

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

<b>Несмеянович А. Т.</b> , Мусатенко С. И., Кравченко В. А., Чмиль В. В. Радиовсплески из околоземного космического пространства в метровом диапазоне	1101
<b>Цейтлин Н. М.</b> , <b>Дмитренко Л. В.</b> , <b>Дмитренко Д. А.</b> , <b>Миллер Е. А.</b> , <b>Снегирева В. В.</b> , <b>Титов Г. К.</b> Результаты абсолютных измерений интенсивности Кассиопеи-А, Лебедя-А, Тельца-А и Девы-А на волнах 30—100 см и их спектры в диапазоне 3—100 см, полученные с помощью «черного» диска, расположенного в зоне Френеля	1106
<b>Гоцакова Л. С.</b> , <b>Громницкий В. С.</b> , <b>Яшин Ю. Я.</b> К вопросу об определении полного поля КВ радиоволн при значительном удалении приемника от источника	1114
<b>Докучаев В. П.</b> , <b>Тамойкин В. В.</b> , <b>Чугунов Ю. В.</b> Излучение спиральных волн в магнитоактивной плазме распределенными источниками	1121
<b>Жаров А. А.</b> , <b>Кондратьев И. Г.</b> О резонансном экранирующем действии неоднородных гиротропных плазменных слоев	1130
<b>Гурбатов С. Н.</b> , <b>Саичев А. И.</b> О вероятностном описании нелинейных ленгмюровских колебаний	1142
<b>Власов С. Н.</b> , <b>Гурбатов С. Н.</b> К теории самовоздействия интенсивных световых пучков в плавнонеоднородных средах	1149
<b>Мельникова В. А.</b> , <b>Таранович Т. М.</b> Конкуренция мод и режимы захвата автогенератора	1156
<b>Хименко В. И.</b> Оценка параметра асимметрии одномерной функции плотности распределения вероятностей, представленной рядом Эджворта	1162
<b>Разевиг В. Д.</b> Понижение порядка стохастических дифференциальных уравнений с малыми параметрами	1166
<b>Волков И. И.</b> , <b>Мотов В. В.</b> , <b>Токарев А. П.</b> Способ построения устройства для оценки интервала корреляции нецентрированного стационарного случайного процесса	1174
<b>Дубков А. А.</b> , <b>Малахов А. Н.</b> Свойства и взаимосвязи кумулянтов случайной переменной	1179
<b>Хименко В. И.</b> О нормированных спектральных моментах стационарных случайных процессов	1188
<b>Музычук О. В.</b> Приближение Бурре для плоских волн в средах с пространственно-временными флуктуациями параметров	1193
<b>Пономарев Г. А.</b> , <b>Якубов В. П.</b> Геометрооптическое приближение и метод Кирхгофа в задаче рассеяния волны на неровной поверхности	1202
<b>Вайслейб Ю. В.</b> Дифракция электромагнитных волн на скачкообразном сужении поперечного сечения круглого волновода	1208
<b>Карушкин Н. Ф.</b> , <b>Фиалковский А. Т.</b> Расчет слонистой металло-диэлектрической структуры конечной длины, расположенной в прямоугольном волноводе	1218
<b>Васильев Е. Н.</b> , <b>Фалуниин А. А.</b> , <b>Гореликов А. И.</b> Возбуждение цилиндра конечной длины азимутальным диполем Герца	1225
<b>Романов Ю. А.</b> , <b>Дряхлушин В. Ф.</b> , <b>Орлов Л. К.</b> Плазменные волны в полупроводниках со сверхрешеткой	1231
<b>Павлов В. А.</b> Макроскопический ток пучка заряженных частиц, перемещающегося в плазме	1239
<b>Лазебник Б. С.</b> , <b>Марков Г. А.</b> , <b>Хазанов И. В.</b> О теоретической модели нелинейного резонансного взаимодействия СВЧ поля с газоразрядной плазмой	1246

### Краткие сообщения и письма в редакцию

<b>Пузенко А. А.</b> , <b>Чаевский Е. В.</b> Диффузионное приближение для функции взаимной когерентности	1252
<b>Терешин О. Н.</b> , <b>Седов В. М.</b> , <b>Костиков Р. Н.</b> Коррекция параметров синтезируемой импедансной поверхности при наличии потерь	1254

УДК 523.164.4

**РАДИОВСПЛЕСКИ ИЗ ОКОЛОЗЕМНОГО КОСМИЧЕСКОГО  
ПРОСТРАНСТВА В МЕТРОВOM ДИАПАЗОНЕ****А. Т. Несмянович**, С. И. Мусатенко, В. А. Кравченко, В. В. Чмиль

Анализ материалов радиослужбы Солнца за 1971 г. на частотах 204 МГц (КГУ, Киев), 202—206 МГц (ИЗМИРАН, Москва), 200 МГц (НИРФИ, Горький) показал, что часть всплесков, зарегистрированных как солнечные, не являются таковыми, а генерируются в околоземном космическом пространстве. Характеристики этих всплесков: высота области генерации  $\sim 1500$  км, плотность потока радиоизлучения — около  $6 \cdot 10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup> · Гц, длительность всплесков — от 0,1 до 4 мин. Хорошее совпадение характеристик всплесков объяснить местными помехами не удается, так как пункты наблюдений достаточно удалены друг от друга ( $\sim 1000$  км).

В 1970—71 гг. НИРФИ было проведено одновременное наблюдение всплесков радиоизлучения в диапазоне от 3 до 50 см в пунктах, разнесенных по широте и долготе (Мурманская обл., Горьковская обл., Уссурийский край, Крым) [1]. В результате проведения этих работ было показано, что большинство всплесков, наблюдаемых в данном месте, не являются следствием местных радиопомех, а приходят из околоземного космического пространства в результате возбуждения в магнитосфере Земли колебаний корпускулярными потоками, связанными с различными проявлениями геомагнитной и солнечной активности. Было высказано предположение, что подобные всплески возможны и в метровом диапазоне волн. Для обнаружения таких всплесков использовались материалы радиослужбы Солнца на  $f = 204$  МГц, проводимой на помехоразличающем радиотелескопе станции КГУ в с. Лесники. Идентификация помех основана на модуляции полезного сигнала периодическим изменением формы диаграммы направленности антенны [2].

Форма диаграммы направленности изменяется следующим образом. Антенная система электрически разделена на две половины. При помощи фазового переключателя, управляемого генератором опорного напряжения, сигналы от антенн поступают в фазе или противофазе. При этом в первом случае получаем максимум отклика радиотелескопа в направлении главного лепестка, а во втором — минимум, и диаграмма состоит из двух лепестков, угол между которыми определяется размерами антенной системы. На выходе синхронного детектора сигнал равен разности: сигнал, когда обе половины антенны составлены в фазе, минус сигнал, когда они соединены в противофазе. Сигнал на ленте самописца, принятый по основному лепестку, имеет «положительную» полярность, а сигнал, принятый по боковым лепесткам, — «отрицательную» полярность. Благодаря этому легко отличить полезный сигнал солнечного происхождения от местных помех и всплесков космического происхождения, приходящих из направления, не совпадающего с направлением на Солнце. Таким образом, сигнал «отрицательной» полярности может быть помехой или же излучением из космического пространства, принятым по «боковому» лепестку. В последнем случае

излучение может быть обнаружено другими станциями радиослужбы Солнца. Поэтому для обнаружения явлений несолнечного происхождения необходимо сравнить оригинальные записи радиоизлучения Солнца нескольких станций на одинаковых или близких частотах.

Наиболее близкими по частоте и доступными оказались записи на частотах 202—206 МГц (ИЗМИРАН, Академгородок, Московская обл.) и 200 МГц (НИРФИ, Звенижки, Горьковская обл.).

На первом этапе работы было проведено сравнение всплесков, зарегистрированных на частотах 204, 202 (206) и 200 МГц по бюллетеню «Солнечные данные» за 1971 г. [3]. Было найдено несколько всплесков, приведенных в бюллетене, но зарегистрированных в Киеве как помехи (например, за 14.01.71, рис. 1). Вторым этапом было срав-

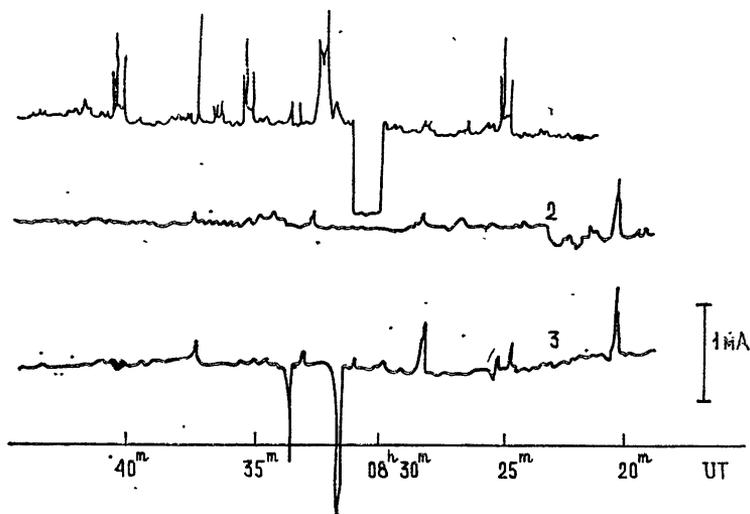


Рис. 1. Всплеск, зарегистрированный 14.01.71 г. в НИРФИ (1), ИЗМИРАНе (2), КГУ (3) (1 мА соответствует  $9,5 \cdot 10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup>·Гц).

нение оригинальных записей, полученных на станциях КГУ, ИЗМИРАН, НИРФИ. Результаты сравнения КГУ—ИЗМИРАН показали, что все особенности всплесков, шумовых бурь и т. п. совпадают с очень высокой точностью. Это объясняется близостью частот и одинаковыми приемниками. Совпадения на записях КГУ—НИРФИ тоже довольно хорошие. Были обнаружены записи сигналов, полученные на двух или трех станциях одновременно, но заметно отличающиеся по форме, длительности, амплитуде и полярности (рис. 2—5). Эти сигналы не могли быть местными помехами, так как расстояние КГУ—ИЗМИРАН около 750 км, а КГУ—НИРФИ более 1000 км. Записи этих событий были сфотографированы и сравнивались проектированием на диапроекторе (приводились к одному масштабу по скорости записи).

В результате такого сравнения было отобрано двадцать событий за 1971 г. Столь небольшое количество можно объяснить тем, что вероятность прихода всплесков с любого направления можно считать одинаковой, а излучение принимается из узкого конуса, ограниченного диаграммой направленности, а также коротким интервалом синхронных наблюдений в течение суток, характеристиками областей генерации, низкой чувствительностью аппаратуры.

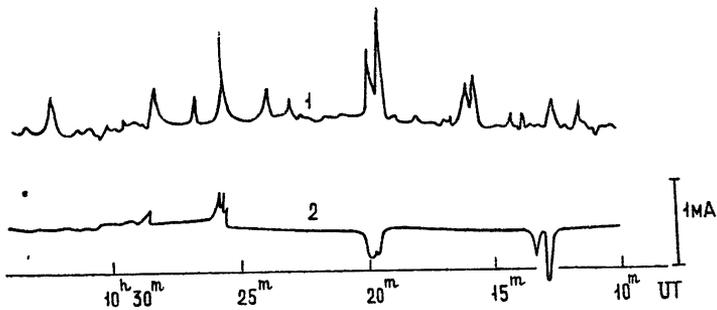


Рис. 2.

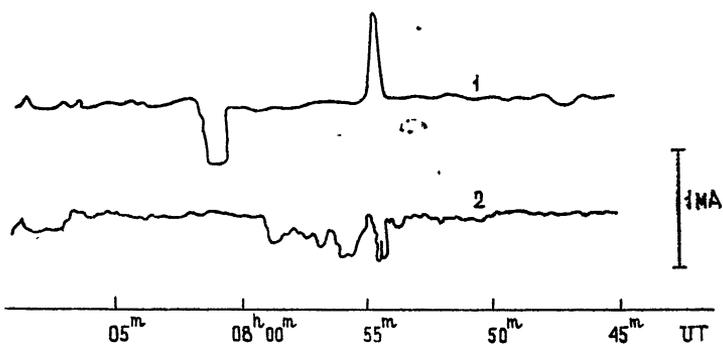


Рис. 3.

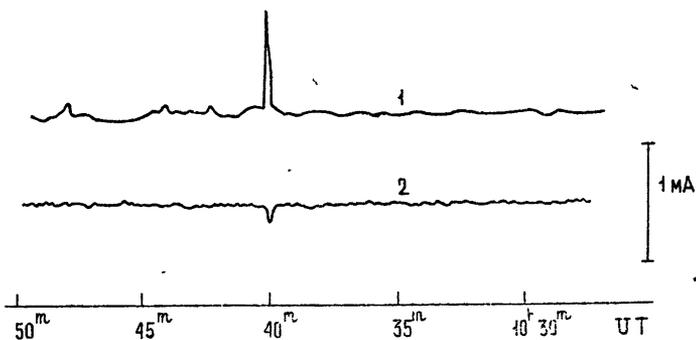


Рис. 4.

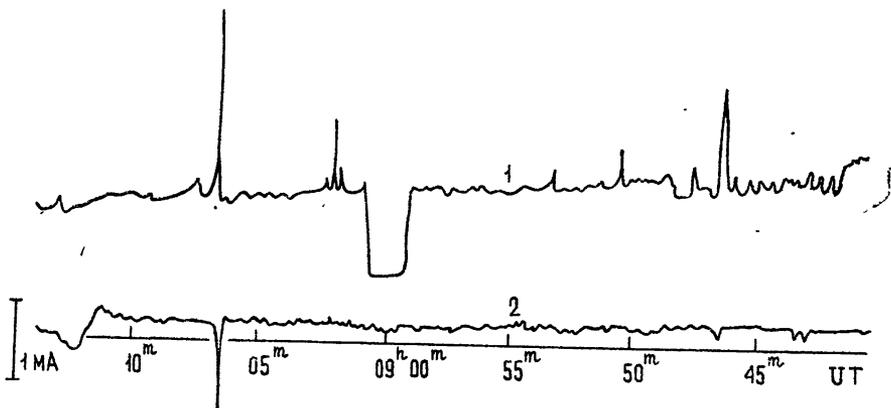


Рис. 5.

Рис. 2, 3, 4, 5. Всплески, зарегистрированные 6.01.71, 13.03.71, 25.03.71, 24.04.71 г.  
 (1 мА соответствует  $9,5 \cdot 10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup>·Гц).

Явления имели характер всплесков длительностью от 0,1 до 4 минут. Иногда всплески следовали группами. Средняя продолжительность группы всплесков — 15 мин. На рис. 6 представлено распределение всплесков по длительности.

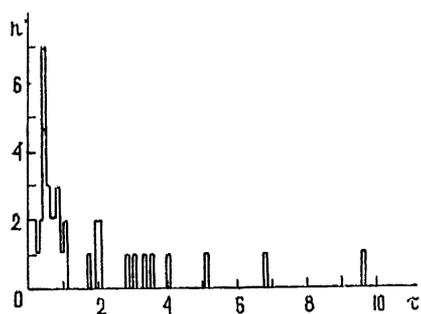


Рис. 6.

Рис. 6. Распределение всплесков по длительности;  $n$  — число всплесков, обнаруженных в интервале  $\tau \pm 0,5$  мин (1971 г.).

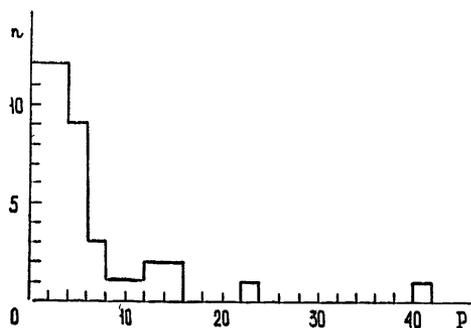


Рис. 7.

Рис. 7. Распределение всплесков по плотности потока радиоизлучения;  $n$  — число всплесков, вычисленное в интервале значений плотности потока  $P \pm 1 \cdot 10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup>·Гц.

Поскольку калибровка радиометра производилась по источнику Кассиопея-А, плотность потока энергии которого считается известной, то определялись плотности потока всплесков. Среднее значение плотности потока равно  $6 \cdot 10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup>·Гц, максимальное значение  $40 \cdot 10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup>·Гц. На рис. 7 приведено распределение всплесков по плотности потока.

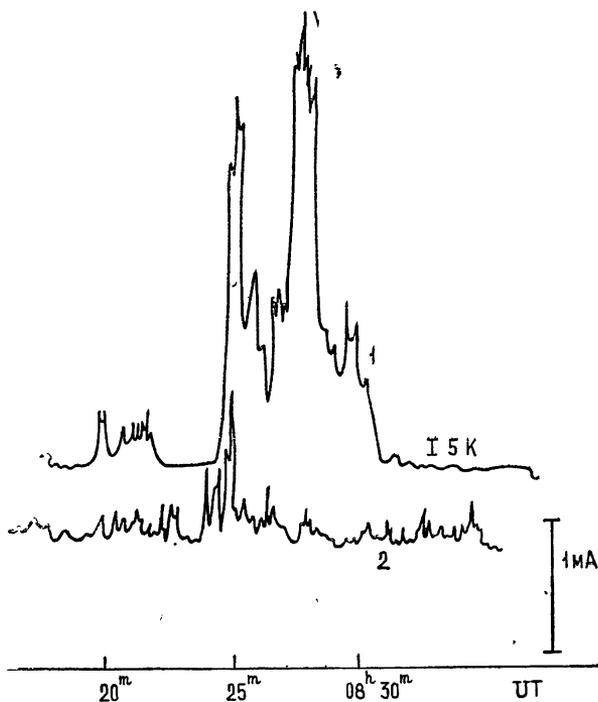


Рис. 8. Всплеск, наблюдавшийся в Крыму ( $l-\lambda=50$  см) и в Киеве ( $2-\lambda=1,5$  м) (1 мА соответствует  $9,5 \cdot 10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup>·Гц).

Учитывая, что на станциях применялись направленные антенны, а также задавая определенными размеры области генерации, можно оценить высоты этих областей. Если исходить из предположения, что область генерации имеет угловые размеры значительно меньших угловых размеров главного лепестка диаграммы направленности, то из условия перекрытия трех главных лепестков можно найти, что высота области генерации составляет около 1000—1500 км. К этой оценке необходимо относиться весьма осторожно, так как истинные размеры области генерации могут изменяться в очень широких пределах.

Всплеск за 16.10.70 г. на волне  $\lambda = 50$  см, приведенный в [1], зарегистрирован на  $\lambda = 1,5$  м в Киеве (рис. 8). Это является подтверждением широкополосности явлений данного типа.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность В. С. Троицкому и всем сотрудникам НИРФИ, принимавшим участие в обсуждении данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, А. М. Стародубцев, Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, К. М. Стрежнева, М. С. Китай, А. И. Сергеева, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 3, 323 (1973).
2. А. Т. Несмянович и др., Вестник Киевского университета № 10, сер. астрон., 21 (1968).
3. Солнечные данные № 1—12 (1971).

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 июня 1975 г.

#### RADIO BURSTS FROM NEAR-THE-EARTH COSMIC SPACE IN METER WAVE RANGE

*A. T. Nesmyanovich, S. I. Musatenko, V. A. Kravchenko, V. V. Chmil'*

The analysis of the solar service data for 1971 at the frequencies 204 MHz (KSU, Kiev), 202—206 MHz (IZMIRAN, Moscow), 200 MHz (NIRFI, Gorki) indicated that a part of bursts recorded are not of the solar origin but are generated in the near-the-Earth cosmic space. The characteristics of these bursts are: the height of the generation region  $\sim 1500$  km, the radio emission flux density about  $6 \cdot 10^{-22}$  W/m<sup>2</sup>·Hz, burst duration from 0.1 to 4 min.

A good agreement between the burst characteristics is not succeeded to explain by local noises because the observation sites are sufficiently far distant from each other ( $\sim 1000$  km).

УДК 523.164.4

**РЕЗУЛЬТАТЫ АБСОЛЮТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ  
КАССИОПЕИ-А, ЛЕБЕДЯ-А, ТЕЛЬЦА-А И ДЕВЫ-А НА ВОЛНАХ  
30—100 см И ИХ СПЕКТРЫ В ДИАПАЗОНЕ 3—100 см,  
ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ «ЧЕРНОГО» ДИСКА,  
РАСПОЛОЖЕННОГО В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ**

*Н. М. Цейтлин, Л. В. Дмитренко, Д. А. Дмитренко, Е. А. Миллер,  
В. В. Снегирева, Г. К. Титов*

Приведены результаты абсолютных измерений потоков Кассиопеи-А, Лебедя-А, Тельца-А и Девы-А в диапазоне волн 30—100 см, полученные с использованием «черного» диска, расположенного на расстояниях 50 и 100 м от 7-метрового радиотелескопа, т. е. в зоне Френеля. По результатам этих измерений и предыдущих измерений авторов, проведенных тем же методом в диапазоне 3—30 см, построены спектры в диапазоне 3—100 см. Спектральные индексы в диапазоне 3—100 см равны (эпоха 1973.3): Кассиопея-А —  $0,84 \pm 0,03$ ; Лебедь-А —  $1,28 \pm 0,06$  ( $\lambda = 3 \div 9$  см),  $-1,1 \pm 0,1$  ( $\lambda = 10 \div 30$  см) и  $-1 \pm 0,03$  ( $\lambda = 30 \div 100$  см); Телец-А —  $-0,23 \pm 0,03$ ; Дева-А —  $-0,76 \pm 0,1$  ( $\lambda = 10 \div 30$  см) и  $-0,5 \pm 0,05$  ( $\lambda = 30 \div 100$  см). Подтверждена обнаруженная авторами в 1969 г. частотная зависимость годового уменьшения потока Кассиопеи-А (на волнах 30—100 см 0,5—0,6% в год, в то время как на  $\lambda = 7,5 \div 30$  см 1,2% в год).

Абсолютные измерения интенсивности излучения мощных дискретных источников существенны как в радиоастрономии, поскольку они не только служат исследованию этих источников, но и определяют абсолютную шкалу интенсивностей, по которой калибруются более слабые источники, так и в приложениях радиоастрономии, например, к антенной технике, где эти источники также служат калибровочными эталонами.

В связи с этим в НИРФИ, начиная с 1961 г., проводятся абсолютные измерения интенсивности Кассиопеи-А, Лебедя-А, Тельца-А и Девы-А на сантиметровых—дециметровых волнах с помощью метода «черного» диска («искусственной Луны» [12, 21, 24]), обеспечивающего достаточно высокую точность. При этом используются две разновидности метода, отличающиеся расположением диска в дальней зоне антенны радиотелескопа и в зоне Френеля. Поскольку каждой из модификаций метода свойственны свои специфические погрешности, представляется целесообразным получать абсолютные спектры этими методами раздельно для последующего сравнения.

Это тем более оправдано, что имеется ряд подробных обзоров [2, 3, 11, 14, 23] (основанных в значительной степени на результатах НИРФИ), посвященных установлению абсолютных спектров мощных источников по результатам измерений, проведенных разными авторами и разными методами, в которых результаты разных работ редуцируются в соответствии с предположениями авторов упомянутых обзоров. Последнее обстоятельство, естественно, снижает точность полученных спектров и не позволяет выявить их особенности (например, уплотнения, частотную зависимость векового хода и т. д.), хотя и обладает

тем преимуществом, что способно, по-видимому, как-то нивелировать систематические погрешности различных работ.

Целесообразность построения абсолютных спектров по результатам измерений, проведенных в широком диапазоне волн одним и тем же методом, очевидна. Проведение измерений желательно в возможно более короткий срок в связи с уменьшением потока излучения Кассиопеи-А, предсказанным и рассчитанным Шкловским [27], поскольку, как оказалось [8, 19], это уменьшение не постоянно по спектру, а зависит от частоты.

Первыми работами, реализовавшими в достаточно короткий срок (по 4 месяца в 1967 и 1969 гг.) программу абсолютных измерений потоков двух источников Кассиопеи-А и Лебедя-А в диапазонах волн 30—60 см и 3—100 см по единой методике («черный» диск в дальней зоне антенны), были работы [4, 20].

В настоящей работе, проведенной с марта 1972 г. по сентябрь 1974 г. на полигоне НИРФИ «Старая Пустынь», представлены результаты абсолютных измерений потоков четырех источников—Кассиопеи-А, Лебедя-А, Тельца-А и Девы-А в диапазоне волн 30—100 см методом «черного» диска, расположенного в зоне Френеля антенны. Поскольку с мая 1968 г. по июль 1970 г. тем же методом авторы измеряли потоки этих источников в диапазоне 3—30 см [5, 7, 8], то ниже приведены также спектры указанных источников во всем диапазоне 3—100 см.

## 1. УСЛОВИЯ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ В ДИАПАЗОНЕ 30 — 100 см

Измерения проводились по методу «черного» диска, расположенного в зоне Френеля антенны [9, 24]. При этом для выявления и учета влияния различного рода побочных факторов, сопровождающих обычно измерения, использовались различные диски, покрытые разнотипными поглощающими материалами ( $\lambda = 30 \div 60$  см,  $d = 1,9$  м;  $\lambda = 60 \div 100$  см,  $d = 2$  м, где  $d$  — диаметр диска), установленные на 25-метровой вышке при двух расстояниях от радиотелескопа ( $R_1 = 53,6$  м;  $R_2 = 100,3$  м). Измерения проводились с помощью 7-метровой антенны радиотелескопа, облучаемой полуволновым диполем на вертикальной ( $\uparrow$ ) и горизонтальной ( $\rightarrow$ ) поляризациях, и модуляционного приемника\* при существенно различных внешних условиях, связанных со временем измерений. В табл. 1 приведены некоторые данные об этих условиях.

Приращение температуры антенны при наведении ее на исследуемый источник и опорную область  $\Delta T_{a, \text{ист}}$  и в направлении на калибровочный эталон (при наличии и отсутствии «черного» диска)  $\Delta T_{a, \text{д}}$  измерялись при постоянном (соответствующем  $R_{1,2}$ ) смещении облучателя в точку пересечения фокальных пятен, измеренных в дальней зоне по излучению Солнца, и в зоне Френеля по излучателю, расположенному на вышке. Такое смещение облучателя обеспечивало в нашем случае равенство величин усиления антенны при приеме излучения исследуемого источника и калибровочного эталона (общее падение усиления при этом по сравнению с фокусировкой антенны на «бесконечность» не превышало 5—7%, так как в этом диапазоне калибровочный эталон размещался на расстояниях всего в 3—7 раз меньших, чем до условной границы дальней зоны). Однако в нашем случае наблюдалось заметное искажение фокального пятна, обусловленное реакцией зеркала на облучатель, причем это искажение не оставалось постоянным при изменении внешних условий. Это обстоятельство усложняло измерения

\* На волнах  $\lambda = 30 \div 60$  см применялся модернизированный приемник П5-9 с флуктуационным порогом чувствительности  $\Delta T_{\min} \approx 1$  К при постоянной времени  $\tau = 1$  с; на волнах  $\lambda = 60 \div 100$  см радиометр с  $\Delta T_{\min} \approx 0,5$  К при  $\tau = 1$  с.



и несколько ухудшало их точность, поскольку приходилось ежедневно контролировать оптимальность величины смещения облучателя и при необходимости вводить соответствующие поправки.

Измерения состояли из чередующихся циклов, включающих в себя измерения величин калибровочных сигналов (в начале и в конце цикла), и измерения сигналов от исследуемых источников. При этом в каждом цикле измерялось излучение не менее двух источников, одним из которых был источник Кассиопея-А. Это позволило контролировать идентичность существенно разнесенных во времени измерений, а также проводить оценки относительной величины потоков источников. Выбор интервалов времени измерений проводился так, чтобы калибровочный эталон проецировался на области высоких галактических широт, а источник наблюдался на углах места  $\geq 30^\circ$ . Это позволило свести к минимуму влияние фона за диском при измерении  $\Delta T_{a.д}$  и отражений от земли при измерениях  $\Delta T_{a.ист}$ .

За уровень нулевого отсчета при измерениях  $\Delta T_{a.ист}$  принималось среднее значение фона космического радиоизлучения между двумя опорными областями, соответствующими отведениям антенны по азимуту вправо и влево от источника (антенна отводилась на угол, соответствующий первому нулю диаграммы направленности и составляющий для разных волн от 3 до  $10^\circ$ \*). «Опорная» область сопровождалась по азимуту и углу места так же, как и исследуемый источник.

Потоки источников определялись на основании результатов измерений по обычной формуле [9]:

$$S_\nu = \frac{2k}{\lambda^2} e^\gamma (T_d - T_{ф.д}) (1 + \xi) \int_{\Omega_d} F d\Omega \frac{\Delta n_{ист}}{\Delta n_d} - \Delta S_\nu, \quad (1)$$

где  $\Delta n_{ист} \sim \Delta T_{a.ист}$ ,  $\Delta n_d \sim \Delta T_{a.д}$  — приращения показаний выходного прибора радиометра при приеме радиоизлучения источника и диска,  $\gamma$  — поглощение в атмосфере,  $T_d = T_0 (1 - r^2/4)^{**}$  — яркостная температура диска,  $T_{ф.д}$  — яркостная температура фона за диском,  $F$  — нормированная диаграмма направленности антенны по мощности,  $\Omega_d$  — телесный угол диска,  $\xi$  — дифракционная поправка [1, 25],  $\Delta S_\nu$  — поправка, учитывающая неравномерность космического излучения в районе источника и опорных областей:

$$\Delta S_\nu = \frac{2k}{\lambda^2} \frac{4\pi}{D_e} \frac{1}{2} (\Delta T_{ист.-оп 1} + \Delta T_{ист.-оп 2}), \quad (2)$$

$D_e$  — КНД антенны по  $\Omega_{полн}$  — полному лепестку диаграммы направленности, включающему главный и несколько боковых лепестков [6],  $\Delta T_{ист.-оп 1,2}$  — разность усредненных по полному лепестку яркостных температур в районе источника и опорной области,

$$\Delta T_{ист.-оп} = \left( \int_{\Omega_{полн}} T_{ф.ист} F d\Omega - \int_{\Omega_{полн}} T_{ф.оп} F d\Omega \right) / \int_{\Omega_{полн}} F d\Omega.$$

В рассматриваемом диапазоне волн температура фона космического излучения  $T_{косм}$  даже в районе высоких галактических широт составляет на разных волнах от 4 до 60 К и вносит заметный вклад

\* При измерениях радиоизлучения Тельца-А на  $\lambda = 60 - 100$  см антенна отводилась по азимуту лишь в одну сторону, чтобы избежать влияния теплового источника вблизи Тельца-А.

\*\*  $r^2$  — коэффициент отражения поглощающего материала по мощности.

в  $(T_d - T_{ф.д.}) \approx T_0 - [(T_0 - 32^\circ) \gamma + T_{косм}]$ . Она определялась для каждого цикла измерений на каждой длине волны по формуле

$$T_{косм} = (\lambda/75)^{2.5} (T_{косм\ 75} + 12,5\text{ К}), \quad (3)$$

где  $\lambda$  — длина волны в сантиметрах,  $T_{косм\ 75}$  — яркостная температура распределенного космического радиоизлучения в направлении диска на волне 75 см [18]\*.

Соотношение (3) использовалось также при подсчете усредненных по полному лепестку температур космического фона в районе источника и опорных областей  $T_{ср.ист.}$ ,  $T_{ср.оп.}$ . Точность поправки  $\Delta S_v$  существенно зависит от точности определения  $\Delta T_{ист.-оп.}$ . Для определения усредненных по полному лепестку температур излучения указанных областей  $T_{ср.ист.}$  и  $T_{ср.оп.}$  необходимо интегрирование по диаграмме направленности антенны (изофоты космического излучения в районе источника расположены неравномерно). При симметричной диаграмме направленности это сводится, как известно [26], к усреднению температуры излучения по кольцам вокруг центра области радиуса  $r_k$  с «весом», определяемым формой диаграммы направленности антенны ( $F_k$ ):

$$T_{ср} \approx \frac{\sum_{k=1}^n T_k r_k F_k}{\sum_{k=1}^n r_k F_k}, \quad (4)$$

где  $T_k$  — средняя температура в кольце радиуса  $r_k$ .

Если принять во внимание, что погрешность в температурах, определяемых по изофотам, в среднем порядка 20%\*\*, а погрешность определения  $D_2$  порядка 25%, то среднеквадратичная погрешность поправки  $\Delta S_v$  составит  $\approx 30\%$ . Столь значительная ошибка тем не менее оказывает малое влияние на точность определения плотности потока источника  $S_v$  в том случае, когда сама поправка  $\Delta S_v$  мала по сравнению с  $S_v$  (например, в диапазоне  $\lambda = 30 \div 60$  см). Однако на более длинных волнах она вносит существенный вклад в погрешность определения плотности потоков источников Лебедь-А (на  $\lambda = 90 \div 100$  см) и Телец-А (на  $\lambda = 60 \div 100$  см), где поправка  $\Delta S_v$  составляет от 30 до 80% величины  $S_v$  (см. табл. 2). Сигнал от Кассиопеи-А достаточно велик, а фон в районе Девы-А достаточно мал, поэтому влияние  $\Delta S_v$  здесь мало.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты измерений представлены в табл. 1. Здесь же приведены погрешности определения  $S_v$ :  $\delta_{\Sigma}$  — суммарная среднеквадратичная ошибка измерений,  $\delta_{фл.}$  — погрешность, определяемая флуктуационным порогом чувствительности,  $\delta_{\xi} = \frac{\xi}{2} / (1 + \xi)$  — ошибка внесения дифракционной поправки,  $\delta_{фок}$  — погрешность, связанная с неточностью установки облучателя в точку пересечения фокальных пятен,  $\delta_{\Delta T_{д.ф}}$  — по-

\* В (3) учтена поправка 12,5 К [16]. Температура в полярной области на частоте 400 МГц — 23,5 К.

\*\* При расчетах использовались как абсолютные значения температур, так и их разности. Абсолютные значения температуры, указанные на изофотах, определены с ошибкой, достигающей 25—30% в областях минимальных температур, в то же время разность температур излучения из различных областей, достаточно удаленных от центра Галактики, известна с погрешностью 5—10%, определяемой погрешностью относительных измерений.

Таблица 1

$\lambda, \text{см}$	$R, \text{м}$	П	$\xi, \%$	$\delta_{\xi}, \%$	$\delta_{\Delta T_{\text{д. ф.}}}, \%$	$\delta_{\text{фок.}}, \%$	$\delta_{\text{фл.}}, \%$				$\delta_{\Sigma} = \sqrt{\sum \delta_i^2}, \%$				$\Delta S_{\nu}, 10^{-24} \cdot \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$			$S_{\nu}, 10^{-24} \cdot \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$				Эпоха
							Кассиопея-А	Лебедь-А	Телец-А	Дева-А	Кассиопея-А	Лебедь-А	Телец-А	Дева-А	Кассиопея-А	Лебедь-А	Телец-А	Кассиопея-А	Лебедь-А	Телец-А	Дева-А	
30	100,3	→	7,7	4	0,5	1,5	2	3	3	4,5	5	5,5	5,5	6,5	0,5	-0,04	0,02	29,9±1,5	18,9±1	9,4±0,5	3,05±0,2	1973.3
10	100,3	→	9,3	4	0,7	4	3	3	3	4	7	7	7	7,5	0,2	-0,7	0,1	33,5±2,3	25,2±1,8	10,6±0,75	4,1±0,3	1972.10
	53,6	→	4,8	2,5	0,5	8,5	3	1,5	4	5	9,5	9,0	10	10	0,1	-0,5	0,1	36,9±3,5	26,4±2,4	10,5±1	3,3±0,3	1972.4
51,7	100,3	→	15	6,5	0,8	2	2,5	1,5	2,5	3	7	6,5	7,5	7	1,1	0,1	0,7	47,8±3,3	36,1±2,4	13,1±1	4±0,3	1972.11
	53,6	→	7,4	3	0,8	3,5	2	2,5	3	4	6	6,5	7	7	0,7	2,2	0,7	50,1±3	32,1±2	10,5±0,7	3,7±0,25	1972.4
59,5	100,3	→	19,3	8,5	1,0	0,7	1,5	2,5	2	4,5	9	11	13,5	10	1,4	4,75	3,5	58,9±5,3	38,9±4,3	13,5±1,8	4,8±0,5	1973.2
	53,6	→	7,7	4	1,0	0,7	1,5	1,5	2	2,5	5	8	7	5,5	0,55	5,4	1,85	56±2,8	32,5±2,6	12,4±0,9	4,4±0,25	1972.4
	53,6	→	7,7	4	1,0	0,7	2	1,5	—	—	9	11	—	—	0,55	5,75	—	56,2±5,1	34,1±3,8	—	—	1972.5
71,5	100,3	→	26	10,5	1,5	2,5	—	1,5	2	4	—	14	13	11,5	—	9,45	1,35	—	52,7±7,4	11,6±1,5	4,8±0,6	1972.12
71,9	53,6	↑	7,9	4	1,5	1,0	1	1,5	3,5	3,5	5,5	7,5	15	7	2,8	7,8	3,95	64±3,5	49,4±3,7	9,7±1,5	4,9±0,35	1974.5
89,8	100,3	→	33	12,5	3,0	0	—	3,5	3	—	—	24	20,5	13,5	—	27,1	5,4	—	57,5±13,8	16,5±3,4	4,6±0,6	1973.2
	53,6	↑	10,5	5	3,0	0,6	2	1,5	—	2,5	8	15	—	7	8,95	24	—	79,5±6,4	59,5±8,9	—	6±0,4	1974.6
	53,6	↑	10,5	5	3,0	0,8	3,5	—	5	—	7,5	—	25	—	7,7	—	8,55	79,4±6	—	11,2±2,8	—	1974.9
100	53,6	↑	13,0	6,0	4,5	0,8	2	1,5	2,5	3,5	9	16	30	8,5	6,5	25,1	8,9	87±7,8	64,3±10,3	9,4±2,8	4,7±0,4	1974.3
	53,6	↑	13	6	4,5	2,5	4,5	2	1,5	—	10	19	30	—	10,0	31,2	11,75	85,5±8,5	64,7±12,3	12,8±3,8	—	1974.9

грешность определения приращения температуры калибровочного эталона. В суммарную погрешность входят также погрешность, связанная с  $\Delta S$ , (величины  $\Delta S$ , приведены в таблице), и погрешности, связанные 1) с определением  $\int_{\Omega_d} F d\Omega$ , — около 1—1,5%, 2) с отраже-

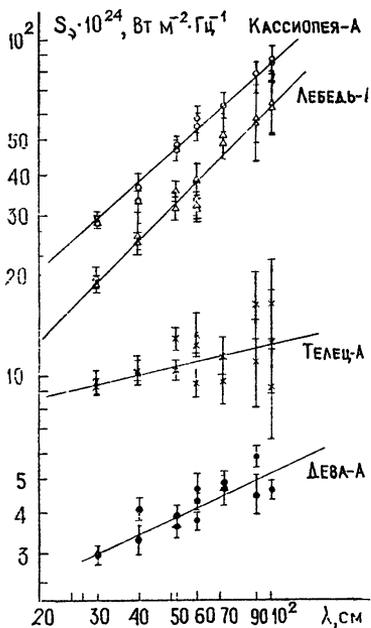


Рис. 1.

нием от диска —  $\sim 1\%$  и 3) с ошибкой определения усиления при фокусировке  $\sim 1,5—2\%$ .

На рис. 1 приведены построенные по данным табл. 1 спектры источников в диапазоне волн 30—100 см. Как видно из рис. 1, спектральные индексы Кассиопеи-А, Лебедя-А, Тельца-А и Девы-А равны соответственно  $-0,9 \pm 0,02$ ;  $-1 \pm 0,03$ ;  $-0,23 \pm 0,04$  и  $-0,5 \pm 0,05$  для эпохи 1973.3.

Как видно из табл. 1, погрешности существенно возрастают на волнах 90 и 100 см, что связано, главным образом, с влиянием возможной неточности в учете усредненных температур в районе источника и в опорных областях. Можно, однако, полагать, что в действительности погрешности несколько меньше приведенных в таблице, поскольку, как уже отмечалось, относительные значения температур, указанных на изофотах, известны с погрешностью, меньшей 20%, а погрешность определения  $D_2$  меньше 25%.

В табл. 2 приведены потоки четырех источников в диапазоне волн 3—100 см, а на рис. 2 — спектры, построенные по результатам настоящей работы (30—100 см) и упомянутых наших измерений в диапазоне 3—30 см (Лебедь-А —  $\lambda = 3 \div 9$  см,  $\alpha = -1,28 \pm 0,06$ ;  $\lambda = 10 \div 30$  см,  $\alpha = -1,1 \pm 0,1$ ;  $\lambda = 30 \div 100$  см,  $\alpha = -1 \pm 0,03$ ; Кассиопея-А —  $\alpha = -0,84 \pm 0,03$ ; Телец-А —  $\alpha = -0,23 \pm 0,03$ ; Дева-А —  $\lambda = 10 \div 30$  см,  $\alpha = -0,76 \pm 0,1$ ,  $\lambda = 30 \div 100$  см,  $\alpha = -0,5 \pm 0,05$ ).

Спектральный индекс Кассиопеи-А эпохи 1973.3 оказался равным  $\alpha = -0,84 \pm 0,03$  в диапазоне 3—100 см\*, что в пределах ошибок измерений совпадает с результатами [4] ( $\alpha = -0,81$ ), [20] ( $\alpha = -0,86$ ), но выше, чем в [2] ( $-0,787 \pm 0,06$ ) и [23] ( $-0,789$ ).

Результаты [2, 23] относятся к эпохе 1965.0. Если учесть частотную зависимость коэффициента годового уменьшения потока Кассиопеи-А ( $\lambda = 3,2 \div 6$  см,  $\Gamma = 0,8\%$  в год,  $\lambda = 7,3 \div 14$  см,  $\Gamma = 1,3\%$  в год,  $\lambda = 15 \div 30$  см,  $\Gamma = 1,2\%$  в год и  $\lambda = 30 \div 100$  см,  $\Gamma = 0,5 \div 0,6\%$  в год, как это следует из наших работ в диапазоне 3—30 см и из сопоставления наших теперешних результатов с наиболее точными более ранними данными), то с течением времени спектр Кассиопеи-А — молодого остатка сверхновой — должен становиться круче, т. е. для 1965 г.  $\alpha = -0,82$  (это может найти естественное объяснение в связи с более быстрым «высвечиванием» более энергичных электронов, ответственных, в соответствии с синхротронным механизмом, за более высокочастотное излучение).

\* Данные на волнах 3—30 см 1968—70 гг. приведены к 1973.3 с коэффициентом годового уменьшения потока 0,8% на  $\lambda = 3 \div 6$  см и 1,2% на  $\lambda = 7 \div 30$  см.

Таблица 2

$\lambda, \text{см}$	$S_{\nu}, 10^{-24} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$				$\delta_{\nu}, \%$				Эпоха
	Кассиопея-А	Лебедь-А	Тельца-А	Девы-А	Кассиопея-А	Лебедь-А	Тельца-А	Девы-А	
3,2	5,1	—	—	—	3,5	—	—	—	1968,5
5,28	7,4	3,17	—	—	3,5	3,5	—	—	1969,3
7,57	10,25	5,15	6,46	—	4,5	5,5	4,5	—	1969,3
8,01	10,7	5,7	7,0	—	3,5	4,5	4,5	—	1969,3
8,88	11,45	6,15	7,18	—	3,0	5,5	5	—	1969,3
9,7	11,7	6,15	6,9	—	2,0	4,0	4	—	1969,3
9,9	11,8	—	6,6	—	3,0	—	4,0	—	1969,3
10,0	11,8	6,1	6,6	1,3	4	4,5	4,0	6,0	1969,3
10,5	13,8	—	7,0	—	4,5	—	5,0	—	1969,3
10,95	13,8	7,1	7,95	—	5,5	5,5	6,0	—	1969,3
12,0	14,55	8,05	8,14	—	4,0	4,0	4,0	—	1969,3
13,11	16,6	9,35	8,1	1,5	5,0	5,0	5,0	5,0	1969,3
14,0	17,2	9,85	8,05	—	4,5	5,0	4,5	—	1969,3
15,0	18,8	—	8,4	1,9	5,0	—	3,5	7,0	1969,9
15,01	18,6	10,0	8,4	—	3,0	3,5	3,5	—	1969,3
17,0	20,0	12,1	9,4	—	5,5	5,5	5,5	—	1969,9
20	24	14,5	9,6	2,4	6,5	6,5	6,5	6,0	1969,9
23	25,8	16,9	9,8	2,4	6,0	6,0	6,0	6,0	1969,9
25	27,3	17,7	9,7	2,6	4,5	4,5	4,5	5,0	1969,9
27	28,3	19	9,9	2,7	4,0	4,0	4,0	5,0	1969,9
30	30,2	19,9	9,7	3,0	4,0	7,5	8	7,0	1969,8
30	29,9	18,9	9,4	3,05	5,0	5,5	5,5	6,5	1973,3
40	33,5	25,2	10,6	4,1	7,0	7,0	7,0	7,5	1972,10
40	36,9	26,4	10,5	3,3	9,5	9,0	10	10	1972,4
51,7	47,8	36,1	13,1	4	7,0	6,5	7,5	7,0	1972,11
51,7	50,1	32,1	10,5	3,7	6	6,5	7	7	1972,4
59,5	58,9	38,9	13,5	4,8	9	11	13,5	10	1973,2
59,5	56	32,5	12,4	4,4	5	8	7	5,5	1972,4
59,5	56,2	34,1	—	—	9	11	—	—	1972,5
59,5	—	31,5	—	—	—	7,5	—	—	1974,1
71,5	—	52,7	11,6	4,8	—	14	13	11,5	1972,12
71,9	64,0	49,4	9,7	4,9	5,5	7,5	15	7	1974,5
89,8	—	57,5	16,5	4,6	—	24,0	20,5	13,5	1973,2
89,8	79,5	59,5	—	6	8	15	—	7	1974,6
89,8	79,4	—	11,2	—	7,5	—	25	—	1974,9
100	87,0	64,3	9,4	4,7	9	16	30	8,5	1974,3
100	85,5	64,7	12,8	—	10	19	30	—	1974,9

Спектральный индекс Лебедя-А непостоянен по диапазону, уменьшаясь с ростом длины волны от  $\alpha = -1,28 \pm 0,06$  ( $\lambda = 3 \div 9 \text{ см}$ ) до  $\alpha = -1,1 \pm 0,1$  ( $\lambda = 10 \div 30 \text{ см}$ ) и до  $\alpha = -1 \pm 0,03$  ( $\lambda = 30 \div 100 \text{ см}$ ), что согласуется с данными [3, 20]. Погрешности измерения потока Лебедя-А на волнах 90 и 100 см велики ( $\approx 15\%$ ), однако величины потоков на этих волнах в пределах 3% совпадают с пересчитанными к 94 см данными [13], хотя и занижены по сравнению с данными [20].

Спектр Тельца-А изобилует плоскими «ступеньками» с  $\alpha \approx 0$ , как это отмечалось ранее применительно к диапазонам 9—10 см, 30—40 см [5, 8, 22]. Средний спектральный индекс Тельца-А в диапазоне 3—100 см  $\alpha = -0,23 \pm 0,03$ .

Спектр Девы-А, достаточно крутой в диапазоне 10—30 см ( $\alpha = -0,76 \pm 0,1$ ), в диапазоне 30—100 см становится существенно более пологим ( $\alpha = -0,5 \pm 0,05$ ). Тенденция к уменьшению спектрального индекса была видна уже из более ранних измерений в районе  $\lambda = 30 \text{ см}$  [10, 17], результаты которых в пределах точности измерений совпадают с нашими. Наши результаты на волне 70 см согласуются

с данными [10] ( $4,9 \cdot 10^{-24} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$ ). Однако требуются дополнительные измерения в диапазоне 30—100 см с большей точностью и, главное, исследование распределения фона в районе Девы-А в этом диапазоне волн. Хотя на изофотах не обнаруживается никаких неоднородностей, тем не менее при измерениях излучения Девы-А даже с узконаправленными антеннами измеряемые уровни сигналов при отведении антенны по обе стороны от источника оказываются различными, что может сказаться на измеренном потоке.

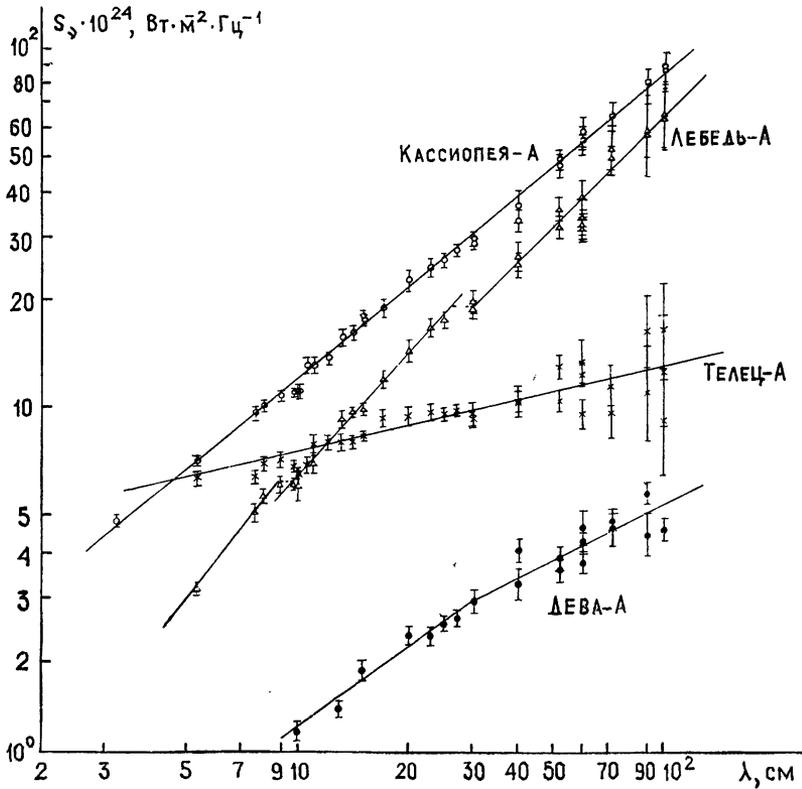


Рис. 2.

В дальнейшем представляется необходимым детальное исследование частотной зависимости годового уменьшения потока Кассиопеи-А во всем диапазоне от миллиметровых до метровых волн, исследование особенностей («ступенек») в спектре Тельца-А и особенностей в спектрах источников в районе 10 см, исследование с высоким разрешением распределенного радиоизлучения в районе Девы-А и, наконец, повышение точности измерений в диапазоне 60—100 см и расширение абсолютных измерений в сторону волн короче 3 см и длиннее 100 см.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Аникина, Д. А. Дмитренко, Л. К. Иванникова, Радиотехника и электроника, 18, № 3, 631 (1973).
2. J. W. M. Baars, P. G. Mezger, H. Wendker, Astrophys. J., 142, № 1, 122 (1965).
3. J. W. M. Baars, A. P. Hartsuiker, Astron. Astrophys., 17, 172 (1972).
4. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, С. А. Каменская, В. А. Порфирьев, В. А. Рахлин, В. М. Родина, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 807 (1969).

5. Л. В. Виноградова, Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 157 (1971).
6. Д. А. Дмитренко, Радиотехника и электроника, 16, № 8 (1971)
7. Д. А. Дмитренко, Л. В. Дмитренко, О. С. Иванов, Н. М. Цейтлин, Астрон. ж., 48, № 2, 437 (1971).
8. Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Л. В. Виноградова, Х. Ф. Гитерман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 823 (1970).
9. Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 639 (1969).
10. R. G. Conway, K. I. Kellerman, R. J. Long, Mon. N. R. Astr. Soc., 125, 261 (1963).
11. K. I. Kellerman, I. I. K. Pauliny-Toth, P. J. S. Williams, Astrophys. J., 157, № 1, 1 (1969).
12. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1004 (1961).
13. D. A. Macrae, E. R. Seaquist, Astron. J., 68, 77 (1963).
14. E. A. Parker, Mon. N. R. Astr. Soc., 138, 407 (1968).
15. I. I. K. Pauliny-Toth, C. M. Wade, D. Heesch, Astrophys. J., Suppl., 13, 65 (1966).
16. I. I. K. Pauliny-Toth, Shakeshaft J., Mon. N. R. Astr. Soc., 124, № 1, 61 (1962).
17. В. А. Разин, В. Т. Федоров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 5, 1052 (1963).
18. C. L. Seeger, F. L. Stumper, H. M. N. van Hurck, Philips Technical, Rev., 21, № 11, 317 (1960).
19. К. С. Станкевич, Диссертация, М., 1975
20. В. С. Троицкий, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, В. Д. Кротиков, Л. Н. Бондарь, К. М. Стрежнева, В. Л. Рахлин, В. П. Иванов, С. А. Пелюшенко, М. М. Зубов, Р. А. Самойлов, Г. К. Титов, В. А. Порфирьев, С. Л. Чекалев, Астрон. ж., 48, № 6, 1150 (1971)
21. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 393 (1961).
22. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, В. А. Порфирьев, Астрон. ж., 41, № 3, 446 (1964).
23. B. J. Willis, Astrophys. J., 180, 335 (1973).
24. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 571 (1964)
25. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 6, 1265 (1963)
26. Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966
27. И. С. Шкловский, Астрон. ж., 4, 243 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
4 мая 1975 г.

RESULTS OF ABSOLUTE MEASUREMENTS OF INTENSITIES OF CASSIOPEIA-A,  
CYGNUS-A, TAURUS-A, VIRGO-A AT THE WAVELENGTHS OF 30—100 cm  
AND THEIR SPECTRA AT THESE WAVELENGTHS OBTAINED  
BY „BLACKBODY“ DISC SITUATED IN THE FRESNEL ZONE

*N. M. Tseytlin, L. V. Dmitrenko, D. A. Dmitrenko, E. A. Miller,  
V. V. Snegireva, G. K. Titov,*

The results of absolute measurements of intensities of Cassiopeia-A, Cygnus-A, Taurus-A, Virgo-A at the wavelength of 30—100 cm obtained by a „black“ body disc situated at the distance of 50 and 100 m from 7-m radiotelescope, i. e. in the Fresnel zone. From the results of these measurements and the previous ones made by the same method in the range of 3—30 cm, the spectra are built within the range of 3—100 cm. The spectral indices within the range 3—100 cm are equal to (epoch 1973.3): Cassiopeia-A— $0.84 \pm 0.03$ ; Cygnus-A— $1.28 \pm 0.06$  ( $\lambda=3-9$  cm),  $-1.1 \pm 0.1$  ( $\lambda=10-30$  cm) and  $-1 \pm 0.03$  ( $\lambda=30-100$  cm); Taurus-A— $0.23 \pm 0.03$ ; Virgo-A— $0.76 \pm 0.01$  ( $\lambda=10-30$  cm) and  $-0.5 \pm 0.05$  ( $\lambda=30-100$  cm). The frequency dependence of the annual decrease in the Cassiopeia flux (at the wavelengths of 30—100 cm 0.5—0.6% per year while at  $\lambda=7.5-30$  cm 1.2% per year) discovered by the authors in 1969 is confirmed.

УДК 621 371 25

## К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛНОГО ПОЛЯ КВ РАДИОВОЛН ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНОМ УДАЛЕНИИ ПРИЕМНИКА ОТ ИСТОЧНИКА

*Л. С. Гоцакова, В. С. Громницкий, Ю. Я. Яшин*

Рассмотрена задача об определении полного поля сигнала в диапазоне коротких волн при многоскачковом распространении в плоскости большого круга и заданном расстоянии между точками излучения и приема. Используется многослойная квазипараболическая изотропная модель ионосферы, центр кривизны которой сдвинут относительно центра Земли. Учитывается поглощение в ионосфере и ослабление сигнала при отражении от Земли.

1. Пусть излучатель и приемник расположены в некоторых произвольных точках на поверхности Земли, имеющих соответственно координаты  $(R_3, \varphi_n)$  и  $(R_3, \varphi_k)$ .

Рассмотрим задачу об определении полного поля сигнала в диапазоне коротких волн (не учитывается анизотропия ионосферы), полагая, что электронная концентрация в ионосфере изменяется по закону

$$N = \sum_{i=1}^n N_i \left[ 1 - \left( \frac{R - R_{m_i}}{y_{m_i}} \right)^2 \left( \frac{R_u}{R} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где  $i$ -е слагаемое отлично от нуля в интервале  $\left( R_u, R_{m_i} \frac{R_u}{R_u - y_{m_i}} \right)$ ,

$N_i$  — максимальное значение концентрации в  $i$ -м слое,  $N_i$  — радиальное расстояние от центра Земли,  $R_{m_i}$  и  $R_u$  — радиальные расстояния до максимума  $i$ -го слоя и начала ионосферы,  $y_{m_i}$  — полутолщина  $i$ -го слоя. Выражение (1) дает возможность учитывать многослойность ионосферы. Для учета регулярных горизонтальных градиентов (суточного или широтного хода) электронной концентрации центр симметрии ионосферы может быть смещен на расстояние  $R_{\text{ц}}$  от центра Земли (см. рис. 1) [1, 2].

Задача об определении поля в геометрикооптическом приближении разбивается на несколько частных вопросов. Во-первых, если заданы координаты точек выхода и прихода луча, необходимо решить задачу об определении начальных условий — задачу о попадании в цель, т. е. найти угол выхода того луча, который попадает в точку расположения приемника.

В общем случае поле будет определяться некоторым конечным числом мод, с номерами, зависящими от расстояния между рассматриваемыми точками, от реальных параметров ионосферы и т. д.<sup>\*</sup> Эта задача эквивалентна механической задаче о движении частицы в поле

\* Здесь не учитывается неточность в определении поля, связанная с нестационарностью ионосферы, неточностью задания ее параметров и т. д. (подробнее см. [7]).



