и меридианом. Это запаздывание приводит к появлению разности фаз, которую назовем расчетной:

$$\Delta\varphi_{\text{расч}}(t) = \varphi_1(t + \tau_0) - \varphi_1(t), \quad (2)$$

где $\varphi_1(t)$ — фаза сигнала в одном из приемных пунктов в момент времени t .

Приведенные соображения были использованы для интерпретации результатов измерений, проводившихся в окрестностях г. Харькова в период с 1971 по 1975 г. Передающей станцией служила радиостанция НАА (длина трассы ~ 7500 км, частота $f = 17,8$ кГц, трасса распространения ориентирована с запада на восток). В пунктах, разнесенных на расстояния от 20 до 150 км, измерялись в разные сезоны года фазы, амплитуды и разности фаз сигналов. Аппаратура, использованная в экспериментах, описана в работах [3, 4].

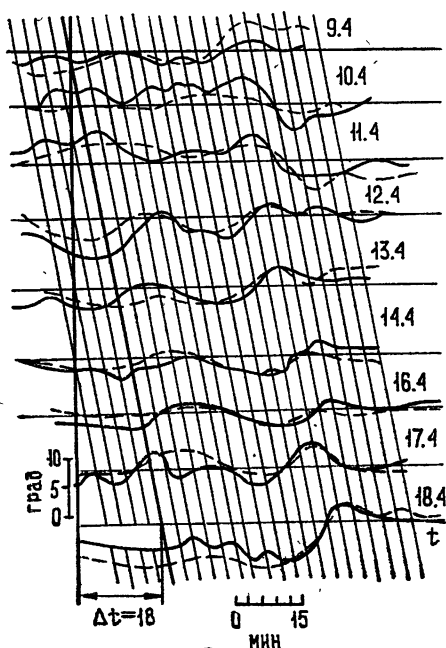


Рис. 1.

С помощью формул (1), (2) было проведено сравнение экспериментальных $\Delta\varphi(t)$ и расчетных $\Delta\varphi_{\text{расч}}(t)$ значений разности фаз в часы восхода. На рис. 1 в качестве примера приведены соответствующие графики для разнеса Харьков—Граково (апрель 1974 г.). Кривые $\Delta\varphi_{\text{расч}}(t)$ изображены на рис. 1 пунктиром. Расчетное время запаздывания $\tau_0 = 3,5$ мин. Наклонные прямые на рисунке показывают смещение времени восхода от суток к суткам. Вдоль этих линий производилось усреднение расчетных и экспериментальных разностей фаз по каждому из циклов измерений. Результаты такого усреднения для четырех циклов приведены на рис. 2. Видно, что усреднение улучшает совпадение расчетных и экспериментальных кривых. Длительность периода, в течение которого $\Delta\varphi_{\text{расч}}(t)$ достаточно хорошо совпадают с $\Delta\varphi(t)$, порядка одного часа, что соответствует перемещению терминатора на расстояние до 1000 км.

С целью проверки правильности определения величины временного сдвига τ_0 и всей гипотезы о природе восходных вариаций в целом, был произведен дополнительный расчет. Для каждого цикла измерений вычислялись среднеквадратичные отклонения $\sigma^2(\tau)$ между $\Delta\varphi(t)$ и $\Delta\varphi_{\text{расч}}(t)$ при разных значениях временного запаздывания τ . Результаты приведены на рис. 3. Минимальное значение $\sigma^2(\tau)$ для трех циклов измерений

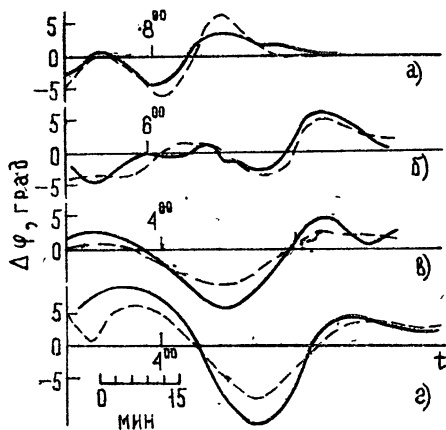


Рис. 2.

Рис. 2. а) Январь 1975 г., Граково, $n = 12$, $\tau = 3,7$ мин; б) апрель 1974 г., Граково, $n = 9$, $\tau = 3,5$ мин; в) июль 1971 г., Гайдари, $n = 5$, $\tau = 2$ мин; г) июль 1971 г., Лозовая, $n = 3$, $\tau = 5$ мин.

приходится на значения τ_0 , определенные по формуле (1). Для летнего цикла измерений (Харьков—Гайдары, 1971 г.) значение τ , соответствующее σ_{\min}^2 , превышает расчетное τ_0 примерно в два раза. Это могло быть вызвано, например, неоднородностью формы терминатора вдоль его длины, что эквивалентно увеличению продольной составляющей пространственного разнота d .

В январе 1973 г. измерения $\Delta\varphi(t)$ были проведены на базе Харьков—Гайдары. Линия измерительной базы d в этом эксперименте была параллельна линии терминатора, т. е. терминатор проходил оба приемных пункта одновременно. Как и следовало ожидать, характерные вариации разности фаз на восходе Солнца в этой серии измерений не наблюдались.

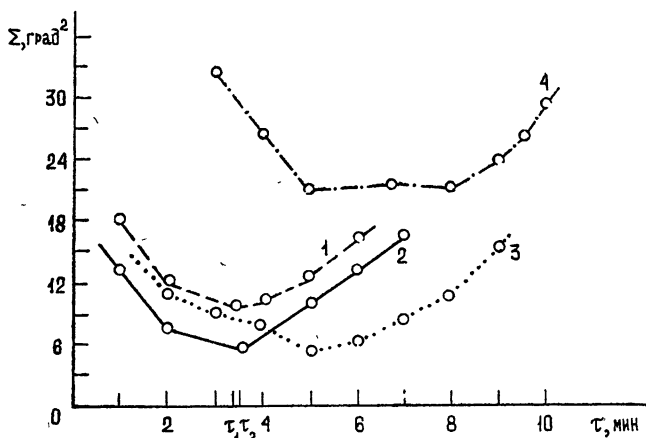


Рис. 3. 1 — апрель 1974 г., Граково; 2 — январь 1975 г., Граково; 3 — июль 1971 г., Гайдары; 4 — июль 1971 г., Лозовая.

Следует отметить, однако, что полного совпадения $\Delta\varphi(t)$ и $\Delta\varphi_{\text{расч}}(t)$ ни в одном из экспериментов получить не удалось, причем различие возрастало с ростом поперечной (к направлению движения терминатора) составляющей базы разнота. Указанное несовпадение можно попытаться объяснить, с одной стороны, некоррелированностью трасс распространения (за счет статистически неоднородной структуры волновода), с другой стороны, неоднородностью возмущения поля вдоль линии терминатора, связанной с непостоянством его формы.

Рассмотрим теперь явления, приводящие к вариациям разности фаз на заходе Солнца. Описанный выше механизм проявляется и в это время суток, но величина вариаций $\Delta\varphi(t)$ в период прохождения терминатором приемных пунктов оказывается значительно меньше восходных изменений. Большие вариации $\Delta\varphi(t)$ на восходе связаны, по-видимому, с тем, что переход от ночных условий к дневным является более резким (см., например, [5]), чем от дневных к ночным.

Более значительные заходные вариации наблюдаются, когда терминатор уже прошел приемные пункты, и они находятся в ночной части волновода. Можно ожидать, что интерференционная картина, возникающая в это время в ночном волноводе, жестко связана с терминатором и движется с его скоростью [5]. Ее перемещение сопровождается замираниями амплитуд и ступенеобразными вариациями фаз, наблюдающимися в каждом из пунктов с временным запаздыванием τ_0 (см. (1)). Это запаздывание в прохождении интерференционной картины приемных пунктов и является причиной вариаций на кривой разности фаз, относящейся к часам захода.

Настоящая гипотеза была проверена на данных, полученных в измерениях 1971—1975 гг. При определении $\Delta\varphi_{\text{расч}}(t)$ время запаздывания τ_0 вычислялось с учетом изменения наклона линии терминатора к трассе распространения по мере его движения с востока на запад. На рис. 4 показаны для примера экспериментальные (сплошные) и расчетные (пунктирные) кривые фаз и разностей фаз для одной из суточных записей (время московское) зимнего цикла измерений (база Харьков—Граково, 28.01.75 г.). Вариации фазы и разности фаз до 22 час и после 23 час соответствуют последовательному прохождению двух интерференционных минимумов через приемные пункты. Величина этих заходных изменений $\Delta\varphi(t)$ зависит, с одной стороны, от глубины интерференционных замираний в ночном волноводе, с другой стороны, как и на восходе, — от степени коррелированности трасс распространения. Поскольку эти факторы изменяются от суток к суткам, описанное явление удается наблюдать не на всех суточных записях.

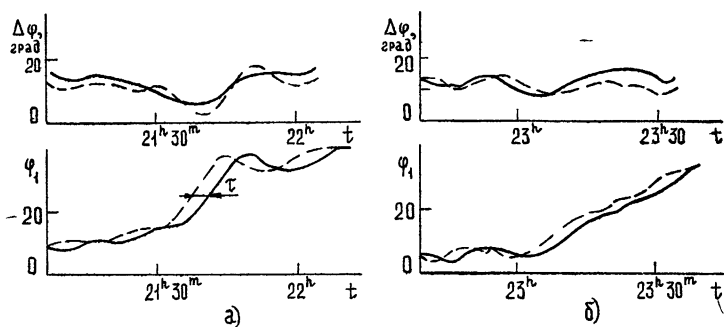


Рис. 4.

Таким образом, хотя вариации разности фаз СДВ радиосигналов как на восходе, так и на заходе Солнца являются результатом движения терминатора вдоль трассы распространения, природа их различна. В первом случае они порождены локальным возмущением поля в области, непосредственно примыкающей к терминатору, во втором — движением за терминатором интерференционной картины поля ночной части волновода с последовательным прохождением минимумов через приемные пункты. В обоих случаях разность фаз как функция времени достаточно хорошо описывается выражением (2), временное смещение τ_0 в котором определяется формулой (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Edward A. Lewis and J. E. Rasmussen, *J. Geophys. Res.*, **67**, № 12, 4906 (1962).
2. Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга, Ю. М. Ямпольский, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **17**, № 1, 43 (1974).
3. Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга, Ю. М. Ямпольский, *Материалы II Всесоюзного семинара-совещания «Метрология в радиоэлектронике»*, М., 1971, стр. 71.
4. Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга, Ю. М. Ямпольский, *Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника*, **16**, № 12, 83 (1973).
5. А. Б. Орлов, Г. В. Азарнин, *сб. Проблемы дифракции и распространения волн*, изд. ЛГУ, Л., вып. 10, 3 (1970).

THE NATURE OF SPATIAL PHASE-DIFFERENCE VARIATIONS
OF VLF RADIO SIGNALS AT SUNRISE AND SUNSET

V. G. Bezrodnyi, P. V. Bltokh, R. S. Shubova, V. F. Shul'ga,
Yu. M. Yampol'skii

Possible mechanisms are discussed for explaining variations of the spatial phase difference of VLF radio signal discovered experimentally at sunrise and sunset. They are the displacement of the field inhomogeneity localized in the vicinity of the terminator which is related with the change in the conditions of the normal wave propagation at the day—night transition (sunrise) and the motion of the interference pattern of the night part of the waveguide (sunset) after the terminator. The results of calculation made are compared with the experimental data obtained by the authors.

УДК 621.371.25

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В ГОРИЗОНТАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЕ

Н. Д. Борисов, А. В. Гуревич

Исследуется роль волновых эффектов при распространении коротких радиоволн в горизонтально неоднородной ионосфере. Сроятся система нормальных мод ионосферного волновода с учетом эффекта горизонтальной неоднородности. Показано, что коэффициенты разложения по этим модам мало меняются на сверхдальних и кругосветных трассах.

Теория распространения радиоволн в сферически-симметричной ионосфере развита, в основном, достаточно полно [1, 2]. Однако реальной ионосфере присуща значительная асимметрия. Концентрация заряженных частиц сильно меняется при переходе на постоянной высоте z от дневной стороны к ночной или от полярной к среднеширотной и экваториальной зонам. И хотя такое изменение в горизонтальном направлении x происходит весьма медленно в сравнении с высотным изменением,

$$\beta = \left| \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}} \right| \sim 10^{-2}, \quad (1)$$

оно, тем не менее, оказывается определяющим при сверхдальнем распространении коротких радиоволн. Эффекты горизонтальной неоднородности ионосферы могут быть весьма существенны и для одно-двухскачкового распространения. Поэтому исследование вопросов, связанных с распространением коротких радиоволн в горизонтально неоднородной ионосфере, вызывает заметный интерес [3-7].

В работах одного из авторов и Цедилиной [3, 4] были получены простые приближенные решения уравнений геометрической оптики в горизонтально неоднородной ионосфере — адиабатическое приближение. Согласно развитию в этих работах подходу лучи распространяются по траекториям, каждая из которых характеризуется своим значением адиабатического инварианта J .

Цель настоящей работы — исследовать решение точных волновых уравнений в горизонтально неоднородной ионосфере. В разд. 1 показано, что, используя медленность изменения плотности ионосферы в горизонтальном направлении (условие (1)), можно существенно упростить исходную систему векторных волновых уравнений. Учитывая (1), естественно ожидать также, что для построения решения удастся использовать систему собственных волновых функций (или нормальных мод) сферически-симметричного волновода φ_n [2, 3]*. Для этого необходимо, чтобы изменение коэффициентов разложения решения по нормальным

* Такой подход, например, недавно осуществлен в работе [11].

модам φ_n в процессе распространения волны было небольшим. Оказывается, однако, что это не так: как показано в разд. 2, 3, коэффициенты разложения в условиях реальной ионосферы сильно меняются уже на расстояниях $\sim 10^2$ км. Это означает, что систему нормальных мод сферического волновода φ_n в реальной неоднородной ионосфере затруднительно использовать для определения поля коротких радиоволн не только на сверхдальних, но уже и на односкачковых трассах.

Система нормальных мод, адекватная рассматриваемой задаче, должна с самого начала учитывать горизонтальную неоднородность ионосферы. Такая система Ψ_N в локально-однородном (адиабатическом) приближении в общей форме построена в разд. 4. Показано, что при сверхдальнем и даже при кругосветном распространении волны коэффициенты разложения по функциям Ψ_N изменяются слабо. Системе мод Ψ_N естественно поэтому назвать адиабатической.

Сопоставление полученных результатов с адиабатическим приближением в геометрической оптике (разд. 5) показывает, что в достаточно размазанных по J волновых пакетах теорема о сохранении адиабатического инварианта, в целом, достаточно хорошо выполняется.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Распространение электромагнитной волны описывается векторным волновым уравнением. Если диэлектрическая проницаемость ϵ плазмы зависит лишь от одной из координат, то при решении уравнения можно произвести разложение поля на векторные компоненты. Исходное уравнение при этом распадается на независимые скалярные уравнения для отдельных составляющих (см. в этой связи, например, [1, 8]). В общем случае, когда ϵ есть функция двух или даже трех координат, получить систему независимых скалярных уравнений не удастся. Однако при условии, что в горизонтальном направлении диэлектрическая проницаемость ионосферной плазмы меняется достаточно медленно (см. (1)), удобно по-прежнему искать решение с помощью разложения поля на векторные компоненты.

Итак, пусть диэлектрическая проницаемость ϵ — произвольная функция координат $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$. Из уравнений Максвелла для пространства, свободного от источников, имеем уравнение для магнитного поля \mathbf{H} :

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} - K_0^2 \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где $K_0 = \frac{\omega}{c}$, ω — частота волны, c — скорость света. Подставляя в (2)

\mathbf{H} в виде $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1$, после несложных преобразований приходим к уравнению

$$\Delta \mathbf{A}_1 - (\nabla \ln \epsilon) \operatorname{div} \mathbf{A}_1 + \epsilon K_0^2 \mathbf{A}_1 = \epsilon \nabla \Phi. \quad (3)$$

Здесь Φ — произвольная скалярная функция, возникшая после снятия в (2) оператора rot . В частном случае сферической симметрии, $\epsilon = \epsilon(r)$, полагая $\mathbf{A}_1 = e_r A_1$, $\Phi = \frac{2A_1}{\epsilon r}$, получим известное уравнение (см. [1, 2]):

$$\left[\epsilon \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] A_1 + \epsilon K_0^2 A_1 = 0. \quad (4)$$

Это уравнение описывает поле волны, возбуждаемой радиальным током.

Второе независимое решение можно искать, вводя потенциал A_2

так, чтобы электрическое поле E выражалось через A_2 следующим образом: $E(A_2) = \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \varepsilon A_2$. Подставляя $E(A_2)$ в уравнение

$$\text{rot rot } E - \varepsilon K_0^2 E = 0, \quad (5)$$

найдем для потенциала A_2

$$\Delta A_2 - \text{rot} [\nabla \ln \varepsilon, A_2] + \varepsilon K_0^2 A_2 = \nabla \Phi, \quad (6)$$

где Φ — опять-таки произвольная скалярная функция. В случае сферической симметрии, вводя $A_2 = e_r A_2$, $\Phi = \frac{2A_2}{r}$, имеем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] A_2 + \varepsilon K_0^2 A_2 = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) определяет поле волны, возбуждаемой вихревым током, лежащим в плоскости θ, φ .

Ограничимся теперь для простоты рассмотрением плоской задачи. Учет сферичности, проведенный в разд. 5, не приводит к качественно новым результатам. Примем, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \varepsilon(z, x)$, полагая при этом, что в горизонтальном направлении x диэлектрическая проницаемость меняется достаточно медленно и при любом x имеет максимум по вертикали z , так что образуется волноводный канал, в котором может удерживаться волна.

Интересующая нас система уравнений для компонент векторного потенциала, вытекающая из (3), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \varepsilon K_0^2 A_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \varepsilon K_0^2 A_x &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае, когда ε не зависит от горизонтальной координаты x , $A_x = 0$ и система (8) сводится к одному уравнению для A_z . В горизонтально неоднородной среде, учитывая (1), можно искать решение (8) в виде ряда по степеням β :

$$A_z = \sum_{n=1} \beta^{n-1} A_z^{(n)}, \quad A_x = \sum_{n=1} \beta^n A_x^{(n)}.$$

В низшем приближении по β имеем следующее уравнение для основной компоненты потенциала A_z :

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \varepsilon K_0^2 A_z = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) будет построено в следующем разделе.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО НОРМАЛЬНЫМ МОДАМ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА

Введем новый потенциал A , так что $A_z = \sqrt{\varepsilon} A$. Тогда для A получим уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + K_0^2 U A = - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x}, \quad (10)$$

где $U = \varepsilon - \left[\frac{3}{4\varepsilon^2 K_0^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2\varepsilon K_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right]$. Для коротких волн можно считать $U \approx \varepsilon$ (см. [3]). Мы оставим временно в правой части (10) малый член порядка β ; в дальнейшем будет показано, что им можно пренебречь.

Рассмотрим систему ортонормированных функций φ_n , которые являются собственными функциями однородной задачи, соответствующими связанным состояниям для уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + (K_0^2 \varepsilon - k_n^2) \varphi_n = 0. \quad (11)$$

Функции φ_n в горизонтально однородном (или сферически-симметричном) случае $\varepsilon = \varepsilon(z)$ образуют полную систему собственных мод ионосферного волновода [2-4]. В этом случае решение уравнения (10) представляется в виде суперпозиции нормальных волн $A = \sum_n c_n \varphi_n e^{-ik_n x}$ с постоянными коэффициентами c_n .

В горизонтально неоднородном волноводе коэффициенты c_n уже не постоянны. Тогда решение уравнения (11) можно искать в виде

$$A = \sum_n c_n(x) \varphi_n \exp \left(-i \int^x k_n dx \right) \frac{1}{\sqrt{k_n}}. \quad (12)$$

Собственные функции φ_n зависят от x как от параметра и при любом фиксированном x удовлетворяют соотношению

$$\langle \varphi_n \varphi_m \rangle \equiv \int dz \varphi_n \varphi_m = \delta_{nm}. \quad (13)$$

Подчеркнем, что решения φ_n , как отвечающие локализованным состояниям, можно считать действительными. Полагая, что коэффициенты c_n не слишком быстро меняются в зависимости от x , $\left| \frac{d \ln c_n}{dx} \right| \ll K_0$, с учетом (12) и (13) приходим к уравнению для c_n :

$$\frac{dc_n}{dx} = - \sum_m \sqrt{\frac{k_m}{k_n}} (H_{nm}^{(1)} + H_{nm}^{(2)}) \exp \left[i \int^x (k_n - k_m) dx \right] c_m, \quad (14)$$

где

$$H_{nm}^{(1)} = \left\langle \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right\rangle, \quad H_{nm}^{(2)} = \frac{1}{2} \left\langle \varphi_n \varphi_m \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} \right\rangle.$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по z , как в (13). Уравнение (14) определяет эволюцию начального состояния при движении волны в канале.

В случае, когда $\varepsilon(z, x)$ близко к единице, что обычно выполняется в ионосферных волновых каналах, коэффициенты $H_{nm}^{(1)}$ и $H_{nm}^{(2)}$ не независимы, а связаны между собой. Действительно, продифференцируем уравнение (11) по x , умножим на φ_m и проинтегрируем по z . Затем умножим уравнение для φ_m на $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$ и снова проинтегрируем по z . Сравнивая два результата, получим искомое соотношение:

$$H_{nm}^{(2)} \approx \frac{1}{2} \left\langle \varphi_n \varphi_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\rangle \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial k_n^2 / \partial x}{K_0^2} \delta_{nm} + \frac{k_n^2 - k_m^2}{K_0^2} H_{nm}^{(1)} \right]. \quad (15)$$

Отметим, что в квазиклассическом приближении для каждой из нормальных мод φ_n величина $\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{K_0^2 \varepsilon - k_n^2} dz$ (z_1, z_2 — точки поворота) является постоянной:

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{K_0^2 \varepsilon - k_n^2} dz = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (16)$$

Эта постоянная при больших значениях n с точностью до численного множителя совпадает с введенным в [3, 4] адиабатическим инвариантом J .

Распространение волны в канале удобно описывать с помощью нормальных мод φ_n лишь в том случае, если коэффициенты разложения ε_n достаточно медленно меняются вдоль траектории. Поэтому для дальнейшего в первую очередь необходимо получить оценку величин $H_{nm}^{(1)}$, $H_{nm}^{(2)}$ для реальной ионосферы.

3. ОЦЕНКА МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ H_{nm} ДЛЯ ИОНОСФЕРНЫХ КАНАЛОВ

Короткие радиоволны с частотами, в несколько раз превышающими плазменную частоту и гирочастоту электронов, могут распространяться в ионосферных волновых каналах [3]. Диэлектрическая проницаемость для таких волн слабо отличается от единицы, $\varepsilon = 1 + \delta\varepsilon$, $|\delta\varepsilon| < 10^{-1}$, так что глубина возникающих каналов весьма мала. Несмотря на это, число собственных мод обычно достаточно велико: $N \sim 10^2 \div 10^3$. Диапазон высот, на которых существуют различные ионосферные каналы, составляет 100 — 350 км.

Для оценки матричных элементов H_{nm} рассмотрим область в окрестности минимума канала — точки скольжения $z = z_c$. Здесь можно считать, что диэлектрическая проницаемость ε ведет себя, как парабола [3]: $\varepsilon = \varepsilon_M - \frac{1}{2} \varepsilon_M'' (z - z_c)^2$. Перейдем к безразмерным переменным $\xi = \frac{z - z_c}{\rho_c}$, $E_n = (K_0^2 \varepsilon_M - k_n^2) \rho_c^2$, $\rho_c = \left[\frac{2}{\varepsilon_M'' K_0^2} \right]^{1/4}$. Уравнение (11) в этих переменных

$$\frac{d^2 \varphi_n}{d\xi^2} + (E_n - \xi^2) \varphi_n = 0 \quad (17)$$

имеет решения, выражающиеся через полиномы Эрмита,

$$\varphi_n = s_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (18)$$

где $s_n = (\sqrt{\pi} n! 2^n)^{-1/2}$.

Учитывая, что $E_n = 2n + 1$, приведем выражение для волновых чисел k_n :

$$k_n \approx K_0 \sqrt{\varepsilon_M} - \frac{K_0}{2 \sqrt{\varepsilon_M}} \left(\frac{\varepsilon_M''}{2K_0^2} \right)^{1/2} (2n + 1). \quad (19)$$

Разность между двумя соседними волновыми числами составляет

$$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \left(\frac{\varepsilon_M''}{2\varepsilon_M} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

С помощью (18) можно представить входящую в $H_{nm}^{(1)}$ величину $\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}$ в виде

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = s_m e^{-\varepsilon^{9/2}} \left[m H_{m-1} - \frac{1}{2} H_{m+1} \right] a(x), \quad (21)$$

где $a(x) = -\frac{1}{\rho_c} \frac{dz_c}{dx}$. Используя (21) и определение $H_{nm}^{(1)}$, получим

$$H_{nm}^{(1)} = a(x) \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}} \delta_{n, m-1} - \sqrt{\frac{m+1}{2}} \delta_{n, m+1} \right\}. \quad (22)$$

Здесь δ_{nm} — символ Кронекера, n, m — номера возбужденных мод.

Оценим величину $a(x)$ для межслоевого ионосферного канала. Особенностью этого канала является то, что на ночной стороне он поднимается значительно выше над Землей, чем на дневной, так что перепад высот $z_{c \max} - z_{c \min}$ достигает 10^2 км [9]. Положим для оценки $z_c(x) = z_c^{(0)} + \delta z_c \cos q_0 x$, где $z_c^{(0)}$ — средняя высота над Землей, а δz_c — отклонение от среднего значения, $q_0 = \frac{1}{R_0}$, R_0 — радиус Земли.

При этом выражение для $a(x)$ принимает вид

$$a(x) = \frac{q_0 \delta z_c}{\rho_c} \sin q_0 x. \quad (23)$$

Приведем результаты расчета величины $a(x)$ в двух конкретных случаях. Используя модель ионосферы, рассмотренную в [3], для частоты $\omega = 1,5 \cdot 10^8$ (с⁻¹) получим $a(x) = 10^{-2} \sin q_0 x$ (км⁻¹). С помощью экспериментальных профилей электронной концентрации на экваторе, взятых из [10], для частоты $\omega = 1,25 \cdot 10^8$ (с⁻¹) найдем $a(x) = 3 \cdot 10^{-3} \sin q_0 x$ (км⁻¹).

Таким образом, для не слишком низко лежащих мод ($m \gg 1$) из (22) получается весьма большое возмущение $|H_{nm}^{(1)}| \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$ (км⁻¹). Чтобы понять этот результат, перепишем формулу (15) в виде

$$H_{nm}^{(1)} = \frac{K_0}{k_n - k_m} \frac{1}{2} \left\langle \varphi_n \varphi_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\rangle, \quad n \neq m. \quad (24)$$

Из (24) следует, что возмущение $H_{nm}^{(1)}$ велико для ближайших мод $|m - n| = 1$ в области коротких волн. Существенно также наличие больших перепадов высот, на которых лежит межслоевой канал. По мере увеличения разности $|m - n|$ матричные элементы $H_{nm}^{(1)}$ быстро убывают. Действительно, если воспользоваться квазиклассическими выражениями для φ_n и φ_m , то видно, что с ростом $|m - n|$ подынтегральное выражение в (24) начинает быстро осциллировать. Кроме того, одновременно уменьшается и множитель $\left| \frac{K_0}{k_n - k_m} \right|$.

Из (24) следует также, что при $m \neq n$ $H_{nm}^{(2)} \approx \frac{k_n - k_m}{K_0} H_{nm}^{(1)}$. Согласно (20) для ближайших мод $\Delta k \approx (\varepsilon''_M/2)^{1/2}$, что составляет для ионосферных каналов $\Delta k \sim (2 \div 3) \cdot 10^{-3}$ (км⁻¹). В области коротких волн величина $H_{nm}^{(2)}$ имеет порядок $H_{nm}^{(2)} \sim 10^{-5} H_{nm}^{(1)}$, т. е. пренебрежимо мала. При $m = n$ можно считать $H_{nn}^{(2)} = \frac{1}{2} \left\langle \varphi_n^2 \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} \right\rangle \ll 10^{-5}$ (км⁻¹),

что также слишком мало. Поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать величиной $H_{nm}^{(2)}$ по сравнению с $H_{nm}^{(1)}$.

Таким образом, для коротких волн взаимодействие H_{nm} между ближайшими нормальными модами в реальной горизонтально неоднородной ионосфере оказывается весьма сильным. Коэффициенты c_n быстро меняются при движении волны, моды перепутываются, и теория возмущения перестает работать на расстояниях порядка $|H_{nm}^{-1}| \sim 10^2$ км, т. е. значительно меньших одного скачка. Поэтому нормальные моды φ_n фактически невозможно использовать для расчета волнового поля в случае коротких волн.

С увеличением длины волны взаимодействие между модами ослабевает, поскольку согласно (22), (23) $|H_{nm}^{(1)}| \sim k_0^{1/2}$. Следовательно, для длинных радиоволн ситуация иная, и здесь уже вполне удобно использовать моды φ_n при исследовании распространения радиоволн.

4. СИСТЕМА АДАБАТИЧЕСКИХ МОД ГОРИЗОНТАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА

Результаты предыдущего раздела показывают, что для коротких волн систему собственных мод необходимо строить сразу с учетом эффекта горизонтальной неоднородности, т. е. с учетом взаимодействия H_{nm} . С другой стороны, поскольку свойства ионосферы в горизонтальном направлении меняются медленно (1), ее в каждой точке можно считать локально-однородной.

С учетом сказанного построим новую систему собственных мод в горизонтально неоднородной ионосфере, которую естественно назвать адиабатической. Рассмотрим функции $\Psi_N = \sum_n a_n^{(N)} \varphi_n$, коэффициенты $a_n^{(N)}$ и соответствующие собственные значения K_N которых определяются из цепочки уравнений

$$(k_n - K) a_n - i \sum_m H_{nm}^{(1)} a_m = 0. \quad (25)$$

Каждое значение K_N есть корень уравнения (25). Отметим, что матрица $iH_{nm}^{(1)}$ является эрмитовой. Число функций φ_n , которые вносят существенный вклад в Ψ_N , $-\Delta n \sim \left| \frac{H_{n, n-1}}{\Delta K} \right|$. По мере увеличения разности $|K_N - k_m|$ для m , таких, что $\left| \frac{H_{m, m-1}}{K_N - k_m} \right| < 1$, коэффициенты a_m быстро убывают. Иначе говоря, новые моды представляют собой достаточно широкие пакеты из старых мод φ_n .

Собственные значения K_N и коэффициенты a_n , как следует из (25), являются периодическими функциями x :

$$a_n(x) = a_n(x + 2\pi R_0), \quad K_N(x) = K_N(x + 2\pi R_0). \quad (26)$$

Новые собственные функции, принадлежащие различным собственным значениям K_N , ортогональны при любом фиксированном x :

$$\langle \Psi_N^* \Psi_M \rangle = \delta_{NM}. \quad (27)$$

Общее решение уравнения (10) запишем следующим образом:

$$\Psi = \sum_N a_N(x) \Psi_N \exp\left(-i \int^x K_N dx\right) \frac{1}{\sqrt{K_N}}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (10) и используя (27), найдем уравнение для коэффициентов α_N :

$$\frac{d\alpha_N}{dx} + \sum_M \sqrt{\frac{K_M}{K_N}} h_{NM}(x) \exp \left[-i \int^x (K_M - K_N) dx \right] \alpha_M = 0, \quad (29)$$

где

$$h_{NM} = \sum_n a_n^{*(N)} \frac{\partial a_n^{(M)}}{\partial x}, \quad h_{NM}^* = -h_{MN}.$$

При выводе (29) учтено, что $k_n^2 - K_N^2 \approx 2K_N(k_n - K_N)$.

Если оценить с помощью (25) характерные гармоники ряда Фурье для коэффициентов $a_n^{(N)}$, дающих основной вклад в Ψ_N ($a_n^{(N)} = \sum_l \xi_l \cos l q_0 x$), то можно убедиться, что величина l составляет

несколько единиц. Взаимодействие h_{NM} имеет порядок $|h_{NM}| \sim \frac{l}{R_0}$.

При этом появляется новый малый параметр $\gamma = \left| \frac{h_{NM}}{\Delta K} \right| \ll 1$, что позволяет использовать теорию возмущения при решении системы уравнений (29). Пусть, например, начальное состояние задано условием $\alpha_M(0) = \delta_{NM}$. Тогда для $x > 0$ из (29) следует:

$$\alpha_M \sim O \left(\frac{h_{NM}}{|N-M| \Delta K} \right), \quad \alpha_N \sim 1 + O \left(\left| \frac{h_{N, N-1}}{\Delta K} \right|^2 \right). \quad (30)$$

Таким образом, взаимодействие h_{NM} не приводит к значительному изменению локализованного по модам Ψ_N начального состояния.

Обратимся теперь ко второму уравнению системы (8). Положим $A_x = \sum_N \eta_N(x) \Psi_N e^{-i \int^{K_N} dx} \frac{1}{\sqrt{K_N}}$. Тогда для определения η_N имеем неоднородную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_N}{dx} + \sum_M \sqrt{\frac{K_M}{K_N}} h_{NM} \exp \left[-i \int (K_M - K_N) dx \right] \eta_M = \\ = \frac{i}{2K_N} \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} \sum_M \left\langle \Psi_N^* \frac{\partial \Psi_M}{\partial z} \right\rangle \exp \left[-i \int (K_M - K_N) dx \right] \alpha_M \end{aligned} \quad (31)$$

с начальными условиями $\eta_N(0) = 0$ для всех N . Поскольку коэффициент $\left| \frac{1}{2K_N} \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} \right| < 10^{-7}$, крайне мал, мы не будем в настоящей работе учитывать компоненту потенциала A_x .

5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН С УЧЕТОМ СФЕРИЧНОСТИ ЗЕМЛИ

Остановимся кратко на описании поля волны в сферических координатах. Направим полярную ось перпендикулярно плоскости распространения. Пусть волна возбуждается радиальным током, локализованным вблизи Земли. Электромагнитное поле такой волны будем описывать уравнением (3), причем в ионосфере, где $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \neq 0$, необходимо ввести две компоненты векторного потенциала: $\mathbf{A} = \{A_r, 0, A_\varphi\}$.

Учитывая, однако, малость параметра $\beta = \left| \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right)^{-1} \right|$, можно, как и раньше, свести задачу к решению одного скалярного уравнения, которое совпадает с (4) при $\frac{\partial A_1}{\partial \theta} = 0$. Вводя новую переменную A (см. [3])

так, что $A_1 = \sqrt{\varepsilon(R_0 + z)} A$, получим приближенное уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \varepsilon' K_0^2 A = 0, \quad (32)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon \left(1 + \frac{2z}{R_0} \right)$, z — высота над поверхностью Земли. Единственным отличием от предыдущего случая является то, что в уравнение (32) входит эффективная диэлектрическая проницаемость ε' , обусловленная наличием кривизны. Анализ же уравнения (32) ничем не отличается от проведенного выше.

6. СОПОСТАВЛЕНИЕ С АДИАБАТИЧЕСКИМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В заключение сравним полученные здесь результаты с адиабатическим приближением в геометрической оптике [3, 4]. Как показано в разд. 2, 3, коэффициенты разложения решения по нормальным модам сферически-симметричного волновода φ_n в горизонтально неоднородной ионосфере не сохраняются. Происходит эффективное перемешивание соседних мод. Однако, поскольку номер моды согласно разд. 2 эквивалентен адиабатическому инварианту J , то это означает, что благодаря волновым эффектам происходит перераспределение энергии волны по адиабатическим инвариантам.

Насколько это перераспределение значительно? Ответ на этот вопрос дает анализ системы адиабатических нормальных мод, построенных в разд. 4. Функции Ψ_N представляют собой пакеты мод φ_n , имеющие эффективную ширину по n , равную $\Delta n \sim |H_{n, n-1} / \Delta K|$. В условиях ионосферы $\Delta n \sim (1 \div 3) \cdot 10^1$. Разложение по функциям Ψ_N сохраняется на сверхдальней и даже кругосветной трассе. Это означает, что сохраняются волновые пакеты по n , имеющие ширину Δn , или, что то же самое, пакеты по инварианту J , имеющие ширину $\Delta J \approx \frac{\Delta n}{n} J$.

Таким образом, за счет волновых эффектов энергия волны перераспределяется по адиабатическим инвариантам на ширину порядка ΔJ . Учтем, однако, что полное число волновых мод в ионосферном канале весьма велико ($n_{\max} \sim 10^3$). Поэтому $\Delta n/n \sim 10^{-2}$ и $\Delta J/J_0 \sim 10^{-2}$, где J_0 — максимальный адиабатический инвариант канала. Это означает, что при достаточно гладком распределении по инвариантам энергии волны в канале ее перераспределение за счет волновых эффектов практически несущественно. Иначе говоря, геометрооптическая теорема о сохранении адиабатического инварианта при указанных условиях выполняется достаточно хорошо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Вреггер, *Terrestrial Radio Waves*, Els. Publ. Comp., Amsterdam, 1949.
2. П. Е. Краснушкин, *Метод нормальных мод в применении к проблеме дальних радиосвязей*, изд. МГУ, М., 1947.
3. А. В. Гуревич, *Геомагнетизм и аэрономия*, 11, 961 (1971).
4. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедлина, *Геомагнетизм и аэрономия*, 13, 283 (1973).

5. Т. С. Керблей, Е. М. Ковалевская, Геомagnetизм и аэрономия, 7, 123 (1967).
6. А. Г. Шлионский, Препринт ИЗМИРАН, № 12, 1971.
7. В. И. Сажин, Ю. А. Семеней, М. В. Тинин, Сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 32, 53 (1974).
8. Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.
9. И. А. Тушенцова, Д. И. Фищук, Е. Е. Цедилина, Геомagnetизм и аэрономия, 15, 78 (1975).
10. Т. Н. Соболева, Препринт ИЗМИРАН, № 16, 1973
11. А. А. Малюков, И. И. Орлов, В. Н. Попов, Геомagnetизм и аэрономия, 15, 370 (1975).

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
10 июня 1975 г.

TO THE THEORY OF SHORT RADIO WAVE PROPAGATION IN HORIZONTALLY INHOMOGENEOUS IONOSPHERE

N. D. Borisov, A. V. Gurevich

The role of wave effects when short radio waves propagate in a horizontally inhomogeneous ionosphere is investigated. A system of normal modes of the ionospheric waveguide is built with taking the horizontal inhomogeneity effect into account. The expansion coefficients over these modes are shown to vary small at extended and world traces.

УДК 621.371.246

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ МНОГОЛУЧЕВОСТИ

В. Б. Синецкий

Анализируются результаты экспериментального исследования замираний миллиметровых радиоволн в условиях многолучевости на трассе протяженностью 21 км. Приводятся данные о распределении вероятности глубины замираний, их количестве и средней продолжительности на частоте 36,6 ГГц, а также аналогичные совместные характеристики при частотном разnose 400 МГц. Для сравнения приведены результаты, полученные на вспомогательной частоте 9,3 ГГц. Обсуждается вопрос о связи замираний с метеорологической обстановкой.

Серьезными ограничениями при использовании миллиметровых радиоволн для целей связи в пределах прямой видимости являются осадки и многолучевое распространение. К настоящему времени поглощение в дождях исследовано достаточно подробно (см., например, [1-3] и библиографию к ним). В то же время в литературе практически отсутствуют данные о замираниях миллиметровых волн (ММВ) в условиях многолучевости; экспериментальное исследование этого вопроса ограничивалось до сих пор диапазоном 4—11 ГГц [4-6]. Экстраполяция полученных на более длинных волнах результатов в миллиметровый диапазон затруднительна в связи со специфическими особенностями ММВ (сравнительно короткие трассы, повышенное влияние влажности, тенденция к применению узконаправленных антенн и т. п.). Поэтому важное значение приобретают исследования в реальных условиях.

Целью настоящей работы является экспериментальное определение статистических характеристик замираний ММВ в условиях многолучевого распространения.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И АППАРАТУРА

Описываемые эксперименты проводились на трассе прямой видимости длиной 21 км (рис. 1) в 1972—1973 гг. Подстилающая поверхность — лесостепь, минимальный просвет при высотах антенн над поверхностью земли $h_1 = 30$ м, $h_2 = 10$ м и стандартной рефракции составляет 30 м. Коэффициент отражения от поверхности, определенный в специальной серии измерений, не превышает 0,2.

Основные характеристики аппаратуры сведены в табл. 1. Согласно выбранной методике производились измерения уровней сигналов в миллиметровом диапазоне (ММД) на частотах 36,6 и 37,0 ГГц и в сантиметровом диапазоне (СМД) на частоте 9,3 ГГц. Антенные системы ММД и СМД имели незначительное (0,5—2 м) смещение в горизонтальной плоскости; между каналами 36,6 и 37,0 ГГц пространственный разнос отсутствовал.

В качестве передатчиков и гетеродинов приемников использовались маломощные отражательные клистроны. Были приняты меры для стабилизации питающего и теплового режимов источников СВЧ. Экспери-

ментально определенная суммарная погрешность измерений уровня принятого сигнала составляет около 0,65 дБ за 1 час и ~ 1,5 дБ за 6 часов.

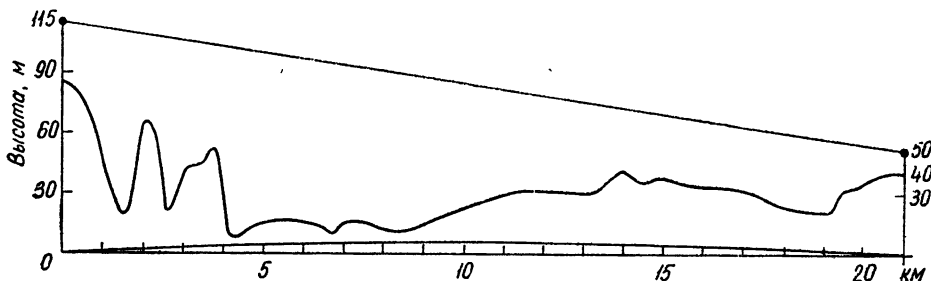


Рис. 1. Профиль трассы распространения.

Таблица 1

	Диапазон 37 ГГц		Диапазон 9.3 ГГц	
	передающая	приемная	передающая	приемная
1. Антенны				
Тип	параболоид	параболоид	рупор	параболоид
Размер	$d=0,6$ м	$d=1,5$ м	(0,25 м × 0,3 м)	$d=1,0$ м
Диаграмма направленности по уровню 0,5	1°	25'	8°	2°,2
Коэффициент усиления, дБ	43	50	27	37
2. Передатчики				
Мощность, Вт	10^{-2}		$5 \cdot 10^{-2}$	
Частоты, ГГц	36,6; 37,0		9,3	
3. Приемники				
Сквозная полоса, МГц	0,5		10,0	
Первая ПЧ, МГц	100 или 200		30,0	
Пороговая чувствительность, дБ/Вт	-123		-133	
Отношение сигнал/шум в ясную погоду, дБ	45		50	

На начальном этапе исследований продолжительность сеансов (дневных и ночных) выбиралась в пределах одного часа, а после обнаружения глубоких замираний была увеличена до 6—10 часов в ночное время.

Замирания в условиях многолучевости представляют собой редкие явления, происходящие в случайные отрезки времени. Это обстоятельство, а также анализируемая ниже «медленность» замираний накладывают определенный отпечаток на методику измерений, требуя проведения длительных серий экспериментов. В условиях, характерных для появления многолучевых замираний, были проведены: 1) предварительная серия измерений с 22.07.72 по 5.08.72 на частоте 36,6 ГГц; 2) серия измерений в период с 1.06.73 по 8.08.73 на частотах 36,6; 37,0; 9,3 ГГц. Отсутствие замираний этого типа в дневное время, подтвержденное многочисленными экспериментами (вариации полуденных значений в течение весенне-летнего сезона—менее $\pm 1,5$ дБ), дает возможность не проводить непрерывные измерения, а ограничиться регулярными наблюдениями в ночное время при отсутствии осадков.

В процессе обработки вычислялся относительный уровень сигнала V путем нормирования текущего напряжения на выходе приемника (с учетом градуировок) к среднему значению уровня в дневное время. Для обработки на ЭВМ записи разбивались на реализации средней продолжительностью около часа, временной шаг квантования составлял (0,3—2,5) с.

При обработке данных 1973 г. из полного периода $T = 1656$ часов (1.06—8.08) были отобраны участки записей с наиболее интенсивными замираниями, превышающими 10 дБ. Отрезок времени порядка 8 часов, полученный «компрессией» отдельных реализаций такого типа, представляет собой период замираний T_0 , для которого вычислена большая часть характеристик (отношение $T_0/T \approx 0,5\%$).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Особенности записей сигналов и сопутствующие метеосостояния

Согласно экспериментальным наблюдениям, в ясную погоду могут иметь место два отличающихся типа записей сигналов. К первому типу

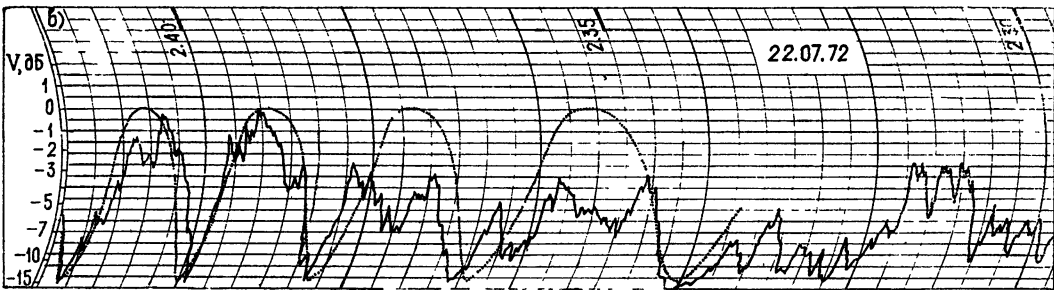
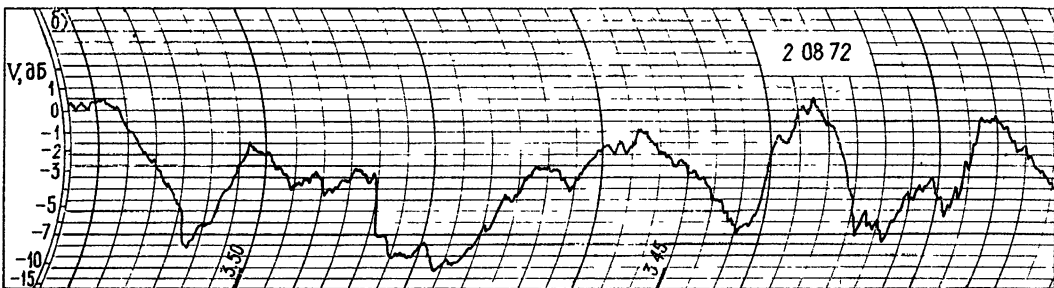
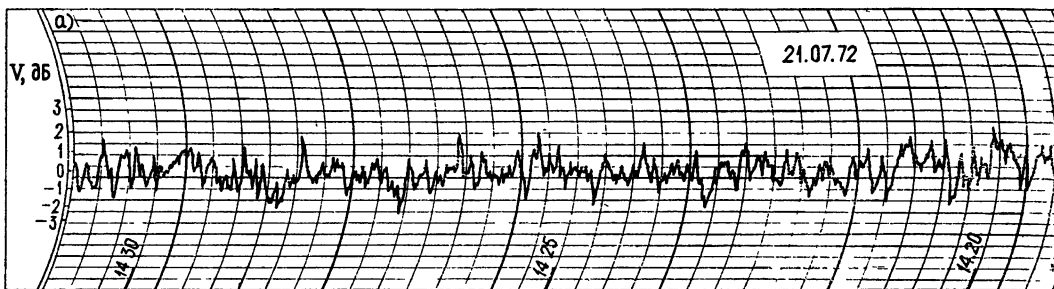


Рис. 2. Примеры записей:

а) в стандартных условиях; б), в) в условиях многолучевости, $f = 36,6$ ГГц (пунктир — расчетная кривая для слоя, равномерно движущегося со скоростью $v_B = 2,6$ см/с).

относится преобладающая группа опытов (все дневные и большая часть ночных) со стабильным средним значением, близким к уровню свободного пространства, и хорошо выраженной флуктуационной составляющей (рис. 2 а). Общая метеорологическая обстановка при этом соответствует так называемым стандартным условиям, при которых ветер и конвективные потоки перемешивают массы воздуха, способствуя турбулизации атмосферы.

Второй тип записей (рис. 2 б, в) характеризуется аномальным поведением сигнала: наряду со значительным снижением амплитуды «быстрых» флуктуаций наблюдаются низкочастотные составляющие ($\sim 10-20$) дБ и кратковременные глубокие (~ 40 дБ) замирания. (Имеет место также переходный тип: гладкие записи, практически без флуктуаций и замираний.) Этому явлению соответствует вполне определенная метеорологическая обстановка: безветренная погода в ясные летние ночи, характерная для периода антициклона. Известно (см., например, [7]), что в таких условиях в результате инверсий температуры и перепадов влажности вблизи поверхности земли могут возникать слои с повышенными градиентами коэффициента преломления; образующиеся в результате отражения от слоев дополнительные лучи приводят к появлению в месте приема многолучевой структуры сигнала. Наличие слоев экспериментально подтверждалось метеозондированиями, проведенными в некоторых сеансах вблизи середины трассы с помощью привязного радиозонда; измеренные градиенты в слоях достигали порядка $2N$ ед./м.

Обычно замирания начинаются около полуночи и исчезают после восхода Солнца или час-два спустя; при ветреной погоде, разрушающей слои, замирания не имеют места.

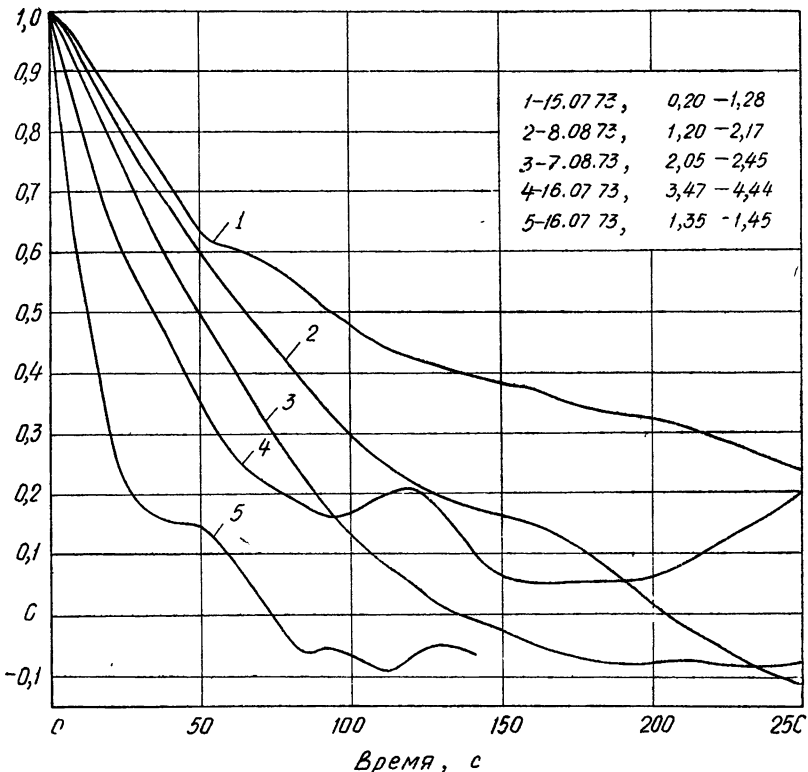


Рис. 3. Функции автокорреляции при многолучевости, $f = 36,6$ ГГц.

Характерной особенностью записей второго типа является их «медленность» по сравнению с записями, полученными в стандартных условиях. Из корреляционного анализа следует, что временной радиус корреляции $\rho_{0,5}$ для этих записей, вычисленный при обработке стационарных реализаций продолжительностью около часа, находится в пределах 12—90 секунд (рис. 3), при среднем значении $\rho_{0,5} \approx 50$ с. Для сравнения укажем, что аналогичный параметр в стандартных условиях составляет 0,6—3,2 с.

Оценка скорости перемещения воздушных масс в вертикальном направлении v_v , которую можно получить по интерференционным формулам, сопоставляя временной ход огибающей реального сигнала при наличии характерных осцилляций, имеющих место в некоторых опытах (например, рис. 2 в), с расчетной кривой для равномерного движения слоя, дает значение v_v в пределах 1—10 см/с, что согласуется с другими измерениями в антициклонных условиях [8].

2. Распределение вероятности глубины замираний

Вид кривой интегрального распределения $P(V \leq V_0)$ (где V — уровень сигнала, V_0 — уровень сравнения) для случая многолучевого распространения в тропосфере исследуется в статистической теории, основанной на интерференционной модели [9, 10]. В рамках теории рассмотрено взаимодействие прямого сигнала постоянной амплитуды и случайного вектора, являющегося суммой переотраженных сигналов, независимо от их происхождения. Показано, что в области глубоких замираний ($V \leq 0,1$) наклон кривой $P(V)$ зависит от количества лучей и соотношения $k = 2\sigma^2/E_0^2$ между мощностью регулярной составляющей E_0^2 и суммарной мощностью отраженных сигналов σ^2 .

Некоторые примеры экспериментальных распределений, полученных в опытах 1973 г. на частоте 36,6 ГГц для реализаций продолжительностью 0,5—1 час, приведены на рис. 4. Для удобства сопоставления кривые условно совмещены по медианному уровню. Диапазон наклонов распределений колеблется в пределах от обобщенного рэлеевского с параметром $K = 20 \lg k = -10$ дБ (относительно слабые замирания, кривая 2) до значений, близких к теоретической зависимости для двухлучевой модели (глубокие замирания, кривая 1). Чаще других (примерно в 70% случаев) встречаются распределения, близкие к рэлеевскому.

Интегральное распределение уровней, вычисленное для периода T_0 (диапазон 8,2 мм), представлено на рис. 5. Здесь можно отметить две характерные области. Левее точки $V \approx -15$ дБ (область глубоких замираний) наклон кривой распределения для сигнала на одной частоте достаточно хорошо согласуется с рэлеевским законом (в принятом масштабе ему соответствует прямая линия с крутизной 10 дБ/декаду). Это подтверждает положение [10] о том, что типичной зависимостью при многолучевых замираниях для сухопутных трасс за достаточно длительный промежуток времени является квадратичная зависимость $P(V \leq V_0) \sim V_0^2$, аппроксимирующая в области $V < (0,1 \div 0,3)$ рэлеевский закон и согласующаяся, в свою очередь, с расчетами на интерференционной модели.

Правее точки излома (область неглубоких замираний, $V > -15$ дБ) зависимость $P(V)$ отличается от рэлеевской. Как правило, неглубокие замирания носят медленный характер, в отдельных случаях длительность достигает 20—40 минут. В их формировании могут принимать участие, кроме интерференции, иные физические механизмы, вклад которых определяется ниже с помощью численных оценок. При ана-

лизе необходимо учесть, что коэффициент отражения от поверхности земли на данной трассе мал ($\leq 0,2$) и не может быть причиной замираний до 15 дБ. Вероятными причинами таких замираний могут быть:

а) угловое смещение диаграммы направленности антенн за счет рефракции в слое; для смещения диаграммы приемной антенны на угол $\theta \approx 0^\circ,3$, соответствующий падению усиления на 15 дБ, нужен градиент [11]

$$|g_n| = \frac{2\theta}{R} = \frac{2 \cdot 0,3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 57,3} \approx 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1};$$

б) волноводное захватывание сигнала слоем и отвод его в сторону от приемного пункта; при $\lambda = 8 \text{ мм}$ для захвата достаточна толщина слоя примерно около 5 м [12];

в) экранирование наклонной линии визирования тонким слоем, расположенным между передатчиком и приемником [13]; для выполнения этого условия при перепаде высот антенн $\Delta h = 65 \text{ м}$ (рис. 1) и $\lambda = 8 \text{ мм}$ горизонтальный размер слоя вдоль трассы должен быть примерно 4 км.