с соответствующим потенциалом, когда траектория имеет несколько точек рикошетирования (для  $p$ -й моды число таких точек равно  $(p-1)$ ). После того, как угол выхода найден, решается обычная задача о нахождении поля в некоторой точке вдоль луча с последующим суммированием по числу мод. Здесь может быть использована обычная техника численного решения гамильтоновых уравнений (см., например, [3, 7]). Однако в данном случае, когда для фазы, амплитуды и других параметров волны могут быть записаны аналитические выражения, процедура вычисления указанных величин существенно упрощается.

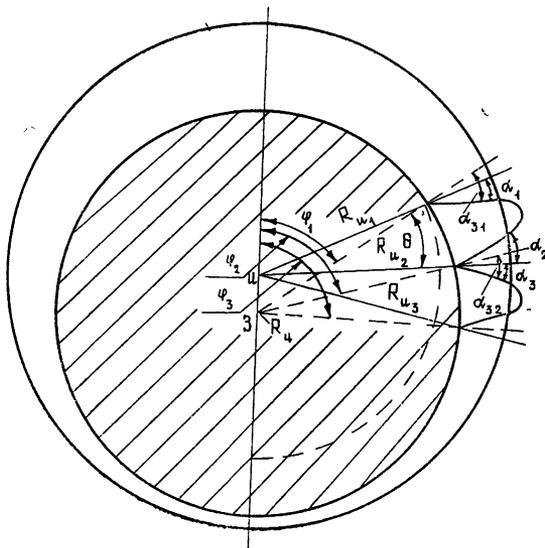


Рис. 1.  $\alpha_p$ —угол выхода луча с Земли на  $p$ -м скачке в полярной системе координат, связанной с центром кривизны ионосферы ( $u$ -система),  $\alpha_{3p}$ —угол выхода луча с Земли на  $p$ -м скачке в полярной системе координат, связанной с центром Земли ( $Z$ -система),  $\theta_p$ —угловые координаты положения промежуточных точек отражения в  $u$ -системе,  $\varphi_p$ —угловые координаты положения промежуточных точек в  $Z$ -системе,  $R_u$ —расстояние между центром Земли и центром кривизны ионосферы.

2. Запишем систему уравнений для определения угла выхода  $\alpha_1$  в предположении, что заданы координаты точек выхода и прихода луча ( $R_3, \varphi_1$ ) и ( $R_3, \varphi_{p+1}$ ) в системе «З» и луч  $(p-1)$  раз отражается от Земли (см. рис. 1).

Аналогично [1] нетрудно показать, что уравнение луча, отражающегося от  $M$ -го слоя, на  $p$ -м скачке выглядит следующим образом:

$$\frac{\theta_{p+1} - \theta_p}{R_u \sin \alpha_p} + 2 \sum_{l=1}^{M_p-1} \frac{1}{\sqrt{C_{pl}}} \Lambda_{pl} + \frac{1}{\sqrt{C_{pM_p}}} \Lambda' = 0. \quad (2)$$

Выражения для  $\Lambda_{pl}$ ,  $\Lambda'$ ,  $C_{pl}$ ,  $C_{pM_p}$  приведены ниже (см. (11)).

Нетрудно видеть (см. рис. 1), что угол выхода луча с Земли для каждого последующего скачка связан с углом выхода предыдущего соотношением

$$\alpha_{p+1} = \arcsin \left( \frac{R_{u_p} \sin \alpha_p}{R_{u_{p+1}}} \right) \pm 2 \arcsin \left( \frac{R_u \sin \varphi_{p+1}}{R_{u_{p+1}}} \right), \quad (3)$$

где при  $R_{u_p} > R_{u_{p+1}}$  в правой части (3) берется знак «+», а при  $R_{u_p} < R_{u_{p+1}}$  — знак «-»,

$$R_{u_p}^2 = R_u^2 + R_3^2 - 2R_u R_3 \cos \varphi_p.$$

Решая  $p$  трансцендентных уравнений (2) с учетом (3), находим  $\alpha_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_p^*$ .

3. Если известны параметры траектории луча, то могут быть вычислены время группового запаздывания  $T$ , фаза  $\Phi$ , амплитуда поля  $E$  по формулам, определяемым аналогично тому, как это сделано в [1, 4]:

$$T = \frac{1}{c} \sum_{p=1}^P \left[ 2 \sqrt{R_u^2 - b_p^2} - R_{u_p} \cos \alpha_p - \sqrt{R_{u_{p+1}}^2 - b_p^2} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=1}^{M_p-1} \frac{1}{A_l} \left( \sqrt{y_{pl}(R_{l+1})} - \sqrt{y_{pl}(R_l)} - \frac{B_l}{2\sqrt{A_l}} \Lambda_{pl} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{A_{M_p}} (B_{M_p} \bar{\Lambda}' / \sqrt{A_{M_p}} + \sqrt{y_{pM_p}(R_{M_p})}) \right]. \quad (4)$$

Полная фаза находится из соотношения  $\Phi_n = \Phi + \sum_{p=1}^P \Phi_{отр_p}$ , где  $\Phi$  определяется (5):

$$\Phi = \frac{\omega}{c} \left\{ \sum_{p=1}^P \left[ b_p \left( 2 \arcsin \left( \frac{b_p}{R_u} \right) - \arcsin \left( \frac{b_p}{R_{u_{p+1}}} \right) - \alpha_p \right) - \right. \right. \\ \left. - R_{u_p} \cos \alpha_p - \sqrt{R_{u_{p+1}}^2 - b_p^2} + 2 \sum_{l=1}^{M_p-1} \left( \frac{B_l}{2\sqrt{A_l}} \bar{\Lambda}_{pl} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{C_{pl}} \Lambda_{pl} \right) + \frac{B_{M_p}}{\sqrt{A_{M_p}}} \bar{\Lambda}' - 2 \sqrt{C_{pM_p}} \Lambda' \right] + R_{u_1} \sin \alpha_1 (\varphi_{p+1} - \varphi_1) \right\}. \quad (5)$$

Выражение для  $\Phi_{отр}$  приведено ниже:

$$E = \frac{E_0 S_0}{\sum_{p=1}^P S_p} \prod_{p=1}^P |F_p|; \quad (6)$$

$$E_0 = \frac{300 \sqrt{W}}{\left( S_0 \left| \frac{d\theta}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} R_{u_1} \cos \alpha_1 \right)^{1/2}} \quad (7)$$

— амплитуда поля изотропного источника мощностью  $W$  после первого скачка [5];

$$\left| \frac{d\theta}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = 2 \left( 1 - \frac{R_{u_1} \cos \alpha_1}{(R_u^2 + b_1^2)^{1/2}} \right) - R_{u_1}^2 \sin(2\alpha_1) \times$$

\* Эта система уравнений может быть решена лишь численно.

$$\times \left\{ 2 \sum_{l=1}^{M_p-1} \frac{1}{\sqrt{C_{pl}}} \left[ \frac{D_{pl_3}(R_l)}{D_{pl_2}(R_l)} - \frac{D_{pl_3}(R_{l+1})}{D_{pl_2}(R_{l+1})} + \frac{1}{2C_{pl}} \Lambda_{pl} \right] + \right. \quad (8)$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{C_{pM_p}}} \left[ \frac{\Lambda'}{C_{pM_p}} + 2 \left( \frac{D_{pM_{p3}}(R_{M_p})}{D_{pM_{p2}}(R_{M_p})} + \frac{2A_{M_p}}{D_{pM_p}} \right) \right] \right\}.$$

Длина отрезка буча, относящаяся к  $p$ -му скачку,  $S_p$ , определяется соотношением (см. рис. 1)

$$S_p = [R_u^2 + R_u^2 - 2R_u R_{u_p} \cos(\alpha_p - \gamma_p)]^{1/2} +$$

$$+ [R_{u_{p+1}}^2 + R_u^2 - 2R_u R_{u_{p+1}} \cos(\bar{\alpha}_p - \gamma_p)]^{1/2} + \quad (9)$$

$$+ 2 \left\{ \sum_{l=1}^{M_p-1} \int_{R_u^{(l)}}^{R_u^{(l+1)}} \frac{(y_{pl}(R) + b_p^2)^{1/2}}{\sqrt{y_{pl}(R)}} dR + \int_{R_u^{(M_p)}}^{R_{\text{отр}}} \frac{(y_{pM_p}(R) + b_p^2)^{1/2}}{\sqrt{y_{pl}(R)}} dR \right\};$$

$$S_0 = \frac{R_u \sin(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)}{\sin \bar{\alpha}_1} + S_1, \quad (10)$$

где

$$\gamma_p = \arcsin \left( \frac{b_p}{R_u} \right), \quad \bar{\alpha}_p = \arcsin \left( \frac{b_p}{R_{u_{p+1}}} \right), \quad b_p = R_{u_p} \sin \alpha_p,$$

$$A_l = 1 - \sum_{i=l}^n aN_i + R_u^2 \sum_{i=l}^n aN_i \frac{1}{y_{m_i}^2}, \quad (11)$$

$$B_l = -2R_u^2 \sum_{i=l}^n aN_i \frac{R_{m_i}}{y_{m_i}^2}, \quad C_l = R_u^2 \sum_{i=l}^n aN_i \frac{R_{m_i}^2}{y_{m_i}^2},$$

$$R_l = R_{m_i} \frac{R_u}{R_u - R_{m_i}} \quad (i \geq 2), \quad R_1 = R_u, \quad aN_i = \frac{8,06 \cdot 10^7}{f^2} N_i,$$

$N_i$  — концентрация электронов;

$$R_{u_p} = (R_u^2 + R_u^2 - 2R_u R_u \cos \varphi_p)^{1/2}, \quad C_{pl} = C_l - b_b^2,$$

$$y_{pl}(R) = A_l R^2 + B_l R + C_{pl}, \quad D_{pl}(R) = \sqrt{B_l^2 - 4A_l C_l},$$

$$D_{pl_1}(R) = 2\sqrt{A_l y_{pl}(R)} + 2A_l R + B_l,$$

$$D_{pl_2}(R) = 2\sqrt{C_{pl} y_{pl}(R)} + B_l R + 2C_{pl},$$

$$D_{pl_3}(R) = 2 + \frac{y_{pl}(R) + C_{pl}}{\sqrt{y_{pl}(R) C_{pl}}},$$

$$\Lambda_{pl} = \ln \left| \frac{D_{pl_2}(R_{l+1}) R_l}{D_{pl_2}(R_l) R_{l+1}} \right|, \quad \bar{\Lambda}' = \ln \left| \frac{D_{pl}}{D_{pl_2}(R_l)} \right|,$$

$$\bar{\Lambda}_{pl} = \ln \left| \frac{D_{pl_1}(R_{l+1})}{D_{pl_1}(R_l)} \right|, \quad \Lambda' = \ln \left| \frac{D_{pl}}{D_{pl_1}(R_l)} \right|;$$

$|F_p|$  и  $\Phi_{\text{отр}}$  — модуль и аргумент коэффициента отражения Френеля:

$$|F_p| = \frac{[(a^2 \cos^2 \beta_p - \rho)^2 + 4a^2 \rho \cos \beta_p \sin^2(\beta_\psi - \gamma_\psi)]^{1/2}}{a^2 \cos^2 \beta_p + \rho + 2a\sqrt{\rho} \cos \beta_p \cos(\beta_\psi - \gamma_\psi)},$$

$$\Phi_{\text{отр}} = -\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\rho} \cos \beta_p \sin(\beta_\psi - \gamma_\psi)}{a^2 \cos^2 \beta_p - \rho},$$
(12)

где

$$\rho = [(\epsilon_1 - \sin^2 \beta_p)^2 + \epsilon_2^2]^{1/2}, \quad \epsilon_2 = \frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

$$\gamma_\psi = 2\operatorname{arctg} \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 - \sin^2 \beta_p} \right), \quad \beta_p = \bar{\alpha}_p,$$

$$a = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}, \quad \beta_\psi = \operatorname{arctg}(\epsilon_2/\epsilon_1)$$

— при поляризации волны в плоскости падения;  $a = 1$ ,  $\beta_\psi = 0$  — при поляризации волны перпендикулярно плоскости падения,  $\epsilon_1$  и  $\sigma$  — диэлектрическая проницаемость и проводимость Земли,  $\omega = 2\pi f$  — циклическая частота.

4. При учете малого поглощения в ионосфере в выражение (6) войдет дополнительный множитель [4]

$$K = e^{-Q},$$

где

$$Q = \sum_{p=1}^P \int_{L_p} q(R(l), \theta(l)) dl$$
(13)

при

$$|\epsilon| \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad q = \frac{\omega}{c} (2\pi\sigma/\omega e),$$

$$e = \frac{A_l R^2 + B_l R + C_l}{R^2}, \quad \sigma = aN(R) \cdot \gamma_{\text{эфф}}.$$

Описание поглощения в форме (13) эквивалентно тому, что ангиэрмитова часть диэлектрической проницаемости не влияет на сам луч (комплексность последнего не учитывается), а приводит лишь к дополнительному ослаблению вдоль вещественного луча.

5. Для решения системы уравнений (2) и вычисления времени группового запаздывания  $T$ , фазы  $\Phi$  и амплитуды поля  $E$  в точке приема каждой моды, а также  $E_c = E_M e^{-iEA} = \sum_{j=1}^{N_p} E_j e^{-i\Phi_j}$  ( $N_p$  — количество мод, пришедших в точку  $(R_z, \varphi_{p+1})$ ), составлена программа на языке «Фортран» для транслятора Ф-20. Некоторые результаты счета приведены в таблице ( $\alpha$  — угол выхода луча с Земли в  $u$ -системе,  $\beta$  — угол прихода луча на Землю на последнем скачке,  $T$  — время группового запаздывания ( $c$ ),  $\Phi$  — полный набег фазы ( $\text{рад}$ ),  $E$  — амплитуда поля ( $\text{мкВ/м}$ ),  $p$  — количество скачков,  $\varphi_n, \varphi_k$  — угловые координаты положения передатчика и приёмника в  $Z$ -системе).

Т а б л и ц а 1

 $\varphi_H, \varphi_K = -1,0$  $\varphi_H, \varphi_K = +1,2$ 

$p$	$\alpha, \beta$	$T, \Phi \cdot 10^{-7}, E$	$\alpha, \beta$	$T, \Phi \cdot 10^{-7}, E$
3	1,40543	0,0219989		
	1,501901	0,1357966431 $0,526 \cdot 10^2$		
4	1,31940	0,0223823		
	1,40271	0,137329563 $0,3575 \cdot 10^2$		
5	1,22959	0,0229188	1,46903	0,0218976
	1,31771	0,139231599 $0,2306 \cdot 10^2$	1,36422	0,137565525 $0,5 \cdot 10^2$
6	1,11358	0,0236731	1,422409	0,0221361
	1,23324	0,141568949 $0,1358 \cdot 10^2$	1,308151	0,139078834 $0,3161 \cdot 10^2$
7	0,50508	0,0455691		
	0,56647	0,129554664 $0,6249$		
8	1,0339	0,0247754	1,3696	0,0224502
	1,1421	0,144427676 $0,709$	1,2489	0,140936268 $0,2032 \cdot 10^2$
9	0,5261	0,0423902	1,3155	0,0228702
	0,61935	0,145011525 $0,5842 \cdot 10^{-1}$	1,1855	0,143178535 $0,1246 \cdot 10^2$
10	0,9069	0,0267269		
	1,0256	0,147896654 $0,3213 \cdot 10^1$		
11	0,5278	0,0408391	1,2562	0,0234506
	0,64413	0,152024325 $0,1435 \cdot 10^{-1}$	1,1154	0,145886660 $0,7047 \cdot 10^1$
12	0,719	0,0312359		
	0,8494	0,150268457 $0,8071$		
13			1,2356	0,0246182
			0,9306	0,151807892 $0,704$
14			1,1856	0,0243178
			0,1033	0,149184457 $0,3534 \cdot 10^1$
15			0,8387	0,0361328
			0,5222	0,163307470 $0,1049$
16			1,0643	0,0250371
			0,7406	0,160031659 $0,2518$
17			1,77	0,0260719
			0,9135	0,153480061 $0,1318 \cdot 10^1$
	$E_M = 0,9929 \cdot 10^2$		$E_M = 0,1074 \cdot 10^2$	
	$E_A = -0,2961$		$E_A = 0,4685$	

При расчетах использовалась трехслойная модель ионосферы со следующими параметрами:  $R_u = 6490$  км,  $u_{m_1} = 30$  км,  $u_{m_2} = 100$  км,  $u_{m_3} = 300$  км,  $N_1 = 5 \cdot 10^4$ ,  $N_2 = 2,5 \cdot 10^5$ ,  $N_3 = 10^6$ ,  $R_{m_i} = R_u + u_{m_i}$ . Значение  $\gamma_{эфф}$  задавалось двумерной таблицей. Рабочая частота  $f = 10$  МГц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. T. A. Croft, H. Hoogasian, Radio Sci., 3, № 1, 69 (1968).
2. N. N. Rao, Radio Sci., 3, № 12, 1113 (1968).
3. А. Н. Казанцев, Д. С. Лукин, Ю. Г. Спиридонов, Космические исследования, 5, № 4, 593 (1967).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1968.
5. Я. Л. Альперт, Распространение волн и ионосфера, изд. Наука, М., 1973.
6. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
7. Ю. Г. Спиридонов, Д. С. Лукин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1769 (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
20 октября 1974 г.,  
после доработки  
21 октября 1975 г.

ON THE PROBLEM OF DETERMINATION OF THE FULL SHORT-WAVE  
FIELD AT THE RECEIVER FAR DISTANT FROM THE SOURCE

*L. S. Gotsakova, V. S. Gromnitskii, Yu. Ya. Yashin*

We consider the problem of determination of the full field of a signal in a short wave range in the case of multi-jump propagation in the plane of a large circle and at a given distance between the radiation and receiving points. A multilayer quasi-parabolic isotropic ionosphere model the curvature center of which is shifted with respect to the Earth's center is investigated. The absorption in the ionosphere and attenuation of a signal reflected from the Earth is taken into account.

УДК 550 388.2 : 551 594.6

## ИЗЛУЧЕНИЕ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

*В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Ю. В. Чугунов*

Рассмотрено излучение электромагнитных волн в диапазоне свистящих атмосфериков (спиральных волн) распределенными источниками (электрическими, а также магнитными диполями и квадрупольями). Показано, что полная излучаемая мощность при определенных условиях носит резонансный характер. Получены простые формулы для оценок мощности излучения.

1. Распространение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме описывается тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ , который в системе координат с осью Oz, направленной по внешнему магнитному полю  $H_0$ , имеет вид [1-3]:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Компоненты  $\epsilon$ ,  $g$  и  $\eta$  зависят от частоты  $\omega$ , гирочастот  $\omega_{He}$  и  $\omega_{Hi}$  и плазменных частот  $\omega_{pe}$  и  $\omega_{pi}$  электронов и ионов, а также от чисел соударений между частицами среды. Вопросы распространения плоских волн в гиротропной плазме подробно исследованы в [1-3]. Известно, что в такой плазме могут распространяться два типа нормальных волн (обыкновенная и необыкновенная) с показателями преломления

$$n_{1,2}^2(\vartheta) = \frac{(\epsilon^2 - g^2 - \epsilon\eta) \sin^2\vartheta - 2\epsilon\eta \pm [(\epsilon^2 - g^2 - \epsilon\eta)^2 \sin^4\vartheta + 4g^2\eta^2 \cos^2\vartheta]^{1/2}}{2(\epsilon \sin^2\vartheta + \eta \cos^2\vartheta)}, \quad (2)$$

где  $\vartheta$  — угол между волновым вектором  $k$  и магнитным полем  $H_0$ .

Вопросы излучения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме привлекают все большее внимание исследователей в связи с различными приложениями к ионосфере и магнитосфере Земли и к астрофизике. Первые теоретические работы по генерации волн в среде с тензором (1) были посвящены анализу электромагнитных полей на больших расстояниях от излучателя, т. е. по существу, исследованиям аналитических свойств функций Грина для уравнений Максвелла с тензором (1) (см., например, [4, 5]). В этих работах изучались поля в случае, когда имеет место резонанс одной из нормальных волн с заряженными частицами плазмы. Подробно обсуждался также случай конической рефракции. При условии плазменного резонанса

$$\epsilon \sin^2\vartheta + \eta \cos^2\vartheta = 0 \quad (3)$$

показатель преломления одной из нормальных волн обращается в бесконечность [1-3]. При этом полная излучаемая мощность элементарных излучателей (электрических и магнитных) выражается через

расходящиеся интегралы в пространстве волновых чисел  $k$  [6-8]. В этом смысле постановка задач об излучении точечных источников в резонансной плазме является некорректной. Чтобы устранить указанную особенность, в случае элементарных зарядов и токов необходимо учитывать сильную пространственную дисперсию в реальной плазме, а для макроскопических излучателей — антенн, сгустков плазмы с электрическим и магнитным дипольными моментами — их конечные размеры («размытые» источники).

Наиболее подробно исследованы вопросы излучения низкочастотных электромагнитных волн распределенными источниками в резонансной плазме с диагональным тензором диэлектрической проницаемости, когда можно пренебречь компонентой  $g$  в тензоре (1) [8-12, 18]. При этом оказалось, что полные потери энергии таких излучателей существенно зависят от их размеров, что связано с резонансным характером возбуждения одной из нормальных волн. Удобным методом расчета потерь на излучение в резонансных средах является квазиэлектростатическое приближение, справедливое при малых размерах излучателей (подробнее см. обзорную работу [12]).

2. Здесь рассмотрено излучение электромагнитных волн электрическими токами в диапазоне свистящих атмосфериков, когда

$$\begin{aligned} \omega_{Hi} \ll \omega \ll \omega_{He}, \quad \omega_{He} \ll \omega_{pe} \\ (\omega_{He} = eH_0/m_e c, \quad \omega_{Hi} = ezH_0/m_i c), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $z$  — зарядное число иона,  $m_e$  и  $m_i$  — массы электронов и ионов соответственно. Электромагнитные волны, распространяющиеся в плазме в диапазоне (4), называют также спиральными волнами.

В бесстолкновительной плазме компоненты тензора (1) в интервале частот (4) имеют вид

$$\epsilon \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{He} \omega_{Hi} - \omega^2}{\omega_{He}^2}, \quad g \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{He}}, \quad \eta \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (5)$$

В силу (4) между компонентами  $\epsilon$ ,  $g$  и  $\eta$  соблюдаются неравенства

$$|\epsilon| \ll g \ll |\eta|, \quad (6)$$

и, как следует из (2), в плазме могут распространяться только волны одной ветви (свистящие атмосферики, или спиральные волны), для которых квадрат показателя преломления положителен.

При соблюдении неравенств (6) возможны упрощения выражений для  $n_{1,2}^2(\vartheta)$ . Так, при условиях

$$\omega_{Hi} \ll \omega < \Omega_H \quad (7)$$

( $\Omega_H = (\omega_{He} \omega_{Hi})^{1/2}$  — гибридная частота) компоненты  $\epsilon$  и  $\eta$  имеют одинаковые знаки, и резонанс отсутствует. При этом для показателя преломления свистящих атмосфериков получаем

$$n_1^2(\vartheta) \approx \frac{(4g^2 \cos^2 \vartheta + \epsilon^2 \sin^4 \vartheta)^{1/2} - |\epsilon| (1 + \cos^2 \vartheta)}{2 \cos^2 \vartheta}. \quad (8)$$

С другой стороны, в интервале частот

$$\Omega_H \ll \omega \ll \omega_{He}$$



имеет место плазменный резонанс ( $\varepsilon > 0$ ,  $\eta < 0$ ), и выражение для  $n_1^2(\vartheta)$  может быть приближенно представлено в виде

$$n_1^2(\vartheta) \approx \frac{g}{\cos \vartheta - |\varepsilon/\eta|^{1/2}}, \quad \left| \frac{\varepsilon}{\eta} \right|^{1/2} \approx \frac{\omega}{\omega_{He}}, \quad g \approx |\varepsilon\eta|^{1/2}. \quad (9)$$

Ниже показано, что удобным приближением для анализа вопросов излучения спиральных волн являются уравнения Максвелла, в которых положено, что  $\eta \approx -\infty$ , а компоненты  $\varepsilon$  и  $g$  конечны. При этом система уравнений для электрического поля принимает вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + k_0^2 (\varepsilon E_x + ig E_y) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j_x, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + k_0^2 (\varepsilon E_y - ig E_x) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j_y,$$

$$E_z \approx 0.$$

Иными словами, здесь, как и в приближении магнитной гидродинамики, в холодной бесстолкновительной плазме, компонента электрического поля вдоль  $H_0$  отсутствует, так как движение электронов в этом направлении происходит безынерционно [3].

Проекция распределенного в пространстве стороннего электрического тока на оси  $x, y, z$  зададим в виде

$$j_i = \frac{i\omega}{\pi^{3/2} a^3} \left( P_i + K_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \exp \left( -\frac{R^2}{a^2} \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

где  $P_i$  — компонента полного электрического дипольного момента системы токов,  $K_{ik}$  — тензор полного квадрупольного момента,  $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $a$  — характерный размер области, занятой электрическими токами. Заметим, что в смысле слабого предела теории обобщенных функций [13]

$$\lim_{a \rightarrow 0} j_i = i\omega \left( P_i + K_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \delta(R). \quad (12)$$

Для целого ряда задач значительный интерес представляет вычисление мощности излучения  $W$ ,

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \mathbf{j}^* \mathbf{E} dR. \quad (13)$$

В (13) интегрирование проводится по области, занятой сторонними токами.

Подсчитаем мощность, излучаемую поперечным током

$$j_x = \frac{i\omega}{\pi^{3/2} a^3} \left( P_x + K_{xz} \frac{\partial}{\partial z} \right) \exp \left( -\frac{R^2}{a^2} \right). \quad (14)$$

Из соотношений (10), (13), (14) находим:

$$W_{\perp}^e = \operatorname{Re} \frac{i\omega^3}{(2\pi c)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_0^2 \varepsilon - k_x^2 - k_z^2) (P_x^2 + k_z^2 K_{xz}^2)}{(k_0^2 \varepsilon - k_z^2)^2 - (k_0^2 \varepsilon - k_z^2) k_{\perp}^2 - k_0^4 g^2} \exp \left( -\frac{k^2 a^2}{2} \right) dk \quad (15)$$

$$(k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2),$$

где значок « $e$ » относится к величине мощности, излучаемой электрическими диполями и квадрупольями.

Рассмотрим сначала случай, когда отсутствует плазменный резонанс ( $\omega \ll \Omega_H$ ,  $\varepsilon < 0$ ). В подынтегральном выражении (15) введем цилиндрические координаты  $k_\perp$ ,  $\varphi$ ,  $k_z$  так, что  $k_x = k_\perp \cos \varphi$ ,  $k_y = k_\perp \sin \varphi$ ,  $dk = k_\perp dk_\perp dk_z d\varphi$ . После интегрирования по  $\varphi$  вычислим с помощью теории вычетов интеграл по  $k_\perp$ , который даёт реальную часть выражения (15). Заметим, что знаменатель в этом интеграле определяет волновую поверхность

$$k_\perp = \left( \frac{k_0^4 g^2}{k_0^2 |\varepsilon| + k_z^2} - k_0^2 |\varepsilon| - k_z^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда находим пределы интегрирования  $k_z$ :

$$0 \leq k_z \leq k_0 \sqrt{g - \varepsilon} \approx k_0 \sqrt{g}.$$

Вводя переменную  $k_z = k_0 \sqrt{g} x$ , представим оставшийся интеграл в виде

$$W_\perp^e = \frac{\omega^4 g^{1/2}}{4c^3} \exp\left(\frac{k_0^2 |\varepsilon| a^2}{2}\right) \int_0^1 \left[ 1 + \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^2} \right] \times \\ \times (P_x^2 + k_0^2 g x^2 K_{xz}^2) \exp\left[-\frac{k_0^2 g a^2}{2(x^2 + \alpha^2)}\right] dx, \\ \alpha^2 = |\varepsilon|/g \ll 1. \quad (16)$$

Интеграл в (16) можно приближенно вычислить в различных предельных случаях. Так, при условиях

$$(k_0 a)^2 |\varepsilon| \ll 1, \quad (k_0 a)^2 g^2 / |\varepsilon| \ll 1 \quad (17)$$

экспоненциальные множители в (16) на всем пути интегрирования можно положить равными единице. При этом интеграл остается сходящимся, и в результате имеем

$$W_\perp^e \approx \frac{\pi \omega^4}{16c^3} \frac{g^2}{|\varepsilon|^{3/2}} (P_x^2 + k_0^2 |\varepsilon| K_{xz}^2). \quad (18)$$

Заметим, что второе из неравенств (17) означает малость характерного размера источника по сравнению с длиной спиральной волны, распространяющейся поперек  $H_0$ .

С другой стороны, при выполнении неравенств

$$(k_0 a)^2 |\varepsilon| \ll 1, \quad \frac{(k_0 a)^2 g^2}{|\varepsilon|} \gg 1 \quad (19)$$

в (16) можно положить  $|\varepsilon| = 0$ , и после замены  $x = t^{-1}$  получим

$$W_\perp^e \approx \frac{\omega^4 g^{1/2}}{4c^3} \int_1^\infty (t^3 + t^{-2}) \left( P_x^2 + \frac{k_0^2 g}{t^2} K_{xz}^2 \right) \exp\left(-\frac{k_0^2 a^2 g}{2} t^2\right) dt. \quad (20)$$

Интегралы в (20) являются табличными [14] и выражаются через интеграл вероятностей  $\Phi(x)$ ;

$$\begin{aligned}
 W_{\perp}^e = & \frac{\omega^4 g^{1/2}}{4c^3} P_x^2 \left\{ \left( 1 + \frac{1}{k_0^2 a^2 g} \right) \exp \left( -\frac{k_0^2 a^2 g}{2} \right) + \right. \\
 & + \left. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k_0^4 a^4 g^2}{(k_0 a)^3 g^{3/2}} \left[ 1 - \Phi \left( k_0 a \sqrt{\frac{g}{2}} \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{\omega^6 g^{3/2}}{4c^5} K_{xz}^2 \left\{ \frac{1 - k_0^2 a^2 g}{3} \exp \left( -\frac{k_0^2 a^2 g}{2} \right) + \right. \\
 & + \left. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{3 + k_0^4 a^4 g^2}{3k_0 a g^{1/2}} \left[ 1 - \Phi \left( k_0 a \sqrt{\frac{g}{2}} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Это выражение упрощается в двух предельных случаях:

$$W_{\perp}^e \approx \begin{cases} \frac{\pi^{1/2} \omega^4 g^{1/2}}{4 \sqrt{2} c^3} \frac{P_x^2}{(k_0 a)^3 g^{3/2}} + \frac{\pi^{1/2} \omega^6 g^{3/2}}{4 \sqrt{2} c^5} \frac{K_{xz}^2}{k_0 a g^{1/2}}, & k_0 a g^{1/2} \ll 1, \\ \frac{\omega^4 g^{1/2}}{4c^3 (k_0 a)^2 g} (2P_x^2 + k_0^2 g K_{xz}^2) \exp \left( -\frac{k_0^2 a^2 g}{2} \right), & k_0 a g^{1/2} \gg 1. \end{cases} \tag{22}$$

Отсюда видно, что конкретный вид спектра источника существенно влияет на величину излучаемой мощности лишь в случае достаточно больших размеров излучателя по сравнению с длиной волны в плазме при продольном распространении ( $k_0 a g^{1/2} \gg 1$ ).

В резонансном случае ( $\omega > \Omega_H$ )  $\epsilon$  и  $\eta$  имеют разные знаки. При этом потери энергии также можно подсчитать приближенно, исходя из общего выражения (15). Однако, если потребовать выполнения более жесткого неравенства

$$\omega_{He} \gg \omega \gg \Omega_H, \tag{23}$$

то формула для мощности излучения спиральных волн должна иметь тот же вид, что и выражение (22), полученное при выполнении условий (19). Действительно, в силу (23) из (5) следует, что

$$\frac{\epsilon}{g} \approx \frac{g}{|\eta|}, \tag{24}$$

и поскольку при получении (22) предполагалось, что  $|\eta| = \infty$ , то в рассматриваемом приближении при наличии резонанса необходимо с той же точностью положить  $\epsilon = 0$ , т. е. потери носят резонансный характер при  $\epsilon \rightarrow 0$  как со стороны положительных, так и отрицательных значений.

Таким образом, приближенный подход при анализе вопроса об излучении свистящих атмосфериков, основанный на использовании системы уравнений (10), позволяет достаточно просто решать задачи об излучении распределенных источников. Как видно из формул (22), в резонансной среде при  $k_0 a g^{1/2} \ll 1$  интенсивность излучения диполя носит резонансный ( $\lim_{a \rightarrow 0} W_{\perp}^e = \infty$ ) и квазистатический характер —  $W_{\perp}^e$  не зависит от скорости света в вакууме, в то время как потери энергии квадруполья являются резонансными, но не квазистатическими.

3. До сих пор оставался неясным вопрос о том, каковы границы применимости полученных выше формул в приближении  $\eta \approx -\infty$ . Более того, вертикальный электрический ток  $j_z$  в этом приближении

вообще не излучает. Очевидно, условия применимости вышеприведенных формул можно выяснить на основе более точных соотношений, которые в резонансном случае, когда показатель преломления спиральных волн определяется формулой (9), можно получить, обобщив известные выражения для импеданса элементарного диполя на случай протяженного источника [6, 7]. Для этого рассмотрим конкретный пример продольного тока, имеющего вид

$$j_z = \frac{i\omega}{\pi^{3/2} a^3} \left( P_z + K_{zz} \frac{\partial}{\partial z} \right) \exp \left( -\frac{R^2}{a^2} \right). \quad (25)$$

В результате простых преобразований находим

$$W_{\parallel}^e = \frac{\omega^4 g^{1/2} \mu^2}{4c^3} \int_1^{\infty} [x^2 P_z^2 + k_0^2 g (1 + \mu x^2)^2 K_{zz}^2] \exp \left( -\frac{k_0^2 a^2 g}{2} x^2 \right) dx, \quad (26)$$

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon}{\eta} \right|^{1/2} = \frac{g}{|\eta|}.$$

Результат интегрирования в (26) дает

$$\begin{aligned} W_{\parallel}^e = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^4 g^{1/2}}{4c^3} \frac{\mu^2 P_z^2}{(k_0 a)^3 g^{3/2}} \left[ 1 - \Phi \left( k_0 a \sqrt{\frac{g}{2}} \right) \right] + \\ & + \frac{\omega^6 g^{3/2} \mu^2}{4c^5} K_{zz}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{k_0 a g^{1/2}} + \frac{2\mu}{(k_0 a)^3 g^{3/2}} + \frac{3\mu^2}{(k_0 a)^5 g^{5/2}} \right] \times \right. \\ & \times \left. \left[ 1 - \Phi \left( k_0 a \sqrt{\frac{g}{2}} \right) \right] + \frac{2\mu}{(k_0 a)^2 g} \left[ 1 + \frac{\mu}{2} \left( 1 + \frac{3}{(k_0 a)^2 g} \right) \right] \exp \left( -\frac{k_0^2 a^2 g}{2} \right) \right\}. \quad (27) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что потери энергии вертикального электрического диполя носят резонансный квазистатический характер при условии

$$k_0 a g^{1/2} \ll 1, \quad (28)$$

в то время как характер резонансных потерь квадруполья существенно зависит также и от параметра  $k_0 a |\eta|^{1/2}$ . Потери являются квазистатическими лишь при выполнении неравенства

$$k_0 a |\eta|^{1/2} \ll 1. \quad (29)$$

При этом

$$W_{\parallel}^e \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^4 \mu^2}{4c^3 (k_0 a)^3 g} \left( P_z^2 + \frac{3}{a^2} K_{zz}^2 \right). \quad (30)$$

В другом предельном случае

$$k_0 a |\eta|^{1/2} \gg 1 \quad (31)$$

при условии (28) мощность излучения равна

$$W_{\parallel}^e \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^4 \mu}{4c^3 (k_0 a)^3 g} \left( P_z^2 + k_0^4 a^2 g^2 K_{zz}^2 \right). \quad (32)$$

Следовательно, потери электрического квадруполья на излучение спиральных волн носят по-прежнему резонансный, но не квазистатический характер.

Заметим, что случай

$$k_0 a g^{1/2} \gg 1 \quad (33)$$

не представляет особого интереса, так как при этом мощность излучения, с одной стороны, всегда мала, а с другой — очень сильно зависит от конкретного вида распределения электрических токов в пространстве.

4. Совершенно аналогично может быть проведен расчет мощности, излучаемой магнитными диполями и квадрупольями. При этом электрический ток определяется через намагниченность  $\mathbf{m}$  по формуле

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{m}. \quad (34)$$

Здесь мы не будем приводить всех выражений для излучаемой мощности распределенными магнитными источниками различных ориентаций, а ограничимся лишь случаем магнитного горизонтального диполя и магнитного вертикального квадруполья. Эта задача представляет интерес с точки зрения приложений к ионосфере и астрофизике [15].

Будем считать, что

$$m_x = \frac{1}{\pi^{3/2} a^3} \left( P_x^m + K_{xz}^m \frac{\partial}{\partial z} \right) \exp \left( -\frac{R^2}{a^2} \right). \quad (35)$$

Выражение для излучаемой мощности  $W_{\perp}^m$  было получено на основании результатов работ [6, 7] аналогично выводу формулы (26)

$$W_{\perp}^m = \frac{\omega^4 g^{3/2}}{4c^3} \int_1^{\infty} \left[ 1 + \left( \mu + \frac{1}{x^2} \right)^2 \right] \left[ (P_x^m)^2 + \right. \\ \left. + k_0^2 g x^2 \left( \mu + \frac{1}{x^2} \right)^2 (K_{xz}^m)^2 \right] \exp \left( -\frac{k_0^2 a^2 g}{2} x^2 \right) dx. \quad (36)$$

Заметим, что выражение (36) при  $\mu = 0$  значительно проще получить непосредственно из приближенных уравнений (10) для источника (34), (35).

При выполнении неравенств

$$k_0 a g^{1/2} \ll 1, \quad k_0 a |\eta|^{1/2} \gg \left( \frac{g}{|\eta|} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{k_0^2 a^2 |\eta|} \right) \quad (37)$$

из (36) найдем

$$W_{\perp}^m \approx \frac{\omega^3 g}{4c^2 a} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} (P_x^m)^2 + \frac{6}{5} k_0^3 a g^{3/2} (K_{xz}^m)^2 \right). \quad (38)$$

Это означает, что несмотря на наличие резонанса в среде магнитоквадрупольные потери являются нерезонансными.

С другой стороны, если во втором неравенстве (37) знак меняется на обратный, то потери на излучение становятся резонансными и по аналогии с квазиэлектростатическими для электрических мультиполей их удобно называть квазимагнитостатическими:

$$W_{\perp}^m \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3 g}{4c^2 a} \left( (P_x^m)^2 + \frac{2g^2}{|\eta|^2 a^2} (K_{xz}^m)^2 \right) \quad \text{при } k_0 a |\eta|^{1/2} \gg 1, \quad (39)$$

Заметим, что магнитостатические потери диполя были найдены в работе [15].

В случае вертикальных магнитных источников (диполь  $P_z^m$  и квадруполь  $K_{zz}^m$ ) аналогично находим

$$W_{\parallel}^m = \frac{\omega^4 g^{3/2}}{2c^3} \int_1^{\infty} \left[ 1 - \left( \mu + \frac{1}{x^2} \right)^2 \right] \left[ (P_z^m)^2 + k_0^2 g x^2 \left( \mu + \frac{1}{x^2} \right)^2 (K_{zz}^m)^2 \right] \exp \left( - \frac{k_0^2 a^2 g}{2} x^2 \right) dx. \quad (40)$$

При выполнении условий (37) отсюда получаем

$$W_{\parallel}^m \approx \frac{\omega^4 g^{3/2}}{2c^3} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(P_z^m)^2}{k_0 a g^{1/2}} + \frac{4}{5} k_0^2 g (K_{zz}^m)^2 \right], \quad (41)$$

а вместо соотношения (39) при тех же условиях находим

$$W_{\perp}^m \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^4 g^{3/2}}{2c^3} \left[ \frac{(P_z^m)^2}{k_0 a g^{1/2}} + k_0^2 g \mu^2 \frac{(K_{zz}^m)^2}{(k_0 a)^3 g^{3/2}} \right]. \quad (42)$$

При условии  $k_0 a g^{1/2} \gg 1$  излучаемая мощность зависит не только от величины моментов  $P$ ,  $K$  и характерного размера  $a$ , но и от конкретного вида функции распределения электрических токов (14), (25), (35). В связи с этим укажем, что когда  $k_0 a g^{1/2} \ll 1$ , то для распределений источников, удовлетворяющих при  $a \rightarrow 0$  соотношению (12) и имеющих спектр  $j_i(\mathbf{k})$ , достаточно быстро убывающий при больших  $\mathbf{k}$ , излучаемая мощность  $W$  определяется получаемыми здесь выражениями. Они позволяют оценить излучаемую мощность источниками электрического и магнитного типа, генерирующими волны в диапазоне свистящих атмосфериков. Более того, приближение, основанное на решениях уравнений (10), удобно для анализа различных вопросов излучения спиральных волн [16, 17].

Благодарим А. А. Андронova и Н. Г. Денисова за обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. В. Д. Шафранов, Сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Атомиздат, М., 1963.
3. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970.
4. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 32, 338 (1957).
5. M. J. Lighthill, Phil. Trans. Roy. Soc., London, 252, 397 (1960).
6. Н. Когельник, Н. Мотц, Electromagnetic waves, 6, 461 (1963).
7. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
8. E. Arbel, L. V. Felsen, Electromagnetic waves, 6, 421 (1963).
9. Н. Г. Денисов, В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 351 (1973).
10. Н. С. Беллюстин, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1467 (1973).
11. Н. С. Беллюстин, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 17 (1975).
12. А. А. Андронов, Ю. В. Чугунов, УФН, 116, вып. 1, 79 (1975).
13. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1967.

14. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М, 1962.
15. Ю. В. Чугунов, Радиотехника и электроника, 18, № 6, 1111 (1973).
16. В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, В. Ю. Чугунов, Астрон. ж. (в печати).
17. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
18. Ю. В. Чугунов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 830 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
22 апреля 1975 г.

## RADIATION OF SPIRAL WAVES IN A MAGNETOACTIVE PLASMA BY DISTURBED SOURCES

*V. P. Dokuchaev, V. V. Tamoykin, Yu. V. Chugunov*

The radiation of electromagnetic waves in the range of whistler atmospherics (spiral waves) by disturbed sources (electric as well as magnetic dipoles and quadrupoles) is considered. Under the definite conditions the full radiated power is shown to be of the resonant character. Simple formulas are obtained for the estimations of the radiation power.

---

УДК 551.510.535

## О РЕЗОНАНСНОМ ЭКРАНИРУЮЩЕМ ДЕЙСТВИИ НЕОДНОРОДНЫХ ГИРОТРОПНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ СЛОЕВ

А. А. Жаров, И. Г. Кондратьев

Исследованы отражательные характеристики и структура поля внутри неоднородных гиротропных резонансных плазменных слоев с распределением концентрации  $N(x) = N_0 \left[ 1 - (-1)^m \frac{x^m}{x_0^m} \right]$  и внешним магнитным полем, ориентированным в плоскости слоя  $(\mathbf{H}^{(0)} \perp \mathbf{x}^{(0)})$ . Показано, что все слои, отвечающие  $m > 1$ , при выполнении в плоскости  $x = 0$  условия плазменного резонанса ( $\omega = \sqrt{\omega_p^2(0) + \omega_H^2}$ ) являются идеальными (в пренебрежении соударениями) экранами для волн с волновым вектором и вектором электрического поля, перпендикулярными внешнему магнитному полю  $(\mathbf{k}_0 \perp \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}^{(0)})$ ; причем экранируется вся область, лежащая за резонансной плоскостью,  $x > 0$ . Проведенные на ЭВМ расчеты подтверждают справедливость используемого для получения аналитических результатов конструктивного метода.

Как показано в работе [1], неоднородные изотропные плазменные слои обладают экранирующими свойствами, связанными с наличием перехода диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  через нулевое значение, — имеет место так называемое резонансное экранирование. В отсутствие диссипации для волн ТМ-типа достигается полное резонансное экранирование, когда  $\epsilon$  имеет нуль выше первого порядка (т. е. вблизи соответствующей точки, скажем,  $x = 0$ , зависимость  $\epsilon(x)$  представляется в виде  $\epsilon(x) = (-1)^m \frac{x^m}{x_0^m}$ , где  $m > 1$ ); причем экранируется вся

область, лежащая за плоскостью, в которой  $\epsilon$  проходит через нуль ( $x > 0$ ). Учет соударений в плазме (см. [1]) приводит, естественно, к снятию полного экранирования, однако при достаточно малых соударениях эффект экранирования выражен довольно сильно — коэффициент прохождения волны через соответствующий слой  $T \sim \nu^{(1-1/m)}$ , где  $\nu = \nu_{эфф}/\omega$ ,  $\nu_{эфф}$  — эффективная частота соударений,  $\omega$  — частота падающего поля. Представляет несомненный интерес обобщение результатов, полученных в [1], по крайней мере, в двух направлениях, — учет гиротропии и пространственной дисперсии\*. Обсуждению влияния первого из отмеченных факторов — гиротропии — на экранирующие свойства неоднородных плазменных слоев и посвящена настоящая работа.

1. В качестве набора эталонных (элементарных [1]) неоднородных слоев, позволяющего выяснить все основные физические особенности, возьмем, так же как в [1], слои с распределением концентрации

$$N(x) = N_0 \left[ 1 - (-1)^n \frac{x^n}{x_0^n} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

\* Заметим, что для наиболее простого из резонансных слоев — однородного нулевого слоя [2] (отвечающего, по существу, нулю  $\epsilon$  бесконечного порядка  $m \rightarrow \infty$  [1]) — такое обобщение было проведено в [3, 4].



Предельные случаи линейного ( $n = 1$ ) и однородного ( $n \rightarrow \infty$ ) гиротропных плазменных слоев достаточно подробно рассмотрены в литературе (см., например, [3, 5]), и мы специально на них останавливаться не будем.

Эффект резонансного экранирования неоднородными изотропными слоями связан в конечном счете с экранирующим действием вырожденного нулевого слоя, получающегося из ненулевого однородного слоя конечной толщины в пределе при одновременном стремлении к нулю проницаемости внутри слоя и его толщины, причем проницаемость стремится к нулю быстрее, чем толщина. Исходя из такого представления, следует ожидать, что резонансное экранирование неоднородными гиротропными плазменными слоями будет иметь место в случае падения волны ТМ-типа в направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю  $H^{(0)}$ , ориентированному в плоскости слоя  $H^{(0)} \perp x^0$ , при выполнении в сечении  $x = 0$  условия плазменного резонанса  $\omega = \sqrt{\omega_p^2(0) + \omega_H^2}$  ( $\omega_p(0) = \omega_p(x = 0)$ ) — плазменная частота,  $\omega_H$  — гирочастота). Действительно, соответствующий однородный гиротропный плазменный слой без учета соударений обеспечивает, согласно [3], идеальную экранировку независимо от его толщины, причем (что важно для дальнейшего) эта экранировка сохраняется и при нормальном падении. Отсутствие идеального экранирования во всех остальных случаях (при другой ориентации внешнего магнитного поля) связано с обязательным возбуждением в слое двух волн — обыкновенной и необыкновенной (а следовательно, ТЕ-, ТМ-волн), одна из которых всегда обеспечивает просачивание конечных порций энергии. Справедливость высказанных предположений подтверждается, как мы увидим, всем дальнейшим рассмотрением.

Итак, пусть на плазменный слой ( $-x_0 \leq x \leq x_0$ ) с распределением концентрации  $N(x)$  вида (1), помещенный в постоянное внешнее магнитное поле  $H^{(0)}$ , параллельное оси  $y$  ( $H^{(0)} \perp y^0$ ), падает из вакуума плоская электромагнитная волна типа ТМ:

$$\begin{aligned} H_y &= 1 \exp(-i\beta_0 k_0 x - i\gamma k_0 z), \\ E_z &= -Z_0 \beta_0 \exp(-i\beta_0 k_0 x - i\gamma k_0 z), \\ E_x &= Z_0 \gamma \exp(-i\beta_0 k_0 x - i\gamma k_0 z), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\beta_0 = \sqrt{1 - \gamma^2}$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  — проницаемости вакуума (используется практическая рационализированная система единиц; принят временной фактор  $\exp(i\omega t)$ ).

Учитывая, что зависимость электромагнитного поля внутри слоя от координаты  $z$  описывается множителем  $\exp(-i\gamma k_0 z)$ , и опуская далее этот множитель, для компонент поля в слое будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_y}{dx^2} - \frac{d}{dx} \frac{\epsilon_{\perp}(x)}{\epsilon_{\perp}(x)} \frac{dH_y}{dx} + k_0^2 \left\{ \epsilon_{\perp}(x) - \gamma^2 + \right. \\ \left. + \gamma k_0^{-1} \epsilon_{\perp}(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{\epsilon_T(x)}{\epsilon_{\perp}(x)} \right] \right\} H_y = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$E_z = \frac{Z_0}{ik_0 \epsilon_{\perp}} \left( \frac{dH_y}{dx} - \epsilon_T \gamma k_0 H_y \right), \quad (3a)$$

$$E_x = \frac{Z_0}{k_0 \varepsilon_{\perp}} \left( -\varepsilon_T \frac{dH_y}{dx} + \gamma k_0 H_y \right).$$

Здесь

$$\varepsilon_{\perp}(x) = \frac{[1 - i\nu - v(x)]^2 - u}{(1 - i\nu)[1 - i\nu - v(x)] - u},$$

$$\varepsilon_T(x) = \frac{\sqrt{u} v(x)}{(1 - i\nu)[1 - i\nu - v(x)] - u}, \quad (3б)$$

$$v(x) = v_0 [1 - (-1)^n x^n / x_0^n], \quad v_0 = \omega_p^2(0) / \omega^2, \quad u = \omega_H^2 / \omega^2$$

$$\left( \omega_p^2(0) = \frac{e^2 N_0}{\varepsilon_0 m_e}, \quad \omega_H = \frac{|e| \mu_0 H^{(0)}}{m_e}, \quad e, \quad m_e \text{ — заряд и масса электрона} \right).$$

Эффективную частоту соударений считаем, так же как в [1], не зависящей от  $x$  и равной ее значению при  $x = 0$ .

В соответствии с высказанными выше общими утверждениями мы будем интересоваться таким случаем, когда в плоскости  $x = 0$  выполняется условие плазменного резонанса  $1 - v_0 - u = 0$ ; при этом входящие в (3) функции  $\varepsilon_{\perp}(x)$  и  $\varepsilon_T(x)$  запишутся в следующем явном виде:

$$\varepsilon_{\perp}(x) = \{-u + 2u(-1)^n (x/x_0)^n + (1-u)(x/x_0)^{2n} - v^2/(1-u) -$$

$$- 2i\nu[u/(1-u) + (-1)^n (x/x_0)^n] \{(-1)^n (x/x_0)^n - v^2/(1-u) -$$

$$- i\nu[(1+u)/(1-u) + (-1)^n (x/x_0)^n]\}^{-1}; \quad (4)$$

$$\varepsilon_T(x) = \{\sqrt{u}[1 - (-1)^n (x/x_0)^n] \{(-1)^n (x/x_0)^n - v^2/(1-u) -$$

$$- i\nu[(1+u)/(1-u) + (-1)^n (x/x_0)^n]\}^{-1}. \quad (4а)$$

Для отыскания коэффициентов отражения  $\Gamma$  и коэффициентов прохождения  $T$  через интересующие нас резонансные слои необходимо прежде всего построить решение уравнения (3) с  $\varepsilon_{\perp}(x)$  и  $\varepsilon_T(x)$ , описываемыми (4) и (4а).

2. Решение уравнения (3) с учетом соударений ( $\nu \neq 0$ ) даже в простейшем случае тонких изотропных ( $u = 0$ ) слоев встречается с определенными трудностями (подробнее см. в [1]) и к настоящему времени по существу не построено. Наличие внешнего магнитного поля, очевидно, усложняет ситуацию. Поэтому мы будем использовать приближенную методику, аналогичную предложенной в [1], которая опирается, в частности, на известное решение уравнения (3) без учета соударений ( $\nu = 0$ ).

Однако и в отсутствие соударений уравнение (3) для всех слоев с  $n > 2$  ( $n = 3, 4, \dots$ ) остается, вообще говоря, достаточно сложным — содержит иррегулярную особую точку  $x = 0$  — и его решение оказывается затруднительным. В силу этого мы возьмем в качестве исходного слой с квадратичным распределением концентрации —  $n = 2$  (квадратичный слой); причем сначала подробно проанализируем случай нормального падения,  $\gamma = 0$ , а затем уже обобщим полученные результаты на случай наклонного падения,  $\gamma \neq 0$ .

Уравнения (3), (3а), (4), (4а) применительно к случаю нормального падения волны (2) на квадратичный слой принимают вид

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \frac{d}{dx} \frac{\varepsilon_{\perp}(x)}{\varepsilon_{\perp}(x)} \frac{dH_y}{dx} + \alpha_0^2 \varepsilon_{\perp}(x) H_y = 0; \quad (5)$$

$$E_z = \frac{Z_0}{i\alpha_0 \epsilon_{\perp}} \frac{dH_y}{dx}, \quad E_x = -\frac{Z_0}{\alpha_0 \epsilon_{\perp}} \epsilon_T \frac{dH_y}{dx}; \quad (5a)$$

$$\epsilon_{\perp}(x) = -\frac{u}{x^2} + 2u + (1-u)x^2; \quad (6)$$

$$\epsilon_T(x) = \sqrt{u} \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right), \quad (6a)$$

где использованы следующие обозначения:  $x \equiv x_n = x/x_0$  (индекс «n» здесь и далее опускаем),  $\alpha_0 = k_0 x_0$ . Эффективная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\perp}(x)$  имеет полюс второго порядка в точке  $x = 0$  и нули в точках  $x = \pm x^{(0)} = \pm (\sqrt{u}/(1 + \sqrt{u}))^{1/2}$ . Коэффициент при первой производной в уравнении (5)  $f(x) = \frac{d}{dx} \epsilon_{\perp}(x)/\epsilon_{\perp}(x)$  имеет полюсы первого порядка в точках  $x = 0, \pm x^{(0)}$ . График зависимости  $\epsilon_{\perp}(x)$  при  $u = 0,1$  представлен на рис. 1 сплошной линией ( $\epsilon_{\perp}(+x) = \epsilon_{\perp}(-x)$ ).

Наличие в уравнении (5) полюсов в точках  $x = \pm x^{(0)}$ , связанных с обращением в нуль эффективной диэлектрической проницаемости, не приводит ни к каким особенностям в электромагнитном поле\*. Это видно непосредственно из уравнений для поля, если только переписать их в несколько другом виде, а именно взять в качестве основной не  $H_y$ , а  $E_z$ -компоненту электромагнитного поля. Тогда вместо (5), (5 а) будем иметь

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \alpha_0^2 \epsilon_{\perp}(x) E_z = 0; \quad (7)$$

$$E_x = -i \epsilon_T E_z, \quad (7a)$$

$$H_y = -\frac{i}{Z_0 \alpha_0} \frac{dE_z}{dx}.$$

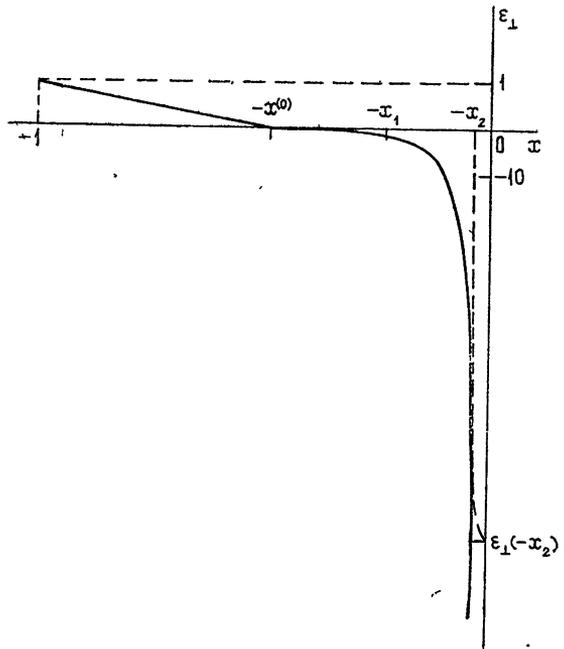


Рис. 1. Распределение эффективной диэлектрической проницаемости в квадратичном слое.

Уравнения (7), (7 а) несомненно более просты (по сравнению с (5), (5 а)), и поэтому их использование в случае нормального падения представляется предпочтительным. Имея, однако, в виду дальнейшее обобщение результатов на случай наклонного падения, мы будем исходить из уравнений (5), (5 а).

В целях упрощения интересующей нас задачи без ущерба, по существу (в силу только что сказанного), для ее физического содержания мы будем рассматривать далее достаточно тонкий слой, ограни-

\* Утверждение об отсутствии особенностей поля в точках, где  $\epsilon_{\perp}(x)$  обращается в нуль, распространяется, как показано в [5], и на случай наклонного падения.

ченный плоскостями  $x = \pm x_1$ , которые показаны на рис. 1 (распределение концентрации в таком слое изображено на рис. 2), с тем, чтобы решение уравнения (5) можно было представить в виде ряда по степеням  $x$ . Более того, мы часто будем считать параметры  $u$ ,  $\alpha_0$ ,  $x_1$  выбранными таким образом, что в соответствующих рядах можно (с хорошей степенью точности) ограничиться лишь несколькими первыми членами.

Два линейно независимых решения уравнения (5) в рассматриваемом тонком слое записываются в следующем виде:

Два линейно независимых решения уравнения (5) в рассматриваемом тонком слое записываются в следующем виде:

$$H_{y,2}^{(1,2)} = x^{s_{1,2}} \sum_{i=0}^{\infty} h_i^{(1,2)} x^i, \quad (8)$$

где

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + u \alpha_0^2}, \quad (8a)$$

$$h_i^{(1,2)} = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} [(s_{1,2} + j) f_{i-j} - \alpha_0^2 \delta_{i-j}] h_j}{(s_{1,2} + i)(s_{1,2} + i + 1) - u \alpha_0^2}; \quad (8b)$$

величины  $f_j$  и  $\delta_j$  определяются из разложений

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\perp}(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j x^j.$$

Как видно из приведенных формул, первое из двух независимых решений (8) описывает электромагнитное поле, регулярное всюду внутри слоя при  $u \alpha_0^2 > 2$  и имеющее особенность при  $u \alpha_0^2 < 2$ , второе же — электромагнитное поле, имеющее особенность при любых значениях  $u \alpha_0^2$ . Характер этих особенностей следующий:

$$\begin{aligned} E_x^{(1)} &\sim x^{-\frac{3}{2} + (\frac{1}{4} + u \alpha_0^2)^{1/2}}, & H_y^{(2)} &\sim x^{-\frac{1}{2} - (\frac{1}{4} + u \alpha_0^2)^{1/2}}, \\ E_z^{(2)} &\sim x^{\frac{1}{2} - (\frac{1}{4} + u \alpha_0^2)^{1/2}}, & E_x^{(2)} &\sim x^{-\frac{3}{2} - (\frac{1}{4} + u \alpha_0^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Наличие особенностей у электромагнитных полей, описываемых (8), делает, вообще говоря, принципиально необходимым учет поглощения внутри слоя ( $\nu \neq 0$ ). В частности, для получения корректного результата, отвечающего отсутствию поглощения ( $\nu = 0$ ), необходимо, как это продемонстрировано в [1], получить решение интересующей нас задачи при  $\nu \neq 0$ , а затем уже в полученном решении сделать предельный переход  $\nu \rightarrow 0$ . Однако, как уже отмечалось, получить соответствующее решение при  $\nu \neq 0$  не удастся, и поэтому мы воспользуемся искусственным приемом, предложенным в [1], который позволяет прийти к правильному результату в пределе, отвечающем отсутствию поглощения.

3. Заменяем реальное распределение концентрации  $N(x)$ , представленное на рис. 2, следующим вспомогательным распределением:

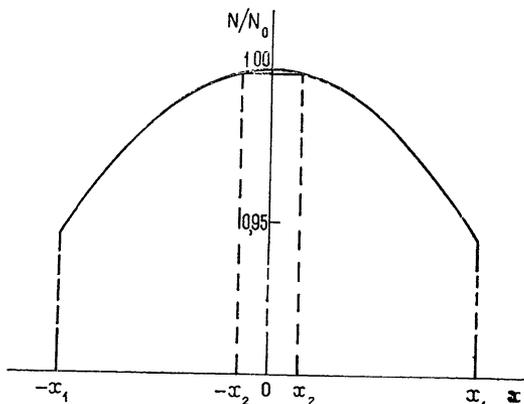


Рис. 2. Распределение концентрации в квадратичном слое.

$$N(x) = N_0(1 - x^2) \begin{cases} -x_1 \leq x \leq -x_2, \\ x_1 \geq x \geq x_2 \end{cases}, \quad (10)$$

$$N(x) = N_0(1 - x_2^2) \quad -x_2 \leq x \leq x_2,$$

которое показано на том же рисунке. Этому распределению концентраций соответствуют  $\varepsilon_{\perp}(x)$ ,  $\varepsilon_T(x)$ , описываемые (6), (6 а), в области  $x_2 \leq |x| \leq x_1$  и  $\varepsilon_{\perp}(x) = \text{const} = \varepsilon_{\perp}(x_2)$ ,  $\varepsilon_T(x) = \text{const} = \varepsilon_T(x_2)$  в области  $-x_2 \leq x \leq x_2$  (см. рис. 1), а также  $f(x)$ , отвечающее  $\varepsilon_{\perp}(x)$  вида (6), в области  $x_2 < |x| < x_1$  и  $f(x) = 0$  в области  $-x_2 < x < x_2$ .

Если теперь найти решение задачи для вспомогательного распределения концентрации, а затем в найденном решении сделать предельный переход к реальному распределению  $x_2 \rightarrow 0$ , то получим физически правильный результат для случая отсутствия соударений. Справедливость этого утверждения довольно очевидна и обусловлена тем, что при любом сколь угодно малом, но не равном нулю,  $x_2$  решение является однозначным и не зависит от порядка его получения: как при  $\nu$ , положенном равным нулю с самого начала, так и при условии  $\nu \neq 0$  в процессе решения и устремлении его к нулю лишь на конечном этапе.

После выполнения указанной процедуры для рассматриваемого квадратичного гиротропного слоя получаем коэффициент прохождения  $T$ , коэффициент отражения  $\Gamma$  и входной импеданс  $Z_{\text{вх}} = -E_z(-x_1)/H_y(-x_1)$  в виде

$$T = 0,$$

$$\Gamma = \exp(i2\alpha_0 x_1) \frac{\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) H_y^{(1)}(-x_1) - i H_y^{(1)' }(-x_1)}{\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) H_y^{(1)}(-x_1) + i H_y^{(1)' }(-x_1)}, \quad (11)$$

$$Z_{\text{вх}} = i Z_0 \frac{H_y^{(1)' }(-x_1)}{\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) H_y^{(1)}(-x_1)}$$

(штрих означает дифференцирование по аргументу). Следовательно, для нормально падающей волны с вектором электрического поля, перпендикулярным внешнему магнитному полю, такой слой является идеальным экраном (без учета соударений):  $T = 0$ ,  $|\Gamma| = 1$ ,  $Z_{\text{вх}}$  — чисто мнимая величина. Распределение электромагнитного поля внутри слоя при этом имеет следующий вид:

$$x \leq 0 -$$

$$H_y = \frac{2\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) \exp(i\alpha_0 x_1)}{\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) H_y^{(1)}(-x_1) + i H_y^{(1)' }(-x_1)} H_y^{(1)}(x), \quad (12)$$

$$E_z = -i \frac{2Z_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) \exp(i\alpha_0 x_1)}{\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) H_y^{(1)}(-x_1) + i H_y^{(1)' }(-x_1)} \frac{1}{\varepsilon_{\perp}(x)} H_y^{(1)' } (x),$$

$$E_x = - \frac{2Z_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) \exp(i\alpha_0 x_1)}{\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) H_y^{(1)}(-x_1) + i H_y^{(1)' }(-x_1)} \frac{\varepsilon_T(x)}{\varepsilon_{\perp}(x)} H_y^{(1)' } (x);$$

$$x > 0 -$$

$$H_y = 0, \quad E_z = 0, \quad E_x = 0,$$

т. е. экранируется вся область, лежащая за плоскостью  $x = 0$ , в которой эффективная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_{\perp}$  обращается в бесконечность.

Следует подчеркнуть, что в слое в области  $x \leq 0$  электромагнитное поле совпадает с полем, соответствующим первому (индекс <sup>(1)</sup>) из двух независимых решений (8). Магнитное поле и поперечная (по отношению к  $\nabla N$ ) составляющая электрического поля ( $E_z$ ) стремятся к нулю при  $x \rightarrow 0$ , причем  $E_z(-0)/H_y(-0) = Z(-0) = 0$ ; продольная же составляющая электрического поля при  $x \rightarrow 0$  стремится к бесконечности для слоев с параметром  $\kappa = u \alpha_0^2 < 2$  ( $E_x \sim x^{-\eta}$ , причем  $0 < \eta < 1$ ), остается конечной (не равной нулю) для слоя с  $\kappa = \kappa_{гр} = 2$  и стремится к нулю для слоев с  $\kappa > 2$ . Такой характер поведения поля, в частности  $E_x$ -компоненты, с очевидностью свидетельствует об отсутствии резонансного поглощения.

Для того, чтобы связать толщину однородного участка  $x_2$  в вспомогательном распределении с частотой соударений  $\nu$  и иметь тем самым возможность хотя бы качественно оценить зависимость отражательных характеристик и структуры поля внутри слоя от  $\nu$  (при малых  $\nu$ ), поступим так же, как в [1], а именно предположим, что условие плазменного резонанса в вершине параболы слегка нарушено, т. е.

$$v(x) = (1 - u - \Delta)(1 - x^2), \quad (13)$$

где  $\Delta$  — отстройка от резонанса, которую для определенности будем считать действительной положительной величиной. График зависимости  $\varepsilon_{\perp}(x)$ , отвечающий этому случаю, в интересующей нас области  $-x_1 \leq x \leq x_1$  изображен на том же рис. 1 пунктирной линией (при  $\Delta = 10^{-3}$ ). В соответствии с этим графиком предложенная ранее аппроксимация представляется довольно естественной, если только выбрать  $x_2 = [\Delta/(1-u)]^{1/2}$ , как это показано на рис. 1. Подставляя далее (13) в (3б) при  $\nu = 0$  и сравнивая полученное таким образом выражение с формулой (4) при малых  $\nu$ , нетрудно увидеть, что для получения зависимости от  $\nu$  следует заменить  $\Delta$  на  $-i\nu$ . В результате окончательно имеем

$$x_2 \sim [-i\nu/(1-u)]^{1/2}. \quad (14)$$

Для получения зависимости интересующих нас величин от  $\nu$  теперь необходимо найти выражения для коэффициентов прохождения, отражения и входного импеданса, а также компонент поля внутри вспомогательного слоя и затем в полученных выражениях заменить  $x_2$  согласно (14). Мы не приводим соответствующие результирующие формулы ввиду их громоздкости. Отметим только, что продольная составляющая электрического поля ( $E_x$ ) в резонансной области  $\varepsilon_{\perp} \rightarrow \infty$  пропорциональна  $\nu^{-\frac{1-s_1}{2}}$ . Такой характер зависимости от  $\nu$  еще раз свидетельствует об отсутствии резонансного поглощения в рассматриваемом слое.

4. В случае наклонного падения ( $\gamma \neq 0$ ) волны (2) на соответствующий (рис. 2) квадратичный слой два линейно-независимых решения уравнения (3) в отсутствие соударений ( $\nu = 0$ ) могут по-прежнему быть записаны в виде (8), но с  $\delta_j \rightarrow \bar{\delta}_j$ , где  $\bar{\delta}_j$  находится из разложения 
$$\left\{ \varepsilon_{\perp}(x) - \gamma^2 + \gamma \alpha_0^{-1} \varepsilon_{\perp}(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{\varepsilon_T(x)}{\varepsilon_{\perp}(x)} \right] \right\} = \frac{1}{x^2} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\delta}_j x^j \quad (\varepsilon_{\perp}(x) \text{ и } \varepsilon_T(x) \text{ даются, очевидно, формулами (6) и (6а)}).$$

Применяя далее методику, изложенную в предыдущем пункте, т. е. строя решение для слоя с вспомогательным распределением концентрации (10) и устремляя затем толщину однородного участка  $x_2$  к нулю, приходим к следующим окончательным выражениям:

$$T = 0, \quad \Gamma = \exp(2i\beta_0 \alpha_0 x_1) \times \quad (15)$$

$$\times \frac{\alpha_0[\beta_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) + i\gamma \varepsilon_T(-x_1)]H_y^{(1)}(-x_1) - iH_y^{(1)' }(-x_1)}{\alpha_0[\beta_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) - i\gamma \varepsilon_T(-x_1)]H_y^{(1)}(-x_1) + iH_y^{(1)' }(-x_1)},$$

$$Z_{\text{вх}} = iZ_0 \frac{H_y^{(1)' }(-x_1) - \gamma \alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1)H_y^{(1)}(-x_1)}{\alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1)H_y^{(1)}(-x_1)};$$

$$H_y = \frac{2\beta_0 \alpha_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) \exp(i\beta_0 \alpha_0 x_1)}{\alpha_0[\beta_0 \varepsilon_{\perp}(-x_1) - i\gamma \varepsilon_T(-x_1)]H_y^{(1)}(-x_1) + iH_y^{(1)' }(-x_1)} H_y^{(1)}(x)$$

$$(x \leq 0),$$

$$H_y = 0$$

$$(x > 0) \quad (16)$$

(компоненты электрического поля находятся по известному значению магнитного поля с помощью (3 а)), представляющим собой обобщение формул (11), (12) на случай наклонного падения волны ТМ-типа. Таким образом, эффект полного экранирования резонансным квадратичным слоем сохраняется и при наклонном падении волны, что из физических соображений было вполне очевидным заранее.

Однако следующий шаг — оценка зависимости отражательных характеристик и структуры поля внутри слоя от  $\psi$  в случае наклонного падения волны — встречается уже с определенными трудностями (связанными формально с существенным усложнением коэффициента перед  $H_y$  в уравнении (3)) и не может (без введения дополнительных ограничений) быть сделан столь же просто, как и при нормальном падении волны.

Используя предложенное вспомогательное распределение концентрации, эффект резонансного экранирования квадратичным гиротропным плазменным слоем можно интерпретировать (ср. [1]) как эффект, связанный с экранирующим действием вырожденного однородного резонансного (плазменный резонанс) слоя (см. [3]) — слоя, получающегося из однородного нерезонансного слоя конечной толщины  $2x_2$  в пределе при одновременном стремлении толщины слоя к нулю ( $x_2 \rightarrow 0$ ) и концентрации к резонансному значению ( $v_2 \rightarrow 1 - u$ ) при условии, что  $1 - u - v_2$  стремится к нулю быстрее, чем толщина слоя, т. е.  $1 - u - v_2 \sim x^m$ , где  $m > 1^*$ .

Вполне очевидно, что предложенный искусственный прием — замена реального распределения концентрации вспомогательным, получение решения для вспомогательного распределения и последующий переход к реальному распределению — может быть использован применительно ко всем слоям, описываемым (4), (4 а), т. е. при  $n = 3, 4, \dots$  При этом он в равной степени пригоден как для нормального, так и для наклонного падения волны на слой\*\*. Используя такой прием и принимая данную выше интерпретацию, можно утверждать, что полное (в пренебрежении соударениями) резонансное экранирование должно достигаться для всех рассматриваемых слоев, описываемых (1), (4), (4а) с  $n > 1$ , при всех углах падения волны с вектором электрического

\* Утверждение об экранирующем действии такого вырожденного слоя легко доказывается с помощью общих формул, содержащихся в [3].

\*\* Заметим, что в случае нормального падения толщина однородного участка  $x_2$ , как нетрудно получить, следующим образом связана с частотой соударений в слое:  $x_2 \sim [-i \nu / (1 - u)]^{1/n}$ .

поля, перпендикулярным внешнему магнитному полю. Более того, это утверждение распространяется и на слои с  $\varepsilon_{\perp}(x)$  и  $\varepsilon_{\parallel}(x)$  вида (4), (4 а) при любом нецелом  $n$ , большем единицы:  $n \equiv m > 1$ .

5. Решение задачи о падении плоской электромагнитной волны (2) на неоднородные гиротропные резонансные плазменные слои, описываемые (4), (4 а) с  $\nu \neq 0$ , было проведено на ЭВМ. Мы приведем некоторые выборочные результаты этого счета, подтверждающие справедливость полученных формул и высказанных утверждений, а следовательно, и правильность используемой в работе методики.

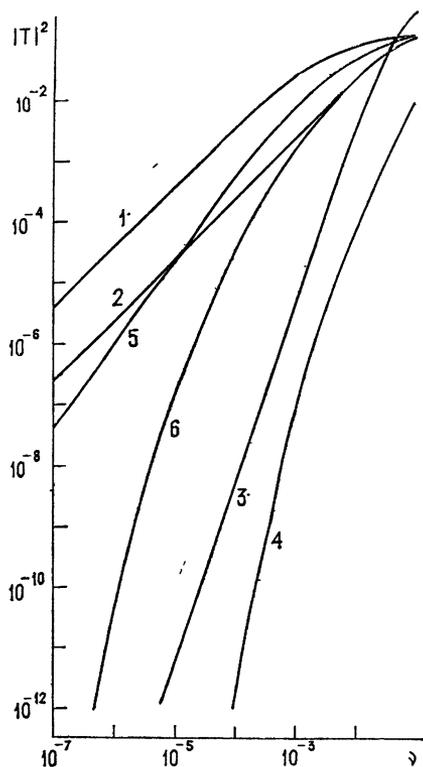


Рис. 3.

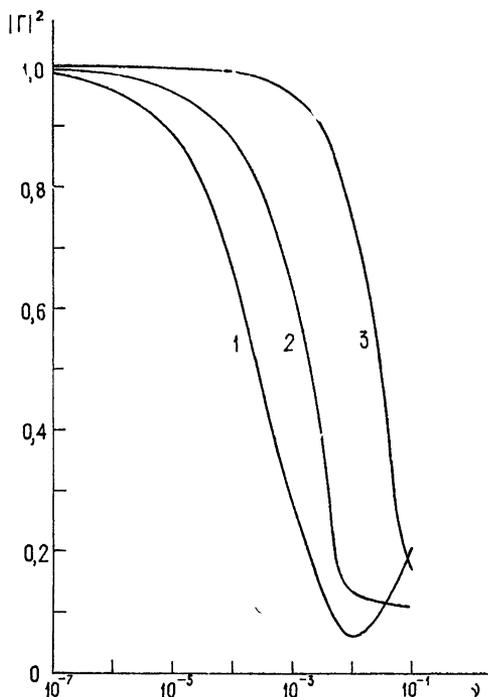


Рис. 4.

Рис. 3. Зависимость квадрата модуля коэффициента прохождения через слой от относительной частоты соударений в слое при следующих значениях параметров:

1 —  $n=2$ ,  $\gamma=0$ ,  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u=0,1$ ; 2 —  $n=2$ ,  $\gamma=0$ ,  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u'_1=0,5$ ; 3 —  $n=2$ ,  $\gamma=0$ ,  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=2$ ,  $u=0,5$ ; 4 —  $n=2$ ,  $\gamma=\sqrt{2}/2$ ,  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u=0,1$ ; 5 —  $n=3$ ,  $\gamma=0$ ,  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u=0,1$ ; 6 —  $n=4$ ,  $\gamma=0$ ,  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u=0,1$ .

Рис. 4. Зависимость квадрата модуля коэффициента отражения для квадратичного слоя ( $n=2$ ) в случае нормального падения волны ( $\gamma=0$ ) от относительной частоты соударений в слое при следующих значениях параметров:

1 —  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u=0,1$ ; 2 —  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u=0,5$ ; 3 —  $x_1=0,3$ ,  $\alpha_0=2$ ,  $u=0,5$

На рис. 3 представлены зависимости квадратов модулей коэффициентов прохождения  $|T|^2$  через квадратичный (нормальное и наклонное падение), кубический (нормальное) слои и слой четвертого порядка (нормальное падение) от значения относительной частоты соударений  $\nu$  в слое. В соответствии с этими графиками, в случаях нормального падения на квадратичный и кубический слои при достаточно малых  $\nu$ , квадрат коэффициента прохождения прямо пропорционален частоте соударений в некоторой степени, причем постоянный член в соответ-



ствующей зависимости (так же как в изотропных слоях [1]) отсутствует:

$$T^2 = C_{2,3} \nu^{\chi_{1,2}}, \quad (17)$$

где  $C_{2,3}$  — постоянные, не зависящие от  $\nu$ , а  $\chi_{1,2}$  зависят, в отличие от изотропных слоев, от значений параметров  $u$  и  $\alpha_0$  (а может быть только от одного параметра  $\chi = u \alpha_0^2$ ). Из формулы (17) следует, что при  $\nu \rightarrow 0$  в рассматриваемых случаях должен иметь место эффект полного (идеального) экранирования. В случаях наклонного падения волны на квадратичный слой и нормального падения на слой четвертого порядка квадрат коэффициента прохождения убывает с уменьшением  $\nu$  быстрее, чем по степенному закону, так что в пределе при  $\nu \rightarrow 0$  здесь тоже, конечно, должен иметь место эффект полного экранирования.

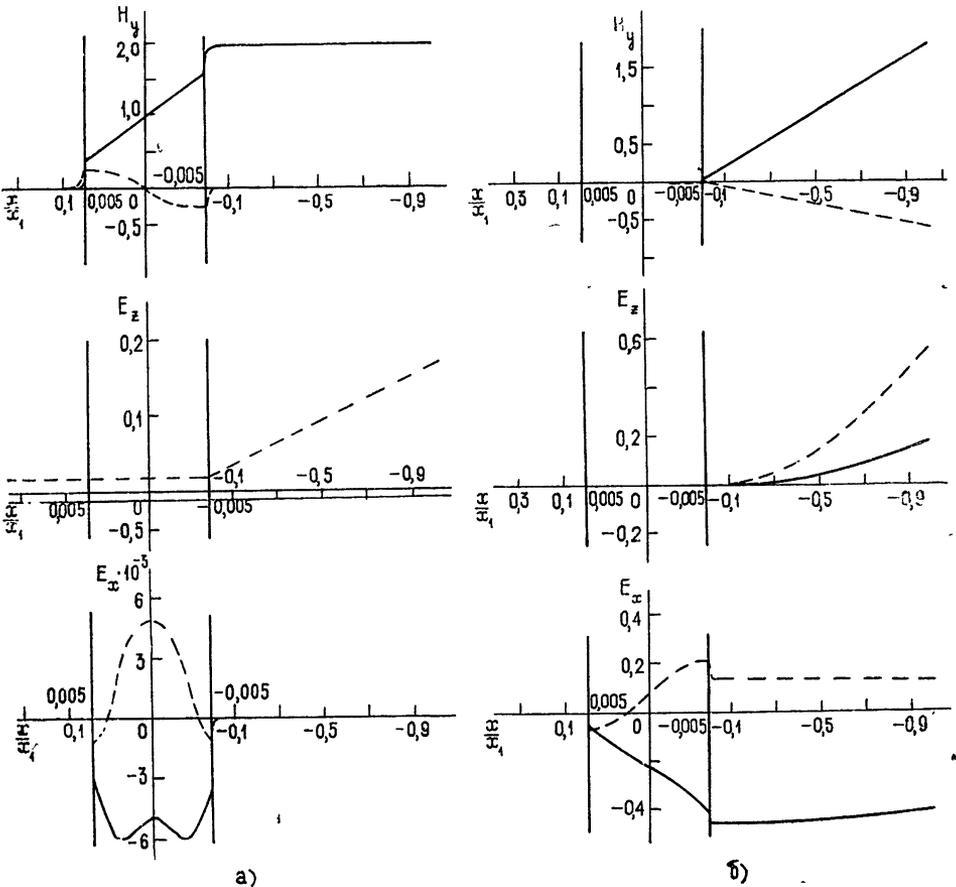


Рис. 5. Распределение действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей составляющих электромагнитного поля внутри квадратичного слоя ( $n=2$ ) в случае нормального падения волны ( $\gamma=0$ ) при следующих значениях параметров:

- а)  $x_1=0,3$ ,  $\nu=10^{-6}$ ,  $\alpha_0=0,25$ ,  $u=0,1$  ( $\chi=0,00625$ ); б)  $x_1=0,3$ ,  $\nu=10^{-6}$ ,  $\alpha_0=2$ ,  $u=0,5$  ( $\chi=2$ ).

На рис. 4 даны графики зависимости квадратов модулей коэффициентов отражения  $|\Gamma|^2$  от  $\nu$  в случае нормального падения волны на квадратичный слой при различных значениях параметров  $u$  и  $\alpha_0$ . Увеличение коэффициента отражения от слоя с увеличением значений

$u$  и  $\alpha_0$  (а вместе с тем и  $\kappa$ ) при достаточно малых  $\nu$  обусловлено, по-видимому, уменьшением продольной составляющей электрического поля  $E_x$  в резонансной области ( $x \sim 0$ ) и связанным с ним уменьшением джоулевых потерь внутри слоя.

Распределения действительной и мнимой частей составляющих полей  $H_y = H_{y_d} - iH_{y_m}$ ,  $E_z = E_{z_d} - iE_{z_m}$ ,  $E_x = E_{x_d} - iE_{x_m}$ , нормированных на амплитуду соответствующего падающего поля, внутри слоя (вдоль  $x$ -координаты) приведены на рис. 5 а, б для слоя толщиной  $x_1 = 0,3$  при  $\nu = 10^{-6}$  и двух значениях параметра  $\kappa$ :  $\kappa = 0,00625 < \kappa_{гр}$  ( $u = 0,1$ ,  $\alpha_0 = 0,25$ ) и  $\kappa = \kappa_{гр} = 2$  ( $u = 0,5$ ,  $\alpha_0 = 2$ ). Коэффициенты прохождения и отражения для таких слоев можно найти на рис. 3, 4 (кривые 1, 3). Приведенные распределения, как легко непосредственно убедиться, полностью согласуются с полученными аналитическими результатами. Более того, эти распределения в области  $x < 0$  достаточно хорошо описываются первыми членами соответствующих рядов: для слоя с  $\kappa = 0,00625$   $H_y \sim x^{0,00625}$ ,  $E_z \sim x^{1,00625}$ ,  $E_x \sim x^{-0,99375}$ ; для слоя с  $\kappa = 2$   $H_y \sim x$ ,  $E_z \sim x^2$ ,  $E_x \approx \text{const}$ . Графики рис. 5 а, б с очевидностью свидетельствуют о том, что при  $\nu \rightarrow 0$  действительно будет экранироваться вся область, лежащая за резонансной плоскостью,  $x > 0$ .

Сравнительно недавно появилась работа [6], в которой задача о падении плоской электромагнитной волны ТМ-типа на изотропный резонансный симметричный ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ) плазменный слой, рассмотренная в [1], решалась методом итераций. Полученные при этом физические результаты совпали с результатами работы [1]. Авторы [6] применяли далее метод итераций к аналогичной задаче для гиротропного резонансного плазменного слоя [7]. Проведенное в этих работах рассмотрение может служить более четким математическим обоснованием справедливости результатов, содержащихся в [1] и в данной работе, а следовательно, и применяемого там конструктивного метода. Этот метод, удовлетворяющий лишь физическому уровню строгости, вместе с тем выгодно отличается от более строгих, в математическом отношении, методов (в частности, метода итераций) своей простотой, наглядностью, четким физическим смыслом и позволяет ответить на многие вопросы, которые в рамках более строгого подхода встречаются со значительными (и к настоящему времени не преодоленными) трудностями.

Как обратил наше внимание Н. Г. Денисов, эффект полного экранирования был получен фактически еще в работе [8], где рассматривалась задача о падении плоской электромагнитной волны ТЕ-типа на слой с диэлектрической проницаемостью вида  $\epsilon(x) = \epsilon_1 - A_1/(a-x)^2$  при  $x < 0$ ,  $\epsilon(x) = \epsilon_2 - A_2/(b+x)^2$  при  $x > 0$ , причем в плоскости  $x = 0$   $\epsilon_1 - A_1/a^2 = \epsilon_2 - A_2/b^2$ . В предельном случае  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$  отсюда получаются результаты, отвечающие слою с диэлектрической проницаемостью, имеющей полюс второго порядка, когда как раз и достигается полное экранирование. Характерно, что такой способ получения соответствующих результатов аналогичен по своему существу конструктивному методу, применяемому в [1] и настоящей работе. Заметим также, что распределение эффективной диэлектрической проницаемости (6) в непосредственной окрестности полюса — там, где можно не учитывать вклад последнего слагаемого  $(1-u)x^2$ , — совпадает с распределением проницаемости, принятым в [8], если положить  $a = b = 0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2u$ ,  $A_1 = A_2 = u$ .

Авторы признательны Н. Г. Денисову за полезные советы и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 886 (1968).
2. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 1, 124 (1964).
3. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 34 (1965).
4. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 1, 176 (1964).
5. Н. Г. Денисов, Радиотехника и электроника, 1, 732 (1957)
6. В. А. Живулин, Г. И. Макаров, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, ЛГУ, Л., вып. 13, 120 (1974).
7. В. А. Живулин, Г. И. Макаров, ЖТФ, 44, № 1, 201 (1974).
8. С. М. Рытов, Ф. С. Юдкевич, ЖЭТФ, 10, 887 (1940).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
22 января 1975 г.

### RESONANCE SHIELD ACTION OF INHOMOGENEOUS GYROTROPIC PLASMA LAYERS

*A. A. Zharov, I. G. Kondrat'ev*

The reflection characteristics and the field structure inside inhomogeneous gyro-tropic resonance plasma layers with the density distribution  $N(x) = N_0 \left[ 1 - (-1)^m \frac{x^m}{x_0^m} \right]$  and the external magnetic field oriented in the layer plane ( $H^{(0)} \perp x^0$ ) are investigated. It is shown that all layer satisfying  $m > 1$  when the plasma resonance conditions ( $\omega = [\omega_p^2(0) + \omega_H^2]^{1/2}$ ) are satisfied in the plane  $x=0$  are perfect (neglecting the collisions) screens for waves with the wave vectors and the electric field vector perpendicular to the external magnetic field ( $k_0 \perp E_0 \perp H^{(0)}$ ). The whole region lying behind the resonance plane  $x > 0$  is shielded. The computer calculations support the validity of the constructive method used to obtain the analytical results.

УДК 538.56 : 519.25

## О ВЕРОЯТНОМ ОПИСАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ

*С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев*

Рассматриваются статистические свойства нелинейных ленгмюровских колебаний. Выведено и решено уравнение для эйлерова вероятностного распределения поля скоростей, плотности электронов и других параметров плазмы. Найденные решения анализируются в различных конкретных случаях. Получены вероятностные распределения скорости, электрического поля и плотности электронов статистически однородной плазмы. Обсуждается асимптотическое поведение вероятностного распределения плотности ленгмюровских колебаний вблизи порога опрокидывания. Приведено необходимое и достаточное условие однопотоковости плазмы.

Как известно, колебания холодной разреженной плазмы описываются уравнениями гидродинамического типа (см., например, [1-3]). Лагранжево описание нелинейных колебаний такой плазмы было проведено в работах [3, 4]. Во многих физических приложениях более предпочтительным, однако, является отыскание плотности, скорости электронов и других параметров плазмы в фиксированных точках пространства, т. е. эйлерово описание. Переход же от известных лагранжевых к эйлеровым полям в общем случае очень громоздок. Заметим, что до сих пор эйлерово описание было проведено для стационарных волн [2], а также в случае синфазных колебаний электронов плазмы [5].

Если не известна полная информация о начальных скоростях и плотности электронов, естественно перейти к вероятностному описанию колебаний плазмы. Статистическое описание во многих случаях даже предпочтительнее динамического, поскольку последнее часто содержит избыточную информацию. Кроме того, использование различных вероятностных предположений, например статистической однородности, делает задачу определения статистических свойств плазмы более легкой, чем задачу о нахождении ее аналогичных динамических характеристик в эйлеровых переменных. В настоящей работе на основе гидродинамических уравнений, описывающих нелинейные ленгмюровские колебания, получено уравнение для эйлерова одноточечного вероятностного распределения поля скоростей, его градиента, плотности электронов плазмы и самосогласованного электрического поля. С помощью этого уравнения исследуются некоторые статистические и динамические характеристики нелинейных колебаний плазмы. Показано, в частности, что пространственные средние от эйлеровых динамических решений просто связаны с хорошо изученными лагранжевыми решениями, что существенно облегчает их вычисление.

### 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Нелинейные колебания холодной разреженной плазмы описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{e}{m} E, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} &= - \rho \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $v(x, t)$  и  $\rho(x, t)$  — соответственно скорость и плотность электронов,  $E(x, t)$  — электрическое поле, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - 4\pi e (\rho - \rho_0),$$

$\rho_0$  — плотность неподвижных ионов.

Полагая, что при  $x \rightarrow -\infty$  поток  $\rho v$  равен нулю, запишем уравнение для  $E(x, t)$  в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e \rho_0 v. \quad (1.2)$$

Флуктуации плотности электронов определяются, как видно из (1.1), двухточечной плотностью вероятности скорости, однако, увеличив число переменных, а именно, добавив к системе (1.1), (1.2) уравнение для  $u(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = - u^2 + \frac{4\pi e^2}{m} (\rho - \rho_0), \quad (1.3)$$

удаётся перейти от системы уравнений (1.1) — (1.3) к замкнутому уравнению для односточечного вероятностного распределения  $W[v, E, u, \rho; x, t]$  поля скоростей, его градиента, плотности и электрического поля плазмы в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Для этого аналогично тому, как делалось в [6, 7], напомним уравнение для среднего от произвольной функции четырех аргументов  $\varphi[v(x, t), E(x, t), u(x, t), \rho(x, t)]$ . Продифференцировав ее по времени с учетом (1.1) — (1.3) и усреднив полученное выражение, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \langle v \varphi \rangle &= \langle \varphi u \rangle - \left\langle \gamma E \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle + \frac{\omega_0^2}{\gamma} \left\langle v \frac{\partial \varphi}{\partial E} \right\rangle - \\ &- \left\langle \left[ u^2 - \omega_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \rho u \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\omega_0 = \left( \frac{4\pi e^2 \rho_0}{m} \right)^{1/2}$  — ленгмюровская частота,  $\gamma = e/m$ .

Пользуясь произвольностью функции  $\varphi[v, E, u, \rho]$ , перейдем от (1.4) к кинетическому уравнению для плотности вероятности

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + v \frac{\partial W}{\partial x} &= 4Wu + \gamma E \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{\omega_0^2}{\gamma} v \frac{\partial W}{\partial E} + \\ &+ \left[ u^2 - \omega_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \right] \frac{\partial W}{\partial u} + \rho u \frac{\partial W}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

которое необходимо дополнить начальным условием

$$W[v, E, u, \rho; x, 0] = W_0[v, E, u, \rho; x]. \quad (1.6)$$

2. Заметим, что уравнение (1.5) может описывать статистические свойства физических различных пучков частиц. Так, при  $e = 0$  оно переходит в уравнение для одномерного пучка не взаимодействующих частиц [6]. При  $\omega_0 = 0$  его решение принимает смысл вероятностного распределения параметров пучка электронов, движущегося в вакууме. Из (1.5) нетрудно также получить уравнение для плотности вероятности, описывающей эволюцию во времени кулоновских взаимодействующих частиц, исходные уравнения для которых являются в некотором смысле частным случаем уравнений (1.1)–(1.3) [8].

## 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ

1. Решение уравнения (1.5) при начальном условии (1.6) имеет вид

$$W[v, E, u, \rho; x, t] = W_0 \left\{ F \left[ v, \frac{\gamma E}{\omega_0} \right], F \left[ E, -\frac{\omega_0 v}{\gamma} \right], \right. \\ \left. \frac{F[u, (1 - \rho/\rho_0)\omega_0]}{F \left[ \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right), -\frac{u}{\omega_0} \right] + \frac{\rho}{\rho_0}}, \frac{\rho}{F \left[ \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right), -\frac{u}{\omega_0} \right] + \frac{\rho}{\rho_0}}, \right. \\ \left. x + F \left[ \frac{\gamma E}{\omega_0^2}, -\frac{v}{\omega_0} \right] - \frac{\gamma E}{\omega_0^2} \right\} \left\{ F \left[ \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right), -\frac{u}{\omega_0} \right] + \frac{\rho}{\rho_0} \right\}^{-4}, \quad (2.1)$$

где  $F[a, b] \equiv a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ .

Функция  $W$ , определяемая (2.1), имеет смысл вероятностного распределения только до тех пор, пока плазма однопотоковая. В связи с этим является важным вопрос о том, при каких условиях однопотоковость плазмы сохраняется.

При однопотоковом движении плотность электронов всюду конечна. Поэтому из условия финитности распределения (2.1) по  $\rho$  следует, что плазма всегда остается однопотоковой, если начальное вероятностное распределение  $W_0$  тождественно равно нулю при

$$2 \frac{\rho}{\rho_0} \leq \frac{u^2}{\omega_0^2} + 1. \quad (2.2)$$

Другими словами, если неравенство

$$2 \frac{\rho(x, t)}{\rho_0} > \frac{u^2(x, t)}{\omega_0^2} + 1 \quad (2.3)$$

выполняется в некоторый момент времени при всех  $x$ , то оно будет справедливым и при любых  $t$ , а плазма всегда останется однопотоковой. Из этого условия видно, что к многопотоковости плазмы приводят как достаточно большие градиенты скорости в начальных условиях, так и большие разрежения плотности — «каверны».

2. Распределение (2.1) — эйлерово вероятностное распределение параметров плазмы в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Если плазма статистически однородна и  $W_0$  в (1.6) не зависит от  $x$ , выражение (2.1) становится особенно удобным для анализа статистических свойств плазмы. Так, из (2.1) легко показать, что средняя за период кинетическая энергия электронов  $\left\langle \frac{m\rho v^2}{2} \right\rangle$  вне зависимости от амплитуды колебаний

равна средней энергии электрического поля  $\left\langle \frac{E^2}{8\pi} \right\rangle$ . Объясняется это тем, что все электроны плазмы колеблются по гармоническому закону [3, 4].

Проинтегрировав (2.1) по  $u$  и  $\rho$ , мы получим совместное вероятностное распределение скорости и электрического поля. Изменение этого распределения во времени можно представить как вращение начального распределения скорости и электрического поля на плоскости  $\left( v, \frac{\gamma E}{\omega_0} \right)$  с ленгмюровской частотой  $\omega_0$ .

В частности, когда в начальный момент времени плотность электронов постоянная и равна плотности ионов  $\rho_0$  (электрическое поле при этом равно нулю), нетрудно из (2.1) получить вероятностное распределение скоростей

$$W(v; t) = W_0 \left( \frac{v}{\cos \omega_0 t} \right) \frac{1}{|\cos \omega_0 t|} \quad (2.4)$$

и электрического поля плазмы

$$W(E; t) = W_0 \left( \frac{\gamma E}{\omega_0 \sin \omega_0 t} \right) \frac{\gamma}{\omega_0 |\sin \omega_0 t|}. \quad (2.5)$$

Здесь  $W_0(v)$  — распределение скорости электронов в начальный момент времени. Отсюда видно, что форма вероятностного распределения скоростей электронов всегда одна и та же, в то время как его ширина меняется по гармоническому закону. Такая эволюция распределения скоростей обусловлена тем, что все электроны плазмы колеблются синфазно с ленгмюровской частотой. Распределение электрического поля совпадает в этом случае с распределением скоростей, сдвинутым на четверть периода колебаний во времени.

3. Перейдем к анализу вероятностного распределения плотности электронов. Из (2.1) при  $\rho(x, 0) = \rho_0$  следует, что

$$W(\rho; t) = P_0 \left[ \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \frac{\omega_0}{\sin \omega_0 t} \right] \frac{\rho_0^2 \omega_0}{\rho^3 |\sin \omega_0 t|}, \quad (2.6)$$

где  $P_0[u]$  — распределение градиента скорости электронов в начальный момент времени. Как видно из (2.2), колебания плазмы будут однопотокowymi, если  $P_0[u]$  равно нулю при  $|u| \geq \omega_0$ . Физически это условие означает, что в начальный момент должны отсутствовать электроны с кинетической энергией, которой хватило бы на преодоление потенциального барьера, возникающего при образовании особенности поля в точках обгона электронов.

В качестве конкретного примера рассмотрим синусоидальное в начальный момент поле скоростей

$$v_0(x) = V_0 \sin(k_0 x + \varphi), \quad (2.7)$$

где  $\varphi$  — случайная фаза, равномерно распределенная в интервале  $[-\pi, \pi]$ . При этом вероятностное распределение плотности (2.4) принимает вид

$$W(\rho; t) = \frac{\rho_0^2}{\rho^3 \pi [\varepsilon^2 \sin^2 \omega_0 t - (\rho_0/\rho - 1)^2]^{1/2}}, \quad (2.8)$$

где  $\varepsilon = \frac{kV_0}{\omega_0}$  характеризует близость волны к опрокидыванию. Если

нелинейная волна находится достаточно близко к границе опрокидывания, т. е.  $\varepsilon |\sin \omega_0 t| \leq 1$ , то в интервале

$$1 - \varepsilon |\sin \omega_0 t| \ll \frac{\rho_0}{\rho} \ll 1$$

плотность вероятности (2.8) спадает по степенному закону:

$$W(\rho; t) = \frac{\rho_0^{3/2}}{\pi \sqrt{2} \rho^{5/2}}.$$

Такой вид плотности вероятности можно объяснить тем, что в окрестностях точек максимальной плотности  $\rho \sim (x - x_*)^{-2/3}$ .

Для усредненного по периоду ленгмюровских колебаний вероятностного распределения плотности  $\bar{W}(\rho)$ , соответствующего начальному полю скоростей (2.7), имеем из (2.8)

$$\bar{W}(\rho) = \begin{cases} \frac{2\rho_0^2}{\rho^3 \pi \varepsilon} K \left\{ \left[ 1 - (1 - \rho_0/\rho)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \right]^{1/2} \right\} & \text{при } \left| 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{при } \left| 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right| > \varepsilon \end{cases},$$

где  $K[k]$  — полный эллиптический интеграл 1-го рода. Для нелинейной волны, близкой к границе опрокидывания, при

$$\rho_0 \ll \rho \leq \frac{\rho_0}{1 - \varepsilon}$$

получаем

$$\bar{W}(\rho) = \frac{\rho_0^2}{\rho^3 \pi}.$$

Для случая постоянной в начальный момент скорости вероятностное распределение плотности электронов запишется как

$$W(\rho; t) = G_0 \left( \frac{\rho \cos \omega_0 t}{1 - \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0} \cos \omega_0 t} \right) \frac{\cos^2 \omega_0 t}{\left| 1 - \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0} \cos \omega_0 t \right|^3}, \quad (2.9)$$

где  $G_0[\rho]$  — распределение плотности электронов при  $t = 0$ .

Отметим, что если в начальный момент в плазме имеются области с пониженной плотностью  $\rho \leq \frac{1}{2} \rho_0$ , то за время  $t^* \left( \frac{\pi}{2} < \omega_0 t^* \leq \pi \right)$  такие «каверны» схлопываются и плазма становится многопоточковой. При этом после опрокидывания распределение плотности (2.9) так же, впрочем, как и (2.6), при соответствующих начальных условиях, имеет асимптоту  $W[\rho] \sim \rho^{-3}$ , связанную с появлением в окрестности точек опрокидывания волны особенностей плотности, зависящих от координаты, как  $\rho \sim (x - x_*)^{-1/2}$ .

4. Выше были рассмотрены некоторые свойства статистически однородных ленгмюровских колебаний, для которых связь между эйлеровыми и лагранжевыми характеристиками наиболее проста. Результаты, полученные для случая статистически однородной плазмы, можно



использовать при отыскании пространственных средних для динамических решений. Будем интересоваться пространственными средними от  $\varphi [v(x, t), E(x, t), u(x, t), \rho(x, t)]$  — функции четырех эйлеровых полей, отвечающих некоторым динамическим колебаниям плазмы. Считая для определенности, что колебания существуют только в некоторой области  $x \in [a, b]$ , проинтегрируем  $\varphi$  по этому интервалу\*:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi [v(x, t), E(x, t), u(x, t), \rho(x, t)] dx. \quad (2.10)$$

Воспользовавшись равенствами

$$v(x, t) = v[x(t/x_0), t] = v_L(x_0, t), \quad E(x, t) = E_L(x_0, t), \dots,$$

где  $v_L, E_L, \dots$  — лагранжевы характеристики плазмы в окрестности фиксированного электрона с начальной координатой  $x_0$ , перейдем в (2.10) к интегрированию по  $x_0$ :

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{\rho(x_0, 0)}{\rho_L(x_0, t)} \varphi [v_L(x_0, t), E_L(x_0, t), u_L(x_0, t), \rho_L(x_0, t)] dx_0.$$

Входящие сюда лагранжевы характеристики, а следовательно, и сам интеграл вычислить уже гораздо проще, чем эйлеровы поля  $v(x, t), E(x, t), \dots$  Так, например, легко показать, что среднее по интервалу  $[a, b]$  электрическое поле имеет частоту  $\omega_0$ , а средняя плотность энергии электрического поля  $E^2/8\pi$  колеблется на частоте  $2\omega_0$ , несмотря на то, что в фиксированной точке интервала колебания электрического поля существенно несинусоидальны.

Пространственные средние от  $\varphi$  можно записать и так:

$$\bar{\varphi} = \iiint \varphi [v, E, u, \rho] \widetilde{W} [v, E, u, \rho; t] dv dE du d\rho,$$

где

$$\widetilde{W} [v, E, u, \rho; t] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \delta [v - v(x, t)] \dots \delta [\rho - \rho(x, t)] dx. \quad (2.11)$$

Уравнение для функции  $\widetilde{W}$  легко получить, проинтегрировав (1.5) по  $x$ . При этом (1.5) переходит в уравнение, совпадающее с уравнением для плотности статистически однородной плазмы. Смысл функции  $\widetilde{W}$  легко понять, проинтегрировав ее по каким-либо трем переменным, например, по  $v, E$  и  $u$ . В результате получим функцию  $\widetilde{W} [\rho; t]$ , такую, что  $\widetilde{W} [\rho; t] d\rho$  равно относительной длине пребывания плотности электронов плазмы  $\rho(x, t)$  в интервале  $[\rho, \rho + d\rho]$ . Сами же одномерные функции  $W [\rho; t]$  совпадают с соответствующими одномерными функциями распределения статистически однородной плазмы.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

\* Для периодических начальных условий усреднение нужно проводить по периоду. В общем случае рассмотрение усредненных характеристик можно провести при условии, что длина интервала усреднения много больше характерной амплитуды колебаний электронов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Заславский, УФН, 3, вып. 3, 395 (1973)
2. А. П. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Докл. АН СССР, 80, 193 (1951).
3. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961)
4. J. M. Dawson, Phys. Rev., 113 № 2, 383 (1959).
5. Г. П. Берман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1599 (1974).
6. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 3, 940 (1974)
7. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974).
8. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 57, вып. 3, 939 (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
24 января 1975 г.

## PROBABLE DESCRIPTION OF NONLINEAR OSCILLATIONS

*S. N. Gurbatov, A. I. Saichev*

The statistical properties of nonlinear Langmuir oscillations are considered. The equations are deduced and solved for Eiler probability distribution of the velocity field, electron density and other plasma parameters. The solutions found are analysed for different specific cases. Probability distributions of velocity, electric field and electron density of a statistically homogeneous plasma are obtained. An asymptotic behaviour of the probability density distributions of Langmuir oscillations near the breakdown threshold is discussed. The necessary and sufficient one-stream plasma condition is given.

---

УДК 535.2

## К ТЕОРИИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ИНТЕНСИВНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ПЛАВНОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

С. Н. Власов, С. Н. Гурбатов

Для описания эффектов самовоздействия в неоднородной нелинейной среде использовано параболическое уравнение в системе координат, связанной с траекторией центрального луча. На основании этого уравнения произведена оценка отклонения траектории центра масс пучка от траектории центра масс в линейной среде. Обсуждаются условия, когда можно пренебречь рефракцией, приводящей к астигматизму пучка. В случае аксиально-симметричной среды найдено изменение критической мощности и длины схлопывания пучка из-за линзоподобности среды.

1. В данной работе изучается распространение интенсивного пучка электромагнитных волн в плавнеоднородной среде с диэлектрической проницаемостью, зависящей от интенсивности поля  $\epsilon = \epsilon_0(\mathbf{r}) + \epsilon_1(\mathbf{r})|E|^2$ . Вначале выводится параболическое уравнение, которое в отличие от [1] не имеет особенностей, что позволяет пользоваться им как перед точкой поворота, так и за ней. На основании этого уравнения произведена оценка отклонения траектории центра масс пучка от траектории центра масс в линейной среде. В случае аксиально-симметричной среды найдено изменение критической мощности и длины схлопывания пучка из-за линзоподобности среды. Проведенное исследование является обобщением результатов работ [2, 3] на нелинейные среды.

2. Будем рассматривать распространение волнового пучка в системе координат, связанной с траекторией «центрального» луча пучка в линейной среде. В линейной среде траектория луча  $\mathbf{r}_0(\tau)$  удовлетворяет уравнениям геометрической оптики

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_0}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla \epsilon_0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \epsilon_0}{\partial n} - \frac{2\epsilon_0}{R_k} = 0,$$

где  $\mathbf{n}(\tau)$  — нормаль к  $\mathbf{r}_0(\tau)$ ,  $R_k$  — радиус кривизны траектории,  $ds = nd\tau$ ;  $n = \sqrt{\epsilon_0}$ ,  $k_0$  — волновое число в свободном пространстве.

Введем локальную систему координат, связанную с кривой  $\mathbf{r}_0(s)$ :  $s$  — длина дуги вдоль кривой,  $\xi$  — длина по нормали  $\mathbf{n}(s)$  к кривой,  $\eta$  — длина по бинормали  $\mathbf{b}(s)$ . Используя связь между декартовыми и новыми координатами и формулы Френе — Серре, вычислим коэффициенты метрического тензора  $g_{ik}$ , необходимого для записи уравнений поля:

$$g_{ss} = \left(1 - \frac{\xi}{R_k}\right)^2 + \frac{\xi^2}{R_r^2} + \frac{\eta^2}{R_r^2} = H^2,$$

$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} = 1, \quad g_{\eta\xi} = g_{\xi\eta} = 0,$$

$$g_{\eta s} = \frac{\xi}{R_r}, \quad g_{\xi s} = -\frac{\eta}{R_r},$$

где  $R_T$  — радиус кручения траектории  $\mathbf{r}_0(s)$ . В дальнейшем мы пренебрежем кручением траектории, вследствие чего в дифференциальные операторы войдут только коэффициенты Ламе.

Предположим, что в данном сечении пучка поляризация линейна, одинакова, совпадает с поляризацией на траектории луча  $\mathbf{r}_0(s)$  и определяется из уравнений геометрической оптики для линейной среды. Будем искать поле в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}(\tau) \frac{A(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{n(\tau)}} \exp\left(-ik_0 \int_0^\tau n^2 d\tau\right). \quad (1)$$

В (1)  $\mathbf{u}(\tau)$  — единичный вектор поляризации,  $A$  — медленно меняющаяся амплитуда поля,  $n(\tau)$  — показатель преломления среды на траектории  $\mathbf{r}_0(s)$ . Подставляя (1) в волновое уравнение, предполагая малость изменения показателя преломления на длине волны  $\left. \frac{dn}{ds} \right| k_0 n \ll 1$ , пренебрегая членами порядка  $(1/k\Lambda_{\parallel})^2$ , где  $\Lambda_{\parallel}$  — характерный масштаб продольного изменения пучка, и используя уравнения геометрической оптики для поляризации [4]

$$2\varepsilon_0 \frac{d\mathbf{u}}{ds} + (\nabla \varepsilon \mathbf{u}) \mathbf{s} = 0,$$

получим уравнение для медленно меняющейся амплитуды поля:

$$\begin{aligned} & -2ik_0 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \Delta_{\perp} A + \frac{\nabla_{\perp} H^2 \nabla_{\perp} A}{2} + \\ & + k_0^2 \left[ H^2 \left\{ \varepsilon_0(\mathbf{r}) + \varepsilon_1(\mathbf{r}) \frac{|A|^2}{n} \right\} - \varepsilon_0(\mathbf{r}_0) \right] A = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия применимости уравнения (2) различны для волн с различной поляризацией. Для волнового пучка с поляризацией  $\mathbf{u}$ , лежащей в плоскости траектории  $\mathbf{r}_0(s)$ , необходимо наложить дополнительное условие  $\lambda/R_k \ll 1$ .

Для пучков, ширина которых вдоль всей траектории много меньше радиуса кривизны\*:

$$\Lambda_{\perp}(\tau) \ll R_k(\tau), \quad (3)$$

в уравнении (2) можно провести разложение коэффициентов по малому параметру  $\Lambda_{\perp}/R_k$  и сохранить члены порядка  $(\Lambda_{\perp}/R_k)^2$ . Уравнение (2) примет вид

$$\begin{aligned} & -2ik_0 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \Delta_{\perp} A + k_0^2 \left\{ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial n^2} - \frac{3\varepsilon_0}{R_k^2} \right) \xi^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial \xi \partial \eta} \xi \eta + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial b^2} \eta^2 \right\} A + k_0^2 \left\{ \varepsilon_1(\tau) + \left( \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial n} - \frac{2\varepsilon_1}{R_k} \right) \xi \right\} \frac{|A|^2}{n(\tau)} A = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения (4) видно, что среда оказывает фокусирующее действие на пучок. Линзоподобность связана с двумя эффектами: наличием в разложении  $\varepsilon_0(\mathbf{r})$  по поперечным координатам квадратичных членов

\* При  $\xi = R_k$  система координат имеет особенность, а при  $\xi > R_k$  неоднозначна. Для исследования поля в этих областях необходимы дополнительные граничные условия, которые тривиальны только в случае узкого пучка,  $\Lambda_{\perp} \ll R_k$ , когда прямой и отраженный пучки не имеют общих областей.

и отличием радиуса кривизны траектории луча от бесконечности. В связи с этим фокусирующие члены появляются даже для слоя с линейной зависимостью  $\varepsilon_0(\mathbf{r})$  ( $\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial \mathbf{r}^2} = 0$ ) от координат.

3. Влияние неоднородности на самофокусировку удается проанализировать подробно при распространении пучка вдоль оси в симметричной линзоподобной среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = n^2(\tau) - \Phi(\tau) \rho_{\perp}^2 + \varepsilon_1(\tau) |E|^2,$$

когда пучок описывается уравнением

$$-2ik_0 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \Delta_{\perp} A - k_0^2 \rho_{\perp}^2 \Phi(\tau) A + k_0^2 \frac{\varepsilon_1(\tau)}{n(\tau)} |A|^2 A = 0. \quad (5)$$

Известно, что уравнение для волнового пучка в линейной линзоподобной среде  $-2ik_0 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \Delta_{\perp} A - k_0^2 \rho_{\perp}^2 \Phi(\tau) A = 0$  путем замены переменных [3, 11]\*

$$z = \frac{\sigma_s(\tau)}{\sigma_p(\tau)}, \quad r_{\perp} = \frac{\rho_{\perp}}{\sigma_p(\tau)}, \quad (6)$$

$$A(\rho_{\perp}, \tau) = \frac{1}{\sigma_p(\tau)} E(r_{\perp}, z) \exp\left(-\frac{ik_0}{2} \rho_{\perp}^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \ln \sigma_p\right)$$

сводится к уравнению для пучка в свободном пространстве  $-2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{\perp} E = 0$ . В (6)  $\sigma_p$  и  $\sigma_s$  — линейно независимые решения уравнения\*\*

$$\frac{d^2 \sigma}{d\tau^2} + \Phi(\tau) \sigma = 0, \quad (7)$$

удовлетворяющие начальным условиям  $\sigma_p(0) = 1$ ,  $\sigma_p'(0) = 0$ ,  $\sigma_s(0) = 0$ ,  $\sigma_s'(0) = 1$ .

Используя (7), преобразуем (5) к следующему параболическому уравнению:

$$-2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{\perp} E + k_0^2 \frac{\varepsilon_1(z)}{n(z)} |E|^2 E = 0, \quad (8)$$

что позволяет перенести результаты решения (8) на пучки в неоднородной линзоподобной среде. Если  $\varepsilon_1/n$  не зависит от  $z$ , то задача о распространении пучка в линзоподобной среде сводится к решению параболического уравнения в линейной однородной среде. Для эффективной ширины гауссова пучка, используя результаты работы [5], получим

$$a_{\text{эфф}}^2 = a_0^2 \sigma_p^2 + \frac{\sigma_s^2}{k_0^2 a_0^2} \left(1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}\right),$$

где  $P$  — мощность пучка,  $P_{\text{кр}}$  — критическая мощность самофокусировки в однородной среде. Используя преобразование (7), можно показать, что

\* Формула (6) обобщает преобразование работы [12] на непрерывно фокусирующую (линзоподобную) среду.

\*\* Уравнение для  $\sigma$  совпадает с уравнением для параксиальных лучей в линзоподобной среде [13].

в фокусирующей среде ( $\Phi > 0$ ) критическая мощность самофокусировки остается такой же, как и в однородной среде. Неоднородности среды приводят в этом случае к уменьшению длины схлопывания.

В случае отсутствия зависимости неоднородности от продольной координаты  $\Phi(s) \equiv \alpha^2$  имеем  $\sigma_p = \cos \alpha \tau$ ,  $\sigma_s = \frac{\sin \alpha \tau}{\alpha}$ ,  $z = \frac{\text{tg } \alpha \tau}{\alpha}$ . При мощности пучка, меньшей критической, поле в распределенной линзоподобной среде является периодической функцией с периодом  $L = \pi/\alpha$ ; в частности, на расстоянии  $L = \pi q/\alpha$  ( $q = 1, 2, \dots$ ), поле имеет такую же структуру, как и на входе в нелинейную среду. При мощности пучка, большей критической, происходит схлопывание в точке

$$\tau_{\text{схл}} = \frac{1}{\alpha} \text{arctg } \alpha z_{\text{одн}},$$

где  $z_{\text{одн}}$  — точка схлопывания в однородной среде. При этом преобразование (7) будет верно отображать только интервал неоднородной нелинейной среды  $[0, \tau_{\text{схл}}]$  на участок  $[0, z_{\text{одн}}]$  однородной нелинейной среды.