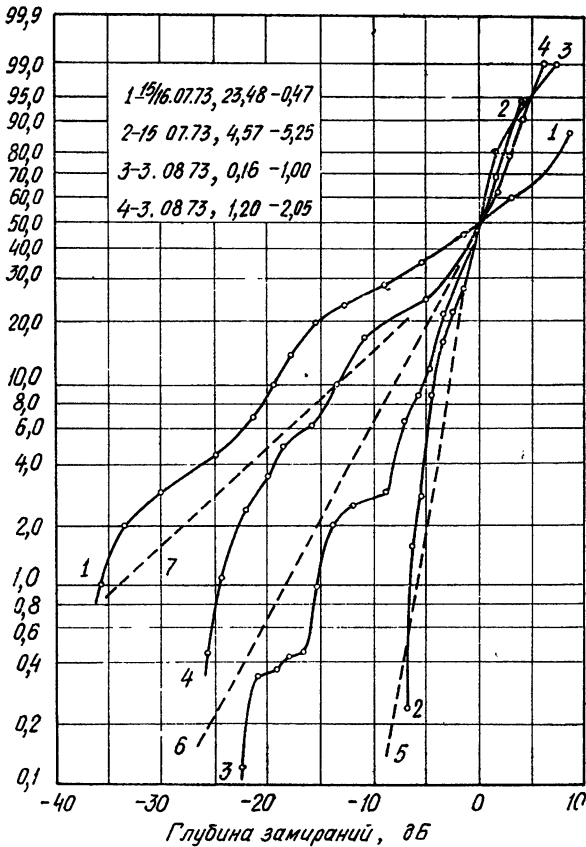


Рис. 4. Интегральные распределения глубины замираний в условиях многолучевости;

1-4 — экспериментальные кривые, $f = 36,6 \text{ ГГц}$; 5 — обобщенное распределение Рэлея, $K = -10 \text{ дБ}$; 6 — рэлеевское распределение, крутизна 10 дБ/декаду; 7 — распределение для двухлучевой модели, крутизна 20 дБ/декаду.

Приведенные оценки указывают на реальность существования перечисленных механизмов в условиях многолучевости. Таким образом, наблюдавшиеся медленные неглубокие замирания могут быть результатом воздействия одного или нескольких перечисленных факторов; в данных измерениях они неразделимы.

В диапазоне 9,3 ГГц на данной трассе за тот же период времени T_0 глубина замираний меньше (наклон кривой интегрального распределения составляет примерно 6 дБ/декаду), чем в диапазоне 37 ГГц. Это связано с тем, что на более длинной волне условия противофазности, необходимые для появления глубоких интерференционных замираний, создаются реже, чем на короткой. Другими словами, согласно

принятой в одной из работ [14] терминологии данную трассу можно считать «длинной» для $\lambda = 8$ мм и «короткой» для $\lambda = 3$ см. Большая часть записей в 3-сантиметровом диапазоне (преобладающим был промежуточный тип, характерный для «неразвитой» многолучевости) свидетельствует об устойчивости уровня сигнала в условиях, при которых в диапазоне 8 мм замирания имели место. Исходя из этого, можно сделать вывод, что характерная разность хода ΔR на данной трассе имела порядок 1–2 см и в редких случаях превышала 3 см. Временной ход огибающих сигналов в обоих диапазонах существенно различен, о чем также свидетельствует низкое значение коэффициента взаимной корреляции $\rho_{вз} = 0,06 \div 0,57$, при среднем значении 0,28.

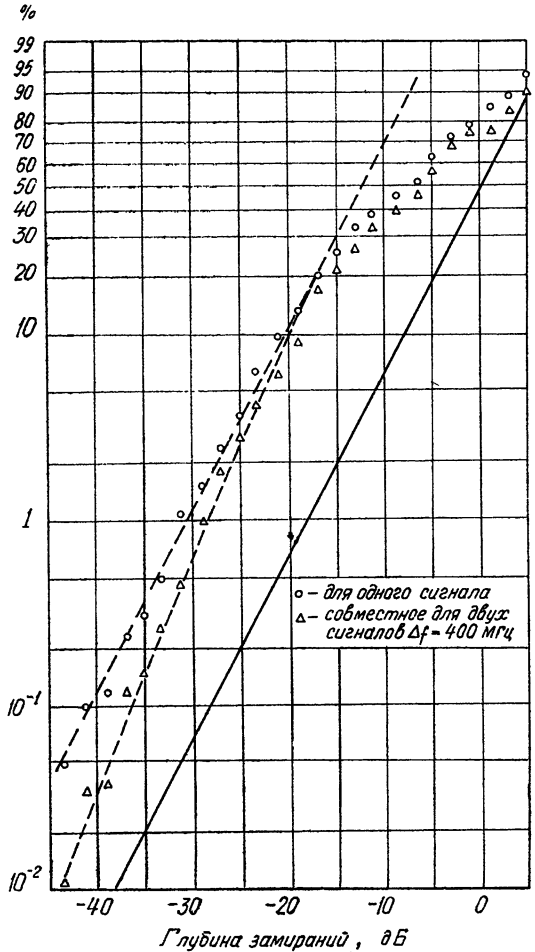


Рис. 5. Интегральные распределения глубины замираний для периода T_0 .

Необходимо отметить, что глубокие замирания в условиях многолучевости имели место лишь на трассе 21 км. Длительные наблюдения в аналогичной обстановке на двух коротких трассах 6,8 и 4,5 км свидетельствуют об отсутствии замираний этого типа.

3. Количество и продолжительность замираний

Дополнительную информацию о свойствах замираний можно получить, анализируя статистические характеристики их количества N и средней продолжительности $\bar{\tau}$. Экспериментальные зависимости $N(V)$

и $\bar{\tau}(V)$ на частоте 36,6 ГГц для периода замираний T_0 представлены на рис. 6, 7, из которых следует линейная связь обеих функций с глубиной замираний. Это не противоречит данным, полученным в СМД [15, 16, 6, 10].

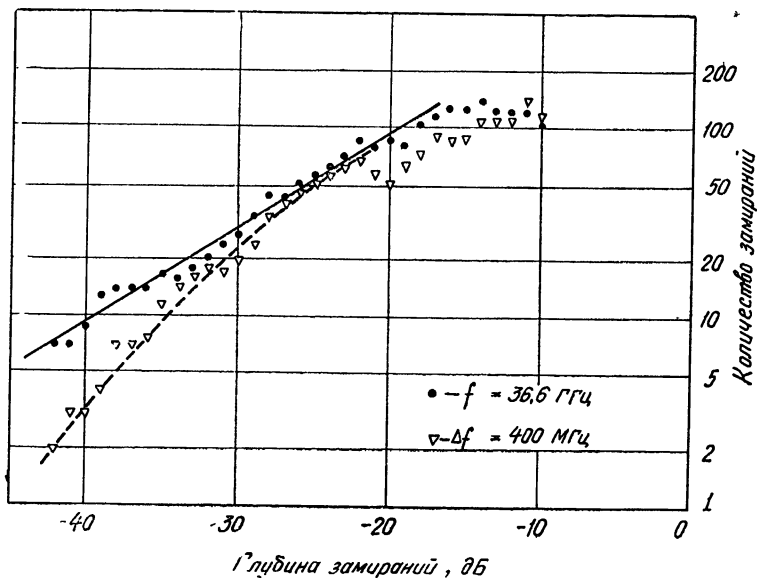


Рис. 6. Количество замираний для периода T_0 .

Из рис. 7 следует, что средняя продолжительность описываемых замираний невелика и составляет в области $-20 \div -40$ дБ величину от 5 до 30 секунд. Этот результат по порядку величины согласуется с вычислениями продолжительности замираний, проведенными на интерференционной модели [17], а также с экспериментальными данными, полученными при многолучевости [6, 15, 16].

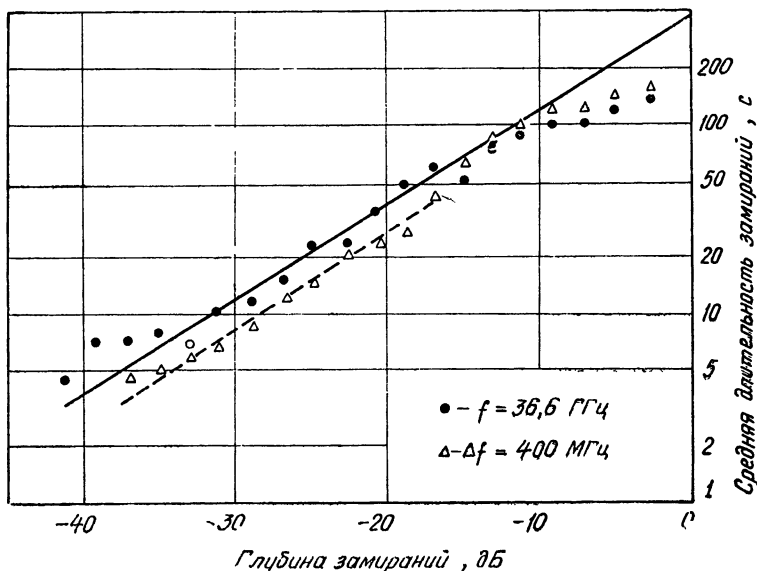
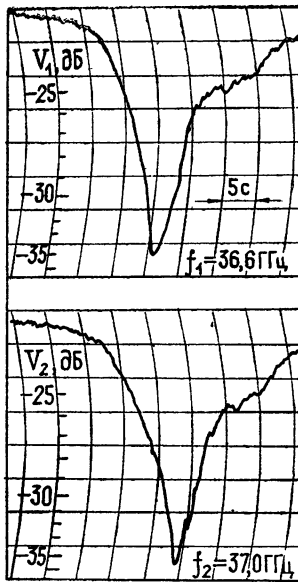
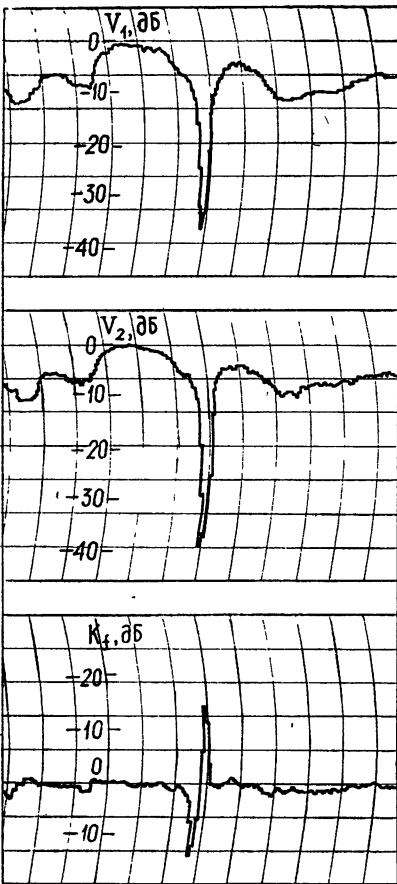


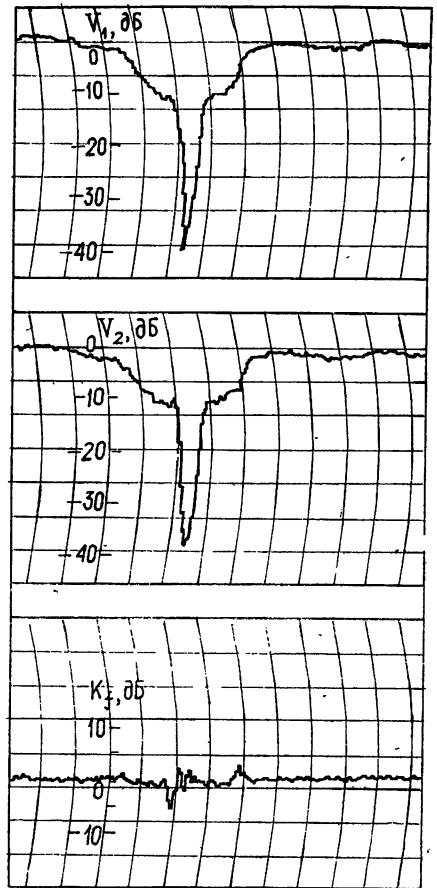
Рис. 7. Средняя продолжительность замираний.



а)



б)



в)

Рис. 8. Селективные искажения при многолучевости; а) пример записи; б), в) обработка.

4. Селективные свойства замираний

Существенной особенностью рассматриваемых замираний является их частотная селективность, обусловленная интерференционной структурой поля в месте приема. При характерной разности хода $\Delta R \sim (1 \div 2)$ см взаимный фазовый сдвиг между сигналами, разнесенными на 400 МГц, составляет сравнительно малую величину $\Delta\varphi = 2\pi\Delta f\Delta R/c \approx (5 \div 10)^\circ$, в связи с чем временные вариации огибающих таких сигналов подобны друг другу. Отличия имеют место лишь в области малых уровней (≤ -20 дБ) и сводятся к запаздыванию минимумов огибающих (рис. 8 а), связанному с неодновременным выполнением условий противофазности на разнесенных частотах. Экспериментально наблюдавшиеся запаздывания находились в пределах $\Delta t = (1 \div 5)$ с.

Несинхронность глубоких замираний проявляется в процессе вычисления совместных характеристик. При обработке парных реализаций x и y , полученных на частотах 36,6 и 37,0 ГГц, в ЭВМ формировался вспомогательный массив z , соответствующий большим значениям величин x и y . Распределение глубины замираний, количество и продолжительность замираний для массива z представлены на рис. 5—7 наряду с обсуждавшимися ранее аналогичными характеристиками для одной частоты.

При рассмотрении селективных свойств многолучевых замираний представляют интерес также искажения амплитудно-частотной характеристики (АЧЧ), которую в данном случае можно выразить как отношение уровней огибающих на крайних частотах исследуемой полосы. В процессе обработки в качестве коэффициента частотных искажений K_f вычислялась разность выраженных в децибелах уровней в каналах 36,6 и 37,0 ГГц, $K_{f\text{дБ}} = V_{1\text{дБ}} - V_{2\text{дБ}}$. Селективные искажения имеют вид характерных выбросов (рис. 8 б), амплитуда которых зависит от соотношения между запаздыванием замираний Δt и их продолжительностью τ . В случае несинхронных замираний ($\Delta t \geq \tau$) амплитуда выбросов в принципе может достигать номинальной величины замираний, в обратном случае (синхронные замирания, $\Delta t \ll \tau$) искажения оказываются малыми (рис. 8 в).

Вследствие того, что значительные выбросы K_f (перекосы АЧЧ) могут иметь место только во время глубоких замираний, они представляют собой редкие события. На рис. 9 приведено интегральное распределение модуля $|K_f|$ для периода интенсивных замираний T_0 . По кривой рис. 9 можно судить о полосовых свойствах канала связи в условиях многолучевости. Так, искажения более 20 дБ имеют место примерно в 2% случаев, а более 40 дБ—в 0,2% случаев. Отнесенные к полному периоду T , эти величины будут составлять соответственно 10^{-4} и 10^{-5} .

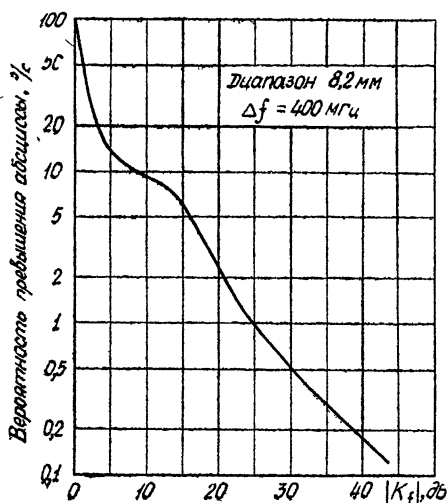


Рис. 9. Интегральное распределение модуля частотных искажений для периода T_0 .

3. ВЫВОДЫ

1) Появление в тропосфере слоистых образований с градиентами, отличающимися от стандартных, что возможно при аномальных метеоусловиях в ночное время, приводит к замираниям СВЧ сигналов в пределах прямой видимости.

2) Наблюдаемые глубокие замирания в диапазоне 37 ГГц носят интерференционный характер и распределены по рэлеевскому закону в области $V < -15$ дБ с крутизной наклона кривой интегрального распределения, равной 10 дБ/декаду. В диапазоне 9,3 ГГц замирания менее глубокие, наклон кривой $P(V)$ составляет около 6 дБ/декаду.

3) Количество и продолжительность замираний связаны с их глубиной линейными зависимостями. Средняя продолжительность глубоких замираний невелика (5—30 с), что подтверждает их интерференционную природу. Следствием последней являются селективные свойства многолучевых замираний, наблюдающиеся в экспериментах с частотным разносом и приводящие к кратковременным выбросам коэффициента частотных искажений.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Савенко и Ф. В. Кивве за помощь при проведении измерений, А. Я. Гребенчук—за выполнение расчетов на ЭВМ, А. В. Дыбскому—за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Я. Усиков, В. Л. Герман, И. Х. Ваксер, УФЖ, 6, № 5, 618 (1961).
2. R. G. Medhurst, IEEE Trans., AP-13, № 4, 550 (1965).
3. S. H. Lin, BSTJ, 52, № 4, 557 (1973).
4. R. L. Kaylor, BSTJ, 32, № 5, 1187 (1953).
5. R. W. Meadows, Proc. IEE, 113, № 1, 41 (1966).
6. W. T. Barnett, BSTJ, 51, № 2, 321 (1972).
7. В. Н. Троицкий, Радиотехника, 11, № 1, 7 (1956).
8. J. A. Saxton, J. A. Lane, R. W. Meadows, P. A. Matthews, Proc. IEE 111, № 1, 275 (1964).
9. K. A. Norton, L. E. Vogler, W. V. Mansfield, P. J. Short, Proc. IRE, 43, № 10, 1354 (1955).
10. S. H. Lin, BSTJ, 50, № 10, 3211 (1971).
11. А. И. Калинин, Расчет трасс радиорелейных линий, изд. Связь, М., 1964.
12. Ф. Б. Черный, Распространение радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1962.
13. В. Н. Троицкий, Распространение УКВ в горах, изд. Связь, М., 1968.
14. C. L. Ruthroff, BSTJ, 50, № 7, 2375 (1971).
15. A. Vigants, BSTJ, 50, № 3, 815 (1971).
16. Л. В. Надененко, В. В. Святогор, Электросвязь, 26, № 5, 6 (1972).
17. K. Bullington, BSTJ, 50, № 6, 2039 (1970).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
20 мая 1975 г.,
после доработки
12 ноября 1975 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF MILLIMETER WAVE PROPAGATION UNDER MULTIPATH CONDITIONS

V. B. Sinitzky

The results of experimental study of millimeter radiowave fading under multipath conditions on the 21 km path are analysed. Data on fades depth probability distribution, their number and average duration at the frequency of 36.6 GHz are given, as well as similar joint characteristics at the frequency diversity 400 MHz. The results obtained at the auxiliary frequency 9.3 GHz are given for comparison. The relation of fading with meteorological conditions is discussed.

УДК 538.574 : 535.31

О ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ («КВАЗИВЫРОЖДЕННОЕ») ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ)

Л. А. Апресян, Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, В. А. Яшнов

Предложена модификация метода геометрической оптики («квази-вырожденное» приближение), которая позволяет описывать линейную трансформацию нормальных волн в трехмерно-неоднородных анизотропных средах в направлениях, близких к вырожденным. Особенность предлагаемого метода заключается в том, что асимптотическое разложение проводится одновременно по двум малым параметрам, один из которых характеризует плавность изменения свойств среды, а второй — степень отклонения взаимодействующих мод от синхронизма. Рассмотрены способы сшивания решений квазिवырожденного приближения с независимыми нормальными волнами, распространяющимися вне области взаимодействия, и указаны возможные приложения теории.

1. Параметры разложения. Подавляющее большинство публикаций по линейной трансформации нормальных волн в неоднородных средах посвящено анализу одномерных задач (см. литературу к гл. V монографии [1] и к обзорам [2, 3]). Если же говорить о взаимодействии нормальных волн в трехмерно-неоднородных средах со свойствами, плавно меняющимися в масштабе характерной длины волны, то для этого частного, но важного для приложений случая естественно использовать геометрооптический подход, видоизменив его таким образом, чтобы возможность определять амплитуду и фазу волнового поля

$$g(x) = E(x)e^{i\varphi(x)} \tag{1}$$

даже в области взаимодействия, где нормальные волны нельзя считать независимыми. При построении такой модификации можно руководствоваться следующими соображениями, отчасти уже использованными в [4].

Эффективное взаимодействие нормальных волн происходит тогда, когда волновые векторы взаимодействующих мод, скажем, типов α и β , примерно одинаковы по величине и направлению: $k_\alpha \approx k_\beta$ (условие синхронизма). Область, в которой можно ожидать заметной (во всяком случае не экспоненциально малой) трансформации, оценивается из условия, чтобы период пространственных биений между модами l_0 был не меньше характерного масштаба неоднородности среды l : $l_0 \gg l$. Поскольку по порядку величины $l_0 \sim 1/|\Delta k|$, где $\Delta k = k_\alpha - k_\beta$, из неравенства $l_0 \gg l$ следует, что в пределах области взаимодействия

$$|\Delta k| l \ll 1. \tag{2}$$

При выполнении же противоположного условия $l/l_0 \sim |\Delta k| l \gg 1$ взаимодействием нормальных волн можно пренебречь.

Записав условие (2) в виде

$$\frac{|\Delta k|}{k} \ll \frac{1}{kl} \sim \mu, \tag{3}$$

где $\mu \sim \frac{1}{kl} \ll 1$ — малый параметр геометрикооптического разложения, можно заключить, что в области взаимодействия (2) относительная разность волновых векторов $\frac{|\Delta k|}{k}$ должна быть мала по сравнению с единицей.

Поскольку предельный переход $\frac{|\Delta k|}{k} \rightarrow 0$ отвечает «вырожденной» среде, в которой $k_\alpha = k_\beta$, естественно принять параметр $\frac{|\Delta k|}{k} \equiv \mu_1$ в качестве меры близости к вырождению и использовать его как дополнительный (к $\mu \sim 1/kl$) малый параметр задачи о взаимодействии волн. Область, в которой

$$\mu_1 = \frac{|\Delta k|}{k} \ll 1,$$

назовем областью вырождения.

Если среда мало отличается от изотропной (как, например, плазма в слабом магнитном поле), в качестве малого параметра μ_1 выступает неизотропная часть тензора диэлектрической проницаемости. Это приводит к предложенному в [4] (см. также [5]) «квазиизотропному» приближению метода геометрической оптики, которое описывает линейную трансформацию волн в слабоанизотропной среде.

Если же среда сильно анизотропна, то вырождение ($k_\alpha = k_\beta$) имеет место только при распространении волн в определенных направлениях (например, вдоль внешнего магнитного поля в плазме или вдоль оптических осей в кристаллах). Поэтому для направлений, близких к вырожденным, может оказаться необходимым учет взаимодействия. Последний случай и рассматривается в данной работе. Соответствующую модификацию геометрической оптики мы назовем «квазивырожденным» приближением.

2. Разложение по параметру $\mu \sim 1/kl$. Пусть векторное монохроматическое поле \mathcal{E} подчиняется уравнению

$$\overset{\vee}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \mu x \right) \mathcal{E}(x) = 0, \quad (4)$$

где $\overset{\vee}{L}$ — дифференциальный оператор с плавно меняющимися коэффициентами*. Физическую природу волнового поля и число компонент вектора \mathcal{E} мы не конкретизируем, чтобы яснее отразить математическую схему вычислений. Отыскивая решение в виде «почти плоской» волны (1), где x нужно заменить на μx и φ — на φ/μ , преобразуем уравнение (4) к виду

$$e^{i(\varphi/\mu)} (\hat{L}^{(0)} + \mu \overset{\vee}{L}^{(1)} + \mu^2 \overset{\vee}{L}^{(2)} + \dots) E = 0. \quad (5)$$

Здесь числовая матрица $\hat{L}^{(0)}(ik, \mu x)$ получается из оператора $\overset{\vee}{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \mu x \right)$ путем замены $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{i}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv ik$, а операторы $\overset{\vee}{L}^{(1)}, \overset{\vee}{L}^{(2)}, \dots$

имеют порядок $O(1)$, причем действие оператора $\overset{\vee}{L}^{(1)}$ определяется формулой

* Обобщение на среды с нелокальными свойствами, для которых $\overset{\vee}{L}$ — интегро-дифференциальный оператор, а также на некогерентные поля не вызывает затруднений, хотя форма записи уравнений при этом усложняется.

$$\hat{L}' \left(ik, \mu x, \frac{\partial}{\partial \mu x} \right) E(\mu x) = \frac{\partial^2}{\partial \mu x \partial ik} \hat{L}^{(0)}(ik) E + \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu x \partial ik} \right)^2 \hat{L}^{(0)} \varphi E. \quad (6)$$

Здесь явно указаны только те аргументы, по которым ведется дифференцирование.

Появление малого параметра μ в уравнении (5) подсказывает, что и амплитуду E естественно искать в виде разложения по μ :

$$E = E^{(0)}(\mu x) + \mu E^{(1)}(\mu x) + \mu^2 E^{(2)}(\mu x) + \dots \quad (7)$$

Разложения (5) и (7) лежат в основе всех модификаций метода геометрической оптики. Из них, в частности, вытекает представление поля в виде суперпозиции независимых нормальных волн, которое нам понадобится в дальнейшем.

3. *Независимые нормальные волны.* Подстановка (7) в (5) приводит к уравнению

$$\hat{L}^{(0)} E^{(0)} + \mu (\hat{L}^{(0)} E^{(1)} + \check{L}^{(1)} E^{(0)}) + \mu^2 (\hat{L}^{(0)} E^{(2)} + \check{L}^{(1)} E^{(1)} + \check{L}^{(2)} E^{(0)}) + \dots, \quad (8)$$

в котором сгруппированы члены одинакового порядка по μ . Приравняв нулю эти члены, получаем уравнения последовательных приближений:

$$\hat{L}^{(0)} E^{(0)} = 0; \quad (9)$$

$$\hat{L}^{(0)} E^{(1)} = -\check{L}^{(1)} E^{(0)} \quad (10)$$

и т. д. Ограничимся для простоты случаем, когда матрица $\hat{L}^{(0)}$ является эрмитовой, т. е. может быть представлена в виде

$$\hat{L}^{(0)}(ik, \mu x) = \sum_{\nu=1}^N e_{\nu}(k, \mu x) \times e_{\nu}^*(k, \mu x) \lambda^{\nu}(k, \mu x), \quad (11)$$

где λ^{ν} — вещественные собственные значения матрицы $\hat{L}^{(0)}$, e_{ν} — собственные векторы ($e_{\alpha} e_{\beta}^* = \delta_{\alpha\beta}$), а знак \times означает прямое произведение.

Подставив (11) в уравнение нулевого приближения (9), нетрудно видеть, что имеется, вообще говоря, N независимых мод, каждой из которых соответствует свое уравнение эйконала (для α -моды $\lambda^{\alpha} = 0$), своя система лучей, для определения которой нужно задать соответствующие граничные условия, и вполне определенная поляризация $e_{\alpha} = e_{\alpha}(k, \mu x)$. Скалярная амплитуда A_{α} поля нулевого приближения для α -моды $\mathcal{E}_{\alpha}^{(0)} = A_{\alpha} e_{\alpha} \exp\left(i \frac{\varphi_{\alpha}}{\mu}\right)$ находится из условия совместности уравнений первого приближения. (10) при $k = k_{\alpha}$:

$$e_{\alpha}^* \check{L}_{\alpha}^{(1)} e_{\alpha} A_{\alpha} = 0, \quad (12)$$

$$\text{где } \check{L}_{\alpha}^{(1)} = \check{L}^{(1)} \left(k_{\alpha}, \mu x, \frac{\partial}{\partial \mu x} \right).$$

Несмотря на то, что в оператор $\check{L}^{(1)}$ входят частные производные, уравнение (12) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка вида

$$\frac{dA_{\alpha}}{ds_{\alpha}} + V_{\alpha} A_{\alpha} = 0, \quad (13)$$

где ds_α — элемент длины луча типа α . Появление обыкновенной производной по s_α связано с первым членом в (6), так как согласно [6] (гл. VI, § 3.11) характеристическая матрица $\hat{L}^{(0)}$ обладает свойством

$$e_\alpha^* \frac{\partial \hat{L}^{(0)}}{\partial k_\alpha} e_\alpha \frac{\partial}{\partial x} = F(s_\alpha) \frac{d}{ds_\alpha} \equiv F(s_\alpha) n_\alpha \frac{d}{dx}, \quad (14)$$

где $F(s_\alpha) = \left| \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial k_\alpha} \right|$ — функция на луче, а n_α — единичный вектор направления луча типа α . При помощи (10) можно также записать выражение для поправки первого порядка $E_\alpha^{(1)}$, опуская для простоты вспомогательный параметр μ :

$$E_\alpha^{(1)} = - \sum_{\nu \neq \alpha} e_\nu \frac{e_\nu^* L_\alpha^{(1)} E_\nu^{(0)}}{\lambda^\nu(k_\alpha, x)} + c_\alpha e_\alpha. \quad (15)$$

Поведение коэффициента c_α определяется из условия совместности уравнений следующего (в данном случае — второго) приближения.

Таким образом, уравнения для амплитуд различных мод между собой не зацепляются и результирующее поле \mathcal{E} представляет собой поэтому сумму независимых нормальных волн. В частности, в нулевом приближении имеем

$$\mathcal{E}^{(0)} = \sum_\nu A_\nu e_\nu \exp(i\varphi_\nu). \quad (16)$$

Такое представление, однако, теряет силу в окрестности точки вырождения, где при $k_\beta = k_\alpha = k$ одновременно с $\lambda^\alpha(k, x)$ обращается в нуль и собственное значение $\lambda^\beta(k, x)$. Наличие вырождения приводит к расходимости полей первого приближения: как видно из (15), при $k_\alpha \rightarrow k_\beta$ поправка $E_\alpha^{(1)}$ стремится к бесконечности как $1/\lambda^\beta(k_\alpha, x)$.

4. Разложение по параметру $\mu_1 \sim \frac{|\Delta k|}{k}$. Физически расходимость

поправки первого порядка (15) отражает взаимодействие α - и β -мод в окрестности точки вырождения. Формально же она возникает из-за того, что член с $\lambda^\beta(k_\alpha, x)$ в (9) и (10) мы считали величиной нулевого порядка, тогда как в действительности вблизи точки вырождения величина $\lambda^\beta(k_\alpha, x)$ имеет порядок малости $\mu_1 \sim \frac{|\Delta k|}{k}$. В этом легко убедиться,

рассмотрев уравнение эйконала для β -моды, которое имеет вид $\lambda^\beta(k_\beta, x) = 0$. Пусть k_β — близкое к k_α решение этого уравнения, такое, что расстройка $|\Delta k| = |k_\beta - k_\alpha|$ мала по сравнению с $|k_\alpha|$ и $|k_\beta|$: $|\Delta k| \ll \ll |k_\alpha| \sim |k_\beta|$. Поскольку величина $\frac{\partial \lambda^\beta}{\partial k_\beta}$ порядка $1/k$, имеем

$$\lambda^\beta(k_\alpha) = \lambda^\beta(k_\beta + \Delta k) \approx \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial k_\beta} \Delta k \sim \frac{\Delta k}{k} \sim \mu_1. \quad (17)$$

Очевидно, для устранения указанной расходимости в области вырождения достаточно отнести малую величину $\lambda^\beta(k_\alpha)$ к следующему приближению по μ , как это и делается обычно в задачах, где возникают малые знаменатели. Формально такая процедура соответствует построению асимптотических разложений одновременно по двум малым параметрам $\mu \sim 1/kl$ и $\mu_1 \sim \Delta k/k$.

5. Уравнения квазивырожденного приближения. Если в уравнениях (8)–(10) отнести слагаемые, пропорциональные $\lambda^\beta(k_\alpha) \sim \mu$, к членам первого порядка по μ , то мы придем к уравнениям квазивырожденного приближения

$$\sum_{\nu \neq \alpha, \beta} e_\nu \times e_\nu^* \lambda^\nu(k_\alpha) E^{(0)} = 0; \quad (18)$$

$$\sum_{\nu \neq \alpha, \beta} e_\nu \times e_\nu^* \lambda^\nu(k_\alpha) E^{(1)} = -(\hat{L}^{(1)} E^{(0)} + e_\beta \times e_\beta^* \lambda^\beta(k_\alpha) E^{(0)}). \quad (19)$$

Фазовая структура поля и конфигурация лучей по-прежнему задаются уравнением эйконала $\lambda^\alpha(k_\alpha) = 0$, однако вследствие вырождения уравнение нулевого приближения (18) определяет теперь поляризацию поля $E^{(0)}$ не полностью, поскольку вектор $E^{(0)}$ может иметь проекцию как на e_α , так и на e_β ,

$$E^{(0)} = B_\alpha e_\alpha + B_\beta e_\beta. \quad (20)$$

Совместность уравнений (19) обеспечивается в этом случае двумя условиями, которые получаются проектированием обеих частей (19) на e_α^* и e_β^* ,

$$e_\alpha^* \hat{L}^{(1)} E^{(0)} = 0; \quad (21)$$

$$e_\beta^* \hat{L}^{(1)} E^{(0)} = - (e_\beta^* E^{(0)}) \lambda^\beta(k_\alpha). \quad (22)$$

Вместо обыкновенного дифференциального уравнения (13), которому подчиняется амплитуда A_n в случае не взаимодействующих мод, мы имеем теперь дело с системой двух связанных уравнений (21), (22) в частных производных для двух амплитуд B_α и B_β . Существенно, что в квазивырожденном приближении, в отличие от приближения не взаимодействующих нормальных волн, не возникают расходимости, обусловленные малостью величин μ_1 и μ .

Используя (6) и (14), системе (21), (22) можно придать вид

$$\left[e_\alpha^* \left(\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial k_\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) + e_\alpha^* \hat{\Lambda} \right] E^{(0)} = 0, \quad (23)$$

$$\left[e_\beta^* \left(\frac{\partial \lambda^\beta}{\partial k_\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) + e_\beta^* \hat{\Lambda} \right] E^{(0)} = -i \lambda^\beta(k_\alpha) e_\beta^* E^{(0)},$$

где $\hat{\Lambda}$ — некоторая матрица.

Для пояснения физического смысла этой системы введем вектор k_β , соответствующий β -моду, так же, как в п. 4. Тогда с точностью до членов порядка $\mu_1^2 \sim \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^2$ из (23) получим

$$\frac{d}{ds_\alpha} B_\alpha + V_{\alpha\alpha} B_\alpha + V_{\alpha\beta} B_\beta = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d}{ds_\beta} B_\beta + i n_\beta (k_\alpha - k_\beta) B_\beta + V_{\beta\alpha} B_\alpha + V_{\beta\beta} B_\beta = 0,$$

где $n_\beta = \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial k_\beta} \left| \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial k_\beta} \right|^{-1}$, а $\frac{d}{ds_\nu} = n_\nu \frac{\partial}{\partial x}$, $\nu = \alpha, \beta$ — производные вдоль α - и β -лучей. Из (24) видно, что система (23) фактически описывает взаимо-

действие двух нормальных волн, каждая из которых распространяется вдоль соответствующего луча, причем слагаемое $in_{\beta}(k_{\alpha} - k_{\beta})B_{\beta}$ соответствует учету фазовой расстройки взаимодействующих мод.

В общем случае близких поверхностей волновых векторов α - и β -лучи имеют заметно различающиеся направления, при этом система уравнений (24) (или (23)) не сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, хотя она и проще исходной системы (4). Если же вырождение связано с касанием волновых поверхностей, то с точностью до членов порядка $O(\mu_1^2)$ в области взаимодействия $n_{\alpha} \sim n_{\beta}$ и $\frac{d}{ds_{\alpha}} \approx \frac{d}{ds_{\beta}}$,

в результате чего уравнения (24) превращаются в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение амплитуд B_{α} и B_{β} вдоль луча типа α . Отметим еще, что уравнения (24), ((23)) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений также и в слоисто-неоднородной среде.

6. *Переход к не взаимодействующим нормальным волнам.* Уравнения (24) получены в предположении одновременной малости двух параметров

$$\mu_1 \sim \frac{|\Delta k|}{k} \ll 1, \quad \mu \sim \frac{1}{kl} \ll 1, \quad (25)$$

тогда как отношение этих параметров может быть произвольным. Если в каких-либо конкретных условиях выполняются неравенства (25), но при этом $\mu_1 \gg \mu$, т. е. выполняется условие «слабости» взаимодействия $|\Delta k| \gg 1$, то можно ожидать, что решение

$$g^{(0)} = E^{(0)} \exp(i\varphi_{\alpha}) = (B_{\alpha} e_{\alpha} + B_{\beta} e_{\beta}) \exp(i\varphi_{\alpha}) \quad (26)$$

перейдет в сумму независимых нормальных волн. И, действительно, как показывает анализ модельных примеров, при наличии большого параметра $\mu_1/\mu \sim |\Delta k|l \gg 1$ система (24) допускает асимптотическое решение вида

$$B_{\alpha} \approx A_{\alpha}, \quad B_{\beta} \approx A_{\beta} \exp(i\Delta\varphi), \quad (27)$$

где $\Delta\varphi = \int n_{\beta}(k_{\alpha} - k_{\beta}) ds_{\beta} \equiv \varphi_{\alpha} - \varphi_{\beta}$, так что $\frac{d\varphi_{\beta}}{ds_{\beta}} = k_{\beta} n_{\beta}$, а амплитуды A_{α} и A_{β} определяются уравнениями

$$\frac{d}{ds_{\nu}} A_{\nu} + V_{\nu\nu} A_{\nu} = 0 \quad (\nu = \alpha, \beta), \quad (28)$$

подобными уравнениям (13) для амплитуд не взаимодействующих волн. Поле нулевого приближения (26) принимает тогда вид

$$g^{(0)} = A_{\alpha} e_{\alpha} \exp(i\varphi_{\alpha}) + A_{\beta} e_{\beta} \exp(i\varphi_{\beta}), \quad (29)$$

что совпадает по форме с (16).

Таким образом, в области слабого взаимодействия $|\Delta k|l \gg 1$, где еще применимо квазивырожденное приближение (на рис. 1 эта область заштрихована), уравнения квазивырожденного приближения локально переходят в уравнения для не взаимодействующих мод, что дает возможность сшивать решения системы (24) (или (23)), с независимыми нормальными волнами. При этом с точностью до членов порядка $\mu_1^2 \sim \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2$ результат не будет зависеть от места сшивания в пределах области слабого взаимодействия, показанной на рис. 1. Начальное направление лучей для β -моды при таком сшивании задается условием.

7. О другой возможности построения равномерной асимптотики для взаимодействующих нормальных волн. Если решение системы (4) искать в виде суммы нормальных волн (типа (29)), то для амплитуд получатся уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_\alpha} A_\alpha + V_{\alpha\alpha} A_\alpha + V_{\alpha\beta} e^{i\Delta\varphi} A_\beta &= 0, \\ \frac{d}{ds_\beta} A_\beta + V_{\beta\alpha} e^{-i\Delta\varphi} A_\alpha + V_{\beta\beta} A_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Эта система обладает следующими двумя свойствами. Во-первых, как следует из ее вывода, она применима в области вырождения, где $\mu_1 \sim \frac{|\Delta k|}{k} \ll 1$. Во-вторых, вне области вырождения, т. е. при $\mu_1 \gg 1$,

где формально эта система неприменима, перекрестные члены будут быстро осциллировать и поэтому их можно отбросить, практически не исказив решения. Тогда система (30) превратится в два независимых уравнения (28). Однако коэффициенты $V_{\alpha\alpha}$ и $V_{\beta\beta}$ этой системы не совпадают с коэффициентами V_α и V_β в уравнениях для независимых мод (13), поскольку коэффициенты $V_{\alpha\alpha}$ и $V_{\beta\beta}$ получены из исходной системы (4) подстановкой $k = k_\alpha \approx k_\beta$, тогда как величины V_α и V_β связаны соответственно с k_α и k_β . При этом вне области вырождения волновой вектор k_β уже не обязан подчиняться условию синхронизма $k_\beta \approx k_\alpha$.

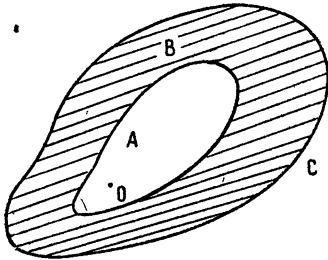


Рис. 1. O —точка вырождения ($k_\alpha = k_\beta$), A —область взаимодействия волн ($\mu_1 \lesssim \mu$), C —область независимого распространения нормальных волн ($\mu \ll 1$, $\mu_1 \sim 1$), $A+B$ —область вырождения; сшивание решений уравнений квазивырожденного приближения с независимыми нормальными волнами производится в кольцевой области B ($\mu \lesssim \mu_1 \ll 1$).

Чтобы избежать использования описанной в предыдущем пункте процедуры сшивания, можно предложить следующий эвристический способ видоизменения уравнений для амплитуд взаимодействующих волн (30). Заменяем в явной форме коэффициента $V_{\beta\beta}$, входящего в (30), k_α на k_β и будем считать, что вектор k_β определяется из уравнения эйконала $\lambda^\beta(k_\beta, x) = 0$ с некоторым граничным условием, таким, что $k_\beta \approx k_\alpha$ в области вырождения. Тогда вне области вырождения коэффициенты $V_{\alpha\alpha}$ и $V_{\beta\beta}$ перейдут в V_α и V_β . Видоизмененная указанным образом система (30) внутри области вырождения будет практически эквивалентна уравнениям квазивырожденного приближения (24), а вне этой области перейдет в уравнения для невзаимодействующих волн (13). Поэтому есть основания полагать, что такое видоизменение позволит получить равномерную асимптотику поля как вне, так и внутри области взаимодействия, не прибегая к сшиванию решений квазивырожденного приближения с решениями уравнений для невзаимодействующих мод.

8. Возможные приложения теории. Как уже было сказано, круг задач, описываемых квазивырожденным приближением, ограничен анизотропными средами, в которых имеются вырожденные направления. В этих направлениях сближаются поверхности волновых векторов, отвечающие разным модам, и выполняются условия взаимодействия (3). В теории распространения электромагнитных волн имеется

несколько примеров подобного рода сближений (в частных случаях — касаний или пересечений). Прежде всего, такие сближения происходят в направлениях оптических осей в кристаллических средах. В случае одноосных кристаллов поверхности фазовых скоростей касаются друг друга, а в двухосном кристалле — пересекаются (в направлении этого пересечения наблюдается коническая рефракция). Очевидно, линейная трансформация мод в кристаллах вряд ли может быть значительной, поскольку кристаллы обладают высокой степенью однородности.

В неоднородной магнитоактивной плазме происходят различные линейные взаимодействия волн, однако далеко не все виды трансформации могут быть описаны в квазивырожденном приближении. Прежде всего, из рассмотрения следует исключить взаимодействия, сопровождающиеся появлением особенностей поля, связанных с возбуждением плазменных волн (по терминологии работы [3] — «аномальный» тип трансформации). Далее, следует исключить и взаимодействия высокочастотных волн в плазме, помещенной в слабое магнитное поле, поскольку для решения этой задачи достаточно более простого квазиизотропного приближения [4]. В результате в теории распространения электромагнитных волн в плазме на долю квазивырожденного приближения остается, во-первых, случай комплексных кратных корней, которые могут возникнуть для высокочастотных волн в поглощающей плазме (см. [1, 9]; этот случай не очень интересен ввиду сравнительно быстрого затухания обеих взаимодействующих мод), и, во-вторых, взаимная трансформация быстрой и медленной магнитозвуковых волн (см., например, [3, 8]).

Наконец, вырожденные направления могут существовать для упругих волн (как объемных, так и поверхностных) в твердых телах.

Мы не приводим в данной статье явный вид уравнений (24) или (30) для каких-либо конкретных физических ситуаций и не описываем возможных методов их решения, предполагая рассмотреть эти вопросы в дальнейшем.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. В. Е. Голант, А. Д. Плиля, УФН, 104, № 3, 413 (1971).
3. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 7, Атомиздат, М., 1973, стр. 146.
4. Ю. А. Кравцов, Докл. АН СССР, 183, № 1, 74 (1968).
5. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1496 (1970); 14, № 12, 1843 (1971); 15, № 5, 751 (1972); 17, № 6, 896 (1974); 17, № 12, 1833 (1974).
6. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
7. Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1175 (1969).
8. В. Эллис, С. Буксбаум, А. Берс, Волны в анизотропной плазме, Атомиздат, М., 1966.
9. Г. В. Пермитин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 10, 1498 (1968).

LINEAR WAVE TRANSFORMATION IN AN INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIUM („QUASI-DEGENERATED“ GEOMETRICAL OPTICS APPROXIMATION)

L. A. Apresyan, Yu. A. Kravtsov, Yu. Ya. Jashin, V. A. Jashnov

The modification of the geometrical optics („quasi-degenerated“ approximation) method is suggested which enables us to describe the linear transformation of normal waves in threedimensional inhomogeneous anisotropic media in the directions close to the degenerated ones. The peculiarity of the method suggested consists in that the asymptotic expansion is made simultaneously over two small parameters one of which characterizes a smoothness of the change in the medium properties and the second represents the degree of interacting mode deviation from synchronism. The ways of matching the solutions of quasi-degenerated approximation with independent normal waves propagating outside the interaction region are considered. Possible applications of the theory are pointed out.

УДК 621.371.222.4 → 551.463.7

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ЗАТУХАНИЯ РАДИОВОЛН ВОСЬМИМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА В МОРСКОМ И ПРЕСНОВОДНОМ ЛЬДАХ И СНЕГЕ

В. Г. Глушнев, Б. Д. Слуцкер, М. И. Финкельштейн

Изложены результаты экспериментов по измерению затухания радиоволн на частоте 36,8 ГГц в морском и пресноводных льдах и снеге, проведенных в натуральных условиях. Результаты свидетельствуют о наличии анизотропии затухания не только в морском, но и пресноводном льдах и значительном ослаблении радиоволн при распространении в снеге

В настоящее время в литературе приведены результаты лабораторных измерений по затуханию радиоволн в морском льде на частоте 34 ГГц [1] и, насколько нам известно, не содержится каких-либо данных о затухании 8-миллиметровых радиоволн в пресноводном льде и снеге.

В марте—апреле 1975 г. в устьях рек Енисея и Хатаңги нами был осуществлен эксперимент по исследованию затухания радиоволн на частоте $f = 36,8$ ГГц ($\lambda = 8,2$ мм). Так как большинство методов, используемых для исследования электрических свойств диэлектриков на СВЧ [2] в диапазоне миллиметровых волн, трудно реализуемы в полевых условиях или требуют использования образцов крайне малых размеров (в которых неизбежно нарушается естественная структура исследуемых сред), то для оценки затухания применялся метод «двух толщин». Ранее он был использован нами при исследованиях в трехсантиметровом диапазоне [3, 4]. При этом затухание определяется по результатам облучения образцов, имеющих разную толщину l_1 и l_2 , по формуле:

$$\Gamma = \frac{A_1 - A_2}{l_2 - l_1} \text{ (дБ/м)},$$

где A_1 и A_2 — показания аттенюатора, управляющего уровнем сигнала в децибелах (при толщинах образцов соответственно l_1 и l_2) и обеспечивающего одинаковый уровень сигнала на выходе детектора приемного тракта.

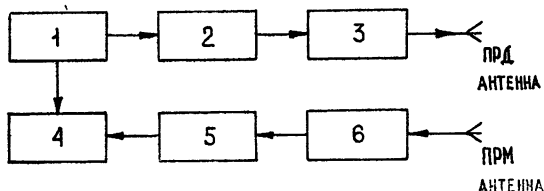


Рис. 1. Структурная схема экспериментальной установки:

1— задающий генератор, 2— модулятор, 3— клистронный генератор, 4— индикатор, 5— детектор, 6— аттенюатор.

Структурная схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Использовались две одинаковые рупорные антенны с диаграммой направленности шириной около 4° в обеих плоскостях. Длительность радиопульса $\tau_n \approx (6 \div 7)$ нс на уровне 0,5 от максимума, потенциал установки около 30 дБ. Измерения проводились на образцах прямоугольной формы, выполненных из снега или льда в горизонтальной и вертикальной плоскостях так, чтобы их площади в несколько раз превышали площадь раскрыва антенн. После шлифовки (при использовании образцов льда), «притирки» антенн к поверхности и совмещения осей антенн и образца производилось измерение затухания для нескольких пар образцов толщиной 7—34 см. Размещение образца между антеннами иллюстрируется рис. 2.

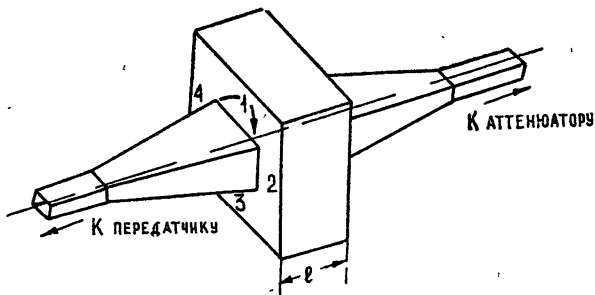


Рис. 2. Размещение образца льда (снега) при измерении затухания.

Измеренное затухание радиоволн восьмимиллиметрового диапазона для морского и пресноводного льдов представлено в табл. 1. В случае морского льда направление зондирования выбиралось вертикальным вдоль вертикально расположенных солевых ячеек ($\Gamma_{в-г}$) и горизонтальным (перпендикулярно солевым ячейкам) при горизонтальном расположении вектора электрического поля перпендикулярно солевым ячейкам ($\Gamma_{г-г}$) и вертикальном расположении параллельно им ($\Gamma_{г-в}$).

Таблица 1

Характеристики льда	Соленость, %	Температура воздуха, °С	Затухание, дБ/м			
			$\Gamma_{в-г}$	$\Gamma_{г-г}$	$\Gamma_{г-в}$	$\Gamma_{ср}$
Морской лед	2,4	-22,4	111	129	150	—
Пресноводный лед	—	-8	—	—	—	13

В последнем случае затухание $\Gamma_{г-в}$ оказалось максимальным, превышая на 20 дБ/м затухание $\Gamma_{г-г}$ при повороте того же образца вокруг продольной оси на 90° и на 40 дБ/м затухание $\Gamma_{в-г}$ в случае вертикального зондирования. Полученные результаты близки к изложенным в работе [1], за исключением количественной оценки анизотропии (в [1] при $\epsilon' = 3,1$ значение $\text{tg } \delta$ изменяется в 4 раза в зависимости от ориентации вдоль или поперек солевых ячеек).

Для пресноводного льда затухание оставалось практически постоянным при изменении направления зондирования с вертикального на горизонтальное. При повороте образца в виде прямоугольного параллелепипеда вокруг продольной оси антенн на 90° , так что одна из граней

располагалась на ледовой поверхности реки, затухание в среднем оставалось равным $\Gamma_{\text{ср}} = 13 \text{ дБ/м}$, однако наблюдалось, что в одном из положений образца затухание становилось аномальным: оно спадало в среднем до 2 дБ/м , и было зафиксировано даже значение 0 дБ/м .

Для проверки влияния состояния льда на описанное явление были произведены повторные измерения через 2—16 часов после того, как образцы были вынуты из льда и находились при температуре воздуха $0-1^\circ\text{C}$, причем перед измерением образцы выдерживались при температуре ниже нуля, что позволило исключить возможное влияние влаги. Оказалось, что различие в затухании при повороте образца практически исчезало, а величина $\Gamma_{\text{ср}}$ увеличивалась. В частности, при измерении через 16 часов было получено $\Gamma_{\text{ср}} = 25 \text{ дБ/м}$.

Результаты измерения ослабления радиоволн при распространении в снеге, где важную роль играет явление рассеяния частицами и неоднородностями, представлены в табл. 2 для образцов толщиной 12—29 см.

Таблица 2

№	Температура снега, $^\circ\text{C}$	Характеристика снега	Плотность снега, г/см^3	Ослабление радиоволн, дБ/м
1	-3,8	Однородный	0,21	31
2	"	"	0,30	37
3	"	Однородный с ветровым уплотнением	0,32	45
4	"	После действия снегоуборочной машины	0,47	120

Как видно, для однородного среднезернистого снега плотностью $0,2-0,3 \text{ г/см}^3$ ослабление составляет $31-37 \text{ дБ/м}$. и значительно возрастает в случае старого слежавшегося снега после перемешивания (которое производилось посредством ротационной снегоуборочной машины); при этом в направлении зондирования отдельные слои чередовались через 2—3 см.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. M. Sackinger, R. C. Byrd, IEE Conf. Publ., № 98, 219 (1973).
2. А. А. Брандт, Исследование диэлектриков на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1963, стр. 403.
3. М. И. Финкельштейн, В. Г. Глушнев, А. Н. Петров, В. Я. Иващенко, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 6, № 3, 311 (1970).
4. М. И. Финкельштейн, В. Г. Глушнев, А. Н. Петров, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 7, № 12, 1323 (1971).

Рижский институт инженеров гражданской авиации

Поступила в редакцию
2 октября 1975 г.

MEASUREMENT OF 8 MM RADIO WAVE ATTENUATION IN SEA AND FRESHWATER ICE AND SNOW

V. G. Glushnev, B. D. Slutsker, M. I. Finkel'stein

The paper sets forth the results of the experiments on measuring radio wave attenuation at the frequency of 36.8 GHz in sea and freshwater ice and snow made under natural conditions. The results testify to the presence of attenuation anisotropy not only in sea but also in freshwater ice and considerable attenuation of radio waves propagating in snow.

УДК 621.371.24

О ПОГЛОЩЕНИИ АТМОСФЕРНЫМ ВОДЯНЫМ ПАРОМ В ОКНЕ ПРОЗРАЧНОСТИ $\lambda=0,87$ мм

В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов

Проведены измерения ослабления радиоволн ($\lambda = 0,869$ мм) в зависимости от расстояния между передатчиком и приемником. Эксперименты проводились над водной поверхностью на расстояниях примерно до 4,5 км. В передающем устройстве использовалась ЛОВ, а в приемном — кристаллический детектор.

На основе полученных данных об атмосферном поглощении и результатов ранее выполненных измерений предпринята попытка отдельного определения коэффициентов поглощения мономеров и димеров водяного пара. Для стандартных атмосферных условий ($\rho_0 = 7,5$ г/м³, $T_0 = 293$ К, $P_0 = 760$ мм рт. ст.) они оказались равными $7,7 \pm 0,9$ дБ/км. и $0,9 \pm 0,5$ дБ/км. соответственно. Проведено сопоставление с теоретическими расчетами и данными других измерений.

В данной работе измерялось ослабление интенсивности монохроматического излучения на волне $\lambda = 0,869$ мм в зависимости от расстояния между передатчиком и приемником. В случае чистой атмосферы без гидрометеоров основными факторами, вызывающими это ослабление, являются молекулярное поглощение и угловая расходимость направленного пучка излучения вследствие дифракции на апертуре передающей антенны. Относительно молекулярного поглощения известно (см., например, [1, 2]), что в окне $\lambda = 0,87$ мм оно полностью обусловлено присутствующим в атмосфере водяным паром (мономерами H_2O и димерами $(H_2O)_2$). Влияние кислорода и примесных газов атмосферы в ее нижних слоях на этой волне пренебрежимо мало. Исследование поглощения в парах воды — как измерение суммарного коэффициента поглощения мономеров и димеров водяного пара, так и попытка отдельного определения их вклада в поглощение с привлечением данных других измерений — и являлось целью настоящей работы. Заметим, что ранее для этого окна были получены данные лишь о суммарном поглощении, но и они по причинам, указанным ниже, нуждаются в уточнении.