Дефокусирующая среда приводит к увеличению длины схлопывания и критической мощности пучка, при  $\Phi \equiv -\alpha^2$  критическая мощность самофокусировки и длина схлопывания в неоднородной среде равны соответственно

$$P^* = P_{\text{кр}} (1 + \alpha^2 a_0^4 k_0^2),$$

$$\tau^* = \frac{1}{\alpha} \text{arcth } \alpha z_{\text{одн}}.$$

4. Рассмотрим наклонное падение интенсивного пучка на плоско-слоистую среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon_0(\mathbf{z}) + \epsilon_1(\mathbf{z})|E|^2$ . Наличие в уравнении (4) линейного по  $\xi$  члена перед  $|E|^2$  приводит к дополнительному набегу фазы, зависящему от интенсивности пучка, и вследствие этого к отклонению его траектории от траектории в линейной среде. Рассмотрим траекторию центра интенсивности пучка в плоскости  $\eta = \text{const}$ :

$$x(\tau) = \frac{\iint \xi |A|^2 d\xi d\eta}{\iint |A|^2 d\xi d\eta}.$$

Путем дифференцирования и использования уравнения (4) получим для нее соотношение

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \alpha(\tau)x = \frac{\beta(\tau) \iint |A|^4 d\xi d\eta}{n(\tau) \iint |A|^2 d\xi d\eta}, \quad (9)$$

где

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_0}{\partial n^2} - \frac{3\epsilon_0}{R_k^2}, \quad \beta(\tau) = \frac{\partial \epsilon_1}{\partial n} - \frac{2\epsilon_1}{R_k}.$$

Отметим, что для случая, когда отклонение диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\mathbf{r})$  мало по сравнению с единицей, уравнение для центра тяжести пучка было получено в [6].

В линейной среде ( $\beta = 0$ ), согласно (9),  $x(\tau) = 0$ , и, следовательно, в рассматриваемом приближении траектория центра интенсивности в неоднородной среде совпадает с траекторией центрального луча пучка.

В нелинейной среде центр интенсивности будет смещаться из-за различной зависимости  $\epsilon_0(\mathbf{r})$  и  $\epsilon_1(\mathbf{r})$  от координат\*. Знак смещения определяется видом зависимости  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_1$  от координат и типом нелинейности. Так, если нелинейность среды обусловлена оптическим эффектом Керра, то  $\beta > 0$  и с увеличением мощности радиус кривизны траектории уменьшается. Для плазмы в случае стрикционной нелинейности возрастание мощности будет приводить к увеличению радиуса кривизны траектории пучка.

Для оценки величины смещения центра интенсивности волнового пучка из-за нелинейности предположим, что  $\beta$ ,  $\alpha$  и  $n$  — постоянные величины,  $\beta = \epsilon'/h$ , где  $h$  — характерный размер неоднородности. В решении для  $x(\tau)$  ограничимся квадратичными членами по  $\tau$ . На начальном участке траектории для пучка гауссовой формы шириной  $a_0$  имеем

$$\frac{x}{a_0} = \frac{P \tau^2}{8P_{\text{кр}} k_0^2 a_0^3 h}. \quad (10)$$

С ростом мощности пучка возрастает отклонение центра интенсивности от траектории луча в линейной среде. Но при  $P > P_{\text{кр}}$  в кубичной среде произойдет схлопывание пучка на расстоянии  $\tau_\phi$ , которое мы оценим по формулам для однородной среды. При  $P \gg P_{\text{кр}}$

$$\tau_\phi \approx \frac{k_0 a_0^2}{\sqrt{P/P_{\text{кр}}}},$$

так что в точке схлопывания пучок отклонится на величину

$$\Delta x \approx \frac{a_0^2}{8h}, \quad (11)$$

существенно меньшую ширины пучка на входе среды. Учет изменения ширины пучка по мере распространения в нелинейной среде и вследствие этого увеличение  $\iint |A|^4 d\xi d\eta$  в уравнении (9) [6] приводят к очень незначительному увеличению отклонения пучка по сравнению с (11).

5. Прежде чем перейти к исследованию влияния неоднородности среды на самофокусировку пучка, кратко изложим результаты решения задачи о распространении пучка в линейной среде, что необходимо для проведения оценок. В этом случае переменные в (4) разделяются. Полагая  $A = A_1(\xi, \tau) A_2(\eta, \tau)$ , получим, что  $A_2$  удовлетворяет параболическому уравнению для однородной среды, а  $A_1$  — уравнению

$$-2ik_0 \frac{\partial A_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} + k_0^2 \alpha(\tau) \xi^2 A_1 = 0. \quad (12)$$

В зависимости от знака  $\xi$  квадратичный по  $\xi$  член в (12) приводит к фокусировке или дефокусировке пучка. Оценить характерный масштаб рефракции можно из уравнения геометрической оптики [13] для поперечной координаты параксиального луча  $\sigma(\tau)$  (7):

$$\frac{d^2 \sigma}{d\tau^2} - \alpha(\tau) \sigma = 0. \quad (13)$$

Начальные условия к уравнению (13) определяются градиентом фазы пучка при  $\tau = 0$ . Построив огибающую к решению уравнения (13),

\* Если  $\epsilon_1(\mathbf{r})$  прямо пропорционально  $\epsilon_0(\mathbf{r})$ , то, как нетрудно видеть из уравнения для траектории пучка,  $\beta = 0$ .

соответствующим различным  $\epsilon_0$ , мы найдем положение каустики, где в приближении геометрической оптики интенсивность поля обращается в бесконечность. Для достаточно узких пучков положение каустики определяется из условия  $\sigma(\tau_p) = 0$ .

Для плоскослойистой среды с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0 = 1 - z/z_1$  имеем

$$\alpha(\tau) = -\frac{3\sin^2\theta_0}{4n^4(\tau)z_1^2}, \quad n^2(\tau) = 1 - \frac{\tau \cos\theta_0}{z_1} + \frac{\tau^2}{4z_1^2},$$

где  $\theta_0$  — угол между центральным лучом пучка на входе и градиентом диэлектрической проницаемости. Коллимированному на входе пучку соответствует равенство нулю производной  $\frac{d\sigma}{d\tau}$  при  $\tau=0$ . Решение уравнения (13) с этим начальным условием имеет вид

$$\sigma_p = \left(1 - \frac{\tau \cos\theta_0}{2z_1} - \frac{\tau^2 \sin^2\theta_0}{4z_1^2}\right) [n(\tau)]^{-1}. \quad (14)$$

Как можно видеть из (14), расстояние до каустики  $\tau_p$  в этом случае всегда больше расстояния до точки поворота  $\tau_n = 2z_1 \cos\theta_0$ , приближается к нему при  $\theta_0 \rightarrow 0$  и удаляется при  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ . В частности, при падении пучка под углом, близким к  $\pi/2$ ,  $\tau_p \approx 2z_1$  — существенно больше расстояния до точки поворота\*.

Заметим, что в рассматриваемом приближении задача о распространении волнового пучка в плавнеоднородной среде заменой переменных, аналогичной (8), может быть сведена к решению параболического уравнения в свободном пространстве [3].

6. Если характерный масштаб самофокусировки  $\tau_{\text{ф}}$ , который можно оценить по формулам для однородной среды, много меньше расстояния до каустики  $\tau_p$ , влияние неоднородности среды на эффекты самовоздействия заключается в изменении коэффициента  $\epsilon_1(\tau)/n(\tau)$  перед  $|E|^2$  в уравнении (4). Величина, обратно пропорциональная этому коэффициенту, имеет смысл локальной «критической» мощности  $P_{\text{кр}}^{\text{лок}}$ , зависящей от параметров среды так же, как зависит критическая мощность пучка от параметров однородной среды. Изменение  $P_{\text{кр}}^{\text{лок}}$  вдоль траектории пучка определяется зависимостью коэффициентов  $\epsilon_0, \epsilon_1$  от координат. Например, в плазме при стрикционном механизме нелинейности при движении пучка в область меньших значений  $\epsilon_0, \epsilon_1$  увеличивается и, следовательно,  $P_{\text{кр}}^{\text{лок}}$  уменьшается, что должно приводить к усилению нелинейных эффектов, а именно к уменьшению критической мощности самофокусировки и длины схлопывания пучка. Для задачи, рассматриваемой в [1], о распространении световых волн в атмосфере изменение локальной критической мощности определяется зависимостью коэффициента  $\epsilon_1$  от высоты.

При экспоненциальном законе спадания  $\epsilon_1$  с высотой  $h$  уравнение для поля принимает вид

$$-2ik_0 \frac{\partial E}{\partial \tau} + \Delta_{\perp} E + k_0^2 \epsilon_1 e^{-h(\tau)/H} |E|^2 E = 0, \quad (15)$$

где  $H$  — высота атмосферы. На начальном участке траектории  $h = \tau \cos\theta_0$  и уменьшение  $\epsilon_1(h)$  с высотой приводит к увеличению кри-

\* Близость  $\tau_n$  и  $\tau_p$  [1] есть следствие предположения, что задание линейного набега фазы  $\varphi = k_0 x \sin\theta_0$  при  $z=0$  эквивалентно заданию коллимированного пучка при  $\tau=0$ . Последнее справедливо, как следует из (14), лишь при  $\theta_0 \ll 1$ , когда  $\tau_p \approx \tau_n$ .



тической мощности и длины самофокусировки. Нетрудно видеть, что в этом случае с помощью замены переменных  $\Psi = E \exp\left(-\frac{\tau \cos \theta_0}{2H}\right)$  уравнение (15) сводится к уравнению для пучка в однородной среде с линейным поглощением, которое неоднократно исследовалось [7-9].

Дальнейшее влияние неоднородности среды на эффекты самовоздействия определяется соотношением между радиусом кривизны траектории  $R_K$  и радиусом Земли  $R_3$ . Для стандартной атмосферы луч все время уходит от поверхности Земли ( $R_K > R_3$ ) и коэффициент перед нелинейностью все время уменьшается. При сверхрефракции, когда  $R_K < R_3$ , и у луча есть точка поворота,  $n'_x = 0$ , после которой коэффициент перед нелинейностью будет возрастать.

В заключение отметим, что зависимость от  $\xi$  приводит к тому, что аксиально-симметричный пучок по мере прохождения через среду будет становиться несимметричным. На языке азимутальных гармоник это означает, что за счет уменьшения мощности нулевой гармоники из-за неоднородности среды возникают высшие азимутальные гармоники, которые в свою очередь усиливаются за счет нелинейного взаимодействия [10]. Это приводит к увеличению критической мощности самофокусировки и к возможности появления дополнительных точек схождения на оси пучка. Используемый метод может быть использован для исследования влияния плавного изменения на другие эффекты при распространении волн, в том числе на эффекты вынужденного рассеяния.

Авторы искренне благодарят В. И. Таланова за многочисленные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. А. Арманд, Радиотехника и электроника, 14, № 4, 587 (1969), 15, № 10, 2011 (1970), 18, № 1, 1 (1973).
- 2 В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд. Наука, М., 1972.
- 3 Г. В. Пермитин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 254 (1973).
- 4 М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
- 5 С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1352 (1971).
- 6 Б. Т. Кузнецов, Радиотехника и электроника, 19, № 12, 2470 (1974).
- 7 С. С. Wang, G. W. Pucette, Appl. Phys. Lett., 8, 256 (1966).
- 8 В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, в сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
- 9 E. L. Dawes, J. H. Marburger, Phys. Rev., 179, № 3, 862 (1969).
- 10 С. Н. Власов, С. Н. Гурбатов, Л. В. Пискунова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 12, 1805 (1974).
- 11 В. И. Таланов, Диссертация, Горький, 1967.
- 12 В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 11, 303 (1971).
- 13 Д. Маркузе, Оптические волноводы, изд. Мир, М., 1974, стр. 133.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
31 марта 1975 г.

#### THE SELF-ACTION THEORY OF INTENSE LIGHT BEAMS IN SMOOTHLY-INHOMOGENEOUS MEDIA

S. N. Vlasov, S. N. Gurbatov

To describe self-action effects in an inhomogeneous nonlinear medium, a parabolic equation is used in the coordinate system connected with the central ray trajectory. Based on this equation an estimation has been obtained of the deflection of the beam mass center trajectory from that in the linear medium. The conditions are discussed when the refraction resulting in the beam astigmatism may be neglected. In the case of an axially-symmetric medium the change in the critical power and length of the beam collapse due to lens-like medium is found.

УДК 621.373.42

## КОНКУРЕНЦИЯ МОД И РЕЖИМЫ ЗАХВАТА АВТОГЕНЕРАТОРА

*В. А. Мельникова, Т. М. Тарантович*

Рассмотрены режимы синхронизации двумодового автогенератора при различных коэффициентах связи между модами. Приведены амплитудно-частотные характеристики системы, определяющие синхронизацию для различных амплитуд внешнего поля и расстройек между его частотой и частотой одной из собственных волн системы. Выяснен механизм перестройки на одноволновую синхронизацию в зависимости от степени конкуренции мод.

Настоящая работа посвящена проблеме управления многомодовым режимом автогенератора (дискретного или распределенного с пространственно-однородным распределением поля) внешним сигналом, частота которого близка к одной из собственных частот. Считается, что в полосу возбуждения генератора попадают лишь две собственные частоты, не связанные между собой синхронно. Поведение подобного генератора в частном случае сильной связи между модами и отсутствия дисперсии нелинейности было рассмотрено в работах [1, 2]. Однако для большого класса систем (например, газовых ОКГ или твердотельных ОКГ с неоднородно уширенной линией вещества) связь между модами оказывается слабой и невзаимной — существует дисперсия нелинейности [3]. В системах с несколькими нелинейностями связь между типами колебаний, как показано в [4], также может быть самой различной. То же наблюдается при рассмотрении взаимодействия стационарных волн, так как величины коэффициентов связи в этом случае зависят от формы волны [5]. Поэтому представляет интерес выяснить влияние коэффициентов связи, характеризующих степень конкуренции мод, на процессы синхронизации и перестройки генератора, что и делается в данной работе.

### 1. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ, СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ

При рассмотрении задачи воспользуемся укороченными уравнениями для приведенных амплитуд взаимодействующих волн и разности фаз между внешней и собственной волнами, полученными в работе [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \sigma(1 - A_1^2 - \rho_1 A_2^2)A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} &= (1 - A_2^2 - \rho_2 A_1^2)A_2 + E \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \xi - \frac{E}{A_2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Здесь  $E$  — амплитуда внешнего поля,  $\xi$  — расстройка между частотами внешнего поля и второй моды,  $\rho_{1,2}$  — коэффициенты связи,  $\sigma$  — параметр, характеризующий отношение линейных инкрементов мод.

В системе возможны два стационарных режима.

1) Одночастотный режим ( $A_1=0$ ). Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) второй моды имеют вид

$$\xi^2 = \frac{E^2}{A_2^2} - (1 - A_2^2)^2.$$

Они не отличаются от аналогичных характеристик для обычного режима синхронизации одночастотного генератора.

2) Двухчастотный режим. Связь между амплитудами в этом случае дается соотношением  $A_1^2 = 1 - \rho_1 A_2^2$ , откуда следует, что область существования режима определяется неравенствами  $A_1 < 1$ ,  $A_2^2 < \frac{1}{\rho_1}$ . АЧХ для второй моды имеют вид

$$\xi^2 = \frac{E^2}{A_2^2} - [1 - \rho_2 - (1 - \rho_1 \rho_2) A_2^2]^2.$$

Заметим, что двухчастотный режим может представлять собой в зависимости от коэффициента связи либо двухчастотную генерацию с синхронизованной второй модой, либо генерацию первой моды и вынужденные колебания на частоте внешней силы.

Условия устойчивости одночастотного режима, определенные по критерию Льенара — Шипара, приводят к неравенствам:

- 1)  $A_2^2 > \frac{1}{\rho_1}$ . Эта граница устойчивости совпадает с границей существования двухчастотного режима;
- 2)  $A_2^2 > 0,5$ ;
- 3)  $\xi^2 + (3A_2^2 - 1)(A_2^2 - 1) > 0$ .

В отличие от условий устойчивости одночастотного генератора здесь добавляется еще одна граница устойчивости —  $A_2^2 > \frac{1}{\rho_1}$ . Она будет существенной лишь при  $\rho_1 < 2$ .

Условия устойчивости двухчастотного режима имеют вид

- 1)  $\sigma + \rho_2 - 1 > A_2^2(\rho_1 \rho_2 + \sigma \rho_1 - 2)$ ;  $\rho_1, \rho_2$
- 2)  $\xi^2 + [3(\rho_1 \rho_2 - 1)A_2^2 + 1 - \rho_2] [( \rho_1 \rho_2 - 1)A_2^2 + 1 - \rho_2] > 0$ ;
- 3)  $(A_2^2 - m)\xi^2 - m^3 + m^2(3A_2^2 + 4\sigma A_1^2) - 2m(4\sigma A_1^2 A_2^2 + A_2^4 + 2\sigma^2 A_1^4 - \sigma \rho_1 \rho_2 A_1^2 A_2^2) + 4\sigma A_2^2 A_1^2 (1 - \rho_1 \rho_2)(A_2^2 + \sigma A_1^2) > 0$ ,

где  $m = 1 - A_2^2 - \rho_2 A_1^2$ .

Границы устойчивости двухчастотного режима в отличие от одночастотного зависят от коэффициентов связи и параметра  $\sigma$ . При исследовании границ устойчивости получено разбиение плоскости коэффици-

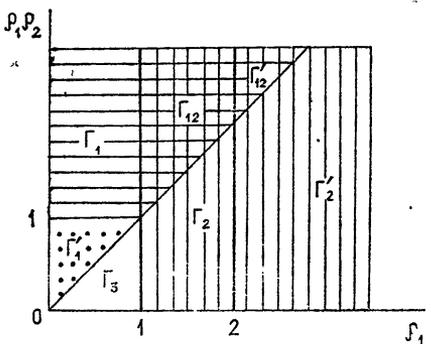


Рис. 1. Разбиение плоскости коэффициентов связи на области качественно различных АЧХ.

ентов связи на области качественно различного вида устойчивых ветвей АЧХ, которое приведено на рис. 1. На рисунке также выделены области различных режимов автономной системы\*: горизонтальной штриховкой отмечена область устойчивости одночастотного режима ( $A_2=0$ ), вертикальной — область  $A_1=0$ ; в области с двойной штриховкой в зависимости от начальных условий может существовать один из одночастотных

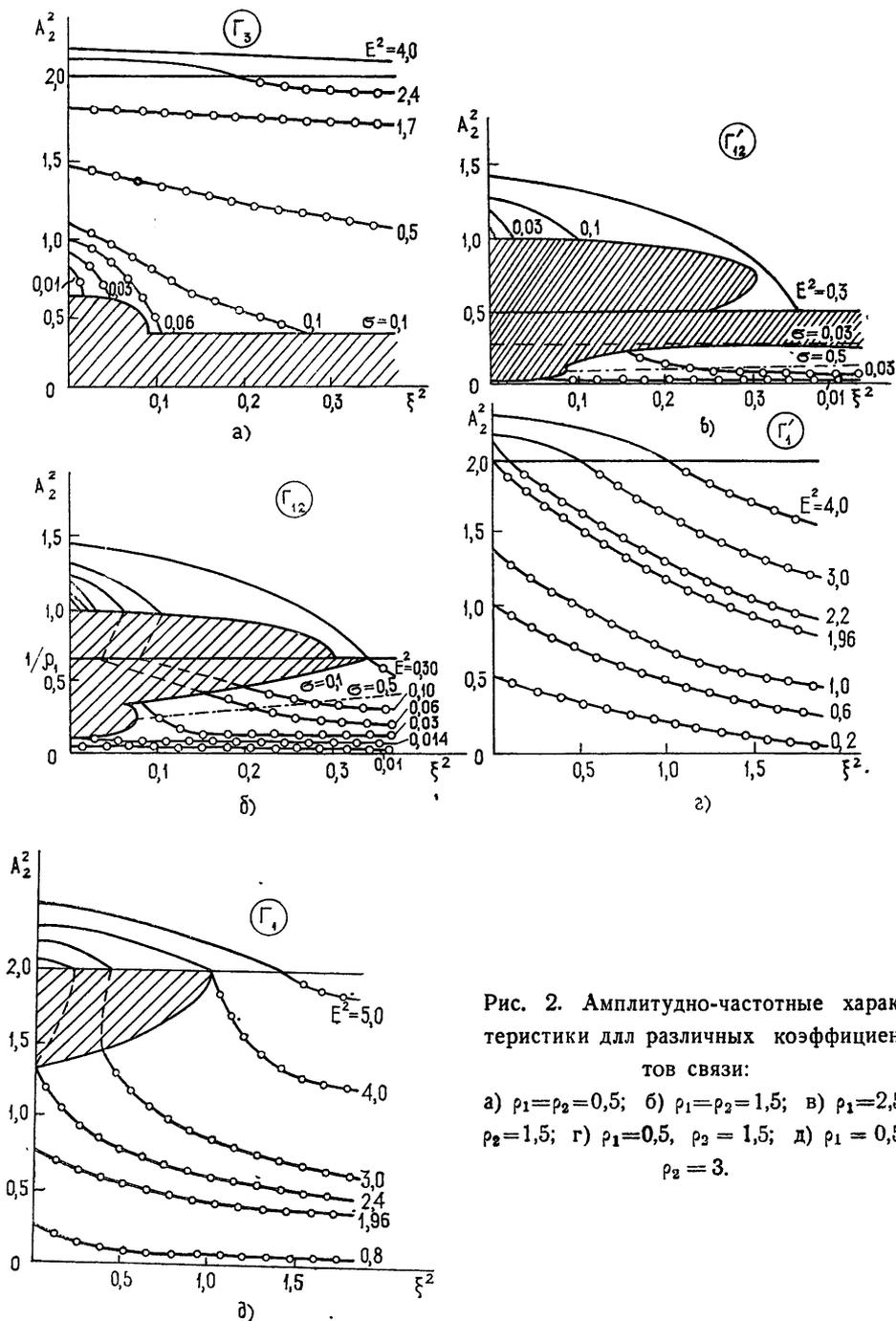


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики для различных коэффициентов связи:

а)  $\rho_1=\rho_2=0,5$ ; б)  $\rho_1=\rho_2=1,5$ ; в)  $\rho_1=2,5$ ,  $\rho_2=1,5$ ; г)  $\rho_1=0,5$ ,  $\rho_2=1,5$ ; д)  $\rho_1=0,5$ ,  $\rho_2=3$ .

\* Поведение автономного генератора рассмотрено в работе [6].

режимов; в незаштрихованной области устойчив двухчастотный режим. При выборе параметров в области, отмеченной точками, АЧХ двухчастотного режима будут однозначными, в остальных областях — трехзначными при некоторых значениях расстройк. Прямая  $\rho_1 = 2$  является бифуркационной для общего вида АЧХ, что будет ясно из дальнейшего рассмотрения.

АЧХ обоих режимов для различных значений коэффициентов связи и существенные границы устойчивости приведены на рис. 2. Устойчивые ветви АЧХ двухчастотного режима отмечены кружочками, области неустойчивости — штриховкой. Границы устойчивости, зависящие от параметра  $\sigma$ , приведены для сравнения при нескольких его значениях.

## 2. синхронизация генератора в отсутствие расстройки

Синхронизация генератора, а также перестройка его на одномодовую генерацию на частоте внешнего поля в случае  $\xi = 0$  особенно наглядно прослеживаются на фазовой плоскости\*.

1) При слабой конкуренции между модами ( $\rho_{1,2} < 1$ ) в автономной системе ( $E = 0$ ) реализуется двухчастотный режим. Процесс перестройки на одночастотный режим при возрастании амплитуды внешнего поля показан на рис. 3 а. Перестройка происходит «мягко» по амплитуде: амплитуда  $A_2$  плавно возрастает, а  $A_1$  убывает до нуля. Гашение первой моды происходит при

$$E > E_{кр1} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \left( \frac{1}{\rho_1} - 1 \right).$$

Из приведенного выражения следует, что погасить первую моду тем труднее, чем меньше коэффициент связи со второй модой. (На рис. 2 а  $E_{кр1}^2 = 1,96$ ).

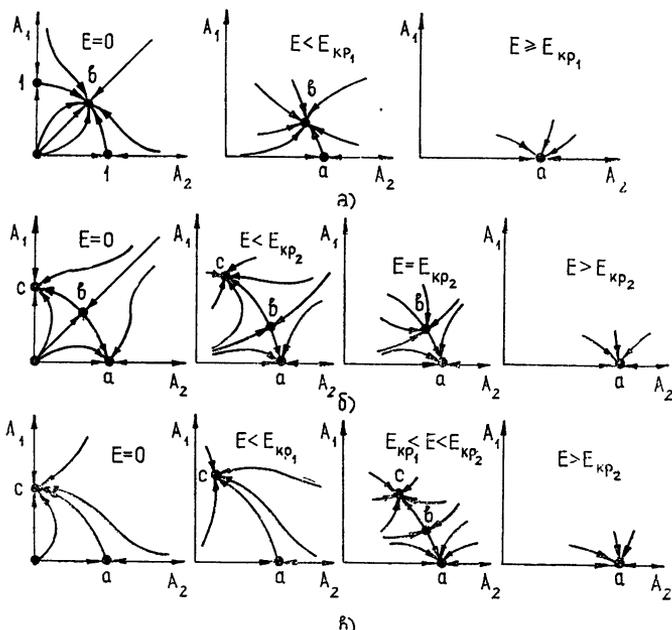


Рис. 3. Фазовые портреты системы при  $\xi = 0$ :

а)  $\rho_1 < 1, \rho_2 < 1$ ; б)  $\rho_1 > 1, \rho_2 > 1$ ; в)  $\rho_1 < 1, \rho_2 > 1, \rho_1 \rho_2 > 1$ .

\* Вид фазовой плоскости генератора в автономном режиме приведен в работе [6].

2) При сильной конкуренции ( $\rho_{1,2} > 1$ ) в автономной системе реализуется один из одночастотных режимов (рис. 3 б). Для нас представляет интерес случай, когда была возбуждена первая мода. При подаче внешнего поля амплитуда ее падает, появляются вынужденные колебания на частоте сигнала и при

$$E > E_{кр_1} = \frac{2}{3}(\rho_2 - 1) \sqrt{\frac{1 - \rho_2}{3(1 - \rho_1 \rho_2)}}$$

происходит перестройка на вторую моду. Здесь в отличие от предыдущего случая переход происходит «жестко» — амплитуды (имеется в виду амплитуда установившихся колебаний) меняются скачком; на фазовой плоскости при  $E = E_{кр_2}$  точки «с» и «в» сливаются и затем пропадают. (На рис. 2 б  $E_{кр_1}^2 = 0,014$ , на рис. 2 в —  $E_{кр_2}^2 = 0,0078$ .) В этом случае перестроить генератор существенно легче, чем при слабой конкуренции между модами.

3) В случае  $\rho_1 < 1$ ,  $\rho_2 > 1$  в автономной системе возбуждена первая мода. При  $\rho_1 \rho_2 < 1$  перестройка с первой моды на вторую происходит мягко (рис. 2 г) и вид фазовой плоскости при  $E \neq 0$  не отличается от рис. 3 а (на рис. 2 г —  $E_{кр_1}^2 = 1,96$ ). Для случая  $\rho_1 \rho_2 > 1$  вид фазовой плоскости приведен на рис. 3 в. При  $E < E_{кр_1}$  наряду с генерируемой первой модой в системе присутствуют вынужденные колебания на частоте внешнего поля. При  $E > E_{кр_1}$  (на рис. 2 д —  $E_{кр_1}^2 = 1,96$ ) становится возможной «жесткая» перестройка на одночастотный режим: дополнительное кратковременное воздействие достаточной амплитуды переводит систему в режим работы на второй моде. При  $E > E_{кр_2}$  возможна только одномодовая генерация на частоте внешней силы (на рис. 2 д —  $E_{кр_2}^2 = 2,4$ ).

### 3. АНАЛИЗ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Сравнение АЧХ для различных коэффициентов связи (рис. 1, 2) позволяет сделать следующие выводы.

1) При слабой конкуренции между модами (рис. 2 а) существует полоса синхронизации двухчастотного режима, которая в случае малых амплитуд внешнего поля определяется выражением

$$\left(\frac{\Delta \xi}{2}\right)^2 = \frac{1 - \rho_1 \rho_2}{1 - \rho_2} E^2.$$

При  $E > E_{кр_1}$  в области расстройек

$$\left(\frac{\Delta \xi}{2}\right)^2 = E^2 \rho_1 - \left(1 - \frac{1}{\rho_1}\right)^2 \quad (1)$$

существует только одночастотный режим. Полоса одномодовой синхронизации зависит лишь от коэффициента  $\rho_1$ , так как им определяются условия гашения первой моды. Увеличение  $\rho_1$  увеличивает полосу одномодовой синхронизации, одновременно уменьшая полосу двухмодовой. Увеличение коэффициента связи  $\rho_2$  (возрастание веса первой моды) расширяет полосу двухчастотной синхронизации.

2) В случае сильной связи (рис. 2 б, в) поведение системы определяется ее предысторией. Если генератор был возбужден на второй частоте (при  $\xi = 0$   $A_2^2 = 1$ ), то при любой амплитуде внешнего поля наступает режим синхронизации. При выборе параметров в области  $\Gamma'_{12}$  этот режим ничем не отличается от режима синхронизации одномодового

генератора. В области  $\Gamma_{12}$  полоса синхронизации для сильных сигналов зависит от коэффициента связи  $\rho_1$  и определяется выражением (1).

Если в генераторе была возбуждена первая мода (при  $\xi=0$ ,  $A_2^2=0$ ), то при  $E > E_{кр. \rho_1}$  по мере уменьшения  $\xi$  возможна перестройка на вторую моду. Она будет происходить «жестко», так как двухчастотный и одночастотный режимы разделены полосами отсутствия синхронизации. Отметим, что в области  $\Gamma_{12}$  (рис. 2 б) эта полоса существует только при слабых сигналах, тогда как в области  $\Gamma'_{12}$  (рис. 2 в) она присутствует при любых амплитудах внешнего поля, расширяясь по мере увеличения коэффициента  $\rho_1$ . Это объясняется тем, что при больших  $\rho_1$  первая мода гасится раньше, чем вторая захватывается внешним полем.

3) В случае  $\rho_1 < 1$ ,  $\rho_2 > 1$  в автономной системе возбуждена первая мода. Под действием внешнего поля она гасится и возбуждается вторая мода, которая и синхронизируется внешним сигналом. Режим ее синхронизации при малых расстройках будет устанавливаться «мягко» в области  $\Gamma'_1$  (рис. 2 г) и «жестко» в области  $\Gamma_1$  (рис. 2 д). Полоса одноволновой синхронизации в обоих случаях определяется выражением (1).

4) В случае  $\rho_1 > 1$ ,  $\rho_2 < 1$  устойчив только режим одномодовой синхронизации, причем в области  $\Gamma'_2$  он ничем не отличается от режима одночастотного генератора. В области  $\Gamma_2$  в случае больших сигналов голоса синхронизации меньше, чем в одночастотном генераторе, и уменьшается при уменьшении  $\rho_1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Мельникова, Явление захватывания в автоколебательной системе с двумя степенями свободы, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 7, 1049 (1972).
2. В. А. Мельникова, Т. М. Тарантович, О захватывании частоты в распределенном автогенераторе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1327 (1974).
3. У. Лэмб, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966, стр. 281.
4. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 11, 1700 (1971).
5. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 2, 214 (1967).
6. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
26 февраля 1975 г.

#### MODE COMPETITION AND SELF-OSCILLATOR TRAPPING REGIMES

V. A. Mel'nikova, T. M. Tarantovich

The two-mode self-oscillator trapping regimes are considered at the different coefficients of coupling between modes. The amplitude-frequency characteristics of the system determine trapping for different amplitudes of the external field and mistuning between its frequency of one of the natural waves of the system. A mechanism of retuning to a single-wave trapping as a function of mode competition is clarified.

УДК 621.391 : 519.27

**ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА АСИММЕТРИИ ОДНОМЕРНОЙ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ПРЕДСТАВЛЕННОЙ РЯДОМ ЭДЖВОРТА**

*В. И. Хименко*

Предложен простой способ оценки асимметрии одномерного распределения стационарного случайного процесса. Показано, что получаемая при этом оценка относится к классу несмещенных и состоятельных оценок параметра.

Решение многих радиофизических задач основано на получении статистических выводов относительно одного или нескольких неизвестных параметров одномерной функции распределения, принадлежащей априорно известному параметрическому семейству функций. При этом представляет интерес оценка параметров асимметрии  $\gamma_1$  и эксцесса  $\gamma_2$  одномерной функции плотности распределения вероятностей  $W_1(\xi|\gamma_1, \gamma_2)$ , представленной рядом Эджворта [1, 2]:

$$W_1(\xi|\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{\sigma_\xi} \left[ \Phi' \left( \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) - \frac{\gamma_1}{3!} \Phi^{(4)} \left( \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) + \frac{\gamma_2}{4!} \Phi^{(6)} \left( \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) \right], \tag{1}$$

где  $\Phi^{(n+1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right)$ ,  $m_\xi = \langle \xi(t) \rangle$  — среднее значение исследуемого процесса  $\xi(t)$ ,  $\sigma_\xi^2$  — дисперсия процесса.

Такая задача возникает при исследовании явления нормализации негауссова случайного процесса  $\xi(t)$  на выходе линейного инерционного звена, при аппроксимации функций распределения по критерию равенства первых четырех моментов, при исследовании статистических характеристик отраженных сигналов, исследовании нелинейных преобразований случайных процессов и в ряде других случаев. Оценка параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  принципиально может осуществляться по выборочным центральным моментам третьего и четвертого порядка, однако подобные способы, как правило, характеризуются большой дисперсией получаемой оценки и в практических задачах используются редко [3]. В данной работе предлагается простой способ получения несмещенной и состоятельной оценки  $\hat{\gamma}_1$  параметра  $\gamma_1$  плотности вероятности  $W_1(\xi|\gamma_1, \gamma_2)$ , заданной функцией (1).

По определению [2] коэффициент асимметрии

$$\gamma_1 = \sigma_\xi^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_\xi)^3 W_1(\xi|\gamma_1, \gamma_2) d\xi \tag{2}$$

является количественной характеристикой асимметрии функции



$W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2)$  относительно оси  $\xi = m_\xi = \langle \xi(t) \rangle$ . Следовательно, условие  $\gamma_1 \neq 0$  выполняется только при неравенстве вероятностей

$$P[\xi(t) > m_\xi] \neq P[\xi(t) < m_\xi].$$

Определим вероятность  $P[\xi(t) > m_\xi]$  для процесса  $\xi(t)$ , имеющего распределение (1):

$$\begin{aligned} P[\xi(t) > m_\xi] &= \int_{m_\xi}^{\infty} W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2) d\xi = \\ &= \sigma_\xi^{-1} \left[ \int_{m_\xi}^{\infty} \Phi' \left( \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) d\xi - \frac{\gamma_1}{3!} \int_{m_\xi}^{\infty} \Phi^{(4)} \left( \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_2}{4!} \int_{m_\xi}^{\infty} \Phi^{(5)} \left( \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} \right) d\xi \right] = \frac{1}{2} + \frac{\gamma_1}{3! \sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В свою очередь, для любой функции  $W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2)$  должно выполняться условие нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2) d\xi = 1$ , которое с учетом (3) сразу же приводит к равенству

$$P[\xi(t) < m_\xi] = 1 - P[\xi(t) > m_\xi] = \frac{1}{2} - \frac{\gamma_1}{3! \sqrt{2\pi}}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что оценка  $\hat{\gamma}_1$  параметра  $\gamma_1$  плотности вероятностей  $W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2)$  может быть получена на основе одного из соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= \alpha \left[ \int_{m_\xi}^{\infty} W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2) d\xi - \int_{-\infty}^{m_\xi} W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2) d\xi \right] = \\ &= \alpha (2P[\xi(t) > m_\xi] - 1) = \alpha (1 - 2P[\xi(t) < m_\xi]) \quad (\alpha = 3\sqrt{2\pi} = \text{const}). \end{aligned} \quad (5)$$

Обычно вероятность нахождения стационарного эргодического процесса  $\xi(t)$  над некоторым фиксированным уровнем  $h$  в прикладных задачах определяется как

$$P[\xi(t) > h] = \lim_{T \rightarrow \infty} Y(T, h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt, \quad (6)$$

где

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & (\xi(t) > h) \\ 0 & (\xi(t) \leq h) \end{cases},$$

$Y(T, h)$  — относительное время пребывания  $\xi(t)$  над уровнем  $h$ . Это позволяет при  $h = \langle \xi(t) \rangle = m_\xi$  и  $T \gg \tau_0$  ( $\tau_0$  — время корреляции процесса  $\xi(t)$ ) оценку (5) представить в удобном для практической реализации виде:

$$\hat{\gamma}_1 = \alpha [2Y(T, m_\xi) - 1] = \alpha \left( \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) dt - 1 \right). \quad (7)$$

Рассмотрим основные свойства предлагаемой оценки. Смещение оценки  $b(\hat{\gamma}_1)$  определяется разностью  $b(\hat{\gamma}_1) \equiv \langle \hat{\gamma}_1 \rangle - \gamma_1$ , где  $\langle \hat{\gamma}_1 \rangle$  можно найти из (7), (6) и (3):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\gamma}_1 \rangle &= \left\langle \alpha \left( \frac{2}{T} \int_0^T \eta(t) dt - 1 \right) \right\rangle = \\ &= \alpha \left( \frac{2}{T} \int_0^T \langle \eta(t) \rangle dt - 1 \right) = \alpha (2P[\xi(t) > m_\xi] - 1) = \gamma_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Соотношение (8) показывает, что оценка  $\hat{\gamma}_1$  относится к классу несмещенных оценок параметра  $\gamma_1$ .

Дисперсия оценки определяется как

$$D[\hat{\gamma}_1] \equiv \sigma_{\hat{\gamma}_1}^2 \equiv \langle [\hat{\gamma}_1 - \langle \hat{\gamma}_1 \rangle]^2 \rangle = \langle \hat{\gamma}_1^2 \rangle - \langle \hat{\gamma}_1 \rangle^2, \quad (9)$$

и с учетом (7) и (8), после несложных преобразований, приводится к виду

$$\sigma_{\hat{\gamma}_1}^2 = 4\alpha^2 \left\langle \left( \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \right)^2 \right\rangle - 4\alpha^2 \left\langle \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \right\rangle^2.$$

Это, в свою очередь, позволяет записать

$$\sigma_{\hat{\gamma}_1}^2 = 4\alpha^2 \langle [Y(T, m_\xi) - \langle Y(T, m_\xi) \rangle]^2 \rangle = 4\alpha^2 \sigma_Y^2. \quad (10)$$

Следовательно, дисперсия  $\sigma_{\hat{\gamma}_1}^2$  оценки  $\hat{\gamma}_1$  полностью определяется

дисперсией  $\sigma_Y^2$  измерения величины  $Y(T, m_\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt$ . Значение

$\sigma_Y^2$  в (10) целесообразно определить для случая, когда процесс  $\eta(t)$  формируется из гауссова процесса  $\xi(t)$ . Это объясняется тем, что распределение  $W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2)$  по форме близко к гауссову, а параметр  $\gamma_1$  может отклоняться от нулевого значения как в положительную, так и в отрицательную сторону, придавая функции  $W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2)$  левостороннюю или правостороннюю асимметрию.

Воспользовавшись здесь результатом определения  $\sigma_Y^2$  [4], удается при  $T \rightarrow \infty$  найти асимптотическое выражение дисперсии  $\sigma_{\hat{\gamma}_1}^2$  оценки  $\hat{\gamma}_1$  в виде ряда

$$\sigma_{\hat{\gamma}_1}^2 \sim \frac{8\alpha^2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(0)]^2}{n! \sigma_\xi^{2n}} \int_0^{\infty} R_\xi^n(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где  $R_\xi(\tau)$  — коэффициент корреляции процесса  $\xi(t)$ .

Таким образом, из (7), (8) и (11) видно, что предлагаемая в работе оценка  $\hat{\gamma}_1$  проста в реализации, является несмещенной и состоятельной оценкой параметра асимметрии  $\gamma_1$  функции  $W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2)$ .

В заключение следует заметить, что при решении задач оценки параметра эксцесса  $\gamma_2$  плотности распределения вероятностей  $W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2)$  вида (1) полезным может оказаться значение первого абсолютного центрального момента  $\langle |\xi - m_\xi| \rangle$  исследуемого процесса. Согласно (1) его значение равно

$$\langle |\xi - m_\xi| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi - m_\xi| W_1(\xi | \gamma_1, \gamma_2) d\xi = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sigma_\xi \left(1 + \frac{\gamma_2}{4!}\right),$$

откуда очевидна простая связь параметра  $\gamma_2$  с величиной  $\langle |\xi - m_\xi| \rangle$  легко измеряемой аппаратно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, Теория вероятностей и ее применения, 5, № 1 (1960).
2. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
3. М. Кендалл, А. Стюарт, Теория распределений, изд. Наука, М., 1966.
4. Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, изд. Мир, М., 1969.

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию  
18 октября 1974 г.,  
после доработки  
23 марта 1976 г.

#### ESTIMATION OF THE ASYMMETRY PARAMETERS OF A ONE-DIMENSIONAL FUNCTION OF PROBABILITIES DISTRIBUTION DENSITY REPRESENTED BY EDZHVORT SERIES

*V. I. Khimenko*

A simple method is suggested to estimate the asymmetry of a one-dimensional distribution of the random process. It is shown that the estimate obtained refers to a class of unbiased and well-grounded estimates of the parameter.

УДК 517.2

## ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Д. Разевиг

Рассматриваются специфические особенности понижения порядка стохастических дифференциальных уравнений, связанные с тем, что время корреляции реального широкополосного случайного воздействия может быть соизмеримо с малыми (паразитными) параметрами уравнения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время проблема понижения порядка дифференциальных уравнений с малыми параметрами и отыскания асимптотических решений исследована лишь при действии детерминированных возмущений [1, 2]. Особенности понижения порядка уравнений со случайными возмущениями рассмотрены недостаточно подробно (см. [3, 4]).

Рассмотрим специфику понижения порядка стохастических дифференциальных уравнений на примере уравнения второго порядка

$$\mu \ddot{x} + \dot{x} = a(x) + b(x)\zeta(t) \quad (1)$$

с малым параметром  $\mu > 0$  при старшей производной, где  $a(x)$  и  $b(x)$  — дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию Липшица,  $\zeta(t)$  — широкополосный стационарный процесс с нулевым средним, временем корреляции  $\tau_k$  и спектральной плотностью  $S_\zeta(\omega)$ .

При детерминированном возмущении  $\zeta(t)$  решение уравнения второго порядка (1) при малом  $\mu > 0$  достаточно хорошо описывается уравнением первого порядка,

$$\dot{x} = a(x) + b(x)\zeta(t), \quad (2)$$

если пренебречь «быстрыми» движениями системы (1), затухающими на начальном интервале времени [1]:

$$\Delta t = O(\mu). \quad (3)$$

При случайном воздействии  $\zeta(t)$  эквивалентность уравнений (1) и (2) необходимо специально исследовать. Причем если процесс  $\zeta(t)$  медленный, т. е. его время корреляции  $\tau_k \gg \mu$ , то эта эквивалентность для каждой реализации на интервалах времени  $\Delta t = O(\mu)$  очевидна. Поэтому рассмотрим подробно случай соизмеримых  $\mu$  и  $\tau_k$ .

Ограничимся в дальнейшем исследовании устойчивых динамических систем (1), характеризуемых ориентировочным значением постоянной времени

$$\tau_c = \min_x \left( -\frac{da(x)}{dx} \right)^{-1},$$

такой, что

$$\tau_c \gg \tau_k \quad (4)$$

(полоса шума  $\zeta(t)$  намного превосходит верхнюю граничную частоту динамической системы). В этом случае представляется естественным заменить в уравнении (2) широкополосный процесс  $\zeta(t)$  белым шумом  $\xi(t)$  со спектральной плотностью  $S_0 = S_\zeta(0)$ . Такая замена справедлива, если в уравнении (1) ограничиться рассмотрением приращений процесса  $x(t)$  на интервалах времени

$$\Delta t \gg \tau_k, \quad (5)$$

на которых значения процесса  $\zeta(t)$  некоррелированы, как и у белого шума  $\xi(t)$ . Таким образом, необходимо установить условия эквивалентности исходного уравнения (1) и упрощенного уравнения

$$\dot{x} = a(x) + b(x)\xi(t), \quad (6)$$

а также определить, в каком смысле следует понимать операцию интегрирования стохастического уравнения (6).

## 2. Понижение порядка стохастических уравнений

Итак, если в уравнении (1) параметр  $\mu > 0$  мал и выполняется условие (4), то возникает задача установления эквивалентности исходного (1) и упрощенного (6) уравнений, причем сопоставление условий (3)—(5) показывает, что близость решений уравнений (1) и (6) следует ожидать на интервалах времени  $\Delta t$ , удовлетворяющих неравенству

$$\Delta t \gg \max(\mu, \tau_k). \quad (7)$$

Приращения  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$  решения исходного уравнения (1) на таких интервалах времени  $\Delta t$  некоррелированы, что дает основание считать процесс  $x(t)$  приближенно марковским процессом первого порядка [3, 5, 6]. Решение уравнения (6) строго является марковским процессом. Поэтому для установления эквивалентности уравнений (1) и (6) воспользуемся общим определением эквивалентности двух марковских процессов [7] — совпадением их вероятностей перехода (при этом отдельные реализации двух марковских процессов не обязательно совпадают, гарантируется лишь эквивалентность в вероятностном смысле). Отсюда вытекает условие эквивалентности диффузионных марковских процессов, описываемых уравнениями (1) и (6), — равенство их коэффициентов сноса и диффузии. Поэтому и будем определять эти коэффициенты для приближенно марковского процесса  $x(t)$ , описываемого уравнением (1).

В связи с тем, что процесс  $x(t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  перестает быть марковским, его коэффициенты сноса и диффузии определим следующим образом:

$$A(x) = M \left\{ \frac{x(t + \Delta t_0) - x(t)}{\Delta t_0} \middle| x = x(t) \right\}; \quad (8)$$

$$B(x) = M \left\{ \frac{[x(t + \Delta t_0) - x(t)]^2}{\Delta t_0} \middle| x = x(t) \right\}, \quad (9)$$

где\*  $\tau_c \gg \Delta t_0 \gg \max(\mu, \tau_k)$ .

Из (8), (9) следует, что для вычисления коэффициентов сноса и диффузии процесса  $x(t)$  достаточно найти локальное решение урав-

\* Для процессов  $x(t)$ , хорошо аппроксимируемых одномерным марковским процессом, результаты не зависят от точного значения величины  $\Delta t_0$ , выбранной в указанном интервале.

нения (1) вблизи точки  $t$  с точностью  $o(\Delta t)$ . Предполагая временно, что правая часть уравнения (1) известна, и решая получившееся линейное уравнение, получаем интегральное уравнение

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \mu h(\Delta t) \dot{x}(t) + \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s)[a(x(s)) + b(x(s))\zeta(s)]ds, \quad (10)$$

эквивалентное дифференциальному уравнению (1). Здесь введена переходная функция

$$h(t) = 1 - \exp(-t/\mu). \quad (11)$$

Поскольку в локальном решении  $x(t + \Delta t)$  достаточно удержать члены порядка  $\Delta t_0$ , на основании неравенства  $\Delta t_0 \gg \mu$  в уравнении (10) опустим выражение  $\mu h(\Delta t) \dot{x}(t)$ , т. е. пренебрежем затухающими «быстрыми» движениями:

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s)[a(x(s)) + b(x(s))\zeta(s)]ds. \quad (10a)$$

Локальное решение интегрального уравнения (10a) найдем методом последовательного интегрирования Пикара [8], предварительно представив (10a) в операторном виде:

$$x = x_0 + \Phi(x), \quad (12)$$

где  $x = x(t + \Delta t)$  — текущее решение,  $x_0 = x(t)$  — начальное условие и введены интегральные операторы

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= M(x) + N(x), \\ M(x) &= \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s) a(x(s)) ds, \\ N(x) &= \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s) b(x(s)) \zeta(s) ds. \end{aligned}$$

Решение уравнения (12) итерационным методом Пикара сводится к применению рекуррентного соотношения

$$x^{[i+1]} = x_0 + \Phi(x^{[i]}),$$

где индекс в квадратных скобках указывает номер итерации. Приняв в качестве нулевого приближения решения уравнения (12)  $x^{[0]} = x_0$ , найдем второе приближение:

$$x^{[2]} = x_0 + \Phi(x_0 + \Phi(x_0)).$$

Разложим интегральный оператор  $\Phi$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ , удерживая только члены первого порядка малости по  $\Delta t$ :

$$x^{[2]} = x_0 + \Phi(x_0) + \Phi'_x(x_0)\Phi(x_0), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi'_x(x)f &= \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s)[a'_x(x(s)) + \\ &+ b'_x(x(s))\zeta(s)] f(s) ds \end{aligned}$$

— производная Фрише [9] от интегрального оператора  $\Phi$  в точке  $x$ ,  $f(t)$  — произвольная пробная функция.

При выполнении условия (7) функция  $M(x)$  растет не быстрее, чем  $\Delta t$ , функция  $N(x)$  — не быстрее, чем  $\sqrt{\Delta t}$ , в среднеквадратическом смысле. Удерживая в выражении (13) лишь члены порядка не менее  $\Delta t$ , получим

$$x^{[2]} = x_0 + M(x_0) + N(x_0) + N'_x(x_0)N(x_0). \quad (14)$$

Рассмотрение высших приближений показывает, что по сравнению со вторым приближением (14) они дадут пренебрежимо малый вклад порядка  $(\Delta t)^{3/2}$ . Поэтому в качестве приближенного решения уравнения (1), справедливого при малых  $\Delta t$ , примем выражение (14) и перепишем его в исходных обозначениях:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) = & x(t) + a(x(t)) \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s) ds + \\ & + b(x(t)) \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s) \zeta(s) ds + \\ & + b'_x(x(t)) b(x(t)) \int_t^{t+\Delta t} h(t + \Delta t - s) \zeta(s) \int_t^s h(s - u) \zeta(u) du ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя локальное решение (15) уравнения (1) в определение (8) коэффициента сноса, получаем

$$\begin{aligned} A(x) = & a(x) \frac{1}{\Delta t_0} \int_t^{t+\Delta t_0} h(t + \Delta t_0 - s) ds + \\ & + b'_x(x) b(x) \frac{1}{\Delta t_0} \int_t^{t+\Delta t_0} h(t + \Delta t_0 - s) \int_t^s h(s - u) K_\zeta(s - u) du ds, \end{aligned}$$

где  $K_\zeta(\tau)$  — корреляционная функция процесса  $\zeta(t)$ . Неравенство  $\Delta t_0 \gg \mu$  с учетом конкретного вида (11) переходной функции  $h(t)$  позволяет значительно упростить интегралы в последнем выражении:

$$\frac{1}{\Delta t_0} \int_t^{t+\Delta t_0} h(t + \Delta t_0 - s) ds = \frac{1}{\Delta t_0} \int_0^{\Delta t_0} h(\Delta t_0 - z) dz \approx 1.$$

Дополнительно учитывая, что  $\Delta t_0 \gg \tau_k$ , имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t_0} \int_t^{t+\Delta t_0} h(t + \Delta t_0 - s) \int_t^s h(s - u) K_\zeta(s - u) du ds = \\ & = \frac{1}{\Delta t_0} \int_0^{\Delta t_0} h(\Delta t_0 - z) \int_0^z h(\tau) K_\zeta(\tau) d\tau dz \approx \int_0^\infty h(\tau) K_\zeta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Справедливость последнего приближенного соотношения иллюстрируется рис. 1 (верхний предел  $z$  во внутреннем интеграле заменен на  $\infty$ , так как этот интеграл при  $z \gg \max(\mu, \tau_k)$  от  $z$  не зависит).

С учетом сделанных упрощений коэффициент сноса приобретает вид

$$A(x) = a(x) + \lambda b'_x(x)b(x)S_\zeta(0), \quad (16)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{S_\zeta(0)} \int_0^\infty h(\tau)K_\zeta(\tau)d\tau. \quad (17)$$

Спектральная плотность процесса  $\zeta(t)$  на нулевой частоте  $\omega = 0$ , равная

$$S_\zeta(0) = \int_{-\infty}^\infty K_\zeta(\tau)d\tau,$$

введена в выражения (16), (17) для удобства нормировки.

Расчет коэффициента диффузии по формулам (9), (15) приводит к обычному результату:

$$B(x) = b^2(x)S_\zeta(0). \quad (18)$$

Сделанное выше предположение о том, что приближенно процесс  $x(t)$  можно считать марковским, подтверждается тем, что при выполнении условия (7) корреляционные моменты высших порядков процесса  $x(t)$  убывают при  $\Delta t \rightarrow \Delta t_0$  быстрее, чем  $\Delta t$ .

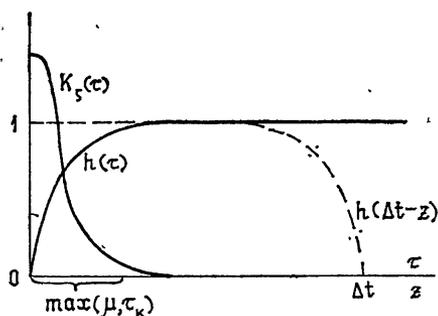


Рис. 1.

Итак, процесс  $x(t)$ , определенный уравнением (1), на интервалах времени  $\Delta t \gg \max(\mu, \tau_k)$  обладает марковским свойством и приближенно описывается коэффициентами сноса (16) и диффузии (18). На этом задачу аппроксимации решения уравнения (1) одномерным марковским процессом можно считать решенной. Однако в начале статьи сформулирована более общая задача — поставить в соответствие уравнению второго порядка с малым параметром и широкополосным случайным воздействием (1) стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка с математическим белым шумом (6). Вообще синтез стохастического уравнения по заданным коэффициентам сноса (16) и диффузии (18) может быть осуществлен двумя способами.

При первом способе сначала вводится определение стохастического интеграла. Затем, используя правило связи коэффициентов сноса и диффузии марковского процесса с коэффициентами стохастического уравнения, соответствующее принятому определению стохастического интеграла, находят искомые коэффициенты. Например, приняв определение Ито стохастического интеграла, получим следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^*x}{dt} = a(x) + \lambda b'_x(x)b(x)S_\zeta(0) + b(x)\xi(t), \quad (19)$$

эквивалентное уравнению (1). Приняв определение Стратоновича [6], получим иное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) b'_x(x)b(x)S_\zeta(0) + b(x)\xi(t), \quad (20)$$

эквивалентное тому же уравнению (1).



При втором способе задается стохастическое дифференциальное уравнение (6), которое мы написали из интуитивных физических соображений, и требуется подобрать такое определение стохастического интеграла, при котором решение уравнения (6) имело бы заданные коэффициенты сноса и диффузии (16), (18). Используя общее определение стохастических интегралов [10], можно показать, что уравнению (6) соответствует коэффициент сноса (16), если принять следующее определение стохастического интеграла:

$$I_\lambda = \int_{t_0}^t \Phi(x(\tau), \tau) d\omega(\tau) =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi((1-\lambda)x(t_i) + \lambda x(t_{i+1}), t_i) [\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)].$$
(21)

Здесь  $\Phi(x, t)$  — непрерывно дифференцируемая по обоим аргументам функция, отрезок  $[t_0, t]$  разбит точками  $t_i$  на  $N$  интервалов длины  $h_i = t_{i+1} - t_i$ ,  $x(t)$  — непрерывный марковский процесс,  $\omega(t)$  — винеровский процесс, параметр  $\lambda$  определен выражением (17). Коэффициент диффузии (18) не зависит от величины  $\lambda$ . Доказательство этого утверждения основано на формуле связи интеграла (21) с интегралом Ито:

$$\int_{t_0}^t \Phi(x(\tau), \tau) dx(\tau) = \int_{t_0}^t \Phi(x(\tau), \tau) d^*x(\tau) +$$

$$+ \lambda \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(x(\tau), \tau)}{\partial x} B(x(\tau)) d\tau,$$
(22)

где \* отмечает дифференциал Ито,  $B(x)$  — коэффициент диффузии марковского процесса  $x(t)$ . Формула (22) выводится по аналогии с выводом формулы связи для симметризованного интеграла [6].

Величина параметра  $\lambda$  зависит от соотношения между малым параметром  $\mu$  уравнения (1) и временем корреляции  $\tau_k$  процесса  $\zeta(t)$ . При  $\mu \ll \tau_k$  (рис. 2)  $\lambda = 0,5$ , так что интеграл  $I_{0,5}$  совпадает с симметризованным интегралом Стратоновича. При  $\mu \gg \tau_k$  (рис. 3)  $\lambda = 0$ , так что интеграл  $I_0$  совпадает с интегралом Ито.

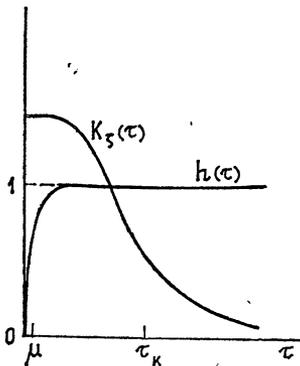


Рис. 2.

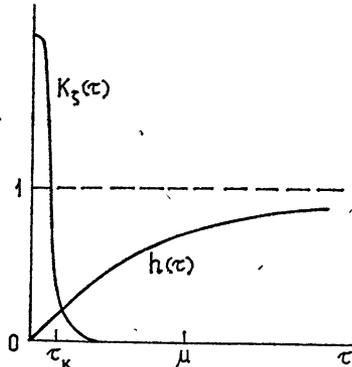


Рис. 3.

Таким образом, выбор определения стохастического интеграла при решении уравнения (6), служащего удобной математической моделью динамической системы (1), зависит от соотношения между временем

корреляции  $\tau_k$  случайного воздействия  $\zeta(t)$  и малым параметром  $\mu$ , присущим всякой реальной системе. (Этот параметр обычно характеризует запаздывания во вспомогательных цепях и паразитные инерционности.) Пренебречь малыми величинами  $\tau_k$  и  $\mu$  возможно лишь в двух крайних случаях: либо при  $\mu \ll \tau_k$ , либо при  $\mu \gg \tau_k$ . При этом в первом случае при решении уравнения (6) следует использовать интеграл Стратоновича, а во втором — интеграл Ито.

Все три полученные нами уравнения первого порядка (6), (19) и (20) эквивалентны друг другу и исходному уравнению второго порядка (1). Уравнение (6) имеет наиболее простые коэффициенты, но при работе с ним необходимо использовать сложное определение стохастического интеграла (21). Уравнения (19) и (20) имеют более сложные коэффициенты, но сопутствующие им определения стохастических интегралов проще, чем (21). Окончательный выбор того или иного уравнения из совокупности (6), (19), (20) зависит от того, какое определение стохастического интеграла будет использовано при дальнейшем анализе.

Заметим, что суждение о необходимости применения симметризованного интеграла для решения уравнения (6) на основании устойчивости решения уравнения (2) при предельном переходе  $\tau_k \rightarrow 0$  [11] несправедливо в рассматриваемой задаче, так как такой предельный переход нарушает корреляцию, существующую между  $\zeta(t)$  и  $x(t)$  при данных малых, но конечных величинах  $\mu$  и  $\tau_k$ . Поэтому помимо исследования асимптотических свойств решения исходного уравнения при  $\mu \rightarrow 0$  и (или)  $\tau_k \rightarrow 0$ , необходимо исследовать возможность аппроксимации решения этого уравнения с данными малыми параметрами  $\mu$  и  $\tau_k$  одномерным марковским процессом, что и сделано в настоящей работе. Вопрос о точности аппроксимации пока остается открытым. Один пример экспериментального исследования, подтвердившего справедливость формул (16), (17), приведен в [3].

### 3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Малые параметры могут входить в дифференциальное уравнение не только в виде коэффициента  $\mu$  при старшей производной, но и более сложно. Например, они могут входить в коэффициенты нескольких старших производных или проявляться в виде малого запаздывания. Поэтому рассмотрим более общее, чем (1), уравнение:

$$\dot{x} = D(p)[a(x) + b(x)\zeta(t)], \quad (23)$$

где  $D(p)$  — линейный оператор, отображающий наличие малых (паразитных) параметров,  $p = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования. Например, в уравнении (1)  $D(p) = 1/(1 + \mu p)$ ; запаздывание отображается оператором  $D(p) = e^{-\mu p}$ . Пренебрегая «быстрыми» движениями, по уравнению (23) составим эквивалентное интегральное уравнение:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t h(t-s)[a(x(s)) + b(x(s))\zeta(s)]ds, \quad (24)$$

где

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} D(p) \right\} \quad (25)$$

— переходная функция широкополосного звена с передаточной функцией  $D(p)$  (здесь уже  $p$  — комплексная переменная),  $L^{-1}$  — обратное преоб-

разование Лапласа. Характерный малый параметр  $\mu$  определяется так, чтобы

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \ll \mu \\ 1 & \text{при } t \gg \mu \end{cases}$$

Уравнение (24) аналогично уравнению (10 а), поэтому в рассматриваемом случае справедливы все результаты, полученные в предыдущем разделе, только переходную функцию  $h(t)$  следует определять не частным выражением (11), а общим соотношением (25).

Например, если  $D(p) = e^{-\mu p}$ , то уравнение (23) принимает вид

$$\dot{x}(t - \mu) = a(x) + b(x)\zeta(t),$$

переходная функция равна

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq \mu \\ 0 & \text{при } t < \mu \end{cases}$$

Положив функцию корреляции процесса  $\zeta(t)$  равной

$$K_{\zeta}(\tau) = \frac{S_{\zeta}(0)}{2\tau_k} e^{-|\tau|/\tau_k},$$

по формуле (17) найдем параметр стохастического интеграла (21)

$$\lambda = \frac{1}{2} e^{-\mu/\tau_k},$$

который при изменении отношения  $\mu/\tau_k$  от 0 до  $\infty$  меняется в пределах  $\lambda = 0,5 \div 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, изд. Наука, М., 1973.
3. В. Д. Разевиг, Н. Н. Никитин, Радиотехника и электроника, 19, № 7, 1539 (1974).
4. В. Г. Гайцгори, А. А. Первозванский, Динамика систем, вып. 6, 14 (1975).
5. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
6. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, изд. МГУ, М., 1966.
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Теория случайных процессов, т. 2, изд. Наука, М., 1973.
8. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике для научных работников и инженеров, изд. Наука, М., 1968.
9. Л. Коллатц, Функциональный анализ и вычислительная математика, изд. Мир, М., 1969.
10. А. Н. Гау, Т. К. Саугхеу, J. Math. and Phys., 44, № 3, 288 (1965).
11. Э. Уонг, М. Закаи, Труды III Международного конгресса ИФАК, Оптимальные системы, Статистические методы, изд. Наука, М., 1971.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
10 января 1975 г.

#### A DECREASE IN THE ORDER OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL PARAMETERS

V. D. Razevig

Specific features of decreasing the order of stochastic differential equations are considered. They are connected with the fact that the correlation time of a real broadband random interaction may be comparable with small (spurious) parameters of the equation.

УДК 538.56 : 519.25

## СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ УСТРОЙСТВА ДЛЯ ОЦЕНКИ ИНТЕРВАЛА КОРРЕЛЯЦИИ НЕЦЕНТРИРОВАННОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

*И. И. Волков, В. В. Мотов, А. П. Токарев*

Рассматривается способ построения аппаратуры для оценки интервала корреляции как центрированных, так и нецентрированных случайных процессов. Приводится блок-схема устройства, реализующего описываемый способ и указываются пути уменьшения погрешности оценки.

При решении ряда практических задач возникает необходимость в определении интервала корреляции стационарного случайного процесса [1, 2]:

$$\tau_k = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где  $\rho_x(\tau)$  — нормированная автокорреляционная функция.

Известен способ [3] для определения  $\tau_k$  центрированного случайного процесса. Однако для определения  $\tau_k$  предварительно центрированных с помощью специальных фильтров процессов этот способ непригоден, так как интервал корреляции  $\tau_k$  выходных сигналов этих фильтров всегда равен нулю.

Ниже рассмотрим способ построения аппаратуры для оценки интервала корреляции (1) нецентрированного стационарного случайного процесса. При этом будем исходить из того, что все предпосылки, предложенные в [3], справедливы, и в качестве оценки интервала корреляции  $\tau_k^*$  возьмем величину

$$\tau_k^* = \frac{M\left[X(t) \int_0^{\infty} H_1(\tau) X(t - \tau) d\tau\right]}{M\left[X(t) \int_0^{\infty} H_2(\tau) X(t - \tau) d\tau\right]}, \quad (2)$$

где  $X(t)$  — исследуемый процесс, а функции  $H_1(\tau)$  и  $H_2(\tau)$  являются абсолютно интегрируемыми и выбираются, исходя из заданных погрешностей от смещенности.

Перепишем формулу (2) в виде

$$\tau_k^* = \frac{\sigma_x^2 \int_0^{\infty} H_1(\tau) \rho_x(\tau) d\tau + m_x^2 \int_0^{\infty} H_1(\tau) d\tau}{\sigma_x^2 \int_0^{\infty} H_2(\tau) \rho_x(\tau) d\tau + m_x^2 \int_0^{\infty} H_2(\tau) d\tau}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что для обеспечения зависимости  $\tau_k^*$  только лишь от нормированной корреляционной функции необходимо выполнение условий

$$\int_0^{\infty} H_1(\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^{\infty} H_2(\tau) d\tau = 0. \quad (4)$$

В этом случае будем иметь

$$\tau_k^* = \frac{\int_0^{\infty} H_1(\tau) \rho_x(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} H_2(\tau) \rho_x(\tau) d\tau}. \quad (5)$$

Сопоставляя (5) с (1), находим, что для обеспечения близости оценки  $\tau_k^*$  к величине  $\tau_k$  необходимо, чтобы функция  $H_1(\tau)$  была постоянной в интервале  $0 \leq \tau \leq \tau_k$ , а функция  $H_2(\tau)$  стремилась к дельта-функции  $\delta(\tau)$ .

Решение задачи выбора функций  $H_1(\tau)$  и  $H_2(\tau)$  неоднозначно. Приведем одно из возможных ее решений:

$$H_1(\tau) = h(\tau) - nh_1(\tau); \quad (6)$$

$$H_2(\tau) = \delta(\tau) - h_1(\tau), \quad (7)$$

где

$$h(\tau) = \frac{1}{T} e^{-\tau/T} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \left(\frac{\tau}{T}\right)^p; \quad (8)$$

$$h_1(\tau) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{T} e^{-\tau/T} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{n-1}. \quad (9)$$

Способ построения аппаратуры, реализующий оценку интервала корреляции по алгоритму (2) с учетом формул (6) — (9), иллюстрирует рис. 1. Аппаратура состоит из  $n$  фильтров нижних частот с передаточными функциями  $\frac{1}{1+Tp}$ , инвертора, двух сумматоров 1 и 2, двух множительных устройств 3 и 4, двух усредняющих устройств 5 и 6, делительного устройства 7.

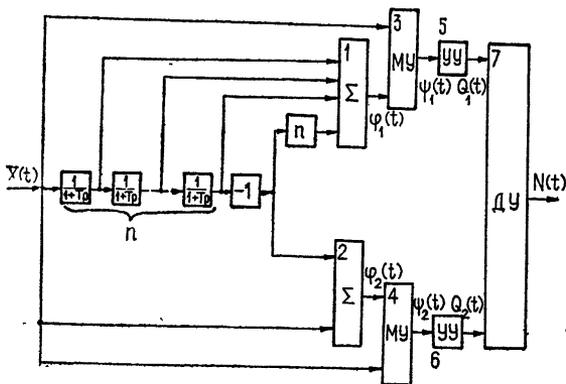


Рис. 1.

При подаче на вход устройства нецентрированного стационарного процесса  $X(t)$  на выходах сумматоров, как видно из рис. 1, формируются сигналы

$$\varphi_1(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau - n \int_0^{\infty} h_1(\tau)X(t - \tau)d\tau; \quad (10)$$

$$\varphi_2(t) = X(t) - \int_0^{\infty} h_1(\tau)X(t - \tau)d\tau. \quad (11)$$

Выходные сигналы множительных устройств 3 и 4 при этом будут соответственно равны

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t)X(t); \quad (12)$$

$$\psi_2(t) = \varphi_2(t)X(t). \quad (13)$$

Усредняющие устройства 5 и 6, в качестве которых могут быть применены или фильтры нижних частот, или интеграторы, осуществляют оценку математических ожиданий сигналов  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$ . Их выходные сигналы  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$  поступают на входы делительного устройства 7, выходной сигнал которого

$$N(t) = \frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}. \quad (14)$$

Полагая, что параметры усредняющих устройств принципиально могут быть выбраны так, чтобы статистическая методическая погрешность оценки не превышала заданных пределов, остановимся на анализе погрешности оценки интервала корреляции от смещенности.

Учитывая, что среднеквадратичные отклонения выходных сигналов усредняющих устройств  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$  значительно меньше их математических ожиданий, из формулы (14) получим

$$M[N(t)] = \frac{M[Q_1(t)]}{M[Q_2(t)]}. \quad (15)$$

Пусть усредняющие устройства 5 и 6 дают несмещенные оценки математических ожиданий сигналов  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$ , т. е.  $M[Q_1(t)] = M[\psi_1(t)]$ ,  $M[Q_2(t)] = M[\psi_2(t)]$ . Тогда формула (15) примет вид

$$M[N(t)] = \frac{M[\psi_1(t)]}{M[\psi_2(t)]}. \quad (16)$$

Сделав в формуле (16) подстановки в соответствии с выражениями (10)–(13), получим

$$M[N(t)] = \frac{\int_0^{\infty} h(\tau)\rho_x(\tau)d\tau - n \int_0^{\infty} h_1(\tau)\rho_x(\tau)d\tau}{1 - \int_0^{\infty} h_1(\tau)\rho_x(\tau)d\tau}. \quad (17)$$

В идеальном случае, когда  $n \rightarrow \infty$ , как следует из (8) и (9),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\tau) = \frac{1}{T}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_1(\tau) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nh_1(\tau) = 0$$

и формула (17) примет вид

$$M_n[N(t)] = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau = \frac{\tau_k}{T}. \quad (18)$$

Итак, в идеальном случае математическое ожидание выходного сигнала  $N(t)$  устройства определяется соотношением (18) и прямо пропорционально интервалу корреляции  $\tau_k$  исследуемого процесса. В реальном случае оно определяется формулой (17).

Погрешность от смещенности оценки интервала корреляции будем определять по формуле

$$\gamma = \frac{M[N(t)] - M_n[N(t)]}{M_n[N(t)]}. \quad (19)$$

Подставляя в (19)  $h_1(\tau)$  из (9),  $M[N(t)]$  из (17),  $h(\tau)$  из (8) и  $M_n[N(t)]$  из (18), получим

$$\gamma \approx \left\{ \left[ \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{\tau_k p!} \left[ \int_0^{\infty} \left( \frac{\tau}{T} \right)^p e^{-\tau/T} \rho_x(\tau) d\tau \right] - \frac{n}{(n-1)! \tau_k} \int_0^{\infty} \left( \frac{\tau}{T} \right)^{n-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-\tau/T} \rho_x(\tau) d\tau \right] \left[ 1 - \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \left( \frac{\tau}{T} \right)^{n-1} e^{-\tau/T} \rho_x(\tau) d\tau \right]^{-1} \right\} - 1. \quad (20)$$

В частности, например, если  $\rho_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ , то

$$\gamma = \frac{n(\tau_k/T)^{n-1}}{(1 + \tau_k/T)^n - (\tau_k/T)^n}, \quad (21)$$

где  $\tau_k = 1/\alpha$ .

Для рассматриваемого случая, как видно из (21), погрешность от смещенности зависит лишь от числа  $n$  фильтров нижних частот и от отношения  $\tau_k/T$ . Эта зависимость представлена на рис. 2.

Для уменьшения погрешности от смещенности необходимо увеличивать или число фильтров нижних частот, или постоянную времени каждого из них по сравнению с оцениваемой величиной интервала корреляции.

Таким путем погрешность оценки интервала корреляции может быть сделана сколь угодно малой.

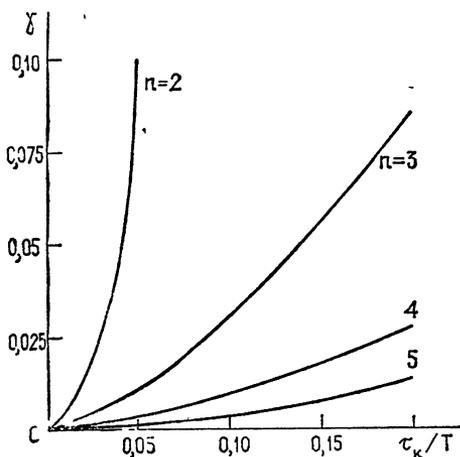


Рис. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Мирский, Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, изд. Энергия, М., 1972.

2. А. Ф. Котюк, В. В. Ольшевский, Э. И. Цветков, Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов, изд. Энергия, М., 1967.
3. И. И. Волков, В. В. Мотов, Автоматика и телемеханика, № 8, 150 (1973).

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию  
3 февраля 1975 г.

## A WAY TO DESIGN THE HARDWARE FOR ESTIMATING A CORRELATION INTEGRAL OF A NON-CENTERED STATIONARY RANDOM PROCESS

*I. I. Volkov, V. V. Motov, A. P. Tokarev*

A way to design the hardware for estimating the correlation integral both of centered and non-centered random processes is considered. A block-diagram of the hardware realizing the described method is given. The estimation error due to displacement is analysed and way to decrease it is pointed out.

---



УДК 538 56

**СВОЙСТВА И ВЗАИМОСВЯЗИ КУМУЛЯНТОВ  
СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

*А. А. Дубков, А. Н. Малахов*

С помощью неравенства Коши—Буняковского определяются области допустимых значений кумулянтов одномерных вероятностных распределений. Выведены необходимые и достаточные условия, налагаемые на кумулянты.

1. В последнее время определенное внимание стало уделяться описанию нелинейных стохастических систем методом кумулянтов [1–5]. Перспективность такого подхода связана с тем, что обрывание по кумулянтам представляет собой значительно менее грубую операцию при оценке неизвестной плотности вероятностей, чем обрывание по моментам. Для дальнейшего развития этого подхода необходимо выяснить, какие значения могут принимать различные кумулянты вероятностного распределения, в какой степени они могут выбираться независимо друг от друга и как они взаимосвязаны. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

2. Необходимость существования определенных условий, которым должны подчиняться как кумулянты  $x_k$ , так и моменты  $\alpha_k$  вероятностного распределения, вытекает из свойства положительной определенности характеристической функции

$$\Theta(u) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k!} (ju)^k \right\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} (ju)^k.$$

Это обстоятельство не позволяет выбирать входящие в нее параметры  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  или  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$  произвольным образом.

Достаточно хорошо известны различные неравенства для моментов случайной переменной. Так, например, из условия неотрицательности действительной симметрической квадратичной формы\*

$$\left\langle \left[ \sum_{i=0}^n t_i (x - a)^i \right]^2 \right\rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \langle (x - a)^{i+j} \rangle t_i t_j$$

при любых действительных постоянных  $t_0, t_1, \dots, t_n$  и  $a$  вытекает цепочка неравенств для моментов вида  $\nu_k(a) = \langle (x - a)^k \rangle$  [6]\*\*:

$$\begin{vmatrix} 1 & \nu_1(a) & \dots & \nu_k(a) \\ \nu_1(a) & \nu_2(a) & \dots & \nu_{k+1}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_k(a) & \nu_{k+1}(a) & \dots & \nu_{2k}(a) \end{vmatrix} \geq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

\* Знак  $\langle \dots \rangle$  означает статистическое усреднение

\*\* В силу произвольности постоянной  $a$  эти условия не зависят от среднего значения случайной величины.

При подстановке в (1)  $a=0$  приходим к неравенствам для обычных моментов  $\alpha_k = \langle x^k \rangle$ , а в случае  $a = \langle x \rangle$  получаем условия на центральные моменты  $\mu_k = \langle (x - \langle x \rangle)^k \rangle$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Для абсолютных моментов  $\beta_k = \langle |x|^k \rangle$  также имеют место условия типа (1). В то же время для них в литературе чаще встречается следующая цепочка неравенств [6, 7]:

$$\beta_1 \leq \beta_2^{1/2} \leq \beta_3^{1/3} \leq \beta_4^{1/4} \leq \dots \leq \beta_s^{1/s} \leq \dots \quad (3)$$

Поскольку четные абсолютные моменты совпадают с обычными  $\alpha_{2s} = \beta_{2s} = \langle x^{2s} \rangle$ , а для нечетных имеют место соотношения типа  $|\alpha_{2s-1}| \leq \beta_{2s-1}$  ( $s=1, 2, \dots$ ), то из условий (3) следует, что зануление высших моментов автоматически означает и зануление моментов низшего порядка.

В отличие от моментов, свойства кумулянтов изучены совершенно недостаточно. Для них в имеющейся литературе можно встретить лишь неявные неравенства (см., например, [8]):

$$|x_s| \leq s^s \beta_s^0 \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Здесь  $\beta_s^0 = \langle |x - \langle x \rangle|^s \rangle$  — центральный абсолютный момент  $s$ -го порядка, сам зависящий от кумулянтов.

В настоящей работе выводятся необходимые и достаточные условия, налагаемые на кумулянты одномерных вероятностных распределений и определяются области их допустимых значений.

3. Из неотрицательности плотности вероятностей с необходимостью вытекает неравенство Коши — Буняковского для любых двух случайных переменных  $\xi$  и  $\eta$  [9, 10]:

$$\langle \xi \cdot \eta \rangle^2 \leq \langle \xi^2 \rangle \langle \eta^2 \rangle. \quad (5)$$

Записывая условие (5) для  $\xi' = \xi - \langle \xi \rangle$ ,  $\eta' = \eta - \langle \eta \rangle$ , приходим к

$$\langle \xi', \eta' \rangle^2 \leq \langle \xi', \xi' \rangle \langle \eta', \eta' \rangle, \quad (6)$$

где  $\langle \xi', \eta' \rangle \equiv \langle \xi \cdot \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle$  — совместный кумулянт второго порядка.

4. Неравенство (6) является удобным инструментом исследования свойств кумулянтов. Действительно, для отыскания условий, взаимосвязывающих эти статистические характеристики случайной переменной  $x$ , достаточно подставить в (6)  $\xi = x^m$ ,  $\eta = x^n$  ( $m < n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ),

$$\langle x^m, x^n \rangle^2 \leq \langle x^m, x^m \rangle \langle x^n, x^n \rangle \quad (7)$$

и выразить входящие в (7) величины через кумулянты.

Известно, что в ряду  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$  первые два члена обладают специфическими свойствами. Первый кумулянт  $x_1 = \langle x \rangle$  может принимать любые значения ( $-\infty < x_1 < +\infty$ ) и не оказывает никакого влияния на кумулянты высших порядков. Дисперсия распределения  $|x_2 = \langle x, x \rangle$  всегда положительна и обращается в нуль только для детерминированной величины. Этот тривиальный случай необходимо исключить из рассмотрения, полагая всегда  $x_2 > 0$ , чтобы иметь возможность

оперировать в дальнейшем с безразмерными кумулянтами — кумулянтными коэффициентами ( $s=1, 2, 3, 4, \dots$ )

$$\gamma_s = x_s/x_2^{s/2} \quad (\gamma_2 = 1).$$

Для определения условия, связывающего коэффициенты асимметрии  $\gamma_3$  и эксцесса  $\gamma_4$ , положим в (7)  $m=1, n=2$ :

$$\langle x, x^2 \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle x^2, x^2 \rangle.$$

Раскрывая это выражение, найдем

$$x_3^2 \leq x_2(x_4 + 2x_2^2).$$

Переходя к кумулянтным коэффициентам, получаем основное неравенство

$$\gamma_4 - \gamma_3^2 + 2 \geq 0, \quad (8)$$

связывающее  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ . Таким образом, коэффициенты асимметрии и эксцесса не могут выбираться совершенно независимо друг от друга (см. рис. 1). Коэффициент эксцесса всегда ограничен снизу,

$$\gamma_4 \geq -2, \quad (9)$$

а коэффициент асимметрии может принимать любые значения ( $-\infty < \gamma_3 < +\infty$ ). В то же время, коэффициент  $\gamma_3$  может иметь большие (по модулю) значения лишь при больших положительных значениях  $\gamma_4$ . Если, например, для некоторого вероятностного распределения  $|\gamma_3| > \sqrt{2}$ , то коэффициент эксцесса у этого распределения положителен.

5. Однако так просто обстоит дело лишь для рассмотренного случая. Начиная с  $n=3$ , в условия, получаемые из (7), входит уже нормированное среднее значение  $\gamma_1$ . Действительно, перенося все члены неравенства (7) в правую часть, раскрывая их и переходя к кумулянтным коэффициентам, приходим к ( $m < n, n = 2, 3, 4, \dots$ )

$$\sum_{s=0}^{2(m+n-3)} P_s(m, n; \gamma_3, \dots, \gamma_{2n}) \gamma_1^s \geq 0, \quad (10)$$

где функции  $P_s(m, n; \gamma_3, \dots, \gamma_{2n})$  зависят, вообще говоря, от всех  $\gamma_i$  ( $i=3, 4, 5, \dots, 2n$ ).

В то же время, выше уже отмечалось, что среднее значение случайной величины не оказывает никакого влияния на кумулянты (или кумулянтные коэффициенты). Следовательно, не должны зависеть от  $\gamma_1$  и взаимосвязи кумулянтов, задаваемые с помощью неравенств. Отсюда вытекает важная предпосылка для дальнейшего анализа — требование выполнения условия (10) при любых значениях  $\gamma_1$ .

Выражение, стоящее в левой части неравенства (10), является полиномом четной степени относительно  $\gamma_1$ . Неотрицательность коэффициента при старшей степени этого полинома

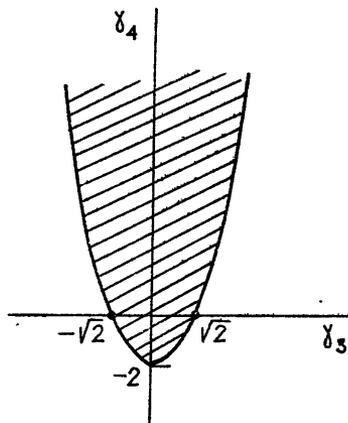


Рис. 1. На рисунке заштрихована область допустимых значений коэффициентов асимметрии  $\gamma_3$  и эксцесса  $\gamma_4$  для любых вероятностных распределений.

$$P_{2(m+n-3)}(m, n; \gamma_3, \dots, \gamma_{2n}) = \frac{m^2 \cdot n^2}{4} (n - m)^2 (\gamma_4 - \gamma_3^2 + 2) \geq 0,$$

вытекающая из (8), свидетельствует о существовании абсолютного минимума, достигаемого при некотором значении  $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$ .

Наличие абсолютного минимума как раз и позволяет добиться выполнения условия (10) при любых значениях нормированного среднего. Для этого необходимо и достаточно потребовать, чтобы (10) имело место при  $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$ , т. е.

$$\inf_{\gamma_1} \left\{ \sum_{s=0}^{2(m+n-3)} P_s(m, n; \gamma_3, \dots, \gamma_{2n}) \gamma_1^s \right\} \geq 0. \quad (11)$$

Неравенство (11), уже не зависящее от  $\gamma_1$ , определяет непосредственно область допустимых значений кумулянтных коэффициентов любых вероятностных распределений.

В качестве иллюстрации вышеизложенного найдем, например, условие, связывающее  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ . Полагая в (7)  $m=1, n=3$  и переходя к кумулянтным коэффициентам, получаем

$$9(\gamma_4 - \gamma_3^2 + 2)\gamma_1^2 + 6(\gamma_5 + 6\gamma_3 - \gamma_3\gamma_4)\gamma_1 + (\gamma_6 + 9\gamma_4 + 9\gamma_3^2 - \gamma_4^2 + 6) \geq 0. \quad (12)$$

Не представляет никакого труда найти единственный минимум квадратичного трехчлена, стоящего в левой части соотношения (12). Учитывая (8), после тривиальных преобразований приходим к искомому условию

$$(\gamma_4 - \gamma_3^2 + 2)(\gamma_6 + 9\gamma_4 + 9\gamma_3^2 - \gamma_4^2 + 6) - (\gamma_5 + 6\gamma_3 - \gamma_3\gamma_4)^2 \geq 0, \quad (13)$$

взаимосвязывающему  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$  и  $\gamma_6$ .

Можно показать, что поверхность, ограничивающая область допустимых значений кумулянтных коэффициентов в 4-мерном пространстве  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ , имеет одну экстремальную точку седловидного типа с координатами  $(0, 9/2, 0, -105/4)$ . Таким образом, неравенство (13) разрешает, в принципе, любые значения для  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$ . Однако необходимо еще учесть и условие (8), определяющее в 4-мерном пространстве область, лежащую внутри параболического цилиндра:  $\gamma_4 = \gamma_3^2 - 2$ . Совместное рассмотрение (8) и (13) показывает, что для четного кумулянтного коэффициента  $\gamma_6$  существует нижняя граница.

Действительно, объединяя неравенства (8) и (13), приходим к

$$\gamma_6 \geq (\gamma_4 - 9)^2 - 105,$$

откуда находим абсолютное (т. е. не зависящее от значений остальных кумулянтных коэффициентов) условие, накладываемое на  $\gamma_6$ :

$$\gamma_6 \geq -105. \quad (14)$$

В классе симметричных вероятностных распределений ( $\gamma_3 = \gamma_5 \neq 0$ ), как следует из (13), граничное значение для  $\gamma_6$  уменьшается в четыре раза:  $\gamma_6 \geq -105/4 = -26, 25$ .

Кумулянтный коэффициент  $\gamma_5$  по-прежнему может принимать любые значения ( $-\infty < \gamma_5 < +\infty$ ), однако в соответствии с (13) он ограничен по абсолютной величине значениями четных коэффициентов  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$ .

Подставляя в (7)  $m=2, n=3$  и проводя стандартную процедуру,

можно прийти к условию, так же как и (13), связывающему  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$  и  $\gamma_6$ , однако находить его не имеет смысла, поскольку, как будет показано ниже, оно либо совпадает с (13), либо вытекает из него.

Вообще извлечение информации из неравенства (7) при  $m + n \geq 5$  представляет собой достаточно трудную задачу, связанную с минимизацией полиномов четвертой и более высоких степеней. Тем не менее можно показать, что все нечетные кумулянтные коэффициенты могут принимать сами по себе любые действительные значения, а все четные кумулянтные коэффициенты ограничены снизу:

$$\gamma_{2n} \geq -A_{2n}, \quad A_{2n} > 0. \quad (15)$$

Чтобы существенно продвинуться дальше и найти, например, значение  $A_8$ , следует избрать другой путь.

6. Покажем, что существует граничное вероятностное распределение, обращающее в тождество неравенство Коши — Буняковского (7), и что этим граничным распределением является распределение бинарной альтернативы

$$W(x) = p\delta(x - a) + q\delta(x - b), \quad (16)$$

где  $p + q = 1, p, q \geq 0$ . Действительно, элементарные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \langle x^m, x^n \rangle &= \langle x^{m+n} \rangle - \langle x^m \rangle \langle x^n \rangle = \\ &= pq(b^m - a^m)(b^n - a^n). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \langle x^m, x^m \rangle &= pq(b^m - a^m)^2, \\ \langle x^n, x^n \rangle &= pq(b^n - a^n)^2 \end{aligned}$$

и, следовательно\*,

$$\langle x^m, x^n \rangle^2 = \langle x^m, x^m \rangle \langle x^n, x^n \rangle.$$

Таким образом, найдено вероятностное распределение, кумулянты которого лежат на границах всевозможных неравенств, вытекающих из (7)\*\*.

Существование граничного распределения позволяет выявить интервалы значений, в которых могут лежать кумулянтные коэффициенты различных вероятностных распределений. Для распределения (16) нетрудно отыскать первые шесть коэффициентов  $\gamma_s$ :

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= (z^{-1} - 4)^{1/2} \text{sign}(1 - 2q), \\ \gamma_4 &= z^{-1} - 6, \\ \gamma_5 &= (z^{-1} - 12)(z^{-1} - 4)^{1/2} \text{sign}(1 - 2q), \\ \gamma_6 &= z^{-2} - 30z^{-1} + 120, \\ \gamma_7 &= (z^{-2} - 60z^{-1} + 360)(z^{-1} - 4)^{1/2} \text{sign}(1 - 2q), \\ \gamma_8 &= z^{-3} - 126z^{-2} + 1680z^{-1} - 5040, \end{aligned} \quad (17)$$

\* Заметим, что вероятностное распределение бинарной альтернативы обращает в тождество и неравенство самого общего вида, получаемое из (6),

$$\langle f(x), g(x) \rangle^2 \leq \langle f(x), f(x) \rangle \langle g(x), g(x) \rangle,$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — произвольные функции.

\*\* Фактически для этого распределения обращаются в нуль все функции  $P_s(m, n; \gamma_3, \dots, \gamma_{2n})$ , входящие в (10),

где  $\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  — знаковая функция, а  $z = pq = q(1 - q)^n$  ( $z \in [0, 1/4]$ ).

Исследуя соотношения (17) как функции аргумента  $z$  с областью определения  $z \in [0, 1/4]$ , легко отыскать возможные интервалы изменения коэффициентов  $\gamma_s$  ( $s=3, 4, \dots$ ) вероятностных распределений. Так, становится очевидным, что все нечетные кумулянтные коэффициенты могут принимать любые значения, в то время как все четные ограничены снизу минимальным значением, имеющим отрицательную величину. Минимизируя  $\gamma_4, \gamma_6, \gamma_8$ , находим нижние границы для четных кумулянтных коэффициентов любых вероятностных распределений:

$$\gamma_4 \geq -2,$$

$$\gamma_6 \geq -105,$$

$$\gamma_8 \geq -112(738 + 43\sqrt{301}) \approx -166214,$$

что, разумеется, совпадает с (9), (14) и подтверждает (15). Кроме этого, из соотношений (17) следует, что нечетные коэффициенты могут принимать большие по абсолютной величине значения ( $z$  близко к нулю) только при больших положительных значениях четных кумулянтных коэффициентов, как это уже отмечалось при анализе условий (8) и (13)\*.

7. Проведенный анализ показал, что условия, вытекающие из (7), являются необходимыми. Попытаемся теперь доказать и их достаточность. Действительно, все точки параболы  $\gamma_4 = \gamma_3^2 - 2$ , ограничивающей область допустимых значений коэффициентов асимметрии и эксцесса (см. рис. 1), принадлежат распределению бинарной альтернативы. Это, в свою очередь, означает, что указанную область нельзя более сжать, т. е. неравенства для  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , выведенные какими-либо другими (не зависящими от данного) способами, могут быть лишь следствиями условия (8).

Сложнее обстоит дело с доказательством достаточности неравенства (13). Для этого мало знать, что распределение бинарной альтернативы обращает его в тождество. Как следует из (17), кумулянтные коэффициенты указанного распределения зависят только от одного параметра  $q$ , и, следовательно, этому распределению соответствует лишь некоторая линия, лежащая на граничной поверхности в пространстве  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ . В то же время, можно показать, что условие (13) обращается в тождество и для вероятностного распределения тройной альтернативы:

$$W(x) = p_1 \delta(x - a_1) + p_2 \delta(x - a_2) + p_3 \delta(x - a_3),$$

где  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ,  $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ . Поскольку кумулянтные коэффициенты этого распределения  $\gamma_s$  зависят уже от трех параметров (например, от  $p_1, p_2, (a_2 - a_1)/(a_3 - a_2)$ ), постольку точки поверхности, ограничивающей область допустимых значений  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ , принадлежат этому распределению. Теперь становится очевидным, что условие, получаемое из (7) при  $m=2, n=3$  и связывающее  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ , должно либо совпадать с (13), либо вытекать из последнего. Таким образом, как уже отмечалось выше, оно не дает никакой новой информации.

\* С помощью вероятностного распределения бинарной альтернативы можно также найти неравенства, которым удовлетворяют моменты любых вероятностных распределений. Так, например, нетрудно показать, что нечетные центральные моменты могут принимать любые значения, а для четных имеют место соотношения вида

$$\mu_{2n} \geq \mu_2^n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

В общем случае можно утверждать, что при фиксированном  $n$  все  $(n-1)$  необходимых условий ( $m=1, 2, \dots, n-1$ ) для коэффициентов  $\gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_{2n}$ , следующих из (7), сводятся к одному, достаточность которого доказывается с помощью вероятностного распределения альтернативы с  $n$  возможностями\*

$$W(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - a_i),$$

где  $\sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0$ .

Таким образом, все условия, вытекающие из (7), по-видимому, являются необходимыми и достаточными для того, чтобы набор чисел

$$\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \dots$$

определял кумулянтные коэффициенты некоторого вероятностного распределения.

8. Интересно сравнить встречающиеся в литературе неравенства (1) — (4) с полученными в настоящей работе (8), (13) с точки зрения условий на кумулянты. Если перейти в условиях (2) к кумулянтным коэффициентам, то можно убедиться в том, что они полностью совпадают с найденными в настоящей работе (в частности, неравенство (8) получается из (2) при  $k=2$ , а (13) — при  $k=3$ ). Таким образом, указанные неравенства также являются необходимыми и достаточными и представляют собой фактически другую запись условий, вытекающих из (7). Неравенства (3) и (4), в отличие от (2) и (7), являются только необходимыми. Нетрудно показать, что, в то время как из условий (3) следует правильное ограничение на коэффициент эксцесса  $\gamma_4 \geq -2$ , (4) дает лишь (в случае симметрии вероятностного распределения)  $\gamma_4 \geq -3 \cdot \frac{256}{257} \approx -2,99$ . Абсолютные ограничения на высшие четные куму-

лянтные коэффициенты и неравенства для нечетных коэффициентов получить из (3) и (4) не удается.

9. Опираясь на найденные условия (8) и (13) для кумулянтов, покажем теперь, что в задании этих характеристик вероятностных распределений, в отличие от моментов, имеется большая свобода\*\*. Выясним, например, какие ограничения на  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$  влечет за собой зануление всех остальных кумулянтов, начиная с  $\alpha_n$  (так называемое обрывание в кумулянтном ряду, применяемое при решении различных физических задач, см. [3-5]).

Посмотрим, как видоизменяется область допустимых значений коэффициентов асимметрии  $\gamma_3$  и эксцесса  $\gamma_4$  при условии, что все  $\gamma_n = 0$  для  $n \geq 5$ . Неравенство (8) разрешает лишь значения  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , лежащие внутри параболы  $\gamma_4 = \gamma_3^2 - 2$  (см. рис. 1). Если теперь в условии (13) положить  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$ , то придем к неравенству, дающему в совокупности с (8) новую область допустимых значений указанных коэффициентов, представленную на рис. 2 (она заштрихована). Как видно из рис. 2, коэффициенты  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  имеют уже абсолютные ограничения и сверху и снизу. Так,

$$-2 \leq \gamma_4 < 12, \quad |\gamma_3| < 10/3.$$

\* Особенность этих граничных вероятностных распределений связана с положительной полуопределенностью (см. [9]) их характеристических функций.

\*\* Ниже мы уточним, что под этим понимается.

Учитывая все остальные условия, вытекающие из (7), и полагая в них  $\gamma_5 = \gamma_6 = \dots = 0$ , можно убедиться, что область допустимых значений в конце концов сожмется в начало координат  $(0, 0)$ , т. е. придем к нормальному распределению. Это обстоятельство является косвенным подтверждением теоремы Марцинкевича (см., например, [7]) о невозможности существования вероятностного распределения с конечным набором кумулянтов (кроме гауссова, естественно).

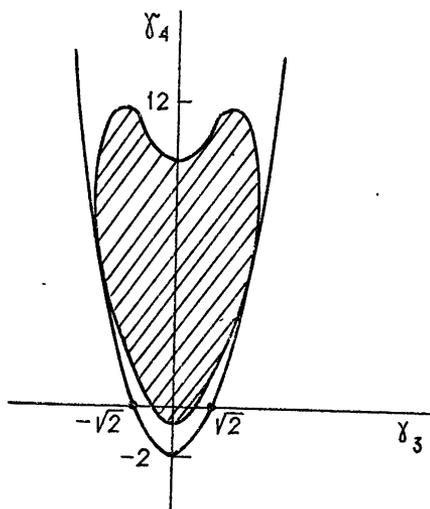


Рис. 2. Сужение области допустимых значений коэффициентов асимметрии  $\gamma_3$  и эксцесса  $\gamma_4$  при выборе нулевых значений для  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$ .

там при решении конкретных статистических задач (см., например, [3–5]), т. е. физически оправдано.

В заключение отметим, что неравенство Коши — Буняковского является довольно мощным инструментом исследования не только областей допустимых значений кумулянтов одномерных вероятностных распределений. Оно позволяет найти ограничения на совместные кумулянты многомерных (и в частности, двумерных) вероятностных распределений и, что самое важное, изучить свойства кумулянтных функций случайных процессов. Эти вопросы будут освещены в последующих работах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 8, 1287 (1973).
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1736 (1974).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 20, № 1, 186 (1975).
4. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 71 (1976).
5. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 2, 214 (1976).
6. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, изд. Наука, М., 1965.
7. Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, изд. ЛГУ, Л., 1960.
8. Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов, Теория вероятностей, изд. Наука, М., 1973.
9. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике для научных работников и инженеров, изд. Наука, М., 1973.



10 Т. А. Агекян, Теория вероятностей для астрономов и физиков, изд. Наука, М, 1974.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 апреля 1975 г.

PROPERTIES AND INTERRELATIONS BETWEEN RANDOM VARIABLE  
CUMULANTS

*A. A. Dubkov, A. N. Malakhov*

Using the Koshi—Bunyakovskii inequality, the regions of admissible values of cumulants of one-dimensional probability distributions are defined. Necessary and sufficient conditions for cumulants are deduced.

---

УДК 621.391 : 519.27

## О НОРМИРОВАННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ МОМЕНТАХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. И. Хименко

Рассмотрены особенности нормированных спектральных моментов непрерывных дифференцируемых стационарных случайных процессов. Найдены простые соотношения, показывающие связь спектральных моментов с основными спектрально-корреляционными характеристиками процессов.

1. Все многообразие радиофизических задач, решаемых спектрально-корреляционными методами, можно разделить на два основных класса: задачи, требующие полного знания спектральной плотности  $G_{\xi}(\omega)$  или корреляционной функции  $k_{\xi}(\tau)$  исследуемого случайного процесса  $\xi(t)$ , и задачи, в которых достаточно определить лишь отдельные спектрально-корреляционные параметры этого процесса. Для решения второго класса задач наиболее целесообразно применять обобщенные характеристики функций  $G_{\xi}(\omega)$  или  $k_{\xi}(\tau)$ , которые могли бы определяться значительно проще самих функций и, вместе с тем, достаточно полно описывать основные спектрально-корреляционные свойства процессов. Во многих практически важных задачах в качестве системы таких обобщенных характеристик могут быть использованы моментные функции. Так, в работе Малахова [1] спектральные моменты были успешно применены при исследовании формы спектральной линии колебания; Миддлтоном [2] показана возможность их применения в отдельных задачах статистической теории связи, Крамером и Лидбеттером [3] спектральные моменты использованы при исследовании свойств выборочных функций стационарных процессов.

В данной работе рассмотрены особенности нормированных спектральных моментов стационарных случайных процессов и найдены простые соотношения, связывающие их с основными спектрально-корреляционными параметрами.

2. Спектральная плотность  $G_{\xi}(\omega)$  стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  связана с автокорреляционной функцией  $k_{\xi}(\tau)$  этого процесса известным соотношением Винера—Хинчина:

$$k_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1)$$

Это соотношение показывает, что функции  $G_{\xi}(\omega)$  и  $k_{\xi}(\tau)$ , являясь парой фурье-преобразования, должны удовлетворять всем основным свойствам, характерным для функции плотности распределения вероятностей и характеристической функции\*. Следовательно, раскладывая  $\exp(j\omega\tau)$  в ряд Маклорена, можно записать

\* Исключением здесь является лишь условие нормировки, которое при  $k_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2 = 1$  также принимает обычный вид.

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(j\tau)^i}{i!} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^i G_{\xi}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega} \quad (2)$$

и ввести нормированные спектральные моменты

$$\mu_i \{G_{\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^i G_{\xi}(\omega) d\omega \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) d\omega \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

которые в практических задачах удобно использовать в качестве простых числовых характеристик спектральной плотности  $G_{\xi}(\omega)$ .

Из (1) и (2) видно, что

$$\mu_i \{G_{\xi}\} = (-j)^i \sigma_{\xi}^{-2} \frac{d^i}{d\tau^i} k_{\xi}(\tau) \Big|_{\tau=0}.$$

С другой стороны, известно [2], что для действительного стационарного дифференцируемого  $n$  раз случайного процесса  $\xi(t)$  при  $m_{\xi} = \langle \xi(t) \rangle = 0$  выполняются соотношения

$$\frac{d^{(2i+1)}}{d\tau^{2i+1}} k_{\xi}(\tau) = (-1)^i \langle \xi^{(i+1)}(t) \xi^{(i)}(t + \tau) \rangle, \quad (4)$$

$$\frac{d^{2i}}{d\tau^{2i}} k_{\xi}(\tau) = (-1)^i \langle \xi^{(i)}(t) \xi^{(i)}(t + \tau) \rangle,$$

в которых  $\langle \xi^{(p+1)}(t) \xi^{(q)}(t + \tau) \rangle = -\langle \xi^{(p)}(t) \xi^{(q+1)}(t + \tau) \rangle$  и  $(i+1) \leq n$ .

Учитывая свойство  $k_{\xi}(\tau) = k_{\xi}(-\tau)$ , а следовательно, и  $\int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi}(\omega) \times \times \sin \omega \tau d\omega = 0$ , для функции  $k_{\xi}(\tau)$  вида

$$k_{\xi}(\tau) = k_{\xi}(0) R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 R_{\xi}(\tau) \quad (5)$$

с учетом соотношений (2)–(4) запишем

$$\mu_{2i} \{G_{\xi}\} = (-1)^i \sigma_{\xi}^{-2} \frac{d^{2i}}{d\tau^{2i}} k_{\xi}(\tau) \Big|_{\tau=0} = (-1)^i \frac{d^{2i}}{d\tau^{2i}} R_{\xi}(\tau) \Big|_{\tau=0} = \sigma_{\xi}^{-2} \sigma_{\xi}^2 \mu_{2i}^{(i)}, \quad (6)$$

$$\mu_{2i+1} \{G_{\xi}\} = (-1)^i \sigma_{\xi}^{-2} \frac{d^{(2i+1)}}{d\tau^{2i+1}} k_{\xi}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Отсюда очевидна простая связь спектральных моментов  $\mu_i \{G_{\xi}\}$  с производными  $k_{\xi}^{(i)}(\tau)$  и  $R_{\xi}^{(i)}(\tau)$ , а также с дисперсиями  $\sigma_{\xi}^2 \mu_{2i}^{(i)}$  производных  $\xi^{(i)}(t)$  процесса. Кроме того, соотношения (6) позволяют представить автокорреляционную функцию  $k_{\xi}(\tau)$  при малых  $\tau$  тремя различными способами:

$$k_{\xi}(\tau) = k_{\xi}(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\tau^{2i}}{(2i)!} k_{\xi}^{(2i)}(0) + O(\tau^{2n}) = \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\xi}^2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \times \times \frac{\tau^{2i}}{(2i)!} \mu_{2i} \{G_{\xi}\} + O(\tau^{2n}) = \sigma_{\xi}^2 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\tau^{2i}}{(2i)!} \sigma_{\xi}^2 \mu_{2i}^{(i)} + O(\tau^{2n}). \quad (7)$$

Являясь формально равноценными, разложения (7) основаны на использовании различной информации о процессе  $\xi(t)$ , и поэтому при решении практических задач одно из представлений  $k_\xi(\tau)$  может быть предпочтительнее другого. Разумеется, запись (7) справедлива лишь при существовании  $\xi^{(n)}(t)$ , т. е. при  $\mu_{2n}\{G_\xi\} < \infty$ .

3. Предположим теперь, что  $\xi(t)$  является узкополосным случайным процессом, и рассмотрим особенности спектральных моментов применительно к этому практически важному случаю. Обычно [2] спектр  $G_\xi(\omega)$  таких процессов сосредоточен вблизи  $\omega = \omega_0$ , а их  $k_\xi(\tau)$  представляется выражением

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 [\rho_{\xi c}(\tau) \cos \omega_0 \tau + \rho_{\xi s}(\tau) \sin \omega_0 \tau]. \quad (8)$$

Коэффициенты  $\rho_{\xi c}(\tau)$  и  $\rho_{\xi s}(\tau)$  определяются здесь формой спектральной плотности и связаны с  $G_\xi(\omega)$  соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_{\xi c}(\tau) &= (2\pi)^{-1} \sigma_\xi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega - \omega_0) \cos \omega \tau d\omega, \\ \rho_{\xi s}(\tau) &= -(2\pi)^{-1} \sigma_\xi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega - \omega_0) \sin \omega \tau d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Для таких процессов целесообразно рассматривать лишь положительную область частот  $\omega \geq 0$ , что позволяет, наряду с начальными спектральными моментами  $\mu_l\{G_\xi\}$ , в качестве числовых параметров спектральной плотности  $G_\xi(\omega)$  ввести нормированные центральные спектральные моменты

$$M_l\{G_\xi\} = \int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^l G_\xi(\omega) d\omega \Big/ \int_0^{\infty} G_\xi(\omega) d\omega.$$

При этом (6), (8) и (9) приводят к определениям

$$\begin{aligned} M_{2l}\{G_\xi\} &= \frac{\int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^{2l} G_\xi(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G_\xi(\omega) d\omega} = (-1)^l \frac{d^{2l}}{d\tau^{2l}} \rho_{\xi c}(\tau) \Big|_{\tau=0}, \\ M_{2l+1}\{G_\xi\} &= \frac{\int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^{2l+1} G_\xi(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G_\xi(\omega) d\omega} = (-1)^l \frac{d^{2l+1}}{d\tau^{2l+1}} \rho_{\xi s}(\tau) \Big|_{\tau=0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Кроме того, по аналогии с временными характеристиками между  $\mu_l\{G_\xi\}$  и  $M_l\{G_\xi\}$  будут выполняться привычные соотношения, связывающие начальные и центральные моментные функции [4, 5]:

$$\mu_l\{G_\xi\} = \sum_{q=0}^l \binom{l}{q} M_{l-q}\{G_\xi\} \mu_q^q\{G_\xi\}. \quad (11)$$

Оценивая  $\mu_l\{G_\xi\}$  и  $M_l\{G_\xi\}$  с физической точки зрения, следует, конечно, заметить, что больше всего информации о статистических свойствах узкополосного процесса  $\xi(t)$  содержится в нескольких первых

спектральных моментах. В частности,  $\mu_1 \{G_\xi\} = \int_0^\infty \omega G_\xi(\omega) d\omega / \int_0^\infty G_\xi(\omega) \times$   
 $\times d\omega = \omega_0$  — средняя частота процесса, моменты  $\mu_2 \{G_\xi\}$  и  $\mu_4 \{G_\xi\}$  харак-  
 теризуют соответственно дисперсии  $\sigma_\xi^2$  и  $\sigma_\xi^4$  первой и второй производ-  
 ных  $\dot{\xi}(t)$ ,  $\ddot{\xi}(t)$  процесса  $\xi(t)$ . Величина  $(M_2 \{G_\xi\})^{1/2}$  является средне-  
 квадратичной шириной спектра и через коэффициент формы спектра  $\kappa$   
 достаточно просто связана с распространёнными определениями ширины  
 спектра  $\Delta\omega_\xi$  и времени корреляции  $\tau_0$  случайного процесса:

$$(M_2 \{G_\xi\})^{1/2} = \kappa \Delta\omega_\xi = \kappa \pi / 2 \tau_0,$$

где

$$\Delta\omega_\xi = \int_0^\infty G_\xi(\omega) d\omega / G_\xi(\omega_0), \quad \tau_0 = \int_0^\infty [\rho_{\xi c}^2(\tau) + \rho_{\xi s}^2(\tau)]^{1/2} d\tau.$$

Величины спектральных моментов  $M_3 \{G_\xi\}$  и  $M_4 \{G_\xi\}$  характеризуют  
 асимметрию и эксцесс функции спектральной плотности  $G_\xi(\omega)$ .

4. Для класса гауссовых случайных процессов нетрудно также  
 показать связь рассмотренных спектральных моментов со статистиче-  
 скими характеристиками выбросов.

Известно [3, 6], что среднее число положительных выбросов  $N_\xi^+(c)$   
 непрерывного дифференцируемого гауссова процесса  $\xi(t)$  над некоторым  
 фиксированным уровнем  $c$  на интервале времени  $(t_0, t_0 + T)$  может  
 быть выражено через спектрально-корреляционные характеристики  
 этого процесса:

$$N_\xi^+(c, T) = \frac{T}{2\pi} [-R_\xi^c(0)]^{1/2} \exp(-c^2 / 2\sigma_\xi^2) =$$

$$= \frac{T}{2\pi} \left[ \frac{\int_0^\infty \omega^2 G_\xi(\omega) d\omega}{\int_0^\infty G_\xi(\omega) d\omega} \right]^{1/2} \exp(-c^2 / 2\sigma_\xi^2). \quad (12)$$

В свою очередь, известно, что после линейных преобразований гаус-  
 сова процесса получается также гауссов процесс. Следовательно, если  
 рассматривать производную  $\xi^{(i)}(t)$  исследуемого  $\xi(t)$  и учитывать,  
 что ее спектральная плотность  $G_{(i)}(\omega)$  и коэффициент корреляции  
 $R_{(i)}(\tau)$  определяются выражениями [2]

$$G_{(i)}(\omega) = \omega^{2i} G_\xi(\omega), \quad R_{(i)}(\tau) = (-1)^i R_\xi^{(2i)}(\tau),$$

то можно записать

$$N_{(i)}^+(0, T) = \frac{T}{2\pi} \left[ \frac{\int_0^\infty \omega^3 G_{(i)}(\omega) d\omega}{\int_0^\infty G_{(i)}(\omega) d\omega} \right]^{1/2} = \frac{T}{2\pi} \left[ \frac{\int_0^\infty \omega^{2i+2} G_\xi(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \omega^{2i} G_\xi(\omega) d\omega} \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Сравнение (13) и (12) с определениями (3) и (6) показывает, что  
 выбросы процессов  $\xi(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$ , ...,  $\xi^{(n)}(t)$  над уровнем  $c = 0$  непосред-  
 ственно связаны с величинами  $\mu_{2i} \{G_\xi\}$ . Такая связь может быть успешно  
 использована как при исследованиях статистических характеристик.

выбросов [4], так и в задачах аппаратурного определения спектральных моментов. В частности, из (13) непосредственно следует

$$\hat{\mu}_{2i} \{G_{\xi}\} = (2\pi)^{2i} \prod_{\nu=0}^{i-1} \left( \frac{N_{(\nu)}^+(0, T)}{T} \right)^2,$$

а из (6) оценку  $\hat{\mu}_{2i} \{G_{\xi}\}$  спектрального момента  $\mu_{2i} \{G_{\xi}\}$  легко получить в виде

$$\hat{\mu}_{2i} \{G_{\xi}\} = \sigma_{\xi}^{-2} \hat{\sigma}_{(i)}^2 = \sigma_{\xi}^{-2} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi^{(i)}(t)]^2 dt.$$

5. Результаты данной работы показывают, что основные спектрально-корреляционные свойства стационарных случайных процессов достаточно просто могут быть описаны с помощью нормированных спектральных моментов. Применение спектральных моментов дает возможность значительно шире использовать свойства известной аналогии между спектральной плотностью и плотностью распределения вероятностей, а также между корреляционной функцией и характеристической функцией процесса. При решении ряда практических задач это позволит переходить от свойственных спектрально-корреляционным измерениям непараметрических методов к параметрическим.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 5, 917 (1961).
2. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, изд. Мир, М., 1969.
4. В. И. Хименко, Изв. высш. уч. зав. — Приборостроение, 19, № 1, 93 (1976).
5. М. А. Соколов, В. И. Хименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 10, 1450 (1975).
6. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, изд. Наука, М., 1970.

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию  
15 сентября 1975 г.

#### NORMALIZED SPECTRAL MOMENTS OF STATIONARY RANDOM PROCESSES

V. I. Khimenko

The peculiarities of normalized spectral moments of continuous differentiated stationary random processes are considered. Simple expressions are found which show the relation between the spectral moments and the main spectral-correlation characteristics of the processes.

УДК 538 574

## ПРИБЛИЖЕНИЕ БУРРЕ ДЛЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

*О. В. Музычук*

Рассмотрено распространение плоских волн в линейных стохастических средах без дисперсии, обладающих пространственно-временными флуктуациями показателя преломления и проводимости. Получены и решены уравнения для среднего поля в приближении Бурре для двух моделей среды, описываемых стохастическими уравнениями 1-го и 2-го порядков, обсуждена специфика рассеяния волн в одномерных средах с пространственно-временными флуктуациями параметров. Оценены условия применимости приближения Бурре в рассматриваемой среде.

1. Проблеме распространения волн в случайных средах посвящено значительное количество работ (см., например, [1, 2] и библиографию в них). В большинстве из них ставится задача отыскания моментов поля в случайно-неоднородной среде с флуктуациями диэлектрической проницаемости. При получении уравнений для моментов поля часто используется метод Канера [3], приводящий к известному приближению Бурре для среднего поля.

Для случайной среды с пространственно-временными флуктуациями диэлектрической проницаемости канеровская процедура впервые была использована в работе [4], где, в частности, была показана принципиальная возможность усиления моментов поля за счет параметрического взаимодействия с быстрыми флуктуациями  $\epsilon(x, t)$ .

В настоящей работе рассмотрено распространение плоских волн в линейных стохастических средах без дисперсии, обладающих пространственно-временными флуктуациями показателя преломления и проводимости (или в длинных линиях с флуктуациями соответствующих параметров). Получено уравнение для среднего поля в приближении Бурре, найдено его решение для плоских волн, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков, оценены условия применимости рассматриваемого приближения. Показано, в частности, что приближение Бурре позволяет рассматривать большие флуктуации параметров среды, если последние являются мелкомасштабными по сравнению с длиной волны и, к тому же, достаточно медленными (временной масштаб флуктуаций значительно больше соответствующего пространственного).

Обсуждены особенности рассеяния волн в одномерной среде, исследовано влияние флуктуаций диссипативного параметра (проводимости среды) на среднее поле.

2. Распространение плоских волн в линейных средах или длинных линиях, обладающих пространственно-временными флуктуациями параметров, описывается в общем случае стохастическим уравнением

$$\left[ L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) + \tilde{L} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}; x, t \right) \right] Y(x, t) = 0, \quad (1)$$

где  $L$  — регулярная,  $\tilde{L}$  — флуктуационная часть стохастического дифференциального оператора, характеризующего рассматриваемую среду,  $Y$  — случайное поле, статистические характеристики которого подлежат определению,  $x$  — пространственная,  $t$  — временная координата.

Если граничные условия задаются в виде  $Y(0, t) = \delta(t - t_0)$ , или  $Y(0, t) = e^{i\omega(t-t_0)}$ , то решение (1) представляет собой стохастическую функцию Грина или «когерентную» стохастическую функцию Грина соответственно. Получим уравнение для среднего значения когерентной функции Грина одномерной среды с пространственно-временными флуктуациями параметров.

Представляя поле в виде

$$Y(x, t) = \bar{Y}(x, t) + \tilde{Y}(x, t), \quad (2)$$

где  $\bar{Y}$  — среднее, а  $\tilde{Y}$  — флуктуационное (рассеянное) поле, и используя стандартную процедуру перенормировки [5], легко получить следующее уравнение для среднего поля (аргументы для краткости опускаем):

$$(L - \langle \tilde{L} \hat{L}^{-1} \tilde{L} \rangle) \bar{Y} = 0, \quad (3)$$

представляющее собой приближение Бурре [2, 6] уравнения Дайсона.