Измерения зависимости интенсивности сигнала I от расстояния R выполнялись на горизонтальной трассе, проходившей над водной поверхностью на высоте около 12 м. В передающем устройстве источником излучения служила лампа обратной волны (ЛОВ) [3], а антенной — параболическое зеркало диаметром 900 мм. Для целей калибровки сигнала передатчика в последнем был предусмотрен измеритель относительного уровня излучаемой мощности. Прием сигналов осуществлялся на параболическую антенну диаметром 300 мм, при этом в качестве индикатора излучения использовался кристаллический детектор.

Приемная аппаратура размещалась на судне, и уровень измеряемого сигнала регистрировался в нескольких точках трассы по мере удаления судна от берегового пункта, где находился передатчик. совме-

щение осей диаграмм направленности передатчика и приемника производилось вручную с помощью оптических визиров. В моменты записи сигналов проводились измерения метеопараметров: абсолютной влажности ρ , температуры T и давления воздуха P . Они регистрировались в двух пунктах: на берегу (вблизи передатчика) и на судне. Одновременно определялось и расстояние R между передатчиком и приемником. Среднее значение влажности ρ_{cp} равнялось $8,4 \text{ г/м}^3$, а отклонения от ρ_{cp} за все время измерений лежали в пределах $\pm 0,9 \text{ г/м}^3$. Что касается температуры и давления, то их отклонения от средних $T_{cp} = 292 \text{ К}$ и $P_{cp} = 768 \text{ мм рт. ст.}$ были незначительны ($\pm 0,9 \text{ К}$ и $\pm 1 \text{ мм рт. ст.}$ соответственно), так что при обработке данных ими можно пренебречь.

Для определения коэффициента поглощения водяного пара по экспериментальным данным воспользуемся выражением, описывающим ослабление интенсивности излучения в зависимости от расстояния при некоторой влажности ρ :

$$I = AR^{-\alpha} \exp[-\Gamma_{в.п}(\rho)R], \quad (1)$$

где A — некоторый постоянный коэффициент, α — параметр, характеризующий геометрическую расходимость пучка, $\Gamma_{в.п} = \Gamma_M + \Gamma_D$ — суммарный коэффициент поглощения мономеров и димеров водяного пара. Поскольку при измерениях на разных расстояниях значения ρ были, вообще говоря, различными, то для учета изменений влажности при обработке измерений представим коэффициенты Γ_M и Γ_D в виде [1, 4]

$$\Gamma_M(\rho) = \Gamma_M(\rho_{cp}) \left[1 + \delta(\rho - \rho_{cp}) \right] \frac{\rho}{\rho_{cp}}, \quad (2)$$

$$\Gamma_D(\rho) = \Gamma_D(\rho_{cp}) \left(\frac{\rho}{\rho_{cp}} \right)^2,$$

где $\delta = a \sigma \frac{T_{cp}}{P_{cp}}$, $a = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ тор} \cdot \text{м}^3/\text{г} \cdot \text{град}$, σ — параметр, учитывающий самоуширение линий мономеров H_2O . Тогда на основании (1), (2) имеем

$$\ln(IR^\alpha) = \ln A - \Gamma_{в.п}(\rho_{cp}) \left[1 + \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_{в.п}(\rho_{cp})} \right] R_{эфф}, \quad (3)$$

где

$$\Delta\Gamma = \Gamma_D(\rho_{cp}) \frac{\Delta\rho}{\rho_{cp}} + \delta\Gamma_M(\rho_{cp})\Delta\rho, \quad \Delta\rho = \rho - \rho_{cp}, \quad R_{эфф} = \frac{\rho}{\rho_{cp}} R.$$

При отклонениях $\Delta\rho \leq 0,9 \text{ г/м}^3$, как то имело место в нашем эксперименте, величина $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_{в.п}(\rho_{cp})}$ по оценкам, выполненным с использованием теоретических значений Γ_M , Γ_D и σ , не превышает 2,5%, и ею можно пренебречь.

Обработка экспериментальной зависимости $\ln(IR^\alpha)$ от $R_{эфф}$, которая показана на рис. 1, проводилась методом наименьших квадратов. При этом использовались лишь данные, полученные для $R \geq 2,5 \text{ км}$. Для этих расстояний можно считать, что приемник находился в волновой зоне (параметр Френеля $\frac{D^2}{\lambda R} \leq 0,37$, D — диаметр антенны передатчика), и положить $\alpha = 2$.

В результате обработки данных для атмосферных условий $\rho = 8,4 \text{ г/м}^3$, $T = 292 \text{ К}$, $P = 768 \text{ мм рт. ст.}$ было получено значение $\Gamma_{в.п} = 10 \text{ дБ/км}$. Среднеквадратичная ошибка найденного значения равна $\pm 0,4 \text{ дБ/км}$. Заметим, что возможная неточность принятого значения α не может привести к значительной ошибке в величине $\Gamma_{в.п}$. Так, даже при $\alpha = 1,5$ значение $\Gamma_{в.п}$ возрастает лишь на $\sim 0,6 \text{ дБ/км}$.

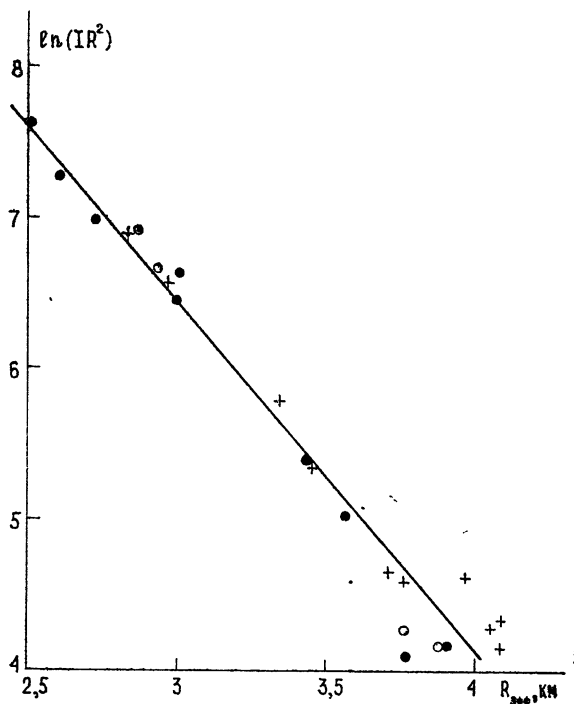


Рис. 1. Ослабление интенсивности излучения с расстоянием вследствие молекулярного поглощения (разными знаками отмечены данные трех независимых повторных измерений).

Для того, чтобы иметь возможность пересчитывать найденный из эксперимента для определенных значений ρ , T , P суммарный коэффициент поглощения водяного пара к каким-либо иным атмосферным условиям, что необходимо, в частности, для сравнения полученного результата с данными других измерений и теоретическими расчетами, нужны отдельные экспериментальные сведения о коэффициенте поглощения мономерами H_2O и димерами $(\text{H}_2\text{O})_2$. Такое отдельное определение Γ_m и Γ_d можно выполнить, если дополнительно имеются экспериментальные данные о коэффициенте $\Gamma_{в.п}$ для каких-то других, существенно отличных атмосферных условий, поскольку зависимости Γ_m и Γ_d от ρ , T , P имеют разный характер [5]. Тогда поскольку каждое из измеренных значений $\Gamma_{в.п}$ может быть представлено через коэффициенты Γ_m^0 и Γ_d^0 для стандартных условий ($\rho_0 = 7,5 \text{ г/м}^3$, $T_0 = 293 \text{ К}$, $P_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$) как

$$\Gamma_{в.п}(\rho, T, P) = \alpha_m(\rho, T, P)\Gamma_m^0 + \alpha_d(\rho, T, P)\Gamma_d^0, \quad (4)$$

то по двум измерениям получим систему двух уравнений для определения Γ_m^0 и Γ_d^0 . Выражения для пересчетных коэффициентов α_m и α_d имеют вид [4, 5]

$$\alpha_m(\rho, T, P) = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-N} \frac{P'}{P'_0} \left[1 + a \sigma \left(\frac{\rho T}{P'} - \frac{\rho_0 T_0}{P'_0} \right) \right],$$

$$\alpha_d(\rho, T, P) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-M},$$
(5)

где $P' = P - P_{H_2O} = P - a \rho T$ — давление сухого воздуха. Зависимость α_d от P слаба [5], и ею пренебрегаем.

Чтобы получить второе уравнение, мы привлекли другие наши измерения [6] в окне прозрачности $\lambda = 0,87$ мкм, выполненные методом изменяющейся влажности также с источником монохроматического излучения. Ввиду того, что обработка этих измерений была выполнена в свое время без учета димерного механизма поглощения, а также самоуширения линий мономеров H_2O , результаты [6] нуждаются в уточнении. Переобработка данных измерений [6] теперь проведена нами по методике, изложенной в [4], согласно которой из эксперимента определяется суммарный коэффициент поглощения мономеров и димеров $\Gamma_{в.п}$ для ρ^* , $T_{ср}$, $P_{ср}$, где $\rho^* = 2\rho_{ср}$. Для измерений [6] $\rho^* \approx 20$ г/м³, $T_{ср} = 290$ К, $P_{ср} = 765$ мм рт. ст. Переобработанные данные этих измерений приведены на рис. 2. Для интересующей нас длины волны $\lambda = 0,869$ мкм $\Gamma_{в.п}(\rho^*, T_{ср}, P_{ср}) = 30 \pm 1$ дБ/км.

Решение системы уравнений приводит к значениям $\Gamma_m^0 = 7,7 \pm 0,9$ дБ/км и $\Gamma_d^0 = 0,9 \pm 0,5$ дБ/км; при этом суммарный коэффициент $\Gamma_{в.п}(\rho_0, T_0, P_0) = 8,6 \pm 0,6$ дБ/км. Указанные ошибки определяются погрешностью использованных при решении значений $\Gamma_{в.п}$. При отыскании коэффициентов α_m и α_d в (5) полагали $N = 2,33$, $\sigma = 5,05$ и $M = 11$. Параметры N и σ определялись, как и в [7], из вспомогательных расчетов мономерного поглощения для различных T и ρ . Что касается параметра M , то его значение определяется в основном энергией водородной связи димера ϵ , точное значение которой пока не известно. В расчете [5] было принято $\epsilon = 4,8$ ккал/моль, что и привело к $M = 11$.

Сравним полученные коэффициенты Γ_m^0 и Γ_d^0 с теоретическими данными. Расчет [1] мономерного поглощения с учетом поправок на полуширины линий и дипольный момент молекулы H_2O (см. [7]) дает для $\lambda = 0,869$ мкм коэффициент $\Gamma_m^0 = 7,1$ дБ/км. Величина Γ_d^0 на этой волне, согласно [5], равна 1,6 дБ/км. Таким образом, найденный из эксперимента коэффициент поглощения мономеров близок к теоретическому, а для димеров наблюдается расхождение (примерно в 1,8 раза), превышающее погрешность экспериментального значения Γ_d^0 . Причину этого расхождения можно видеть в несколько завышенной величине ϵ . Согласования данных можно достичь путем уменьшения $\Gamma_d^{теор}$ за счет концентрации димеров, приняв в расчетах [5] вместо $\epsilon = 4,8$ ккал/моль значение $\epsilon = 4,5$ ккал/моль. Хотя при этом температурный показатель M тоже изменяется (от $M = 11$ до $M \approx 10,5$), однако решение системы уравнений, дающее $\Gamma_m^{эксп}(\rho_0, T_0, P_0)$ и $\Gamma_d^{эксп}(\rho_0, T_0, P_0)$, по сути дела не изменится ввиду близости средних температур $T_{ср}$ в обоих измерениях к T_0 .

То, что действительное значение ϵ несколько меньше, нежели 4,8 ккал/моль, подтверждается также сравнением спектрального распределения для суммарных коэффициентов $\Gamma_{в.п}^{эксп}$ и $\Gamma_{в.п}^{теор}$, которое проводится на рис. 2. Здесь приведены кривые 1 и 2, представляющие теоретические значения $\Gamma_{в.п} = \Gamma_m + \Gamma_d$ соответственно для $\epsilon = 4,8$ и 4,6 ккал/моль (во втором случае, согласно [5], $\Gamma_d^{теор}$ в 1,4 раза мень-

ше, чем при $\varepsilon = 4,8$ ккал/моль). Экспериментальные значения $\Gamma_{в.п.}$ для обоих значений ε опять-таки оказываются практически совпадающими ввиду незначительного изменения M и небольших отклонений при измерениях температуры T от $T_{ср.}$ Из рис. 2 видно, что кривая 1, отвечающая $\varepsilon = 4,8$ ккал/моль, идет всюду выше экспериментальных точек, тогда как кривая 2 ($\varepsilon = 4,6$ ккал/моль) находится в значительно лучшем согласии с результатами эксперимента. Следует отметить, что последние теоретические расчеты [8-10] энергии связи ε также привели к значениям, меньшим 4,8 ккал/моль ($\varepsilon = 4,72$ [8], $4,6 \pm 0,3$ [9], $3 - 4$ ккал/моль [10]).

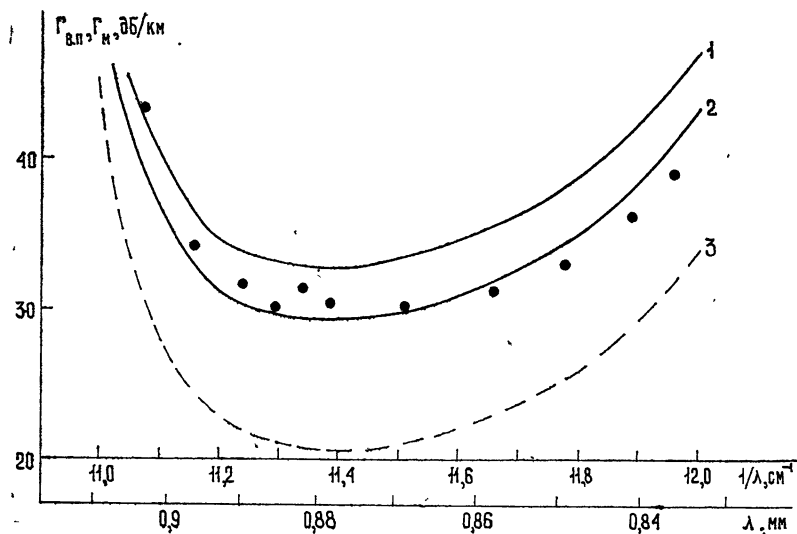


Рис. 2. Коэффициенты поглощения водяного пара ($\rho^* = 20$ г/м³, $T = 290$ К, $P = 765$ мм рт. ст.).

Точки—результаты измерений методом изменяющейся влажности, кривые 1 и 2—расчетные суммарные коэффициенты поглощения мономеров и димеров, кривая 3—расчетный коэффициент поглощения мономеров.

Пунктирной кривой на рис. 2 даны расчетные коэффициенты поглощения мономеров. В сочетании с данными эксперимента она дает представление о величине вклада димеров в условиях высокой влажности.

Решение системы уравнений убеждает в наличии квадратично зависящего от ρ члена в коэффициенте поглощения $\Gamma_{в.п.}$, величина которого превышает эффект самоуширения линий H_2O при теоретическом значении параметра σ . Выше это дополнительное поглощение, пропорциональное ρ^2 , было отнесено на счет димеров. Если же предположить, что оно обусловлено большей ролью самоуширения линий мономеров, то интересно в этом случае посмотреть, какое значение примет параметр σ . Для этого в системе уравнений положим $\Gamma_{д.}^0 = 0$ и решим ее относительно σ и $\Gamma_{м.}^0$. Решение дает $\sigma = 15 \pm 6$, $\Gamma_{м.}^0 = 8,6 \pm 0,5$ дБ/км. Таким образом, рассмотрение этого случая показывает, что дополнительная квадратичная часть коэффициента поглощения вдвое превышает расчетный параметр самоуширения.

Сопоставление результатов настоящей работы с данными других измерений можно провести лишь в отношении суммарного коэффициента $\Gamma_{в.п.}$, поскольку раздельно вклад мономеров и димеров в поглощение для окна $\lambda = 0,87$ мм ранее не определялся. В полевых измерениях [11] с эшелеттным спектрометром и тепловым источником было

получено значение $\Gamma_{в.п}(\rho_0, T_0, P_0) = 12,5 \pm 1,8$ дБ/км. Однако этот результат, как и данные измерений [6], из-за неучета при обработке димерного поглощения и самоуширения линий мономеров требует уточнения. Применение методики обработки [4] к измерениям [11] привело к значению $\Gamma_{в.п}(\rho^*, T_0, P_0) = 22,5 \pm 3,5$ дБ/км, которое соответствует влажности $\rho^* = 13,5$ г/м³. Пересчет этого значения к стандартной влажности $\rho_0 = 7,5$ г/м³ можно провести, опираясь на полученные выше данные для Γ_m^0 и Γ_d^0 . По ним с помощью (4) нетрудно найти $\Gamma_{в.п}$ для ρ^* , T_0 , P_0 , а следовательно, и переходный множитель для пересчета $\Gamma_{в.п}(\rho_0, T_0, P_0)$ к $\Gamma_{в.п}(\rho^*, T_0, P_0)$ и обратно. В результате из измерений [11] находим уточненное значение $\Gamma_{в.п}(\rho_0, T_0, P_0) = 11,1 \pm 1,8$ дБ/км.

В работе [12] с помощью ЛОВ, а в [13] на эшелетном спектрометре с многоходовой кюветой были получены значения $\Gamma_{в.п}(\rho_0, T_0, P_0)$, равные 13,3 и 12,3 дБ/км соответственно. Из измерений поглощения радиоастрономическим методом упомянем лишь работу [14], поскольку в ней коэффициент $\Gamma_{в.п}(\rho_0, T_0, P_0)$ определен с использованием зондовых данных о распределении влажности по высоте. Он оказался равным $7,2 \pm 2$ дБ/км.

Как видно из сравнения, экспериментальные данные о поглощении имеют значительный разброс. Одной из причин этого является неучет при обработке всех предыдущих измерений квадратичной зависимости коэффициента поглощения $\Gamma_{в.п}$ от влажности. То, что эта причина является существенной, видно на примере переобработки измерений [6, 11]. Следует признать также, что проведение измерений на сравнительно небольших расстояниях (в работах [11–13] $R \leq 0,35$ км) и особенно с использованием маломощных тепловых источников, когда требуется учет немонахроматичности излучения, сопряжено с большей вероятностью появления систематических ошибок.

Авторы выражают благодарность В. И. Аникину и А. И. Хвостовой за помощь при измерениях и С. А. Жевакину за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
2. А. Г. Кисляков, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1244 (1967).
3. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. А. Париков, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 4, 136 (1965).
4. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1475 (1972).
5. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, 104, № 3, 540 (1970).
6. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 859 (1966).
7. А. В. Поваров, В. Я. Рядов, Б. А. Свердлов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 4, 529 (1976).
8. D. Hankins, J. W. Moskowitcz, F. H. Stillinger, J. Chem. Phys., 53, 4544 (1970).
9. H. Kistenmacher, G. C. Lie, H. Popkie, E. Clementi, J. Chem. Phys., 61, 546 (1974).
10. C. Braun, H. Leidecker, J. Chem. Phys., 61, № 8, 3104 (1974).
11. В. Я. Рядов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника, 11, № 6, 1037 (1966).
12. Ю. С. Бабкин, А. О. Изюмов, Л. И. Смольянинова, А. В. Соколов, Л. И. Строганов, Е. В. Сухонин, Труды VIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, сб. № 3, М., 1972, стр. 4.

13. К. А. Аганбекян, А. Ю. Зражевский, М. А. Колосов, А. В. Соколов, Доклад на IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Харьков, 23—28 июня, 1969.
14. J. N. Gaitskell, R. A. Newstead, J. A. Bastin, Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A, 264, № 1150, 195 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 июня 1975 г.

ATMOSPHERIC WATER VAPOUR ABSORPTION IN THE TRANSPARENT WINDOW $\lambda = 0.87$ mm

V. Ya. Ryadov, N. I. Furashov

Measurements have been made of radio wave attenuation ($\lambda = 0.869$ mm) as a function of distance between transmitter and receiver. Experiments were made above the water surface at the distances approximately up to 4.5 km. A BWO was employed in transmitter and crystal detector in the receiver. Based upon the data obtained on atmospheric absorption and the results of earlier measurements, an attempt has been made to define separately the monomer absorption coefficient and water vapour dimers. Under usual atmospheric conditions ($\rho_0 = 7.5$ g/m³, $T_0 = 293$ K, $P_0 = 760$ mm Hg) they appeared to be equal to 7.7 ± 0.9 dB/km and 0.9 ± 0.5 dB/km, respectively. Comparison is made with theoretical calculations and data of the other measurements.

УДК 621.371.222.4 → 551.463.7

ОСОБЕННОСТИ РАССЕЯНИЯ СВЧ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОБРУШИВАЮЩИХСЯ МОРСКИХ ВОЛНАХ

*А. И. Калмыков, А. С. Курекин, Ю. А. Лемент, И. Е. Островский,
В. В. Пустовойтенко*

Обсуждаются результаты экспериментов по обратному рассеянию 8-миллиметровых и 3-сантиметровых радиоволн на обрушивающихся морских волнах. Максимальное рассеяние наблюдается от брызг; уровень отражения от пены значительно ниже, чем от брызг. Частотная зависимость рассеяния от брызг имеет рэлеевский характер, практически не зависит от поляризации излучения и характеризуется слабой деполяризацией. Оценивается влияние указанных эффектов на амплитудно-частотные характеристики рассеяния поверхностью моря в разных диапазонах радиоволн СВЧ.

Теория рассеяния радиоволн УКВ диапазона поверхностью моря, развитая на основе двухмасштабной модели [1], позволяет объяснить большинство наблюдаемых закономерностей этого явления. Вместе с тем в противоречии с выводами теории находится наблюдающееся превышение эффективной площади рассеяния сигнала при горизонтальной поляризации, $\sigma_{г.г}$, над значением этой величины при вертикальной поляризации [2] — $\sigma_{г.г} > \sigma_{в.в}$ — при углах скольжения $\psi < 3^\circ$. При этих же условиях ($\psi < 3^\circ$) смещение частоты рассеянных сигналов при горизонтальной поляризации превышает расчетные значения и зависит от скорости ветра [3]. Оказалось, что оба явления можно объяснить, если дополнительно учесть отражение от заостренных гребней волн перед обрушиванием [4]. Изучению вклада в рассеяние отражений, возникающих при обрушивании морских волн, посвящена предлагаемая работа.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Наблюдение в натуральных условиях обратного рассеяния на брызгах и пене, появляющихся после обрушивания волн, весьма сложно. Основная трудность заключается в том, что практически невозможно разделить эффекты, вызванные обрушиванием волн, от эффектов, связанных с изменением наклона рассеивающей поверхности. Поэтому нами наблюдалось рассеяние при обрушивании волн над волноломом, находившимся под поверхностью воды. Место образования брызг и пены было фиксировано по дальности, что значительно облегчило условия наблюдения.

Фотография участка поверхности моря в районе измерений приведена на рис. 1. Пена и брызги локализованы в пределах узкой полосы, ширина которой не превышает 30 м.

Обратное рассеяние от образований, возникающих при обрушивании волн, изучалось одновременно на волнах $\lambda = 8$ мм и 3 см. Передатчики на обеих волнах работали синхронно; длительность зондирующих импульсов составляла 0,2 или 0,5 мкс; поляризация излучения и приема

на 8 мм была горизонтальной; на волне 3 см излучался сигнал вертикальной или горизонтальной поляризации, а принимались сигналы обеих поляризаций одновременно. Ширина диаграмм направленности антенн по уровню 3 дБ на обеих волнах составляла 1°; поперечный размер освещаемой площади — 10 м, а угол ее облучения (угол скольжения) $-\psi \approx 1^\circ$. Измерение рассеяний на обрушивающихся волнах проводилось при волнениях моря от 2 до 5 баллов (высота волн $H = 0,5 \div 2,5$ м).

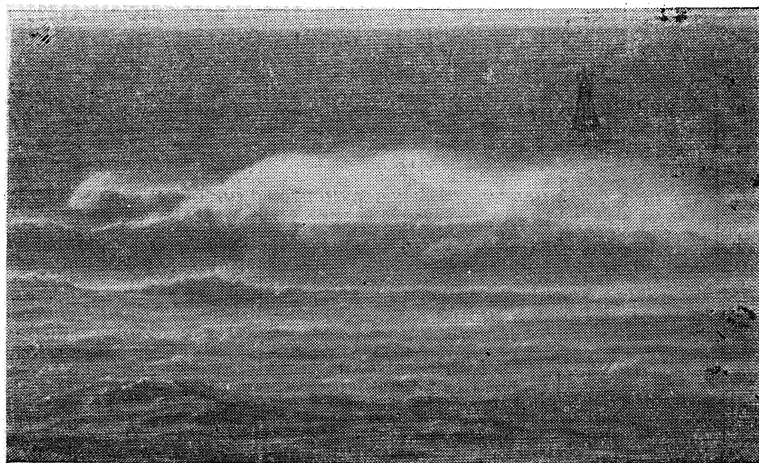


Рис. 1.

Одной из основных задач измерений было определение эффективной площади рассеяния (ЭПР) σ различных образований, возникающих при обрушивании волн. Для этого проводились периодические калибровки потенциала измерительных систем по уголковым отражателям, ЭПР которых σ_y в свою очередь измерялась по методике [5].

По относительным мощностям сигналов, отраженных от исследуемых образований P , при известных расстояниях до уголка R_y и до рассеивающего участка поверхности R определим σ^* как

$$\sigma = (P/P_y)(R/R_y)^4 \sigma_y. \quad (1)$$

Точность таких экспериментов, как показали многократные измерения σ_y , не хуже 3 дБ

Одновременная работа на двух волнах λ дала возможность определить частотную зависимость рассеяния от отдельных элементов волнения для каждого обрушивания.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

На рис. 2 приведены фотографии индикаторов «амплитуда—дальность» на волнах 8 мм (рис. 2 а) и 3 см (рис. 2 б). (Скорость развертки — 0,5 мкс/см; масштаб по вертикали (амплитуда) — линейный.) В начале разверток видны зондирующие импульсы, далее — отражения от морской поверхности и при удалении 550 м (примерно через 3,5 мкс) — сигналы от образований, возникающих при обрушивании

* Здесь не учитывался возможный интерференционный характер облучающего поля, так как в наших опытах параметр шероховатости $H\psi/\lambda$ был большим, что позволяло пренебречь переотражениями от морской поверхности.

волн. Превышение этих отражений над сигналами, рассеянными близлежащими участками моря, составляло 15—25 дБ на $\lambda = 8$ мм и 5—15 дБ на $\lambda = 3,2$ см.

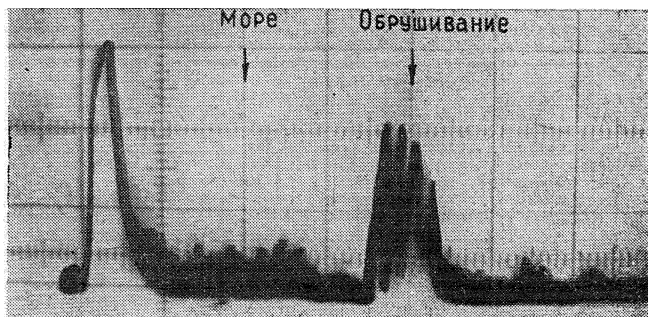


Рис 2а



Рис. 2б.

В отсутствие обрушиваний сигналы, отраженные поверхностью моря, малы. Максимальный сигнал появляется в начальной стадии обрушивания, когда создаются брызги после разрушения заостренного гребня. Отражения от пены, создаваемой при падении брызг на воду, много ниже рассеяния от брызг (на 5—10 дБ на 3,2 см и 10—15 дБ на 8 мм). Отражения от пены, растекшейся по волнам (в конечной фазе процесса обрушивания), слабее отражений от непокрытых пеной соседних участков морской поверхности. На рис. 3 приведены средние значения ЭПР σ (1) при появлении обрушиваний (брызг), полученные для последовательности из 30 морских волн. Все значения σ получены при наличии брызг, и лишь для волны $N = 4$ наблюдалась более поздняя фаза обрушивания — пена.

Величины σ для брызг на $\lambda = 8$ мм выше, чем на $\lambda = 3,2$ см. Среднее значение σ для брызг в данном опыте составляет на 8 мм 40 м^2 (+ 16 дБ), в то время как на 3,2 см при этом σ равно лишь 4 м^2 (+ 6 дБ), т. е. $\sigma_{0,8}/\sigma_{3,2} \approx 10$. Для пены $\sigma \approx 3 \text{ м}^2$ (+ 4 дБ) на 8 мм.

В записях сигналов на двух радиоволнах всегда наблюдается совпадение во времени максимума среднего с наибольшим количеством брызг (информация наблюдателя), но корреляция значений средних σ на 3,2 см и 8 мм для разных обрушивающихся волн мала. Так, на рис. 3 видно (морские волны 1, 2), что при росте σ на 3,2 см отсутствует рост σ на 8 мм и наоборот (волны 13, 14).

Другой интересной особенностью рассеяния на брызгах при обрушивании является относительно малая деполяризация, $\sigma_{в.г}/\sigma_{г.г} \ll 1$, что видно из рис. 3. Как показали измерения при разных волнениях, $10 \lg(\sigma_{в.г}/\sigma_{г.г}) \approx (-7 \div -12) \text{ дБ}$.

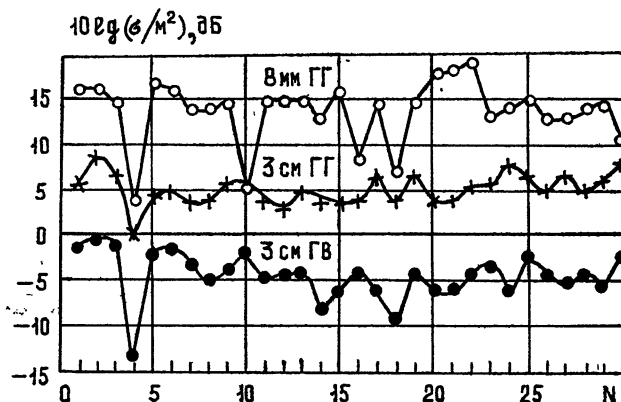


Рис. 3.

Из измерений, выполненных при вертикальной и горизонтальной поляризациях излучения на волне $\lambda = 3,2 \text{ см}$, следует, что среднее значение $\sigma_{в.в} \approx \sigma_{г.г}$. Наконец, отражения во всех стадиях обрушивания имеют очень широкий спектр флуктуаций (более 150 Гц на волне $3,2 \text{ см}$), что шире спектра сигналов, отраженных поверхностью моря в соседних участках и много шире спектра всплесков-отражений от гребней [4].

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Полученное в экспериментах значительное превышение уровней сигналов, рассеянных на брызгах при обрушивании волн, над сигналами от волн на поверхности моря требует учета этих отражений от брызг.

Для оценок воспользуемся методиками расчетов рассеяния от дождя, полагая, что брызги при обрушивании подобны дождям очень большой интенсивности. Согласно [6] площадь обратного рассеяния капли (полагая, что она сферична)

$$\sigma_i = \frac{\pi^5}{\lambda^4} \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 - 2} \right|^2 D_i^6, \quad (2)$$

где m — комплексный показатель преломления частицы, D — ее диаметр. Учитывая распределение частиц по размерам $n(D)$ и полагая, что рассеяние отдельными каплями складывается некогерентно, для удельной площади обратного рассеяния η получаем

$$\eta = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \sigma(D) n(D) dD. \quad (3)$$

По данным Маршалла—Пальмера [6] распределение капель по размерам имеет вид

$$n(D) = A \exp(-BD), \quad (4)$$

где $A = 0,08 \text{ см}^{-4}$ — параметр, примерно одинаковый для дождей разной интенсивности, $B = 41^{-0,21} \text{ см}^{-1}$ — параметр, связанный с интенсив-

ностью дождя I [мм/час], при этом диапазон размеров капель определяется $D_{\min} = 0,05$ см и $D_{\max} = 0,55$ см. Более сложное распределение по сравнению с (4) предложено Бестом с сотрудниками [6]. С учетом этих распределений и результатов [7] рассчитанные значения η для интенсивности $I = 1000$ мм/час приведены в табл. 1.

Таблица 1

η 1/м	Маршалл—Пальмер [6]	Бест [6]	Бартон [7]
$\lambda = 8$ мм	$2,2 \times 10^{-1}$	$2,5 \times 10^{-1}$	5×10^{-1}
$\lambda = 3$ см	$4,5 \times 10^{-4}$	$9,7 \times 10^{-4}$	2×10^{-3}
$\lambda = 10$ см	$4,7 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{-5}$	1×10^{-5}
$\lambda = 50$ см	$6,8 \times 10^{-9}$	$1,5 \times 10^{-8}$	$1,2 \times 10^{-8}$

Площадь обратного рассеяния может быть найдена по формуле

$$\sigma = \eta V_{\text{эфф}} \exp(-2\delta 0,23 \gamma), \quad (5)$$

где $V_{\text{эфф}}$ — эффективный (с учетом степени заполнения) импульсный объем, δ — протяженность объема по дистанции, γ — коэффициент погонного ослабления. Протяженность объема можно оценить по уширению импульса, рассеянного брызгами (рис. 2). В наших опытах $\delta \leq 10 \div 30$ м и при высоте брызг 2 м $V_{\text{эфф}} \leq (200 \div 600)$ м³.

Коэффициент погонного ослабления $\gamma = k_0 I^\nu \partial \text{Б/км}$ [6], где k_0 и ν приведены в табл. 2 для интенсивности $I = 1000$ мм/час при разных законах распределения $n(D)$.

Таблица 2

	Маршалл—Пальмер [6]		Бест [6]	
	k_0	ν	k_0	ν
$\lambda = 3,2$ см	0,011	1,15	0,131	1,15
$\lambda = 8$ мм	0,27	1	0,131	1

Значения площадей обратного рассеяния σ , рассчитанные для разных законов распределения при $10 \text{ м} \leq \delta \leq 30 \text{ м}$, приведены в табл. 3.

Таблица 3

	Маршалл—Пальмер [6]	Бест [6]	Бартон [7]
$\lambda = 3,2$ см	$-11 \text{ дБ} < \sigma < -6 \text{ дБ}$	$-6,2 \text{ дБ} < \sigma < -1,8 \text{ дБ}$	$-2,2 \text{ дБ} < \sigma < 2 \text{ дБ}$
$\lambda = 8$ мм	$0,5 \text{ дБ} < \sigma < 6,4 \text{ дБ}$	$3,2 \text{ дБ} < \sigma < 9,8 \text{ дБ}$	$7,2 \text{ дБ} < \sigma < 13,8 \text{ дБ}$

Хотя абсолютные значения σ для распределений $n(D)$ Маршалла—Пальмера и Беста и отличаются на 3—5 дБ*, но для всех случаев

$$10 \lg(\sigma_{0,8}/\sigma_{3,2}) \approx (9,5 \div 12) \text{ дБ}.$$

* Значения σ по Бартону получены с использованием данных для k_0 и ν по Бесту (табл. 2).

Этот результат расчетов совпадает с данными экспериментов — $10 \lg(\sigma_{0,8}/\sigma_{3,2}) \approx 10$ дБ. Видимо, абсолютные значения σ брызг не могут быть точно рассчитаны с использованием указанных распределений, но частотная зависимость рассеяния указывает на подобие процессов рассеяния на брызгах при обрушивании волн и на каплях в дождях.

Вклад рассеяния от обрушивающихся гребней в отраженный морем сигнал зависит от освещаемой площади поверхности моря, угла скольжения и длины радиоволны и может быть оценен из измерений при высоком разрешении по координатам [4]. При этих измерениях ЭПР морской поверхности на $\lambda = 3$ см составляла $10^{-2} \div 10^{-3}$ м², а кратковременные всплески сигнала превышали средний уровень примерно на 10 дБ. Считая, что ЭПР брызг слабо зависит от угла скольжения* и в зависимости от длины радиоволны изменяется, как λ^{-4} , следует ожидать, что при волнении моря в 2—3 балла и больше и углах скольжения $\psi \leq 5^\circ$ рассеянный сигнал на радиоволнах 8 мм и короче будет определяться, главным образом, брызгами. На радиоволнах 10 см и длиннее эффект брызг практически отсутствует.

В связи с этим зависимость $\sigma(\psi)$ при малых углах скольжения $\psi < 1^\circ$, когда имеет место затенение склонов волн, оказывается существенно разной для различных радиоволн. На волнах $\lambda \geq 10$ см $\sigma(\psi)$ при $\psi \leq 1^\circ$ падает с уменьшением ψ в соответствии с расчетом в рамках двухмасштабной модели, в то время как для $\lambda \leq 3$ см такого падения не наблюдается. По этой же причине при значительном волнении удельная ЭПР моря перестает падать с уменьшением угла скольжения при λ примерно короче 3 см. Зависимости $\sigma(\psi)$ будут существенно разными на разных волнах. Рассеяние на брызгах будет определять и сильную частотную зависимость рассеяния от моря на миллиметровых волнах при малых углах скольжения, где должно быть $\sigma \sim \lambda^{-4}$.

Обнаруженный эффект рассеяния на брызгах позволяет объяснить результаты работы [8], где измерены высокочастотные «хвосты» доплеровских спектров сигналов на волне $\lambda = 10$ см. Полученные в [8] данные построены в виде графиков на рис. 4, где $V^B = F^B \lambda / 2$ — скорость рассеивателей, создающих доплеровское смещение частоты сигналов вертикальной поляризации F^B , S_0 — спектральная плотность максимума спектра. Согласно двухмасштабной модели этот спектр связан со спектром орбитальных

скоростей морских волн $S_V(F)$; последний определяется через спектр возвышенной поверхности $S_H(F)$ как

$$S_V(F) \sim F^2 S_H(F). \quad (6)$$

Высокочастотная часть спектра возвышений наиболее часто [9] имеет характер $S_H(F) \sim F^{-5} \div F^{-6}$. При этом высокочастотная часть доплеровского спектра сигнала должна описываться законом

$$S(F) \sim F^{-3} \div F^{-4}. \quad (7)$$

* Эта зависимость вызывается интерференционным характером облучающего поля.

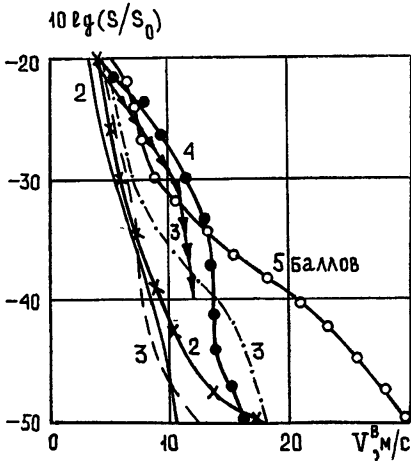


Рис. 4.

Из рис. 4 видно, что при слабых волнениях спектр действительно имеет характер, определяемый (7). При значительных волнениях на малых уровнях спектральной плотности S ($-30 \div -40$ дБ) закон изменения $S(F)$ становится близким к F^{-2} , что связано с рассеянием на брызгах. На очень малых уровнях (менее -40 дБ) зависимость $S(F)$ круче F^{-4} , что обусловлено, по-видимому, уменьшением η согласно (3) для мелких капель.

На более коротких волнах ($\lambda < 3$ см), где вклад от брызг значителен, зависимость $S(F) \sim F^{-2}$ должна наблюдаться на более высоких уровнях спектральной плотности. Для волн длиннее 10 см высокочастотная часть спектра должна описываться зависимостью (7).

Таким образом, исследование отражений, возникающих при обрушивании морских волн, показывает, что:

1) максимальное рассеяние наблюдается при появлении брызг после разрушения гребней; это рассеяние по частотной зависимости подобно рэлеевскому рассеянию в дождях большой интенсивности;

2) рассеяние на пене, появляющейся на поверхности моря после обрушивания брызг, менее существенно, чем отражение от брызг;

3) рассеяние на брызгах отличается слабой деполаризацией и практически не зависит от поляризации излучения.

Рассеяние на брызгах может существенно превышать отражение морской поверхностью; согласно сделанным оценкам этот эффект должен появляться на волнах короче 3 см и при малых углах скольжения, поэтому зависимости σ от угла места должны иметь различный характер на разных волнах. Это явление должно быть причиной различия высокочастотных «хвостов» в доплеровских спектрах сигналов на разных волнах при различных состояниях поверхности и при облучении под малыми углами скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. G. Bass, I. M. Fuks, A. I. Kalmykov, I. E. Ostrovsky, A. D. Rozenberg, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-16, № 5, pt. I, 554; pt. II, 560 (1968).
2. M. W. Long, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-13, № 5, 749 (1965).
3. V. W. Pidgeon, J. Geophys. Res., 73, № 4, 1333 (1968).
4. A. I. Kalmykov, V. V. Pustovoytenko, J. Geophys. Res. (in press).
5. А. И. Калмыков, А. С. Курекин, И. Е. Островский, В. В. Пустовойтенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 199 (1973).
6. Н. П. Красюк, В. Н. Розенберг, Д. А. Чистяков, Радиотехника и электроника, 13, № 5, 780 (1968).
7. Д. Бартон, Радиолокационные системы, Воениздат, М., 1967.
8. H. Michel, L'Onde Electrique, 51, № 8, 704 (1971).
9. Ю. М. Крылов, Труды ГОИН, 67, 15 (1962).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
16 июня 1975 г.

PECULIARITIES OF SCATTERING OF MICROWAVE RADIATION BY ATTACKED SEA WAVES

A. I. Kalmykov, A. S. Kurekin, Yu. A. Lementa, I. E. Ostrovskii,
V. V. Pustovoytenko

The results of the experiments on 8 mm and 3 cm radio wave backscattering by attacked sea waves are discussed. The maximum scattering from spray is observed. The reflection level from foam is considerably less than that from spray. The frequency dependence on spray is of Rayleigh character, practically independent of radiation polarization and characterized by weak depolarization. The influence of the given effects on the amplitude-frequency characteristic of scattering by the sea surface in different microwave ranges is estimated.

УДК 539.143.43

МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПРОТОННЫЕ СПИНОВЫЕ ЭХО ПРИ ДВУХИМПУЛЬСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Б. Ф. Алексеев, В. Д. Гадаев

Рассмотрено формирование протонных эхо-сигналов при их периодическом возбуждении РЧ импульсами и получены выражения для формы и амплитуды главного и второго эхо, объясняющие закономерности наблюдаемых эффектов. Происхождение множественных эхо связано с неравновесностью спин-системы, предшествующей действию импульсов.

При воздействии радиочастотными импульсами на спиновую систему в последней возникают эхо-отклики. В магниторелаксационных исследованиях часто применяется последовательность $\xi_1 - \tau - \xi_2$ [1-5], где $\xi_i = \gamma H_{1i} t_i$, γ — гиромагнитное отношение частиц, H_{1i} — амплитуда поляризованного по кругу радиочастотного магнитного поля, t_i — длительность i -го импульса, τ — интервал времени между импульсами. Феноменологическая [1-3, 6-8] и квантовая [9] теории формирования эхо-сигналов в простых системах при их двухимпульсном возбуждении предсказывают возникновение лишь одного эхо (зеркального, главного), которое появляется после первого импульса через время 2τ (в предположении $t_i \ll \tau$ [10]). Вместе с тем, в ряде работ, относящихся к изучению как ядерного [11-21], так и электронного [22, 23*] двухимпульсного эхо, наблюдались множественные** эхо-отклики. Наиболее подробно эффекты изучены для ядер в магнитоупорядоченных (по электронным спинам) структурах [12-20] и ядер с квадратным взаимодействием в твердотельных системах [11-13]. Мы уверенно наблюдали после двух импульсов множественные эхо в столь простых системах, как протоны в водных растворах ряда алюминатов и многих парамагнитных ионов. На рис. 1 приведена типичная осциллограмма сигналов.

Причинами возникновения множественных ядерных эхо, по существу представляемым, могут быть:

- 1) неоднородность квадрупольного взаимодействия ядер [11, 8],
- 2) возбуждение РЧ полем мультипольных моментов ядер [12, 13],
- 3) модуляция частоты прецессии ядерной намагниченности РЧ импульсами в системах с большими динамическими сдвигами частоты*** [14, 15],
- 4) действие эхо-сигналов (главного и последующих) как добавочных РЧ импульсов [13, 16-20],
- 5) интерференция компонент намагниченности при повторяемом возбуждении эхо-сигналов [21, 3].

* В тексте работы [23] на существование множественных эхо не указано, но на приведенной осциллограмме виден сигнал, который, по-видимому, принадлежит вторичному эхо.

** Их называют также вторичными, добавочными, последующими, мультиплетными эхо.

*** В ядерных спин-системах с динамическим сдвигом частоты главное и вторичное эхо могут быть возбуждены даже одним импульсом [15].

Обсудим возможности проявления перечисленных механизмов в наших экспериментах. Протоны не обладают квадрупольными моментами, в силу чего механизмы (1) и (2) исключаются. Динамические сдвиги ядерной частоты существенны только в магнитоупорядоченных структурах, поэтому проявление механизма (3) в протонсодержащих жидкостях маловероятно. Действие четвертого механизма с несомненностью возможно в магнитоупорядоченных системах [13, 18-20]: электронная намагниченность, наведенная ядрами в момент их эхо-фокусировки, действует на ядерную систему как добавочный РЧ импульс, обуславливая вторичные, накладывающиеся друг на друга зеркальные и стимулированные (трехимпульсные) эхо. По-видимому, родственный механизм возможен и для простых спин-систем: наведенная в момент эхо в приемной катушке ЭДС $E \sim -\frac{dM}{dt}$ порождает ток и, следовательно, РЧ магнитное поле $H_1 \sim -\frac{dM}{dt}$ действует на спин-систему как добавочный импульс*.

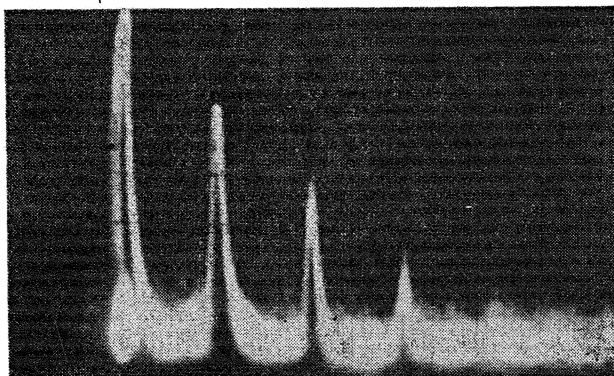


Рис. 1. Протонный эхо-отклик водного раствора $AlCl_3$ при периодическом следовании серии двух РЧ импульсов ($\tau = 440$ мкс;

$$\nu = T^{-1} = 20 \text{ Гц}; t_1 = 2,8 \text{ мкс}; t_2 = 4 \text{ мкс}).$$

Начало развертки луча осциллографа синхронизировано с началом второго импульса. Слева направо последовательно видны отклик приемника на второй импульс, главное, второе, третье (и четвертое?) эхо.

Фазовые соотношения не препятствуют возникновению вторичного зеркального эхо от действия дополнительного и ξ_2 -импульсов или стимулированного от действия ξ_1 -, ξ_2 -импульсов и дополнительного импульса. Можно видеть при этом, что амплитуды последующих эхо должны быть пропорциональны амплитудам предыдущих эхо. В наших экспериментах этот существенный признак механизма (4) отсутствовал: легко реализовывались ситуации, когда, например, при увеличении интенсивности главного эхо амплитуды вторичных эхо уменьшались.

На механизм (5) указано в книге Лёше (см. [3], стр. 112). В работе Пфайфера, Долега и Винклера [21] рассчитан эхо-отклик ядерной системы для двух пар РЧ импульсов и частного случая $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, однако приведенные результаты недостаточны для сравнения с получаемыми в общих случаях экспериментальными данными и для выявления информативных возможностей вторичных эхо.

* Предполагается, что время сохранения ядрами когерентности больше периода прецессии, а последний совпадает с периодом собственных колебаний контура.

Мы рассмотрели более подробно формирование эхо-сигналов при периодическом следовании серии импульсов $\xi_1 - \tau - \xi_2$ (период следования обозначим T). Предпологаем спин-систему состоящей из множества изохромагических блоховских групп, не взаимодействующих между собой. Такая модель корректна для твердых тел с неоднородным уширением линии ЯМР, если время спектральной диффузии (кросс-релаксации между спиновыми пакетами) больше времени τ , T , и для маловязких жидкостей в однородном поле. Эволюцию намагниченности $m = m_0(\omega)d\omega$ отдельной изогруппы находим из уравнения Блоха (справедливого строго для спинов $I = 1/2$), решение которого во вращающейся с частотой прилагаемых РЧ импульсов (ω_0) системе координат может быть представлено в виде*

$$m(t) = \varepsilon e^{-\varepsilon(t-a)} \int_a^t e^{\varepsilon(t'-a)} m_0(t') dt' + m(a) e^{-\varepsilon(t-a)}; \quad (1)$$

$$F(t) = -\gamma H_1 \exp\left[-\int_a^t (\Omega + j\Delta\omega) dt\right] \int_a^t \exp\left[\int_a^{t'} (\Omega + j\Delta\omega) dt''\right] m(t') dt' + \\ + F(a) \exp\left[-\int_a^t (\Omega + j\Delta\omega) dt'\right], \quad (2)$$

где $\varepsilon = 1/T_1$, $\Omega = 1/T_2$, T_1 и T_2 — соответственно времена спин-решеточной и спин-спиновой релаксации в изогруппе, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $m(t)$ — z -составляющая намагниченности изогруппы, $m_0(t) = \chi_0(\omega) H_0(t) d\omega$ — термическая равновесная намагниченность группы в поле $H_0(t)$, $F = v + jv$, v и u — соответственно квадратурная и синфазная с полем H_1 компоненты поперечной намагниченности изогруппы.

Эксперименты по эхо проводятся обычно в постоянном поле H_0 , следовательно, m_0 и $\Delta\omega$ неизменны во времени. Выражения (1) и (2) в этом случае существенно упрощаются. Примем $t_i \ll T_1, T_2$, так что релаксационными процессами во время действия импульсов можно пренебречь, и поле H_{1i} будем считать столь большим, что движение намагниченности любой изогруппы во вращающейся системе можно рассматривать как прецессию вокруг поля H_{1i} (иначе $\gamma H_{1i} \gg \Delta\omega$). Невыполнение этих условий не меняет качественной картины эффекта, но принятие их упрощает рассмотрение.

Будем отсчитывать время от начала любого импульса ξ_1 из периодической последовательности серий $\xi_1 - \tau - \xi_2$. По окончании импульсов ξ_1 и ξ_2 компоненты намагниченности изогруппы определяются выражениями

$$m\left(\begin{matrix} 0 + t_1 \\ \tau + t_2 \end{matrix}\right) = \operatorname{Re} F\left(\begin{matrix} 0 \\ \tau \end{matrix}\right) \sin \frac{\xi_1}{\xi_2} + m\left(\begin{matrix} 0 \\ \tau \end{matrix}\right) \cos \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad (3)$$

$$F\left(\begin{matrix} 0 + t_1 \\ \tau + t_2 \end{matrix}\right) = \operatorname{Re} F\left(\begin{matrix} 0 \\ \tau \end{matrix}\right) \cos \frac{\xi_1}{\xi_2} - m\left(\begin{matrix} 0 \\ \tau \end{matrix}\right) \sin \frac{\xi_1}{\xi_2} + j \operatorname{Im} F\left(\begin{matrix} 0 \\ \tau \end{matrix}\right).$$

Подставляя соотношения (3) последовательно в (1) и (2) и полагая соответственно $a = t_1 \simeq 0$ и $a = \tau + t_2 \simeq \tau$, находим явные выражения для компонент намагниченности изогруппы по окончании импульса ξ_2 . Эти выражения включают в себя компоненты намагниченности изогруппы при $t = 0$. При периодическом следовании серий импульсов началь-

* Выражения (1) и (2) справедливы в предположении малого насыщения ЯМР, корректного в данной задаче.

ные компоненты можно найти из условия «сшивания» решений на границах циклов

$$m(0) \equiv m(T), \quad v(0) \equiv v(T), \quad u(0) \equiv u(T). \quad (4)$$

Соотношения (4) приводят к системе уравнений для начальных компонент, общее решение которой, однако, столь громоздко, что затрудняет дальнейший анализ. Можно достигнуть упрощения за счет использования решения первого приближения (по степеням множителей $e^{-\alpha T}$, $e^{-\varepsilon T}$) системы уравнений, которые имеют вид

$$\begin{aligned} m(0) &\simeq m_0[(1 - e^{-\varepsilon(T-\tau)}) + (e^{-\varepsilon(T-\tau)} - e^{-\varepsilon T}) \cos \xi_2], \\ v(0) &\simeq m_0(e^{-\varepsilon\tau} - 1)e^{-\alpha(T-\tau)} \sin \xi_2 \cos \Delta\omega(T - \tau), \\ u(0) &\simeq m_0(e^{-\varepsilon\tau} - 1)e^{-\alpha(T-\tau)} \sin \xi_2 \sin \Delta\omega(T - \tau). \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом (5) находим явные выражения для движения компонент намагниченности рассматриваемой изо группы в интервале времени $\tau \leq t \leq T$.

Для определения эхо-отклика всей спин-системы следует определить результат «интерференции» поперечных компонент намагниченностей всех изо групп. Примем гауссову функцию распределения продольных намагниченностей изо групп по частотам*

$$g(\Delta\omega) = \frac{T_3}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Delta\omega T_3)^2}{2}\right], \quad (6)$$

где T_3 — параметр, характеризующий обратную полуширину функции $g(\Delta\omega)$. Найденное таким образом выражение для макроскопической квадратурной по отношению к полю H_1 намагниченности спин-системы имеет вид

$$\begin{aligned} V(t) &= A_1 \exp\left[-\frac{t^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right] + A_2 \exp\left[-\frac{(t-\tau)^2}{2T_3^2} - \frac{(t-\tau)}{T_2}\right] + \\ &+ A_3 \exp\left[-\frac{(t-2\tau)^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right] + A_4 \exp\left[-\frac{T^2}{2T_3^2} - \frac{T(t-2\tau)}{T_3^2} - \right. \\ &\left. - \frac{(t-2\tau)^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right] + A_5 \exp\left[-\frac{T^2}{2T_3^2} - \frac{T(t-3\tau)}{T_3^2} - \frac{(t-3\tau)^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right] + \\ &+ A_6 \exp\left[-\frac{T^2}{2T_3^2} + \frac{T(t-\tau)}{T_3^2} - \frac{(t-\tau)^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right] + \\ &+ A_7 \exp\left[-\frac{T^2}{2T_3^2} - \frac{T(t-\tau)}{T_3^2} - \frac{(t-\tau)^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right] + \\ &+ A_8 \exp\left[-\frac{t^2}{2T_3^2} + \frac{t(T-\tau)}{T_3^2} - \frac{(T-\tau)^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right] + \\ &+ A_9 \exp\left[-\frac{(t-T)^2}{2T_3^2} - \frac{t}{T_2}\right], \end{aligned} \quad (7)$$

* Гауссово распределение часто реализуется в твердых телах и вязких жидкостях в сравнительно однородных полях H_0 ; другие симметричные функции качественной картины эффекта не меняют.

где A_1, \dots, A_9 — коэффициенты, не зависящие от времени, выражения для которых можно легко получить в рамках проводимого рассмотрения.

Слагаемые с A_1, A_2, A_6, A_7, A_8 и A_9 описывают свободную прецессию в интервале времени $\tau < t < T$; громоздкие выражения для этих коэффициентов не приводим. Третий и четвертый члены в (7) относятся к главному эхо:

$$A_3 = M_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{T-\tau}{T_1}\right) + \left[\exp\left(-\frac{T-\tau}{T_1}\right) - \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) \right] \cos \xi_2 \right\} \sin \xi_1 \sin^2 \frac{\xi_2}{2}; \quad (8)$$

$$A_4 = \frac{1}{2} M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{T-2\tau}{T_2} - \frac{\tau}{T_1}\right) \sin \xi_1 \sin^2 \xi_2. \quad (9)$$

Наконец, слагаемое с A_5 описывает вторичное эхо, возникающее в момент времени $t = 3\tau$:

$$A_5 = M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{T-\tau}{T_2}\right) \cos^2 \frac{\xi_1}{2} \sin^2 \frac{\xi_2}{2} \sin \xi_2. \quad (10)$$

Если бы при анализе были использованы не приближенные (см. (5)), а строгие выражения для начальных намагниченностей изогруппы, то данное рассмотрение показало бы возникновение быстрозатухающих эхо при $t = 4\tau; 5\tau; \dots$. Появление множественных эхо и сложная зависимость амплитуды главного эхо от времен T_1, T, τ связаны с неравновесностью изогрупп, предшествующей действию серии импульсов ξ_1 и ξ_2 при ее периодическом следовании. Если период следования велик ($T \gg T_2$, обычно $T_3 < T_2$), то слагаемые с A_4, \dots, A_9 в сумме (7) обращаются в нуль, множественные эхо исключаются, а амплитуда главного эхо дается хорошо известным выражением [3]:

$$V_m(t = 2\tau) = M_0 \sin \xi_1 \sin^2 \frac{\xi_2}{2} \exp\left(-\frac{2\tau}{T_2}\right). \quad (11)$$

Зависимость амплитуды главного эхо от времени релаксации T_1 при периодическом возбуждении спин-системы может быть положена в основу метода измерения этого параметра. Рассмотрим последовательность импульсов Хана [1], $\xi_1 = 90^\circ, \xi_2 = 180^\circ$, обеспечивающую наиболее интенсивное главное эхо и применяемую широко для измерения [1, 3-5] времени T_2 . Амплитуда главного эхо определяется, согласно (7) — (9), выражением

$$V_m(t=2\tau) = M_0 \left[1 - 2\exp\left(-\frac{T-\tau}{T_1}\right) + \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{2\tau}{T_2}\right); \quad (12)$$

поправка A_4 обращается в нуль. Это утверждение справедливо, однако, только для идеально однородного по объему образца поля H_1 , что на практике обеспечить обычно не удается. Член с A_4 можно устранить из суммы (7) при условии $T \gg T_3$. Если потребовать, кроме того, чтобы $T \gg \tau$, то амплитуда главного эхо будет определяться выражением

$$\begin{aligned} V_m(\tau, T) &\simeq M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{2\tau}{T_2}\right) = \\ &= V_m(\tau, \infty) \left[1 - \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношение (13) линеаризуется в системе координат $\ln[V_m(\tau, \infty) - V_m(\tau, T)]/V_m(\tau, \infty) = \ln a(\tau, \nu)$ и $T = \nu^{-1}$ (ν — частота следования серий); время T_1 находится как

$$T_1 = \Delta |(\nu^{-1})| / \Delta |\ln a(\tau, \nu)|. \quad (14)$$

Таким образом, из зависимости амплитуды главного эхо от частоты следования серий Хана при $\tau = \text{const}$ возможно непосредственное определение времени T_1 . Погрешность метода сравнима с погрешностями других импульсных методов измерения T_1 ($180^\circ - \tau - 90^\circ$ [2]; $90^\circ - \tau - 90^\circ$ [4, 5], трехимпульсные последовательности [1] и др.), но достоинством предложенного метода является возможность измерения без перестройки программы обоих времен релаксации, T_2 и T_1 . Условием корректности метода на практике нетрудно удовлетворить. Условие $T \gg T_3$ лучше выполняется в неоднородном поле; невыполнение этого условия должно приводить, как видно из (7), к появлению вторичных эхо. Минимальное время τ_{min} определяется «мертвым» временем приемного устройства и составляет единицы или десятки миллисекунд; при $\tau = \tau_{\text{min}}$ амплитуда эхо, как видно из (13), максимальна.

Описанным методом нами измерены времена протонной релаксации в водных растворах парамагнитных ионов; полученные результаты хорошо совпадают с данными других работ.

Рассмотрим подробнее свойства второго эхо. Для его амплитуды из (10) и (7) имеем

$$V_m(t = 3\tau) = M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{T + 2\tau}{T_2} - \frac{T^2}{2T_3^2}\right) \times \cos^2 \frac{\xi_1}{2} \sin^2 \frac{\xi_2}{2} \sin \xi_2. \quad (15)$$

Из сравнения выражений для интенсивностей второго и главного эхо видно, что их амплитуды по-разному зависят от условий возбуждения эхо (величины τ , T , T_3 , ξ_1 , ξ_2) и характеристик образца (T_1 , T_2 , T_3). Например, при $\xi_2 = 180^\circ$ главное эхо максимально (в предположении малости поправки с A_4), а второе эхо обращается в нуль. Максимум у второго эхо достигается при $\xi_2^0 = (2\pi/3)n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

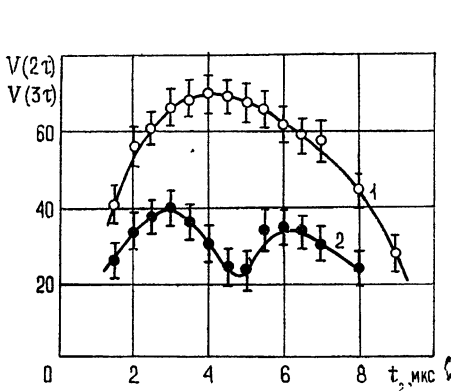


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость амплитуд (условные единицы) главного (1) и второго (2) эхо от длительности t_2 (угла ξ_2) второго РЧ импульса; $t_1 = 2$ мкс ($\xi_1 \approx 90^\circ$); $\nu = 20$ Гц; $\tau = 200$ мкс.

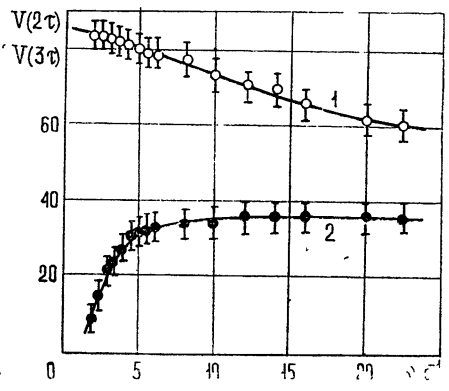


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость амплитуд главного (1) и второго (2) эхо от частоты следования серий двух РЧ импульсов; $t_2 \approx 2t_1 = 4$ мкс; $\tau = 220$ мкс.

Образец — состаренный раствор 11,1 моль NaOH и 2,5 моль $\text{Al}(\text{OH})_4^-$ в 1 л воды.

На рис. 2 приведены экспериментально наблюдаемые зависимости амплитуд главного и второго эхо от длительности t_2 второго РЧ импульса (угла $\xi_2 = \gamma H_1 t_2$; $H_1 = \text{const}$) при $t_1 = 2$ мкс ($\xi_1 = 90^\circ$), качественно хорошо согласующиеся с предсказываемыми выражениями (8) и (15). Строгое сопоставление опытных и расчетных результатов затруднено вследствие большой неоднородности поля H_1 (углов ξ_1 и ξ_2) по объему образца. На рис. 3 изображены зависимости амплитуд первых двух эхо от частоты $\nu = 1/T_1$ следования серии импульсов. В соответствии с выражениями (8) и (15) при увеличении ν амплитуда главного эхо уменьшается, а амплитуда второго эхо достигает асимптотического значения. При дальнейшем увеличении ν наблюдается незначительное уменьшение амплитуды второго эхо, обусловленное, по-видимому, заметным проявлением последующих эхо.

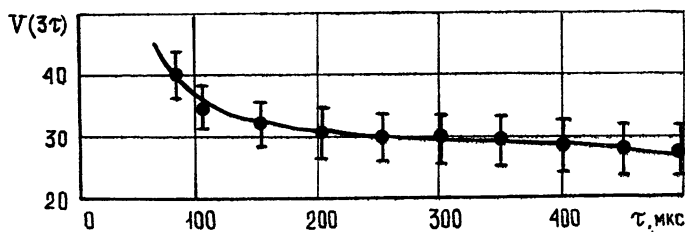


Рис. 4. Зависимость амплитуды второго эхо от τ ; $t_2 \approx 2t_1 = 4$ мкс;
 $\nu = 20$ Гц.

На рис. 4 представлена зависимость интенсивности второго эхо от τ . Согласно (15) эта зависимость должна описываться функцией

$$f(\tau) \approx \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{T_1}\right) \right] \exp\left(-\frac{2\tau}{T_2}\right), \quad (16)$$

которая достигает максимума при $\tau_0 = -T_1 \ln 2 T_1 / (2 T_1 + T_2)$. Если $T_2 = T_1$, то $\tau_0 \approx 0,4 T_1$. При $T_2 \ll T_1$ имеем $\tau_0 \approx 0$. В наших экспериментах максимум у зависимости $f(\tau)$ не проявлялся, что обусловлено либо выполнением неравенства $T_2 \ll T_1$ (наиболее вероятном для исследуемой пробы), либо недостаточным временным разрешением аппаратуры.

Рассмотренная выше модель возникновения множественных эхо качественно хорошо, на наш взгляд, объясняет закономерности наблюдаемых эффектов. Отметим, что расширение спектра эхо при периодическом возбуждении не связано с особыми свойствами образцов, следовательно, возможно для любых спин-систем (ядерных, электронных и др.) и любых агрегатных состояний образца, если только действию импульсов предшествует неравновесность спин-системы.

При выводе соотношения (7) не учитывалась самодиффузия носителей спинов, существенная для маловязких жидкостей при исследовании их в неоднородных статических полях. Дополнительное затухание амплитуд эхо вследствие самодиффузии можно учесть по схеме, описанной, например, в работах [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. E. L. Hahn, Phys. Rev., **80**, 580 (1950).
2. H. Y. Carr, E. M. Purcell, Phys. Rev., **94**, 630 (1954).
3. А. Леше, Ядерная индукция, ИЛ, М., 1963.
4. Т. Фаррар, Э. Беккер, Импульсная и фурье-спектроскопия ЯМР, изд. Мир, М., 1973.

5. F. Noack, NMR Basic Princ. Progr., **3**, 83 (1972).
6. T. P. Das, A. K. Saha, Phys. Rev., **93**, 749 (1954).
7. A. L. Bloom, Phys. Rev., **98**, 1105 (1955).
8. И. В. Александров, Теория ядерного магнитного резонанса, изд. Наука, М., 1964.
9. T. P. Das, A. K. Saha, D. K. Roy, Proc. Roy. Soc., **A227**, 407 (1955).
10. W. B. Mims, Rev. Sci. Instrum., **36**, 1472 (1965).
11. I. Solomon, Phys. Rev., **110**, 61 (1958).
12. H. Abe, H. Yasuoka, A. Hirai, J. Phys. Soc. Japan, **21**, 77 (1966).
13. М. И. Куркин, В. В. Сериков, ФТТ, **16**, 1177 (1974).
14. М. П. Петров, Г. А. Смоленский, А. А. Петров, С. И. Степанов, ФТТ, **15**, 184 (1973).
15. Ю. М. Буньков, Б. С. Думеш, М. И. Куркин, Письма в ЖЭТФ, **19**, 216 (1974).
16. Б. С. Думеш, Письма в ЖЭТФ, **14**, 511 (1971).
17. А. А. Петров, М. П. Петров, Г. А. Смоленский, П. П. Сырников, Письма в ЖЭТФ, **14**, 54 (1971).
18. М. П. Петров, В. В. Москалев, Г. А. Смоленский, Письма в ЖЭТФ, **15**, 132 (1972).
19. М. П. Петров, А. П. Паугурт, Г. А. Смоленский, М. К. Чижев, Изв. АН СССР, серия физ., **36**, 1472 (1972).
20. C. W. Searle, J. Davis, A. Hirai, K. Fukuda, Phys. Rev. Lett., **27**, 1380 (1971).
21. H. Pfeifer, U. Dolega, H. Winkler, Ann. Phys., **15**, 246 (1955).
22. J. P. Gordon, K. D. Bowers, Phys. Rev. Lett., **1**, 368 (1958).
23. Э. Г. Харахашьян, Ф. Г. Черкасов, Я. А. Витол, А. Р. Киссель, В. Ф. Юданов, Письма в ЖЭТФ, **15**, 156 (1972).

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
20 июня 1975 г.

MULTIPLE PROTON SPIN ECHO AT TWO-PULSE EXCITATION

B. F. Alekseev, V. D. Gadaev

The formation of proton echo-signals periodically excited by RF pulses is considered. Expressions are obtained for the form and amplitude of the main and the second echoes which explains the regularities of the effects observed. The origin of multiple echo is associated with the nonequilibrium of a spin-system preceding pulse action.

УДК 621.372.413

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАБОТЫ ВОЛНОВЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ С ВНУТРЕННЕЙ НАКАЧКОЙ

С. Я. Вышкинд, Т. Н. Смирнова

Рассматривается параметрическое взаимодействие попутных и встречных волн в резонаторе, заполненном комбинированной активно-реактивной средой. Исследуется структура поля в таком резонаторе при взаимодействии волн как кратных, так и несоизмеримых частот. Приводятся результаты численного эксперимента. Показано, что подобные системы могут быть использованы для генерации и усиления сигналов, частота которых превышает собственную частоту системы.

Взаимодействие параметрически связанных волн в среде, активной лишь на одной из частот (оптические активные среды, пьезополупроводники, плазма, пронизываемая электронным пучком и т. д.), представляет интерес, например, с точки зрения создания распределенных супергетеродинных усилителей [1-3] и параметрических приборов с внутренней накачкой [4, 5]. Как было показано в [4], процесс параметрического преобразования $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, осуществляемый в полуограниченной активной среде (системе), где генерируется слабая волна ω_1 , значительно эффективнее, чем отдельный процесс генерации частоты ω_1 с последующим параметрическим преобразованием в ω_3 (при той же энергии накачки на частоте ω_2).

В данной работе решается аналогичная задача, но для случая, когда для «активной» волны система является резонатором*.

1. Рассмотрим вначале процесс взаимодействия «активной» моды частоты ω_2 резонатора, заполненного активно-реактивной средой, с бегущей вправо «пассивной» волной на частоте субгармоники $\omega_1 = \frac{\omega_2}{2}$.

«Активную» нелинейность будем считать заданной и представим в виде

$$f(u) = -gu(1 - \alpha u^2),$$

а реактивная нелинейность пусть квадратична по полю. Имея в виду, что дисперсия в системе достаточно сильная, так что другие взаимодействия отсутствуют, будем считать выполненными лишь условия синхронизма

$$2\omega_1 = \omega(\pm k_2) = \omega_2, \quad k(\omega_2) = k(2\omega_1) = 2k(\omega_1). \quad (1)$$

Считая нелинейности в системе малыми (величины порядка $\mu \ll 1$), получим при условии идеального отражения от границ резонатора волны частоты ω_2^{**} (см. рис. 1а) уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн

* Моделью такой системы может служить отрезок двух связанных нелинейных диспергирующих линий [4], одна из которых содержит активные элементы (например, туннельные диоды) и разомкнута или замкнута на концах.

** При идеальном отражении от границ резонатора волны частоты ω_1 уравнения будут аналогичны (2) с той разницей, что слагаемое, описывающее несинхронное взаимодействие, войдет в правую часть первого, а не второго уравнения.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} &= -\mu \bar{\sigma}_1 a_1 a_2^*, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \mu \{ \bar{\sigma}_2 a_1^2 + \bar{g} a_2 [1 - 3\alpha(a_2 a_2^* + 2a_3 a_3^*)] \}, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} &= \mu \bar{g} a_3 [1 - 3\alpha(a_3 a_3^* + 2a_2 a_2^*)] \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными условиями

$$a_3(t)|_{x=0, l} = |a_2(t)|_{x=0, l}, \quad |a_1(t)|_{x=0}^2 = A_{10}^2, \quad |a_1(t)|_{x=l-0}^2 = |a_1(t)|_{x=l+0}^2.$$

Здесь $|v_{1,2,3}$ — групповые скорости волн, а $\bar{\sigma}_{1,2}$ — коэффициенты нелинейного взаимодействия, пропорциональные величине реактивной (квадратичной) нелинейности.

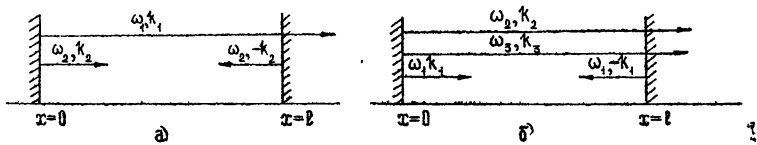


Рис. 1.

В случае стационарных полей $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ систему (2) можно переписать для действительных амплитуд A_i и фаз φ_i ($a_i = A_i \exp(j\varphi_i)$) в виде

$$\begin{aligned} A_1' &= -\mu \sigma_1 A_1 A_2 \sin \Phi, \\ A_2' &= \mu \{ \sigma_2 A_1^2 \sin \Phi + g A_2 [1 - 3\alpha(A_2^2 + 2A_3^2)] \}, \\ A_3' &= -\mu g A_3 [1 - 3\alpha(A_3^2 + 2A_2^2)], \\ \Phi' &= \mu \left(\sigma_2 \frac{A_1^2}{A_2} - 2\sigma_1 A_2 \right) \cos \Phi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1$, $\sigma_{1,2} = \bar{\sigma}_{1,2}/v_{1,2}$, $g = \bar{g}/|v_2|$, с граничными условиями

$$A_2|_{x=0, l} = A_3|_{x=0, l}, \quad A_1|_{x=0} = A_{10}, \quad A_1|_{x=l-0} = A_1|_{x=l+0}. \quad (4)$$

Решение этой системы определяет структуру полей в резонаторе.

Аналогично могут быть получены уравнения, описывающие взаимодействие волн несоизмеримых частот в случае, когда система является резонатором для одной из них и согласована для других. Пусть на границу $x=0$ падает волна с частотой ω_2 и в системе выполняются условия возбуждения для волны с частотой ω_1 (см. рис. 1 б). Тогда стационарный процесс преобразования частоты «вверх» в рассматриваемой активно-реактивной системе (среде) при выполнении условий синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k(\omega_1) + k(\omega_2) = k(\omega_3) \quad (5)$$

можно описать с помощью такой системы уравнений*:

* В случае преобразования частоты «вниз» условия синхронизма по-прежнему имеют вид (5), только возбуждение системы происходит на частоте ω_3 . Уравнения для действительных амплитуд и фаз в этом случае аналогичны (6), отличие будет состоять в том, что слабое, соответствующее несинхронному взаимодействию, будет входить в правую часть третьего, а не первого, как в (6), уравнения системы, что соответствует замене $A_1 \rightleftharpoons A_3$.

$$\begin{aligned}
 A'_1 &= \mu \{-\sigma_1 A_2 A_3 \sin \Phi + g A_1 [1 - 3\alpha(A_1^2 + 2A_4^2)]\}, \\
 A'_2 &= -\mu \sigma_2 A_1 A_3 \sin \Phi, \\
 A'_3 &= \mu \sigma_3 A_1 A_2 \sin \Phi, \\
 A'_4 &= -\mu g A_4 [1 - 3\alpha(A_4^2 + 2A_1^2)], \\
 \Phi' &= \mu \left(\sigma_3 \frac{A_1 A_2}{A_3} - \sigma_2 \frac{A_1 A_3}{A_2} - \sigma_1 \frac{A_2 A_3}{A_1} \right) \cos \Phi,
 \end{aligned} \tag{6}$$

с граничными условиями

$$A_1|_{x=0, l} = A_4|_{x=0, l}, \quad A_2|_{x=0} = A_{20}, \quad A_3|_{x=0} = A_{30} \approx 0. \tag{7}$$

Здесь $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$, $\sigma_{1, 2, 3} = \frac{\bar{\sigma}_{1, 2, 3}}{v_{1, 2, 3}}$, $g = \frac{\bar{g}}{|v_1|}$, причем \bar{g} — коэффициент несинхронного взаимодействия, пропорциональный величине активной нелинейности, A_4 — амплитуда отраженной от границы $x = l$ волны, частота которой совпадает с ω_1 , а групповая скорость $v_4 = -v_1$.

2. Исследуем поведение решений системы (6) качественно. Очевидно, что фазовое пространство этой системы многолистно, в нем имеются поверхности, равновесные по фазе, $\Phi_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Движения на этих поверхностях устойчивы по отношению к фазовым возмущениям в области, где

$$\Delta = (\sigma_3 A_1^2 A_2^2 - \sigma_2 A_1^2 A_3^2 - \sigma_1 A_2^2 A_3^2) < 0,$$

и неустойчивы при $\Delta > 0$. На поверхностях $\Phi = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ (при $\sin \Phi = \pm 1$) система (6) имеет семь состояний равновесия, причем все они неустойчивы по отношению к амплитудным возмущениям, а поскольку на этих поверхностях система неустойчива и на бесконечности, то должна существовать ограниченная область, в которую входят все фазовые траектории. Другими словами, в системе существует периодическое (или квазипериодическое) движение. Наряду с этим, в рассматриваемой системе на поверхностях $\Phi_n = n\pi$ помимо неустойчивых состояний равновесия существует негрубое (типа «центр») состояние равновесия $\bar{A}_1^2 = \bar{A}_4^2 = \frac{1}{9\alpha}$; $\bar{A}_3^2 = \frac{\sigma_3}{9\alpha\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{A_2^2}}$. В этом случае в уравнениях (6) «зануля-

ются» все «синхронные» члены, что соответствует отсутствию параметрического взаимодействия, и фазовый портрет системы становится таким же, как в хорошо известном случае взаимодействия встречных волн в резонаторе с отражением на границах [6]. Как известно, в таком резонаторе, если его длина достаточно велика, помимо режима стоячих волн (которому соответствует негрубое состояние равновесия) могут существовать пространственно-неоднородные стационарные режимы. Для определения структуры полей таких режимов, а также для отыскания амплитуды периодического или квазипериодического режима на поверхностях $\Phi_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, найти которую аналитически при заданных граничных условиях не удастся, было проведено численное интегриро-

вание систем уравнений (3) и (6) на ЭВМ. Решение проводилось для системы радиодиапазона (см. [4]) при различных значениях параметров.

3. На рис. 2 представлены зависимости от x амплитуд огибающих взаимодействующих волн кратных частот A_i (x измеряется в единицах $\lambda = \frac{\lambda_a}{\mu}$, λ_a — длина волны той частоты, для которой выполнены условия возбуждения в резонаторе с заполнением). Они получены при решении системы уравнений (3) с граничными условиями (4) для значений параметров $\sigma_1 = 1,43$, $\sigma_2 = 2,5$, $g = 2,9$, $\alpha = 0,01$. Из уравнений (3) видно, что зависимость $A_2(x)$ должна содержать участки «быстрых»* и «медленных» движений. Действительно, при малых значениях амплитуд нелинейными членами в правых частях этих уравнений можно пренебречь по сравнению с линейными, что соответствует экспоненциальному нарастанию A_2 , — «медленное» движение, при достаточно же больших значениях амплитуды A_2 , наоборот, нелинейные члены существенно превышают линейные — система совершает «быстрое» движение. Чередование таких участков «медленных» и «быстрых» движений хорошо видно на рис. 2.

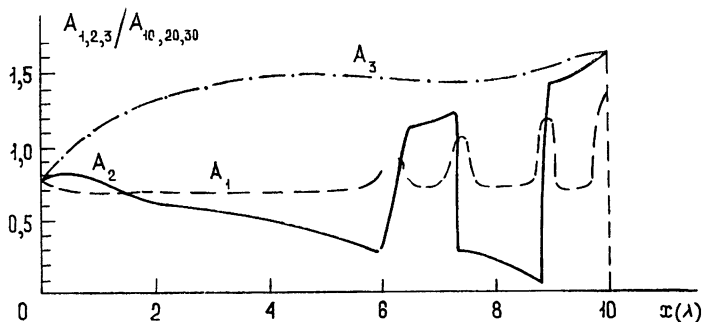


Рис. 2. Пространственная структура полей при взаимодействии волн кратных частот ω_1 и $\omega_2 = 2\omega_1$.

A_{10} — максимальные значения амплитуд, достижимые при раздельных процессах генерации и параметрического усиления.

Структура полей при взаимодействии волн несоизмеримых частот, полученная при решении системы уравнений (6) с граничными условиями (7), приведена на рис. 3 — 5. Краевая задача решалась методом линейного интерполирования и методом деления отрезка пополам [7]. Интегрирование системы уравнений проводилось для таких значений параметров:

- | | | | |
|--------------------------|------------------------|-----------------------|----------------|
| 1) $\sigma_1 = 0,7449$, | $\sigma_2 = 0,7489$, | $\sigma_3 = 3,9148$, | $g = 0,8939$; |
| 2) $\sigma_1 = 1,5357$, | $\sigma_2 = 1,4349$, | $\sigma_3 = 7,503$, | $g = 1,8429$; |
| 3) $\sigma_1 = 7,07$, | $\sigma_2 = 0,00365$, | $\sigma_3 = 4,73$, | $g = 4,2426$. |

Во всех этих случаях качественный характер решения (при длине резонатора $l = 10\lambda$) оказался одинаковым. Соответствующая этому решению структура поля в резонаторе приведена на рис. 3, 4. Периодические изменения амплитуд взаимодействующих волн соответствуют

* Следует иметь в виду, что речь идет о процессе, быстром по сравнению с временем экспоненциального нарастания.

циклу на поверхности постоянной фазы $\Phi = \frac{\pi}{2} (2n+1)$. Как следует из этих рисунков, длина волны огибающей, равная $\approx 0,8\lambda$, примерно на два порядка (при $\mu \sim 0,01$) превышает длину волны возбужденной

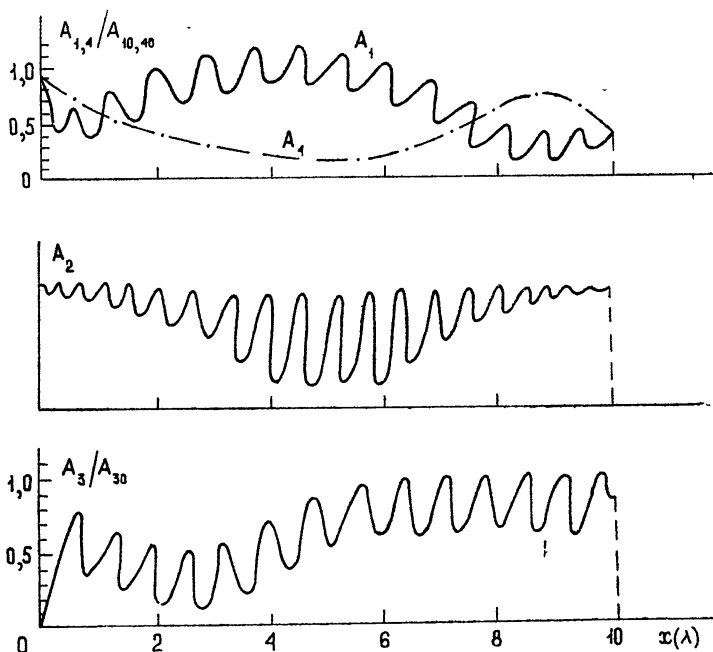


Рис. 3. Структура полей взаимодействующих волн несоизмеримых частот в случае, когда при $x = 0$ амплитуда активной волны A_1 мала по сравнению с уровнем стационарной генерации.

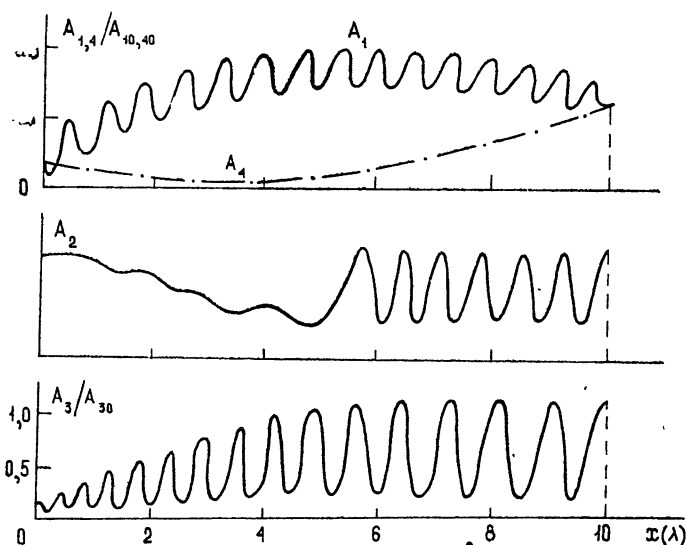


Рис. 4. Структура полей при взаимодействии волн несоизмеримых частот при амплитуде накачки A_1 , близкой к уровню стационарной генерации на границе $x = 0$.

моды λ_a . Режим биений амплитуд, который устанавливается в резонаторе, сопровождается скачками фазы, характер которых изображен на рис. 6 а—б*. Структура полей в резонаторе исследовалась в зависимости от граничных условий и от длины резонатора. Как и следовало ожидать [4], при больших (близких к уровню стационарной генерации) значениях амплитуды накачки A_1 при $x = 0$ (рис. 3) амплитуда волны A_3 достигает значений, определяемых коэффициентами нелинейного взаимодействия $\sigma_{1,2}$. Если же при $x = 0$ амплитуда активной волны достаточно мала (по сравнению с уровнем стационарной генерации), то, поскольку при взаимодействии энергия у активной волны отбирается непрерывно и влияние нелинейного поглощения вследствие этого уменьшается, значение поля волны A_3 превышает то максимальное значение A_{30} , которое может быть достигнуто при отдельных процессах генерации ω_1 и последующем параметрическом преобразовании ее в ω_3 , приблизительно на 20—25% (см. рис. 4). Таким образом, происходит эффективная передача энергии волне частоты ω_3 , превышающей собственную частоту генератора.

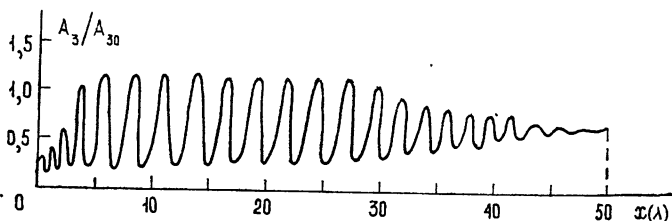


Рис. 5. Структура поля усиливаемой волны ω_3 в длинном резонаторе.

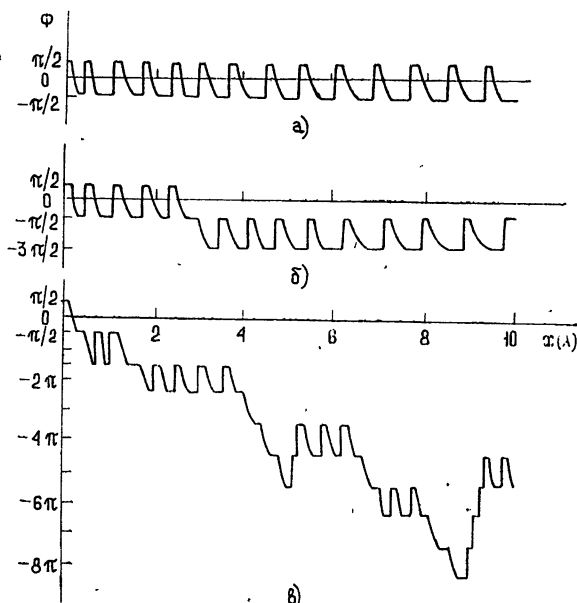


Рис. 6. Изменение разности фаз Φ взаимодействующих волн вдоль x в коротком резонаторе.

В результате анализа зависимости структуры полей от длины резонатора оказалось, что при длине резонатора до $l \sim 20\lambda$ структура поля

* Подобные режимы наблюдались экспериментально при исследовании «внутренних параметрических генераторов» (см., например, [5]).

качественно такая же, как и в коротком резонаторе ($l \sim 10\lambda$), если же длина резонатора превышает 25—30 λ , амплитуда усиливаемой волны начинает уменьшаться, приближаясь к некоторому постоянному уровню, при этом фаза Φ меняется вдоль x , как показано на рис. 7. Это связано с тем, что в длинном резонаторе вдали от границ решение представляет собой взаимодействие бегущих волн (подобно безграничной

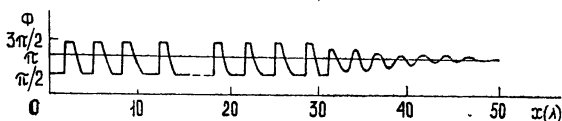


Рис. 7. Зависимость разности фаз Φ от координаты в длинном резонаторе.

или полуограниченной среде — ср. с [4]), вблизи же границ активная волна становится стоячей (с постоянной амплитудой), при этом, как было отмечено выше, параметрическое взаимодействие, а следовательно, и передача энергии высокочастотной волне прекращается ($\Phi = n\pi$). Таким образом, для получения наиболее эффективного преобразования при взаимодействии волн несоизмеримых частот длина резонатора не должна превышать некоторого критического значения, равного примерно двум-трем десяткам длин волн возбужденной частоты

$$\lambda = \frac{\lambda_a}{\mu}.$$

Авторы благодарны М. И. Рабиновичу за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, Письма в ЖЭТФ, 11, 421 (1970).
2. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, ФТТ, 13, 955 (1971).
3. Ю. К. Гольцова, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Физика плазмы, 1, № 4, 594 (1975).
4. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1502 (1972).
5. J. Falk, J. M. Yarborough, E. O. Ahtmann, IEEE, J. Quant. Electr., 7, № 7, 359 (1971).
6. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
7. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. 2, изд. Наука, М., 1966.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
7 июля 1975 г.

PECULIARITIES OF OPERATION OF WAVE PARAMETRIC DEVICES WITH INTERNAL PUMP

S. Ya. Vyshkind, T. N. Smirnova

The parametric interaction between passing and opposite waves in a resonator filled by a combined active-reactive medium is considered. The field structure in such a resonator is investigated when both multiple and nonmeasurable frequency waves interact. The results of numerical experiment are given. Similar systems are shown to be usable for generation and amplification of signals the frequency of which exceeds the natural frequency of the system.

УДК 538.574.4 : 530.18

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СИГНАЛОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

П. А. Пятаков, В. Е. Лямов

Рассматриваются свойства сигналов рассеянных волн при нелинейных взаимодействиях объемных и поверхностных волн, а также при взаимодействии этих волн с периодическим электрическим полем поверхностных электродов. Показано, что в зависимости от геометрии взаимодействия сигналом рассеянной волны является функция свертки или корреляции в преобразованном временном масштабе. При использовании в качестве одного из взаимодействующих сигналов δ -импульса рассеянная волна несет сигнал, сжатый или растянутый во времени в широком диапазоне изменения коэффициента компрессии. Анализируется также влияние ограниченности апертуры пучков взаимодействующих волн.

В последнее время значительно возрос интерес к исследованию нелинейных явлений, связанных с распространением и взаимодействием упругих волн в пьезоэлектрических кристаллах [1, 2]. Это связано с возможностями применения нелинейных акустических эффектов для усиления и генерации ультразвуковых волн [3], а также для создания устройств функциональной обработки радиосигналов [4]. С этой целью теоретически и экспериментально исследовались нелинейные взаимодействия объемных упругих волн [5] и, в гораздо большей степени, упругих поверхностных волн (УПВ) [6-8], причем основное внимание уделялось одномерному попутному или встречному взаимодействию волн [6-8]. Однако неколлинеарные взаимодействия как объемных, так и поверхностных волн содержат в себе ряд возможностей более сложных и, по-видимому, интересных для практики функциональных преобразований сигналов. В связи с этим представляет интерес рассмотреть возможности функциональных преобразований сигналов, открывающиеся в процессах рассеяния с одновременным участием объемных и поверхностных волн. Экспериментальные наблюдения взаимодействия объемных и поверхностных волн проводились в ниобате лития [9] и в изотропном алюминии [10]. Теоретический анализ взаимодействия объемных и поверхностных упругих волн в кристаллах с упругой нелинейностью проведен в работе авторов [11]. Там же рассмотрены некоторые возможности функционального преобразования сигналов, не имеющие прямых аналогов при других видах рассеяния.

Настоящая работа посвящена более полному исследованию свойств сигналов рассеянных волн, возникающих при нелинейном взаимодействии объемных и поверхностных упругих волн между собой и с электрическим полем, сформированным периодической системой электродов на поверхности пьезоэлектрического кристалла.

1. Для анализа взаимодействия поверхностной (частота ω') и объемной (частота ω'') волн, а также поверхностной волны с сигналом

электрического поля (частота ω'') поверхностных электродов, в большинстве практических случаев для пьезоэлектрических кристаллов достаточно рассмотреть нелинейные уравнения движения, уравнения электростатики и уравнения граничных условий (упругих и электрических) в первом приближении метода возмущений. В полупространстве со свободной границей (ось x_1 лежит в плоскости границы и совпадает

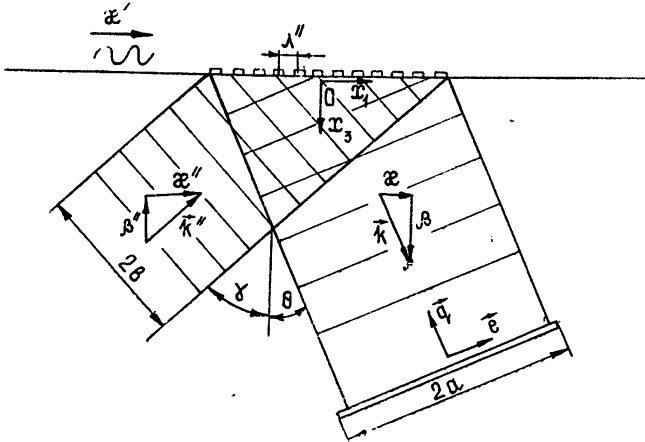


Рис. 1.

с направлением распространения поверхностной волны, ось x_3 направлена нормально к границе внутрь среды, начало координат принадлежит границе (рис. 1)) рассеянные волны будут описываться следующей системой уравнений*:

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} - e_{nlm} \Phi_{, nm} - c_{ijkl} U_{k, j l} = \sigma_{ij, j}^{NL}(\omega' \pm \omega''); \quad (1)$$

$$\varepsilon_{nm} \Phi_{, nm} - e_{ijl} U_{j, l} = -D_{i, l}^{NL}(\omega' \pm \omega''); \quad (2)$$

$$(c_{i3kl} U_{k, l} + e_{i3n} \Phi_{, n})|_{x_3=0} = -\sigma_{i3, 3}^{NL}(\omega' \pm \omega'')|_{x_3=0}; \quad (3)$$

$$[e_{3kl} U_{k, l} + (\varepsilon_{3n} - \delta_{3n}) \Phi_{, n}]|_{x_3=0} = D_m^{NL}(\omega' \pm \omega'')|_{x_3=0}, \quad (4)$$

где ρ —плотность среды (невозмущенная), U_i —компоненты вектора смещения, Φ —потенциал квазистатического электрического поля, c_{ijkl} —компоненты тензора модулей упругости второго порядка, e_{ikl} —компоненты линейного пьезоэлектрического тензора, ε_{ij} —компоненты тензора диэлектрической проницаемости. «Нелинейный» тензор напряжений σ^{NL} и «нелинейный» вектор индукции D^{NL} определяются соответствующими свертками модулей упругости второго и третьего порядков c^{III} и нелинейных пьезоэлектрических коэффициентов e и пропорциональны произведению амплитуд взаимодействующих поверхностной (S') и объемной (S'') волн или электрического поля электродов (S''). Для суммарной частоты

$$\sigma^{NL} \sim D^{NL} \sim S'S'' \exp\{i[(x' + x'')x_1 - (\omega' + \omega'')t]\} + \text{к. с.}$$

и пространственный период источников задается волновым числом $\kappa = \kappa' + \kappa''$; на разностной частоте σ^{NL} и D^{NL} пропорциональны

* Здесь для простоты опущены члены в правых частях, описывающие генерацию гармоник.

$$S'S''^* \exp\{i[(x' - x'')x_1 + (\omega' - \omega'')t]\} + \text{к. с.}$$

Здесь x' и x'' — проекции волновых векторов взаимодействующих волн на плоскость границы. В случае электрического поля поверхностных электродов $x'' = 2\pi/\lambda''$, где λ'' — пространственный период системы электродов.

Система уравнений (1) — (4) показывает, что процесс генерации волн комбинационных частот можно трактовать в первом приближении как излучение электроакустических волн распределенной по поверхности системой зарядов (4), напряжений (3) и распределенными в приповерхностном слое толщины $\lambda' = 2\pi/x'$ объемными зарядами (2) и силами (1). Все эти системы источников имеют вид бегущих волн с частотами $\omega' \pm \omega''$ и волновыми числами $x' \pm x''$ вдоль оси x_1 . Ясно, что если частота и проекция волнового числа на ось x_1 этих возмущений, вызванных нелинейным взаимодействием волн, совпадут с частотой ω и проекцией волнового вектора на границу x собственной волны свободного полупространства,

$$\omega = \omega' \pm \omega''; \tag{5}$$

$$x = x' \pm x'', \tag{6}$$

то будет иметь место генерация волн комбинационных частот $\omega' \pm \omega''$. Заметим, что вклад объемных сил и зарядов в случае $\omega'' \gg \omega'$ может значительно снизиться в результате интерференции волн, излученных слоями на различном удалении от границы. Однако всегда при выполнении условий (5) и (6) остается конечным вклад в излученную волну комбинационной частоты поверхностных напряжений и зарядов, который и определяет характер рассеяния. Неполные условия синхронизма (5), (6) приводят к отсутствию селективности по углам падения объемной волны (или относительно изменения x'' электрического поля электродов), т. е. к существенной широкополосности взаимодействия. Именно эти свойства определяют специфические возможности функциональных преобразований сигналов при рассматриваемых взаимодействиях.

2. Пусть на поверхность, по которой со скоростью v_R распространяется сигнал поверхностной волны

$$S' \left(t - \frac{x_1}{v_R} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S'(\omega') \exp \left[i \omega' \left(\frac{x_1}{v_R} - t \right) \right] d\omega', \tag{7}$$

в плоскости $x_1 0 x_3$ под углом γ со скоростью v'' падает сигнал объемной волны (рис. 1)

$$S'' \left(t - \frac{x_1 \sin \gamma}{v''} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S''(\omega'') \exp \left[i \omega'' \left(\frac{x_1 \sin \gamma}{v''} - t \right) \right] d\omega'', \tag{8}$$

где $\frac{\omega'}{v_R} = x'$ и $\frac{\omega''}{v''} \sin \gamma = x''$.

Соответствующие фурье-компоненты сигналов (7) и (8) при взаимодействии друг с другом согласно условиям (5) и (6) дадут сигнал рассеянной волны, например объемной волны суммарной частоты, который можно записать в виде

$$S(t, r) = \frac{1}{2\pi} \iint AS'(\omega') S''(\omega'') \exp\{i[(x' + x'')x_1 + \beta x_3 - (\omega' + \omega'')t]\} d\omega' d\omega'', \tag{9}$$

где $\beta = \left[\left(\frac{\omega' + \omega''}{v} \right)^2 - (\kappa' + \kappa'')^2 \right]^{1/2}$, v — скорость рассеянной объемной волны. Здесь и далее для простоты записи опускаем комплексно-сопряженное слагаемое, подразумевая его. В выражении (9) и везде далее под A понимается коэффициент пропорциональности, описывающий эффективность рассеяния. Коэффициент A сложным образом зависит от нелинейных упругих и пьезоэлектрических параметров среды, углов падения и рассеяния и от частот ω' и ω'' . В задачу настоящей работы не входит анализ этих зависимостей. В пределах изменения ω' и ω'' (в пределах полосы сигналов S' и S'') считаем $A = \text{const}$.

Рассмотрим сигнал, принимаемый преобразователем бесконечно широкой апертуры, нормаль к которому q составляет угол θ с осью x_3 (рис. 1):

$$G\left(t - \frac{r q}{v}\right) = \frac{A}{2\pi} \iiint S'(\omega') S''(\omega'') \exp \{ i [(\kappa' + \kappa'') x_1 + \beta x_3 - (\omega' + \omega'') t] \} d\omega' d\omega'' d(\mathbf{r}l), \quad (10)$$

где единичный вектор $l \perp q$ и лежит в плоскости рассеяния. Интегрируя (10) по $(\mathbf{r}l)$ и ω' , получим

$$G\left(t - \frac{r q}{v}\right) = \frac{A v_R v \cos \theta}{v - v_R \sin \theta} \int S'(\xi \omega'') S''(\omega'') \exp \left[i \left(\frac{r q}{v} - t \right) (\xi + 1) \omega'' \right] d\omega'', \quad (11)$$

где $\xi = \omega'/\omega''$ — корень уравнения $\mathbf{k}l = 0$, $\mathbf{k} = \{\alpha, \beta\}$.

Воспользовавшись теоремой о свертке, (11) можно переписать в более наглядном виде:

$$G(y) = \frac{A v_R v \cos \theta}{v - v_R \sin \theta} \int S'(z) S''[(\xi + 1)y - \xi z] dz, \quad (12)$$

где $y = t - \frac{r q}{v}$. Таким образом, с приемного преобразователя снимается сигнал, пропорциональный функции свертки, сжатой во времени в $(\xi + 1)$ раз, от сигналов $S'(t)$ и $S''(\xi t)$. Если в качестве сигнала $S''(t)$ использовать короткий импульс $S''(t) = \delta(t)$, то на преобразователе выделится сигнал, пропорциональный $S' \left[\left(1 + \frac{1}{\xi} \right) t \right]$, т.е. сигнал поверхностной волны, скомпрессированный во времени в $\mu = (1 + 1/\xi)$ раз.

Аналогично можно рассмотреть рассеянные сигналы при других видах взаимодействий. Результаты такого анализа приводятся в табл. 1, где через R и V условно обозначены поверхностная и объемная волны соответственно. Из табл. 1 видно, что рассеянные волны суммарных частот несут функцию свертки сигналов $S'(t)$ и $S''(\xi t)$ в преобразованном временном масштабе. Сигналы рассеянных волн разностных частот получаются заменой ξ на $-\xi$. В результате такой замены сигнал $S''(\xi t)$ обращается во времени, а $G(y)$ представляет собой корреляционную функцию.

Интересно проследить интервалы изменения ξ и коэффициента временной компрессии μ в зависимости от углов падения γ и рассеяния θ . Во взаимодействиях первого и второго типов ξ ограничено конечными пределами. Типы рассеяния 3-й и 4-й интересны тем, что $\xi \rightarrow 0$, когда $\sin \theta \rightarrow \frac{v \sin \gamma}{v''}$, при этом коэффициент компрессии $|\mu| \rightarrow \infty$. Вместе с тем амплитуда рассеянного сигнала возрастает в пределе до беско-

Таблица 1

	Тип взаимодействия	$\xi = \frac{\omega'}{\omega''}(\gamma, \theta)$	Сигнал рассеянной волны, $G(y)$	$G(y)$ при $S''(z) = \delta(z)$	μ
1	$R'(\omega') + R''(\omega'') = V(\omega' + \omega'')$	$\frac{v + v_R \sin \theta}{v - v_R \sin \theta}$	$\frac{Av_R v \cos \theta}{v - v_R \sin \theta} \int S'(z) S''[(\xi + 1)y - \xi z] dz$	$\frac{Av_R v \cos \theta}{v + v_R \sin \theta} S' \left[\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) y \right]$	$\frac{2v}{v + v_R \sin \theta}$
2	$R'(\omega') + V''(\omega'') = R(\omega'' - \omega')$	$\frac{v'' - v' \sin \gamma}{2v''}$	$\frac{Av_R}{2} \int S'(z) S''[\xi z + (1 - \xi)y] dz$	$\frac{Av'' v_R}{v'' - v_R \sin \gamma} S' \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) y \right]$	$-\frac{v + v_R \sin \gamma}{v - v_R \sin \gamma}$
3	$R'(\omega') + V''(\omega'') = V(\omega' + \omega'')$	$\xi > 0$	$\pm \left(\frac{v'' \sin \theta - v \sin \gamma}{v - v_R \sin \theta} \right) \frac{v_R}{v''} \pm \frac{Av_R v \cos \theta}{v - v_R \sin \theta} \int S'(z) S''[(\xi + 1)y - \xi z] dz$	$\frac{Av'' v \cos \theta}{v'' \sin \theta - v \sin \gamma} S' \left[\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) y \right]$	$\frac{v'' - v_R \sin \gamma}{v'' \sin \theta - v \sin \gamma}$
4	$R'(\omega') + V''(\omega'') = V(\omega'' - \omega')$	$\xi < 0$			

Таблица 2

	Тип взаимодействия	ξ_0	α	Сигнал рассеянной волны, $G(y)$	$G(y)$ при $S''(t) = \delta(z)$	$\mu = \frac{1}{\xi_0} \pm 1$	$\pm \frac{\alpha}{\xi_0}$
1	$R(\omega') + E(\omega'') = V(\omega' + \omega'')$	$\frac{v_R \sin \theta}{v - v_R \sin \theta}$	$\frac{x'' v_R v}{v - v_R \sin \theta}$	$\frac{Av_R v \cos \theta}{2(v - v_R \sin \theta)} \int S'(z) S''[y(\xi_0 + 1) - \xi_0 z] e^{\pm i\alpha(y-z)} dz$	$\frac{Av \cos \theta}{\sin \theta} S'(\mu y) e^{\pm i \frac{\alpha}{\xi_0} y}$	$\frac{v}{v_R \sin \theta}$	$\frac{x'' v}{\sin \theta}$
2	$R(\omega') + E(\omega'') = V(\omega' - \omega'')$	$-\frac{v_R \sin \theta}{v - v_R \sin \theta}$	$-\frac{x'' v_R v}{v - v_R \sin \theta}$	$\frac{Av_R v \cos \theta}{2(v - v_R \sin \theta)} \int S'(z) S''[\xi_0 z + (\xi_0 - 1)y] e^{\pm i\alpha(y+z)} dz$	$-\frac{Av \cos \theta}{2 \sin \theta} S'(\mu y) e^{\pm i \frac{\alpha}{\xi_0} y}$	$-\frac{v}{v_R \sin \theta}$	$-\frac{x'' v}{\sin \theta}$
3	$V(\omega') + E(\omega'') = R(\omega' + \omega'')$	$-\frac{v'}{v' - v_R \sin \gamma}$	$\frac{x'' v_R v'}{v' - v_R \sin \gamma}$	$\frac{Av' v_R}{2(v_R \sin \gamma - v')} \int S'(z) S''[y(\xi_0 + 1) - \xi_0 z] e^{\pm i\alpha(y-z)} dz$	$\frac{A}{2} v_R S'(\mu y) e^{\pm i \frac{\alpha}{\xi_0} y}$	$\frac{v_R \sin \gamma}{v'}$	$-x'' v_R$
4	$V(\omega') + E(\omega'') = R(\omega' - \omega'')$	$\frac{v'}{v' - v_R \sin \gamma}$	$-\frac{x'' v_R v'}{v' - v_R \sin \gamma}$	$\frac{Av' v_R}{(v_R \sin \gamma - v') 2} \int S'(z) S''[\xi_0 z + (\xi_0 - 1)y] e^{\pm i\alpha(y+z)} dz$	$-\frac{A}{2} v_R S'(\mu y) e^{\pm i \frac{\alpha}{\xi_0} y}$	$-\frac{v_R \sin \gamma}{v'}$	$x'' v_R$
5	$V(\omega') + E(\omega'') = V(\omega' + \omega'')$	$\frac{v' \sin \theta}{v \sin \gamma - v' \sin \theta}$	$\frac{x'' v v'}{v' \sin \theta - v \sin \gamma}$	$\frac{Av' v \cos \theta}{2(v \sin \gamma - v' \sin \theta)} \int S'(z) S''[y(\xi_0 + 1) - \xi_0 z] e^{\pm i\alpha(y-z)} dz$	$\frac{Av \cos \theta}{2 \sin \theta} S'(\mu y) e^{\pm i \frac{\alpha}{\xi_0} y}$	$\frac{v \sin \gamma}{v' \sin \theta}$	$\frac{x'' v}{\sin \theta}$
6	$V(\omega') + E(\omega'') = V(\omega' - \omega'')$	$\frac{v' \sin \theta}{v' \sin \theta - v \sin \gamma}$	$-\frac{x'' v v'}{v' \sin \theta - v \sin \gamma}$	$\frac{Av' v \cos \theta}{2(v \sin \gamma - v' \sin \theta)} \int S'(z) S''[\xi_0 z + (\xi_0 - 1)y] e^{\pm i\alpha(y+z)} dz$	$-\frac{Av \cos \theta}{2 \sin \theta} S'(\mu y) e^{\pm i \frac{\alpha}{\xi_0} y}$	$-\frac{v \sin \gamma}{v' \sin \theta}$	$\frac{x'' v}{\sin \theta}$

нечности. Таким образом, изменяя угол наклона θ приемного преобразователя, можно получать в различной степени сжатые во времени сигналы $S'(t)$ с амплитудой, тем большей, при том же A , чем больше μ . Коэффициент компрессии μ можно менять от величины порядка единицы до $\mu \rightarrow \pm \infty$. Величина μ сверху ограничена только техническими возможностями объемных преобразователей необходимой полосы и апертуры.

3. Практически более реальным и гибким способом компрессии сигнала во времени является, на наш взгляд, взаимодействие поверхностной и объемной волн с электрическим полем периодической системы электродов на границе. Рассмотрим случай, когда сигнал поверхностной волны (7) взаимодействует с периодическим (пространственный период $\lambda'' = \frac{2\pi}{x''}$) электрическим полем поверхностных электродов. Распределение поля можно представить в виде $S''(t, x_3) \cos x'' x_1$, а сигнал электрического поля в виде

$$S''(t, x_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int S''(\omega'') e^{-i\omega'' t} d\omega'' [\exp(i x'' x_1) + \exp(-i x'' x_1)], \quad (13)$$

где мы пренебрегаем вкладом пространственных гармоник $n x''$ (n — целое число), не удовлетворяющих условиям синхронизма.

Рассматриваемый случай отличается от предыдущего законом дисперсии для сигнала $S''(t)$. Если для объемных волн $x'' = \frac{\omega''}{v} \sin \gamma$, то теперь $x'' = \text{const}$ и не зависит от ω'' . Это обстоятельство приводит к изменению сигнала, снимаемого с выходного преобразователя бесконечной апертуры и с нормалью q (рис. 1):

$$G\left(t - \frac{rq}{v}\right) = \frac{A}{2} \frac{v_R v \cos \theta}{(v - v_R \sin \theta)} \int S'(\xi \omega'') S''(\omega'') \times \exp\left[-i \omega'' (1 + \xi) \left(t - \frac{qr}{v}\right)\right] d\omega'', \quad (14)$$

где $\xi = \frac{v_R \sin \theta}{v - v_R \sin \theta} \pm \frac{x'' v_R v}{\omega'' (v - v_R \sin \theta)}$.