Здесь  $\hat{L}^{-1}$  — интегральный оператор, обратный регулярному оператору  $L$ :  $L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{L}^{-1}(\xi, \tau) \psi(x - \xi, t - \tau) = \psi(x, t)$  для любой функции  $\psi(x, t)$ .

Если флуктуации параметров среды пространственно однородны и стационарны во времени, то (3) можно записать в виде

$$L \bar{Y}(x, t) - \hat{L}^{-1} \hat{\Phi}_L \bar{Y}(x - \xi, t - \tau) = 0, \quad (4)$$

где оператор

$$\hat{\Phi}_L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}; \xi, \tau \right) \equiv \left\langle \tilde{L} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}; x, t \right) \tilde{L} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}; x - \xi, t - \tau \right) \right\rangle, \quad (5)$$

$\xi, \tau$  — разностные переменные, по которым производится интегрирование в (4).

Среднее значение когерентной функции Грина ищем в виде

$$\bar{Y}(x, t) \equiv \bar{G}_\omega(x, t) = \exp \{ j[\omega t - K(\omega)x] \}, \quad (6)$$

где  $K(\omega) = k(\omega) - jk'(\omega)$  — эффективное волновое число,  $k$  характеризует распространение среднего поля,  $k'$  — его затухание в стохастической среде. Используя (4) — (6), получим дисперсионное уравнение для эффективного волнового числа

$$L(-jK, j\omega) - Q(K, \omega) = 0, \quad (7)$$

где

$$Q(K, \omega) = \hat{L}^{-1}(\xi, \tau) \hat{\Phi}_L(-jK, j\omega; \xi, \tau) e^{-j(\omega\tau - K\xi)}. \quad (8)$$

Зная  $\bar{G}_\omega(x, t)$ , легко найти среднюю функцию Грина  $\bar{G}(x, t)$ , описывающую распространение  $\delta$ -импульса в случайной среде;



$$\bar{G}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_{\omega}(x, t) d\omega. \quad (9)$$

3. Рассмотрим стохастическое уравнение\*

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} [a(x, t) Y] + h(x, t) Y = 0, \quad (10)$$

где  $a(x, t) = c^{-1} [1 + \tilde{n}(x, t)]$ ,  $c$  — средняя скорость распространения волны,  $\tilde{n}(x, t)$  — флуктуации показателя преломления среды,  $h(x, t)$  характеризует случайные потери в среде, обусловленные, например, ее проводимостью.

Введенные выше операторы  $L, \tilde{L}, \hat{L}^{-1}$  в данном случае имеют вид

$$L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} + a_0 \frac{\partial}{\partial t} + h_0, \\ \tilde{L} \left( \frac{\partial}{\partial t}; x, t \right) = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} + \tilde{a} \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{h}, \quad (11)$$

$$\hat{L}^{-1} \psi = \int_0^x e^{-h_0 \xi} \psi(x - \xi, t - a_0 \xi) d\xi.$$

Здесь  $a_0, h_0$  — средние значения,  $\tilde{a}(x, t), \tilde{h}(x, t)$  — флуктуации соответствующих параметров среды. Полагая для простоты флуктуации  $\tilde{a}$  и  $\tilde{h}$  статистически независимыми, на основании (4), (5), (11) находим уравнение для среднего поля:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + a_0 \frac{\partial}{\partial t} + h_0 \right] \bar{Y}(x, t) = \int_0^x e^{-h_0 \xi} \left[ \Phi_a(\xi, \tau) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi_a(\xi, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} + \Phi_h(\xi, \tau) \right] \bar{Y}(x - \xi, t - \tau) d\xi. \quad (12)$$

Здесь

$$\Phi_{\lambda}(\xi, \tau) = \langle \lambda(x, t) \lambda(x - \xi, t - \tau) \rangle$$

— пространственно-временные функции корреляции параметров среды ( $\lambda = \tilde{a}, \tilde{h}$ ).

Если пространственный и временной масштабы корреляции существенно различны, так что

$$a_0 \xi_{\lambda} \ll \tau_{\lambda} \quad \text{или} \quad a_0 \xi_{\lambda} \gg \tau_{\lambda},$$

где  $\xi_{\lambda}$  и  $\tau_{\lambda}$  — длина и время корреляции флуктуаций соответственно, и, кроме того, минимальный из них значительно меньше соответствующего масштаба поля, то из (12) легко получить уравнение в «диффузионном» приближении [7]\*\*:

\* Уравнение (10) описывает распространение плоских волн в средах или длинных линиях, если пренебречь обратным рассеянием

\*\* Предполагается, что функция корреляции  $\Phi_a(\xi, \tau)$  гладкая в окрестности точки  $\xi = 0, \tau = 0$ .

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + a_0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{D_a}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + h_1 \right] \bar{Y}(x, t) = 0, \quad (13)$$

где

$$h_1 = h_0 - \frac{D_h}{2} \quad (14)$$

— эффективные потери в среде; параметр

$$D_\lambda = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda(\xi, 0) d\xi, & a_0 \xi_\lambda \ll \tau_\lambda \\ a_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda(0, \tau) d\tau, & a_0 \xi_\lambda \gg \tau_\lambda \end{cases}$$

определяется крупномасштабными пространственными или же медленными временными флуктуациями соответствующего параметра.

Таким образом, среднее поле в рассматриваемой среде при сделанных выше предположениях удовлетворяет уравнению диффузии (13). Коэффициент диффузии определяется крупномасштабными (медленными) пространственно-временными флуктуациями показателя преломления. Как следует из (14), эффективные потери в среде (затухание среднего поля) уменьшаются из-за крупномасштабных (медленных) флуктуаций потерь. Этот эффект обусловлен преобладающим влиянием отрицательных флуктуаций  $\tilde{h}(x, t)$  на среднее поле [8].

Из (13) легко найти среднюю функцию Грина

$$\bar{G}(x, t) = \frac{e^{-h_1 x}}{\sqrt{2\pi D_a x}} \exp\left[-\frac{(t - a_0 x)^2}{2 D_a x}\right], \quad (15)$$

которая представляет собой гауссов импульс, расплывающийся по мере распространения в стохастической среде. Для компонент эффективного волнового числа когерентной функции Грина находим

$$\begin{aligned} k &= k_0 = a_0 \omega, \\ k' &= h_0 - \frac{D_h}{2} + \frac{D_a \omega^2}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решим теперь уравнение (12), не делая дополнительных предположений о мелкомасштабности (быстроте) флуктуирующих параметров среды, задавшись конкретным видом их корреляционных функций. Пусть, например,

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\xi, \tau) &= \langle \lambda^2 \rangle \exp[-\chi_\lambda |\xi| - \Pi_\lambda |\tau|] \\ (\lambda &= \tilde{a}, \tilde{h}), \end{aligned} \quad (17)$$

здесь  $\chi_\lambda \sim \xi_\lambda^{-1}$ ,  $\Pi_\lambda \sim \tau_\lambda^{-1}$  — ширина пространственного и временного спектра флуктуаций соответственно.

Считая, что в начале координат действует гармонический источник, из (7), (11), (17), находим дисперсионное уравнение, связывающее частоту и эффективное волновое число когерентной функции Грина:

$$h_0 + j(k_0 - K) = \frac{\langle \tilde{h}^2 \rangle}{h_0 + \chi_h + j(k_0 - K)} - \frac{\langle \tilde{a}^2 \rangle \omega(\omega - j\Pi_a)}{h_0 + \chi_a + j(k_0 - K)}.$$

Здесь  $\chi_\lambda = \chi_\lambda + a_0 \Pi_\lambda$  — эффективный масштаб пространственно-временного спектра флуктуаций. Полагая, что  $k' - h_0 \ll \chi_\lambda$  (ниже будет показано, что это предположение не выходит за рамки условий применимости приближений Бурре), получим следующие выражения для компонент эффективного волнового числа:

$$k = a_1 \omega, \quad a_1 = a_0 \left( 1 - \langle \alpha^2 \rangle \frac{p}{\chi_\alpha} \right), \quad (18)$$

$$k' = h_0 - \langle \beta^2 \rangle \frac{h_0^2}{\chi_\beta} + \langle \alpha^2 \rangle \frac{k_0^2}{\chi_\alpha} \left( 1 - \langle \alpha^2 \rangle \frac{p^2}{\chi_\alpha^2} \right),$$

где  $p \equiv a_0 \Pi_\alpha$ ;  $\alpha = \frac{\tilde{a}}{a_0}$ ,  $\beta = \frac{\tilde{h}}{h_0}$  — относительные флуктуации параметров среды.

Заметим, что результат (18) несколько отличается от (16), хотя при  $\chi_\alpha \gg p$ ,  $\langle \alpha^2 \rangle \frac{p}{\chi_\alpha} \ll 1$  он переходит в (16); при быстрых флуктуациях параметров, для которых  $\chi_\alpha \ll p$ , результаты совпадут, если  $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ .

4. Оценим условия применимости приближения Бурре (3) в рассматриваемой среде. Для этого учтем члены массового оператора уравнения Дайсона [2], имеющие порядок  $\langle \lambda^2 \rangle^2$ . Рассмотрев действие этих членов на когерентную функцию Грина, после несложных, но громоздких вычислений можно получить следующие ограничения на величину и масштаб флуктуаций параметров среды:

$$\langle \alpha^2 \rangle \left( \frac{k_0}{\chi_\alpha} \right)^2 \ll 1, \quad \langle \alpha^2 \rangle \frac{p}{\chi_\alpha} \ll 1 \quad \text{при } \chi_\alpha \gtrsim k_0, \quad (19)$$

$$\langle \alpha^2 \rangle \ll 1 \quad \text{при } \chi_\alpha \ll k_0;$$

$$\langle \beta^2 \rangle \left( \frac{h_0}{\chi_\beta} \right)^2 \ll 1 \quad \text{при } \chi_\beta \gtrsim k_0, \quad (19a)$$

$$\langle \beta^2 \rangle \left( \frac{h_0}{k_0} \right)^2 \ll 1 \quad \text{при } \chi_\beta \ll k_0.$$

Отсюда, в частности, следует, что приближение Бурре позволяет рассматривать большие ( $\langle \alpha^2 \rangle \sim 1$ ) флуктуации показателя преломления, если последние мелкомасштабны,  $\chi_\alpha \gg k_0$  и достаточно медленны, так что  $\chi_\alpha \gg p$ . Если масштаб флуктуаций порядка длины волны,  $\chi_\alpha \leq k_0$ , а также  $\chi_\alpha \leq p$ , то последние должны быть малыми. Для предельного случая чисто пространственных неоднородностей показателя преломления из (19) получаются известные условия применимости:

$$\langle \alpha^2 \rangle \left( \frac{k_0}{\chi_\alpha} \right)^2 \ll 1 \quad \text{при } \chi_\alpha \gtrsim k_0,$$

$$\langle \alpha^2 \rangle \ll 1 \quad \text{при } \chi_\alpha \ll k_0.$$

Ограничения на флуктуации потерь среды (19 а) можно считать выполненными, если регулярные потери достаточно малы, при этом дисперсия их может быть больше единицы.

Отметим, что согласно (18) и (19) временные флуктуации показателя преломления не приводят к «параметрическому усилению» среднего поля в рассматриваемой среде; они лишь незначительно уменьшают

эффективное затухание. Заметим также, что в данном случае при выполнении условий (19) результаты диффузионного приближения и приближения Бурре совпадают.

На основании (18)—(19 а) условия применимости приближения Бурре можно записать в виде

$$\Delta k \equiv k_0 - k \ll k_0, \quad \Delta k' \equiv k' - h_0 \ll \gamma_\lambda, \quad (20)$$

не зависящем, по-видимому, от рассматриваемой модели стохастической среды.

5. Рассмотрим распространение плоских волн в линейных средах с пространственно-временными флуктуациями параметров, описываемое стохастическим уравнением второго порядка:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \delta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] Y = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\tilde{a}(x, t) Y] + \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{\delta}(x, t) Y]. \quad (21)$$

Для электромагнитных волн в среде с параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$ , и проводимостью  $\sigma$  коэффициенты в (21) представляют собой

$$a_0 = c^{-1} \bar{n} = c^{-1} \sqrt{\bar{\epsilon} \mu}, \quad \delta_0 = 4\pi\mu c^{-1} \bar{\sigma},$$

$$\tilde{a} = c^{-2} \tilde{n}(x, t), \quad \tilde{\delta} = 4\pi\mu c^{-1} \tilde{\sigma}(x, t),$$

где  $\bar{n}$ ,  $\bar{\sigma}$  — средние значения,  $\tilde{n}$ ,  $\tilde{\sigma}$  — пространственно-временные флуктуации показателя преломления и проводимости среды соответственно.

Определенные выше операторы  $\tilde{L}$  и  $\hat{L}^{-1}$  в данном случае имеют вид\*

$$\begin{aligned} -\tilde{L} \left( \frac{\partial}{\partial t}; x, t \right) &= \frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \tilde{a}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} + \tilde{\delta} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \hat{L}^{-1}(\xi, \tau) \psi(x - \xi, t - \tau) &= -\frac{1}{2a_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{h_0}{a_0} \tau\right) d\tau \times \\ &\times \int_{x-\tau/a_0}^{x+\tau/a_0} \psi(x - \xi, t - \tau) d\xi \quad (h_0 = \delta_0/a_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Считая флуктуации параметров среды стационарными, пространственно-однородными и статистически независимыми, на основании (4), (22) получим следующее уравнение для среднего поля:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \delta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] \bar{Y} &= -\frac{1}{2a_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{h_0}{a_0} \tau\right) d\tau \times \\ &\times \int_{x-\tau/a_0}^{x+\tau/a_0} d\xi \left[ \Phi_a(\xi, \tau) \frac{\partial^4}{\partial t^4} - 2 \frac{\partial \Phi_a(\xi, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \right. \\ &\left. + \left( \frac{\partial^2 \Phi_a(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + \Phi_\delta(\xi, \tau) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi_\delta(\xi, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} \right] \bar{Y}(x - \xi, t - \tau). \end{aligned} \quad (23)$$

Дисперсионное уравнение (8) дает в данном случае такое представление для компонент эффективного волнового числа:

\* Средние потери в среде полагаем малыми:  $\bar{\sigma}/\omega \bar{\epsilon} \ll 1$ .

$$k^2 = k_0^2 - \text{Re } Q(K, \omega),$$

$$k' = h_0 + \frac{1}{k_0} \text{Im } Q(K, \omega),$$
(24)

где  $Q(K, \omega)$  — результат действия оператора в правой части уравнения (23) на функцию  $\bar{G}_\omega(x, t) = \exp [j(\omega t - Kx)]$ .

Для функции корреляции флуктуаций параметров (17) последние выражения можно записать в виде

$$\frac{\Delta k}{k_0} = \langle \alpha^2 \rangle \frac{k_0^2 \chi_\alpha + p(\chi_\alpha^2 + 2k_0^2)}{2\chi_\alpha(\chi_\alpha^2 + 4k_0^2)} - \frac{\langle \beta^2 \rangle h_0^2}{2(\chi_\beta^2 + 4k_0^2)},$$

$$\Delta k' = \langle \alpha^2 \rangle \frac{k_0^2 [2k_0^2 + \chi_\alpha(\chi_\alpha - p)]}{\chi_\alpha(\chi_\alpha^2 + 4k_0^2)} - \frac{\langle \beta^2 \rangle h_0^2 (\chi_\beta^2 + 2k_0^2)}{\chi_\beta(\chi_\beta^2 + 4k_0^2)}.$$
(25)

Здесь  $\Delta k \equiv k_0 - k$  и  $\Delta k' \equiv k' - h_0$  характеризуют отличие эффективного волнового числа от «невозмущенного» значения;  $\alpha$  и  $\beta$  — относительные флуктуации параметров  $\tilde{a}(x, t)$  и  $\tilde{\delta}(x, t)$  соответственно; для  $\chi_\lambda$  и  $p$  сохранены прежние обозначения.

Представляющие интерес асимптотические значения компонент эффективного волнового числа приведены в табл. 1 и 2. Первая характеризует влияние флуктуаций диэлектрической проницаемости среды, вторая — ее проводимости. Верхние части таблиц соответствуют «мелкомасштабным» флуктуациям параметров, нижние — «крупномасштабным» (имеется в виду масштаб, обратный эффективной ширине пространственно-временного спектра  $\chi$ ). При  $x \gg p$  флуктуации параметров — в основном «пространственные», а при  $x \ll p$  — в основном «временные».

Таблица 1

Влияние флуктуаций  $\alpha(x, t)$  на эффективное волновое число

Пространственно-временной масштаб		$\frac{2}{\langle \alpha^2 \rangle} \frac{\Delta k}{k_0}$	$\frac{1}{\langle \alpha^2 \rangle} \frac{\Delta k'}{k_0}$
$\chi \gg k_0$	$x \gg p$	$\left(\frac{k_0}{x}\right)^2 + \frac{p}{x} \ll 1$	$\frac{k_0}{x} \ll 1$
	$x \ll p$	1	$2\left(\frac{k_0}{p}\right)^3 \ll 1$
$\chi \ll k_0$	$x \gg p$	1/4	$\frac{k_0}{2x} \gg 1$
	$x \ll p$	3/4	$\frac{k_0}{2p} \gg 1$

Таблица 2

Влияние флуктуаций  $\beta(x, t)$  на эффективное волновое число

Пространственно-временной масштаб		$-\frac{2}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{\Delta k}{k_0}$	$-\frac{1}{\langle \beta^2 \rangle} \frac{\Delta k'}{k_0}$
$\chi \gg k_0$		$\left(\frac{h_0}{\chi}\right)^2 \ll 1$	$\frac{h_0^2}{\chi k_0} \ll 1$
$\chi \ll k_0$		$\frac{1}{4} \left(\frac{h_0}{k_0}\right)^2$	$\frac{1}{2} \frac{h_0^2}{\chi k_0}$

Заметим, что для рассматриваемой среды в случае чисто пространственных неоднородностей показателя преломления величина  $\Delta k'/k_0$  пропорциональна  $\langle \alpha^2 \rangle \frac{k_0}{x}$  как для крупномасштабных, так и для мелкомасштабных неоднородностей. Данный результат (для мелкомасштабных неоднородностей) отличен от соответствующего результата в трехмерной среде, где эта величина пропорциональна  $\langle \alpha^2 \rangle \left( \frac{k_0}{x} \right)^3$  [3]. Более сильное рассеяние в одномерной среде в случае мелкомасштабных неоднородностей связано с тем, что здесь нет рассеяния в стороны; любые флуктуации  $\tilde{n}(x, t)$  приводят к неопределенности фазы поля в фиксированной точке пространства (стохастической дисперсии). По этой же причине в рассматриваемой среде невозможно параметрическое усиление среднего поля, связанное с временными флуктуациями  $\tilde{n}(x, t)$ , в отличие от трехмерного случая [4]. Быстрые ( $p \gtrsim x$ ) временные флуктуации показателя преломления уменьшают и в предельном случае  $p \gg k_0$  лишь «компенсируют» затухание среднего поля, обусловленное фазовой неопределенностью. Ясно, однако, что параметрическое взаимодействие поля с быстрыми пространственно-временными флуктуациями показателя преломления может приводить к нарастанию высших моментов поля и в рассматриваемой среде.

Поправка к затуханию поля, обусловленная флуктуациями проводимости среды, всегда отрицательна (см. табл. 2); таким образом, флуктуации диссипативного параметра приводят к уменьшению затухания среднего поля и, вообще говоря, могут приводить к его нарастанию\*. Аналогичный эффект хорошо известен для стохастических систем с сосредоточенными параметрами (см., например, [9, 10]), а для стохастической среды, описываемой уравнением первого порядка, обсужден в работе [8].

Автор благодарен А. Н. Малахову за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. Н. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, **102**, № 1, 3 (1970).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М, 1967.
3. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, № 5, 827 (1959).
4. В. Г. Гавриленко, Я. М. Дорфман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 2, 249 (1972).
5. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, **44**, № 2, 676 (1963).
6. R. C. Bougget, Can. J. Phys., **40**, 782 (1962).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, **110**, № 4, 499 (1973).
8. О. В. Музычук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 3, 392 (1975).
9. T. K. Saugey, J. K. Dienes, J. Math. Phys., **41**, 300 (1962).
10. Г. Н. Бочков, О. В. Музычук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 3, 493 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
17 февраля 1975 г.

\* Усиление моментов поля в среде с флуктуациями диссипативного параметра возможно, только если вероятностное распределение последнего заходит в отрицательную область, что означает наличие случайной «активизации» среды.

---

**BOURRET APPROXIMATION FOR PLANE WAVES IN MEDIA WITH  
SPACE-TIME PARAMETER FLUCTUATIONS***O. V. Musychuk*

The propagation of plane waves in linear stochastic media without dispersion possessing space-time fluctuations of the refractive indice and conductivity has been considered. The equations have been obtained and solved for the mean field in the Bourret approximation for two medium models described by 1-st and 2-nd order stochastic equations. The wave scattering in one-dimensional media with space-time parameter fluctuations is discussed. The conditions of the Bourret approximation application in the medium under consideration are estimated.

---

УДК 538.56 : 519.25

## ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И МЕТОД КИРХГОФА В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. А. Пономарев, В. П. Якубов

На примере решения задачи о поле точечного источника, расположенного над бесконечно протяженной абсолютно жесткой неровной поверхностью, показано, что приближение метода Кирхгофа (МК), построенное с учетом затенений, следует из строгого интегрального уравнения для поля после преобразований, основанных на методе стационарной фазы. При этом в рамках геометрикооптического приближения МК описывает полное поле как сумму всевозможных однократно отраженных элементарных волн при полном учете возникающих затенений. Получено интегральное уравнение, решение которого соответствует приближению МК.

Решение задач рассеяния коротких волн на неровных поверхностях потребовало модификации метода Кирхгофа (МК) и введения функций затенений [1]. В таком виде МК широко используется в публикуемых работах, оставаясь в то же время полуэмпирическим, что затрудняет оценку границ применимости получаемых результатов [2]. Работа [7] дает определенное обоснование МК и, в частности, показывает, что функция затенений поверхности относительно источника может быть получена как результат решения интегрального уравнения для граничного значения поля в геометрикооптическом приближении. Вторая функция затенений — относительно точки наблюдения — в [7], как и обычно [1], вводилась формально из соображений симметрии и теоремы взаимности. Данная работа дает математическое обоснование этому формальному шагу и таким образом дополняет работу [7]. В целом обе работы можно рассматривать как иллюстрацию связи метода Кирхгофа со строгими интегральными уравнениями для поля над неровной поверхностью.

Рассмотрим поле  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  точечного источника, находящегося в точке  $\mathbf{r}_0$  над бесконечно протяженной абсолютно жесткой поверхностью  $S$ , отклонения которой от плоскости  $xOy$  описываются функцией  $z = z_s(\boldsymbol{\rho})$ , где  $\boldsymbol{\rho} = (x, y, 0)$ . Функция  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  при этом, как известно [1], определяется интегральным уравнением

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int (d^2 \boldsymbol{\rho}') (N' \nabla') G_0(\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}) g(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}_0), \quad (1)$$

где [7]

$$\mathbf{r}_s = (x, y, z_s), \quad N = \left( -\frac{\partial z_s}{\partial x}, -\frac{\partial z_s}{\partial y}, 1 \right), \quad G_0(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

Перепишем уравнение (1) в символической форме:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \hat{L}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0). \quad (2)$$

Интегральный оператор  $\hat{L}$ , вообще говоря, является сингулярным:



в случае, когда точка наблюдения  $\mathbf{r}$  лежит на поверхности, ядро интегрального оператора имеет особенность. Выделяя эту особенность [3], можно записать

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{P}} + \hat{\delta}_s, \quad (3)$$

где

$$\hat{\delta}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0) = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

если точка наблюдения лежит на поверхности ( $\mathbf{r} \in S$ ), и

$$\hat{\delta}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0) = 0,$$

если  $\mathbf{r}$  не принадлежит  $S$ . Интегральный оператор  $\hat{\mathbf{P}}$  при этом не является сингулярным и понимается в смысле Коши. Заметим, что из (2) и (3) очевидным образом следует известное [1, 5, 7] уравнение для граничного значения поля  $g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0)$ ,

$$g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0) = 2G_0(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0) + \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}'_s) g(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}_0). \quad (4)$$

Подставляя в (2) итерационное решение уравнения (4), можно записать

$$g = (1 + \hat{\delta}_s) (1 + \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}^2 + \dots) G_0, \quad (5)$$

или более кратко:

$$g = (1 + \hat{\delta}_s) (1 - \hat{\mathbf{P}})^{-1} G_0,$$

где  $(1 + \hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{P}}^2 + \dots) \equiv (1 - \hat{\mathbf{P}})^{-1}$ .

Рассмотрим в геометрооптическом приближении выражение

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_s) G_0(\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}_0) = (-2) \int_{\mathcal{J}} (d^2\rho') (N'\nabla') G_0(\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}_0).$$

Асимптотическая оценка этого интеграла методом стационарной фазы (МСФ) приводит к сумме вкладов по стационарным точкам [4, 5]. Стационарные точки определяются уравнением

$$\frac{\mathbf{R}_0}{R_0} + \frac{\mathbf{R}}{R} = N \left( \frac{R_{0z}}{R_0} + \frac{R_z}{R} \right), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0 = (R_{0x}, R_{0y}, R_{0z}), \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r}'_s - \mathbf{r} = (R_x, R_y, R_z),$$

и их совокупность, как нетрудно показать, может быть поделена на два семейства. Первое семейство точек определяется, как следует из (6), соотношением

$$\frac{R_0}{R_0} + \frac{R}{R} = 0.$$

Они являются [7] точками пересечения поверхности  $S$  с лучом, выходящим из точки источника  $\mathbf{r}_0$  и проходящим через точку наблюдения  $\mathbf{r}$ , поэтому будем называть их дальше точками затенений. Точки второго семейства, определяемые уравнением

$$\frac{R_0}{R_0} + \frac{R}{R} = 2 \frac{N}{N} \left( \frac{N}{N} \frac{R}{R} \right),$$

являются точками зеркального отражения. В предыдущей работе [7] вклады этих стационарных точек не учитывались, поскольку влиянием

переотражений на формирование граничного значения поля на поверхности пренебрегалось. Таким образом, можно записать, что имеет место асимптотическое соотношение

$$\hat{P}G_0 \approx (\hat{A} + \hat{B})G_0,$$

где оператор  $\hat{A}$  суммирует вклады по точкам затенений, а оператор  $\hat{B}$  — вклады по точкам зеркального отражения.

Переходя от суммирования к интегрированию путем введения  $\delta$ -функции Дирака, запишем [7]:

$$\begin{aligned} \hat{A}(r, r'_s) G_0(r'_s - r_0) = \\ = G_0(r - r_0) (-1) \int_{x^+0}^{x_0^+0} d\xi \delta[(\xi - x) \operatorname{ctg} \theta - \Delta] (\operatorname{ctg} \theta - \gamma), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \hat{A}(r, r'_s) G_0(r'_s - r_0) = \\ = G_0(r - r_0) (-1) \int_{x^+0}^{x_0^+0} d\xi \frac{d}{d\xi} \chi [(\xi - x) \operatorname{ctg} \theta - \Delta]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь через  $\chi[y]$  обозначена ступенчатая функция Хевисайда и

$$\begin{aligned} x = \rho\alpha, \quad x_0 = \rho_0\alpha, \quad \alpha = \frac{\rho + \rho_0}{|\rho + \rho_0|}, \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{(\rho - \rho_0, \alpha)}{z_0 - z}, \quad \Delta = z_s(\rho - \alpha(\xi - x)) - z_s(\rho), \\ \gamma = \frac{\partial}{\partial \xi} z_s(\rho - \alpha(\xi - x)). \end{aligned}$$

Запись явного выражения для  $\hat{B}G_0$  можно найти в [5].

Повторное действие оператора  $\hat{P}$  также допускает разбиение на два оператора:

$$\hat{P}^2 G_0 \approx (\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} + \hat{B})G_0 = (\hat{A} + \hat{B})^2 G_0.$$

Производя такое разбиение для произвольной степени оператора в (5), можно записать:

$$g \approx (1 + \hat{\delta}_s) \{1 + (\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{A} + \hat{B})^2 + (\hat{A} + \hat{B})^3 + \dots\} G_0. \quad (8)$$

Чтобы облегчить в дальнейшем анализ интерационного ряда (8), проведем следующие формальные преобразования. Запишем кратко:

$$g \approx (1 + \hat{\delta}_s) [(1 + \hat{A}) - \hat{B}]^{-1} G_0,$$

или

$$g \approx (1 + \hat{\delta}_s) [1 - (1 - \hat{A})^{-1} \hat{B}]^{-1} (1 - \hat{A})^{-1} G_0. \quad (9)$$

Следуя [7], введем в рассмотрение оператор

$$\hat{S} = (1 - \hat{A})^{-1} \equiv (1 + \hat{A} + \hat{A}^2 + \hat{A}^3 + \dots)$$

и назовем его оператором затенений, поскольку

$$\hat{S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) G_0(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

где  $s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  — функция затенений, удовлетворяющая уравнению

$$s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 1 - \int_{x+0}^{x_0+0} d\xi \frac{d}{d\xi} \chi[(\xi - x) \operatorname{ctg} \theta - \Delta] s(\rho - \alpha(\xi - x), z + (\xi - x) \operatorname{ctg} \theta, \mathbf{r}_0),$$

что может быть получено из (7) по аналогии с [7].

Тогда выражение (8) для поля над поверхностью  $S$  может быть представлено с учетом (9) в виде

$$g \approx (1 + \hat{\delta}_s) [1 + (\hat{S}\hat{B}) + (\hat{S}\hat{B})^2 + (\hat{S}\hat{B})^3 + \dots] \hat{S}G_0, \quad (10)$$

или

$$g \approx (1 + \hat{\delta}_s) \hat{S}G_0 + (1 + \hat{\delta}_s) \hat{S}\hat{B} [1 + (\hat{S}\hat{B}) + (\hat{S}\hat{B})^2 + \dots] \hat{S}G_0. \quad (11)$$

Первое слагаемое в (11) описывает затенения прямой волны, приходящей из точки источника  $\mathbf{r}_0$  в точку наблюдения  $\mathbf{r}$ . Выражение

$$[1 + (\hat{S}\hat{B}) + (\hat{S}\hat{B})^2 + \dots] \hat{S}G_0 \quad (12)$$

во втором слагаемом определяет сумму волн, приходящих в произвольную точку поверхности от источника и других участков поверхности за счет переотражений. Действие оператора  $\hat{B}$  на выражение (12) формирует отраженную от поверхности волну, а оператор  $\hat{S}$  обеспечивает учет затенений этой волны на пути от поверхности до точки наблюдения.

Если предположить, что неровности поверхности пологие и крупномасштабные и многократные переотражения между ними не вносят существенного вклада в формирование граничного значения поля, то можно ограничиться в (12) лишь первым слагаемым, описывающим «засветку» поверхности падающей волной. В этом случае выражение (11) для поля  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  можно записать в виде

$$g \approx (1 + \hat{\delta}_s) \hat{S}G_0 + (1 + \hat{\delta}_s) \hat{S}\hat{B}\hat{S}G_0, \quad (13)$$

что полностью соответствует приближению модифицированного метода Кирхгофа [1]. Это соответствие становится еще более наглядным, если воспользоваться соотношениями

$$\hat{B} \approx \hat{P} - \hat{A} \quad \text{и} \quad \hat{S}\hat{A}\hat{S} = \hat{S}(\hat{S} - 1) = 0,$$

преобразовать (13) к виду

$$g \approx (1 + \hat{\delta}_s) [\hat{S} + \hat{S}\hat{P}\hat{S}] G_0,$$

откуда для поля над поверхностью следует в рамках геометрикооптического приближения

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \approx s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \int (d^2 \rho') s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ \times (N' \nabla') G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) s(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) 2G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad (14)$$

и для граничного значения поля на поверхности без учета переотражений [7]

$$g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0) \approx 2s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0) G_0(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_0). \quad (15)$$

Очевидно, что выражение (15) не содержит информации о последующих затенениях отраженной волны на пути от поверхности к точке наблюдения. Его подстановка в формулу Грина (1) поэтому не может дать полного учета затенений при расчете поля над поверхностью. Этот факт и учитывается модифицированным методом Кирхгофа путем введения двух функций затенений — относительно источника и точки наблюдения, что эквивалентно решению интегрального уравнения

$$g \approx G_0 + \hat{B}\hat{S}G_0 + \frac{1}{2} [\hat{A} + \hat{\delta}_s] g, \quad (16)$$

которое следует из полного уравнения

$$g \approx G_0 + \frac{1}{2} [\hat{A} + \hat{B} + \hat{\delta}_s] g$$

при замене в выражении  $(1/2)\hat{B}g$  граничного значения поля  $g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0)$  приближенным выражением (15). В результате уравнение (16) (или модифицированный МК) описывает полное поле как сумму всевозможных однократно отраженных элементарных волн при полном учете возникающих затенений. Это непосредственно видно из выражения (14), которое можно рассматривать как решение уравнения (16).

В то же время выражение (11) позволяет отдельно описать вклады всевозможных однократно, двукратно и т. д. отраженных волн. Это открывает возможность дальнейшей модификации МК. Такая модификация может сводиться к замене в выражении  $(1/2)\hat{B}g$  граничного значения поля  $g(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_0)$  приближенным значением, построенным с учетом заранее заданной кратности отражений.

В заключение заметим, что в [6] дано ошибочное толкование результатов, полученных для граничного значения поля, что очевидно в свете изложенного.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
- 2 Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964
- 3 Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
- 4 В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970
- 5 И. М. Фукс, Радиотехника, вып. 4, 115 (1967).
- 6 Г. А. Пономарев, В. П. Якубов, XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, часть III, изд. Казанского университета, 1975, стр. 77.
- 7 Г. А. Пономарев, В. П. Якубов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 3, 407 (1976).

---

**GEOMETRICAL-OPTICS APPROXIMATION AND KIRCHHOF'S METHOD  
IN THE PROBLEM OF WAVE SCATTERING ON A ROUGH SURFACE***G. A. Ponomarev, V. P. Yakubov*

The Kirchhof's method approximation with shadows account is followed from a strict integral field equation after stationary phase method transformations. In the framework of the geometrical optics approximation Kirchhof's method describes the full field as a sum of possible single-reflected elementary waves. An integral equation is derived which solution corresponds to the Kirchhof's method approximation. The examination is made on the example of the problem of the field of a point source situated above an infinitely extended absolutely rigid rough surface.

---

УДК 621.372.09

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СКАЧКООБРАЗНОМ СУЖЕНИИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

Ю. В. Вайслейб

Рассматриваемая задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений путем использования процедуры факторизации. Подробно исследованы свойства бесконечных систем, указаны пути их решения. Введены формулы для элементов матрицы рассеяния. Для ряда частных случаев приведены упрощенные приближенные расчетные соотношения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Целью настоящей работы является решение задачи о прохождении симметричных магнитных волн через скачкообразное сужение поперечного сечения круглого волновода (рис. 1а). Эта геометрическая структура находит разнообразное применение в технике миллиметрового диапазона волн в качестве составной части систем фильтрации, фазовращателей, запредельных аттенюаторов и др. [1, 2].

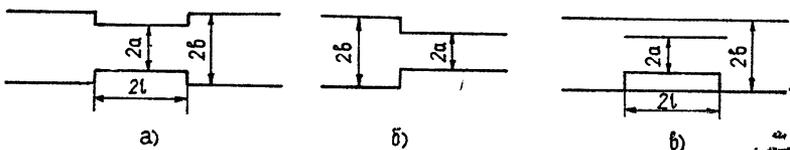


Рис. 1. Геометрия задачи.

С математической точки зрения задача сводится к решению системы связанных интегральных уравнений, подобной системе, возникающей в задачах для скачка поперечного сечения круглого волновода (рис. 1б) [3] и коаксиального кольца в волноводе (рис. 1в) [4]. С другой стороны, при  $l=0$  рассматриваемая структура превращается в бесконечно тонкую диафрагму. Таким образом, анализ дифракции электромагнитных волн на скачкообразном сужении поперечного сечения круглого волновода представляет как теоретический, так и практический интерес.

Пусть в положительном направлении оси  $z$  круглого волновода радиуса  $b$  распространяется магнитная волна типа  $H_{0N}$ , описываемая магнитной функцией Герца  $\Pi_i(r, z) = A J_0 \left( \nu \frac{r}{b} \right) e^{ihz}$  ( $h = \sqrt{k^2 - \nu^2/b^2}$ ,  $\nu \equiv \nu_N$ ). Полное поле в системе определяется функцией  $\Pi_t(r, z) = \Pi_i(r, z) + \Pi(r, z)$ . Функция  $\Pi(r, z)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Pi(r, z) = 0 \quad (1)$$

внутри волновода, а на его стенках — граничным условиям, вытекающим из требования обращения в нуль азимутальной составляющей напряженности электрического поля  $E_\varphi = -ik\rho \frac{\partial \Pi_t(r, z)}{\partial r}$  ( $\rho = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$  — волновое сопротивление среды):

$$\frac{\partial \Pi(r, z)}{\partial r} = A \frac{\nu}{b} J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) e^{ihz}, \quad r = a, \quad |z| < l; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Pi(r, z)}{\partial r} = 0, \quad r = b, \quad |z| > l; \quad (3)$$

$$\Pi(r, \pm l) = -AJ_0\left(\nu \frac{r}{b}\right) \exp(\pm ihl), \quad b > r > a. \quad (4)$$

При  $z \rightarrow \pm \infty$  поведение  $\Pi(r, z)$  подчиняется условию излучения ( $\text{Im} k > 0$ ), а вблизи изломов граничной поверхности — условию Мейк-снера, которое мы запишем в виде

$$\frac{\partial \Pi_t(r, z)}{\partial r} \sim (|z| - l)^{2/3}, \quad z \rightarrow \pm (l + 0), \quad r = a. \quad (5)$$

Итак,  $\Pi(r, z)$  должна быть найдена из решения смешанной краевой задачи, и это решение определяется условиями (1)–(5) единственным образом.

Решение задачи проведем методом Винера—Хопфа в модификации Джонса и в этой связи сделаем несколько общих замечаний. Метод факторизации, как правило, дает решение волноводных задач в замкнутой форме в тех случаях, когда граничными поверхностями служат коаксиальные полубесконечные цилиндры [5]. Наличие торцевых границ в структурах типа рис. 1 ведет к появлению дополнительных неизвестных функций в соответствующих функциональных уравнениях. В этих условиях метод факторизации является средством переформулировки исходных граничных задач. Именно, он позволяет получить бесконечные системы линейных алгебраических уравнений с матрицами коэффициентов, порождающих вполне непрерывные операторы и допускающих эффективное решение либо по методу Пикара (см., например, [3]), либо по методу редукции. Очевидна связь такого подхода с решением операторных уравнений путем неполного обращения оператора.

Определим преобразованную по Фурье функцию:

$$\Pi(r, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(r, z) e^{i\omega z} dz = e^{-i\omega l} \Pi_-(r, \omega) + \Phi(\omega) + e^{i\omega l} \Pi_+(r, \omega),$$

$$\Pi_-(r, \omega) = \int_{-\infty}^0 \Pi(r, z - l) e^{i\omega z} dz, \quad (6)$$

$$\Pi_+(r, \omega) = \int_0^{\infty} \Pi(r, z + l) e^{i\omega z} dz,$$

$$\Phi(r, \omega) = \int_{-l}^l \Pi(r, z) e^{i\omega z} dz.$$

Подвергнув уравнение (1) преобразованию Фурье и учитывая граничное условие (2), найдем для области  $|z| < a$

$$\Pi(r, \omega) = - \left[ e^{-i\omega l} \Pi'_-(a, \omega) + e^{i\omega l} \Pi'_+(a, \omega) + 2A \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin(\omega + h) l}{(\omega + h) b} \right] \frac{J_0(\nu r)}{\nu J_1(\nu a)}. \quad (7)$$

В областях  $z > l$  и  $z < -l$ ,  $r > a$  функции  $\Pi_{\pm}(r, \omega)$  удовлетворяют неоднородным уравнениям Бесселя

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + v^2 \right) \Pi_{\pm}(r, \omega) = \mp i\omega \Pi(r, \pm l) \pm \frac{\partial \Pi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm l}, \\ v = \sqrt{k^2 - \omega^2}.$$

Заменим здесь  $\omega$  на  $-\omega$  и подставим в каждое соотношение значения  $\Pi(r, \pm l)$  из граничного условия (4). Образуя разность полученных уравнений и учитывая условие (3), запишем решение в виде

$$\Pi_{\pm}(r, \omega) - \Pi_{\pm}(r, -\omega) = - \left[ \Pi'_{\pm}(a, \omega) - \Pi'_{\pm}(a, -\omega) \mp \right. \\ \mp 2i\omega A \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \frac{\exp(\pm ihl)}{(\omega^2 - h^2) b} \left. \right] \frac{J_0(\nu r) N_1(\nu b) - J_1(\nu b) N_0(\nu r)}{\nu [J_1(\nu a) N_1(\nu b) - J_1(\nu b) N_1(\nu a)]} \mp \\ \mp 2i\omega A J_0 \left( \nu \frac{r}{b} \right) \frac{\exp(\pm ihl)}{\omega^2 - h^2}. \quad (8)$$

При  $|z| > l$  функция  $\Pi(r, z)$  должна быть непрерывна:  $\Pi(a-0, z) = \Pi(a+0, z)$ . Для трансформант Фурье отсюда получаем  $\Pi_{\pm}(a-0, \omega) = \Pi_{\pm}(a+0, \omega)$ . Подставив в последнее равенство соответствующие их выражения (7), находим — после группировки подобных членов — искомые функциональные уравнения:

$$L(\omega) \left[ \Pi'_{\pm}(a, \omega) \mp iA \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \frac{\exp(\pm ihl)}{(\omega + h) b} \right] + f^{1,2}(\omega) = -D_{\mp}(\omega), \\ f^{1,2}(\omega) = M(\omega) \left[ \Pi'_{\pm}(a, -\omega) \pm iA \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \frac{\exp(\pm ihl)}{(\omega - h) b} \right] \mp iA J_0 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \times \\ \times v^2 a \frac{\exp(\pm ihl)}{\omega \pm h} + \frac{J_0(\nu a)}{J_1(\nu a)} \nu a \exp(\mp i\omega L) \left[ \Pi'_{\mp}(a, \omega) \pm iA \nu J_1 \times \right. \\ \left. \times \left( \nu \frac{a}{b} \right) \frac{\exp(\mp ihl)}{(\omega + h) b} \right], \quad L = 2l, \\ D_{\mp}(\omega) = \exp(\mp i\omega l) \Phi(\omega) + \exp(\mp i\omega L) \times \\ \times \Pi_{\mp}(a-0, \omega) + \Pi_{\pm}(a+0, -\omega) \mp iA J_0 \left( \nu \frac{a}{b} \right) v^2 a \frac{\exp(\pm ihl)}{\omega \mp h}, \\ L(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{J_1(\nu b)}{J_1(\nu a) [J_1(\nu a) N_1(\nu b) - J_1(\nu b) N_1(\nu a)]}, \\ M(\omega) = \nu a \frac{J_0(\nu a) N_1(\nu b) - J_1(\nu b) N_0(\nu a)}{J_1(\nu a) N_1(\nu b) - J_1(\nu b) N_1(\nu a)},$$



## 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения (9) относятся к классу обобщенных уравнений типа Винера—Хопфа, и для их дальнейшего преобразования необходимо факторизировать функцию  $L(\omega)$ . Факторизация этой функции выполняется методом бесконечных произведений и подробно описана в [3]. Здесь мы приведем лишь окончательные формулы:

$$L(\omega) = L_+(\omega) L_-(\omega), \quad L_-(\omega) = L_+(-\omega),$$

$$L_+(\omega) = \sqrt{L(0)} \exp\left(-\frac{i\omega a T}{\pi}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \omega/\omega_n^b}{(1 + \omega/\omega_n^a)(1 + \omega/\omega_n)},$$

$$L(0) = \frac{2}{\pi} \frac{J_1(kb)}{J_1(ka) [J_1(ka) N_1(kb) - J_1(kb) N_1(ka)]},$$

$$T = \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a} - 1\right) \ln \left(\frac{b}{a} - 1\right), \quad (10)$$

$$L_+(\omega) = O(|\omega|^{1/2}), \quad |\omega| \rightarrow \infty, \quad L_+(\omega) = \sqrt{L(0)} \left\{ 1 + \omega \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\omega_n^b} - \frac{1}{\omega_n^a} - \frac{1}{\omega_n} \right) - i \frac{aT}{\pi} \right] + O(\omega^2) \right\},$$

$\omega_n^a$ ,  $\omega_n^b$  и  $\omega_n$  — соответственно продольные волновые числа волноводов радиусов  $a$ ,  $b$  и коаксиального ( $a < r < b$ ).

Образум с помощью интеграла типа Коши функции  $f_{\pm}^{1,2}(\omega)$ , регулярные в верхней и нижней полуплоскостях,

$$f_{\pm}^{1,2}(\omega) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\pm}^{1,2}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega',$$

и, используя формулы (10), приведем уравнения (9) к виду

$$L_+(\omega) \left[ \Pi'_+(a, \omega) - iA \nu J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) \frac{e^{ihl}}{(\omega+h)b} \right] + f_+^1(\omega) = -f_-^1(\omega) - \frac{D_-(\omega)}{L_-(\omega)}; \quad (11)$$

$$L_-(\omega) \left[ \Pi'_-(a, \omega) + iA \nu J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) \frac{e^{-ihl}}{(\omega+h)b} \right] - iA \nu J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) L_+(h) \times \\ \times \frac{e^{-ihl}}{(\omega+h)b} + f_-^2(\omega) = -f_+^2(\omega) - \frac{D_+(\omega)}{L_+(\omega)} - iA \nu J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) L_+(h) \frac{e^{-ihl}}{(\omega+h)b}.$$

Левая часть уравнения (11) регулярна в верхней полуплоскости, правая — в нижней. Поскольку из условия (5) и теорем абелева типа для преобразования Фурье вытекают оценки

$$\Pi'_i(a_1\omega) = O(|\omega|^{-5/3}), \quad e^{\mp i\omega l} \Phi(\omega) = O(|\omega|^{-1}) \quad (|\omega| \rightarrow \infty),$$

уравнение (11) в соответствии с обобщенной теоремой Лиувилля эквивалентно интегральному уравнению:

$$L_+(\omega) \left[ \Pi'_+(a_1\omega) - iA \nu J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) \frac{e^{ihl}}{(\omega+h)b} \right] + f_+^1(\omega) = 0. \quad (11a)$$

Точно так же уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \Delta_-(\omega) \left[ \Pi'_-(a, \omega) \pm iA \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \frac{e^{-ihl}}{\omega + h} \right] + f_-^2(\omega) = \\ = iA \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) L_+(h) \frac{e^{-ihl}}{(\omega + h)b}. \end{aligned} \quad (12a)$$

Заменим в (11а)  $\omega'$  на  $-\omega'$ , в (12а)  $\omega$  на  $-\omega$  и образуем сумму и разность полученных соотношений. В результате мы приходим к двум независимым интегральным уравнениям, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию:

$$\begin{aligned} L_+(\omega) Y_{1,2}(\omega) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' + \omega} \frac{1}{L_+(\omega')} \left\{ \left[ M(\omega') \pm \nu a \frac{J_0(\nu a)}{J_1(\nu a)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(i\omega' \Delta) \right] Y_{1,2}(\omega') + iA J_0 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \frac{\nu^2 a}{\omega' - h} (e^{-ihl} \pm e^{ihl}) \right\} = \\ = -iA \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) L_+(h) \frac{e^{-ihl}}{(\omega - h)b}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$Y_{1,2}(\omega) = \Pi'_-(a_1 - \omega) \pm \Pi'_+(a_1, \omega) - iA \frac{\nu}{b} J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) \left( \frac{e^{-ihl}}{\omega - h} \pm \frac{e^{ihl}}{\omega + h} \right).$$

Функции  $Y_{1,2}(\omega)$  регулярны в верхней полуплоскости всюду, за исключением точки  $\omega = h$ , в которой они имеют простые полюсы.

Нетрудно видеть, что при замыкании контура интегрирования в верхней полуплоскости вычеты в указанных полюсах в точности компенсируют вклад от второго члена в фигурных скобках (13). Поэтому (13) равносильны более простым уравнениям

$$X_{1,2}(\omega) - \frac{1}{2\pi i} \int_D K_{1,2}(\omega, \omega') X_{1,2}(\omega') d\omega' = \frac{1}{(\omega - h)b} \quad (13a)$$

относительно функций

$$X_{1,2}(\omega) = -iA \nu J_1 \left( \nu \frac{a}{b} \right) e^{-ihl} L_+(h) \Delta_+(\omega) Y_{1,2}(\omega).$$

Здесь контур  $D$  охватывает полюсы ядер  $K_{1,2}(\omega, \omega')$ , лежащие в верхней полуплоскости, сами же ядра равны

$$K_{1,2}(\omega, \omega') = \frac{[L_+(\omega')]^{-2}}{\omega' + \omega} \left[ M(\omega') \pm \nu a \frac{J_0(\nu a)}{J_1(\nu a)} e^{i\omega' L} \right].$$

Вычисляя вычеты в полюсах  $K_{1,2}(\omega, \omega')$ , получим окончательно

$$\begin{aligned} X_{1,2}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\omega) X_{1,2}(\omega_n) \pm \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\omega) \times \\ \times \exp(i\omega_n^a L) X_{1,2}(\omega_n^a) = \frac{1}{(\omega - h)b}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$b_n(\omega) = \frac{\mu_n^2 L_+^{-2}(\omega_n) J_1^2\left(\mu_n \frac{b}{a}\right)}{\omega_n(\omega + \omega_n) a^2 \left[ J_1^2\left(\mu_n \frac{b}{a}\right) - J_1^2(\mu_n) \right]},$$

$$c_n(\omega) = \frac{\nu_n^2 L_+^{-2}(\omega_n^a)}{\omega_n^a (\omega + \omega_n^a) a^2},$$

$\mu_n$  — корни дисперсионного уравнения коаксиального волновода.

С целью проверки полученных уравнений устремим здесь  $L$  к бесконечности. Тогда (13 а) переходит в

$$X_{1,2}(\omega) - \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{d\omega'}{\omega' + \omega} \frac{M(\omega')}{L_+^2(\omega')} X_{1,2}(\omega') = \frac{1}{(\omega - h)b},$$

т. е. в уравнение, возникающее в задаче о дифракции на скачке поперечного сечения волновода [3]. При этом

$$P_+^{\prime}(a, \omega) = -iA \nu J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) \frac{1}{(\omega + h)b}.$$

С другой стороны, при  $L = 0$  (13 а) и (14) переходят в уравнения для бесконечно тонкой диафрагмы.

Полагая в (14) последовательно  $\omega = \omega_k^a$  и  $\omega = \omega_k$ , мы получим бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $X_{2n}^{1,2} = X_{1,2}(\omega_n)$  и  $X_{2n-1}^{1,2} = X_{1,2}(\omega_n^a)$  ( $n, k = 1, 2 \dots$ ):

$$X_m^{1,2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{nm}^{1,2} X_n^{1,2} = g_m,$$

$$g_m = \begin{cases} [(\omega_m^a - h)b]^{-1}, & m = 2k - 1, \\ [(\omega_m - h)b]^{-1}, & m = 2k \end{cases}, \quad (15)$$

$$d_{2n-1, m}^{1,2} = \begin{cases} \pm c_n(\omega_m^a) \exp(i\omega_n^a L), \\ b_n(\omega_n^a) \end{cases}$$

$$d_{2n, m}^{1,2} = \begin{cases} \pm c_n(\omega_m) \exp(i\omega_n L), & m = 2k - 1, \\ b_n(\omega_m), & m = 2k. \end{cases}$$

### 3. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ

Из асимптотического представления  $L_+(\omega)$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$  следует, что системы (15) принадлежат к классу систем с ограниченным (а значит, и вполне непрерывным) оператором в бесконечномерном комплексном евклидовом пространстве  $l_2$  и, следовательно, могут быть решены методом редукции. Однако вопрос о практической реализации вычислений нуждается в особом рассмотрении.

Матричные элементы  $d_{n, 2m-1}^{1,2}$  содержат значительно малые (при  $n \rightarrow \infty$ ) множители, в то время как элементы  $d_{n, 2m}^{1,2}$  убывают с ростом  $n$  по алгебраическому закону:  $d_{n, 2m}^{1,2} = O(n^{-1})$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому сходимость решений систем, полученных стандартным методом редукции,

оказывается крайне медленной. Иными словами, прямой переход от (15) к редуцированной системе малоэффективен. Ситуация совершенно аналогична возникающей в задаче о дифракции на скачке поперечного сечения волновода [5]. Тем не менее указанную трудность можно успешно обойти.

С этой целью заметим, что при  $|\omega_n| \gg 1$  функция факторизации  $L_+(\omega_n)$  допускает асимптотическое представление

$$L_+(\omega_n) = \sqrt{\frac{2n\pi}{\delta}}, \quad \delta = \frac{b}{a} - 1. \quad (16)$$

В частности, если в коаксиальном волноводе  $a < r < b$  нет ни одной распространяющейся симметричной магнитной волны (для этого необходимо выполнение условия  $\frac{ka\delta}{\pi} < 1$ ), формулу (16) для  $L_+(\omega_n)$  можно применять уже при  $n=1$  с точностью не хуже одного-двух процентов по модулю и двух-четырёх процентов по фазе. В таком случае оператор, порожденный первой суммой в (14), оказывается оператором сжатия с нормой  $N < 1/2$ . Это обстоятельство вытекает из известного неравенства Гильберта

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m} < \pi, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^2 = 1.$$

Поэтому к системе применим метод последовательных приближений, причем ряд последовательных приближений оказывается быстро сходящимся. Если же неравенство  $\frac{ka\delta}{\pi} < 1$  выполняется только при  $n > M > 1$

(в коаксиальном волноводе распространяются волны вплоть до  $H_{0M}$  включительно), то необходимо вначале перенести в правую часть (15) первые  $R = M + Q + P$  уравнений, считая соответствующие  $x_n^{1,2}$  известными. Здесь  $Q$  — число распространяющихся волн в волноводе радиуса  $a$ ;  $P$  определяется заданной точностью решения. К оставшейся системе вновь применим метод последовательных приближений, а для определения величин  $x_1^{1,2}, \dots, x_{M+Q+P}^{1,2}$  необходимо затем решить конечную систему. Укажем здесь, что возникающие ряды последовательных приближений удается просуммировать в замкнутом виде, если воспользоваться результатами работы [6].

Таким образом, предлагаемая методика наиболее эффективна в случае умеренных скачков ( $\frac{ka\delta}{\pi} \sim 1$ ) и достаточно больших значениях  $l$  ( $kl \gg 1$ ). Ниже мы проиллюстрируем описанную процедуру на некоторых примерах.

#### 4. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

В соответствии с формулой обращения Фурье напряженность электрического поля следующим образом выражается через введенные функции  $X_{1,2}(\omega)$ :

$$E_\varphi = -\frac{k\rho v}{4\pi} J_1\left(\nu \frac{a}{b}\right) L_+(h) e^{-ihl} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(vr)}{J_1(va)} \{ \exp[i\omega(l+z)] \times \\ \times [X_1(\omega) + X_2(\omega)] + \exp[-i\omega(z-l)] [X_1(\omega) - X_2(\omega)] \} \frac{d\omega}{L_+(\omega)}, \quad (17)$$

и представления  $E_\varphi$  в виде рядов по собственным функциям регулярного волновода получаются из (17) путем замыкания контура интегрирования в подходящих полуплоскостях с последующим вычислением вычетов в полюсах подынтегрального выражения. В дальнейшем нас будут интересовать значения  $E_\varphi$  только в областях  $z < -l$  и  $z > l$ . Представим исследуемую структуру в виде эквивалентного многополюсника (рис. 2), свойства которого полностью описываются матрицей рассеяния. Ее элементы имеют вид

$$s_{ik} = - \frac{L_+(\omega_i^b) L_+(\omega_k^b) J_1\left(\nu_1 \frac{a}{b}\right) J_1\left(\nu_k \frac{a}{b}\right)}{2 \sqrt{\omega_i^b \omega_k^b} b J_0(\nu_1) J_0(\nu_k)} [X_1(-\omega_k^b) \pm X_{1,2}(-\omega_k^b)]. \quad (18)$$

Здесь верхние знаки относятся к области  $z < -l$ , нижние — к области  $z > l$ .

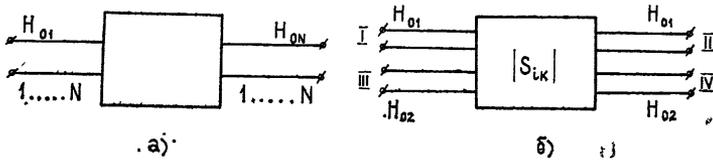


Рис. 2. Эквивалентные многополюсники.

Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие практический интерес. Пусть в волноводе радиуса  $b$  может распространяться только волна  $H_{01}$ , в то время как волновод радиуса  $a$  — запредельный для волн типа  $H_{0N}$ . Коаксиальный волновод  $a < r < b$  здесь и далее будем считать запредельным:  $\nu_1 < kb < \nu_2$ ,  $ka < \nu_1$ ,  $\frac{ka\delta}{\pi} < 1$  (запредельный аттенюатор). В соответствии со сказанным выше уравнения (14) принимают вид

$$X_{1,2}(\omega) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{1,2}(\omega_n)}{n + q(\omega)} \mp \frac{\nu_1^2 e^{-\gamma L} X_{1,2}(i\gamma)}{\gamma(\gamma - i\omega) a^2 L_+^2(i\gamma)} = \frac{1}{(\omega - h)b}, \quad \gamma = |\omega_1^a|, \quad q(\omega) = -i \frac{\delta \omega a}{\pi}, \quad (14a)$$

причем мы пренебрегли всеми не распространяющимися в волноводе радиуса  $a$  волнами, кроме первой. Тогда для коэффициентов отражения и прохождения в первом приближении находим

$$s_{11} = \tilde{s}_{22} = s_{22}^0 \left[ 1 + \frac{q_1}{\pi} \psi'(1 - q_1) \right], \quad s_{22}^0 = \left[ \frac{L_+(\omega_1^b) J_1\left(\nu_1 \frac{a}{b}\right)}{\sqrt{2} \omega_1^b b J_0(\nu_1)} \right]^2, \\ q_1 = q(\omega_k^b), \\ s_{21} = \tilde{s}_{21}^0 e^{-\gamma L}, \quad \tilde{s}_{21}^0 = s_{21}^0 \left[ 1 + \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} \frac{\psi(1 - q_2) - \psi(1 + q_1)}{2\pi} \right], \\ s_{21}^0 = \frac{\nu_1 J_1\left(\nu_1 \frac{a}{b}\right) L_+(\omega_1^b)}{\sqrt{\omega_1^a \omega_1^b} (\omega_1^a - \omega_1^b) ab J_0(\nu_1) L_+(\omega_1^a)}, \quad q_2 = q(\omega_1^a), \quad (19)$$

$\psi^n(z)$  — полигамма-функции,  $\tilde{s}_{22}$  и  $\tilde{s}_{21}$  — коэффициенты отражения и прохождения при возбуждении аксиально-симметричного сочленения двух круглых волноводов, подробно исследованные в [3, 5].

Формулы (19) имеют ясный физический смысл и могут быть получены также методами теории СВЧ цепей, если известны элементы  $\tilde{s}_{22}$ ,  $\tilde{s}_{21}$ . Уточнение формул (19) на основе уравнений (14), (14а) и (15) целесообразно лишь при расчете прохождения волн через «толстую» диафрагму и проводится вполне элементарным путем; соответствующие результаты мы здесь не приводим ввиду их громоздкости.

Пусть теперь оба волновода работают в одномодовом режиме:  $\nu_1 < ka < kb < \nu_2$  (фазовращатель). Наибольший интерес представляет частотно-фазовая характеристика коэффициента передачи, равная (в том же приближении)

$$\varphi(\omega) = 2(\omega_1^a l + \arg s_{21}) \approx 2[\omega_1^a l + \arg L_+(\omega_1^b) - \arg L_+(\omega_1^a)]. \quad (20)$$

При выводе этой формулы мы учли, что для обычно применяющихся размеров волноводов коэффициент отражения в малый волновод при возбуждении аксиально-симметричного сочленения по модулю много меньше единицы. Первый член в (20) равен электрической длине фазовращателя для волны  $H_{01}$ , остальные описывают поправку, обусловленную скачкообразным изменением поперечного сечения волновода.

В качестве третьего примера приведем формулы для расчета структуры с  $\nu_2 < kb < \nu_3$ ,  $\nu_1 < ka < \nu_2$  и  $\delta \ll 1$  (рис. 2б). Этот случай реализуется в некоторых типах фильтров разделения стволов волноводных линий связи [2]. Коэффициенты отражения, прохождения и трансформации равны соответственно:

$$s_{11} = \tilde{s}_{22} + \frac{\tilde{s}_{11} \tilde{s}_{21}^2}{\eta} \exp(2i\omega_1^a L), \quad s_{21} = \frac{\tilde{s}_{21}^2}{\eta} \exp(i\omega_1^a L), \quad (21)$$

$$s_{33} = \tilde{s}_{33} + \frac{\tilde{s}_{13}^2 \tilde{s}_{11}}{\eta} \exp(2i\omega_1^a L), \quad s_{43} = \frac{\tilde{s}_{13}^2}{\eta} \exp(i\omega_1^a L),$$

$$s_{13} = \tilde{s}_{23} + \frac{\tilde{s}_{11} \tilde{s}_{21} \tilde{s}_{13}}{\eta} \exp(2i\omega_1^a L), \quad s_{41} = \frac{\tilde{s}_{21} \tilde{s}_{13}}{\eta} \exp(i\omega_1^a L),$$

$$\eta = 1 - \tilde{s}_{11}^2 \exp(2i\omega_1^a L), \quad \tilde{s}_{11} = - \left[ \frac{\nu_1}{\sqrt{2} \omega_1^a a L_+(\omega_1^a)} \right]^2 \left[ 1 - \frac{q_2}{\pi} \psi'(1+q_2) \right],$$

$$\tilde{s}_{33} = \left[ \frac{L_+(\omega_2^b) J_1\left(\nu_2 \frac{a}{b}\right)}{\sqrt{2} \omega_2^b b J_0(\nu_2)} \right]^2 \left[ 1 + \frac{q_3}{\pi} \psi'(1-q_3) \right], \quad q_3 = q(\omega_2^b) \text{ и т. д.}$$

Входящая в знаменатель элементов  $s_{ik}$  величина  $\eta$  указывает на резонансные свойства структуры, выраженные, однако, весьма слабо ввиду малости величины  $|\tilde{s}_{11}|$ .

Мы видим, что все величины определяются через одну функцию  $L_+(\omega)$ . Численные расчеты по формулам (19)–(21) могут быть проведены с помощью составленной программы для  $L_+(\omega)$ , а также — в достаточно широком диапазоне значений параметров задачи — на основе

графиков [3]. Отметим в заключение, что приведенные результаты позволяют провести качественный анализ структуры и представляют собой удобную основу для численных расчетов конкретных устройств СВЧ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Б. Ваганов, Р. Ф. Матвеев, В. В. Мериакри, Многоволновые волноводы со случайными неоднородностями, изд. Сов. радио, М., 1972.
2. Линейные регенерационные усилители волноводных линий связи на миллиметровых волнах, под ред. А. А. Визеля, Связьиздат, М., 1972.
3. Ю. В. Вайслейб, Г. Н. Зеленский, Л. Н. Куликов, Радиотехника и электроника, **20**, 1 (1975).
4. Ю. В. Вайслейб, Э. Г. Кирхейзен, Радиотехника и электроника (в печати).
5. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1967.
6. Ю. В. Вайслейб, Э. Г. Кирхейзен, Л. Н. Куликов, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, **17**, 8 (1974).
7. Ю. В. Вайслейб, А. З. Фрадин, Доклады VI Всесоюзного Симпозиума по дифракции и распространению волн, т. 2, Москва—Ереван, 1973.
8. Ю. В. Вайслейб, Изв. высш. уч. зав. — Математика, **12** (1975).

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию  
17 января 1975 г.,  
после доработки  
15 сентября 1975 г.

#### DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY JUMP-LIKE NARROWING OF TRANSVERSE SECTION OF A CIRCULAR WAVEGUIDE

*Yu. V. Vaysleyb*

The problem considered is reduced to the infinite system of linear algebraic equations by using the factorization procedure. The properties of infinite systems are investigated in detail. The ways of their solutions are given. The formulas are obtained for the scattering matrix elements. Simplified approximate expressions for calculations are given for some particular cases.

---

УДК 621.372.88

## РАСЧЕТ СЛОИСТОЙ МЕТАЛЛО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

*Н. Ф. Карушкин, А. Т. Фиалковский*

Получено решение задачи об отражении волноводной волны от полуграниченной слоистой металло-диэлектрической структуры, расположенной в прямоугольном волноводе. С помощью этого решения построена эквивалентная схема слоистого распределенного диода, который может использоваться для управления СВЧ мощностью. Вариационный принцип позволил получить простые расчетные формулы.

Для управления мощностью в коротковолновой части СВЧ диапазона применяются полупроводниковые диоды распределенного типа со слоистой  $p-i-n$ -структурой [1]. Увеличение активной среды полупроводникового диода позволяет осуществить взаимодействие с СВЧ полем по всему объему и приводит к увеличению рабочей полосы и увеличению коммутируемой импульсной и средней мощности [2]. С целью уменьшения времени переключения и увеличения коммутируемой мощности целесообразно выполнять переключатель в виде многослойной  $p-i-n$ -структуры, расположенной в некотором сечении волновода.

На рис. 1 показано поперечное сечение прямоугольного волновода в том месте, в котором расположена слоистая структура, а также геометрические размеры задачи. Целью настоящей работы является расчет электродинамических характеристик такого переключения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для построения эквивалентной схемы слоистого диода и определения ее параметров решим сначала вспомогательную задачу об отражении волноводной волны  $H_{01}$  от полубесконечной слоистой структуры (рис. 1). На рисунке темные полосы означают металлические слои, светлые — диэлектрические. Характеристики рассеяния такой структуры можно получить из решения задачи об отражении волны  $H_{01}$  от полубесконечной металлической ступеньки в прямоугольном волноводе, узкое сечение которого заполнено сплошь диэлектриком (рис. 2).

Составляющие электрических и магнитных полей будем представлять в виде

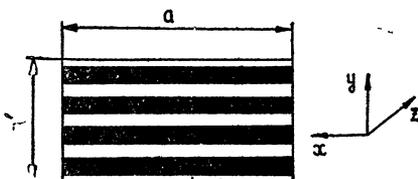


Рис. 1. Слоистая металло-диэлектрическая структура.

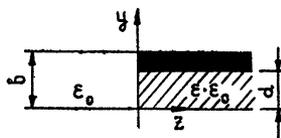


Рис. 2.



$$H_{y,z}(x, y, z) = H_{y,z}(y, z) \cos \frac{\pi x}{a}, \quad H_x(x, y, z) = \psi(y, z) \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (1)$$

$$E_{y,z}(x, y, z) = E_{y,z}(y, z) \sin \frac{\pi x}{a}, \quad E_x(x, y, z) = \varphi(y, z) \cos \frac{\pi x}{a}.$$

Эти составляющие должны удовлетворять граничным условиям на границах раздела сред и волновым уравнениям с волновым числом  $k_0$  в широком и  $k$  в узком волноводе:

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad k = \sqrt{\epsilon \mu} k_0. \quad (2)$$

Выражая составляющие полей через функции  $\varphi, \psi$ , получим при  $z > 0$

$$g^2 H_y = -i \frac{k}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\pi}{a} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad g^2 E_y = -\frac{\pi}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + ik\rho \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (3)$$

$$g^2 H_z = i \frac{k}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\pi}{a} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad g^2 E_z = -\frac{\pi}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - ik\rho \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Здесь

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \rho_0, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad g^2 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}. \quad (4)$$

При  $z < 0$  имеем такие же выражения, но с заменой

$$k \rightarrow k_0, \quad \rho \rightarrow \rho_0, \quad g \rightarrow g_0 = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = h. \quad (5)$$

С помощью функций  $\varphi, \psi$  будем описывать рассеянное поле, а падающее выразим через функцию (волна  $H_{01}$  набегаёт из  $z \rightarrow -\infty$ )

$$\psi^i(x, y) = a_0 e^{ihz}. \quad (6)$$

При этом полное поле при  $z < 0$  будем определять через две скалярные функции:

$$\psi^t(y, z) = \psi^i(y, z) + \psi(y, z), \quad \varphi^t(y, z) = \varphi(y, z). \quad (7)$$

При  $z > 0$

$$\psi^t(y, z) = \psi(y, z), \quad \varphi^t(y, z) = \varphi(y, z). \quad (8)$$

Для решения задачи нужно определить функции  $\varphi, \psi$ .

## 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функции  $\varphi, \psi$  будем представлять в виде разложений в ряды Фурье:

$$\varphi(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{h_n z}, \quad \psi(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{h_n z} \quad (9)$$

при  $z < 0$  и

$$\varphi(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \sin \frac{n\pi y}{a} e^{-g_n z}, \quad \psi(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} \cos \frac{n\pi y}{a} e^{-g_n z} \quad (10)$$

при  $z > 0$ . Здесь

$$h_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - h^2}, \quad g_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - g^2}, \quad h_0 = -ih, \quad g_0 = -ig; \quad (11)$$

$$a_n^{(1)} = \frac{2}{b} \int_0^d \varphi(\eta) \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\eta, \quad a_n^{(2)} = \frac{2}{d} \int_0^d \varphi(\eta) \sin \frac{n\pi\eta}{d} d\eta. \quad (12)$$

Если ввести обозначение

$$E_y(y, -0) + E_y^i(y, -0) = E_y(y, +0) = f(y) \quad (13)$$

и учесть граничные условия при  $z = 0$ ,  $0 < y < d$ , то можно прийти к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & i \frac{1}{2} \int_0^d \left( \frac{h}{b} + \frac{g}{d} \right) f(\eta) d\eta + \int_0^d \left[ h^2 f(\eta) + \frac{\pi}{a} \varphi'(\eta) \right] d\eta \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi\eta}{b}}{h_n b} + \int_0^d \left[ g^2 f(\eta) + \frac{\pi}{a} \varphi'(\eta) \right] d\eta \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi y}{d} \cos \frac{n\pi\eta}{d}}{g_n d} = -ik_0 \rho_0 a_0, \\ & \int_0^d \frac{\pi}{a} f(\eta) d\eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi\eta}{b}}{h_n b} + \int_0^d \frac{\pi}{a} f(\eta) d\eta \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi y}{d} \cos \frac{n\pi\eta}{d}}{g_n d} - \int_0^d \varphi'(\eta) d\eta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{k_0 b}{n\pi} \right)^2 \right] \times \\ & \times \frac{\cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi\eta}{b}}{h_n b} - \int_0^d \varphi'(\eta) d\eta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{k d}{n\pi} \right)^2 \right] \times \\ & \times \frac{\cos \frac{n\pi y}{d} \cos \frac{n\pi\eta}{d}}{g_n d} = B, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $B$  — некоторая константа.

Таким образом, решение нашей задачи свелось к системе из двух интегральных уравнений первого рода (14). Заметим, что наличие диэлектрика в одном из волноводов не позволяет свести эту задачу к скалярной. При  $\varepsilon = 1$  получим известные результаты (см., например, [3]). Заметим, что системы интегральных уравнений в задачах об узких щелях могут получиться и в других случаях [4].

## 3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Для конкретной физической задачи должно выполняться условие

$$d/\lambda_e \ll 1, \quad (15)$$

где  $d$  — толщина диэлектрического слоя,  $\lambda_e$  — длина волны в пространстве, заполненном диэлектриком. При этом в уравнениях (14) с относительной погрешностью  $(d/\lambda_e)^2$  полагаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x) \cos(n\pi \xi)}{h_n b} \rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x) \cos(n\pi \xi)}{n} = K(\xi, x), \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x) \cos(n\pi \xi)}{g_n d} \rightarrow K(\xi, x),$$

причем функцию  $K(\xi, x)$  можно представить в свернутом виде:

$$2\pi K(\xi, x) = \ln \frac{1}{\left| \sin \frac{\pi(\xi + x)}{2} \right|} + \ln \frac{1}{\left| \sin \frac{\pi(\xi - x)}{2} \right|}. \quad (17)$$

Теперь интегральные уравнения (14) после некоторых преобразований можно переписать в виде

$$\int_{-d}^d F(\eta) \left[ K\left(\frac{\pi(y - \eta)}{2b}\right) + K\left(\frac{\pi(y - \eta)}{2d}\right) \right] d\eta =$$

$$= \frac{\pi}{k_0^2 a} - i \frac{\rho_0}{k_0} \frac{a_0}{B} - i \frac{1}{4k_0^2 B} \left( \frac{h}{b} + \frac{g}{d} \right) U, \quad (18)$$

$$\int_{-d}^d \left[ \frac{\pi}{a} F(\eta) - \Phi'(\eta) \right] \left[ K\left(\frac{\pi(y - \eta)}{2b}\right) + K\left(\frac{\pi(y - \eta)}{2d}\right) \right] d\eta = 1.$$

Здесь

$$U = \int_{-d}^d f(\eta) d\eta; \quad (19)$$

$$F(\eta) = -\frac{f(\eta)}{2\pi B}, \quad \Phi(\eta) = -\frac{\varphi(\eta)}{2\pi B}; \quad (20)$$

$$K(x) = \ln |\sin x|. \quad (21)$$

Оказывается далее, что можно построить функционалы (см., например, [3])

$$G_1 = \frac{\int_{-d}^d K\left(\frac{\pi(y - \eta)}{2b}\right) F(\eta) F(y) d\eta dy}{\left( \int_{-d}^d F(\eta) d\eta \right)^2}, \quad (22)$$

$$G_2 = - \frac{\int_{-d}^d K \left( \frac{\pi(y-\eta)}{2d} \right) F(\eta) F(y) d\eta dy}{\left( \int_{-d}^d F(\eta) d\eta \right)^2},$$

достигающие экстремума на кривых, являющихся решениями уравнений (14), так что

$$(h^2 G_1 + g^2 G_2) U = -i\pi k_0 \rho_0 (a_0 + b_0^{(1)} - b_0^{(2)}). \quad (23)$$

#### 4. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ

Волна, отраженная в волновод  $z < 0$ , имеет амплитуду

$$b_0^{(1)} = a_0 + \frac{h}{2k_0 \rho_0 b} U, \quad (24)$$

а прошедшая в волновод  $z > 0$  — амплитуду

$$b_0^{(2)} = -\frac{g}{2k_0 \rho_0 d} U. \quad (25)$$

Отсюда

$$a_0 = b_0^{(1)} + \frac{hd}{gb} b_0^{(2)}. \quad (26)$$

Это соотношение является строгим.

Из уравнений (23), (26) получаем выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$r = \frac{\left(1 - \frac{hd}{gb}\right) - i2 \frac{hd}{\pi} \left(\frac{h}{g} G_1 + \frac{g}{h} G_2\right)}{\left(1 + \frac{hd}{gb}\right) - i2 \frac{hd}{\pi} \left(\frac{h}{g} G_1 + \frac{g}{h} G_2\right)}, \quad (27)$$

$$t = \frac{2}{\left(1 + \frac{hd}{gb}\right) - i2 \frac{hd}{\pi} \left(\frac{h}{g} G_1 + \frac{g}{h} G_2\right)}.$$

Отсюда видно, что при  $d \rightarrow 0$

$$r \rightarrow 1, \quad t \rightarrow 2. \quad (28)$$

Это не означает нарушения закона сохранения энергии:  $r$  и  $t$  — коэффициенты отражения и прохождения по току. При  $d \rightarrow 0$  получаем короткое замыкание, так что амплитуда тока отраженной волны равна амплитуде падающей, а вследствие уравнения непрерывности амплитуда тока прошедшей волны должна равняться удвоенной амплитуде падающей. Однако амплитуда напряжения прошедшей волны равна нулю, и, следовательно, волна дальше не распространяется.

Если в качестве пробной функции в функционалах (22) взять простейшую —

$$F(\eta) = \text{const}, \quad (29)$$

то получим

$$G_1 = \frac{3}{2} - \ln(\pi\xi) - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int \ln \left| \frac{\sin \xi(\vartheta - \eta)}{\xi(\vartheta - \eta)} \right| d\eta d\vartheta, \quad (30)$$

$$G_2 = \ln 2, \quad \xi = d/b.$$

На рис. 3 приведена зависимость константы  $G_1$  от  $\xi$ .

На основании формул (27) можно построить эквивалентную схему сочленения волноводов (рис. 4). При этом

$$r = - \frac{Y_1 - (Y_2 + i\omega C)}{Y_1 + (Y_2 + i\omega C)}, \quad (31)$$

$$t = \frac{2Y_2}{Y_1 + (Y_2 + i\omega C)};$$

$$Y_1 = \frac{a/b}{120\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} O_{M^{-1}},$$

$$Y_2 = \frac{a/d}{120\pi} \sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} O_{M^{-1}}, \quad (32)$$

$$C = \frac{a}{1,8\pi^2} \left\{ \left[ 1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 \right] G_1 + \left[ \varepsilon - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 \right] G_2 \right\} n\Phi.$$

Здесь  $a$  — в см,  $Y_1$  и  $Y_2$  — волновые проводимости волноводов.

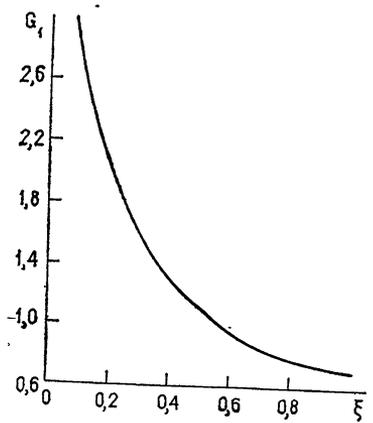


Рис. 3.

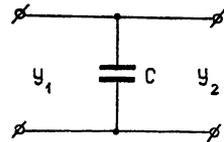
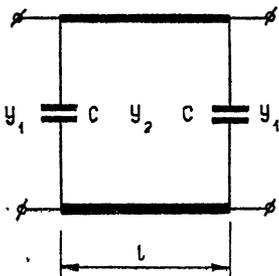


Рис. 4. Эквивалентная схема металло-диэлектрической полуорганизованной структуры.

### 5. СЛОИСТАЯ МЕТАЛЛО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ



Пусть теперь слоистая металло-диэлектрическая структура имеет длину  $l$ . Тогда, пренебрегая взаимодействием высших типов волн в волноводе, получаем эквивалентную схему многослойного волноводного диода (рис. 5). Коэффициент отражения от этой структуры равен

Рис. 5. Эквивалентная схема металло-диэлектрической структуры конечной длины.

$$R = \frac{2\omega C Y_2 - (Y_1^2 + Y_2^2 + \omega^2 C^2) \operatorname{tg}(gl)}{[2\omega C Y_2 + (Y_1^2 + Y_2^2 - \omega^2 C^2) \operatorname{tg}(gl)] - i 2 Y_1 (Y_2 - \omega C \operatorname{tg}(gl))}. \quad (33)$$

Таким образом, построена эквивалентная схема (получены выражения для ее параметров) для слоистой металло-диэлектрической волноводной структуры, которая может применяться для управления СВЧ мощностью в качестве полупроводникового диода распределенного типа.

Формулы (31), (32) выражают параметры эквивалентной схемы через геометрические размеры, длину волны, диэлектрическую проницаемость и некоторые константы  $G_1$  и  $G_2$ . Последние могут быть определены из рис. 3.

В режиме инжекции мы считаем, что диэлектрические слои переходят в металлическое состояние.

С помощью результатов работы можно просто рассчитывать характеристики полупроводникового волноводного переключателя распределенного типа.

Задача решалась в квазистатическом пределе. Переход к статике в формулах (16) дает относительную погрешность порядка  $(d/\lambda_e)^2$ . Пробную функцию в функционалах (22) можно было бы взять из решения соответствующей электростатической задачи, т. е. с учетом особенности. Однако, как показывают численные расчеты, константа (29) дает результаты для функционалов (22), лишь на несколько процентов отличающиеся, если

$$F(\eta) = \frac{1}{(d - \eta)^{1/3}}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. СВЧ устройства на полупроводниковых диодах, сб. под ред. И. В. Мальского, Б. В. Сестрорецкого, изд. Сов. радио, М., 1969.
2. Мортенсон, Амстронг, Боррего, Уайт, Управляющие СВЧ приборы на объемном полупроводнике, сб. Полупроводниковые приборы СВЧ, под ред. Ф. Брэнда, изд. Мир, М., 1972.
3. Ю. Швингер, Зарубежная радиоэлектроника, № 11, 3 (1970).
4. Х. Л. Гарб, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, № 1, 1 (1974).

Поступила в редакцию  
14 апреля 1975 г.

#### CALCULATION OF THE LAYERED METAL-DIELECTRIC FINITE-LENGTH STRUCTURE SITUATED IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

*N. F. Karushkin, A. T. Fialkovskii*

The problem of the reflection of a waveguide wave from a semi-bounded layered metal-dielectric structure situated in a rectangular waveguide is solved. Using this solution the equivalent scheme of a layered disturbed diode used to control UHF power is built. The variational principle permitted simple estimated formulas to be obtained.

УДК 538.56

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ АЗИМУТАЛЬНЫМ ДИПОЛЕМ ГЕРЦА

*Е. Н. Васильев, А. А. Фалунин, А. И. Гореликов*

Методом интегральных уравнений исследуется возбуждение идеально проводящего цилиндра конечной длины электрическим азимутальным диполем в резонансной области частот. Определяется характер наведенных на поверхности цилиндра электрических токов. Выявляется зависимость поля в дальней зоне от размеров цилиндра и положения диполя относительно его кромок. Проведенный анализ позволяет также установить границы параметров, при которых может не учитываться конечность цилиндра в расчетах диаграммы направленности в поперечной плоскости.

### ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] предложен численный метод решения задачи возбуждения идеально проводящих тел вращения произвольной формы. В этом методе граничная задача сводится к серии независимых интегральных уравнений относительно азимутальных гармоник плотности поверхностного тока.

В работах [2] и [3] рассчитывался ток на цилиндре конечной длины при осесимметричном возбуждении. Этим методом определялось распределение тока на конечном цилиндре при возбуждении его осевым и радиальным диполями Герца [4]. В [5] обсуждаются характеристики излучения электрического диполя и вибратора, находящегося вблизи торца цилиндра.

В настоящей работе изучается распределение тока на цилиндре при возбуждении его азимутальными диполями и соответствующие диаграммы направленности. В этом случае интегральное уравнение задачи имеет такой же вид, как и соответствующее уравнение (1) в работе [1], однако правая часть выражается иначе. В координатах вращения, рис. 1, продольная и поперечная составляющие вектора  $\mathbf{J}_m^{\text{перв}} = [n \bar{H}^{\text{перв}}]$  ( $\bar{H}^{\text{перв}}$  — первичное поле) имеют следующий вид:

$$J_{m\varphi}^{\text{перв}} = \frac{I_d}{2} \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) - \sin \theta \frac{\partial S_m}{\partial R} \right] R',$$

$$J_{m\vartheta}^{\text{перв}} = \frac{I_d}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{S_{m-1} - S_{m+1}}{2} \right) R'.$$

Здесь  $I_d$  — момент диполя, штрихами обозначены координаты диполя, без штрихов оставлены координаты точек на теле. Остальные обозначения те же, что и в работах [1, 2]. Функция  $S_m$  и способы ее вычисления исследованы в [6].

Интегральное уравнение решается численно путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений. По найденным азимутальным гармоникам плотности электрического тока достаточно просто вычисляются азимутальные гармоники полей в дальней зоне. Полная диа-

грамма направленности определяется в результате суммирования парциальных полей.

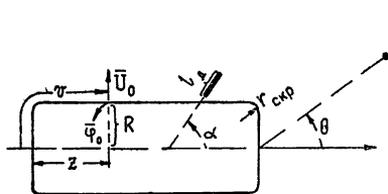


Рис. 1.

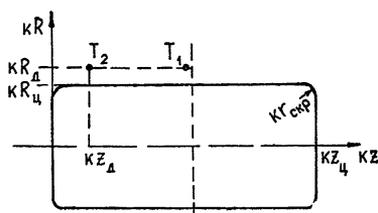


Рис. 2

Рис. 1. К определению величин  $z$ ,  $R$ ,  $\alpha$  и  $\nu$  ( $l_d$ —длина диполя).  
Рис. 2. Основные электрические размеры цилиндров и точки расположения диполя.

В настоящей работе рассмотрено возбуждение четырех цилиндров разной длины, электрический радиус  $kR$  которых равен 1,0 и 3,0. Основные размеры цилиндров и координаты расположения диполей представлены в табл. 1 и на рис. 2. Положение диполей относительно цилиндров отмечено точками  $T_1$  и  $T_2$ . Точка  $T_1$  расположена около середины цилиндра, а  $T_2$ —вблизи кромки. Во всех случаях диполи приподняты над поверхностью цилиндров на высоту  $k\Delta R = 0,78$ . Кромки цилиндров скруглены дугами малого радиуса ( $kr_{cnp} = 0,3$ ).

Таблица 1

Номер цилиндра	Радиус цилиндра $kR$	Длина цилиндра $kz$	Положение диполя			
			точка $T_1$ (вблизи середины цилиндра)		точка $T_2$ (вблизи торца)	
			$kz_d$	$kR_d$	$kz_d$	$kR_d$
1	1,0	18,9	9,45	1,78	3,2	1,78
2	1,0	9,8	4,9	1,78	1,75	1,78
3	3,0	16,9	7,4	3,78	1,2	3,78
4	3,0	5,8	2,9	3,78	0	3,78

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА НА ЦИЛИНДРЕ

Азимутальный электрический диполь возбуждает на цилиндре все азимутальные гармоники плотности тока. Однако излучающими являются гармоники с номером, не превышающим  $2kR$ . Поэтому расчеты для первых двух цилиндров ( $kR=1,0$ ) выполнены для  $m=0 \div 2$ , а для двух других цилиндров ( $kR=3,0$ ) для  $m=0 \div 6$ .

Рассмотрим характер распределения азимутальных гармоник плотности тока на примере цилиндра Ц<sub>3</sub> ( $kR=3,0$ ;  $kz=16,9$ ), возбуждаемого азимутальным диполем, расположенным вблизи середины цилиндра в точке  $T_1$ . Графики модуля и фазы плотности продольного  $J_{mz}$  и поперечного  $J_{m\varphi}$  токов приведены на рис. 3 для нескольких азимутальных гармоник. По оси абсцисс на этом рисунке отложена длина меридиональной линии  $\nu$ , умноженная на волновое число. Вертикальными пунктирными линиями отмечены точки перехода от цилиндрической части к торцевой.

Непосредственно под диполем имеется резкий всплеск плотности поперечного тока, поскольку диполь расположен близко к поверхности цилиндра. Фаза тока максимальна в точке расположения диполя и убывает к концам цилиндра. Это указывает на то, что от диполя в обе сто-



роны распространяются волны тока. Отраженная от торцов цилиндра волна выражена очень слабо.

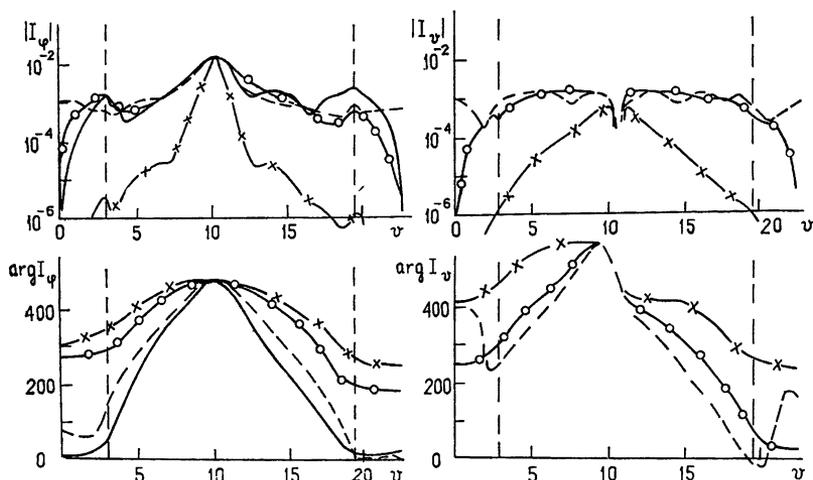


Рис. 3. Распределение амплитуды и фазы азимутальных гармоник плотности тока на цилиндре  $\Pi_3$ , возбуждаемом азимутальным диполем вблизи середины цилиндра ( $kR=3,0$ ;  $kz=16,9$ ).

Сплошная линия —  $m=0$ ; пунктир —  $m=1$ ; светлые кружки —  $m=3$ , крестики —  $m=6$ .

Абсолютная величина плотности продольного тока непосредственно под диполем имеет резкий минимум, а его фаза — скачок, связанный с различным направлением продольного тока справа и слева от диполя. На краях, там, где цилиндрическая поверхность переходит к плоскому торцу, у продольного тока наблюдается минимум, а у поперечного — максимум. На торцах цилиндра распределение тока приобретает характер стоячих волн. Наиболее наглядно это проявляется в графиках фаз на торцевых участках цилиндра.

Следует отметить также, что токи азимутальных гармоник с  $m \leq kR$  медленно убывают с ростом расстояния от диполя (кроме зоны непосредственно под диполем). Для гармоник с  $m > kR$  скорость убывания тока с ростом  $m$  увеличивается.

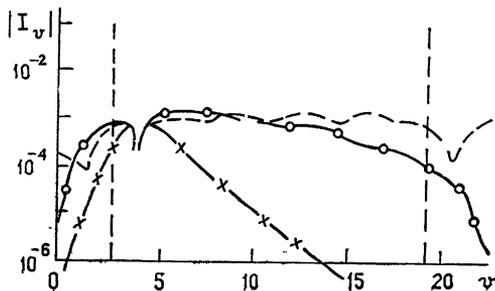
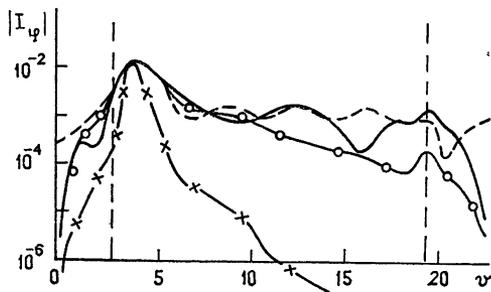


Рис. 4. Распределение амплитуды азимутальных гармоник плотности тока на цилиндре  $\Pi_3$ , возбуждаемом азимутальным диполем вблизи кромки торца цилиндра ( $kR=3,0$ ;  $kz=16,9$ ).

Сплошная линия —  $m=0$ ; пунктирная —  $m=1$ ; кружки —  $m=3$ ; крестики —  $m=6$ .

Отмеченные закономерности в распределении плотности тока сохраняются при перемещении диполя вдоль боковой поверхности цилиндра, а также и при изменении радиуса последнего. Так, на рис. 4 приведены модули продольного и поперечного токов в случае возбуждения цилиндра  $\Pi_3$  диполем, расположенным в точке  $T_2$ . Характер распределения плотности токов остался тем же, несмотря на расположение диполя вблизи кромки цилиндра.

### ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АЗИМУТАЛЬНОГО ДИПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ЦИЛИНДРА

На рис. 5 приведены полные диаграммы направленности диполей, расположенных вблизи цилиндров  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$  (радиус  $kR=3,0$ , длина  $kz=16,5$  и  $5,8$ ) и вблизи бесконечного цилиндра. В последнем случае результаты получены на основании формул, приведенных в монографии [7]. Все диаграммы на рис. 5 нормируются по одному максимальному значению. Так же строятся и диаграммы на последующих рисунках. На рис. 5 а приведены диаграммы направленности в поперечной плоскости,  $\theta=90^\circ$ . Слева изображена диаграмма направленности для основной поляризации  $E_\varphi$ , справа — диаграмма направленности для поляризации  $E_\theta$ , которая в случае бесконечного цилиндра равна нулю. На конечном цилиндре

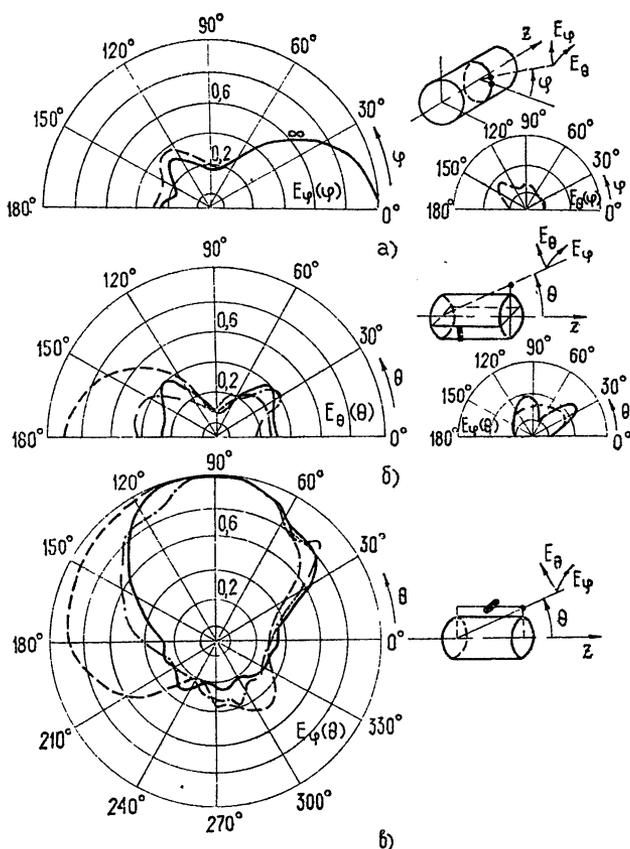


Рис. 5. Диаграммы направленности в основных плоскостях азимутального диполя, расположенного вблизи цилиндров  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$  ( $kR=3,0$ ;  $kz=16,9$  и  $5,8$ ); а) азимутальная плоскость,  $\theta=90^\circ$ ,  $\varphi=var$ ; б) меридиональная плоскость,  $\varphi=90^\circ$ ,  $\theta=var$ ; в) меридиональная плоскость; при  $\varphi=0^\circ$   $\theta=0-180^\circ$ ,  $\varphi=180^\circ$   $\theta=180-360^\circ$ . Сплошная линия— $\Pi_3$ ,  $T_1$  и бесконечный цилиндр; штрих-пунктир— $\Pi_3$ ,  $T_2$ ; пунктир— $\Pi_4$ ,  $T_2$ .

она появляется при несимметричном расположении диполя, но ее величина на порядок меньше, чем  $E_\varphi$ . Нормировка для  $E_\theta$  проведена относительно основной составляющей  $E_\varphi$ .

Составляющая  $E_\varphi$  в поперечной плоскости практически не зависит от длины цилиндра и от положения диполя относительно кромок, что связано с локализацией наведенного поперечного тока  $J_\varphi$  непосредственно под диполем. И только при расположении азимутального диполя непосредственно над кромкой (точка  $T_2$ ) наблюдается отклонение от диаграммы для бесконечного цилиндра, однако отклонение не превышает 5% от максимального уровня поля.

На рис. 5 б даны диаграммы в продольной плоскости при  $\varphi = 90^\circ$  и на рис. 5 в — в продольной плоскости, проходящей через диполь ( $\varphi = 0$ ).

В продольной плоскости при  $\varphi = 90^\circ$  основной составляющей поля является  $E_\theta$  (рис. 5 б, слева). Компонента  $E_\varphi$  в этом случае появляется только при сдвиге диполя к кромке цилиндра (рис. 5 б, справа). Уровень ее в рассматриваемых случаях достигает 50% от уровня  $E_\theta$ . Некоторая асимметрия диаграммы для составляющей  $E_\theta$  при расположении диполя в точке  $T_1$  связана с небольшим смещением этой точки относительно середины цилиндра  $\Pi_3$  на величину  $kz = 1,0$ . В этой плоскости диаграмма направленности также слабо зависит от длины цилиндра при расположении диполей около его середины. При приближении диполей к одной

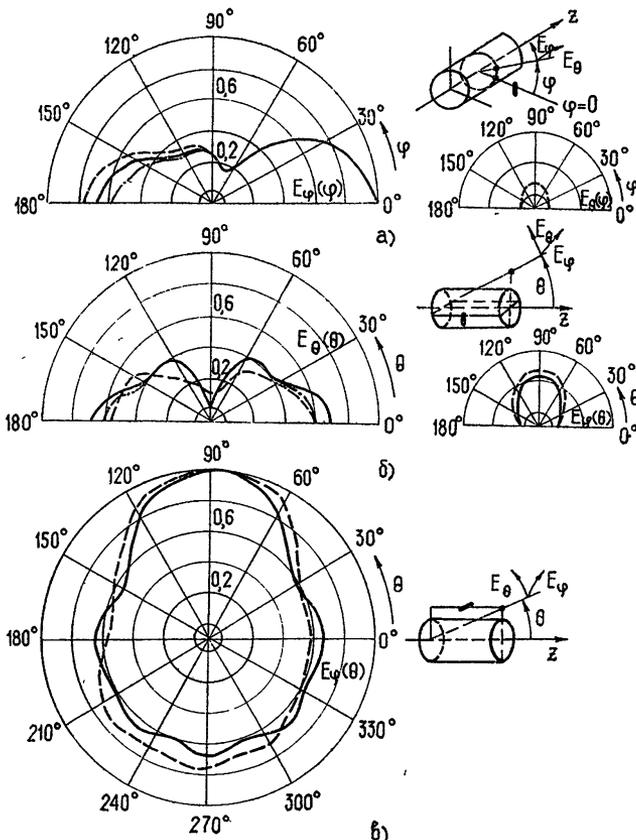


Рис. 6. Диаграммы направленности в основных плоскостях азимутального диполя, расположенного вблизи цилиндров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  ( $kR=1,0$ ;  $kz=18,9$  и  $9,8$ ).

Сплошная линия— $\Pi_1$ ,  $T_1$ ; штрих-пунктир— $\Pi_3$ ,  $T_1$ ; пунктир— $\Pi_2$ ,  $T_2$ .

из кромок (точки  $T_2$  на цилиндрах  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ ) заметно увеличивается уровень излучения вдоль оси в сторону более сильно возбуждаемой кромки. В продольной плоскости, проходящей через вибратор ( $\varphi=0$ ), существует только одна компонента поля  $E_\varphi$  (рис. 5в). Закономерности в поведении диаграммы направленности здесь те же, что и для компоненты  $E_\theta$  в продольной плоскости при  $\varphi=90^\circ$ .

Рассмотрим возбуждение азимутальными диполями цилиндров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , имеющих электрический радиус  $kR$ , равный единице. Соответствующие диаграммы направленности представлены на рис. 6. Порядок расположения графиков здесь такой же, как и на рис. 5.

Экранирующее действие цилиндра в этом случае проявляется слабее, чем для цилиндра с  $kR=3,0$ . В меньшей степени сказывается здесь и смещение диполя от середины к торцам цилиндра, что связано с несколько большей удаленностью от кромок точек  $T_2$  на цилиндрах  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  по сравнению с положением аналогичных точек на цилиндрах  $\Pi_3$  и  $\Pi_4$ .

Таким образом, азимутальный диполь наводит на поверхности цилиндра преобладающие токи в узкой области вблизи источника. Поэтому наличие кромок, отстоящих от диполя на  $\lambda/2$  и более, слабо влияет на диаграммы направленности. Это позволяет при рассмотрении возбуждения цилиндра длиной более  $\lambda$  азимутальным электрическим диполем, отнесенным от кромок более чем на  $\lambda/2$ , использовать для приближенного расчета диаграмм направленности в поперечной плоскости соответствующие формулы для бесконечного цилиндра [7].

При несоблюдении одного из вышеперечисленных условий отличие в диаграммах направленности конечного цилиндра по сравнению с бесконечным может быть существенным. В этом случае для решения задачи возбуждения конечного цилиндра необходимо использовать описанный выше метод интегральных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Васильев, Научные доклады Высшей школы, Радиотехника и электроника, 1, № 1, 188 (1958).
2. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 588 (1959).
3. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, Труды МЭИ, Радиотехника и электроника, 34, 212 (1961).
4. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 591 (1963).
5. Е. Н. Васильев, А. А. Фалунин, А. И. Гореликов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 110 (1973).
6. Е. Н. Васильев, ЖВММФ, 5, № 5, 841 (1965).
7. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М., 1967.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
19 сентября 1975 г.

#### EXCITATION OF A FINITE-LENGTH CYLINDER BY AZIMUTHAL HERTZ DIPOLE

*E. N. Vasil'ev, A. A. Falunin, A. I. Gorelikov*

The excitation of a perfectly conducting finite-length cylinder by an electrical azimuthal dipole in the resonant frequency region is investigated by the integral equation method. The electric currents induced on the cylinder surface are defined. The dependence of the field in a far zone on the cylinder dimensions and dipole position with respect to its edges is found. The analysis made permits also to establish the parameter limits at which the cylinder finiteness may be not taken into account in calculations of the radiation pattern in the transverse plane,

УДК 533 9 01

## ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ

Ю. А. Романов, В. Ф. Дряхлушин, Л. К. Орлов

Исследована высокочастотная диэлектрическая проницаемость полупроводников со сверхрешеткой с учетом межминизонных переходов (без учета пространственной дисперсии) и с учетом пространственной дисперсии (без учета межминизонных переходов). Найден спектр оптических и акустических плазменных волн в таких системах. Показано, что в полупроводниках со сверхрешеткой вблизи межминизонных полос поглощения могут существовать новые типы плазменных волн.

Полупроводники со сверхрешеткой характеризуются наличием дополнительного периодического потенциала с периодом  $d$ , много большим периода основного кристалла. Этот потенциал приводит к разбиению энергетических электронных зон однородного полупроводника на совокупность довольно узких разрешенных и запрещенных минизон [1-4]. Появление узких минизон существенно меняет диэлектрическую проницаемость полупроводника, меняет его электромагнитные свойства. В работах [5-7] исследованы особенности оптического поглощения в полупроводниках со сверхрешеткой, связанные с межминизонными переходами. Настоящая работа посвящена исследованию спектра плазменных волн в одномерных сверхрешетках.

Энергетический спектр электронов в одномерных сверхрешетках будем описывать законом дисперсии

$$\varepsilon_{\alpha}(k) = \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{k_1^2}{m_1^{(n)}} + \frac{k_2^2}{m_2^{(n)}} \right) + \varepsilon_{n, \nu}(k_3), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{n, \nu}(k_3) = \varepsilon_{n, \nu}^0 + (-1)^{\nu} \frac{\Delta \varepsilon_{n, \nu}}{2} \cos k_3 d,$$

$$-\frac{\pi}{d} \leq k_3 \leq \frac{\pi}{d}, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

где  $\alpha = n, \nu$ ,  $n$  — номер зоны,  $\nu$  — номер минизоны,  $\varepsilon_{n, \nu}(k_3)$ ,  $\hbar k_3$  — энергия и квазиимпульс движения электронов вдоль периода,  $\hbar k_{1, 2}$  и  $m_{1, 2}^{(n)}$  — поперечные импульсы и соответствующие им компоненты двумерного тензора эффективной массы,  $\varepsilon_{n, \nu}^0$  — середина разрешенной минизоны,  $\Delta \varepsilon_{n, \nu}$  — ее ширина,  $d$  — период сверхрешетки. Собственным значениям энергии (1) соответствуют собственные функции

$$\psi_{\alpha, k}(r) = e^{ikr} U_{n, k_{\perp}}(r) V_{n, \nu, k_3}(x_3), \quad (2)$$

где  $U_{n, k_{\perp}}$  — блоховский множитель основного кристалла,  $V_{n, \nu, k_3}$  — блоховский множитель сверхрешетки.

Если система находится при  $T=0$ , то в равновесном состоянии электроны занимают первые  $s$  минизон. Их концентрация  $n$  является кусочно-линейной функцией химического потенциала  $\mu$ . Так, в области

$$\varepsilon_s^{\max} < \mu < \varepsilon_{s+1}^{\min}; \quad (3)$$

$$n(\mu) = A_s + B_s \mu, \quad A_s, B_s = \text{const.} \quad (4)$$

### 1. ТЕНЗОР ПРОВОДИМОСТИ

Вычислим линейную проводимость  $\sigma_{ij}$  полупроводника со сверхрешеткой. В настоящей работе нас не будут интересовать межзонные переходы, поэтому соответствующими слагаемыми в  $\sigma_{ij}$  будем пренебрегать. Вначале найдем  $\sigma_{ij}$  без учета пространственной дисперсии, но с учетом межминизонных переходов внутри зоны проводимости (элементарная теория), затем — с учетом пространственной дисперсии, но без учета межминизонных переходов.

а) *Элементарная теория.* Представим проводимость  $\sigma_{ij}$  в виде двух слагаемых:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{ij}^{(1)}$  определяется движением электронов внутри минизон, а  $\sigma_{ij}^{(2)}$  — межминизонными переходами. Рассмотрим сначала  $\sigma_{ij}^{(1)}$ . При  $T=0$

$$\sigma_{33}^{(1)}(\omega) = \frac{ie^2 m_{\perp} d}{8\pi\hbar^4} \left\{ \sum_{\nu=1}^{s'} \frac{(\Delta\varepsilon_{\nu})^2}{\omega + i\tau_{\nu}^{-1}} + \frac{d}{\pi} \frac{(\Delta\varepsilon_s)^2}{\omega + i\tau_s^{-1}} \left| k_3^s(\mu) - k_0^s - \frac{1}{2d} \sin(2k_3^s(\mu)d) \right| \eta(\varepsilon_s^{\max} - \mu) \right\}, \quad (6)$$

$$m_{\perp} = (m_1 m_2)^{1/2}, \quad s' = s - \eta(\varepsilon_s^{\max} - \mu),$$

$$k_0^s = \frac{\pi}{2d} [1 + (-1)^s], \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$k_3^s(\mu)$  определяется из уравнения  $\mu = \varepsilon_{\nu}(k_3)$ .

Из (6) и (4) следует, что зависимость  $\sigma_{33}^{(1)}(n)$  при  $T=0$  носит ступенчатый характер, именно в области (3)  $\sigma_{33}^{(1)}(n) = \text{const}$ . С ростом  $T$  ступеньки размываются. В частности, при максвелловском распределении вместо (6) имеем

$$\sigma_{33}^{(1)}(\omega) = \frac{ie^2 n d^2}{2\hbar^2} \frac{\sum_{\nu} \frac{\Delta\varepsilon_{\nu}}{\omega + i\tau_{\nu}^{-1}} I_1\left(\frac{\Delta\varepsilon_{\nu}}{2xT}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\nu}^0}{xT}\right)}{\sum_{\nu} I_0\left(\frac{\Delta\varepsilon_{\nu}}{2xT}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\nu}^0}{xT}\right)}, \quad (7)$$

где  $I_{0,1}$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

Перейдем к вычислению проводимости  $\sigma_{ij}^{(2)}$ , связанной с межминизонными переходами внутри зоны проводимости. При  $T=0$

$$\sigma_{33}^{(2)}(\omega) = -i \frac{2e^2 \omega m_{\perp}}{\pi^2 \hbar^3} \left\{ \sum_{\nu=1}^{s'} \sum_{\nu' \neq \nu} \int_0^{\pi/d} dk_3 [\mu - \varepsilon_{\nu}(k_3)] \times \right.$$

$$\times \left. \frac{\omega_{v',v} |\Omega_{v,v'}|^2}{\omega_{v',v}^2 - \omega^2} - \sum_{v' \neq s} (-1)^s \int_{k_3^0}^{k_3^0(\mu)} dk_3 [\mu - \varepsilon_s(k_3)] \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega_{v',s} |\Omega_{s,v'}|^2}{\omega_{v',s}^2 - \omega^2} \eta(\varepsilon_s^{\max} - \mu) \right\}, \quad (8)$$

$$\Omega_{v,v'} = \frac{1}{d} \int_0^d V_{v,k_3}^*(x_3) \frac{\partial}{\partial k_3} V_{v',k_3}(x_3) dx_3,$$

$$\hbar\omega_{v,v'} = \varepsilon_v(k_3) - \varepsilon_{v'}(k_3).$$

Из (8) и (4) следует, что в области (3) зависимость  $\sigma_{33}^{(2)}(n)$  линейная, в отличие от величины  $\sigma_{33}^{(1)}(n)$ , которая в этой области постоянная.

Полагая в (8)  $\omega \rightarrow 0$ , получим поправку к диэлектрической проницаемости, связанную с виртуальными межминизонными переходами. Если электронами заполнена лишь первая минизона, то соответствующая поправка

$$\frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{33}^{(2)} = \Delta \varepsilon_{33}^{(2)} \approx \frac{8\pi n e^2 |\tilde{\Omega}_{12}|^2}{\hbar \tilde{\omega}_{21}} \sim \frac{n e^2 d^2}{\hbar \tilde{\omega}_{21}},$$

где  $\tilde{\Omega}_{12}$  и  $\tilde{\omega}_{21}$  — некоторые средние значения  $\Omega_{12}$  и  $\omega_{21}$ . Для синусоидального потенциала сверхрешетки

$$U(x_3) = U_0 \cos^2 \left( \frac{\pi x_3}{d} \right). \quad (9)$$

При  $U_0 = 8E_0$ ,  $E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 d^2}$ ,  $d = 2 \cdot 10^{-6}$  см,  $\mu = 6E_0$ ,  $m_{\perp} = 0,05 m_0$  ( $m_0$  — масса свободного электрона)  $\Delta \varepsilon_{33}^{(2)} \sim 2,5$ , т. е. довольно значительная величина.

Частотная зависимость  $\sigma_{33}^{(2)}(\omega)$  характеризуется наличием одномерных критических точек Ван-Хова:

$$\omega_{\text{кр}}^{(1)} = \max \{ \omega_{v,v'}(k_3) \}, \quad \omega_{\text{кр}}^{(2)} = \min \{ \omega_{v,v'}(k_3) \}. \quad (10)$$

Соотношения (10) реализуются в точках  $k_3 = 0$  и  $\frac{\pi}{d}$ . Вблизи критических точек имеем соответственно

$$\sigma_{33}^{(2)} \sim (\omega_{\text{кр}}^{(1)} - \omega)^{\gamma}, \quad \sigma_{33}^{(2)} \sim (\omega - \omega_{\text{кр}}^{(2)})^{\gamma}, \quad (11)$$

где  $\gamma = -1/2$  для разрешенных и  $\gamma = 1/2$  для запрещенных переходов. В случае симметричного потенциала сверхрешетки разрешенные переходы в критических точках реализуются, когда  $v$  и  $v'$  имеют разную четность, запрещенные — при  $v$  и  $v'$  одинаковой четности.

В качестве примера на рис. 1 изображены величины  $\text{Re} \Delta \varepsilon_{33}^{(1,2)}$ ,  $\text{Im} \varepsilon_{33}^{(2)}$  для сверхрешетки с приведенными выше параметрами. Из приведенного рисунка видно, что вблизи  $\omega_{\text{кр}}^{(1)}$  (внутри полос пропускания) могут существовать дополнительные ветви плазменных волн. Их плазменная частота при  $\mu > \varepsilon_v(k_0)$  равна

$$\bar{\omega}_0 \sim \omega_{\text{кр}}^{(1)} + \frac{4m_{\perp} e^2 [\mu - \epsilon_v(k_0)] |\Omega_{v,v'}| \omega_{\text{кр}}^{(1)2}}{\epsilon_0 \hbar^3 \left[ -2 \left( \frac{\partial^2 \omega_{v,v'}}{\partial k_3^2} \right)_{\omega_{\text{кр}}^{(1)}} \right]^{1/2}} \quad (12)$$

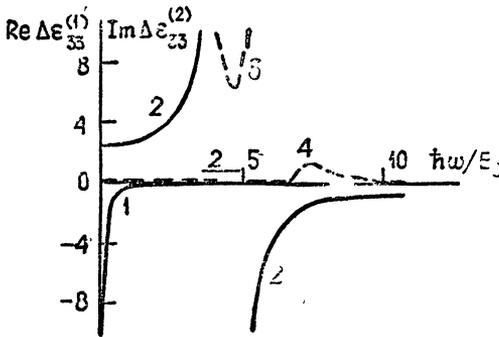


Рис. 1. Действительная часть  $\Delta\epsilon_{33}^{(1)}(\omega)$  (кривая 1),  $\Delta\epsilon_{33}^{(2)}(\omega)$  (кривая 2) и мнимая часть  $\Delta\epsilon_{33}^{(3)}(\omega)$  (кривые 3, 4) диэлектрической проницаемости сверхрешетки с параметрами  $U_0 = 8E_0$ ,  $d = 2 \cdot 10^{-6}$  см,  $m_{\perp} = 0,05 m_0$ ,  $\mu = 6E_0$ . Кривая 3 соответствует переходам 1—2, кривая 4—переходам 1—3.

б) *Учет пространственной дисперсии.* При нахождении  $\sigma_{ij}$  с учетом теплового движения плазменных частиц будем пренебрегать межмизонными переходами и предполагать выполненными неравенства  $\omega\tau \gg 1$ ,  $q_3 d \ll 1$ , где  $q_3$  — волновой вектор волны, направленный вдоль периода сверхрешетки. Указанное неравенство является необходимым условием применимости метода эффективной массы. В этом приближении при  $T = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(q_3, \omega) = & -\frac{i\omega}{\pi q_3^2 a_{\perp} d} \left\{ s' - \sum_{v=1}^{s'} \frac{\alpha_v}{(\alpha_v^2 - 1)^{1/2}} + \frac{1}{\pi} \times \right. \\ & \times \left[ \left| k_3^s(\mu) d - \frac{\pi}{2} (1 + (-1)^s) \right| + \frac{i\alpha_s}{2(\alpha_s^2 - 1)^{1/2}} \times \right. \\ & \left. \left. \times \ln \frac{(-1)^{s+1} \operatorname{ctg}(k_3^s(\mu) d) + i\alpha_s^{-1} \sqrt{\alpha_s^2 - 1}}{(-1)^{s+1} \operatorname{ctg}(k_3^s(\mu) d) - i\alpha_s^{-1} \sqrt{\alpha_s^2 - 1}} \right] \eta(\epsilon_s^{\max} - \mu) \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

где  $a_{\perp} = \frac{\hbar^2}{m_{\perp} e^2}$  — эффективный боровский радиус,  $\alpha_v = \frac{\omega}{q_3 v_v^{\max}}$ ,  $v_v^{\max} = \frac{d\Delta\epsilon_v}{2\hbar}$ . В качестве  $\sqrt{\alpha_v^2 - 1}$  нужно брать ту аналитическую ветвь,

которая при вещественных  $\alpha_v > 1$  соответствует положительным значениям, а при вещественных  $\alpha_v < -1$  — отрицательным значениям корня. Линия разреза в комплексной плоскости соединяет точки  $\pm 1$ . В качестве  $\ln z(\alpha_s)$  нужно брать ту аналитическую ветвь, которая при вещественных  $\alpha_s^2 > 1$  переходит в функцию

$$i \left[ \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{(-1)^{s+1} \alpha_s \operatorname{ctg}(k_3^s(\mu) d)}{(\alpha_s^2 - 1)^{1/2}} \right]. \quad (14)$$

В области  $\alpha_{s,0}^2 \equiv \sin^2(k_3^s(\mu) d) < \alpha_s^2 < 1$ ,  $\mu < \epsilon_s^0$

$$\ln z = \ln |z|.$$



Линия разреза для функции  $\ln z$  в комплексной плоскости соединяет точки  $\pm \alpha_{s0}$ . На плоскости  $z$  ей соответствует линия, соединяющая точки 0 и  $\infty$ .