Обозначим $\xi_0 = \frac{v_R \sin \theta}{v - v_R \sin \theta}$, $\alpha = \frac{x'' v_R v}{v - v_R \sin \theta}$. Воспользовавшись теоремой о свертке, (14) можно записать в виде

$$G(y) = \frac{A}{2} \frac{v_R v \cos \theta}{v - v_R \sin \theta} \int S'(z) S''[y(\xi_0 + 1) - \xi_0 z] \exp[\pm i \alpha (y - z)] dz. \quad (15)$$

Таким образом, преобразователь принимает сигнал, пропорциональный функции свертки, сжатый во времени в $(\xi_0 + 1)$ раз и сдвинутый по частоте на $\pm \alpha$ от сигналов $S'(t)$ и $S''(\xi_0 t) e^{\pm i \alpha t}$. Сдвиг по частоте зависит от пространственной периодичности электродов x'' и ориентации приемного преобразователя (угла θ), а коэффициент преобразования во времени — только от θ . В силу этого ξ_0 и α можно менять независимо,

Если в качестве $S''(t)$ использовать короткий импульс $S''(t) = \delta(t)$, то

$$G(y) \sim S' \left[\left(1 + \frac{1}{\xi_0} \right) y \right] \exp \left(\pm i \frac{\alpha}{\xi_0} y \right). \quad (16)$$

Выражение (16) показывает, что сигнал $S'(t)$ можно не только преобразовывать по временному масштабу, но и одновременно гетеродинировать, изменяя при этом относительную полосу сигнала. Отметим, что при временной компрессии, рассмотренной в предыдущем пункте, частота ω' и полоса сжатого сигнала $\Delta\omega'$ изменяются так, что $\frac{\Delta\omega'}{\omega'} = \text{const.}$

В табл. 2 приводятся результаты аналогичного рассмотрения различных типов возможных взаимодействий поля решетки электродов с поверхностными и объемными волнами, за исключением рассеяния типа $R(\omega') + E(\omega'') = R(\omega' \pm \omega'')$ (где $E(\omega'')$ условно обозначает сигнал электрического поля частоты ω''), рассмотренного в работе [6]. Сигналы разностной частоты $\omega'' - \omega'$ ($\omega'' > \omega'$) можно получить из табл. 2 комплексным сопряжением сигналов частоты $\omega' - \omega''$. Следует обратить внимание на пределы изменения коэффициента компрессии μ и на несущие частоты рассеянных сигналов при $S''(y) = \delta(y)$.

В 1-м и 2-м типах взаимодействия сигналы рассеянной волны могут быть как прямыми, так и обращенными во времени в зависимости от знака θ . Коэффициент компрессии μ меняется от v/v' при $\theta = 90^\circ$ до $\mu \rightarrow \pm \infty$ при $\theta \rightarrow \mp 0^\circ$. Несущая частота сигнала $G(y)$ зависит от θ и $x' \pm x''$. При $x'' \rightarrow x'$ на частотах, близких к ω' , можно получить большие коэффициенты компрессии. Сжатый во времени сигнал можно сформировать и на частоте ω' , принимая рассеянную объемную волну частоты $\omega'' - \omega' (\omega'' = 2\omega')$. В этом случае $\mu \rightarrow \infty$, когда $\theta \rightarrow 0$ и $x'' \rightarrow x'/2$. Здесь, как и выше при $A = \text{const}$, амплитуда сигнала возрастает с увеличением μ .

Взаимодействия третьего и четвертого типов дают прямые и обращенные во времени сигналы с коэффициентами компрессии от v_R/v' (угол падения $\gamma = 90^\circ$) до $\mu \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0^\circ$. Таким образом, преобразователем поверхностной волны можно принимать сигналы, растянутые во времени. Растянутый во времени сигнал $S'(t)$ на частоте ω' формируется, когда несущая частота $\omega'' = 2\omega'$ и $x'' - x' = \frac{\omega'}{v_R}$.

Наконец, пятый и шестой типы взаимодействия комбинируют в себе возможности первых четырех типов. Однако для практического осуществления эти типы взаимодействия, по-видимому, наименее удобны, так как требуют применения двух объемных, вообще говоря, широкоапертурных преобразователей.

4. До сих пор мы предполагали, что пучок объемной волны $S''(t, r)$ или периодическое распределение электродов, так же как и приемный преобразователь, имеют бесконечную апертуру. Рассмотрим влияние ограничения апертуры преобразователей. Пусть преобразователь имеет апертуру $2a$ в плоскости взаимодействия. Рассмотрим для примера второй тип взаимодействия из табл. 1. Так как диаграмма направленности такого преобразователя может быть описана как $\frac{2 \sin X a}{X}$, где X — проекция волнового вектора падающей волны на направление l , то на выходе устройства имеем сигнал

$$G(y) = A \iint \frac{1}{\frac{\partial(kq - X)}{\partial \omega'}} \frac{2 \sin Xa}{X} S'[\omega'' \xi(\omega'', X)] \times \\ \times S''(\omega'') \exp\{-i \omega'' [1 + \xi(\omega'', X)] y\} d\omega'' dX. \quad (17)$$

Таким образом, приемный преобразователь суммирует с весом $\frac{\sin Xa}{X}$ сигналы свертки с различными коэффициентами временного масштаба $\xi(X)$.

Для малых $X \ll \frac{\omega}{v}$ $\xi(\omega'', X) = \xi_0 + \xi_1 \frac{X}{\omega''}$, где $\xi_0 = \left(\frac{v'' \sin \theta - v \sin \gamma}{v - v_R \sin \theta} \right) \frac{v_R}{v''}$, $\xi_1 = \frac{\cos \theta v v_R}{v - v_R \sin \theta}$. Условием того, что в функции $[S'(\omega'' \xi)] \times$ $\times \left[\frac{\partial(kq - X)}{\partial \omega'} \right]^{-1}$ можно пренебречь зависимостью от X , является $\frac{\lambda' \cos \theta}{a} \ll 1$. Тогда, интегрируя (17) по X и применяя теорему о свертке, получим

$$G(y) = A \frac{v v_R \cos \theta}{v - v_R \sin \theta} F(y) \int S'(z) S''[(\xi_0 + 1)y - \xi z] dz, \quad (18)$$

где

$$F(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |y| \leq \frac{a(v - v_R \sin \theta)}{\cos \theta v_R v} \\ 0, & \text{если } |y| > \frac{a(v - v_R \sin \theta)}{\cos \theta v_R v} \end{cases}$$

Здесь начало отсчета времени соответствует моменту, когда центр сигнала $S'(t, x_1)$ совпадает с центром области границы, «обозреваемой» приемным преобразователем. Таким образом, если $a \gg \lambda' \cos \theta$, то преобразователь пропускает функцию свертки через «временное окно» шириной $\frac{2a(v - v_R \sin \theta)}{\cos \theta v_R v}$. Если сигнал $G(y)$ формируется в результате взаимо-

действия поверхностной волны и электрического поля на поверхности, то на выходе получим сигнал (16), умноженный на $F(y)$. Важно отметить, что условие неискаженности функции свертки $a \gg \lambda' \cos \theta$ не усиливается в сторону увеличения a при $\xi \rightarrow 0$.

Предполагая, что объемная волна $S''(y)$ представляет собой пучок с апертурой $2b$, и поступая аналогичным образом, найдем, что $G(y)$ равно сигналу (18), умноженному на

$$F'(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |y| \leq \frac{b(v - v_R \sin \theta)}{\cos \gamma v_R v} \\ 0, & \text{если } |y| > \frac{b(v - v_R \sin \theta)}{\cos \gamma v_R v} \end{cases} \quad (19)$$

при условии, что $b \gg \lambda' \cos \gamma$. Здесь предполагается, что центральные лучи падающего пучка объемной волны и принимаемого пересекаются на границе. Функцию временного ограничения при взаимодействии поверхностной волны с электрическим полем от решетки длиной $2b$ получим из (19), полагая $\gamma = 90^\circ$.

Таким образом, для того, чтобы принимать сигналы рассеянных волн, приведенные в табл. 1 и 2, необходимо, чтобы апертура приемного преобразователя и падающего пучка объемной волны или длина решетки электродов перекрывали на границе область пересечения сигналов в течение всего времени их взаимодействия. Апертуру объемного преобразователя нельзя увеличивать выше некоторого предела, определяемого условиями согласования преобразователя с внешними электрическими цепями. Выйти за пределы этого ограничения можно секционированием преобразователей и электрической развязкой отдельных секций.

Итак, описанный способ преобразования сочетает в себе три функции: временную компрессию, гетеродинирование и операцию временного ограничения.

К сожалению, нет достаточных экспериментальных данных о нелинейных константах, которые позволили бы рассчитать эффективность описанных функциональных устройств. Однако если предположить невысокую анизотропию эффективности рассмотренных взаимодействий, то эффективность преобразования свертки в процессах типа $R + E$ можно считать величиной того же порядка, как и в случае устройств свертки, работающих по невырожденной схеме [4]: билинейный фактор для LiNbO_3 —66 и 31 дБм с использованием внешней нелинейности. В процессах $V + E$ следует ожидать уменьшения эффективности рассеяния на величину порядка -20 дБ вследствие меньшей интенсивности объемных волн по сравнению с поверхностной. При работе в режиме компрессии использование короткого импульса дополнительно уменьшит билинейный фактор на величину $-20 \lg \frac{T}{t}$, где T — длительность сигнала $S'(t)$, t — длительность короткого импульса, имеющего полосу частот, необходимую для формирования сигнала $G(t)$ при $\mu = 1$. Для радиопульса $S'(t)$, полагая $t = T/10$, получим дополнительные потери равными -20 дБ. Для широкополосных сигналов потери увеличатся вследствие необходимости использовать более короткий импульс при той же T . Таким образом, ожидаемая эффективность устройств сравнительно невысока, но может оказаться приемлемой ввиду уникальности возможных функциональных преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. H. McMahon, JASA, 44, № 4, 1007 (1968).
2. Y. Nakagawa, K. Yamamoto, K. Shibayama, J. Appl. Phys., 45, № 7, 2817 (1974).
3. R. V. Thompson, C. F. Quate, J. Appl. Phys., 42, № 3, 9107 (1971).
4. D. P. Morgan, Ultrasonics, № 2, 74 (1974).
5. К. К. Ермилин, В. А. Красильников, В. Е. Лямов, В. М. Прохоров, ФТТ, 15, № 7, 2251 (1973).
6. M. Luukkala, J. Surakka, J. Appl. Phys., 43, № 6, 2510 (1972).
7. W. C. Wang, P. Das, IEEE Ultrasonics Sym. (Boston) Proc., 316 (1972).
8. L. A. Coldren, Appl. Phys. Lett., 25, № 9, 473 (1974).
9. П. Г. Иванов, ФТТ, 16, № 11, 3452 (1974).
10. И. Д. Гиц, Б. А. Конюхов, Акуст. ж., 20, № 6, 867 (1974).
11. П. А. Пятаков, В. Е. Лямов, ФТТ, 17, № 3, 752 (1975).

ON FUNCTIONAL SIGNAL TRANSFORMATIONS FOR NONLINEAR INTERACTION
BETWEEN VOLUME AND SURFACE ELASTIC WAVES IN PIEZO-ELECTRIC
CRYSTALS

P. A. Pyatakov, V. E. Lyamov

The features of signals of scattered waves at nonlinear interactions between volume and surface waves and when these waves interact with a periodic electric field of surface electrodes are considered. It is shown that depending on the interaction geometry the convolution or correlation function in a transformed time scale is a signal of the scattered wave. When using δ -pulse as one of the interacting signals, the scattered wave carries time-shortened or extended signal in a wide range of the compression coefficient variation. The effect of the aperture limitness of interacting wave beams is also analysed.

УДК 539 285

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ПРИСУТСТВИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ РАДИОЧАСТОТНЫХ ПОЛЕЙ

*И. Е. Гринько, А. Л. Коткин, А. Н. Кузнецов, Ю. М. Петухов,
Р. М. Умарходжаев, И. А. Шушпанов*

Теоретически и экспериментально изучено воздействие возмущающих радиочастотных полей на характеристики параметрического резонанса. Показано, что при приближении частоты возмущающего поля к частотам, кратным частоте модулирующего поля, имеет место аномальный сдвиг и уширение линий параметрического резонанса.

В последнее время резко возрос интерес к проблеме взаимодействия атомной системы с радиочастотными (РЧ) полями. Можно указать на ряд работ, в которых детально исследуется влияние вращающихся и осциллирующих полей на частоту парамагнитного резонанса [1-3], в частности рассчитывается сдвиг Блоха—Зигерта [4-6], модуляционный сдвиг Блоха—Зигерта [7]. В недавно вышедшей работе [8] исследуется аномальный сдвиг частоты параметрического резонанса, вызываемый РЧ полем, ориентированным перпендикулярно H_0 . Общим во всех этих работах является то, что проблема взаимодействия атомной системы с РЧ полями сводится к исследованию сдвига частоты, хотя, согласно общему положению, такое взаимодействие должно приводить и к уширению линии магнитного резонанса.

В настоящей работе теоретически и экспериментально исследуется влияние поперечного РЧ поля на характеристики параметрического резонанса [9]. Параметрический резонанс в атомной системе, находящейся в амплитудно-модулированном магнитном поле $H_0 + H_1 \cos \Omega t$ и подвергающейся оптической накачке циркулярно-поляризованным светом, направленным перпендикулярно этому полю, наблюдается по модуляции интенсивности поглощенного или рассеянного на частотах $p\Omega$ света, глубина которой изменяется резонансным образом, если $n\Omega = \gamma H_0$, где γ — гиромагнитное отношение атомов, p, n — целые числа. Характерной особенностью линий этого резонанса является отсутствие сдвига и уширения от амплитуды РЧ поля H_1 . Мы покажем, что возмущение атомной системы вторым РЧ полем $h_1(t)$, ориентированным перпендикулярно H_0 , приводит к сдвигу и уширению линий параметрического резонанса, зависящим от H_1 и h_1 .

Поведение атомной системы описывается уравнениями Блоха, которые в случае вращающегося РЧ поля $h_1(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{M} &= i(\omega_0 - \Omega_1 \cos \Omega t) M + i\omega_1 M_z e^{-i\omega t} - \delta(M - M_0), \\ \dot{M}_z &= -\delta M_z - \text{Im}(\omega_1 M e^{i\omega t}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $M = M_x + iM_y$, $\Omega_1 = \gamma H_1$, $\omega_1 = \gamma h_1$, $\omega_0 = -\gamma H_0$, δ — скорость релаксации намагниченности (принято, что скорости релаксации продольной и поперечных компонент одинаковы), M_0 — стационарная намагниченность, создаваемая в процессе оптической накачки.

Решение системы (1) будем производить методом последовательных приближений, считая ω_1 малой величиной. Ограничиваясь вторым приближением, получаем следующее (изменяющееся на частотах $p\Omega$) решение для поперечных компонент намагниченности:

$$M = \delta M_0 \sum_{np} J_n(\beta) J_{n-p}(\beta) \frac{e^{ip\Omega t}}{\delta + i(n\Omega - \omega_0)} \times \left\{ 1 - \frac{\omega_1^2}{2} \sum_q \frac{J_{n+q}^2(\beta)}{[\delta + i(n\Omega - \omega_0)] [\delta + i(\omega - q\Omega)]} \right\}, \quad (2)$$

где $J_n(\beta)$ — функция Бесселя первого рода порядка n , $\beta = \Omega_1/\Omega$. Второй член в фигурных скобках обязан возмущению, вносимому в атомную систему вторым РЧ полем $h_1(t)$. Предполагая, как было сделано в [10], что это возмущение приводит к сдвигу и уширению линий параметрического резонанса, перепишем (2) в виде

$$M = \delta M_0 \sum_{np} J_n(\beta) J_{n-p}(\beta) \frac{e^{ip\Omega t}}{(\delta + x_n) + i(n\Omega - \omega_0 + \varepsilon_n)}, \quad (3)$$

где x_n и ε_n представляют соответственно уширение и сдвиг линии n -го резонанса. Заметим, что вследствие малости x_n и ε_n по сравнению с δ (это следует из предположения о малости ω_1) выражение (3) может быть преобразовано следующим образом:

$$M = \delta M_0 \sum_{np} J_n(\beta) J_{n-p}(\beta) \frac{e^{ip\Omega t}}{\delta + i(n\Omega - \omega_0)} \left[1 - \frac{x_n + i\varepsilon_n}{\delta + i(n\Omega - \omega_0)} \right]. \quad (4)$$

Из сравнения выражений (2) и (4) находим

$$x_n = \frac{\omega_1^2}{2} \sum_q J_{n+q}^2(\beta) \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega - q\Omega)^2},$$

$$\varepsilon_n = \frac{\omega_1^2}{2} \sum_q J_{n+q}^2(\beta) \frac{q\Omega - \omega}{\delta^2 + (\omega - q\Omega)^2}. \quad (5)$$

Аналогичным образом получается выражение для уширения и сдвига линий параметрического резонанса, вызываемого линейно-поляризованным РЧ полем $h_1(t) = 2h_1 \cos \omega t$:

$$x_n = \frac{\omega_1^2}{2} \sum_q (J_{n-q} + J_{n+q})^2 \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega - q\Omega)^2},$$

$$\varepsilon_n = \frac{\omega_1^2}{2} \sum_q (J_{n-q}^2 - J_{n+q}^2) \frac{\omega - q\Omega}{\delta^2 + (\omega - q\Omega)^2}. \quad (6)$$

Теория проверялась экспериментально на системе оптически ориентированных атомов Hg^{199} , причем основное внимание было уделено исследованию уширения линий параметрического резонанса, обязанного возмущающему РЧ полю. Сигнал от Hg^{199} принимался на частоте Ω . В этом случае, согласно выражению (3); для $n=1$ и при точной

настройке в резонанс ($\Omega - \omega_0 + \varepsilon = 0$) должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{M_x}{M_x^{\text{PЧ}}} = f\left(\frac{\Omega_1}{\Omega}\right) \frac{\delta + x}{\delta}, \quad (7)$$

где $M_x^{\text{PЧ}}$ и M_x — амплитуды сигнала параметрического резонанса при наличии возмущающего РЧ поля и без него соответственно. Экспериментально выбирались такие значения амплитуд возмущающего РЧ поля, при которых $f(\Omega_1/\Omega) \approx 1$. На экспериментальной установке, ана-

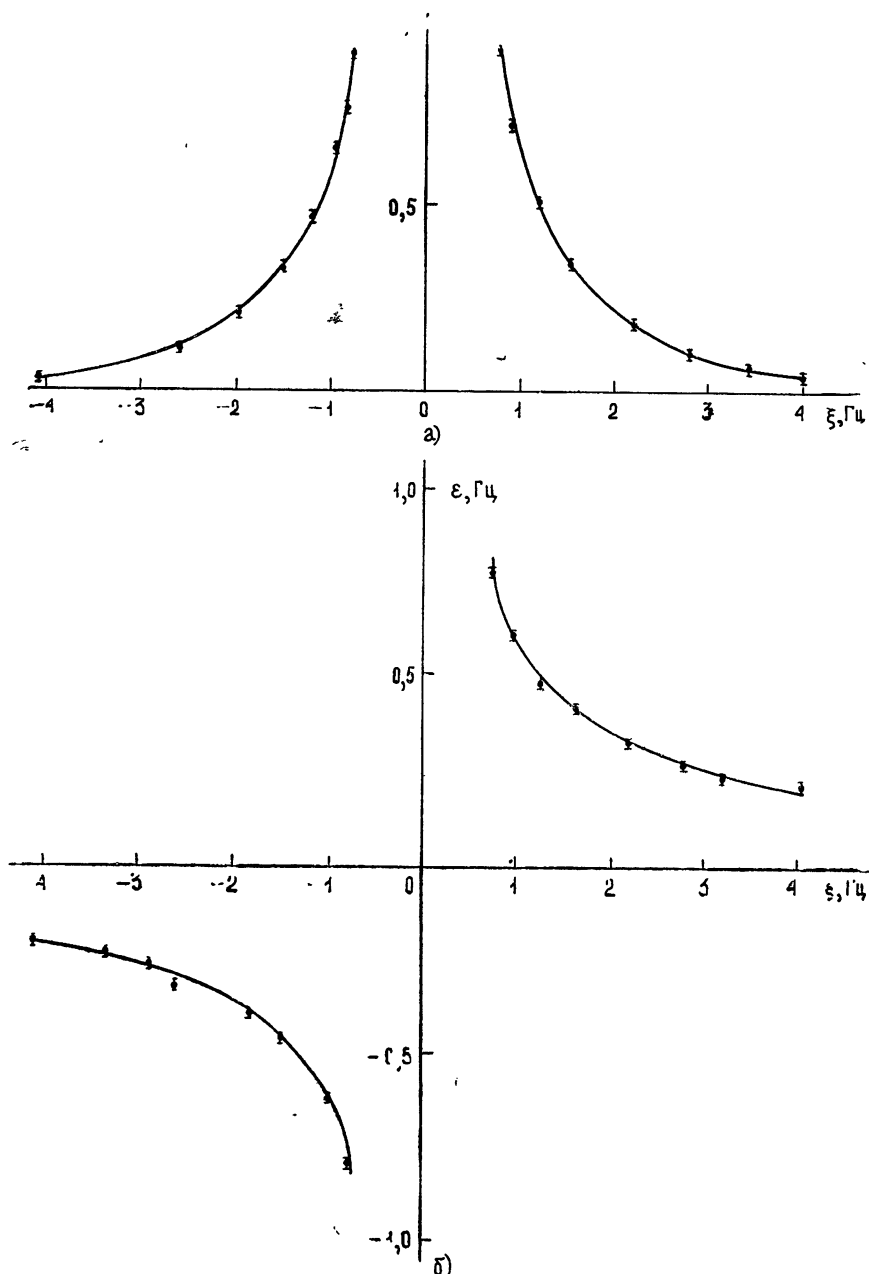


Рис. 1. Частотная зависимость фактора уширения (а) и сдвига (б).

логичной описанной в [8] проверялась зависимость κ и ϵ от параметров линейно-поляризованного поля, задаваемая выражениями (6).

На рис. 1 представлены зависимости сдвига частоты ϵ и фактора уширения κ/δ от расстройки $\xi = \frac{1}{2\pi}(\omega - \Omega)$ при постоянных значениях

амплитуд H_1 и h_1 . Минимальная величина расстройки ξ определяется шириной линии δ , внутри которой в системе наблюдалось взаимодействие частот Ω и ω , приводящее к модуляции сигнала на частоте ξ . Как следует из рисунков, экспериментальные кривые имеют характер кривых поглощения и дисперсии для κ и ϵ соответственно, что соответ-

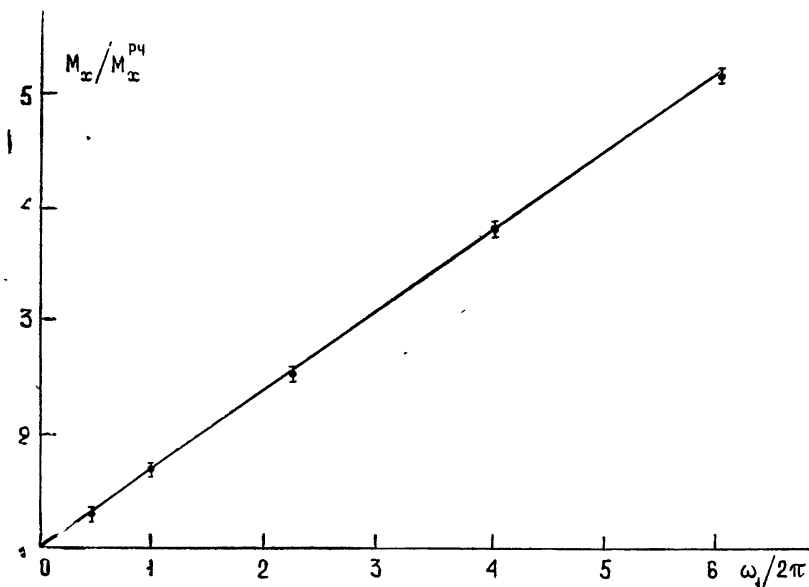


Рис. 2. Зависимость фактора уширения от амплитуды линейно-поляризованного возмущающего РЧ поля ($H_1 = \text{const}$).

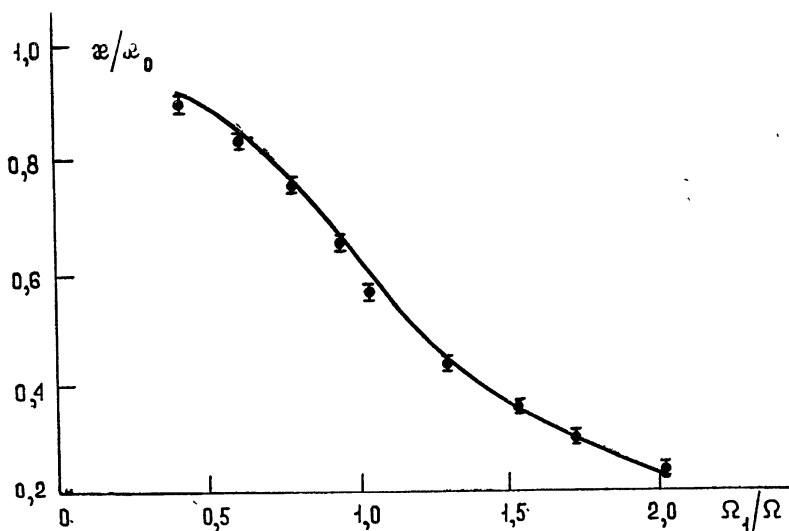


Рис. 3. Зависимость фактора уширения от амплитуды модулирующего РЧ поля;

$$h_1 = \text{const}, \quad \kappa_0 = \omega_1^2 / 2\delta, \quad \text{сплошная кривая} - (J_0 + J)^2.$$

ствуется теории. Таким образом, замеченное ранее [8] резкое уменьшение величины сигнала параметрического резонанса в области $|\omega - q\Omega| \leq \delta$ связано с аномальным уширением линии под действием возмущающего РЧ поля.

Знание отношения $M_x/M_x^{PЧ}$ как меры уширения линии в резонансе ($\Omega = \omega = \omega_0$) позволяет осуществить проверку зависимости χ от H_1 и h_1 при фиксированном значении одного из этих параметров. На рис. 2 и 3 представлены зависимости χ от H_1 при фиксированном значении h_1 и от h_1 при фиксированном значении H_1 соответственно. Квадратичная зависимость отношения сигналов от h_1 наблюдалась в достаточно широкой полосе изменения h_1 . Поведение $M_x/M_x^{PЧ}$ при изменении H_1 также хорошо описывается выражением (6).

Наконец, на рис. 4 представлены записи линии поглощения параметрического резонанса, полученные с помощью медленной развертки поля H_0 в окрестности резонанса при трех значениях амплитуды возмущающего РЧ поля h_1 .

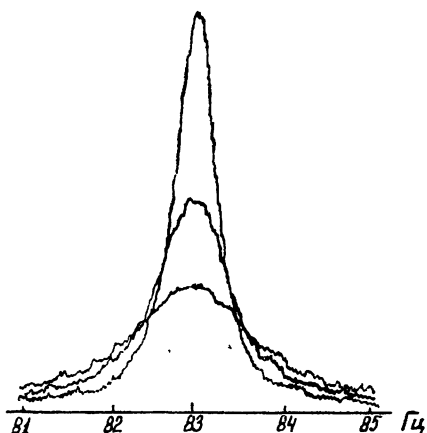


Рис. 4. Запись линии параметрического резонанса при наличии возмущающего РЧ поля:

$$\begin{aligned} 1 - h_1 &= 0, & 2 - h_1 &= 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Э}, \\ & & 3 - h_1 &= 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Э}. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. D. T. Pegg, J. Phys. B: Atom Mol. Phys., 6, 241 (1973).
2. M. Le Dourneuf, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, S. Haroche, C. R. Acad. Sc. Paris, 272, 107 (1971).
3. T. Yabuzaki, N. Tsukada, T. Ogawa, Japan J. Appl. Phys., 11, 1071 (1972).
4. P. Hannaford, D. T. Pegg, G. W. Series, J. Phys. B: Atom Mol. Phys., 6, 1212 (1973).
5. C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, J. Phys. B: Atom Mol. Phys., 6, 1214 (1973).
6. S. A. Swain, Phys. Lett., A46, 435 (1974).
7. Р. М. Умарходжаев, Вестник МГУ, № 4, 437 (1970).
8. О. А. Бартенев, В. В. Зверев, Л. Г. Малышев, Л. Н. Новиков, В. Г. Показаньев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1408 (1974).
9. Е. Б. Александров, О. Б. Константинов, В. И. Перель, В. А. Ходовой, ЖЭТФ, 45, 503 (1963).
10. В. И. Левит, Ю. М. Петухов, ЖТФ, 45, 1350 (1975).

Поступила в редакцию
30 декабря 1975 г.

PARAMETRIC RESONANCE IN THE PRESENCE OF TRANSVERSE DISTURBING RF FIELDS

I. E. Grin'ko, A. L. Kotkin, A. N. Kuznetsov, Yu. M. Petukhov,
R. M. Umarhodzhaev, I. A. Shushpanov

The action of disturbing RF fields on the parametric resonance characteristics is theoretically and experimentally investigated. It is shown that when the frequency of the disturbing field approaches those which are multiple to the modulating field frequency, the anomalous shift and broadening of the parametric resonance lines take place.

УДК 538 574.8

ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПУЧКА ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ РЕГУЛЯРНОЙ РЕФРАКЦИИ

Р. Х. Алмаев, А. Ф. Нерушев, Л. П. Семенов

Рассматривается влияние регулярной неоднородности диэлектрической проницаемости среды ϵ на флуктуационные характеристики пучка излучения. Для случая несимметричной расфокусирующей неоднородности в приближении δ -коррелированных по направлению распространения пучка флуктуаций ϵ получены выражения для флуктуационного уширения, среднего флуктуационного отклонения и дисперсии флуктуаций интенсивности пучка. Исследуется зависимость усредненных по апертуре приемника флуктуаций интенсивности от размера апертуры.

Воздействие излучением на аэрозоль может, при определенных условиях, приводить к образованию зон просветления [¹⁻⁴]. Тепловой механизм просветления среды приводит к перегревам в зоне просветления величиной порядка 0,01—1°C, что в свою очередь вызывает небольшие ($\sim 10^{-6} \div 10^{-8}$) регулярные изменения диэлектрической проницаемости среды ϵ . Пространственное распределение регулярной неоднородности диэлектрической проницаемости среды определяется, в частности, профилем излучения и движением среды (ветер, конвекция). Наличие оптической неоднородности в просветленной зоне является причиной регулярного изменения поперечных размеров (фокусировка, расфокусировка) и регулярного смещения оси зондирующего пучка, распространяющегося в такой зоне.

В работах [^{5, 6}] было показано, что регулярная квадратичная фокусирующая неоднородность диэлектрической проницаемости среды существенно уменьшает флуктуационное уширение зондирующего пучка и приводит к изменению поведения флуктуаций интенсивности, по сравнению со случаем однородной среды. Эти изменения особенно заметны на расстояниях, больших по сравнению с рефракционной длиной R_n , характеризующей регулярную неоднородность среды. В реальных условиях профили неоднородности диэлектрической проницаемости в просветленной зоне, как правило, несимметричны и для обычно используемого излучения гауссовой формы оказывают расфокусирующее действие. Поэтому представляет интерес рассмотреть влияние несимметричной расфокусирующей неоднородности диэлектрической проницаемости на флуктуационные характеристики зондирующего пучка.

Пусть по оси цилиндрической области радиуса a с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_0(1 + \epsilon_p(x, \rho) + \epsilon_f(x, \rho))$ распространяется пучок излучения начального радиуса a_0 и длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Здесь ϵ_p , ϵ_f — регулярная и флуктуирующая части ϵ , ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость однородной среды (в дальнейшем для удобства примем $\epsilon_0 = 1$), k — волновое число, x — координата вдоль оси цилиндрической области,

y, z — поперечные координаты $\rho = \rho(y, z)$. Флуктуации ϵ предполагаются однородными. Флуктуационные характеристики $\epsilon_\rho(x, \rho)$ и вид $\epsilon_\rho(x, \rho)$ считаются заданными, кроме того $|\epsilon_\rho| \ll 1$, $|\epsilon_p| \ll 1$.

1. Используя параболическое уравнение, для момента второго порядка электрического поля $\Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2)$ в приближении δ -коррелированных по x флуктуаций ϵ получим уравнение [7]

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_2(x, R, r)}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_R \nabla_r \tilde{\Gamma}_2 - \frac{ik}{2} \left[\epsilon_p \left(x, R + \frac{r}{2} \right) - \epsilon_p \left(x, R - \frac{r}{2} \right) \right] \tilde{\Gamma}_2 + \frac{k^2}{4} d(r) \tilde{\Gamma}_2 = 0, \quad (1)$$

которое для удобства записано в переменных $R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$, $r = \rho_1 - \rho_2$.

В уравнении (1) $d(r) = A(0) - A(r)$, $A(r) = \int B(x, r) dx$, $B(x, r)$ — функция корреляции флуктуаций ϵ . Будем решать уравнение (1), используя разложение ϵ_p вблизи оси цилиндра,

$$\begin{aligned} \epsilon_p(x, \rho) - \epsilon_p(x, 0) = & \delta_{11}(x) \frac{y}{a} + \delta_{21}(x) \frac{y^2}{2a^2} + \delta_{22}(x) \frac{z^2}{2a^2} + \\ & + \delta_{31}(x) \frac{y^3}{6a^3} + \delta_{32}(x) \frac{yz^2}{2a^3} \quad (\rho/a \ll 1), \end{aligned} \quad (2)$$

где δ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots$) — множители, которые определяются конкретным видом ϵ_p и пропорциональны разности ϵ_p на оси и краю пучка. В (2) профиль ϵ_p принят несимметричным по y . Такая несимметрия может быть вызвана, например, ветром, дующим вдоль оси y . Ограничимся в разложении ϵ_p тремя первыми членами. Условимся в дальнейшем среды с $\delta_{11} \neq 0$, $\delta_{21} = 0$, $\delta_{31} = 0$, среды с $\delta_{21} \neq 0$, $\delta_{11} = \delta_{31} = 0$ и среды с $\delta_{31} \neq 0$, $\delta_{11} = \delta_{21} = 0$ называть соответственно средами с линейной, квадратичной и кубичной неоднородностью ϵ . Отметим, что в случае пучков малого радиуса $a_0 \ll a$ это разложение оказывается пригодным для довольно значительных длин трасс.

Переходя в (1) к фурье-образу $\tilde{\Gamma}_2$ по R и учитывая (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{k} \kappa \nabla_r F + \frac{k}{2a^2} \left(\delta_{21} r_y \frac{\partial F}{\partial x_y} + \delta_{22} r_z \frac{\partial F}{\partial x_z} \right) + \frac{ik \delta_{11}}{2a} r_y F + \\ + \frac{k^2}{4} d(r) F + \frac{ik}{(2\pi)^2 4a^3} \int d^2 R \left[\frac{\delta_{31}}{3} \left(3r_y R_y^2 + \frac{r_y^3}{4} \right) + \right. \\ \left. + \delta_{32} \left(r_y R_z^2 + \frac{r_y r_z^2}{4} + 2r_z R_y R_z \right) \right] e^{-i\kappa R} \tilde{\Gamma}_2(x, R, r) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $F(x, \kappa, r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{\Gamma}_2(x, R, r) e^{-i\kappa R} d^2 R$.

Рассмотрим случай регулярно отклоняющей и расфокусирующей среды — $\delta_{11} \neq 0$, $\delta_{21} > 0$, $\delta_{31} = 0$ (случай среды с квадратичной фокусирующей неоднородностью ϵ — $\delta_{11} = 0$, $\delta_{21} < 0$, $\delta_{31} = 0$ — изучался в [5]). Для упрощения вычислений будем считать $\delta_{ij}(x) = \text{const}$ и $\delta_{21} = \delta_{22} = \delta_{23}$. Соответствующее решение уравнения (3) имеет вид

$$F(x, \kappa, r) = F\left(0, \kappa \operatorname{ch} \beta x - \beta k r \operatorname{sh} \beta x, r \operatorname{ch} \beta x - \frac{\kappa}{k\beta} \operatorname{sh} \beta x\right) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik\delta_1}{2a} \int_0^x \left(r_y \operatorname{ch} \beta \theta - \frac{\kappa_y}{k\beta} \operatorname{sh} \beta \theta \right) d\theta - \right. \\ \left. - \frac{k^2}{4} \int_0^x d \left(r \operatorname{ch} \beta \theta - \frac{\kappa}{k\beta} \operatorname{sh} \beta \theta \right) d\theta \right\}, \quad (4)$$

где $\beta^2 = \frac{\delta_2}{2a^2} = \frac{1}{R_H^2}$, R_H — характерная длина, на которой неоднородность просветленной зоны существенно сказывается на характеристиках зондирующего пучка, $F(0, \kappa, r)$ — значение $F(x, \kappa, r)$ на входе в среду, которое считается заданным.

Будем характеризовать отклонение пучка от первоначального направления на расстоянии x от входа излучения в среду усредненным положением центра тяжести пучка

$$\bar{y} = - \frac{i}{F(x, 0, 0)} \frac{\partial F(x, \kappa, 0)}{\partial \kappa_y} \Big|_{\kappa=0}, \quad (5)$$

а изменение поперечных размеров пучка за счет дифракционного, рефракционного и флуктуационного расплывания квадратом эффективного размера

$$r_{\text{эфф}}^2 = - \frac{\Delta_x F(x, \kappa, 0)|_{\kappa=0}}{F(x, 0, 0)} - \bar{y}^2. \quad (6)$$

Подставляя (4) в (6) и учитывая, что для турбулентных флуктуаций ϵ величина $d(r)$ ведет себя при $r \rightarrow 0$, как $A(0) \frac{r^2}{l_0^2}$, получим $r_{\text{эфф}}^2 = r_p^2 + r_\phi^2$, где r_p^2 — поперечник пучка в отсутствие флуктуаций, но с учетом регулярной рефракции, r_ϕ^2 — эффективное флуктуационное уширение пучка, l_0 — или радиус корреляции флуктуаций ϵ или внутренний масштаб турбулентности.

Вычисление \bar{y} показывает, что в рассматриваемом случае $\bar{y} = \bar{y}_p$, т. е. определяется лишь регулярной частью ϵ . Считая, что на входе в среду пучок имеет гауссову форму

$$\Gamma_2(0, \rho_1, \rho_2) = E_0^2 \exp \left\{ - \frac{\rho_1^2}{2a_0^2} - \frac{\rho_2^2}{2a_0^2} \right\},$$

для r_ϕ^2 получим следующее выражение:

$$r_\phi^2 = \frac{2\gamma}{k^2 \beta^2 l_0^2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2\beta x}{2\beta} - x \right), \quad (7)$$

где E_0^2 — интенсивность падающего излучения на оси пучка, $\gamma = \frac{A(0)k^2}{4}$ —

показатель рассеяния [7]. Из (7) следует, что наличие линейной неоднородности ϵ_p не влияет на флуктуационное уширение пучка. В пределе $\beta x \gg 1$ (7) принимает вид

$$r_{\phi}^2 = \frac{\gamma}{2k^2 \beta^3 l_0^2} \exp(2\beta x).$$

Для сравнения заметим, что при $\beta x \gg 1$ r_p^2 зависит от x аналогичным образом:

$$r_p^2 = \frac{(1 + k^2 \beta^2 a_0^4)}{4k^2 \beta^2 a_0^2} \exp(2\beta x).$$

При $\beta x \rightarrow 0$ (случай однородной среды) из (7) для флуктуационного уширения следует известное выражение:

$$r_{0\phi}^2 = \frac{4\gamma}{k^2 l_0^2} \frac{x^3}{3}. \quad (8)$$

Сопоставляя (7) и (8), можно заключить, что флуктуационное уширение пучка в однородной и неоднородной средах сильно различается на расстояниях $x > R_H$, а при $x \ll R_H$ неоднородность мало влияет на флуктуационное уширение и (7) переходит в (8). Из сравнения r_p^2 и r_{ϕ}^2 при $\beta x \gg 1$ видно, что при условии $\langle \varepsilon_{\phi}^2 \rangle \gg \frac{2\beta l_0}{k^2 a_0^2} (1 + k^2 \beta^2 a_0^4)$ (где $\langle \varepsilon_{\phi}^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуаций ε) флуктуационное уширение сравнимо с рефракционным и может превосходить последнее. Приведем некоторые численные оценки. Считая $\delta_2 \sim 10^{-6}$ (что соответствует перегревам в просветленной зоне $\sim 1^\circ\text{C}$ [8]), $\gamma = 10^{-5} \text{ см}^{-1}$, $a = 10 \text{ см}$, $l_0 = 0,1 \text{ см}$, $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$ ($\lambda \approx 0,63 \text{ мк}$), $a_0 = 0,5 \text{ см}$, $x = 3 \cdot 10^4 \text{ см}$, получим $R_H = 10^4 \text{ см}$, $r_{0\phi}^2 \approx 4 \text{ см}^2$, $r_{\phi}^2 \approx 20 \text{ см}^2$, $r_p^2 \approx 25 \text{ см}^2$. В атмосфере, где можно ожидать перегревы $0,01 - 0,1^\circ\text{C}$ и, следовательно, $\delta_2 \sim 10^{-7} \div 10^{-8}$, для $a \sim 10 \div 100 \text{ см}$ R_H будет порядка $10^5 - 10^6 \text{ см}$, и поэтому учет неоднородности ε просветленной зоны необходим на трассах длиной больше или порядка $1 - 10 \text{ км}$.

При решении уравнения (3) предполагалось $\delta_{21} = \delta_{22}$. Различие δ_{21} и δ_{22} , как нетрудно видеть, выразится в различии рефракционных длин R_H в плоскостях x, y и x, z . Это, в свою очередь, приведет к различной степени рефракционного и флуктуационного уширения в плоскостях x, y и x, z и, следовательно, к появлению эллиптичности сечения первоначально круглого зондирующего пучка, эксцентриситет которого растет с расстоянием.

Рассмотрим теперь уравнение (3) с учетом кубичной неоднородности $\delta_{31} \neq 0$, $\delta_{32} \neq 0$, $\delta_{33} \neq 0$. Уравнение (3) можно решить приближенно, воспользовавшись малостью кубического члена по сравнению с квадратичным ($\rho/a \ll 1$). С точностью до членов первого порядка малости получим

$$F(x, \alpha, r) = F_0(x, \alpha, r) + F_1(x, \alpha, r), \quad (9)$$

где $F_0(x, \alpha, r)$ — решение уравнения (3) при $\delta_3 = 0$ (см. (4)), а $F_1(x, \alpha, r)$ имеет вид

$$F_1(x, \alpha, r) = \int_0^x dx' G \left(x-x', \alpha \operatorname{ch} \beta x' - kr \beta \operatorname{sh} \beta x', r \operatorname{ch} \beta x' - \right. \\ \left. - \frac{x}{k\beta} \operatorname{sh} \beta x' \right) \exp \left[\frac{ik\delta_1}{2a} \int_0^{x'} \left(r_y \operatorname{ch} \beta \theta - \frac{x_y}{k\beta} \operatorname{sh} \beta \theta \right) d\theta - \right] \quad (10)$$

$$-\frac{k^2}{4} \int_0^{x'} d \left(r \operatorname{ch} \beta \theta - \frac{x}{k \beta} \operatorname{sh} \beta \theta \right) d \theta \Big];$$

$$G(x, x, r) = -\frac{ik}{(2\pi)^2 4a^3} \int d^3R \left[\frac{\delta_{31}}{3} \left(3r_y R_y^2 + \frac{r_y^3}{4} \right) + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \delta_{32} \left(r_y R_z^2 + 2r_z R_y R_z + \frac{r_y r_z^2}{4} \right) \right] e^{-ikR} \tilde{\Gamma}_{20}(x, R, r).$$

Решение (10) записано для случая $\delta_2 > 0$. При $\delta_2 < 0$ в (10) sh и ch заменяются на sin и cos .

Вычислим величину среднего флуктуационного смещения центра тяжести пучка. Подставляя (10) в (5), получим

$$\bar{y}_\Phi = \frac{\gamma(\delta_{31} + \delta_{32})}{24k^2 \beta^5 a^3 l_0^2} (\operatorname{sh} 2\beta x - 8\operatorname{sh} \beta x + 6\beta x). \tag{12}$$

Как видно из (14), величина \bar{y}_Φ отлична от нуля при $\delta_{3i} \neq 0$ и на больших расстояниях ($x \gg R_H$) нарастает экспоненциально:

$$\bar{y}_\Phi = \begin{cases} \frac{\gamma(\delta_{31} + \delta_{32})}{48k^2 \beta^5 a^3 l_0^2} \exp(2\beta x) & (\delta_2 > 0) \\ \frac{\gamma(\delta_{31} + \delta_{32})}{24k^2 a^3 l_0^2} \frac{x^5}{5} & (\delta_2 = 0) \end{cases}.$$

В фокусирующей среде при $\beta x \gg 1$ \bar{y}_Φ равно

$$\bar{y}_\Phi \approx \frac{\gamma(\delta_{31} + \delta_{32})}{4k^2 \beta^4 a^3 l_0^2} x. \tag{13}$$

Для вышеприведенных значений параметров при $x = 5 \cdot 10^4$ см получим $\bar{y}_\Phi = 10$ см, $\bar{y}_\Phi \approx 0,02$ см, т. е. среднее флуктуационное отклонение пучка в расфокусирующей среде значительно больше, чем в фокусирующей.

2. Перейдем теперь к вычислению функции корреляции флуктуаций интенсивности излучения и относительных флуктуаций интенсивности на оси пучка, распространяющегося в среде с $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_{3i} = 0$. Вычислим величину

$$u(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) - \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_3) \Gamma_2(x, \rho_2, \rho_4),$$

где $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ — момент четвертого порядка случайного поля $E(x, \rho)$. Уравнение для Γ_4 в приближении δ -коррелированных по x флуктуаций ϵ имеет вид, аналогичный полученному в [6]. Воспользовавшись малостью флуктуаций ϵ и принимая форму пучка на входе в среду гауссовой, а спектр флуктуаций ϵ в виде

$$\Phi_\epsilon(x) = \pi^{-3/2} \langle \epsilon_\Phi^2 \rangle l_0^3 \exp(-l_0^2 x^2),$$

получим для $u(x, R_1, r, 0, 0)$ выражение

$$u(x, R_1, r) = \frac{\sqrt{\pi} k^2 E_0^4 l_0 \langle \epsilon_\Phi^2 \rangle}{l^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2a_0^2 f} - \frac{2R_1^2}{a_0^2 f}\right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^x d\theta \left\{ \frac{1}{g} \exp \left[-\frac{r^2 f_1^2}{4l_0^2 f^2 g} \left(1 - \frac{4R_1^2}{r^2} \tilde{\gamma}^2 f_1^{-2} \operatorname{sh}^2 \beta \theta \right) \right] \right\} \times \\ & \times \cos \left(\frac{rR_1 \tilde{\gamma} f_1 \operatorname{sh} \beta \theta}{l_0^2 f^2 g} \right) - \frac{g}{\Psi} \exp \left(-\frac{r^2 f_1^2 g}{4l_0^2 f^2} \varphi_1 \right) \times \\ & \times \left[\cos \left(\frac{r^2 \tilde{\gamma} q_0^2 f_1^3}{4l_0^2 f^3} - \varphi_2 \right) + \frac{\tilde{\gamma} f_1 q_0^2}{f g} \operatorname{sh} \beta \theta \sin \left(\frac{r^2 \tilde{\gamma} q_0^2 f_1^3}{4l_0^2 f^3} - \varphi_2 \right) \right] \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\mathbf{R}_1 = (R_y + \bar{y}, R_z)$ — радиус-вектор в системе координат, которая смещается вместе с осью пучка (смещение пучка происходит в данном случае за счет регулярной линейной рефракции),

$$g = 1 + q^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta, \quad q^2 = q_0^2 \frac{\tilde{\gamma}^2}{f}, \quad q_0^2 = \frac{a_0^2}{l_0^2} > 1,$$

$$\tilde{\gamma}^2 = \frac{R_n^2}{k^2 a_0^4}, \quad f = \operatorname{ch}^2 \beta x + \tilde{\gamma}^2 \operatorname{sh}^2 \beta x,$$

$$f_1 = \operatorname{ch} \beta x \operatorname{ch} \beta (x - \theta) + \tilde{\gamma}^2 \operatorname{sh} \beta x \operatorname{sh} \beta (x - \theta),$$

$$\Psi = g^2 + q^4 \tilde{\gamma}^{-2} f_1^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\Psi} \left(1 - \frac{2q^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta}{g} - \frac{\tilde{\gamma}^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta}{f_1^2} \right),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\Psi} \left(1 + \frac{2q_0^2 g f}{f_1^2} - \frac{\tilde{\gamma}^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta}{f_1^2} \right).$$

Относительные флуктуации интенсивности на оси пучка $\sigma(x) = \frac{u(x)}{\Gamma_x^2(x)}$

легко получить, полагая в (22) $\mathbf{R}_1 = 0$ и $r = 0$,

$$\begin{aligned} \sigma(x) = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_\Phi^2 \rangle k^2 l_0 \int_0^x d\theta \left[\frac{1}{1 + q^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta} - \right. \\ \left. - \frac{1 + q^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta}{(1 + q^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta)^2 + q^4 \tilde{\gamma}^{-2} f_1^2 \operatorname{sh}^2 \beta \theta} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) оценка применимости используемого приближения выражается неравенством $x < 1/\sqrt{\pi} \langle \varepsilon_\Phi^2 \rangle k^2 l_0$. Рассмотрим некоторые частные случаи,

а) Случай слабой неоднородности, $R_n \gg ka_0^2$. В области $x \ll ka_0^2$ среду можно считать однородной, тогда для σ получается известное выражение [6]. В области $x \gg R_n$, когда неоднородность среды играет заметную роль, $\sigma(x)$ линейно возрастает с расстоянием,

$$\sigma(x) = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_\Phi^2 \rangle k^2 l_0 x. \quad (16)$$

Заметим, что в однородной среде при $x \gg ka_0^2$ флуктуации интенсивности также нарастают, но с меньшей производной, чем в (16).

б) Случай сильной неоднородности, $R_H \ll kl_0^2$. В области $x \gg R_H$ получим следующее выражение для σ :

$$\sigma(x) = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_{\Phi}^2 \rangle k^2 l_0 x \left(\frac{R_H^2}{4k^2 l_0^4} \right). \quad (17)$$

В обратном предельном случае $x \ll R_H$ σ ведет себя согласно формуле $\sigma = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_{\Phi}^2 \rangle \frac{x^3}{3l_0^3}$. На рис. 1 изображена зависимость σ от длины

трассы x для различных значений R_H . Кривая 1 соответствует случаю однородной среды $R_H \rightarrow \infty$, кривая 2 — случаю слабой неоднородности $R_H \geq ka_0^2$, кривая 3 — случаю сильной неоднородности $R_H \ll kl_0^2$. Как видно из рис. 1, при $x \gg R_H$ в слабо неоднородной среде значение σ выше, чем в однородной среде, а в сильно неоднородной среде, когда $kl_0^2 \leq x \leq ka_0^2$, значение σ меньше, чем в однородной среде.

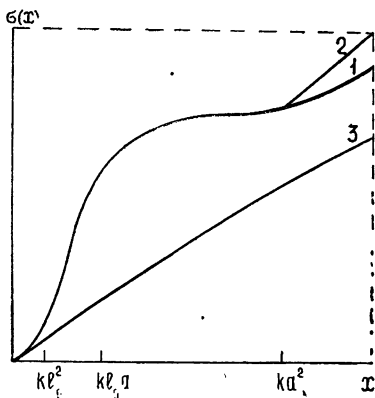


Рис. 1.

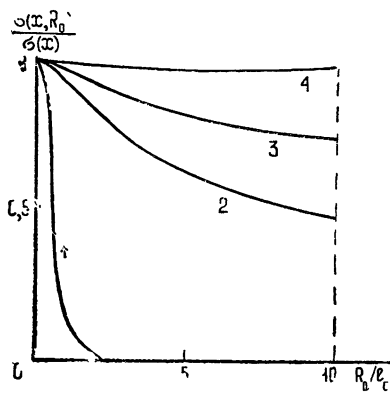


Рис. 2.

Значения σ , приведенные выше, получены для точечной приемной апертуры. Однако в экспериментах измерение σ проводится приемниками с конечными размерами апертуры, в связи с чем представляет интерес получить относительные флуктуации интенсивности, усредненные по площади апертуры,

$$\sigma(x, R_0) = \frac{\iint_S u(x, R, r) d^2 R d^2 r}{\left(\iint_S \Gamma_2(x, R, 0) d^2 R \right)^2}. \quad (18)$$

Усреднение проведем по площади круглой апертуры радиуса R_0 , считая $x \ll kl_0^2$ и $R_0 \ll a_0$.

а) В случае слабой неоднородности, $R_H \geq ka_0^2$, выполняется условие $x \ll R_H$ и среду можно считать однородной. При этом

$$\sigma(x, R_0) = \sqrt{\pi} \langle \varepsilon_{\Phi}^2 \rangle \frac{x^3}{3l_0^3} \left(1 - \frac{R_0^2}{2l_0^2} \right) e^{-R_0^2/l_0^2}. \quad (19)$$

б) В случае сильной неоднородности, $R_H \ll kl_0^2$ и $x \gg R_H$, получим,

$$\sigma(x, R_0) = \sqrt{\pi} k^2 l_0 \langle \varepsilon_{\Phi}^2 \rangle \frac{R_H^2}{4k^2 l_0^4} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{R_0^2}{l_0^2} e^{-2\beta\theta} \right\} d\theta. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что (19) и (20) переходят в соответствующие значения $\sigma(x)$ для точечной апертуры при $R_0 \rightarrow 0$.

На рис. 2 изображены кривые зависимости $\sigma(x, R_0)$ от R_0/l_0 при различных значениях R_H . Кривая 1 соответствует случаю однородной среды, $R_H \rightarrow \infty$, кривая 2 — случаю $\frac{x}{R_H} = 5$, кривая 3 — $\frac{x}{R_H} = 10$, кривая

4 — $\frac{x}{R_H} = 100$. Как видно из рис. 2, в однородной среде при $x < kl_0^2$ зна-

ние $\sigma(x, R_0)$ близко к $\sigma(x)$ для апертуры, размер которой значительно меньше l_0 . В среде с регулярной расфокусирующей рефракцией, на расстояниях, на которых неоднородность существенна, размер апертуры практически не влияет на значение $\sigma(x, R_0)$. Из этого следует, что в неоднородной расфокусирующей среде радиус корреляции флуктуаций интенсивности значительно превышает величину l_0 .

На основании вышеприведенных результатов можно заключить, что, в отличие от случая однородной среды, в среде с неоднородностью вида (3) при $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_{3i} \neq 0$ на расстояниях $x \gg R_H - 1\varepsilon$, 3) в слабо неоднородных средах флуктуации интенсивности на оси пучка возрастают, а в сильно неоднородных — уменьшаются, 4) зависимость флуктуаций интенсивности, усредненных по апертуре приемника, от размеров апертуры становится слабой. Кроме того, необходимо отметить, что вычисленные флуктуационные характеристики пучка не зависят от δ_1 (линейная неоднородность ε).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, Э. Н. Шумилов, Письма в ЖЭТФ, 14, вып. 4, 245 (1971).
2. В. И. Букатый, В. Е. Зуев, А. В. Кузиковский, С. С. Хмелевцов, Докл. АН СССР, 217, № 1, 52 (1974).
3. А. В. Коротин, Д. Е. Светогоров, Ю. С. Седунов, Л. П. Семенов, Докл. АН СССР, 220, № 4, 829 (1975).
4. G. J. Mullaney, W. H. Christiansen, D. A. Russel, AIAA, Paper № 69670 (1969).
5. В. В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1283 (1971).
6. В. В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1867 (1972).
7. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, вып. 6, 2106 (1969).
8. Н. К. Диденко, Н. К. Красковский, Л. П. Семенов, Труды ИЭМ, вып. 5, (43), 92 (1974).

Институт экспериментальной метеорологии

Поступила в редакцию
16 июня 1975 г.

FLUCTUATION CHARACTERISTICS OF RADIATION BEAM IN THE PRESENCE OF REGULAR REFRACTION

R. Kh. Almaev, A. F. Nerushev, L. P. Semenov

The influence of regular inhomogeneity of the medium dielectric permittivity on the fluctuation characteristics of the radiation beam is considered. For the case of asymmetrical dis-focusing inhomogeneity expressions are derived for the fluctuation broadening, the mean fluctuation deviation and the dispersion of the beam intensity fluctuations in the approximation of ε fluctuations δ -correlated in beam propagation direction. The dependence of intensity fluctuations averaged over the receiver aperture on the aperture size is investigated.

УДК 535.312

О ДИФФУЗИИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев

Выводится уравнение диффузии волнового пакета непосредственно из уравнений нестационарной геометрической оптики. Полученное уравнение используется для исследования эффектов параметрического взаимодействия волны со средой. Обсуждаются, в частности, механизмы, приводящие к сдвигу средней частоты фотона, распространяющегося в диспергирующей среде с пространственно-временными неоднородностями.

Теоретическое исследование распространения волн в случайно-неоднородных средах, с использованием уравнения диффузии, проводилось многими авторами (см., например, [1-10]). При этом влияние неоднородностей среды на распространение волн рассматривалось, как правило, лишь в квазистатическом приближении [1-8], не учитывающем изменения энергии волны. В то же время изменение параметров среды во времени приводит к параметрическому взаимодействию волны со средой [11, 12] и, следовательно, к изменению ее частоты и энергии.

В данной работе эффекты параметрического взаимодействия волны со случайной средой исследуются с помощью уравнения диффузии для плотности вероятности координат, локального волнового вектора и частоты волнового пакета, распространяющегося в диспергирующей среде с пространственно-временными неоднородностями. Попытка вывода уравнения диффузии волнового пакета в среде с пространственно-временными неоднородностями уже предпринималась в работах [9, 10]. Однако пренебрежение в них флуктуациями групповой скорости волны привело к неправильному учету параметрических эффектов.

Обычно при выводе аналогичных уравнений диффузии, исходные стохастические уравнения использовались лишь для подсчета коэффициентов уравнения Эйнштейна—Фоккера—Планка, интуитивно полагавшегося верным [2-6, 9, 10]. Кляцкиным и Татарским [7, 8], а также Келлером [4] было обращено внимание на непоследовательность такого подхода. В работах Кляцкина и Татарского было обосновано уравнение диффузии лучей в малоугловом квазистатическом приближении [7, 8].

Здесь приводится последовательный вывод уравнений диффузии волнового пакета непосредственно из исходных уравнений нестационарной геометрической оптики [12] и сделана попытка обосновать его применимость и тогда, когда малоугловое приближение несправедливо.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

1. В приближении геометрической оптики локальный волновой вектор \mathbf{k} и локальная частота ω волны, распространяющейся в среде со случайным, медленно меняющимся параметром $p(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяют уравнению эйконала [12]

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega, p). \quad (1.1)$$

Здесь $n^2(\omega, p)$ — показатель преломления. Следствием (1.1) являются уравнения для частоты ω , единичного вектора $l = k/k$ и координат r квазимонохроматического пакета волн [12]

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\omega, p) \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{dl}{dt} = G(\omega, p) [l[\nabla p l]], \quad \frac{dr}{dt} = v(\omega, p) l, \quad (1.2)$$

где

$$v(\omega, p) = c \left(\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} \right)_p^{-1}, \quad \Phi(\omega, p) = -\omega \frac{v}{c} \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_\omega,$$

$$G(\omega, p) = \frac{v}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)_\omega.$$

Для широкого класса задач можно разложить функции в правых частях уравнений (1.2) в ряд по малому параметру p , ограничиваясь квадратичными членами по p ,

$$\frac{d\omega}{dt} = (\Phi + \Phi'_p p) \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$\frac{dl}{dt} = (G + G'_p p) [l[\nabla p l]], \quad (1.3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \left(v + v'_p p + \frac{1}{2} v''_{pp} p^2 \right) l,$$

где $v \equiv v(\omega, 0)$, $v'_p \equiv \left. \frac{\partial v(\omega, p)}{\partial p} \right|_{p=0}$, $\Phi \equiv \Phi(\omega, 0)$ и т. д.

2. От системы (1.3) перейдем к уравнению для вероятностного распределения $W(\omega, l, r; t)$ частоты, единичного вектора l и координат квазимонохроматического пакета волн. Найдем вначале с учетом (1.3) уравнение для среднего от произвольной функции $\Psi(\omega, l, r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \Psi \rangle}{dt} - \langle (v l \nabla) \Psi \rangle &= \left\langle \left(\left[v'_p p + \frac{1}{2} v''_{pp} p^2 \right] l \nabla \right) \Psi \right\rangle + \\ &+ \left\langle (\Phi + \Phi'_p p) \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle + \langle (G + G'_p p) (l[\nabla p l]) \nabla_l \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Средние в правой части (1.4), в отличие от средних в левой, не замкнуты относительно искомой плотности вероятности W . Пользуясь близким к использованному в [13] методом, выразим их через средние, полностью определяющиеся W , а также корреляционной функцией параметра $p(r, t)$:

$$B(p, \tau) = \langle p(r + \rho, t + \tau) p(r, t) \rangle.$$

Мы предполагаем здесь и ниже, что флуктуации $p(r, t)$ стационарны и статистически однородны.

3. Рассмотрим процедуру замыкания на примере среднего, описывающего наиболее интересные эффекты параметрического взаимодействия волн со средой. Разложим усредняемую функцию в ряд Тейлора

по δr , $\delta \omega$ и δl — флуктуационным частям изменения координат, частоты и единичного вектора l на интервале $[t - \Delta, t]$. Учитывая члены не выше первой степени, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi(\omega) \frac{\partial \Psi(\omega, l, r)}{\partial \omega} \frac{\partial p(r, t)}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \Phi'_{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \frac{\partial p}{\partial t} \delta \omega \right\rangle + \left\langle \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} \delta r \right\rangle + \\ &+ \left\langle \Phi \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega^2} \delta \omega + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega \partial l} \delta l + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega \partial r} \delta r \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Значения функций в правой части (1.5) берутся при $\omega = \omega_0 \equiv \omega(t - \Delta)$, $l = l_0 \equiv l(t - \Delta)$, а по переменной r — в точке $r = r_0 \equiv r(t - \Delta) + v l_0 \Delta$, в силу того, что разложение в (1.5) идет только по флуктуационным добавкам к решению уравнений (1.3) на интервале $[t - \Delta, t]$. Очевидно, такое разложение правомерно, пока характерные масштабы функций Ψ , Φ , p по ω , l , r много меньше $\delta \omega$, δl , δr .

Следующее допущение состоит в том, что в решении уравнений (1.3) на интервале $[t - \Delta, t]$ мы оставляем только линейные по p члены:

$$\delta \omega \approx \Delta \omega = \Phi(\omega_0) \int_{t-\Delta}^t \frac{\partial p(r', t')}{\partial t'} dt', \quad (1.6)$$

$$\delta l \approx \Delta l = G(\omega_0) \int_{t-\Delta}^t [l_0 [\nabla p(r', t') l_0]] dt',$$

$$\begin{aligned} \delta r \approx \Delta r &= l_0 v'_p \int_{t-\Delta}^t p(r', t') dt' + l_0 v'_\omega \Phi \int_{t-\Delta}^t dt' \int_{t-\Delta}^{t'} \frac{\partial p(r'', t'')}{\partial t''} dt'' + \\ &+ G v \int_{t-\Delta}^t dt' \int_{t-\Delta}^{t'} [l_0 [\nabla p(r'', t'') l_0]] dt''. \end{aligned}$$

Здесь интегрирование ведется при $r' = r_0 + v(\omega_0) l_0(t' - t)$. Условия, при которых справедливы эти предположения, обсуждаются в дальнейшем.

Пусть $p(r, t)$ — случайное поле, для которого можно ввести время τ_0 и длину ρ_0 статистической зависимости, такие, что если $|t_1 - t_2| > \tau_0$ или $|r_1 - r_2| > \rho_0$, то $p(r_1, t_1)$ и $p(r_2, t_2)$ будут статистически независимы. Выберем в (1.6)

$$\Delta > 2 \min \{ \tau_0, \rho_0 / v \}, \quad (1.7)$$

тогда первое из средних в правой части (1.5) будет равно

$$\left\langle \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \right\rangle \left\langle \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Действительно, по принципу причинности ω_0 , l_0 , r_0 являются функционалами $p(r(s), s)$ при $s \leq t - \Delta$ и при $\Delta > 2\tau_0$; l_0 , ω_0 , r_0 статистически не зависят от значений параметра в момент времени t .

Если же $2\tau_0 < \Delta < 2\rho_0/v_0$, то мера их статистической зависимости определяется вероятностью самопересечения лучевой трубки радиусом

ρ_0 , примерно равной отношению объема этой трубки к объему сферы с радиусом порядка средней длины поворота луча на π . В среде с крупномасштабными неоднородностями и достаточно малыми флуктуациями показателя преломления эта статистическая зависимость пренебрежимо мала. А при слабом дополнительном условии, что время корреляции параметра p меньше среднего времени поворота луча на π , последнее условие приводит к строгой статистической независимости ω_0 , l_0 , r_0 и $p(r_0, t)$.

Запишем второе слагаемое в правой части (1.5) в виде

$$\left\langle \Phi_\omega \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \left\langle \Delta \omega \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle_0 \right\rangle.$$

Здесь $\langle \dots \rangle_0$ означают усреднение при условии, что ω_0 , r_0 , l_0 заданы, а внешние угловые скобки — усреднение по искомой плотности вероятности Ψ . Найдем вначале условное среднее. Используя (1.6), получим

$$\left\langle \Delta \omega \frac{\partial p}{\partial t} \right\rangle_0 = \Phi \int_{t-\Delta}^t \left\langle \frac{\partial p(r', t')}{\partial t'} \frac{\partial p(r_0, t)}{\partial t} \right\rangle_0 \Big|_{r'=r_0+v l_0(t'-t)} dt'.$$

Рассуждения, аналогичные сделанным выше, приводят к выводу, что если $t' - t < \Delta/2$, то $p(r', t')$, как и $p(r_0, t)$, статистически не зависит от ω_0 , l_0 , r_0 , поэтому можно заменить на этом интервале интегрирования условное среднее на безусловное:

$$\left\langle \frac{\partial p(r', t')}{\partial t'} \frac{\partial p(r_0, t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial^2 B(r_0 - r', t - t')}{\partial t' \partial t}. \quad (1.8)$$

Если же $t - t' > \Delta/2$, то $p(r_0, t)$ и $p(r', t')$ статистически независимы и, следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial p(r', t')}{\partial t'} \frac{\partial p(r_0, t)}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p(r', t')}{\partial t'} \right\rangle_0 \left\langle \frac{\partial p(r_0, t)}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Поскольку при этом и $B(p, \tau) = 0$, равенство (1.8) выполняется при всех t' . Таким образом, имеем

$$\left\langle \Phi_\omega \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \frac{\partial p}{\partial t} \Delta \omega \right\rangle = - \left\langle \Phi_\omega \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \Phi \int_0^\infty \frac{\partial^2 B(p, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{p=v l \tau} d\tau \right\rangle.$$

4. Точно так же, замыкая остальные средние в (1.5), а затем и в (1.4), перейдем к уравнению для $\langle \Psi \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \Psi \rangle}{dt} = & \left\langle v l_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} l_i l_j \left[(v'_p)^2 D_0 + v'_p \Phi \frac{d}{d\omega} v D_0 \right] \right\rangle + \\ & + \left\langle \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega^2} \Phi^2 D_{\tau\tau} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \left[\Phi \left(\frac{v'_p}{v} - \frac{2G}{v} \right) D_{\tau\tau} + \Phi \frac{d}{d\omega} \Phi D_{\tau\tau} \right] \right\rangle + \\ & + \left\langle DG \frac{\partial}{\partial l_i} \left(\delta_{ij} - \frac{l_i l_j}{l^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial l_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial \omega} \Phi l_i \frac{d}{d\omega} v D_\tau \right\rangle + \\ & + \left\langle \frac{\partial^2 \Psi}{\partial l_i \partial x_j} (\sigma_p^2 - D_\tau) \frac{G}{v l^2} (\delta_{ij} - l_i l_j) \right\rangle, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$V = \left\{ v + \frac{1}{2} v_{pp}'' \sigma_p^2 + \frac{(D_\tau - \sigma_p^2)}{v} [(v_p')^2 - 2Gv_p'] + \Phi \frac{d}{d\omega} v D_\tau \right\},$$

все средние которого замкнуты относительно плотности вероятности W , уравнение для которой мы ищем.

Уравнение (1.9) написано для случая изотропных флуктуаций параметра $\rho(\mathbf{r}, t)$, и его коэффициенты равны

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= B(0, 0), \quad D_0 = \int_0^\infty B(\rho, \tau) d\tau, \\ D_\tau &= - \int_0^\infty \frac{\partial B(\rho, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad D_{\tau\tau} = - \int_0^\infty \frac{\partial^2 B(\rho, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau, \\ D &= - \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \frac{\partial B(\rho, \tau)}{\partial \rho} d\tau, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где интегрирование ведется при $\rho = v(\omega) \tau$.

Воспользовавшись произвольностью функции $\Psi(\omega, l, \mathbf{r})$, перейдем от (1.9) к замкнутому уравнению для $W(\omega, l, \mathbf{r}; t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + V l_i \frac{\partial W}{\partial x_i} &= \left[(v_p')^2 D_0 + v_p' \Phi \frac{d}{d\omega} v D_0 \right] l_i l_j \frac{\partial W}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Phi^2 D_{\tau\tau} W - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\Phi \left(\frac{v_p'}{v} - \frac{2G}{v} \right) D_{\tau\tau} + \Phi \frac{d}{d\omega} \Phi D_{\tau\tau} \right] W + \\ + DG^2 \frac{\partial}{\partial l_i} \left(\delta_{ij} - \frac{l_i l_j}{l^2} \right) \frac{\partial W}{\partial l_j} + \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial x_i} \left(\Phi l_i \frac{d}{d\omega} v D_\tau \right) W + \\ + \frac{\partial^2}{\partial l_i \partial x_j} (\sigma_p^2 - D_\tau) \frac{G}{v l^2} (\delta_{ij} - l_i l_j) W. \end{aligned} \quad (1.11)$$

5. Вернемся к обсуждению условий применимости уравнения диффузии. При выводе его было сделано два главных допущения. Во-первых, разлагая незамкнутые средние в ряд Тейлора по $\delta\omega$, δl , $\delta \mathbf{r}$, мы отбросили все члены разложения выше первой степени. Во-вторых, мы пренебрегли различием между точным решением уравнений (1.3) $\delta_i \sim (\delta\omega, \delta l, \delta \mathbf{r})$ на интервале $[t - \Delta, t]$ и приближением $\Delta_i \sim (\Delta\omega, \Delta l, \Delta \mathbf{r})$, в котором оставлены только линейные по ρ члены.

Очевидно, что первое предположение справедливо, если масштабы изменения по ω , l , \mathbf{r} правых частей исходных уравнений (1.3), а также произвольной функции $\Psi(\omega, l, \mathbf{r})$ много больше $\delta\omega$, δl , $\delta \mathbf{r}$. С другой стороны, для перехода от равенств для средних к дифференциальному уравнению для W необходимо, в свою очередь, чтобы масштабы изменения произвольной функции были много меньше характерных масштабов изменения коэффициентов уравнения (1.10). Таким образом, для справедливости первого допущения и дальнейшего перехода от уравнения для средних к уравнению для Ψ необходимо выполнение неравенств

$$\delta_i \ll h_i \ll L_i, \quad |\delta \mathbf{r}| \ll \rho_0,$$

где h_i — характерные масштабы произвольной функции Ψ , L_i — масштабы изменения по ω , l правых частей уравнений (1.3).

Второе из сделанных предположений будет достаточно точным, если

$$|\delta_i - \Delta_i| \ll |\delta_i|.$$

Для практических оценок можно заменить последнее неравенство требованием малости следующего приближения метода возмущений по сравнению с линейным по ρ и записать его в виде

$$\frac{\Delta}{\tau_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \sigma_p \ll 1, \quad \frac{v \Delta}{\rho_0} \frac{G}{v} \sigma_p \ll 1.$$

Заметим, что все приведенные выше условия эквивалентны обычному в теории уравнений ЭФП требованию двухмасштабности, которое в нашем случае сводится к тому, чтобы характерное время диффузии частоты, вектора \mathbf{l} и координат фотона было много больше эффективного времени Δ изменения случайного поля $p(\mathbf{r}, t)$.

Условие $\delta_i \ll h_i$ ограничивает разрешающую способность, с которой мы можем определить вероятностное распределение W . Оно означает, что от равенств для средних удается перейти к уравнению для W , только если дисперсия этого распределения по ω , \mathbf{l} , \mathbf{r} много больше приращений частоты, вектора \mathbf{l} и координат за эффективное время корреляции Δ неоднородной среды. Другими словами, уравнение диффузии справедливо, когда не только характерные времена изменения ω , \mathbf{l} , \mathbf{r} , но и характерное время эволюции распределения W тоже много больше Δ .

К примеру, для среды без дисперсии имеем следующие ограничения на величину флуктуаций показателя преломления и характерные масштабы вероятностного распределения:

$$\sigma_p \ll 1, \quad h_\omega \gg \omega_0 \frac{\Delta}{\tau_0} \sigma_p,$$

$$h_l \gg \frac{v_0 \Delta}{\rho_0} \sigma_p, \quad h_r \gg \rho_0 \sigma_p,$$

причем

$$\frac{\Delta}{\tau_0}, \frac{v_0 \Delta}{\rho_0} \ll 1.$$

2. НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ПАКЕТОВ ВОЛН

1. Используем полученное выше уравнение диффузии для исследования некоторых статистических свойств пакетов волн, распространяющихся в случайной среде. В среде с чисто пространственными неоднородностями $D_\tau, D_{\tau\tau} = 0$ и частота волны не меняется. Уравнение (1.11) описывает в этом случае диффузию углов распространения и координат волнового пакета. В отличие от уравнений, найденных в [2-6], в (1.11) имеются диффузионные члены непосредственно по координатам, появившиеся из-за флуктуаций групповой скорости $v(\omega, p)$. Эти члены существенны для оценки удлинения импульса вдоль направления распространения.

2. Движение неоднородностей приводит к уменьшению времени пребывания фотона в области с постоянным градиентом показателя преломления и, вследствие этого, к уменьшению коэффициента диффузии по углам [11]. Пространственно-временные неоднородности

приводят также к диффузии частоты и сдвигу ее среднего [11]. При достаточно часто выполняющемся условии сохранения адиабатического инварианта [12], спектральная интенсивность волны $I_{\omega t}$ связана с W соотношением $I_{\omega t} \sim \omega W$. Следовательно, сдвиг средней частоты фотона соответствует изменению энергии импульса за счет параметрического взаимодействия поля с движущимися неоднородностями среды. Заметим, что из самого уравнения (1.11) и из условия сохранения адиабатического инварианта легко получить уравнение для спектральной интенсивности электромагнитной волны.

Найдем сдвиг средней частоты фотона. Из (1.9) имеем

$$\frac{d\langle \omega \rangle}{dt} = \left\langle \Phi \Phi' D_{\tau\tau} + \frac{v'_p}{v} \Phi D_{\tau\tau} + \Phi^2 \frac{d}{d\omega} D_{\tau\tau} - \frac{2\Phi G}{v} D_{\tau\tau} \right\rangle. \quad (2.1)$$

Как видно из (2.1), сдвиг средней частоты обусловлен, во-первых, явной зависимостью Φ от ω . Так, если $(\Phi^2)'_{\omega} > 0$, то эффективность случайных воздействий увеличивается с ростом частоты, что и приводит к сдвигу средней частоты фотона вверх. Второй механизм, приводящий к сдвигу средней частоты, обусловлен корреляцией между временем монотонного приращения частоты и знаком этого приращения. Она появляется, в первую очередь, из-за корреляций флуктуаций групповой скорости фотона с флуктуациями его частоты и описывается членом $v'_p \Phi D_{\tau\tau}/v$ в (2.1), а в диспергирующей среде еще и членом $\Phi^2 \frac{d}{d\omega} D_{\tau\tau}$. Последнее слагаемое в правой части (2.1) учитывает подобную корреляцию, связанную с флуктуациями направления распространения фотона.

3. Рассмотрим уравнение диффузии фотона в среде без дисперсии и в холодной изотропной плазме. Будем считать для простоты, что в начальный момент фотон с равной вероятностью может находиться в любой точке пространства.

Для среды без дисперсии $n(\omega, p) = \bar{n}(1 + p)$ и из (1.11) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D_{\tau\tau} \left[\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \omega^2 W - 4 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega W \right] + D \frac{c^2}{n^2} \Delta_{\theta\varphi} W, \quad (2.2)$$

здесь $\Delta_{\theta\varphi}$ — сферический лапласиан.

Решение (2.2) с начальными условиями

$$W(\omega, \theta, \varphi; 0) = \frac{\delta(\omega - \omega_0) \delta(\theta) \delta(\varphi)}{\sin \theta}$$

имеет вид

$$W(\omega, \theta; t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) \exp \left[-n(n+1) D \frac{c^2}{n^2} t \right] \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{4\pi \omega_0^2 D_{\tau\tau} t}} \exp \left[-2D_{\tau\tau} t - \frac{\left(\ln \frac{\omega}{\omega_0} - D_{\tau\tau} t \right)^2}{4D_{\tau\tau} t} \right],$$

где $P_n(s)$ — полиномы Лежандра. Из решения видно, что движение неоднородностей не изменяет угловую структуру поля, уменьшая лишь коэффициент диффузии по сравнению со средой с чисто пространственными неоднородностями [2-6]. Параметрическое взаимодействие приво-

дит к увеличению средней частоты фотона $\langle \omega \rangle = \omega_0 \exp(4D_{\tau\tau}t)$ и дисперсии распределения, а значит, и к увеличению средней энергии поля и уширению спектральной интенсивности.

В холодной изотропной плазме $n^2(\omega, p) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} (\bar{N}_e + \Delta N_e)$, e, m —заряд и масса электрона, N_e —концентрация электронов ($p \equiv \Delta N_e$). Согласно (1.11), уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \frac{D_{\tau\tau}}{\omega^2} W - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\omega^3} \left[\left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) D_{\tau\tau} + \omega \frac{d}{d\omega} D_{\tau\tau} \right] W + \frac{\gamma^2 c^2 D}{\omega^4 n^2} \Delta_{\theta\varphi} W, \quad (2.3)$$

где $\gamma = \frac{2\pi e^2}{m}$.

При условии, что частота волны много больше резонансной частоты плазмы $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m}}$, получим из (2.3)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma^2 D_{\tau\tau} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \frac{W}{\omega^2} + \frac{\gamma^2 c^2}{\omega^4} D \Delta_{\theta\varphi} W. \quad (2.4)$$

В этом случае параметрическое взаимодействие электромагнитной волны не изменяет среднюю частоту фотона. При условии сохранения адиабатического инварианта уравнение для спектральной интенсивности, следующее из (2.4), совпадает с приведенным в [14].

4. Обсудим в заключение особенности уравнения диффузии, описывающего параметрическое взаимодействие волны со средой с анизотропными неоднородностями. Диффузионные члены по частоте такого уравнения имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Phi^2 D_{\tau\tau} W - \frac{\partial^2}{\partial \omega} K W, \quad (2.5)$$

где

$$D_{\tau\tau} = - \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 B(\rho, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\rho_i = v l_i \tau} d\tau,$$

$$K = \frac{v'_p}{v} \Phi D_{\tau\tau} + \Phi \frac{d}{d\omega} \Phi D_{\tau\tau} - \Phi G v \int_0^{\infty} \tau \frac{\partial^3 B(\rho, \tau)}{\partial \tau \partial \rho_i \partial \rho_j} \Big|_{\rho_i = v l_i \tau} d\tau (\delta_{ij} - l_i l_j).$$

Пусть характерный масштаб неоднородностей среды вдоль направления распространения равен ρ_{\parallel} , а поперек — ρ_{\perp} . При $\rho_{\parallel} \gg \rho_{\perp}$ в K наиболее существенным становится последний член, приводящий вне зависимости от дисперсионных свойств среды к увеличению энергии поля. В обратном случае, $\rho_{\parallel} \ll \rho_{\perp}$, последний член можно отбросить и для рассмотрения параметрических эффектов использовать одномерную модель среды [15].

Авторы благодарны А. Н. Малахову за внимание к работе и В. И. Татарскому, Н. С. Степанову и В. И. Кляцкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
3. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 5—6, 34 (1958).
4. Д. Б. Келлер, сб. Гидродинамическая неустойчивость, изд. Мир, М., 1961.
5. В. М. Комисаров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 292 (1966).
16. С. Н. Ли, К. С. Уей, *Alta Frequenza*, 38, N. Speciale, 137 (1969).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 706 (1971).
8. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, № 4, 499 (1973).
9. M. P. Bertrand, *C. R. Acad. Sc., Paris*, 272, S. B-833 (1971).
0. M. P. Bertrand, *C. R. Acad. Sc., Paris*, 273, S. B-718 (1971).
11. В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 71 (1973).
12. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
13. Л. А. Чернов, *Акустический журнал*, 15, вып. 4, 594 (1969).
14. В. И. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1971.
15. С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 5, 724 (1975).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
31 января 1975 г.

DIFFUSION OF WAVE PACKETS IN A MEDIUM WITH SPATIALLY-TIME INHOMOGENEITIES

S. N. Gurbatov, A. I. Saichev

A wave packet diffusion equation is deduced directly from the nonstationary geometrical optics equations. The equation obtained is used to investigate the effect of the parametric wave interaction with a medium. In particular, the mechanisms responsible for the mean frequency shift of a photon propagating in a dispersive medium with spatially-time inhomogeneities are discussed.

УДК 535.2

О ЛАГРАНЖЕВОМ И ЭЙЛЕРОВОМ ОПИСАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СВЕТОВЫХ ВОЛН

А. Н. Малахов, А. И. Саичев

Получена система квазилинейных уравнений для углов распространения, расходимости и других параметров световой волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде, в малоугловом приближении геометрической оптики. Найдена связь между вероятностными распределениями параметров фиксированной лучевой трубки и световой волны в фиксированной точке. Показано, что, когда волна статистически однородна в поперечной плоскости, среднее от модуля расходимости фиксированной лучевой трубки равно среднему числу волн, приходящих в фиксированную точку пространства. Отмечено, что определение одноточечных статистических характеристик световой волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде, в диффузионном приближении сводится к нахождению статистических свойств конечномерного марковского процесса, компоненты которого удовлетворяют системе линейных стохастических уравнений.

Как известно (см., например, [1,2]), многие случайные волны могут быть рассмотрены с двух взаимно дополняющих позиций: с одной стороны, как поля, представляющие некоторые функции координат и времени, с другой — как совокупность «жидких частиц», лучей и т. д. Второе из указанных описаний случайных волн — лагранжево описание, получило широкое распространение в статистической теории света. Во многих работах статистические свойства световых волн анализируются с помощью уравнений диффузии лучей или волновых пакетов, на суперпозицию которых можно разбить световую волну [3-7]. Эйлерово описание статистических свойств световых и других аналогичных волн, при котором интересуются статистическими свойствами волн в данной точке и в данный момент времени, развивалось, например, в работах [8-10].

Интенсивность, углы распространения и другие параметры световой волны в общем случае гораздо проще определить вдоль фиксированного луча, чем в фиксированной точке пространства (см., например, [11]). Вместе с этим между эйлеровыми и лагранжевыми статистическими характеристиками световых, как и других, случайных волн, существуют достаточно простые связи, которые особенно упрощаются, если волна по некоторым направлениям статистически однородна. Установлению этой связи на примере световой волны, рассмотренной в малоугловом приближении геометрической оптики, и использованию ее для отыскания статистических свойств световых волн и посвящена настоящая статья.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

1. Как известно, фаза световой волны $S(x, \rho)$, распространяющейся в случайно-неоднородной среде, в малоугловом приближении геометрической оптики удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} S)^2 = \frac{k}{2} \varepsilon(x, \rho). \quad (1.1)$$

Здесь x — продольная, а $\rho = \{\rho_1, \rho_2\}$ — поперечные координаты, k — волновое число, ∇_{\perp} — градиент в поперечной плоскости, $\varepsilon(x, \rho)$ — флуктуации диэлектрической проницаемости.

Запишем на основании (1.1) уравнения для поперечных компонент локального волнового вектора $\mathbf{v} = \nabla_{\perp} S$ и $\theta = \mathbf{v}^2/k^2$ — квадрата угла отклонения локального волнового вектора от оси x :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) \mathbf{v} = \frac{k}{2} \nabla_{\perp} \varepsilon, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) \theta = \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp} \varepsilon).$$

Уравнениям (1.1), (1.2) эквивалентна следующая система характеристических уравнений:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{k}{2} \theta + \frac{k}{2} \varepsilon, \quad \frac{d\rho}{dx} = \frac{\mathbf{v}}{k}, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp} \varepsilon), \quad \frac{d\mathbf{v}}{dx} = \frac{k}{2} \nabla_{\perp} \varepsilon. \quad (1.3)$$

Эти уравнения — не только промежуточное звено, возникающее при решении уравнений (1.1), (1.2). Они представляют и большой самостоятельный интерес. Их физический смысл весьма прост. Они описывают изменение фазы, поперечных координат, углов к оси x и поперечных компонент локального волнового вектора фиксированной лучевой трубки. Именно они, а не уравнения (1.1), (1.2) в основном используются при изучении статистических свойств многократно рассеянных световых волн и являются исходными при лагранжевом описании [3–7]. Задачей же эйлерова описания в данном случае является определение статистических свойств и, в частности, вероятностных распределений случайных полей $S(x, \rho)$, $\mathbf{v}(x, \rho)$ в фиксированной точке (x, ρ) .

2. Рассмотрим еще одну физически важную характеристику световой волны $J(x, \rho) = \frac{\partial(\rho_1, \rho_2)}{\partial(\rho_{01}\rho_{02})}$ — расходимость поля лучей, равную якобиану перехода от эйлеровых к лучевым координатам в поперечной плоскости.

Уравнение для J получим, вспомнив, что, пока каустики отсутствуют, J обратно пропорциональна интенсивности плоской при $x = 0$, волны. Таким образом, из известного уравнения для интенсивности световой волны (см., например, [12]) следует уравнение для расходимости:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) J + L_1 + L_2 = 0. \quad (1.4)$$

Здесь обозначено:

$$L_{\alpha}(x, \rho) = -\frac{1}{k} J \frac{\partial^2 S(x, \rho)}{\partial \rho_{\alpha}^2}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Уравнение (1.4) не замкнуто из-за входящих в него полей L_1, L_2 . Чтобы получить замкнутую систему уравнений, дополним (1.4) еще четырьмя уравнениями для полей $L_{1,2}(x, \rho)$:

$$F(x, \rho) = \frac{J}{k^2} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial \rho_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \rho_2^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \right)^2 \right], \quad M(x, \rho) = \frac{1}{k} J \frac{\partial^2 S}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}.$$

Эти поля имеют прозрачный геометрический смысл, а именно $L = (L_1 + L_2)/2$ и F есть соответственно средняя и гауссова кривизна фазового фронта волны, домноженные на J , а M характеризует ориентацию главных направлений фазового фронта волны в данной точке (x, ρ) относительно эйлеровой системы координат $\{\rho_1, \rho_2\}$.

Комбинируя (1.2), (1.4), нетрудно найти уравнения для этих полей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{1,2}}{\partial x} + \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) L_{1,2} + F &= -\frac{1}{2} J \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_{1,2}^2}, \\ \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) M &= \frac{1}{2} J \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) F &= -\frac{1}{2} \left(L_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_2^2} + L_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1^2} + 2M \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перейдем от (1.4), (1.5) к характеристическим уравнениям, описывающим «тонкую структуру» лучевой трубки,

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx} + L_1 + L_2 &= 0, \quad \frac{dL_{1,2}}{dx} + F + \frac{1}{2} J \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_{1,2}^2} = 0, \\ \frac{dM}{dx} &= \frac{1}{2} J \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1 \partial \rho_2}, \quad \frac{dF}{dx} = -\frac{1}{2} \left(L_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_2^2} + L_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1^2} + 2M \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если первые и вторые производные $\varepsilon(x, \rho)$ по поперечным координатам — ограниченные функции, что мы и будем считать выполненным, то уравнения (1.3), (1.6) всюду удовлетворяют условиям Липшица и, следовательно, всегда существует единственное решение этих уравнений с граничными условиями

$$\begin{aligned} S(0) &= S(0, \rho_0), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \theta(0) = \theta(0, \rho_0), \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(0, \rho_0), \\ J(0) &= 1, \quad L_{1,2}(0) = L_{1,2}(0, \rho_0), \quad F(0) = F(0, \rho_0), \quad M(0) = M(0, \rho_0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

соответствующими одной из лучевых трубок, на которые можно разбить рассматриваемую световую волну.

Из анализа уравнений (1.6) следует, что и за каустиками J имеет смысл якобиана преобразования эйлеровых координат в лучевые. Чтобы показать это, необходимо исследовать решение уравнений в малых окрестностях каустик, где влияние неоднородностей среды несущественно. Поэтому для простоты разберем здесь только случай $\varepsilon \equiv 0$. При этом якобиан преобразования J , а также L и F известны:

$$J = \left(1 - \frac{x}{R_1}\right) \left(1 - \frac{x}{R_2}\right), \quad L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{x}{R_1 R_2}, \quad F = \frac{1}{R_1 R_2},$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны рассматриваемого луча при $x = 0$ и, как легко видеть, являются решениями уравнения (1.6).

2. О СВЯЗИ ЛАГРАНЖЕВА И ЭЙЛЕРОВА ОПИСАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН

1. Рассмотрим лагранжево вероятностное распределение расходимости и поперечных координат фиксированной лучевой трубки. Оно, по определению, равно

$$f_3[J, \rho; x | \rho_0] = \langle \delta[J - J(x | \rho_0)] \delta[\rho - R(x | \rho_0)] \rangle. \quad (2.1)$$

Здесь ρ_0 — поперечные координаты рассматриваемой лучевой трубки при $x = 0$, $J(x | \rho_0)$, $R(x | \rho_0)$ — соответственно расходимость и поперечные координаты данной трубки при $x > 0$

Проинтегрировав обе части тождества (2.1) по лучевым координатам ρ_0 , получим, очевидно,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f_3[J, \rho; x | \rho_0] d\rho_0 = \left\langle \sum_{n=1}^N \frac{1}{|J(x | \rho_{0n})|} \delta[J - J(x | \rho_{0n})] \right\rangle, \quad (2.2)$$

где $\rho_{01}, \dots, \rho_{0N}$ — корни уравнения $\rho = R(x | \rho_0)$. Физический смысл их прост (см., например, [11]). Это координаты при $x = 0$ тех лучей, которые попадают в точку (x, ρ) .

В общем случае число приходящих в данную точку лучей $N(x, \rho)$ случайно. Пусть вероятность прихода в эту точку N лучей равна $P(N; x, \rho)$. Тогда (2.2) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f_3[J, \rho; x | \rho_0] d\rho_0 = \frac{1}{|J|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x, \rho) \sum_{n=1}^N \langle \delta[J - J(x | \rho_{0n})] \rangle_N, \quad (2.3)$$

где $\langle \dots \rangle_N$ означает среднее, найденное при условии, что в точку (x, ρ) приходит N лучей, $J(x, \rho_{01}), \dots, J(x, \rho_{0N})$ — соответственно расходимости первой, ..., N -й лучевых трубок, приходящих в данную точку.

Но среднее

$$\langle \delta[J - J(x, \rho_{0n})] \rangle_N \equiv \omega_1[J; x, \rho | n, N],$$

по определению, равно одноточечному эйлерову вероятностному распределению расходимости n -го луча (волны), приходящего в данную точку при условии, что всего в эту точку приходит N лучей (волн). Поэтому (2.3) переходит в тождество

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f_3[J, \rho; x | \rho_0] d\rho_0 \equiv \frac{1}{|J|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x, \rho) \sum_{n=1}^N \omega_1[J; x, \rho | n, N],$$

связывающее вероятностное распределение параметров фиксированных лучевых трубок со статистическими свойствами световой волны в фиксированной точке пространства.

Аналогичные рассуждения ведут к следующей связи лагранжевой плотности вероятности всех введенных в первом параграфе параметров фиксированной лучевой трубки $f \equiv f[S, \nu, \theta, J, L_1, L_2, F, M, \rho; x | \rho_0]$ с соответствующими эйлеровыми вероятностными распределениями световых волн в фиксированной точке пространства:

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} f[S, \nu, \theta, J, L_1, L_2, F, M, \rho; x | \rho_0] d\rho_0 \equiv \\ & \equiv \frac{1}{|J|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x, \rho) \sum_{n=1}^N \omega[S, \nu, \theta, J, L_1, L_2, M, F; x, \rho | n, N]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. Заметим, что в приведенных выше рассуждениях нигде не использовалась специфика световых волн, и поэтому полученные здесь

тождества, связывающие лагранжевы и эйлеровы характеристики световых волн, легко обобщаются на любые другие волны. Рассмотрим в качестве дополнительного примера поле скоростей несжимаемой турбулентной жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Для нее J — якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым координатам тождественно равен единице, и, принимая во внимание, что эйлерово поле скоростей такой жидкости всегда однозначно, можно, по аналогии с формулой (2.4), записать

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f[\mathbf{v}, \mathbf{r}; t | \mathbf{r}_0] d\mathbf{r}_0 \equiv w[\mathbf{v}; \mathbf{r}, t],$$

где $f[\mathbf{v}, \mathbf{r}; t | \mathbf{r}_0]$ — лагранжево распределение скоростей и координат фиксированной жидкой частицы, находящейся в начальный момент времени в точке \mathbf{r}_0 , а $w[\mathbf{v}; \mathbf{r}, t]$ — одноточечное эйлерово вероятностное распределение поля скоростей в фиксированной точке пространства. Из последнего тождества как частный случай следует известный (см., например, [1]) вывод о том, что вероятностное распределение эйлерова поля скоростей несжимаемой статистически однородной жидкости в фиксированной точке пространства совпадает с вероятностным распределением скорости любой составляющей жидкость жидкой частицы.

3. Ниже для простоты мы подробно изучим лишь тот случай, когда неоднородности среды $\epsilon(x, \rho)$ и граничные условия световой волны статистически однородны в поперечной плоскости. Тогда плотность вероятности лучевой трубки f зависит от координат только, через разность $\rho - \rho_0$ и интеграл (2.4) представляет собой усреднение f по координатам. Поэтому равенство (2.4) примет в рассматриваемом случае вид

$$f_9[S, \mathbf{v}, \theta, J, L_1, L_2, M, F; \mathbf{x}] = \frac{1}{|J|} \sum_{N=1}^{\infty} P(N; \mathbf{x}) \times \quad (2.5)$$

$$\times \sum_{n=1}^N w[S, \mathbf{v}, \theta, J, L_1, L_2, M, F; \mathbf{x} | n, N].$$

Здесь f_9 — плотность вероятности величин $S, \mathbf{v}, \theta, J, L_1, L_2, M, F$, характеризующих некоторую лучевую трубку.

Пока каустики отсутствуют, (2.5) переходит в

$$w_9[S, \mathbf{v}, \theta, J, L_1, L_2, M, F; \mathbf{x}] = J f_9[S, \mathbf{v}, \theta, J, L_1, L_2, M, F; \mathbf{x}]. \quad (2.6)$$

Здесь w_9 — одноточечная эйлерова плотность вероятности полей $S(x, \rho), J(x, \rho)$ и т. д., характеризующих световую волну. Таким образом, для статистически однородной в поперечной плоскости волны ее эйлерова плотность вероятности однозначно связана с плотностью вероятности любой составляющей ее лучевой трубки. Из равенства (2.6) как частный случай следует полученное в работе [13] равенство, связывающее моменты J в фиксированной лучевой трубке и в фиксированной точке.

4. Вытекающая из формул (2.5), (2.6) возможность двоякой интерпретации плотности вероятности фиксированной лучевой трубки позволяет получить несколько полезных тождеств. Поскольку, например, f_9 есть плотность вероятности, нормированная на единицу, то, как видно из (2.5), всегда

$$\sum_{N=1}^{\infty} P(N; x) \sum_{n=1}^N \langle 1/|J| \rangle_{n, N} \equiv 1. \quad (2.7)$$

Скобки $\langle \dots \rangle_{n, N}$ означают усреднение с помощью $\omega[\dots | n, N]$. Но если $I(x, \rho)$ — интенсивность волны всюду в плоскости $x = 0$ равна единице, что мы и будем предполагать, то $1/|J| = I$. Поэтому, считая приходящие в одну точку волны некогерентными, так что их суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей этих волн, можно переписать последнее равенство так:

$$\langle I(x, \rho) \rangle = 1.$$

Оно выражает известный закон сохранения и служит косвенным доказательством того, что в приближении геометрической оптики волны, приходящие в одну точку, некогерентны.

Вместе с этим, среднее от модуля расходимости фиксированной лучевой трубки $\langle |J| \rangle_n$, вычисленное с помощью f_9 , равно, как следует из (2.5), среднему числу волн, приходящих в некоторую точку,

$$\langle |J| \rangle_n \equiv \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x) N \equiv \langle N(x, \rho) \rangle. \quad (2.8)$$

Вычислим еще среднюю расходимость лучевой трубки $\langle J \rangle_n$. Для этого заметим, что если в граничной плоскости поля $S(0, \rho)$, $J(0, \rho)$ и т. д. однозначны и непрерывны, то количество волн, приходящих в любую точку, за исключением точек меры нуль (точек каустик), будет нечетным. Причем для $(N - 1)/2$ из них J будет отрицательным, а для $(N + 1)/2$ — положительным. Таким образом, с учетом вышесказанного из (2.5) следует

$$\langle J \rangle_n = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x) \equiv 1. \quad (2.9)$$

Последний результат обобщает сделанный в работах [14, 15] вывод о сохранении средней площади многоугольников, вершинами которых служат точки пересечения фиксированных лучей поперечными плоскостями, если неоднородности среды дельта-коррелированы вдоль продольной координаты. Он также согласуется с выводом о сохранении в среднем площади фигуры, ограниченной гауссовым контуром [16].

3. УРАВНЕНИЕ ДИФFUЗИИ СВЕТОВЫХ ВОЛН

1. В предыдущем параграфе было показано, что, зная вероятностное распределение параметров фиксированной лучевой трубки, можно определить некоторые статистические свойства световой волны в фиксированной точке. В случае дельта-коррелированных вдоль x неоднородностей среды для вероятностного распределения лучевой трубки удастся получить замкнутое уравнение. Рассмотрим для простоты случай гауссовых неоднородностей среды с корреляционной функцией

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1) \varepsilon(x_1 + x, \rho_1 + \rho) \rangle = A[\rho] \delta(x), \quad (3.1)$$

$$A[\rho] = A - D\rho^2 + \frac{B}{4}\rho^4 - \dots$$

Тогда, исходя из уравнений (1.3), (1.6), можно найти уравнение диффузии для f :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{k} (v \nabla_{\perp}) f + \frac{k_{\alpha} \theta}{2 v_{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial S} - (L_1 + L_2) \frac{\partial f}{\partial J} - F \left(\frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \right) = \\
= \frac{k^2}{8} A \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{k^2}{4} D \frac{\partial^2 f}{\partial v_{\alpha}^2} + \frac{v_{\alpha}^2}{k^2} D \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + D \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left(v_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \\
+ \frac{3}{4} B J^2 \frac{\partial^2 f}{\partial L_{\alpha}^2} + \frac{1}{2} B J^2 \frac{\partial^2 f}{\partial L_1 \partial L_2} + \frac{1}{4} B J^2 \frac{\partial^2 f}{\partial M^2} + \\
+ B \left(\frac{3}{4} L_{\alpha}^2 + M^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial F^2} - B J \frac{\partial}{\partial M} \left(M \frac{\partial f}{\partial F} \right) + \\
+ \frac{B}{2} J (L_1 + 3L_2) \frac{\partial^2 f}{\partial F \partial L_1} + \frac{B}{2} J (L_2 + 3L_1) \frac{\partial^2 f}{\partial F \partial L_2} + \\
+ \frac{k}{2} D J \left(\frac{\partial^2 f}{\partial L_1 \partial S} + \frac{\partial^2 f}{\partial L_2 \partial S} \right) + \frac{k D}{2} (L_1 + L_2) \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial F}, \quad \alpha = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

О выводе подобных уравнений см., например, [6, 15].

2. Из уравнения (3.2) легко получить конечную замкнутую систему уравнений для любых моментов типа $\langle \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} S^{n_3} \theta^{n_4} v_1^{n_5} v_2^{n_6} J^{n_7} L_1^{n_8} L_2^{n_9} M^{n_{10}} F^{n_{11}} \rangle$, где $n_1, \dots, n_{11} = 0, 1, 2, \dots$. Выясним, с чем это связано. Оказывается, уравнение (3.2) можно еще интерпретировать как уравнение Эйнштейна—Фоккера—Планка для плотности вероятности одиннадцатимерного марковского процесса $\{\rho_1, \rho_2, S, \theta, v_1, v_2, J, L_1, L_2, M, F\}$, удовлетворяющего следующей системе стохастических уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dx} = \frac{k}{2} \theta + \frac{k}{2} \xi(x), \quad \frac{d\rho_{1,2}}{dx} = \frac{v_{1,2}}{k}, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{k} v_{\alpha} \beta_{\alpha}(x), \\
\frac{dv_{1,2}}{dx} = \frac{k}{2} \beta_{1,2}(x), \quad \frac{dJ}{dx} + L_1 + L_2 = 0, \quad \frac{dL_{1,2}}{dx} + F = \gamma_{1,2}(x) J, \\
\frac{dM}{dx} = \eta(x) J, \quad \frac{dF}{dx} = -\gamma(x) L_1 - \gamma_1(x) L_2 - 2\eta(x) M, \quad \alpha = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\xi(x)$, $\beta_{1,2}(x)$, $\gamma_{1,2}(x)$, $\eta(x)$ — гауссовы процессы с корреляционными функциями

$$\langle \xi(x) \xi(x + \tau) \rangle = A \delta(\tau),$$

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_1(x) \gamma_1(x + \tau) \rangle = \langle \gamma_2(x) \gamma_2(x + \tau) \rangle = 3 \langle \eta(x) \eta(x + \tau) \rangle = \\
= 3 \langle \gamma_1(x) \gamma_2(x + \tau) \rangle = \frac{3}{2} B \delta(\tau),
\end{aligned}$$

$$\langle \beta_1(x) \beta_1(x + \tau) \rangle = \langle \beta_2(x) \beta_2(x + \tau) \rangle = 2 \langle \xi(x) \gamma_{1,2}(x + \tau) \rangle = 2D \delta(\tau),$$

$$\langle \xi \beta \rangle = \langle \xi \eta \rangle = \langle \beta_1 \beta_2 \rangle = \langle \beta \eta \rangle = \langle \beta \gamma \rangle = \langle \eta \gamma \rangle \equiv 0.$$

Таким образом, определение статистических свойств световых волн в этом случае сводится к решению системы линейных стохастических уравнений (3.3). Именно это обстоятельство позволяет вывести замкнутые уравнения для вышеупомянутых средних. Отметим, что некоторые из этих моментов были найдены в работах [13, 17, 18].

3. Если в поперечной плоскости волна статистически однородна, а неоднородности среды изотропны, то удается вывести более простое чем (3.2), уравнение для плотности вероятности «естественных» параметров лучевой трубки S, θ, J, L, F , не зависящих от выбора координат в поперечной плоскости,

$$\Phi[S, \theta, J, L, F; x] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f[S, v, \theta, J, L_1, 2\Delta - L_1, F, M, \rho, x | \rho_0] d\rho dv dM dL_1.$$

Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{k}{2} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial S} - 2L \frac{\partial \Phi}{\partial J} - F \frac{\partial \Phi}{\partial L} = \frac{k^2}{8} A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2} + \frac{k}{2} DJ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial L \partial S} + \\ + kD\Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S \partial F} + D \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] + \frac{BJ^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial L^2} + 2BJ \frac{\partial}{\partial \Delta} \left[L \frac{\partial \Phi}{\partial F} \right] + \\ + 3BL^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F^2} - BJ \frac{\partial^2}{\partial F^2} [F \Phi]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что из него следуют еще более простые уравнения, позволяющие, например, определить вероятностные свойства фазы и углов прихода световых волн или флуктуаций расходимости лучевого поля, тесно связанных с флуктуациями интенсивности световой волны.

4. Важной физической характеристикой световой волны является среднее число волн, приходящих в фиксированную точку. Эта величина связана, очевидно, со статистикой каустик и, следовательно, с флуктуациями интенсивности световой волны [19]. Кроме того, по ней можно судить о том, до каких пор ψ_9 , определенную равенством (2.6), с достаточной степенью точности можно считать плотностью вероятности световой волны в фиксированной точке.

Вычислить среднее число волн довольно затруднительно. Однако некоторые его оценки удается сделать. Из неравенства Коши—Буняковского и из (2.8) следует, что

$$1 \leq \langle N(x, \rho) \rangle \leq \sqrt{\langle J^2 \rangle_L}. \quad (3.5)$$

Входящее сюда среднее $\langle J^2 \rangle_L$ легко найти с помощью (3.4). Для плоской при $x = 0$ волны это среднее было вычислено в [13]. Таким образом, воспользовавшись выражением, найденным в [13], получим, что в данном случае среднее число волн удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} 1 \leq \langle N(x, \rho) \rangle \leq \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{376}} \right) \left[\frac{1}{3} \exp(x_1 x) + \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{x_1 x}{2}\right) \right] \times \right. \\ \times \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_1 x \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{376}} \right) \left[\frac{1}{3} \exp(-x_2 x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \exp\left(\frac{x_2 x}{2}\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 x \right] \right\}^{1/2}, \quad x_{1,2} = \sqrt[3]{BV/376 \pm 14}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

5. Отдельно остановимся на флуктуациях расходимости в частном случае двумерной геометрической оптики, когда волна и неоднородности среды зависят только от продольной и одной поперечной координаты.

Если при этом волна статистически однородна в поперечной плоскости, то можно показать, что плотность вероятности J и $u = -2L$ в фиксированной лучевой трубке $-f_J[J, u; x]$ является решением уравнения

$$\frac{\partial f_J}{\partial x} + u \frac{\partial f_J}{\partial J} = \frac{b}{2} J^2 \frac{\partial^2 f_J}{\partial u^2}, \quad b = \frac{1}{4} \left. \frac{\partial^4 A[\rho]}{\partial \rho^4} \right|_{\rho=0}. \quad (3.7)$$

Это известное уравнение Эйнштейна—Фоккера—Планка для двумерного марковского процесса, удовлетворяющего следующему стохастическому уравнению (см., например, [7]):

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \gamma(x)J = 0, \quad \langle \gamma(x)\gamma(x + \tau) \rangle = b\delta(\tau). \quad (3.8)$$

Как и прежде, среднее от модуля $J(x)$, удовлетворяющего уравнению (3.8), равно среднему числу волн, приходящих в фиксированную точку.

6. Как уже говорилось, для моментов J в фиксированной лучевой трубке можно записать замкнутую систему простых уравнений. Выясним поэтому, как связаны эти легко вычисляющиеся моменты со статистическими свойствами световой волны в фиксированной точке. Согласно (2.5),

$$\langle J^m \rangle_n = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x) \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{J^m}{|J|} \right\rangle_{n, N}.$$

Последнее равенство в случае двумерной геометрической оптики нетрудно записать в терминах интенсивностей световых волн. Пронумеровав волны, приходящие в данную точку, в порядке возрастания углов прихода, получим:

$$\langle J^m \rangle_n = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x) \sum_{n=1}^N (-1)^{(n+1)m} \langle 1/|J^{m-1}| \rangle_{n, N}.$$

Здесь было учтено, что J при переходе через каустику меняет знак, и поэтому интенсивность волны связана с J равенством $J = (-1)^n/I$, где n — число каустик, через которые прошла лучевая трубка до рассматриваемой точки. Кроме того, здесь использовалось еще условие, что число волн, приходящих в любую точку, кроме точек меры нуль, нечетное; и если пронумеровать волны в порядке возрастания или убывания углов прихода их в данную точку, то нечетные номера имеют волны, составленные из лучевых трубок, прошедших через четное число каустик, а лучевые трубки из волн с четными номерами прошли нечетное число каустик.

Авторы благодарны В. И. Татарскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, изд. Наука, М., 1965.
2. А. С. Монин, Докл. АН СССР, 134, № 2, 304 (1960).
3. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 1, 34 (1958).
4. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
5. В. М. Комиссаров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 292 (1966).
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14,, № 5, 706 (1971).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, № 4, 500 (1973).
8. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974).
9. А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 7, 1025 (1974).

10. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 3 (9), 940 (1974).
11. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
12. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
13. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 6 (12), 2080 (1974).
14. Н. В. Зубарев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 310 (1973).
15. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).
16. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Теория вероятностей и ее применение, 14, 357 (1969).
17. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 897 (1972).
18. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 12, 1817 (1974).
19. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, вып. 3 (9), 789 (1968).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 января 1975 г.

LAGRANGIAN AND EILER DESCRIPTION OF STATISTICAL PROPERTIES OF LIGHT WAVES

A. N. Malakhov, A. I. Saichev

A set of quasi-linear equations is obtained in a small-angular geometrical optics approximation for propagation, divergence angles and other parameters of a light wave propagating in a randomly-inhomogeneous medium. The relation between probability distributions of parameters of a fixed ray tube and a light wave at the fixed point is found. It is shown that when the wave is statistically homogeneous in a transverse plane, the mean value of the divergence modulus of the fixed ray tube is equal to the mean number of waves coming to the fixed space point. It is noted that determination of single-point statistical characteristics of a light beam propagating in a randomly-inhomogeneous medium in the diffusion approximation is reduced to that of statistical features of the finite-dimensional Markov's process the components of which satisfy the set of linear stochastic equations.

УДК 535.4

РАСЧЕТЫ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ СПЕКТРОВ И ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ

А. М. Мартынов

Приведены результаты расчетов интенсивностей спектров при дифракции света на ультразвуке приближенными методами (упрощенная теория Рамана—Ната, решение Планка—Схоутена—Мертенса—Лероу, по методу Рытова и по теории малых возмущений) и путем численного интегрирования полной системы дифференциальных уравнений Рамана—Ната методом Рунге—Куты на ЭВМ (точное решение). Определены области, внутри которых интенсивности спектров, вычисленные по приближенным теориям, отличаются от их точных значений не более чем на 5%.

Известно, что при некоторых, вообще говоря, несущественных упрощениях в постановке задачи о дифракции света на ультразвуке ее решение можно описать через три безразмерных параметра [1]—волновой параметр $u = \frac{\pi \lambda z}{\Lambda^2}$, параметр Рамана—Ната $v = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta n}{n} z$ и приве-

денный угол падения световой волны $\gamma = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{бр}}$, где λ и Λ —длины волн света и ультразвука соответственно, Δn —амплитуда изменения показателя преломления среды, вызываемая акустической волной, относительно среднего значения n , φ —угол падения света, отсчитываемый от нормали к направлению распространения ультразвука, $\varphi_{бр}$ —брэгговский угол, $\sin \varphi_{бр} = \frac{\lambda}{2\Lambda}$. К настоящему времени получено несколько

приближенных решений для раман-натовской области значений волнового параметра $u < 1$ [1–5] и брэгговского дифракционного режима $u \gg 1$ [6, 7]. В промежуточной области значений волнового параметра $u \sim 1$, которая представляет большой интерес для ряда современных прикладных задач, интенсивности спектров вычисляются сложными методами [8–15]. В связи со значительными затратами машинного времени на точные расчеты [12] представляется актуальным исследовать границы применимости приближенных решений. В литературе обсуждался вопрос о границах применения упрощенной теории Рамана—Ната [1, 16] и решений Рытова [1], но с качественно-физических, а не с математически-количественных позиций в отношении рассчитываемых по ним величин интенсивностей спектров. Фактически не изучались границы применимости метода малых возмущений [1, 14], перспективного с точки зрения затрат машинного времени на численные расчеты спектральных функций светового поля дифракции.

В данной работе сообщаются результаты по определению областей на плоскости параметров v и u , в которых значения интенсивностей спектров, рассчитанные по упрощенным теориям и по методу малых возмущений, отличаются от точных значений не более чем на 5%.

В дополнение к ранее известным результатам приводятся полученные в процессе исследований точные значения интенсивностей спектров, отвечающие дифракции плоской монохроматической световой волны на непрерывной ультразвуковой волне.

Суть исследования состояла в следующем. В обобщенных координатах ν , u и γ на алгоритмическом языке Фортран была составлена программа для вычислений интенсивностей спектров по приближенным решениям: Рамана—Ната [2], Рытова (см. формулы (57) и (13) в работах [1, 3]) и Планка—Схоутена—Мертенса—Лероу (ПСМЛ) (см. формулу (24) в работе [5]), по теории возмущений [14] (в приближениях от первого до девятого приближения включительно) и путем численного интегрирования полной системы дифференциальных уравнений Рамана—Ната [12] методом Рунге—Куты (точное решение). Затем

по отклонениям приближенных интенсивностей первого спектра ($\tilde{I}_{\pm 1}$) от их точных значений ($I_{\pm 1}$) графически найдены для нормального $\gamma = 0$ и брэгговского углов ($\gamma = \mp 1$) области значений ν и u , в пределах которых точность приближенных решений не хуже 5% ($(\tilde{I}_{\pm 1} - I_{\pm 1})/I_{\pm 1} \leq 0,05$). Для краткости такие области мы будем называть зонами точности.

Рассчитанная таким образом зона 5-процентной точности упрощенной теории Рамана—Ната показана на рис. 1 (штрихованная область). Там же приведены известные в литературе [16] области применимости этой теории (области, лежащие ниже соответствующих им граничных кривых).

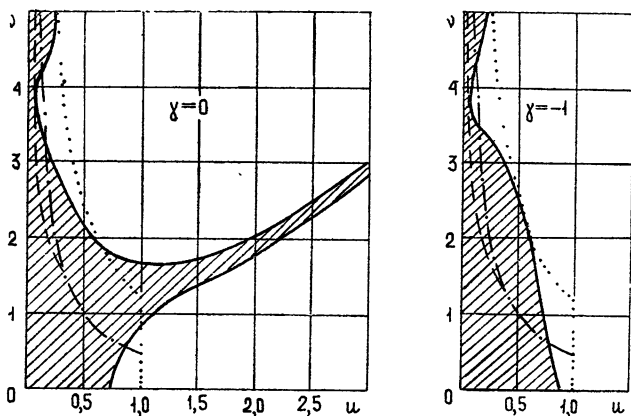


Рис. 1. Границы применимости упрощенной теории Рамана—Ната; штрих-пунктир—по Бэру и Нату, сплошная линия—по Рытову, пунктир—по Уилларду.

В теории Рамана—Ната предполагается, во-первых, что по мере распространения световых лучей в толще ультразвукового столба их направление остается неизменным и, во-вторых, что существенна лишь фазовая модуляция. Первое условие определяется по Бэру и Нату неравенством $\nu \leq 0,5/u$ (см. кривую Бэра и Ната на рис. 1). Известно, что по теории Рамана—Ната не объясняется эффект асимметрии интенсивностей спектров одного порядка при наклонном падении света (эффект объемной селективной дифракции Брэгга). Это обстоятельство было использовано Экстерманом и Ванье [9] для определения границ применимости теории. Они установили, что объемным эффектом селективного брэгговского отражения можно (конечно, с определенной степенью точности) пренебречь, если величина волнового параметра $u \leq 1$.

Это же неравенство, как показано в [1], означает малое влияние амплитудной модуляции света, т. е. соответствует второму из упрощений теории. В цитируемой работе уточнено также и первое из упрощений. Оказалось, что величиной приращения параметра фазовой модуляции относительно параметра Рамана—Ната ν из-за рефракции света на акустических возмущениях показателя преломления среды можно пренебречь, если $\nu \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{u}}$. По Рытову, перечисленные три условия

составляют критерий границы применимости упрощенной теории Рамана—Ната. По Уилларду, о дифракции в смысле Рамана—Ната можно говорить до тех пор, пока толщина ультразвукового столба

$z \leq z_0$, где $z_0 = \frac{1}{4} \Lambda \sqrt{\frac{n}{\Delta n}}$ — точка фокусировки световых лучей, первая от входа световой волны в слой (см. стр. 187 в работе [16]). В обобщенных координатах это условие эквивалентно неравенству $\nu \leq \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{u}$.

В литературе известны экспериментальные исследования границ применимости упрощенной теории Рамана—Ната. Бэр, например, подтвердил, что граничные значения обобщенных параметров, при которых начинают наблюдаться эффекты амплитудной модуляции и селективного брэгговского отражения, удовлетворяют условию $\nu \leq 0,5/u$ и $u \leq 1$. Измерения же Сэндерса интенсивностей спектров показали, что теория Рамана—Ната дает хорошее совпадение с экспериментом и при значениях ν и u , выходящих за пределы известных критериев. В работе [1] сделано предположение, что в результатах Бэра и Сэндерса нет противоречия, так как в основу оценок границ применимости теории положены различные эффекты (предполагается, что с увеличением параметра Рамана—Ната сверх очерченной Бэром области вслед за амплитудной модуляцией вступают в силу высшие порядки фазовой модуляции, причем их влияние на амплитуды спектров в дальней волновой зоне света компенсируется до несколько более широких пределов, чем влияние на световое поле в толще ультразвукового столба). Расчеты зон точности, представленные на рис. 1, подтверждают эту точку зрения.

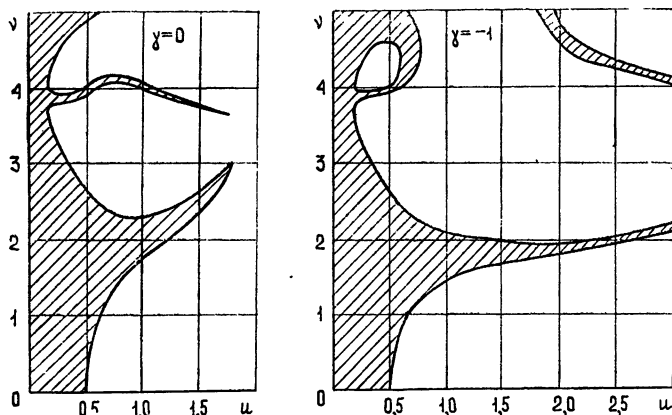


Рис. 2. Границы применимости теории ПСМЛ.

Особенностью зон точностей приближенных теорий является наличие тонкой структуры. Зоны точности с тонкой структурой, при фиксированном значении волнового параметра, представляют собой либо сегменты значений параметра Рамана—Ната, лежащие вне интервала

$\nu < 1$, либо не связанные между собой сегменты. Так, например, при $u = 1$ и $\gamma = 0$ область точности упрощенной теории Рамана—Ната определена сегментом $0,9 \leq \nu \leq 1,6$, а решения ПСМЛ (см. на рис. 2 штрихованную область)—двумя не связанными между собой сегментами $1,75 \leq \nu \leq 2,25$ и $4 \leq \nu \leq 4,1$. На рис. 3 приведены кривые зависимостей интенсивности первого спектра $I_{\pm 1}(\nu)$, полученные по приближенным теориям и путем численного интегрирования полной системы дифференциальных уравнений Рамана—Ната. Из кривых видно, что тонкая структура зон точностей обусловлена многократным пересечением соответствующих им кривых с точным решением. У решения,

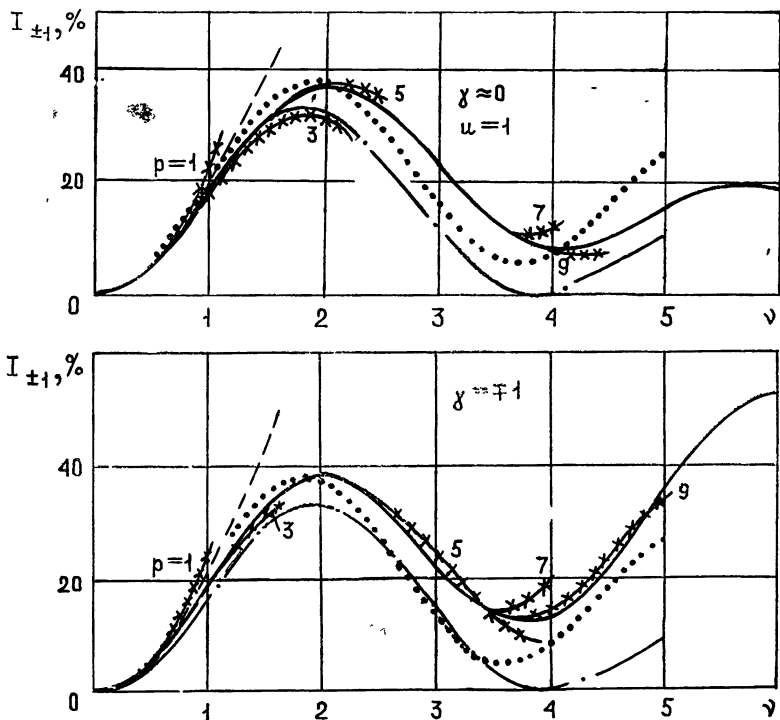


Рис. 3. Зависимости интенсивности первого дифракционного спектра от параметра Рамана—Ната.

Штрих-пунктир—упрощенная теория Рамана—Ната, пунктир—первое приближение по методу Рытова, точки—теория ПСМЛ, крестики— p -е приближение по методу малых возмущений, сплошная линия—численное интегрирование системы дифференциальных уравнений Рамана—Ната.

полученного в первом приближении по методу плавных возмущений Рытова, тонкой структуры в пределах точности 5% не обнаружено. Граница этой области (см. штрихованную область на рис. 4), как видно из графиков, практически совпадает с оценкой Рытова [1], показанной на рисунке пунктирной кривой. Кривые интенсивностей, рассчитанные по теории возмущений [14], пересекаются с точной расчетной кривой многократно (см. рис. 3), т. е. зонам точности борновских приближений также присуща тонкая структура. Например, кривая, соответствующая пятому борновскому приближению при брэгговском угле падения света ($|\gamma| = 1$) и $u \approx 1$, сливается с точкой кривой при $\nu \leq 2,6$ и пересекает точную кривую в окрестности точки $\nu \approx 3,5$. Однако на рис. 5 зоны точности теории возмущений, обусловленные конечным числом принятых в расчет приближений (области, лежащие ниже соответствующих кривых p — x приближений), построены лишь по первой зоне, т. е. их тонкая структура не приводится.

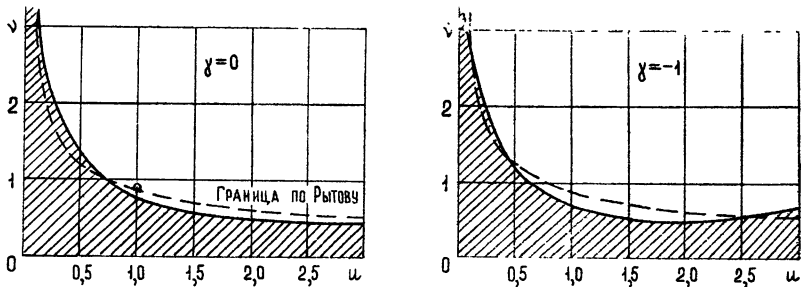


Рис. 4. Границы применимости решения волнового уравнения в первом приближении по методу Рытова.

По сравнению с зоной точности упрощенной теории Рамана—Ната зона точности теории ПСМЛ расширена незначительно, а трудоемкость расчетов существенно возрастает. Граница применимости решения, полученного в первом приближении по методу Рытова, при $u \leq 1$ расположена в зоне точности теории Рамана—Ната и практически совпадает с границей первого приближения при $u > 1$. С увеличением числа приближений в теории возмущений, зоны точности по ν , естественно, расширяются, но соответствующие им приращения падают от номера к номеру. Девяти приближений, как видно из графиков, достаточно для расчетов интенсивностей с точностью 5% при $\nu \leq 3,5 \div 4,5$ и $0 \leq u \leq 3$ соответственно. Эта теория особенно удобна для расчетов оптических устройств обработки радиосигналов, так как при конечном числе приближений p по ней можно осуществить численные расчеты спектральных функций светового поля дифракции произвольной формы на широкополосных акустических сигналах при любых u [13–15].

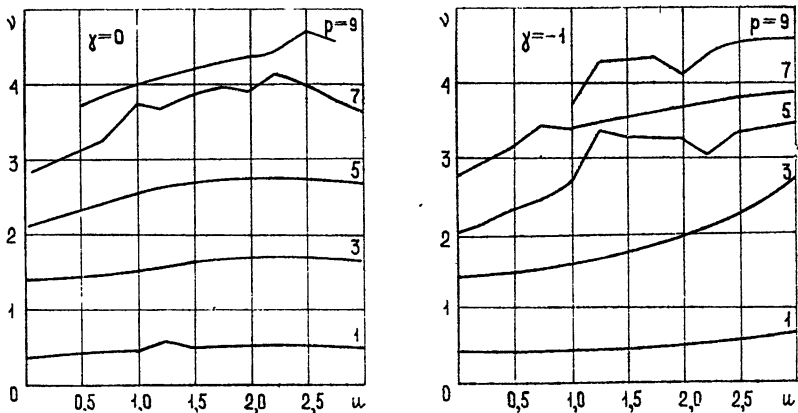


Рис. 5. Границы применимости теории возмущений для конечного (p -го) числа учтенных приближений.

Расчеты интенсивностей спектров путем численного интегрирования полной системы дифференциальных уравнений Рамана—Ната требуют значительных затрат машинного времени. Поэтому приходится пользоваться либо приближенными методами, либо известными результатами численных расчетов. В этой связи для промежуточного дифракционного режима $u \sim 1$ представляется актуальным табулирование интенсивностей спектров. Эта работа была частично выполнена, и некоторые результаты расчетов, дополняющие данные работ [9, 12, 14], приведены на рис. 6—10.

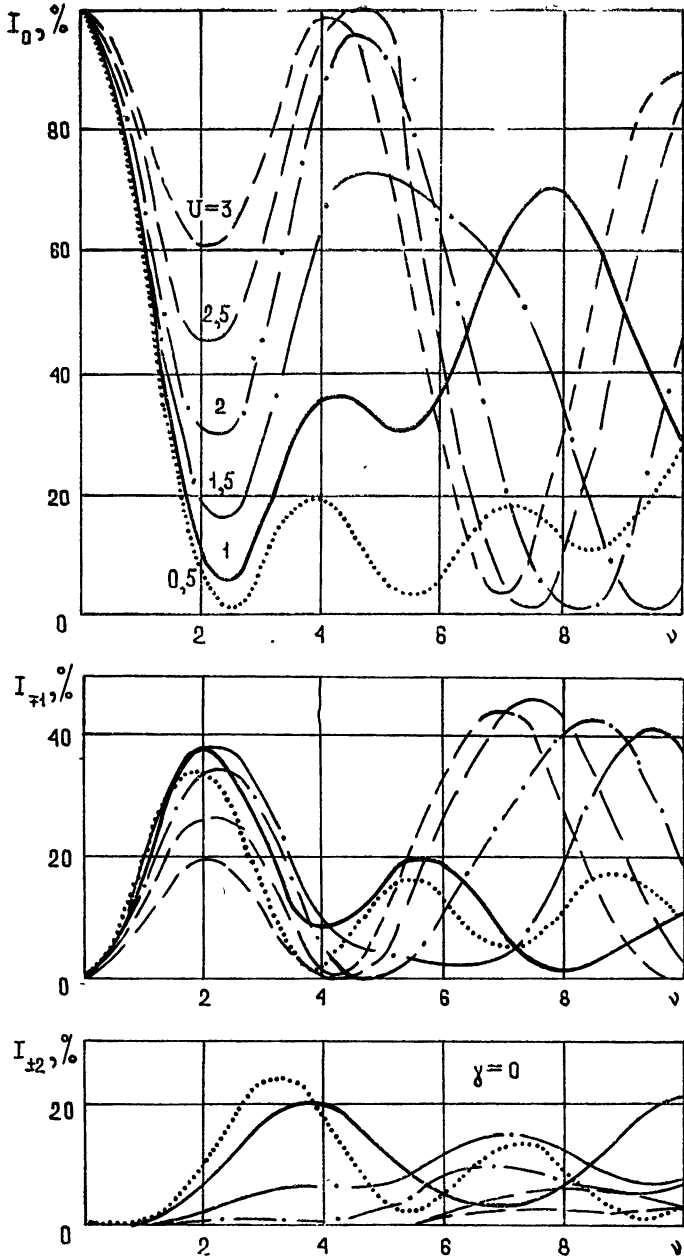


Рис. 6. Зависимости интенсивностей спектров от параметра Рамана—Ната при нормальном падении световой волны.

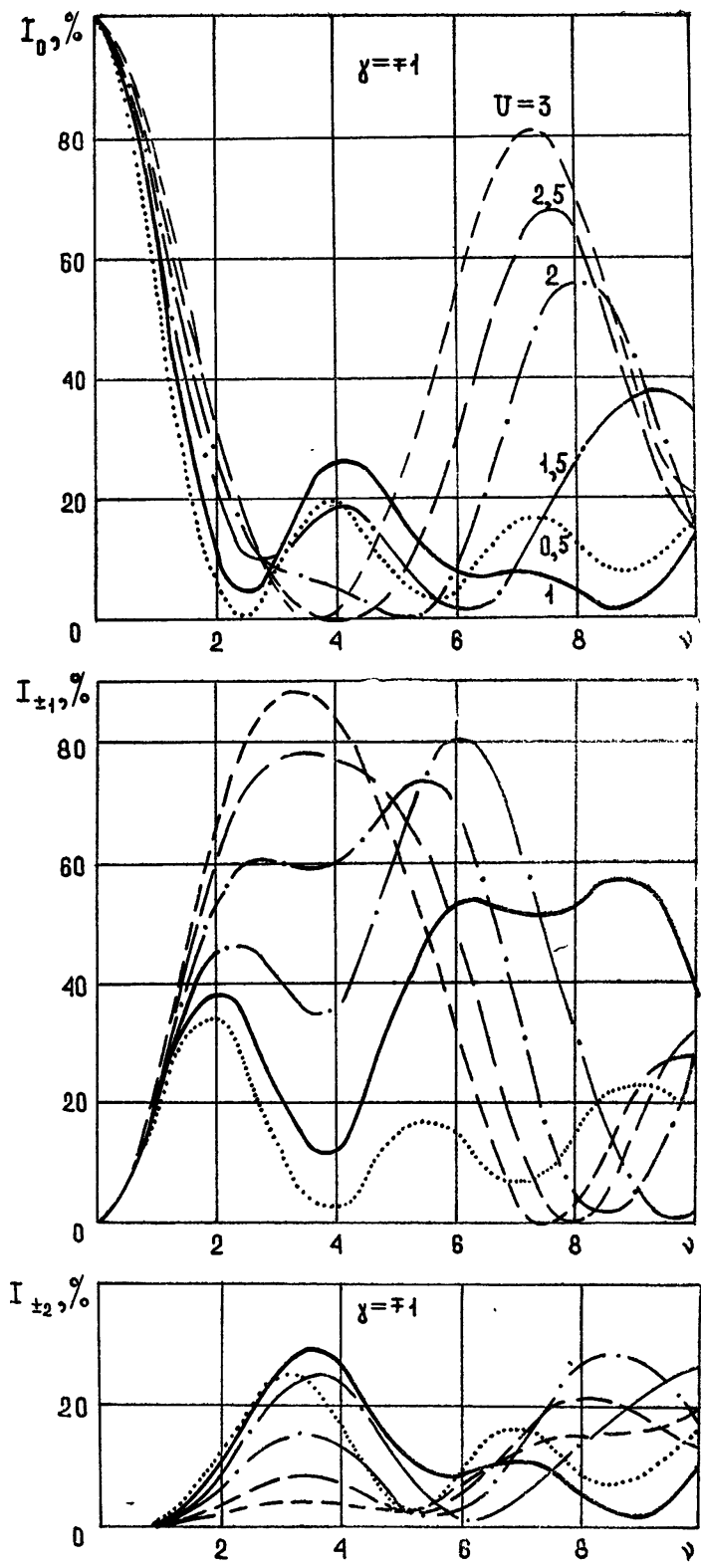


Рис. 7. Зависимости интенсивностей спектров от параметра Рамана—Ната для брэгговского угла падения световой волны.

Физически очевидно, что интенсивности спектров одного порядка m равны при разных по знаку, но одинаковых по модулю значениях угла падения световой волны, отсчитываемого от нормали к направлению распространения ультразвука ($I_m(-\gamma) = I_{-m}(\gamma)$). Кроме того, интенсивность m -го спектра является четной функцией γ относительно значения угла падения света m -кратного углу Брэгга ($\gamma = -m$), т. е. $I_m(\gamma_1 + m) = I_m(-\gamma + m)$. Поэтому кривые $I_m(\gamma)$ на рис. 9 и 10 построены только для полупрямой $\gamma \geq m$. Из условия четности функций при $\gamma_1 = \gamma - m$ следует, что $I_m(\gamma) = I_m(2m - \gamma)$, и поэтому на рис. 8, в отличие от рис. 6 и 7, не приводятся зависимости интенсивностей первого спектра от ν при $\gamma = \pm 2$, так как они тождественны кривым, рассчитанным при $\gamma = 0$ (см. рис. 6.).

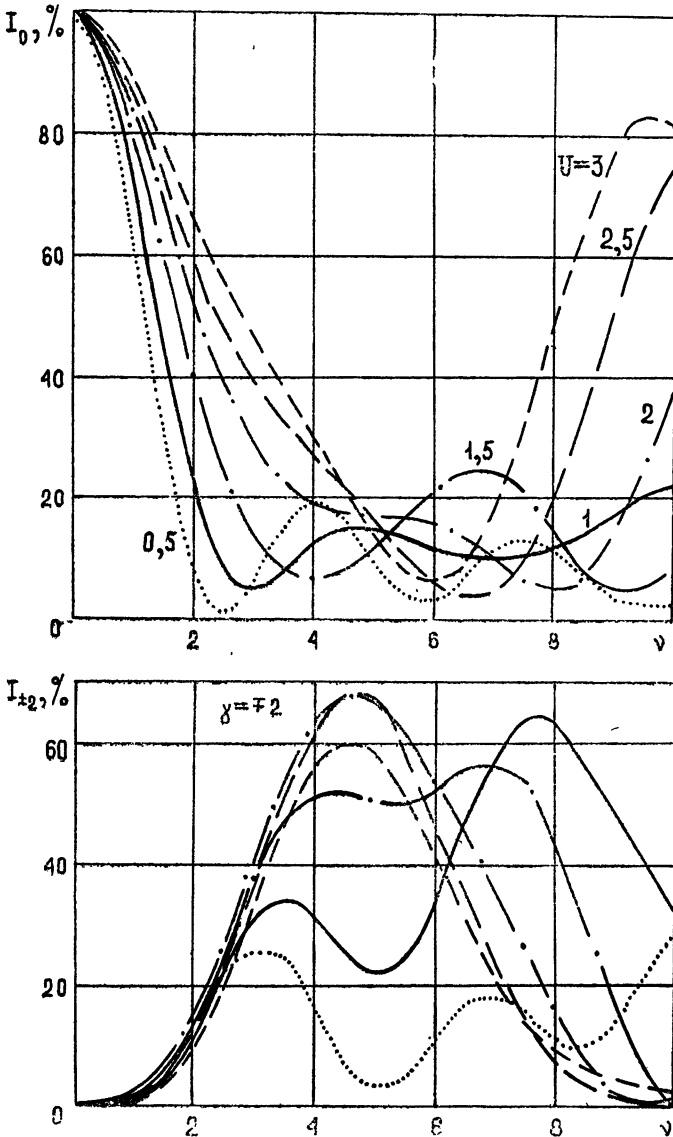


Рис. 8. Зависимости интенсивностей спектров от параметра Рамана—Ната при двойном брэгговском угле падения световой волны.

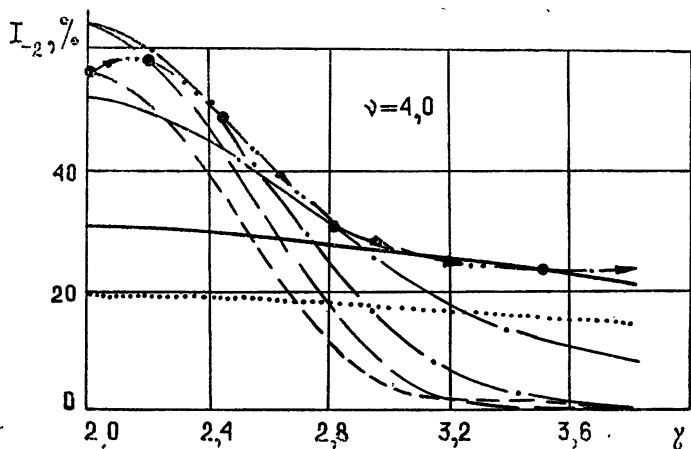
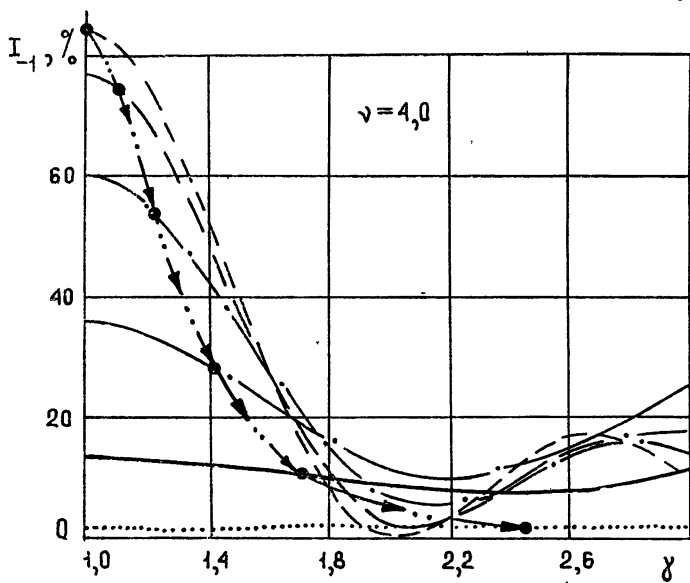
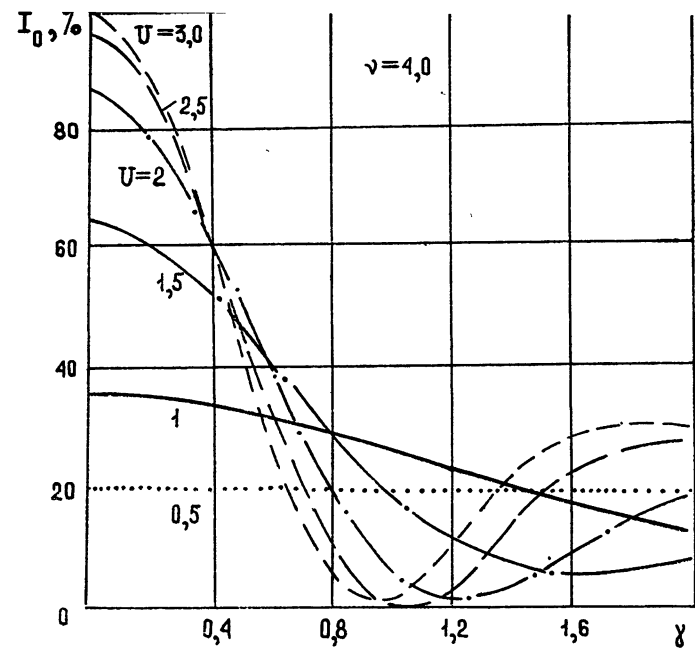


Рис. 9. Зависимости интенсивностей спектров от приведенного угла падения света. На графике $I_{-1}(\gamma)$ K —параметрическая кривая частотной зависимости,

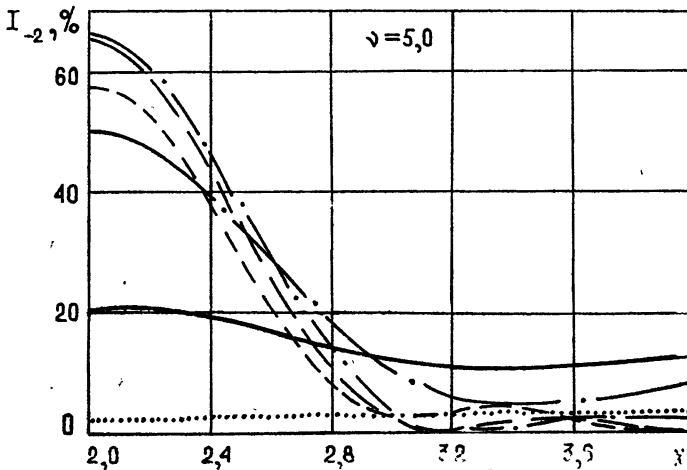
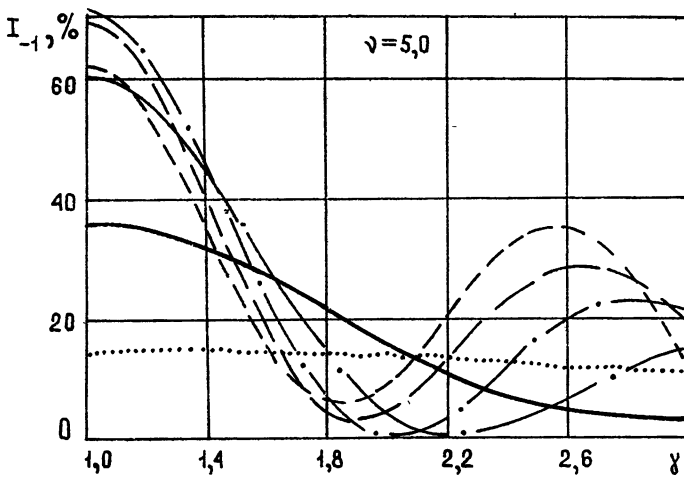
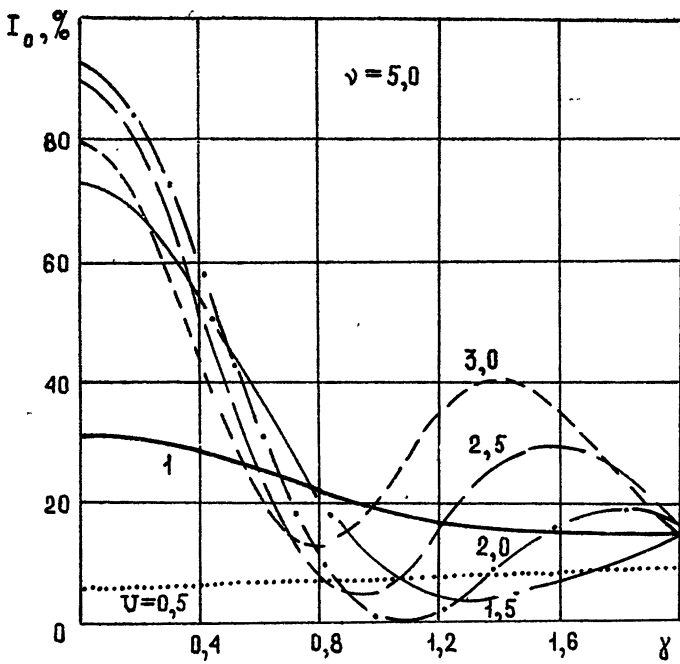


Рис. 10. Зависимости интенсивностей спектров от приведенного угла падения света.

Для приложений представляют интерес зависимости интенсивностей спектров от амплитуды ультразвука $\frac{\Delta n}{n}$, угла падения света (φ) и частоты акустической волны при прочих неизменных условиях в каждом случае. При постоянных z , λ , Λ и φ функции $I_m(\nu)$ являются функциями мощности акустической волны $\frac{\Delta n}{n}$. Из кривых для I_0 на рис. 6—8

очевидно, что суммарная интенсивность дифрагированного по $m \neq 0$ спектрам света (дифракционная интенсивность) в интервале $\nu \leq 2,5$ монотонно возрастает и тем существеннее, чем меньше u или, что то же самое, чем больше длина волны ультразвука Λ . С увеличением ν от 2,5 до 4 характер дифракции не столь общ, поскольку с ростом u отчетливее проявляются свойства селективной брэгговской дифракции, существенным образом зависящей от угла падения света. При нормальном падении ($\gamma = 0$) дифракционная интенсивность монотонно падает. Эффективность дифракции падает и в случае брэгговского угла падения ($\gamma = \pm 1$) при $u \leq 1,5$, а когда $u \geq 2,0$, наоборот, увеличивается. Для двойного брэгговского угла при $u \geq 1,5$ дифракционный эффект монотонно растет во всей области $\nu \leq 4$ со скоростью, обратной величине Λ . Максимальные значения интенсивностей в первом и втором спектрах соответственно при $\gamma = -1$ и $\gamma = -2$ наблюдаются, когда $2 \leq \nu \leq 3,5$ и $3 \leq \nu \leq 4,5$, и составляют в зависимости от u величины порядка 35—90% и 25—70%. Примечательно, что во втором спектре при $u \sim 1,5 \div 2,0$ максимум интенсивности выше аналогичного экстремума в первом спектре, но достигается при акустической мощности, большей в 1,7 раза.

Для фиксированных величин $\frac{\Delta n}{n}$, z , λ и Λ по кривым интенсивностей от γ (см. рис. 9 и 10) исследуются угловые зависимости интенсивностей спектров. Согласно кривым для I_0 при $\gamma = 0$ дифракционный эффект минимален и практически им можно пренебречь, если $\nu \approx 4$ и $u \approx 3$. С увеличением $|\gamma|$ от 0 до 1 или от 1 до 2, как представлено на рис. 9 и 10, интенсивность первого порядка дифракции растет и при $\gamma = \mp 1$, $\nu = 4$ и 5 в интервале $0,5 \leq u \leq 3,0$ принимает соответственно значения 2—84% и 15—71%. По существу идентичными представляются кривые интенсивностей от γ и во втором спектре, причем при $u \leq 2$ $I_2 > I_1$ в значительной полосе по γ , где функции $I_m(\gamma)$ рассматриваются в области $\Delta\gamma = \gamma - m$, $m = 1, 2$. Таким образом, в зависимости от значений ν и u интенсивности спектров $m > 1$ в окрестностях углов, m -кратных брэгговскому углу, оказываются в энергетическом отношении предпочтительнее первого порядка дифракции.

С помощью кривых $I_m = I_m(\gamma)$ на рис. 9 и 10 можно исследовать зависимость интенсивностей спектров от частоты ультразвука при прочих неизменных условиях. С изменением частоты обобщенные параметры меняются по закону

$$u = \pi f^2 / f_0^2, \quad \gamma = f^* / f,$$

где $f_0 = c / \sqrt{\lambda z}$ — брэгговская частота модулятора, $f^* = 2c \sin \varphi / \lambda$ — частота синхронизма, c — скорость распространения ультразвука. Кривая, экстраполирующая семейство точек, расположенных на пересечении

прямых $\gamma_k = \gamma_0 \sqrt{\frac{\pi}{u_k}} \left(\gamma_0 = 2 \sin \varphi \sqrt{\frac{z}{\lambda}} \right)$ с кривыми интенсивностей от γ , отвечающих значениям $u_k = k/2$ ($k = 1, 2, \dots, 6$), представляет для данных φ и z искомый закон частотной зависимости в интервале

$f_1 \leq f \leq f_6$, где $f_k = \sqrt{\frac{u_k}{\pi}} f_0$ (выражения для γ_k и f_k получены из формул для u и γ).

В качестве примера на рис. 9 для первого и второго спектров такие параметрические кривые построены для значений $\gamma_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$ и $2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ соответственно, и стрелками показано направление смещений по кривым, отвечающее увеличению частоты от f_1 до f_6 . Эти и другие кривые, соответствующие различным γ_0 на рис. 11, представлены* в виде, удобном для сравнения с экспериментом. Из графиков видно, что «резонансные» частоты интенсивностей (частоты, при которых спектры имеют максимум энергии) в области $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \gamma_0 \leq 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ в первом порядке смещены в область высоких частот $f \geq f_0$ брэгговского режима дифракции, а во втором спектре расположены в исследуемой промежуточной области частот. Поэтому, например, при $\gamma_0 = 2\sqrt{2/\pi}$ полоса частот Δf модулятора по уровню 0,7 от экстремума в интенсивности второго спектра больше полосы интенсивности первого спектра при любом из рассмотренных значений γ_0 . Отсюда следует, в частности, следующий практический вывод: в акустическом модуляторе при $\nu \approx 4$ в энергетическом отношении в полосе частот $f \leq f_6$ целесообразно использовать второй порядок дифракции.

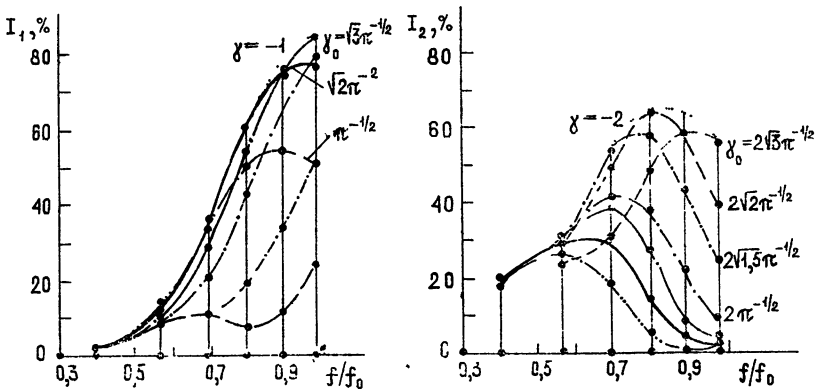


Рис. 11. Зависимости интенсивностей спектров от частоты ультразвуковой волны

В литературе упоминаются модуляторы, в которых с целью увеличения интенсивности в первом спектре с изменением частоты осуществляется подстройка акустического луча по брэгговскому углу, т. е. $f = f^*$ ($\gamma = \pm 1$). Отвечающая этому случаю кривая частотной зависимости на рис. 11 представлена точками. На этом же рисунке приводится частотная зависимость интенсивности во втором спектре, когда угловая подстройка осуществляется по двойному брэгговскому углу, т. е. $f = 2f^*$ ($\gamma = \pm 2$). В модуляторе такого типа по сравнению с мо-

дулятором с $\varphi = \text{const}$ и $\gamma_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$, как видно из графиков при $\nu = 4,0$,

* При построении кривых на рис. 11 использовались значения интенсивностей в функции γ для первого спектра в интервале $(-1, 3)$, а второго спектра в интервале $(0,4)$, которые в силу четности функций $I_m(\gamma)$ относительно точки $\gamma = -m$ определялись из графиков на рис. 9, приведенных для $m = 1$ и 2 лишь в интервалах $(1, 3)$ и $(2, 4)$.

выигрыш по интенсивности в первом спектре не превышает 7% от интенсивности входного светового потока. Поскольку построение таких модуляторов — сложная техническая задача, то их конструирование для частот $f < f_0$ вряд ли оправдано.

Автор выражает глубокую признательность Ю. А. Кравцову и С. М. Рытову за постоянный интерес к работе и стимулирующие дискуссии, И. С. Миреру и Е. И. Макаровой за консультации и методические советы по составлению и отладке программы на ЭВМ и благодарит С. С. Каринского за критические замечания по результатам работы и Р. Г. Дохикина и В. Н. Деева за полезные советы по изложению материала статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, серия физическая, 2, 223 (1937).
2. C. V. Raman, N. S. N. Nath, Proc. Ind. Sci., 2A, 406, 413 (1935); 3A, 75 (1936).
3. А. М. Мартынов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 7, 1079 (1973).
4. А. С. Брюховецкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 576 (1966).
5. G. Plancke-Schuyten, R. Mertens, D. Leroy, Physica, 61, № 2, 299 (1972).
6. P. Phariscau, Proc. Indian. Acad. Sci., 44A, 169 (1956).
7. R. S. Chu, T. Tamir, IEEE Trans. Microwave Theory Techniq, August (1970).
8. A. B. Bhatia, W. I. Noble, Proc. Roy. Soc., 220A, 356 (1953).
9. R. C. Exterman, G. Wannier, Helv. Phys. Acta, 9, 520 (1936).
10. O. Nomoto, Y. Torikai, The 6-th Intern. Congr. on Acoust., Tokyo, Japan, August, 21—28, H-4-7, 1968, p. 149.
11. O. Nomoto, Japan, J. Appl. Phys., 10, № 5, 611 (1971).
12. W. R. Kleiñ, B. D. Cook, IEEE Trans. Sonics Ultr., SU-14, № 3, 123 (1967).
13. В. Н. Парыгин, Л. Е. Чирков, Радиотехника и электроника, 18, № 4, 703 (1974).
14. А. А. Мартынов, И. С. Мирер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 12, 1845 (1975).
15. А. М. Мартынов, Радиотехника и электроника, (в печати).
16. Л. Бергман, Ультразвук, ИЛ, М., 1957.

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
29 мая 1975 г.

CALCULATIONS OF SPECTRAL INTENSITIES AND APPLICABILITY LIMITS OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF LIGHT DIFFRACTION BY AN ULTRASOUND

A. M. Martynov

We present the results of calculations of the spectral intensities at light diffraction by an ultra-sound by approximate methods (simplified Raman—Nath theory, Plancke—Shouyten—Mertens—Leroy solution following Rytov's method and small perturbation theory) and by numerical integration of the full system of differential Raman—Nath equations by Runge—Kut method using an electron computer (an exact solution). The regions are defined in which the spectral intensities calculated according to approximate theories differ from their exact values not more than by 5%.

УДК 621.372.413

РАСЧЕТ ВОЛНОВОДНОГО РЕЗОНАТОРА, ПЕРЕСТРАИВАЕМОГО МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СТЕРЖНЕМ, НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

С. Б. Раевский, Л. Г. Рудоясова

Излагается метод расчета резонансных частот круглого волноводного резонатора, перестраиваемого металлическим стержнем. Приводятся результаты расчета симметричного и первого несимметричного колебаний, а также экспериментальное подтверждение результатов.

В качестве колебательных систем СВЧ генераторов на различных твердотельных электронных приборах широкое применение находят круглые волноводные резонаторы, перестраиваемые аксиальными металлическими стержнями, поскольку они обеспечивают почти линейную перестройку частоты в широком диапазоне. Расчет подобных систем в отдельных частных случаях уже рассматривался [1-5]. В настоящей работе произведен расчет указанного выше резонатора (его продольный разрез приведен на рис. 1) методом частичных областей (МЧО). Составленный алгоритм позволяет производить расчет резонансных частот любых типов колебаний.

Резонансную полость разбиваем на области I и II, для которых известны совокупности решений уравнений Максвелла, образующие полные системы собственных функций. Для основного колебания продольные компоненты электрического вектора Герца запишутся в виде

$$\Pi_{z1}^e = 0 \text{ при } 0 \leq r \leq a,$$

$$\Pi_{z1}^e = A_0 \ln(r/b) \cos k_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [p_n J_0(\alpha_n r) - N_0(\alpha_n r)] \cos \beta_n z \quad (1)$$

$$\text{при } a \leq r \leq b,$$

$$\Pi_{z2}^e = \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0(\alpha_m r) \cos \beta_m (z - d),$$

где $J_0(\alpha_{m,n} r)$ и $N_0(\alpha_n r)$ — цилиндрические функции 1-го и 2-го рода, $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$, $\beta_{m,n} = \sqrt{\varepsilon \mu \omega^2 - \alpha_{m,n}^2}$, $p_n = N_0(\alpha_n a) / J_0(\alpha_n a)$, α_n — n -й корень уравнения $J_0(\alpha a) N_0(\alpha b) - J_0(\alpha b) N_0(\alpha a) = 0$, α_m — m -й корень уравнения $J_0(\alpha b) = 0$.

Записав на границе раздела двух областей $S_T (z = l)$ условие непрерывности тангенциальных компонент поля, применяем [6] условия орто-

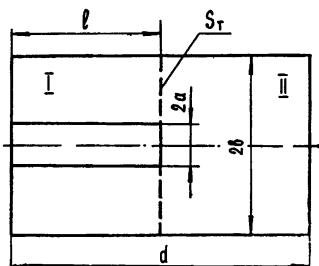


Рис. 1. Продольный разрез резонатора.

гональности цилиндрических функций в интервале $r \in [0, b]$ и собственных функций кольцевой краевой задачи Дирихле в интервале $r \in [a, b]$. В результате получаем

$$-\frac{A_0 x \sin(xl/b)}{h_m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n 2V \sqrt{\gamma_n^2 - x^2} \operatorname{sh}[V \sqrt{\gamma_n^2 - x^2} l/b]}{\pi(\gamma_n^2 - h_m^2) J_0(\gamma_n a/b)} =$$

$$= B_m \frac{J_1^2(h_m)}{2J_0(h_m a/b)} \sqrt{h_m^2 - x^2} \operatorname{sh}[V \sqrt{h_m^2 - x^2} (d/b - l/b)];$$
(2)

$$A_0 \ln(a/b) \cos(xl/b) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_0(h_m a/b) \operatorname{ch}[V \sqrt{h_m^2 - x^2} (d/b - l/b)];$$
(3)

$$A_n \frac{[J_0^2(\gamma_n a/b) - J_0^2(\gamma_n)]}{\pi J_0(\gamma_n a/b) J_0^2(\gamma_n)} \operatorname{ch}[V \sqrt{\gamma_n^2 - x^2} l/b] =$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{h_m^2 J_0^2(h_m a/b)}{(\gamma_n^2 - h_m^2)} \operatorname{ch}[V \sqrt{h_m^2 - x^2} (d/b - l/b)].$$
(4)

В уравнениях (2)–(4) введены обозначения: $h_m = \alpha_m b$, $\gamma_n = \alpha_n b$, тригонометрические функции заменены гиперболическими, поскольку $x < h_m$ и $x < \gamma_n$.

Учитывая в области I собственную функцию волны ТЕМ и n собственных функций колебаний высших типов, а в области II — m собственных функций, уравнение (2) записываем для каждого m , уравнение (3) — один раз, а (4) — для каждого n . Таким образом, получаем систему $(m + n + 1)$ уравнений с тем же числом неизвестных. Условие нетривиальности решения этой системы уравнений дает характеристическое уравнение относительно резонансных частот рассматриваемой системы.

При проведении численных расчетов было исследовано влияние числа учитываемых в I-й и II-й областях собственных функций на точность получаемых результатов. Было выяснено, что при различных параметрах резонатора, когда в первой области учитывается только ТЕМ колебание, при любых m погрешность по отношению к эксперименту оказывается не менее 5%. При $n > 1$, $m > 5$ погрешность по отношению к эксперименту не превышает 1,5%. Начиная с $n = 2$, $m = 5$, результаты при переходе от одного приближения к другому (более

высокому) отличаются мало (в пределах 0,5%), что указывает на быструю начальную сходимость. Принципиальная сходимость МЧО для задач подобного рода показана в работе [7].

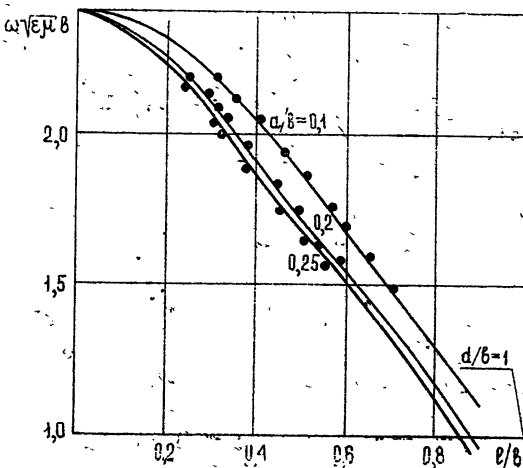


Рис. 2. Зависимость резонансных частот симметричного колебания от длины перестраиваемого стержня (сплошная линия — теоретические кривые; точки — данные эксперимента).

При практических расчетах в первой области учитывалось три собственных функции, во второй—десять. Таким образом, решалось детерминантное уравнение тринадцатого порядка (отыскивалось первое решение).

Результаты расчетов представлены на рис. 2. Как видно из графиков, с уменьшением длины стержня резонансная частота увеличивается. При полностью выделенном стержне частота равна резонансной частоте колебания E_{010} полого волноводного резонатора. При введении стержня резонирующим становится колебание ТЕМ области I, а волноводная область II является как бы реактивной нагрузкой. Поскольку колебание ТЕМ существует, в принципе, на сколь угодно малых частотах, изменение параметров области II при перемещении стержня перестраивает частоту резонатора вниз от резонансной частоты колебания E_{010} . Здесь же приведены экспериментальные кривые. Как видим, погрешность расчета резонансных частот по предложенному алгоритму не превышает 1,5% для различных коэффициентов заполнения.

Для первого несимметричного E -колебания с одной азимутальной вариацией поля продольные компоненты вектора Герца запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{z_1}^e &= 0 \quad \text{при } 0 \leq r \leq a, \\ \Pi_{z_1}^e &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n [p_n J_1(\alpha_n r) - N_1(\alpha_n r)] \cos \beta_n z \cos \varphi \quad (5) \\ &\quad \text{при } a \leq r \leq b, \\ \Pi_{z_2}^e &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_1(\alpha_m r) \cos \beta_m (z - d) \cos \varphi \\ &\quad \text{при } 0 \leq r \leq b. \end{aligned}$$

Здесь α_n и α_m — n -й и m -й, соответственно, корни уравнений $J_1(\alpha a)N_1(\alpha b) - J_1(\alpha b)N_1(\alpha a) = 0$; $J_1(\alpha b) = 0$.

Для несимметричного колебания на границе S_T достаточно выполнить граничные условия $E_{\varphi_1} = 0$, $0 \leq r < a$; $E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2}$, $H_{r_1} = H_{r_2}$, $a \leq r \leq b$. Характеристическое уравнение для определения резонансных частот получается так же, как для симметричного колебания.

При практических расчетах в каждой области учитывалось по пяти собственных функций ($m = n = 5$), т. е. решалось детерминантное уравнение десятого порядка. Результаты расчетов представлены на рис. 3. Как видно из графиков, с увеличением длины стержня резонансная частота возрастает от значения резонансной частоты колебания E_{110} полого волноводного резонатора до резонансной частоты колебания E_{110} коаксиального резонатора (при полностью введенном стержне). При работе на несимметричном колебании резонирующим объемом является область II, а коаксиальная область I выполняет роль реактивной нагрузки. Поскольку критическая частота основной

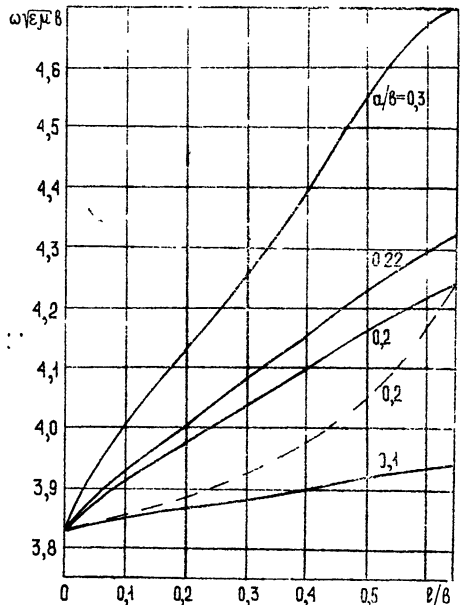


Рис. 3. Зависимость резонансных частот несимметричного колебания от длины перестраивающего стержня.

волноводной волны в коаксиальной линии выше критической частоты волны E_{11} в круглом волноводе с радиусом b , при введении стержня резонансная частота системы увеличивается. Здесь же (штриховая линия) приведена экспериментальная кривая. Как видно из сравнения теоретической и экспериментальной кривых, погрешность расчета достигает (в использованном приближении) 3%. Таким образом, начальная сходимость решений в случае несимметричного колебания оказывается хуже.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Hansen, J. Appl. Phys., 10 (1939).
2. T. Moreno, Dover Publication, N.-Y., 1958, p. 228.
3. K. Fujisawa, Trans., МТТ-6, № 3, 344 (1958).
4. E. Rivier, M. Lapisardi, Trans., МТТ-19, № 3, 309 (1971).
5. K. Uenakada, Trans., МТТ-21, № 1, 48 (1973).
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, изд. Наука, М., 1974.
7. В. В. Никольский, Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики, вып. 70, 3 (1974).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
30 июня 1975 г.,
после доработки
10 марта 1976 г.

CALCULATION OF A WAVE RESONATOR RETUNED BY A METAL ROD ON THE BASIS OF PARTIAL REGIONAL METHOD

S. B. Raevskii, L. G. Rudoyasova

A method of calculating resonant frequencies of a circular waveguide resonator retuned by a metal rod is set forth. The results of calculation of symmetrical and the first asymmetrical oscillations are given. The validity of the results is supported by the experiment.

УДК 533.9.01 : 539.293

**ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ
СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ. II.**

Ю. А. Романов, В. Ф. Дряхлушин

Найден спектр плазменных волн в полупроводниках со сверхрешеткой при различных направлениях их распространения. Подробно обсужден случай поперечного (по отношению к периоду решетки) распространения.

В работе [1] исследован спектр плазменных волн в полупроводниках со сверхрешеткой, распространяющихся вдоль ее периода. В настоящей работе исследован случай поперечного распространения плазменных волн, а также обсуждены основные особенности спектра в случае произвольного направления распространения плазменных волн.

Как и в [1], закон дисперсии электронов в одномерной сверхрешетке будем полагать в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_v(\mathbf{k}) &= \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_{\perp}} + \epsilon_v(k_3), & \epsilon_v(k_3) &= \epsilon_v^0 + (-1)^{\nu} \frac{\Delta\epsilon_v}{2} \cos(k_3 d), \\ & & -\frac{\pi}{d} &\leq k_3 \leq \frac{\pi}{d}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

где ν — номер разрешенной минизоны, ϵ_v^0 — ее середина, $\Delta\epsilon_v$ — ширина, d — период сверхрешетки, $\hbar k_{\perp}$ и m_{\perp} — поперечный квазиимпульс и эффективная масса электрона, $\hbar k_3$ — продольный квазиимпульс. Будем считать, что температура системы $T = 0$ и электроны заполняют первые s минизон. В этом случае диэлектрическая проницаемость, описывающая волны, распространяющиеся перпендикулярно к периоду сверхрешетки, имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp}(q_{\perp}, \omega) &= \epsilon_0 + \frac{4}{q_{\perp}^2 a_{\perp} d} \left\{ s' - \frac{d}{\pi} \sum_{\nu=1}^{s'} \int_0^{\pi/d} \frac{dk_3}{\sqrt{1 - \gamma_{\nu}}} + \right. \\ &+ \left. \frac{d}{\pi} \left[|k_3^s(\mu) - k_0^s| + (-1)^s \int_{k_0^s}^{k_3^s(\mu)} \frac{dk_3}{\sqrt{1 - \gamma_s}} \right] \eta(\epsilon_s^{\max} - \mu) \right\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\gamma_{\nu} = \frac{2q_{\perp}^2 [\mu - \epsilon_v(k_3)]}{m_{\perp} \omega^2}, \quad s' = s - \eta(\epsilon_s^{\max} - \mu),$$

$$k_0^s = \frac{\pi}{2d} (1 + (-1)^s), \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$k_3^s(\mu)$ определяется из решения уравнения $\mu = \varepsilon_s(k_3)$, $a_{\perp} = \frac{\hbar^2}{m_{\perp} e^2}$ — эффективный боровский радиус, μ — химический потенциал, ε_0 — диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки.

Поскольку рассматриваемая нами система является по существу многокомпонентной плазмой, то в ней возможны два типа плазменных волн — оптические и акустические. Оптические плазмоны будут незатухающими (в отсутствие столкновений) во всей области существования и описываться дисперсионным соотношением

$$q_{\perp}^2 = -\frac{4}{a_{\perp} d \varepsilon_0} \left\{ s' - \frac{\sqrt{2m_{\perp}}}{\pi} v_{\phi} \sum_{\nu=1}^{s'} \frac{r_{\nu} K(r_{\nu})}{\sqrt{\Delta\varepsilon_{\nu}}} + \frac{1}{\pi} \left[\left| k_3^s(\mu) d - \frac{\pi}{2} (1+(-1)^s) \right| - v_{\phi} r_s \sqrt{\frac{2m_{\perp}}{\Delta\varepsilon_s}} \left| F(\varphi_s, r_s) - \frac{1+(-1)^s}{2} K(r_s) \right| \right] \eta(\varepsilon_s^{\max} - \mu) \right\}, \quad (3)$$

где $F(\varphi_s, r_s)$ — эллиптический интеграл 1-го рода, $K(r_s)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода,

$$r_{\nu} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta\varepsilon_{\nu}} \left(\frac{m v_{\phi}^2}{2} - \mu + \varepsilon_{\nu}^0 \right) \right]^{-1/2}, \quad v_{\phi} = \frac{\omega}{q_{\perp}}, \quad (4)$$

$$\varphi_s = \frac{1+(-1)^s}{4} k_3^s(\mu) d + \frac{1-(-1)^s}{2} \arcsin \frac{\sqrt{2\Delta\varepsilon_s} \sin \left(\frac{k_3^s(\mu) d}{2} \right)}{r_s v_{\phi} \sqrt{m_{\perp}}}.$$

При $q_{\perp} \rightarrow 0$

$$\omega^2 \rightarrow \omega_{0\perp}^2 = \frac{4}{a_{\perp} d m_{\perp} \varepsilon_0} \left\{ s' \mu - \sum_{\nu=1}^{s'} \varepsilon_{\nu}^0 + \frac{1}{\pi} \left[(\mu - \varepsilon_s^0) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \arccos \left(\frac{2}{\Delta\varepsilon_s} (-\mu + \varepsilon_s^0) \right) + \frac{\Delta\varepsilon_s}{2} \sqrt{1 - \frac{4(\mu - \varepsilon_s^0)^2}{(\Delta\varepsilon_s)^2}} \right] \right\}. \quad (5)$$

При $q_{\perp} \rightarrow \infty$

$$\omega \rightarrow q_{\perp} \sqrt{\frac{2}{m_{\perp}} \left(\mu - \varepsilon_1^0 + \frac{\Delta\varepsilon_1}{2} \right)}. \quad (6)$$

При рассмотрении акустических плазмонов будем считать, что μ лежит выше потока s -й минизоны. Пусть фазовая скорость волны удовлетворяет соотношению

$$v_s^{\max} < \dots < v_m^{\max} < v_{\phi} < v_{m-1}^{\max} < \dots < v_1^{\max}, \quad (7)$$

где $v_{\nu}^{\max} = \sqrt{\frac{2}{m_{\perp}} \left(\mu - \varepsilon_{\nu}^0 + \frac{\Delta\varepsilon_{\nu}}{2} \right)}$ — максимальная поперечная скорость электронов ν -й минизоны. Полагая $v_{\phi} = v'_{\phi} - i v''_{\phi}$ и считая $v''_{\phi} \ll v'_{\phi}$, из (2) получим следующее дисперсионное уравнение для акустических волн:

$$\varepsilon_{\perp}(q_{\perp}, \omega) = \varepsilon_0 + \frac{4}{q_{\perp}^2 a_{\perp} d} \left\{ s - \frac{\sqrt{2m_{\perp}}}{\pi} v'_{\phi} \sum_{\nu=m}^s \frac{r_{\nu} K(r_{\nu})}{\sqrt{\Delta\varepsilon_{\nu}}} + \right.$$

$$+ i \frac{\sqrt{2m_{\perp}}}{\pi} v'_{\phi} \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\bar{r}_{\nu} K(\bar{r}_{\nu})}{\sqrt{\Delta \varepsilon_{\nu}}} - i \frac{v''_{\phi} r_m}{\pi} \sqrt{\frac{2m_{\perp}}{\Delta \varepsilon_m}} \times$$

$$\times \left[\frac{E(\pi/2, r_m)}{1 - (v_m^{\max}/v'_{\phi})^2} - K(r_m) \right] = 0, \quad m = 2, 3, \dots, s,$$

$$\bar{r}_{\nu} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\Delta \varepsilon_{\nu}} \left(\mu - \varepsilon^0 - \frac{m(v'_{\phi})^2}{2} \right) \right]^{-1/2},$$

$E(\pi/2, r_m)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода. В случае $\Delta \varepsilon_{\nu} \rightarrow 0$ из (8) следует дисперсионное уравнение акустических плазменных волн в размерно-квантованных пленках [2].

Решение уравнения (8) можно записать в виде

$$q_{\perp}^2 = - \frac{4}{a_{\perp} d \varepsilon_0} \left[s - \frac{\sqrt{2m_{\perp}}}{\pi} v'_{\phi} \sum_{\nu=m}^s \frac{r_{\nu} K(r_{\nu})}{\sqrt{\Delta \varepsilon_{\nu}}} \right]; \quad (9)$$

$$v''_{\phi} = v'_{\phi} \frac{\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\bar{r}_{\nu}}{r_m} \sqrt{\frac{\Delta \varepsilon_m}{\Delta \varepsilon_{\nu}}} K(r_{\nu})}{\frac{E(\pi/2, r_m)}{1 - (v_m^{\max}/v'_{\phi})^2} - K(r_m)}. \quad (10)$$

При $q_{\perp} \rightarrow \infty$ $v'_{\phi} \rightarrow v_m^{\max}$.

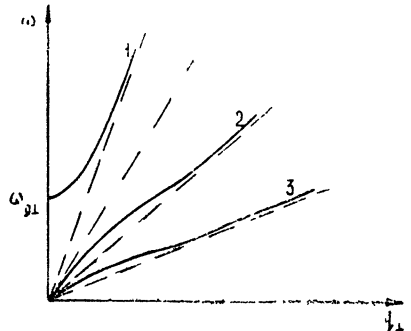
В качестве примера рассмотрим сверхрешетку с синусоидальным потенциалом

$$U(x_3) = U_0 \cos^2 \left(\frac{\pi x_3}{d} \right)$$

и параметрами $U_0 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{m_{\perp} d^2}$ ($\sim 0,16$ эВ), $d = 2 \cdot 10^{-6}$ см, $m_{\perp} = 0,05 m_0$, $n = 8,6 \cdot 10^{18}$ см $^{-3}$. При указанной концентрации будут заполнены четыре минизоны. Соответствующие разрешенные и запрещенные ширины этих минизон [3] $\Delta \varepsilon_{\nu} = 0,002; 0,02; 0,06; 0,1$ эВ; $\Delta \varepsilon_{g\nu} = 0,059; 0,023; 0,003$ эВ. Максимальные скорости электрона в этих минизонах равны $v_{\nu}^{\max} = 1,33 \cdot 10^8; 1,17 \cdot 10^8; 1,05 \cdot 10^8; 8 \cdot 10^7$ см/с. Возможны две слабозатухающие волны с $v'_{\phi} = (1 + 3 \cdot 10^{-5}) v_4^{\max}; 1,02 v_3^{\max}$ и $v''_{\phi} = 4 \cdot 10^{-4} v_4^{\max}; 0,14 v_3^{\max}$ (при $q_{\perp} d \ll 1$). Волна с фазовой скоростью $v_2^{\max} < v'_{\phi} < v_1^{\max}$ сильно затухает. Качественная картина дисперсии волн для этого случая приведена на рис. 1.

Рис. 1. Качественная картина дисперсии плазменных волн в полупроводниках со сверхрешеткой;

1—оптический плазмон, 2, 3—акустические плазмоны.



В случае распространения плазменной волны под произвольным углом α к периоду сверхрешетки для оптических плазмонов имеем

$$\omega^2 \xrightarrow{q \rightarrow 0} \omega_0^2 = \omega_{0\perp}^2 \sin^2 \alpha + \omega_{0\parallel}^2 \cos^2 \alpha; \quad (11)$$

$$\omega \xrightarrow{q \rightarrow \infty} q \max_{\nu, k_s} \left\{ \sqrt{\frac{2}{m_{\perp}} \left(\mu - \varepsilon_{\nu}^0 - (-1)^{\nu} \frac{\Delta \varepsilon_{\nu}}{2} \cos(k_3 d) \right)} \sin \alpha - \right. \\ \left. - (-1)^{\nu} \frac{d}{2\hbar} \Delta \varepsilon_{\nu} \sin(k_3 d) \cos \alpha \right\}, \quad (12)$$

где

$$\omega_{0\perp}^2 = \frac{d}{2\hbar^2 a_{\perp} \varepsilon_0} \left\{ \sum_{\nu=1}^{s'} (\Delta \varepsilon_{\nu})^2 + \frac{d}{\pi} (\Delta \varepsilon_s)^2 \left| k_3^s(\mu) - k_0^s - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2d} \sin(2k_3^s(\mu) d) \right| \eta(\varepsilon_s^{\max} - \mu) \right\}, \quad (13)$$

$\omega_{0\perp}$ определяется выражением (5).

Более сложным является положение с акустическими плазмонами.

Дело в том, что для $\alpha = 0$ $v_{\nu}^{\max} < v_{\nu+1}^{\max}$, а для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $v_{\nu}^{\max} > v_{\nu+1}^{\max}$. Следовательно, для промежуточных углов $v_{\nu}^{\max} \sim v_{\nu+1}^{\max}$ и соответствующие волны из-за сильного затухания исчезают. Интересно заметить, что при $\alpha = 0$ затухание акустических волн растет с номером зоны, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — уменьшается. В приведенном выше примере частоты плазменных волн при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ выше, чем при $\alpha = 0$ (см. [1]).

Для наблюдения указанных в работе волн необходимы ограничения на частоту столкновений (τ^{-1}) и температурное размытие функции распределения. Особенно жесткими являются условия для акустических волн

$$\left| v_{m+1}^{\max} - v_m^{\max} \right| \gg \sqrt{\frac{2\kappa T}{m_{\perp}}}, \quad \sqrt{\frac{2\hbar}{m_{\perp} \tau}}. \quad (14)$$

Для пренебрежения межминизонными переходами необходимы условия

$$\Delta \varepsilon_{g\nu} \gg \hbar \omega, \quad \hbar \tau^{-1}$$

($\Delta \varepsilon_{g\nu}$ — характерная ширина запрещенных минизон).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Романов, В. Ф. Дряхлушин, Л. К. Орлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
2. Ю. А. Романов, М. Ш. Ерухимов, ЖЭТФ, 55, 1561 (1968).
3. Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 июня 1975 г.

PLASMA WAVES IN SEMICONDUCTORS WITH A SUPERLATTICE. II

Yu. A. Romanov, V. F. Dryakhlushin

A spectrum of plasma waves in semiconductors with a superlattice is found at different directions of their propagation. The case of transverse (with respect to the lattice period) propagation is discussed in detail.

УДК 621.382.829

К ТЕОРИИ МАГНЕТРОННОГО ВОЛНОВОДА

Л. М. Бузик

Рассмотрена задача о распространении электромагнитных волн в коаксиальном (круглом) волноводе с симметрично расположенными на его внешнем или внутреннем проводниках тонкими металлическими радиальными пластинами — ламелями. Методом прямого полуобращения получено решение в виде системы линейных алгебраических уравнений, пригодное для расчета электродинамических характеристик при произвольном соотношении длины волны и размеров волновода. В случае достаточно большого числа ламелей получены простые формулы для расчета дисперсии и распределения поля ТЕ- и ТМ-волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение волн в коаксиальном волноводе с симметрично расположенными на его проводниках радиальными пластинами — ламелями исследуется в настоящей работе в предположении, что все металлические поверхности идеально проводящие, а ламели имеют нулевую толщину. Волновод с ламелями на внешнем проводнике (рис. 1 а) будем сокращенно называть магнетронным волноводом (МВ), а волновод с ламелями на внутреннем проводнике (рис. 1 б) — обращенным магнетронным волноводом* (ОМВ).

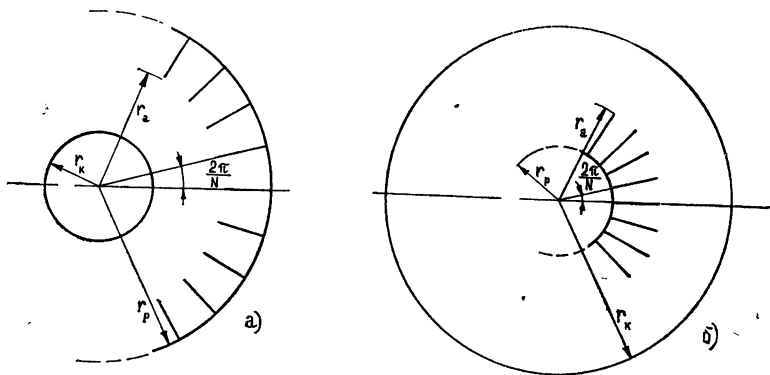


Рис. 1. Поперечное сечение а) магнетронного волновода и б) обращенного магнетронного волновода.

Анализу электродинамических характеристик МВ посвящен ряд работ, например [1-7], причем основное внимание уделено определению критических частот волн с различными азимутальными индексами. Расчет резонансных частот магнетронных резонаторных систем на основе комбинации полевых методов и методов теории цепей содержится в рабо-

* Задача о распространении волн в рассматриваемых волноводах тесно связана с задачей о резонансных свойствах отрезков этих волнопроводов, нашедших широкое применение в качестве колебательных систем магнетрона и обращенного магнетрона.

тах [1-3]. Соотношения для расчета дисперсии ТЕ-волн, полученные в этих работах, дают в ряде случаев удовлетворительную точность, однако структура поля рассчитывается весьма приближенно по той причине, что не учитываются явления многократной дифракции волн на ламелях. То же относится к работам, где исследованы ТМ-волны рассматриваемых волноводов [4], и к работам, где для решения поставленной задачи применяется импедансное приближение полевого метода [5].

Хотя соотношения для расчета резонансных частот магнетронных резонаторных систем, полученные приближенными методами, записаны для ламелей произвольной толщины, точность расчета существенно зависит от этого параметра. Как доказано в работе [6], на основе анализа бесконечных систем уравнений, получающихся в задаче о собственных колебаниях резонаторной системы магнетрона, формулы для расчета резонансных частот из работы [1] имеют приемлемую точность только для толстых ламелей. В работе [7] показано, что повышение точности расчета характеристик магнетронной резонаторной системы с ламелями произвольной толщины может быть достигнуто, если для решения указанной задачи применить эквивалентный статический метод. Этот метод распространяет широко известный метод конформных отображений для исследования электростатических полей на случай волновых полей.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением коаксиальных волноводов с продольной ребристой структурой из тонких ламелей. Решение задачи о распространении волн в таких волноводах основано на прямом полуобращении систем уравнений, полученных сшиванием полей на границах частичных областей. При этом используется метод аналитического решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений специального вида, предложенный в работе [8] и развитый [9, 10] для плоского волновода с ребристой структурой. При исследовании дисперсионных свойств и структуры волн в рассматриваемых волноводах значительное внимание уделено получению аналитических и полуаналитических соотношений, учитывающих резко неоднородную границу и многоволновый характер электромагнитного поля.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Распространение волн в МВ и ОМВ в силу однородности волноводов вдоль оси z описываем продольной постоянной распространения β так, что поле зависит от координаты z и времени t как $\exp [i(\beta z - \omega t)]^*$.

Запишем выражения для компонент поля, удовлетворяющих волновому уравнению и симметричным граничным условиям на идеально проводящей поверхности волновода. В области $r_k < r < r_a$ для МВ (рис. 1 а) и $r_a < r < r_k$ для ОМВ (рис. 1 б) зависимость компонент поля ТЕ-волн от координат r и φ представляем в виде разложения по пространственным гармоникам:

$$H_z^{(1)} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q \frac{U_\gamma(ar)}{\gamma U_\gamma(ar_a)} e^{i\gamma\varphi}, \quad (1)$$

$$E_\varphi^{(1)} = -\frac{ik}{\alpha} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q \frac{U'_\gamma(ar)}{\gamma U_\gamma(ar_a)} e^{i\gamma\varphi}.$$

Здесь $k = \omega/c$, ω — частота, c — скорость света, $\alpha^2 = \beta^2 - k^2$, $\gamma = n + qN$, n — азимутальный индекс волны, N — число ламелей,

* Далее везде этот множитель опущен.

$$U_{\gamma}(ar) = \frac{1}{Y'_{\gamma}(ar_k)} [J_{\gamma}(ar) Y'_{\gamma}(ar_k) - Y_{\gamma}(ar) J'_{\gamma}(ar_k)].$$

$J_{\gamma}(x)$, $Y_{\gamma}(x)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода.

В области $r_a < r < r_p$ для МВ и $r_p < r < r_a$ для ОМВ компоненты поля той же волны представим в виде разложения по модам секторного волновода:

$$H_z^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m W_{\delta}(ar) \cos \delta\varphi, \quad (2)$$

$$E_{\varphi}^{(2)} = -\frac{ik}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} B_m W'_{\delta}(ar) \cos \delta\varphi,$$

где $\delta = mN/2$,

$$W_{\delta}(ar) = \frac{1}{Y'_{\delta}(ar_p)} [J_{\delta}(ar) Y'_{\delta}(ar_p) - Y_{\delta}(ar) J'_{\delta}(ar_p)].$$

Из условия непрерывности компонент поля (1) и (2) на общей границе при $r = r_a$ простым переразложением получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q a_{mq} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где

$$a_{mq} = \frac{1}{b_q^2 - s_m^2} \left[\frac{ar_a U'_{\gamma}(ar_a)}{N U_{\gamma}(ar_a)} - \frac{ar_a W'_{\delta}(ar_a)}{N W_{\delta}(ar_a)} \right].$$

Здесь $b_q = \frac{|\gamma|}{N}$, $s_m = \frac{\delta}{N}$. В дальнейшем вместо b_0 и s_0 будем писать просто b и s .

3. ПОЛУОБРАЩЕНИЕ

Проведем преобразования коэффициентов a_{mq} к удобному для полуобращения виду. Воспользовавшись известным соотношением для цилиндрических функций

$$Z'_n(x) = \pm \frac{n}{x} Z_n(x) \mp Z_{n \pm 1}(x),$$

представим выражения, входящие в (3), в следующем виде:

$$\frac{U'_{\gamma}(ar)}{U_{\gamma}(ar_a)} = \pm \frac{|\gamma|}{ar} \left[\frac{U_{|\gamma|}(ar)}{U_{|\gamma|}(ar_a)} - \theta_q(ar) \right],$$

$$\frac{W'_{\delta}(ar)}{W_{\delta}(ar_a)} = \mp \frac{\delta}{ar} \left[\frac{W_{\delta}(ar)}{W_{\delta}(ar_a)} - \rho_m(ar) \right],$$

где

$$\theta_q(ar) = \frac{ar}{|\gamma|} \frac{J_{|\gamma| \pm 1}(ar) Y'_{|\gamma|}(ar_k) - Y_{|\gamma| \pm 1}(ar) J'_{|\gamma|}(ar_k)}{J_{|\gamma|}(ar_a) Y'_{|\gamma|}(ar_k) - Y_{|\gamma|}(ar_a) J'_{|\gamma|}(ar_k)},$$

$$\rho_m(ar) = \frac{ar J_{\delta \mp 1}(ar) Y'_{\delta}(ar_p) - Y_{\delta \mp 1}(ar) J'_{\delta}(ar_p)}{\delta J_{\delta}(ar_a) Y'_{\delta}(ar_p) - Y_{\delta}(ar_a) J'_{\delta}(ar_p)}. \quad (4)$$

Наличие двух вариантов в каждом из преобразований связано с тем, что одно из них будем использовать для анализа МВ (верхний знак), а другое — для ОМВ (нижний знак). Отметим, что в случае МВ без внутреннего проводника $U_1(ar) = J_1(ar)$ и $\theta_q(ar) = (ar/|\gamma|) \times (J_{|\gamma| \pm 1}(ar)/J_{|\gamma|}(ar_a))$.

Учитывая соотношения (4), представим коэффициенты бесконечной системы уравнений (3) в виде

$$a_{mq} = a'_{mq} - a''_{mq}, \quad (5)$$

причем так, что

$$a'_{00} = \frac{1}{b^2 - s^2} [P(ar_a) - R(ar_a)], \quad a''_{00} = 0,$$

$$a'_{m0} = \frac{1}{b^2 - s_m^2} [P(ar_a) + s_m], \quad a''_{m0} = \frac{s_m \rho_m}{b^2 - s_m^2},$$

$$a'_{0q} = \frac{1}{b_q^2 - s^2} [b_q - R(ar_a)], \quad a''_{0q} = \frac{b_q \theta_q}{b_q^2 - s^2},$$

$$a'_{mq} = \frac{1}{b_q - s_m}, \quad a''_{mq} = \frac{b_q \theta_q + s_m \rho_m}{b_q^2 - s_m^2}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$P(ar) = \pm \frac{ar_a U'_n(ar)}{N U_n(ar_a)}, \quad R(ar) = \pm \frac{ar_a W'_0(ar)}{N W_0(ar_a)}.$$

Будем рассматривать решение бесконечной системы (3) как предел, к которому стремится решение соответствующей усеченной системы. Так, вместо системы (3) рассмотрим систему

$$\sum_{q=-M}^M A_q a_{mq} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 2M). \quad (6)$$

Учитывая (5), представим эту систему в виде неоднородной:

$$\sum_{q=-M}^M A_q a'_{mq} = d_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 2M), \quad (7)$$

где

$$d_m = \sum_{p=-M}^M A_p a''_{mp}. \quad (8)$$

Воспользовавшись правилом Крамера, запишем решение системы (7) в виде

$$A_i = (-1)^{i+M} \frac{\sum_{n=0}^{2M} (-1)^n d_n \Lambda_n^i}{\Lambda}. \quad (9)$$

Здесь через Λ обозначен определитель системы (7), а индексы (i_n)

у знака определителя означают, что в данном определителе опущены строка с номером n и столбец с номером t . Как станет ясно из дальнейшего изложения, свойства определителя Δ таковы, что он может быть представлен линейной комбинацией определителей вида

$$\Delta \equiv \det \left\| \frac{1}{b_q - s_m} \right\|_{q=-M, m=0}^{2M}$$

Нормируя определители, входящие в (9), на определитель Δ и учитывая (8), получаем полуобращенную систему уравнений

$$\zeta A_t = \sum_{p=-M}^M \alpha_{pt} A_p \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M), \quad (10)$$

описывающую свойства ТЕ-волн рассматриваемых волноводов, где

$$\zeta = \frac{\Lambda}{\Delta}, \quad \alpha_{pt} = (-1)^t \sum_{n=0}^{2M} (-1)^n \alpha'_{np} (-1)^M \frac{\Lambda^n}{\Delta}.$$

Размножим матричные элементы α'_{mq} определителя Δ на сумму дробей вида $K/(b_q - s_m)$, где K не зависит от индексов q и m . Используя основные свойства определителей, выразим Δ в виде линейной комбинации определителей типа Δ , различающихся между собой только одной строкой или одним столбцом. Тогда имеем

$$\Lambda = \Delta - \frac{R(\alpha r_a) + s}{2s} [\Delta - \Delta(-s)] + \frac{P(\alpha r_a) - b}{2b} \left\{ [\Delta - \Delta(-b)] - \frac{R(\alpha r_a) + s}{2s} [\Delta - \Delta(-s) - \Delta(-b) + \Delta(-s, -b)] \right\}.$$

Вычисление коэффициентов полуобращенной системы (10), таким образом, сводится к нахождению отношений определителей типа Δ . Способ вычисления этих отношений основан на формуле Коши для «двойного альтернанта» и подробно описан в работах [8-11]. Не останавливаясь на выкладках, выпишем для примера результат вычисления одного из отношений, полученный после применения формулы Коши. Для отношения, входящего в коэффициенты α_{pt} , имеем

$$\frac{\Delta^n}{\Delta} = (-1)^{t+n+M} \frac{b_t (s_n - b_t)}{s_n} \prod_{q=-M}^{M(t)} \frac{b_q - s_n}{b_q - b_t} \prod_{m=1}^{2M(n)} \frac{s_m - b_t}{s_m - s_n}.$$

Индексы (t) и (n) у знака произведения означают, что пропущены соответствующие им по номеру множители.

4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Следующий этап решения задачи заключается в переходе к пределу $M \rightarrow \infty$ во всех полученных после усечения системы (3) соотношениях. При этом конечные произведения переходят в бесконечные и выражаются через гамма-функции $\Gamma(z)$. Так, например, входящая в формулу для коэффициента α_{pt} величина $(-1)^M \frac{\Delta^n}{\Delta}$ имеет своим пределом

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (-1)^M \frac{\Delta^n}{\Delta} = (-1)^{t+n} \frac{b_t (b_t + b) [1 - (-1)^n \cos 2\pi b] B(s_n)}{4\pi^2 (s_n + b) (b_t - s_n) B(b_t)},$$

где

$$B(z) = 2^{2z} \frac{\Gamma(1+b+z)\Gamma(1-b+z)}{\Gamma(1+2z)}. \quad (11)$$

Аналогичные соотношения получаются и для других отношений определителей, которые мы для краткости не выписываем.

Опуская промежуточные вычисления, выпишем окончательные выражения для матричных элементов. Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$g(b) = (2^{2b} - 2^{-2b})/2, \quad j(b) = (2^{2b} + 2^{-2b})/2,$$

$$\nu_{nt} = b_t s_n - b^2, \quad \mu_{nt} = b(s_n - b_t),$$

$$f(b) = [\Psi(1+b) + \Psi(1-b)]/2 + C + \ln 2.$$

Здесь $\Psi(z)$ — дигамма-функция, $C = 0,5772$ — постоянная Эйлера. Тогда

$$\zeta = \frac{2^{-2b}}{b} \left\{ bg(b) - R(ar_a) (j(b) - 2bf(b)g(b)) + \right. \\ \left. + P(ar_a) \left[j(b) - R(ar_a) \left(\frac{g(b)}{b} - 2f(b)j(b) \right) \right] \right\}; \quad (12)$$

$$\alpha_{po} = \frac{2^{-2b} \sin(\pi b) a''_{op}}{\pi} + \frac{b2^{-2b}}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a''_{np} B(s_n)}{b^2 - s_n^2} [1 - (-1)^n \cos 2\pi b] \times \\ \times \left[1 - \frac{R(ar_a)}{s_n} (1 - s_n 2f(b)) \right]; \quad (13)$$

$$\alpha_{pt} = \frac{2^{-2b} \sin(\pi b) a''_{op}}{2\pi b_t B(b_t)} \left\{ b_t j(b) + bg(b) + P(ar_a) \left[b_t \frac{g(b)}{b} + j(b) \right] \right\} + \\ + \frac{2^{-2b}}{4\pi^2 b B(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a''_{np} B(s_n)}{(b_t - s_n)(b^2 - s_n^2)} [1 - (-1)^n \cos 2\pi b] \times \\ \times \left\{ \nu_{nt} b g(b) + \mu_{nt} b j(b) - R(ar_a) \left[\nu_{nt} j(b) + \mu_{nt} g(b) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{s_n + b_t s_n 2f(b) - b_t}{b_t s_n} (\nu_{nt} b g(b) + \mu_{nt} b j(b)) \right] \right\} + \\ + P(ar_a) \left[\nu_{nt} j(b) + \mu_{nt} g(b) - R(ar_a) \left[\nu_{nt} \frac{g(b)}{b} + \mu_{nt} \frac{j(b)}{b} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{s_n + b_t s_n 2f(b) - b_t}{b_t s_n} (\nu_{nt} j(b) + \mu_{nt} g(b)) \right] \right\}. \quad (14)$$

Таким образом, получены явные выражения (12)–(14) для коэффициентов полуобращенной системы (10), причем для ζ — простая формула, а для α_t — быстро сходящиеся ряды, которые позволяют вычислить эти коэффициенты с любой наперед заданной точностью. Отметим,

что полученные формулы выведены без каких-либо ограничений на соотношения между размерами волновода и длиной волны. Примененный здесь метод является одним из вариантов метода полуобращения. В последнее время этот метод получил развитие применительно к задачам дифракции волн на периодических структурах [12]. Метод обращения главной части матричного оператора в настоящей работе отличается от [12]. Для этого используется метод прямого обращения бесконечной системы уравнений специального вида. Метод полуобращения выгодно отличается от другого обобщенного метода шивания — метода разложения определителя в бесконечный ряд [11], который, вообще говоря, требует введения ограничений на длину волны.

5. ТМ-ВОЛНЫ

Анализ электродинамических характеристик МВ и ОМВ был бы неполным, если бы он не учитывал ТМ-волны. Как было установлено, исследование этих волн методом прямого полуобращения принципиально не отличается от анализа ТЕ-волн. Поэтому, не останавливаясь на промежуточных соотношениях, приведем только окончательные выражения для этого случая.

Характеристики ТМ-волн МВ и ОМВ могут быть получены из решения полуобращенной системы уравнений

$$\eta C_t = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \beta_{pt} C_p \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (15)$$

с неизвестными амплитудами гармоник C_t , принятая нормировка которых следует из выражения

$$E_z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q \frac{v_\gamma(\alpha r)}{v_\gamma(\alpha r_a)} e^{i\gamma r}$$

для продольного электрического поля в области, свободной от ламелей, где

$$\eta = 2^{-2b} \left[S(\alpha r_a) \frac{g(b)}{b} + j(b) \right]; \quad (16)$$

$$\beta_{pt} = \frac{2^{-2b}}{4\pi b_t B(b_t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{np}'' s_n B(s_n)}{(b_t - s_n)(b^2 - s_n^2)} [1 - (-1)^n \cos 2\pi b] \times \\ \times \left\{ v_{nt} g(b) + v_{nt} j(b) + S(\alpha r_a) \left[v_{nt} \frac{j(b)}{b} + v_{nt} \frac{g(b)}{b} \right] \right\}, \quad (17)$$

$$v_\gamma(\alpha r) = \frac{1}{Y_\gamma(\alpha r_k)} [J_\gamma(\alpha r) Y_\gamma(\alpha r_k) - Y_\gamma(\alpha r) J_\gamma(\alpha r_k)],$$

$$S(\alpha r) = \pm \frac{\alpha r_a}{N} \frac{v_n'(\alpha r)}{v_n(\alpha r_a)},$$

$$b_{mq}'' = \frac{b_q \sigma_q + s_m \kappa_m}{b_q^2 - s_m^2},$$

$$\sigma_q(\alpha r) = \frac{\alpha r}{|\gamma|} \frac{J_{|\gamma| \pm 1}(\alpha r) Y_{|\gamma|}(\alpha r_k) - Y_{|\gamma| \pm 1}(\alpha r) J_{|\gamma|}(\alpha r_k)}{J_{|\gamma|}(\alpha r_a) Y_{|\gamma|}(\alpha r_k) - Y_{|\gamma|}(\alpha r_a) J_{|\gamma|}(\alpha r_k)},$$

$$x_m(ar) = \frac{\alpha r J_{\delta \mp 1}(ar) Y_{\delta}(ar_p) - Y_{\delta \mp 1}(ar) J_{\delta}(ar_p)}{\delta J_{\delta}(ar_a) Y_{\delta}(ar_p) - Y_{\delta}(ar_a) J_{\delta}(ar_p)}.$$

6. ВОЛНОВОДЫ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЛАМЕЛЕЙ

Полученные после полуобращения системы уравнений (10) и (15) с коэффициентами (12) — (14) и (16), (17) все еще довольно сложны. Хотя в приведенной форме они уже пригодны для машинного анализа, получение аналитических результатов в общем виде затруднительно. Это является следствием того, что указанные системы описывают все многообразие режимов распространения волн в МВ и ОМВ при произвольном соотношении длины волны и размеров волновода. Введение ограничений на характерные параметры задачи позволяет существенно упростить решение и получить ряд аналитических результатов.

Рассмотрим один из практически интересных случаев, когда число ламелей в волноводе велико. Точный смысл этого допущения следует из соотношений $(kr_a)^2 \ll N^2$ (длина волны в свободном пространстве больше азимутального периода структуры), $(r_k/r_a)^{\pm N} \ll 1$, $(r_a/r_p)^{\pm N} \ll 1$ (радиальные размеры волновода не малы по сравнению с азимутальным периодом). В этом случае матричные элементы можно упростить, если, используя известные разложения цилиндрических функций [13], записать:

$$\theta_{\gamma}(ar) \approx \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\pm |\gamma|} \frac{(ar)^2}{2|\gamma|(|\gamma| \pm 1)},$$

$$\rho_{\delta}(ar) \approx \left(\frac{r}{r_a}\right)^{\pm \delta} \frac{(ar)^2}{2\delta(\delta \mp 1)}.$$

Видно, что справедливы неравенства $|\theta_{\gamma}(ar_a)| \ll 1$ и $|\rho_{\delta}(ar_a)| \ll 1$ и, следовательно, $a''_{mq} \ll a'_{mq}$. Поэтому с точностью до сделанных допущений вместо системы (3) имеем

$$\sum_{q=-M}^M A_q a'_{mq} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 2M). \quad (18)$$

Дисперсионное уравнение для ТЕ-волн, получающееся из условия существования нетривиального решения системы (18) $\det \| a'_{mq} \| = 0$, если учесть (12), сразу можно записать в замкнутом виде:

$$bg(b) - R(ar_a) [j(b) - 2bf(b)g(b)] +$$

$$+ P(ar_a) \left[j(b) - R(ar_a) \left(\frac{g(b)}{b} - 2f(b)j(b) \right) \right] = 0. \quad (19)$$

Кроме того, если применить правило Крамера к системе (18), у которой отброшено уравнение с $m = 0$, имеем для амплитуд гармоник выражение

$$\frac{A_t}{A_0} = (-1)^t \frac{\Lambda_0^t}{\Lambda_0^0}.$$

Вычисляя отношения определителей описанным выше способом и переходя к пределу $M \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{1}{2b_t B(b_t)} \left\{ P(ar_a) \left[b_t \frac{g(b)}{b} + j(b) \right] + b_t j(b) + bg(b) \right\}. \quad (20)$$

Дисперсионное уравнение и формула для амплитуд гармоник в случае ТМ-волн будет соответственно

$$S(\alpha r_a) \frac{g(b)}{b} + j(b) = 0 \quad (21)$$

и

$$\frac{C_t}{C_0} = \frac{1}{2b_l B(b_l)(s_1 - b_l)} \left\{ S(\alpha r_a) \left[b_l s_1 \frac{g(b)}{b} - b_l j(b) + s_1 j(b) - b g(b) \right] + b_l s_1 j(b) - b_l b g(b) + b s_1 g(b) - b^2 j(b) \right\}. \quad (22)$$

Таким образом, для рассматриваемых волноводов, когда число ламелей достаточно велико, получены простые уравнения для расчета дисперсии и явные выражения для амплитуд гармоник. После решения дисперсионных уравнений (19) и (21) для любого из типов волн TE_{nl} или TM_{nl} найденное значение постоянной распространения α следует подставить в соотношения для амплитуд гармоник (20) и (22). Индекс l — номер корня дисперсионного уравнения в порядке возрастания α .

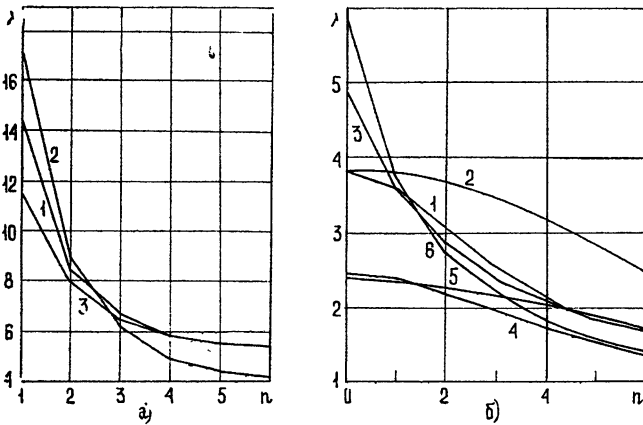


Рис. 2. Диаграммы критических длин волн МВ ($r_k = 1$, $r_a = 2$, $r_p = 3$, $N = 12$), ОМВ ($r_k = 3$, $r_a = 2$, $r_p = 1$, $N = 12$) и МВ без внутреннего проводника ($r_a = 2$, $r_p = 3$, $N = 12$). Тонкие ламели.

а) Первая (длинноволновая) группа критических частот ТЕ-волн;

б) Вторая группа критических частот ТЕ-волн и первая группа критических частот ТМ-волн;

1—МВ, ТЕ-волны; 2—ОМВ, ТЕ-волны; 3—МВ без внутреннего проводника, ТЕ-волны; 4—МВ, ТМ-волны; 5—ОМВ, ТМ-волны; 6—МВ без внутреннего проводника, ТМ-волны.

При решении дисперсионного уравнения достаточно ограничиться критическим режимом волновода, когда $\beta = \beta_{кр} = 0$, а $\alpha = \alpha_{кр} = k_{кр}$. Критические длины волн $\lambda = 2\pi/k_{кр}$, найденные из уравнений (19), (21), для трех типов рассматриваемых волноводов показаны на рис. 2. Параметры для расчета взяты близкими к типичным для волноводов, отрезки которых используются в качестве резонаторных систем электронных СВЧ приборов магнетронного типа. Кроме конкретных данных в двух полосах пропускания для выбранных волноводов приведенная диаграмма позволяет качественно проанализировать поведение критических режимов волн с различными азимутальными индексами при

уменьшении диаметра внутреннего проводника, а также сопоставить расчеты для МВ и ОМВ, выполненных на базе одного коаксиального волновода. Отметим, что для ТЕ-волн с нулевым азимутальным индексом ($n = 0$) получаем из (19) уравнение

$$P(ar_a) - R(ar_a) = 0,$$

совпадающее с дисперсионным уравнением коаксиального волновода. Это является отражением очевидного физического результата, что волна, у которой вектор электрического поля всюду направлен нормально к ламелям, не чувствует их.

Для индексов n , отличных от нуля, расчет качественно совпадает с результатами, полученными другими методами. Сопоставление настоящего расчета с наиболее четко употребляемым расчетом дисперсии по формулам работы [1], которые сравнимы по сложности с нашими, иллюстрирует рис. 3 на примере ТЕ-волны для МВ. Как видно из рисунка, в целом различие невелико, что указывает на малую чувствительность расчета дисперсии к точности применяемого для этого метода. Все же различие достигает 5%, в то время как погрешность уравнения (19) для данных параметров волновода порядка 1%.

Более существенное влияние точность метода оказывает на расчет поля в волноводе. Рассмотрим это на примере поведения амплитуд гармоник. Преобразуем выражение (11) для функции $B(b_i)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B(b_i) &= 2^{2|t|+2b\operatorname{sgn}t} \frac{\Gamma(1+|t|)\Gamma(1+|t|+2b\operatorname{sgn}t)}{\Gamma(1+2|t|+2b\operatorname{sgn}t)} = \\ &= 2^{2b\operatorname{sgn}t} \prod_{n=1}^{|t|} \frac{4n}{|t|+n+2b\operatorname{sgn}t}. \end{aligned}$$

Учитывая, что при больших t $|b| \ll |t|$, запишем

$$B(b_i) \approx 2^{2|t|} \frac{(|t|!)^2}{(2|t|)!}.$$

Применяя к этому выражению формулу Стирлинга, имеем

$$B(b_i) \approx \sqrt{\pi|t|} (|t| \gg 1).$$

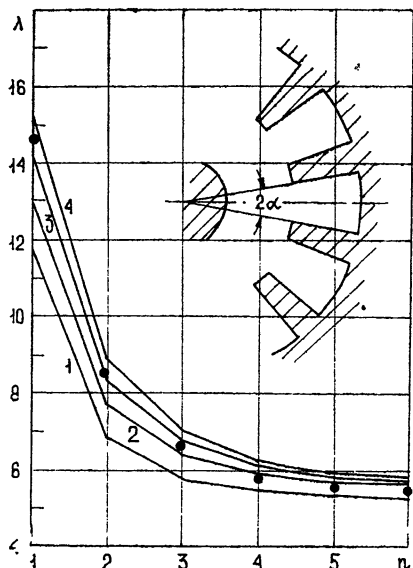


Рис. 3. Диаграмма длинноволновой группы критических длин волн МВ ($r_k = 1$, $r_a = 2$, $r_p = 3$, $N = 12$) с ламелями секторной формы, поперечное сечение которого изображено здесь же.

Приведены результаты расчета дисперсионного уравнения работы [1] для различных значений углового размера ламелей:

1— $aN/\pi=0,3$; 2— $aN/\pi=0,5$; 3— $aN/\pi=0,7$; 4— $aN/\pi=0,9$. Здесь же нанесены значения критических длин волн (точки) МВ с тонкими ламелями ($aN/\pi=1$), найденные из уравнения (19).

Это соотношение устанавливает асимптотическое поведение амплитуд гармоник больших номеров. Как следует из (1) и (15),

$$A_t = 0 (|t|)^{-1/2}, \quad C_t = 0 (|t|)^{-3/2} \quad \text{при } |t| \gg 1.$$

Полученные оценки указывают на то, что найденное решение удовлетворяет условию Майкснера на ребре [11] и, таким образом, всем краевым условиям.

Нетрудно убедиться непосредственным расчетом, что амплитуды гармоник, найденные приближенным методом [1],

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{\sin \pi (t + b)}{\sin \pi b},$$

существенно отличаются от (20). Особенно четко это видно из асимптотических оценок.

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ

В ряде случаев, в частности при решении задач о взаимодействии электронных потоков с полями рассматриваемых волноводов, необходимо знать не только амплитуды парциальных волн, но и полное поле в волноводе. Однако его определение наталкивается на значительные трудности, и до настоящего времени формулы, описывающие это распределение для МВ и ОМВ, не были получены. В данной работе для указанных волноводов удастся получить такую формулу потому, что при сделанных предположениях амплитуды парциальных волн выписаны в явном виде и их можно просуммировать.

Для сокращения записи ограничимся рассмотрением случая ТЕ-волн в МВ без внутреннего проводника. Представим формулу (20) в виде

$$\frac{A_q}{A_0} = \frac{M_1}{b_q B(b_q)} + \frac{M_2}{B(b_q)}, \quad (23)$$

где

$$M_1 = \frac{P(\alpha r_a) j(b) + b g(b)}{2}, \quad M_2 = \frac{P(\alpha r_a) \frac{g(b)}{b} + j(b)}{2}.$$

Подставляя (23) в (1) с учетом сделанных допущений, запишем выражение для азимутальной компоненты электрического поля* в виде

$$E_\varphi = \frac{P(\alpha r)}{\alpha r} e^{i n \varphi} + \frac{b}{\alpha r} \{ M_1 [L^n \Phi_2(b, L^N) - L^{*-n} \Phi_2(-b, L^{*N})] + \\ + M_2 [L^n \Phi_1(b, L^N) - L^{*-n} \Phi_1(-b, L^{*N})] \}, \quad (24)$$

где

$$L = (r/r_a) \exp(i\varphi),$$

$$\Phi_1(b, z) = \sum_{|q|=1}^{\infty} \frac{z^{|q|}}{B(b_q)}, \quad \Phi_2(b, z) = \sum_{|q|=1}^{\infty} \frac{z^{|q|}}{b_q B(b_q)}. \quad (25)$$

* Несущественный постоянный множитель опущен.

Для получения замкнутого выражения для поля необходимо просуммировать ряды (25). Рассмотрим вычисление функции Φ_1 . Подставляя в (25) выражение (11), запишем

$$\Phi_1(b, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \frac{\Gamma\left(q + b + \frac{1}{2}\right) \Gamma(q + b + 1)}{\Gamma(q + 2b + 1)} z^q.$$

Полученное выражение представляет собой гипергеометрический ряд без первого члена (см. [14]) и может быть представлено в виде

$$\Phi_1(b, z) = 2^{-2b} \left[F\left(b + \frac{1}{2}, b + 1; 2b + 1; z\right) - 1 \right],$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция.

Получающиеся при суммировании рядов гипергеометрические функции выражаются через радикалы, например,

$$F\left(b + \frac{1}{2}, b + 1; 2b + 1; z\right) = \frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1-z}\right]^{-2b}}{\sqrt{1-z}}.$$

В результате получаем

$$\Phi_1(b, z) = 2^{-2b} \left[\frac{2^{2b} [1 + \sqrt{1-z}]^{-2b}}{\sqrt{1-z}} - 1 \right], \quad (26)$$

$$\Phi_2(b, z) = \frac{1}{b} \left[[1 + \sqrt{1-z}]^{-2b} - 2^{-2b} \right].$$

Таким образом, формула (24) вместе с (26) дает замкнутое аналитическое выражение для электрического поля в цилиндрической области МВ вплоть до ламелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. V. Collins, Microwave magnetrons, vol. 6 of MIT Radiation Lab. Series, Mc Graw-Hill, N. Y., 1948.
2. A. Leblond, Ann. Radioelectron., 8, 194 (1953).
3. В. М. Бурмистренко, Л. Г. Гасанов, Ю. П. Ярешко, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 12, 53 (1966).
4. Б. Н. Морозов, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 8, 460 (1965).
5. А. И. Диденко, Радиотехника и электроника, 4, 172 (1959).
6. Ю. А. Прокопчук, В. Г. Сологуб, сб. Радиотехника, ХГУ, Харьков, вып. 10, 216 (1966).
7. И. Ш. Белуга, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 689 (1961).
8. R. Mittra, S. Laxpati, Canad. J. Phys., 43, 353 (1965).
9. И. Л. Вербицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, 1411 (1969).
10. Л. М. Бузык, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, 1878 (1971).
11. Р. Миттра, С. Ли, Аналитические методы теории волноводов, изд. Мир, М., 1974.
12. В. П. Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, Дифракция волн на решетках, ХГУ, Харьков, 1973.
13. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М., 1964.
14. Г. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 1, Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра, изд. Наука, М., 1973.

MAGNETRON WAVEGUIDE THEORY

L. M. Buzik

The problem of propagation of electromagnetic waves in a coaxial (circular) waveguide with thin metal radial plates-lamels symmetrically situated on outer or inner conductors is considered. The solution is obtained in the form of the system of linear algebraic equations by a direct half-rotation method. The solution is applicable for calculating electrodynamic characteristics for the arbitrary relation between wavelength and waveguide dimensions. In the case of sufficiently large numbers of lamels simple formulas are obtained to calculate dispersion and distribution of TE-and TM-wave field.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.396.628 : 523.164

**ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ СРЕДНЕЙ ЯРКОСТИ ФОНА НА ТОЧНОСТЬ
ИЗМЕРЕНИЯ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ
АНТЕННЫ РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

В. Т. Ермолаев, А. Г. Флакман

В области метровых и дециметровых волн предельная чувствительность радиотелескопов обусловлена флуктуациями, связанными с дискретностью метагалактического фона [1, 2]. Это явление ограничивает возможность обнаружения и регистрации радиоизлучения слабых дискретных источников Аналогичным образом флуктуации средней яркости фона ограничивают динамический диапазон измерения диаграммы направленности (ДН) антенны В работе [3] было показано, что применение вспомогательной антенны и корреляционная обработка сигнала позволяют уменьшить влияние мешающих источников на прием и, следовательно, повысить чувствительность системы. Однако, проведенный в [3] анализ предполагает наличие одного такого источника, что позволяет делать лишь качественные выводы о преимуществе интерференционного метода измерений.

В настоящей работе дана оценка степени влияния дискретности метагалактического фона при измерении боковых лепестков ДН антенны. В частности, получены выражения для предельных уровней измерения ДН как методом одиночной антенны, так и интерференционным методом Приведена также оценка точности измерения фазовой характеристики антенны

1. *Метод одиночной антенны.* Флуктуации на выходе радиотелескопа, обусловленные дискретностью метагалактического фона, можно представить в виде импульсного процесса

$$P_N = \frac{1}{2} A \sum_{\nu} S_{\nu} F(\theta_{\nu} - \theta, \varphi_{\nu} - \varphi), \quad (1)$$

где A — эффективная площадь антенны, $F(\theta, \varphi)$ — ее ДН по мощности, S_{ν} — плотность потока мощности ν -го источника, $\theta_{\nu}, \varphi_{\nu}$ — его угловые координаты. Вероятность нахождения m источников в телесном угле Ω определяется законом Пуассона [1, 2], поэтому флуктуационный процесс (1) является импульсным пуассоновским процессом с дисперсией [4]

$$D_1 = \frac{1}{4} n \bar{S}^2 A^2 \gamma_0 \Omega_0, \quad (2)$$

где n — среднее число источников в телесном угле 1 *стерад*, Ω_0 — эффективный телесный угол ДН, $\gamma_0 = \Omega_0^{-1} \int_{4\pi} F^2(\theta, \varphi) d\Omega$, черта сверху означает усреднение по всем

источникам. Величину $n \bar{S}^2$ легко вычислить, зная величину $N(S)$ — число источников в телесном угле $\Omega = 1$ *стерад* с потоками больше некоторого значения S . Соответствующие кривые приведены, например, в [1, 2].

Дисперсия флуктуаций, обусловленных наличием стационарных шумов системы, равна [5]

$$D_2 = \left(\frac{N_0 k T}{Q} \right)^2, \quad (3)$$

где N_0 — шум-фактор системы, k — постоянная Больцмана, T — температура шумов системы, Q — радиометрический выигрыш. Зная параметры конкретной измерительной

системы и используя (2) и (3), легко определить, какие флуктуации являются преобладающими в данном случае.

Вводя отношение сигнала к шуму $R = \frac{P_1}{\sqrt{D_1 + D_2}}$ (P_1 —сигнал от регистрируемого источника) и считая $D_1 \gg D_2$, получим выражение для предельного уровня измерения ДН в виде

$$F_1 \approx R \frac{\sqrt{nS^2}}{S_c} \sqrt{\gamma_0 Q_0}, \quad (4)$$

где S_c —плотность потока мощности регистрируемого источника. Например, для источника Кассиопея-А, имеющего $S_c = 6,5 \cdot 10^{-23}$ Вт/м²·Гц на частоте 408 МГц ($\sqrt{nS^2} \approx 10^{-24}$ Вт/м²·Гц), для ДН вида $\sin^2 x/x^2$ ($\gamma_0 = 4/9$) и $R = 5$ получим $F_1 = -20$ дБ и $F_1 = -30$ дБ при $Q_0 = 10 \times 10$ кв. град и $Q_0 = 1 \times 1$ кв. град соответственно.

2. *Интерферометрический метод.* Как и в случае одной антенны, на выходе коррелятора будет наблюдаться импульсный пуассоновский процесс, обусловленный дискретностью метагалактического фона. Поскольку ток коррелятора пропорционален функции взаимной когерентности Вольфа и комплексной ДН, его дисперсия будет равна

$$D_3 = \frac{1}{4} n \bar{S}^2 A A_3 \int_{4\pi} F(\theta' - \theta, \varphi' - \varphi) F_3(\theta', \varphi') [\text{Re } \Gamma(\theta')]^2 d\Omega', \quad (5)$$

где A_3 —эффективная площадь вспомогательной (эталонной) антенны, $F_3(\theta, \varphi)$ —ее ДН по мощности, Γ —функция взаимной когерентности.

Для оценки интеграла в (5) будем считать параметры системы выбранными таким образом, что все источники являются точечными и можно не учитывать влияние конечной полосы принимаемых частот. Соответствующие неравенства приведены в [1]. Используя далее неравенство Коши—Буняковского и вводя аналогично предыдущему отношению сигнала к шуму R , нетрудно получить следующую оценку для минимального уровня измерения ДН антенны интерферометрическим методом:

$$F_2 \lesssim \frac{1}{2} R^2 \frac{nS^2}{S_c^2} \sqrt{\gamma_0 \gamma_3 Q_0 Q_3}. \quad (6)$$

Сравнивая (4) и (6) и считая $\gamma_0 = \gamma_3$, получим, что

$$F_2 \lesssim \frac{1}{2} F_1^2 \sqrt{Q_3/Q_0}. \quad (7)$$

Принимая $Q_3 = 4Q_0$, для приведенного выше примера, получим $F_2 \lesssim -40$ дБ и $F_2 \lesssim -60$ дБ, при $Q_0 = 10 \times 10$ кв. град и $Q_0 = 1 \times 1$ кв. град соответственно.

Конечно, реальный измерительный комплекс будет иметь предельный уровень измерения несколько выше, так как существует дополнительный ряд ограничивающих факторов (шумы аппаратуры, градиенты распределенного космического радионизлучения, флуктуационные явления в атмосфере и т. д.). Так, для измерительной системы, описанной в [9], формулы (4) и (6) дают $F_1 = -38$ дБ и $F_2 \lesssim -76$ дБ, в то время, как пороговая чувствительность аппаратуры обеспечивает измерения до -70 дБ, а экспериментально достигнутый уровень равен -60 дБ. Таким образом, можно считать, что полученные формулы дают достаточно правильные оценки степени влияния флуктуаций средней яркости фона и могут быть полезными для правильного выбора параметров измерительной системы.

Нетрудно также оценить среднеквадратичную ошибку $\delta\varphi$ измерения фазовой характеристики антенны, обусловленную дискретностью метагалактического фона. Измерение фазовой характеристики осуществляется путем измерения фазы высокочастотного заполнения функции взаимной когерентности. Используя (6), имеем

$$\delta\varphi \approx \arcsin \frac{1}{R} \lesssim \arcsin \left(\frac{\sqrt{nS^2}}{\sqrt{2} S_c} \frac{\sqrt{\gamma_0 \gamma_3 Q_0 Q_3}}{\sqrt{F(\theta_c - \theta, \varphi_c - \varphi)}} \right). \quad (8)$$

Тогда для приведенного выше примера $\delta\varphi \lesssim 1^\circ$ при измерении ДН до уровня -20 дБ и $\delta\varphi \lesssim 3^\circ$ при измерении до -30 дБ ($Q_0 = 10 \times 10$ кв. град).

В заключение отметим, что для измерения только амплитудной характеристики ДН антенны может быть использована схема интерферометра интенсивностей, выход которого пропорционален квадрату функции взаимной когерентности [1]. Анализ флуктуаций производится аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Есепкина, Д. В. Корольков, Ю. Н. Парийский, Радиотелескопы и интерферометры, изд. Наука, М., 1973.
2. Ю. П. Ильясов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 536 (1971).
3. P. G. Smith, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-14, № 1, 6 (1966).
4. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
5. Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. A. P. Hartsujker, J. W. M. Baars, S. Drenth, L. Gelato-Volders, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-20, № 2, 166 (1972).

Поступила в редакцию
3 сентября 1975 г.