## 2. ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ

Продольные плазменные волны, распространяющиеся вдоль периода сверхрешетки, описываются дисперсионным уравнением

$$\epsilon_{33}(q_3, \omega) = \epsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma_{33}(q_3, \omega)}{\omega} = 0, \quad (15)$$

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки. В  $\epsilon_0$  включена также часть диэлектрической проницаемости сверхрешетки, связанная с межминизонными переходами. Из (15) и (6) находим плазменную частоту:

$$\omega_0^2 = \frac{d}{2\hbar^2 \epsilon_0 a_{\perp}} \left\{ \sum_{s=1}^{s'} (\Delta\epsilon_s)^2 + \frac{d}{\pi} (\Delta\epsilon_s)^2 \left| k_3^s(\mu) - k_0^s - \frac{1}{2d} \sin(2k_3^s(\mu)d) \right| \eta(\epsilon_s^{\max} - \mu) \right\}. \quad (16)$$

В области (3)  $\omega_0$  не зависит от концентрации плазменных частиц.

При наличии пространственной дисперсии в системе могут существовать два типа волн — оптические и акустические. Рассмотрим сначала волны оптического типа. Эти волны в отсутствие столкновений оказываются незатухающими во всей области своего существования и описываются дисперсионным соотношением

$$(q_3 d)^2 = - \frac{4d}{\epsilon_0 a_{\perp}} \left\{ s' - \sum_{s=1}^{s'} \frac{1}{[1 - (v_s^{\max}/v_{\Phi})^2]^{1/2}} + \frac{\eta(\epsilon_s^{\max} - \mu)}{\pi} \times \right. \\ \left. \times \left| k_3^s(\mu) - \frac{\pi}{2} (1 + (-1)^s) \right| \right\} + \\ + \frac{2d\eta(\epsilon_s^{\max} - \mu)}{\pi a_{\perp} \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[1 - (v_s^{\max}/v_{\Phi})^2]^{1/2}} \left[ \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{(-1)^{s+1} \operatorname{ctg}(k_3^s(\mu)d)}{[1 - (v_s^{\max}/v_{\Phi})^2]^{1/2}} \right] \right. \\ \left. \frac{1}{[(v_s^{\max}/v_{\Phi})^2 - 1]^{1/2}} \ln \frac{(-1)^{s+1} \operatorname{ctg}(k_3^s(\mu)d) + \left[ \left( \frac{v_s^{\max}}{v_{\Phi}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}}{(-1)^{s+1} \operatorname{ctg}(k_3^s(\mu)d) - \left[ \left( \frac{v_s^{\max}}{v_{\Phi}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} \right] \right\} \\ (v_{\Phi} > v_s^{\max}), \quad (17) \\ (v_{\Phi} < v_s^{\max}),$$

где  $v_{\Phi} = \omega/q_s$ . Асимптотой этой дисперсионной кривой является прямая

$$\omega = q_3 \max \left\{ \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_s(k_3)}{\partial k_3} \right\}_{\epsilon_s < \mu}. \quad (18)$$

Как известно, в плазме, состоящей из двух или более групп заряженных частиц, имеющих существенно различные фермиевские (тепловые) скорости, могут распространяться слабозатухающие плазменные

волны с акустическим законом дисперсии. Такая ситуация, как нетрудно видеть, может быть реализована в полупроводниках со сверхрешеткой в случае заполнения по крайней мере двух минизон.

Пусть для простоты система находится при  $T = 0$  и химический потенциал удовлетворяет соотношению (3). В этом случае дисперсионное уравнение плазменных волн приобретает довольно простой вид:

$$1 + \frac{4}{q_3^2 a_{\perp} \varepsilon_0 d} \left\{ s - \sum_{\nu=1}^s \frac{1}{[1 - (v_{\nu}^{\max}/v_{\phi})^2]^{1/2}} \right\} = 0 \quad (19)$$

(уравнение (19) по виду совпадает с дисперсионным уравнением акустических волн в квантовых пленках, исследованных в работе [8]). Рассмотрим акустическую волну с фазовой скоростью, удовлетворяющей соотношению

$$v_1^{\max} < \dots < v_m^{\max} < v_{\phi} < v_{m+1}^{\max} < \dots < v_s^{\max}. \quad (20)$$

Как будет показано ниже, обычно  $v_{\phi}$  близко к  $v_m^{\max}$ , поэтому во всех слагаемых уравнения (19), не содержащих  $v_m^{\max}$ , положим  $v_{\phi} = v_m^{\max}$ . Решение упрощенного таким образом дисперсионного уравнения имеет вид

$$v_{\phi} = v_m^{\max} [1 - (a + ib)^{-2}]^{-1/2}, \quad (21)$$

где

$$a = s + \frac{q_3^2 a_{\perp} d \varepsilon_0}{4} - \sum_{\nu=1}^{m-1} \left[ 1 - \left( \frac{\Delta \varepsilon_{\nu}}{\Delta \varepsilon_m} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

$$b = \sum_{\nu=m+1}^s \left[ \left( \frac{\Delta \varepsilon_{\nu}}{\Delta \varepsilon_m} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2}. \quad (22)$$

Разделяя  $v_{\phi}$  на действительную и мнимую части  $v_{\phi} = v'_{\phi} - iv''_{\phi}$  и предполагая, что  $v''_{\phi} \ll v'_{\phi}$ , из (21) получим

$$v'_{\phi} = v_m^{\max} \left[ 1 - \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} \right]^{-1/2}, \quad v''_{\phi} = v'_{\phi} \frac{ab}{(a^2 + b^2)^2}. \quad (23)$$

Обычно  $b \ll a$ ,  $a > 1$ , что обеспечивает слабое затухание акустической волны.

В качестве примера рассмотрим синусоидальную сверхрешетку с параметрами  $U_0 = 8 E_0$  ( $\sim 0,16$  эВ),  $d = 2 \cdot 10^{-6}$  см,  $m_{\perp} = 0,05 m_0$ ,  $n = 8,6 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$ . При указанной концентрации будут заполнены 4 минизоны. Соответствующие разрешенные и запрещенные ширины этих минизон  $\Delta \varepsilon_{\nu} = 0,002; 0,02; 0,06; 0,1$  эВ;  $\Delta \varepsilon_{g\nu} = 0,059; 0,023; 0,003$  эВ и максимальные скорости  $v_{\nu}^{\max} = 3,2 \cdot 10^6; 3,2 \cdot 10^7; 9,6 \cdot 10^7; 1,6 \cdot 10^8$  см/с.

Возможны три слабозатухающие акустические волны с фазовыми скоростями  $1,03 v_1^{\max}; 1,05 v_2^{\max}; 1,1 v_3^{\max}$ . Затухание волн соответственно равно  $0,0026 v_1^{\max}$ ,  $0,019 v_2^{\max}$  и  $0,09 v_3^{\max}$ , т. е. довольно мало. Качественная картина дисперсии волн для этого случая приведена на рис. 2.

В случае, когда химический потенциал лежит внутри какой-либо минизоны, качественная картина плазменных волн мало меняется, хотя соответствующие формулы существенно усложняются.

Для наблюдения указанных в работе явлений необходимо выполнение достаточно жестких условий. Основное из них — неравенство

$$\Delta \varepsilon_{\nu} \ll \hbar \tau_{\nu}^{-1}, \quad (24)$$

являющееся необходимым условием существования определенного закона дисперсии в минизоне. В противном случае реализуется не минизона, а размытый столкновениями уровень, как в размерно-квантованной пленке. Кроме того, для наблюдения оптических и акустических плазменных волн, исследованных в разд. 2, необходимы условия

$$\Delta\varepsilon_{g\nu} \gg \hbar\omega \gg \hbar\tau_{\nu}^{-1}; \quad (25)$$

$$\Delta\varepsilon_{\nu+1} - \Delta\varepsilon_{\nu} \gg \hbar\tau_{\nu}^{-1} \quad (26)$$

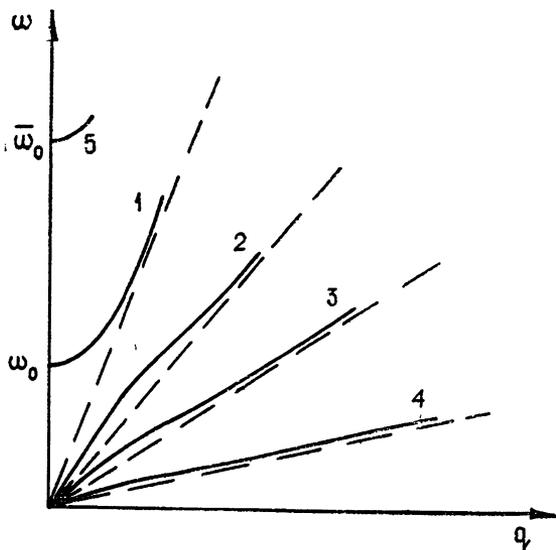


Рис. 2. Качественная картина дисперсии плазменных волн в сверхрешетке:

1 — оптический плазмон; 2 — 4 — акустические плазмоны; 5 — оптический плазмон, обусловленный межминизонными виртуальными переходами.

( $\Delta\varepsilon_{g\nu}$  — характерная ширина запрещенных минизон). Условие (25) позволяет пренебречь межминизонными переходами и столкновительным затуханием. Неравенство (26) требует, чтобы разность между максимальными скоростями частиц в минизонах ( $v_{\nu}^{\max}$ ) превышала их столкновительное размытие. В приведенном выше примере для первой акустической волны условие (24) выполнить практически невозможно. Для волны (3) затруднительным является одновременное выполнение неравенств (25). Для волны (2) условия наблюдения более благоприятные.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 43, 661 (1972).
2. R. Tsu, L. Esaki, Appl. Phys. Lett., 19, 246 (1971).
3. М. И. Овсянников, Ю. А. Романов, В. Н. Шабанов, Р. Г. Логинова, ФТП, 4, 2225 (1970).
4. Ю. А. Романов, ФТП, 5, 1434 (1971).
5. Р. Ф. Казаринов, Ю. В. Шмарцев, ФТП, 5, 800 (1971).
6. А. Я. Шик, ФТП, 6, 1268 (1972).
7. Ю. А. Романов, Л. К. Орлов, ФТП, 7, 253 (1973).
8. Ю. А. Романов, М. Ш. Ерухимов, ЖЭТФ, 55, 1661 (1968).

## PLASMA WAVES IN SEMICONDUCTORS WITH A SUPERLATTICE

*Yu. A. Romanov, V. F. Dryakhlushin, L. K. Orlov*

A high-frequency dielectric permittivity of superlattice semiconductors is investigated, intra-minison transitions being take into account (without allowance for space dispersion) and the space dispersion being take into account (without allowance for intra-minison transitions). The spectrum of optical and acoustical plasma waves in such systems is found. It is shown that new types of plasma waves may exist in superlattice semiconductors near intra-minison absorption bands.

---

УДК 533.922

**МАКРОСКОПИЧЕСКИЙ ТОК ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ,  
ПЕРЕМещаЮЩЕГОСЯ В ПЛАЗМЕ**

*В. А. Павлов*

Получены и проанализированы выражения для макроскопического тока и его фурье-образа в предположении, что ток возбуждается движущимся в плазме пучком зарядов а плазма описывается кинетическими уравнениями

Имеется ряд работ (см. [1, 2] и библиографию к ним), посвященных изучению взаимодействия движущихся искусственных тел с плазмой. При описании этого явления обычно в кинетическое уравнение для ионов добавляется член, описывающий это взаимодействие, а функция распределения электронов берется в виде распределения Максвелла—Больцмана. Последнее возможно благодаря тому, что скорость заряженного тела предполагается гораздо меньшей, чем тепловая скорость электронов. В указанных выше работах не учитывалась возможность направленного выделения телом пучка заряженных частиц вследствие реакций внутри тела. Изучению свойств макроскопического тока такого пучка посвящена данная работа.

Поля в плазме будем описывать следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial f'_p}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f'_p}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_p}{m_p} \{E + [\mathbf{v}B] + [\mathbf{v}B_0]\} \frac{\partial (f'_p + f_{0p})}{\partial \mathbf{v}} = -F_p, \tag{1}$$

$$\text{rot } E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{rot } H = \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ст}} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ст}},$$

$$\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ст}} = \sum_p e_p \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f'_p, \quad \mathbf{j} = \sum_p e_p \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f'_p \Big|_{F_p=0},$$

$f'_p = f_p - f_{0p}$  — возмущение функции распределения,  $f_{0p}$  — однородное стационарное невозмущенное значение ее;

$$F_p(t; \mathbf{r}; \mathbf{v}) = F_p^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) F_p^{(2)}(\mathbf{v} + \omega_{0p} \mathbf{e}_z) \tag{2}$$

— функция, описывающая перемещающийся источник заряженных частиц ( $p = 1$  — соответствует электронам,  $p = 2$  — ионам),  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_z$  — скорость источника,  $\omega_{0p}$  — параметр, характеризующий распределение заряженных частиц по скоростям в пучке. Кинетические уравнения (1) записаны без учета соударений частиц в плазме (это будет сделано ниже) и взаимодействия частиц плазмы с поверхностью источника (об учете этого эффекта см., например, [1, 2]).

При отсутствии источника ( $F_p = 0$ ) возмущение функции распределения должно отсутствовать:

$$f'_p = E = B = \mathbf{j} = [\mathbf{v}B_0] \frac{\partial f_{0p}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad \text{при } F_p = 0.$$

В линейном приближении уравнения (1) имеют вид

$$\frac{\partial f'_p}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f'_p}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_p}{m_p} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f'_p}{\partial \mathbf{v}} = -F_p - \frac{e_p}{m_p} E \frac{\partial f_{0p}}{\partial \mathbf{v}},$$

где на функцию  $F_p$  наложено ограничение  $|f'_p| \ll f_{0p}$ .

Сделаем преобразование Фурье по  $\mathbf{r}$  и  $t$  и введем цилиндрическую систему координат в пространстве скоростей  $v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}$ ,  $v_{\perp} \frac{\mathbf{v}_{0\perp}}{v_{0\perp}}$ ,  $\varphi \mathbf{e}_{\varphi}$ , где  $\mathbf{v}_{0\perp} \perp \mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{e}_{\varphi} = \frac{[\mathbf{B}_0 \mathbf{v}_{0\perp}]}{B_0 v_{0\perp}}$ . В результате получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение для  $f'_p(\omega; \mathbf{k}; v_{\parallel}, v_{\perp}, \varphi)$

$$\frac{df'_p}{d\varphi} + iQf'_p = G_1 + G_2,$$

где

$$Q = \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - k_{\perp} v_{\perp} \cos(\varphi - \varphi_1)}{(-)^p \omega_{Hp}}, \quad G_1 = (-)^p \frac{F_p(\omega; \mathbf{k}; \mathbf{v})}{\omega_{Hp}},$$

$$G_2 = \frac{(-)^p e_p}{m_p \omega_{Hp}} E \frac{\partial f_{0p}}{\partial \mathbf{v}}, \quad \omega_{Hp} = \frac{|e_p| B_0}{m_p},$$

$$e_1 < 0, \quad e_2 > 0, \quad \cos \varphi_1 = \frac{k_{\perp} v_{0\perp}}{k_{\perp} v_{0\perp}},$$

$$\cos \varphi = \frac{v_{\perp} v_{0\perp}}{v_{\perp} v_{0\perp}}.$$

Фурье-образы электромагнитного поля описываются следующей неоднородной системой уравнений:

$$[\mathbf{k} \mathbf{E}] = \omega \mu \mathbf{H}, \quad [\mathbf{k} \mathbf{H}] = -\omega \hat{\varepsilon}(\omega; \mathbf{k}) \mathbf{E} - i \mathbf{j}_{\text{ст}}(\omega; \mathbf{k}), \quad (3)$$

$$\mathbf{j}_{\text{ст}} = \sum_p e_p \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f_p^*,$$

где  $\hat{\varepsilon}(\omega; \mathbf{k})$  — фурье-образ тензора диэлектрической проницаемости (свойства  $\hat{\varepsilon}(\omega; \mathbf{k})$  хорошо изучены [3]); функция  $f_p^*$  — решение уравнения

$$\frac{df_p^*}{d\varphi} + iQf_p^* = G_1(\varphi), \quad (4)$$

функция  $\mathbf{j}_{\text{ст}}$  — это плотность стороннего макроскопического тока, возникающая в результате действия перемещающегося источника (2) заряженных частиц. В бесстолкновительной плазме следствием линеаризации кинетических уравнений является то, что  $\mathbf{j}_{\text{ст}}$  не зависит от невозмущенного состояния плазмы.

Однозначное по  $\varphi$  решение уравнения (4) может быть представлено в виде

$$f_p^* = - \int_0^{\infty (-)^p} d\varphi' G_1(\varphi' + \varphi) \exp [i\gamma_1 \varphi' + i\delta_1 \sin(\varphi' + \varphi - \varphi_1)] - \quad (5)$$

$$- i\delta_1 \sin(\varphi - \varphi_1)],$$

где введены обозначения

$$\gamma_{\pm} = (-)^p \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega_{Hp}}, \quad \delta_1 = (-)^{p-1} \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Hp}}.$$

Знак верхнего предела в (5) выбран из условия сходимости при наличии соударений между частицами.

Для получения зависимости  $f_p^*(\omega; \mathbf{k}; \mathbf{v})$  зададим конкретный вид функции  $G_1$ . С этой целью возьмем  $F_p^{(2)}$  в (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_p^{(2)}(\mathbf{v} + \omega_{0p} \mathbf{e}_z) &= N_0 \delta(v_z + \omega_{0p}) \delta(v_x) \delta(v_y) = \\ &= \frac{N_0}{v_{\perp}} \delta(v_{\parallel} + \omega_{0p} \cos \alpha) \delta(v_{\perp} - \omega_{0p} \sin \alpha) \delta(\varphi - \pi), \end{aligned} \quad (6)$$

$\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ . Функция (6) не учитывает разброса скоростей в источнике относительно скорости  $\mathbf{v} = -\omega_{0p} \mathbf{e}_z$ . Принимая во внимание (3), (6), получим интегральное представление  $j_{\text{ст}}(\omega; \mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} j_{\text{ст}}(\omega; \mathbf{k}) &= \sum_{p=1,2} (-)^p \frac{e_p F_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \omega_{0p} \mathbf{e}_z}{\omega_{Hp}} \times \\ &\times \int_0^{\infty (-)^p} d\varphi' \exp[i\gamma_0 \varphi' + i\delta_0 \sin(\varphi' - \varphi_1 + \pi) - i\delta_0 \sin(\pi - \varphi_1)], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{(-)^p}{\omega_{Hp}} (\omega + k_{\parallel} \omega_{0p} \cos \alpha), \quad \delta_0 = (-)^{p-1} \frac{k_{\perp} \omega_{0p} \sin \alpha}{\omega_{Hp}}.$$

Прежде чем перейти к вычислению интеграла в (7) при произвольных  $\omega_{Hp}$ , рассмотрим два предельных случая.

Выполним сначала предельный переход к случаю изотропной плазмы. При этом учтем, что при  $\omega_{Hp} \rightarrow 0$  основной вклад в интеграл (7) дают  $\varphi' \ll 1$ . Это обстоятельство позволяет сделать замену

$$\sin(\varphi' - \varphi_1 + \pi) - \sin(\pi - \varphi_1) \rightarrow \varphi' \cos(\pi - \varphi_1).$$

Рассматривая  $I = \frac{(-)^{p-1}}{\omega_{Hp}} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t}$  как преобразование Лапласа для

$$I = \frac{(-)^p}{i\omega_{Hp} \Omega}, \quad \text{получим}$$

$$j_{\text{ст}}(\omega; \mathbf{k}) \Big|_{B_0=0} = - \sum_{p=1,2} e_p F_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \frac{\omega_{0p} \mathbf{e}_z}{i(\omega + \omega_{0p} k_z)}.$$

Другой предельный случай — внешнее поле  $\mathbf{B}_0$  велико, так что  $|\delta_0| \ll 1$ . При этом  $\exp[i\delta_0 \sin(\varphi' + \pi - \varphi_1)]$  в (7) заменим на  $J_0(\delta_0)$  — среднее значение ее за период. В результате

$$\begin{aligned} j_{\text{ст}}(\omega; \mathbf{k}) \Big|_{|\delta_0| \ll 1} &\approx - \sum_{p=1,2} \frac{e_p F_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \omega_{0p} \mathbf{e}_z J_0(\delta_0)}{i(\omega + k_{\parallel} \omega_{0p} \cos \alpha)} \times \\ &\times \exp[-i\delta_0 \sin(\pi - \varphi_1)]. \end{aligned}$$

В случае магнитных полей  $B_0$  произвольной величины  $\exp[i\delta_0 \sin(\varphi' + \pi - \varphi_1)]$  в (7) можно представить в виде ряда Фурье  $\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\delta_0) \times \exp[is(\varphi' + \pi - \varphi_1)]$ . Тогда выражение для  $j_{ct}$  имеет вид

$$j_{ct}(\omega; \mathbf{k}) = - \sum_{p=1,2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e_p F_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \omega_{0p} e_z J_s(\delta_0)}{i(\omega + k_{\parallel} \omega_{0p} \cos \alpha + (-)^p s \omega_{Hp})} \times \\ \times \exp[is(\pi - \varphi_1) - i\delta_0 \sin(\pi - \varphi_1)].$$

Учтем теперь влияние соударений в плазме на  $\mathbf{j}(\omega; \mathbf{k})$ . Эффективную частоту соударений  $\nu$  введем, добавляя в правые части кинетических уравнений член  $(\Delta_p - \nu f'_p)$ , где  $\Delta_p = S_p + \nu f'_p$ ,  $S_p$  — интеграл столкновений. Нетрудно заметить, что в задаче о теле, взаимодействующем с плазмой, не выполняется закон сохранения числа частиц плазмы, если  $\Delta_p = 0$ . С целью упрощения задачи иногда (см. [1], § 19)  $\Delta_p$  берут в виде  $\Delta_p = \nu f'_{0p} \int d\mathbf{v} f'_p$ . Выбор такого  $\Delta_p$  обеспечивает выполнение закона сохранения числа частиц:  $\int d\mathbf{v} (\Delta_p - \nu f'_p) = 0$ .

В общем случае, не конкретизируя вида зависимости  $\Delta_p = \Delta_p(f'_p; f_{0p})$ , можно получить уравнение

$$\frac{df'_p}{d\varphi} + i \left[ Q + \frac{i\nu}{(-)^p \omega_{Hp}} \right] f'_p = G_1 + G_2 + (-)^{p-1} \frac{\Delta_p(f'_p; f_{0p})}{\omega_{Hp}}.$$

В линейном приближении из этого уравнения вместо (4) будем иметь

$$\frac{df_p^*}{d\varphi} + i \left[ Q + \frac{i\nu}{(-)^p \omega_{Hp}} \right] f_p^* - G_1 = (-)^{p-1} \frac{\Delta_p(f_p^*; f_{0p})}{\omega_{Hp}}, \quad (8)$$

а тензор  $\hat{\varepsilon}(\omega; \mathbf{k})$  в системе уравнений (3) теперь следует брать с учетом соударений в плазме. Уравнение (8) будем решать методом последовательных приближений, положив

$$f_p^* = \sum_{n=0}^{\infty} (f_p^*)_n,$$

где  $(f_p^*)_n$  — есть решение уравнения

$$\frac{d(f_p^*)_n}{d\varphi} + i \left[ Q + \frac{i\nu}{(-)^p \omega_{Hp}} \right] (f_p^*)_n - G_1 = (-)^{p-1} \frac{\Delta_p((f_p^*)_{n-1}; f_{0p})}{\omega_{Hp}}, \\ \Delta_p((f_p^*)_{-1}; f_{0p}) = 0.$$

При этом получим разложение  $j_{ct}(\omega; \mathbf{k})$  в ряд

$$j_{ct}(\omega; \mathbf{k}) = \sum_{p=1,2} \sum_{n=0}^{\infty} e_p \int d\mathbf{v} \mathbf{v} (f_p^*)_n. \quad (9)$$

В отличие от случая бесстолкновительной плазмы,  $j_{ct}$  в (9) зависит от невозмущенного состояния плазмы. С учетом зависимости (6) (отсутствие разброса скоростей в источнике относительно скорости  $\mathbf{v} = -\omega_{0p} \mathbf{e}_z$  в частном случае  $\omega_{0p} = 0$ ) получим  $j_{ct} = \mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ , так как мы здесь не учитывали взаимодействия плазмы с поверхностью



источника (2) (см. об этом [1, 2]). В дальнейшем при исследовании зависимости  $\mathbf{j}_{\text{ст}} = \mathbf{j}_{\text{ст}}(\omega; \mathbf{k})$  ограничимся учетом в (9) одного члена с  $n = 0$ :

$$\mathbf{j}_{\text{ст}} \approx - \sum_{p=1,2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{e_p F_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \omega_{0p} e_z J_s(\delta_0)}{i(\omega + i\nu + k_{\parallel} \omega_{0p} \cos \alpha + (-)^p s \omega_{Hp})} \times \exp [is(\pi - \varphi_1) - i\delta_0 \sin(\pi - \varphi_1)]. \quad (10)$$

Учет только одного члена с  $n = 0$  по существу соответствует условию  $\Delta_p = 0$  в (8), т. е. при этом, строго говоря, не выполняется закон сохранения числа частиц в плазме.

Для источника, движущегося с постоянной скоростью вдоль оси  $z$ , функцию  $F_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k})$  в (10) можно представить в виде  $F_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) = \tilde{F}_p^{(1)}(\omega; \mathbf{k}) \delta(\omega - k_z v_0)$ . Благодаря этому удается сделать обратное преобразование Фурье по  $\omega$ :

$$\mathbf{j}_{\text{ст}}(t; \mathbf{k}) = - \sum_{p=1,2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \{e_p \omega_{0p} e_z \tilde{F}_p^{(1)}(k_z v_0; \mathbf{k}) J_s(\delta_0) \times \exp [is(\pi - \varphi_1) - i\delta_0 \sin \varphi_1] \} \{2\pi i(k_z v_0 + i\nu + k_{\parallel} \omega_{0p} \cos \alpha + (-)^p s \omega_{Hp})\}^{-1},$$

где  $k_{\parallel}$ ,  $k_{\perp}$ ,  $\varphi_1$  связаны с  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  соотношениями (см. рис. 1, 2)

$$k_{\parallel} = k_z \cos \alpha - k_y \sin \alpha, \quad k_{\perp} = - \frac{k_x}{\sin \varphi_1},$$

$$\varphi_1 = \arcsin \left\{ \frac{-k_x}{[k_x^2 + (k_y \cos \alpha + k_z \sin \alpha)^2]^{1/2}} \right\}.$$

В дальнейшем при получении зависимости  $\mathbf{j}_{\text{ст}}(t; \mathbf{r})$  рассмотрим два частных случая движения источника (2) относительно внешнего поля  $\mathbf{B}_0$  — продольное ( $\alpha = 0$ ) и поперечное ( $\alpha = \pi/2$ ).

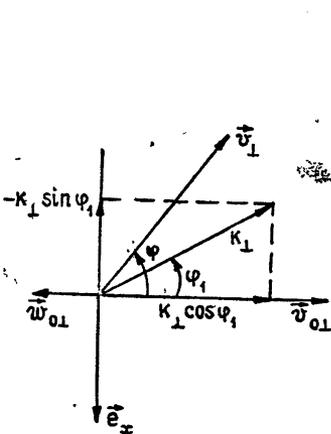


Рис. 1.

Рис. 1. Расположение векторов на плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}_0$ .

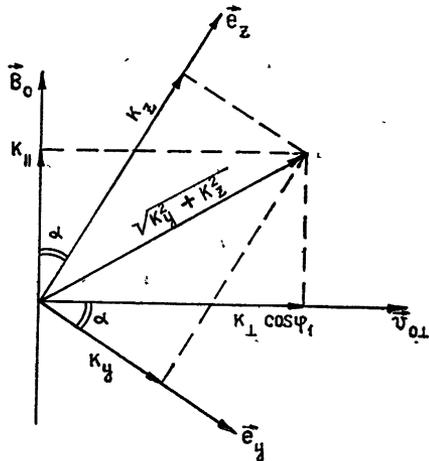


Рис. 2.

Рис. 2. Расположение векторов на плоскости, проходящей через векторы  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ ; орт  $\mathbf{e}_x$  перпендикулярен этой плоскости.

При продольном движении, если источник плоский и его поверхность перпендикулярна направлению движения, при обратном преобразовании Фурье удается произвести аналитически интегрирование по  $k_x, k_y, k_z$ :

$$j_{ct}(t; r) \Big|_{a=0} = -\frac{\eta(v_0 t - z)}{2\pi} e_z \sum_{p=1,2} \frac{e_p \omega_{0p} \Phi_p(x, y)}{v_0 + \omega_{0p}} \times \exp\left(-\nu \frac{|v_0 t - z|}{v_0 + \omega_{0p}}\right), \quad (11)$$

где

$$\Phi_p(x, y) = \frac{F_p^{(1)}(r - v_0 t e_z)}{\delta(z - v_0 t)}, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Зависимость  $j_{ct}$  от координат  $x, y$  такая же, как у источника  $F_p^{(1)}(r - v_0 t e_z)$ .

Ток в (11) отличен от нуля только позади источника, и слагаемые, входящие в (11), убывают экспоненциально при удалении от поверхности источника из-за наличия соударений в плазме (при  $\nu \sim 10^3 \text{ с}^{-1}$  и  $v_0 + \omega_{0p} \sim 5 \text{ км/с}$   $j_{ct}$  убывает в  $e$  раз при удалении от поверхности источника на расстояние  $\sim 5 \text{ м}$ ). Если плоский источник неподвижен ( $v_0 = 0$ ) и из него вылетает пучок заряженных частиц вдоль вектора  $B_0$  (т. е.  $\omega_{0p} \parallel B_0$ ), то ток становится плоским:

$$j_{ct} \Big|_{\substack{v_0=0 \\ \omega_{0p} \parallel B_0}} = \begin{cases} -\frac{e_z}{2\pi} \sum_{p=1,2} e_p \Phi_p(x, y), & z = 0 \\ 0, & z \neq 0 \end{cases}$$

В случае, если  $\Phi_p(x, y) = \Phi_p^{(1)}(x) \cdot \Phi_p^{(2)}(y)$ , источник по-прежнему плоский и движение его происходит в направлении, перпендикулярном  $B_0$ , при обратном преобразовании Фурье удается произвести интегрирование только по  $\omega, k_x$  и  $k_y$ :

$$j_{ct}(t; r) \Big|_{a=\pi/2} = -\frac{\eta(v_0 t - z)}{(2\pi)^2 v_0} e_z \sum_{p=1,2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e_p \omega_{0p} \Psi_{ps}(x) \times \Phi_p^{(2)}(y) \exp(-q_s |v_0 t - z|), \quad (12)$$

где

$$\Psi_{ps}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x J_s(\delta_{00}) \Phi^{(1)}(k_x) \exp\left\{i s \varphi_{00} + i k_x \left[ x + (-)^p \frac{\omega_{0p}}{\omega_{Hp}} \right]\right\},$$

$$q_s = -\frac{i\nu + (-)^p s \omega_{Hp}}{v_0}, \quad \varphi_{00} = \arcsin\left[-\frac{k_z}{(k_x^2 + q_s^2)^{1/2}}\right],$$

$$\delta_{00} = (-)^p \frac{\omega_{0p}}{\omega_{Hp}} (k_x^2 + q_s^2)^{1/2}.$$

В отличие от случая продольного движения, кроме экспоненциального убывания  $j_{ct}$  при удалении от поверхности плоского источника (2), имеются пространственные осцилляции отдельных слагаемых в ряду по  $s$ . Масштаб этих осцилляций

$$\zeta_{sp} = 2\pi \frac{v_0}{s \omega_{Hp}}, \quad \frac{\zeta_{s1}}{\zeta_{s2}} = \frac{m_1}{m_2} \ll 1$$

(при  $v_0 \sim 3$  км/с и  $\omega_{H2} \sim 30$  с<sup>-1</sup>  $\zeta_{s2} \sim \frac{200 \pi}{s}$  м). Зависимость  $j_{ct}$  от координаты  $y$  остается такой же, как и у  $F_p^{(1)}$  (в (12) входит  $\Phi_p^{(2)}(y)$ ), зависимость от координаты  $x$  (ось  $x$  перпендикулярна векторам  $v_0$  и  $B_0$ ) отличается от  $\Phi_p^{(1)}(x)$  (в (12) входит  $\Psi_{ps}(x)$ ). Для нахождения  $\Psi_{ps}(x)$  нужны численные расчеты. При поперечном движении происходит уменьшение масштаба, на котором  $j_{ct}$  убывает экспоненциально при удалении от поверхности плоского источника (2). Эти масштабы—  $v_0/v$  при  $\alpha = \pi/2$  и  $\frac{v_0 + \omega_{0p}}{v}$  при  $\alpha = 0$ . Если интересоваться электромагнитными полями, возбуждаемыми источником (2), то они могут быть найдены из (3) в результате обратного преобразования Фурье. При этом не нужна зависимость  $j_{ct}(t, r)$ , а достаточно формул (9), (10) для фурье-образа  $j_{ct}(\omega; k)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, изд. Наука, М., 1964.
2. Я. Л. Альперт, Волны и искусственные тела в приземной плазме, Физматгиз, М., 1974.
3. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмолподобных сред, Атомиздат, М., 1961.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 апреля 1975 г.

#### МАКРОСКОПИЧЕСКИЙ ТОК ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦНОЙ ПУЧКА ПЕРЕМЕЩАЮЩЕЙСЯ В ПЛАЗМЕ

*V. A. Pavlov*

Expressions for the macroscopic current and for its Fourier-representation are obtained and analysed. This current is excited by a bunch of charges moving in the plasma. The plasma is described by kinetic equations.

УДК 533.9.01

О ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСНОГО  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЧ ПОЛЯ С ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМОЙ*Б. С. Лазебник, Г. А. Марков, И. В. Хазанов*

Приведена упрощенная теоретическая модель нелинейного взаимодействия СВЧ поля с плазмой газового разряда, которая описывает наблюдаемые в экспериментах «самоподдерживающиеся» резонансные состояния. Рассчитаны нелинейные изменения характеристик СВЧ поглощения в неоднородном плазменном столбе в зависимости от мощности падающей волны и проведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными.

В работах [1-4] было показано, что при облучении сравнительно мощной СВЧ волной положительного столба газового разряда, ориентированного перпендикулярно электрическому полю и волновому вектору падающей волны, плотность плазмы на облучаемом участке устанавливается и удерживается полем этой волны на уровне одного из дипольных резонансов столба в довольно широком интервале параметров разряда и величин подводимой СВЧ мощности  $W_0$ . Относительное поглощение падающей волны в плазме резонансного разряда может быть сравнительно велико [2-4], а энергия заряженных частиц существенно возрастает с увеличением  $W_0$ , если величина поглощаемой плазмой мощности превышает некоторое критическое значение ( $\omega_{уд.кр} \sim 20 \text{ Вт/см}^3$  [3]). Эти данные позволяют говорить о реализации в нелинейном режиме взаимодействия «самоподдерживающегося» резонансного состояния с эффективной передачей энергии СВЧ поля газоразрядной плазме. Чтобы удовлетворить условиям баланса энергии для облучаемого участка столба в случае резонансного разряда при значениях  $W_0$  больше некоторого порога  $W_{0\text{пор}}$  [3], оказалось необходимым предположить аномально большие потери энергии и частиц плазмы на стенке разрядной трубки.

В настоящей работе приведена упрощенная физическая модель нелинейного взаимодействия СВЧ поля с газоразрядной плазмой, объясняющая «самоподдерживающиеся» резонансные состояния, и оценивается роль возможных механизмов увеличения потерь энергии и заряженных частиц из разряда, обусловленных развитием параметрической неустойчивости плазмы [5]. На основании предложенной модели произведен расчет нелинейного поглощения падающей волны в плазменном столбе для характерных в условиях экспериментов работы [2] параметров и проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Воздействие электромагнитного поля на облучаемую часть разряда и нелинейное изменение характеристик поглощения будем описывать, подобно [2], с помощью уравнения баланса энергии, резонансной характеристики разряда, снятой в линейном режиме взаимодействия (см. рис. 1), и упрощенной модели плазменного столба с неизменными вдоль эффективной длины облучаемого участка ( $L_{эфф}$ ) погонными параметра-

ми, соответствующими значениям подводимой в центре волновода погонной мощности  $\omega_0 = W_0/L_{эфф}$  ( $L_{эфф} \sim L/2 = 3,6$  см, где  $L$  — ширина волновода).

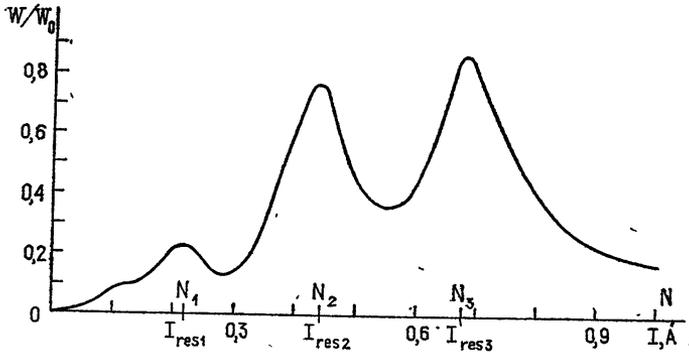


Рис. 1.

При учете тепловых потерь на стенке трубки уравнение баланса энергии для единицы длины столба, в котором с целью получения качественных оценок пространственные производные заменены на отношение соответствующих погонных параметров к характерным размерам неоднородности плазмы, имеет следующий вид:

$$\omega + q = \frac{3}{2} \delta \nu N \mathcal{E}_e + D_{\parallel} \frac{N - N_0}{L_{эфф}^2} (\mathcal{E}_e + eu_i) + D_{\perp} \frac{N}{ab} (\mathcal{E}_e + eu_i). \quad (1)$$

Здесь  $\omega = W/L_{эфф}$  и  $q = I_0 E$  — погонные мощности высокочастотных и статических потерь в плазме,  $I_0$  — ток разряда,  $E$  — значение электрического поля в плазме,  $\delta \nu$  — средняя относительная доля энергии, теряемая электроном при столкновениях с молекулами за 1 с,  $D_{\parallel}$  и  $D_{\perp}$  — продольный и поперечный по отношению к оси трубки и продольному магнитному полю  $H_0$  коэффициенты амбиполярной диффузии,  $N$  — погонная концентрация электронов в столбе ( $N \sim \pi a^2 n_e$ ),  $N_0$  — погонная концентрация на необлучаемом участке,  $b = \frac{\Delta n_e}{n_e}$  — характерный размер при-

стеночной области прозрачной плазмы, в которой в условиях, описанных в [2], идет трансформация поперечной волны в продольные ( $b \leq a/2$ ),  $\mathcal{E}_e$  — средняя энергия электронов,  $u_i$  — потенциал ионизации нейтральных молекул,  $e$  — заряд электрона.

Потери энергии на ионизацию ( $eu_i N \nu_i$ , где  $\nu_i$  — частота ионизации) включены в (1) с помощью уравнения непрерывности

$$\nu_i N = D_{\parallel} \frac{N - N_0}{L_{эфф}^2} + D_{\perp} \frac{N}{ab}. \quad (2)$$

В условиях экспериментов работы [2] (разряд в воздухе при давлении  $p = 0,03$  тор,  $a = 3,2$  мм,  $n_e \sim 10^{11}$  см<sup>-3</sup>,  $\mathcal{E}_e \sim 5$  эВ,  $\delta = 0,1$  [6]) потери энергии электронами на стенке разрядной трубки, как показывают оценки, существенны в энергетическом балансе плазмы только при развитой параметрической неустойчивости, когда велики эффективная частота столкновений электронов и коэффициент поперечной диффузии. Продольной диффузией в (1) можно пренебречь по сравнению с поперечной [3], так как  $ab \ll L_{эфф}^2$  и эффективная частота столкновений мала по сравнению с гирочастотой электронов  $\omega_H$ .

Потери энергии из разряда на продольную теплопроводность малы по сравнению с потерями на столкновения в условиях [2] ( $l_e^2/L_{\text{эфф}}^2 < 0,1$ ,  $l_e$  — длина свободного пробега электрона) и не учитываются в балансе (1).

При значениях  $W_0$ , не слишком далеких от порога параметрической неустойчивости, можно воспользоваться известными результатами теории слаботурбулентной плазмы [7] для определения кинетических коэффициентов в (1). Если предположить максвелловскую функцию распределения электронов по скоростям для частиц со скоростями  $v \ll v_e$  ( $v_e$  — тепловая скорость электронов) и изотропное распределение турбулентных шумов, то коэффициент поперечной диффузии можно определить следующим вычисленным согласно [7] выражением:

$$D_{\perp} = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} 3,5 \frac{\omega_s \omega_s}{n_e \mathcal{E}_e} \left(\frac{v_e}{\omega_H}\right)^2. \quad (3)$$

Здесь  $\omega_s$  и  $\omega_s$  — соответственно стационарная плотность энергии и частота ионно-звуковых волн, возбуждаемых при распаде падающей волны накачки на продольные ионно-звуковые и ленгмюровские волны ( $t \rightarrow l + s$ ).

Учитывая нелинейную перекачку по спектру энергии ленгмюровских и звуковых волн, стационарную плотность шума  $\omega_s$  определим следующим соотношением [8]:

$$\omega_s = 32 n_e \mathcal{E}_e \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \left\{ 2,8 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^{1/2} (\xi^{1/2} - 1) + \frac{\gamma}{8\omega} (\xi - 1) \right\}, \quad (4)$$

где  $\xi = E_i^2/E_{i\text{пор}}^2$ ,  $E_i$  — амплитуда электрического поля в плазме,  $E_{i\text{пор}}$  — пороговое для распадной неустойчивости значение  $E_i$ ,  $\omega$  — частота накачки,  $\gamma$  — декремент затухания ленгмюровских колебаний. Другие механизмы, ограничивающие рост шумового сигнала, например рассеяние ленгмюровских волн на ионах и изменение функции распределения электронов по скоростям [5], когда

$$\omega'_s = 2 \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{\omega}{\pi a^2 \omega_p} \{\xi - 1\} \quad \left( \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m} \right), \quad (5)$$

менее эффективны ( $\omega'_s > \omega_s$ ) в условиях наших экспериментов.

При учете процессов линейной и нелинейной трансформации отношение  $E_i^2/E_{i\text{пор}}^2$  может быть следующим образом выражено через  $\omega_{\text{отн}} = \omega/\omega_{\text{пор}}$ :

$$\frac{E_i^2}{E_{i\text{пор}}^2} = \frac{\omega_{\text{отн}} - \sqrt{\omega_{\text{отн}}^2 - (1 - k^2)(\omega_{\text{отн}}^2 + k^2)}}{1 - k^2}, \quad (6)$$

где  $k^2 = 16 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{b\omega}{v_e}\right)^{2/3}$ .

Система уравнений (1), (3), (4), (6), дополненная экспериментальными условиями независимости (при  $\omega_{\text{уд}} < 20 \text{ Вт/см}^3$ ) электронной температуры ( $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_0 \sim 5 \text{ эВ}$ ) и силы тока разряда от величины погло-

\* Формула (6) получена из следующего выражения для поглощаемой в единице длины столба СВЧ мощности:  $\omega = \beta E_i^2 + \frac{\nu_{\text{эфф}}}{8\pi} E_i^2$ , в которое подставлены коэффициент линейной трансформации  $\beta = \frac{\omega_p^{1/3}}{8\pi} \left(\frac{v_e}{b}\right)^{2/3}$  [9] и  $\nu_{\text{эфф}} = 16\omega_p \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{1}{\xi} (\xi^2 - 1)^{1/2}$  [8].

щаемой СВЧ мощности  $W$  ( $W = \omega L_{\text{эфф}}$ ), описывает изменение погонной концентрации  $N$  плазмы в зависимости от  $W$  при  $W > W_{\text{пор}}$ . Рост частоты ионизации в этом случае ( $\mathcal{E}_e \sim 5 \text{ эВ}$ ) обусловлен, по-видимому, увеличением числа быстрых электронов [3, 5], которые, как показывают оценки, вполне могут обеспечить необходимые изменения  $\nu_i$ .

Решение системы (1), (3), (4), (6) при  $W < W_{\text{пор}}$ , когда  $\omega_s = 0$ , совпадает с выражением (4) работы [2] и построено на рис. 2 с учетом резонансной кривой рис. 1 штрих-пунктирной линией в виде зависимости  $N(W_0)$  для начальной концентрации  $N_0$ , соответствующей разрядному току  $I_0 = 0,18 \text{ А}$  (см. рис. 1). Штриховые линии на рис. 2 соответствуют резонансным значениям концентрации  $N_1$  для плазменно-волнового резонанса (нижняя прямая) и  $N_2$  и  $N_3$  для расщепленного в магнитном поле основного резонанса (две верхние прямые).

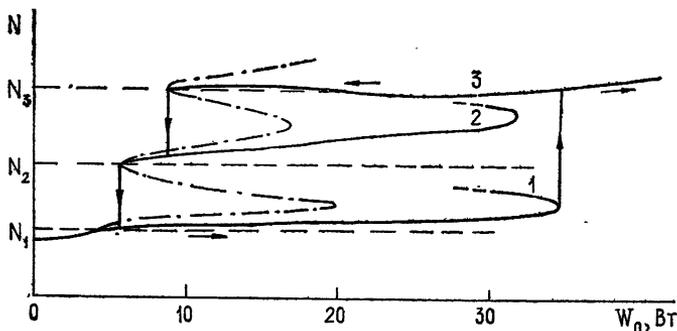


Рис. 2.

Величину «пороговой» для развития параметрической неустойчивости мощности ( $\omega_{\text{пор}}$ ) мы определим из (1) тем предельным значением мощности  $\omega$ , при котором условия баланса энергии уже не могут быть удовлетворены без учета диффузионных потерь:

$$\omega_{\text{пор}} = \frac{3}{2} \delta \nu N \mathcal{E}_0 - q. \quad (7)$$

Для каждого из резонансных состояний ( $N_{\text{рез}} = N_1, N_2, N_3$ ) таким образом определены значения  $\omega_{\text{пор}}$ , которым с помощью резонансной характеристики разряда (см., например, рис. 1) можно поставить в соответствие «пороговые» значения мощности падающей волны ( $W_{0 \text{ пор } 1} = 3 \text{ Вт}$ ,  $W_{0 \text{ пор } 2} = 5,6 \text{ Вт}$ ,  $W_{0 \text{ пор } 3} = 9 \text{ Вт}$  при  $I_0 = 0,18 \text{ А}$ ) и определить соответствующие амплитуды электрического поля в волноводе ( $E_{0 \text{ пор}} = 18 \text{ В/см}$  при  $W_0 = 3 \text{ Вт}$ ). Измеренное в работе [10] значение амплитуды падающей волны, которое определяет порог параметрической неустойчивости для резонансного взаимодействия с разрядом в парах ртути ( $E_{\text{пор}} \sim 15 \text{ В/см}$ ) практически совпадает с  $E_{0 \text{ пор}}$ , определяемым для соответствующей концентрации из (7). Для ширины области прозрачности ( $b$ ) на резонансах примем значения  $b_1 = 1,5 \text{ мм}$ ,  $b_2 = 1 \text{ мм}$ ,  $b_3 = 0,5 \text{ мм}$  (мы не знаем точного распределения концентрации по сечению трубки, поэтому величину  $b$  определяли из условия хорошего совпадения результатов расчета рассматриваемой теоретической модели с экспериментальными данными).

Результаты расчета зависимости  $N(W_0)$  согласно системе уравнений (1), (3), (4), (6), в которой пренебрегалось продольной диффузией по сравнению с поперечной, и резонансной кривой рис. 1 изображены на рис. 2 сплошными линиями (для  $I_0 = 0,18 \text{ А}$ ), причем решения 1, 2 и 3

получены при подстановке в (1) соответствующих значений  $b_{1,2,3}$  и  $W_{0 \text{ пор } 1, 2, 3}$ . Реализация того или другого решения зависит от предыстории изменений  $W_0$ . Например, при увеличении  $W_0$  от нуля концентрация плазмы в разряде растет согласно (1) от  $N_0$  до  $N_1$ , затем (при  $W_0 \geq W_{0 \text{ пор } 1}$ ) развивается параметрическая неустойчивость, растут потери энергии и частиц на стенке трубки и концентрация плазмы удерживается на резонансном уровне  $N \sim N_1$  примерно до  $W_0 \sim 30 \text{ Вт}$ . Дальнейший рост  $W_0$  сопровождается заметным увеличением  $N$ , и при  $W_0 \geq 35 \text{ Вт}$  поступление энергии из волны накачки в плазму уже не компенсируется потерями на стенке для заданных значений  $W_{\text{пор}}$ ,  $b_1$  и  $N$ . В результате нарушаются балансы энергии и частиц\*, происходит накопление заряженных частиц в плазме и значение  $N$  переходит на другую ветвь решений системы (1), (3), (4), (6). Переход  $N$  с одной ветви на другую (на рис. 2 он показан вертикальной прямой со стрелкой) не описывается приведенными уравнениями, и мы только указываем на возможность роста концентрации при  $W_0 \geq 35 \text{ Вт}$ . Для выбранных значений  $b_{1,2,3}$  и  $W_{0 \text{ пор } 1, 2, 3}$  при  $W_0 > 35 \text{ Вт}$  баланс выполняется только на третьей ветви решений (1), (3), (4), (6), где величина концентрации  $N$  близка к значению  $N_3$ , соответствующему второму из «основных» дипольных резонансов столба, вплоть до значений  $W_0 \sim 40 \text{ Вт}$ . При уменьшении  $W_0$  переходы между резонансными состояниями также происходят «скачком» и показаны на рис. 2 стрелками.

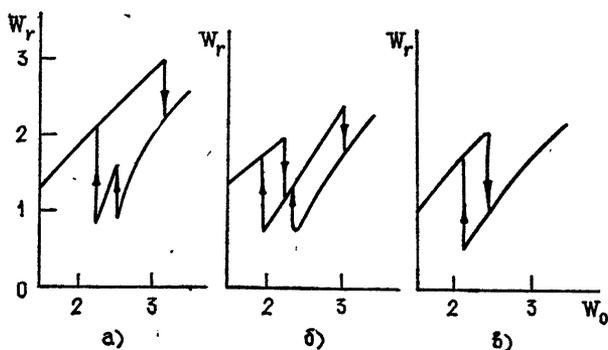


Рис. 3.

Пользуясь полученной зависимостью  $N(W_0)$  и резонансной характеристикой рис. 1, можно построить график изменения мощности отраженного от плазмы сигнала  $W_r = W_0 - W$  от мощности падающей волны  $W_0$  (см. рис. 3 а,  $I_0 = 0,18 \text{ А}$ ). Кривые рис. 3 б и 3 в построены аналогичным образом для начальных концентраций, соответствующих разрядным токам  $I_0 = 0,3 \text{ А}$  и  $0,5 \text{ А}$ . Направление изменений  $W_r$  показано на рис. 3 стрелками. Нелинейный масштаб осей тот же, что и на экспериментальных осциллограммах рис. 4.

Сравнение теоретических (рис. 3) и экспериментальных (рис. 4) кривых обнаруживает удовлетворительное согласие между ними как в отношении расположения и поведения гистерезисных петель  $W_r(W_0)$ , так и в отношении величины и характера изменений относительного поглощения вдоль соответствующих ветвей сравниваемых кривых. Отме-

\* В данной модели энергия, поглощаемая плазмой при  $W > W_{\text{пор}}$  идет в основном на ионизацию нейтральных молекул и выносятся из разряда турбулентным потоком частиц.



тим, что кривые  $W_r(W_0)$ , рассчитанные при учете зависимостей  $\omega_s \sim \xi$  (см. формулу (5)) и  $\nu_{эфф} \sim \xi^2$  (см. [5]), как и кривые работы [2], качественно отличаются от экспериментальных кривых рис. 4 и поэтому не приведены в работе.

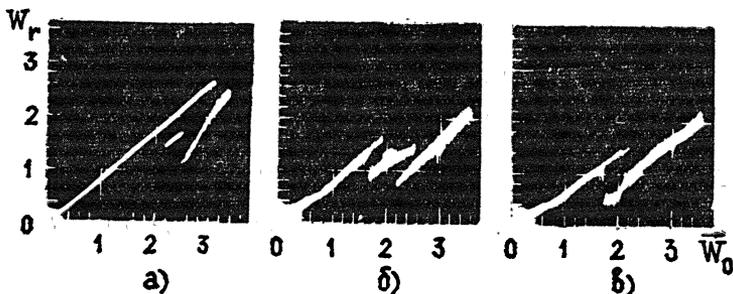


Рис. 4.

Авторы признательны В. Б. Гильденбургу и А. Г. Литваку за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Messiaen, P. E. Vandenplas, Phys. Fluids., 12, 2406 (1969).
2. В. Б. Гильденбург, Г. А. Марков, А. Я. Шишко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 629 (1971).
3. Г. А. Марков, ЖТФ, 45, 267 (1975).
4. В. Г. Зорин, Б. С. Лазебник, Н. В. Лунин, Г. А. Марков, ЖТФ, 45, 1006 (1975).
5. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
6. Г. Месси, Е. Бархон, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, М., 1958.
7. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1972.
8. И. А. Кольчугина, А. Г. Литвак, И. В. Хазанов, Письма в ЖЭТФ, 21, 321 (1975).
9. В. Е. Голант, А. Д. Пиляя, УФН, 104, 413 (1971).
10. R. A. Stern, N. Tzoar, Phys. Rev. Lett., 17, 903 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
28 мая 1975 г.

#### A THEORETICAL MODEL OF NONLINEAR RESONANCE INTERACTION OF UHF FIELD AND GAS-DISCHARGED PLASMA

B. S. Lazebnik, G. A. Markov, I. V. Hkazanov

A simplified theoretical model of nonlinear interaction between UHF field and gas-discharge plasma is given. The model describes the „self-sustained“ resonant states observed in the experiments. Nonlinear changes in the characteristics of UHF absorption in a inhomogeneous plasma column are calculated as a function of the power of an incident wave. The results of calculation are compared with the experimental data.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.56

**ДИФFUЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ  
КОГЕРЕНТНОСТИ**

*А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский*

1. Функция взаимной когерентности поля в среде с крупномасштабными неоднородностями, рассчитанная в приближении локальных возмущений, широко используется в экспериментальных и теоретических работах [1]. Однако окончательная формулировка результата весьма громоздка. Поэтому представляют интерес асимптотические исследования, позволяющие существенно упростить расчеты и провести качественный анализ процесса распространения волн.

Спектр функции когерентности удовлетворяет уравнению переноса в приближении малых углов [2]. Это уравнение переходит в более простое уравнение диффузионного приближения, когда угловой спектр поля становится существенно шире углового спектра элементарных актов рассеяния. Аналогичное упрощение уравнения для функции взаимной когерентности обозначает замену переменного коэффициента в уравнении его квадратичным разложением вблизи нуля аргумента. Однако эти соображения еще не позволяют получить асимптотический вид решения при анализе распространения волн в среде с крупномасштабными неоднородностями, так как между плоскостью, в которой формулируется начальное условие, и областью, в которой применимо упрощенное уравнение, лежит слой, для которого диффузионное приближение неприменимо. Имеющиеся в литературе расчеты с использованием уравнения переноса в диффузионном приближении [3, 4] выполнены в предположении, что начальное условие каким-то образом продолжено до дистанций, на которых уже применимо диффузионное приближение. Для корректного определения диффузионного приближения функции когерентности и выяснения границ его применимости целесообразно провести асимптотический анализ точного решения. Такой анализ проводится в предлагаемом сообщении.

2. Покажем, что точное решение для функции взаимной когерентности с заданным начальным условием стремится к диффузионному приближению с тем же начальным условием по мере стремления к нулю регулярной компоненты поля. Таким образом, диффузионное приближение имеет место, когда велико отношение толщины слоя к толщине зоны, в которой еще значителен вклад регулярной компоненты.

Функцию взаимной когерентности, приведенную в [5], с помощью несложных преобразований представим в виде

$$\begin{aligned}
 F \equiv \langle U(x_1, z) U^*(x_2, z) \rangle &= \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \tilde{F}_0 \left[ \eta_1, \frac{k}{z} (\tau_1 - \right. \\
 &\left. - \eta_1) \right] \exp \left[ \frac{ik}{z} (\tau_2 - x_0) (\tau_1 - \eta_1) \right] \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{k^2 z}{2(\tau_1 - \eta_1)} \int_{\tau_1}^{\eta_1} d\nu [\gamma(0) - \gamma(\nu)] \right\}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для простоты рассмотрим двумерный случай. Медленно меняющуюся амплитуду поля  $U(z, x)$  определим в декартовой системе координат, в которой  $z$  — направление распространения волны,  $\tau_1 = x_1 - x_2$ ,  $\tau_2 = (x_1 + x_2)/2$  — поперечные координаты точек наблюдения,  $\{x_0, 0\}$  — координаты центра антенны. В формуле (1)

$$\tilde{F}_0(\tau_1, q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 F_0(\tau_1, \tau_2) \exp(-i\tau_2 q),$$

$F_0(\tau_1, \tau_2)$  — начальное значение функции  $F$ , определяемое полем в раскрыве антенны,

$$\gamma(\nu) = \int_0^{\infty} ds B(\nu, s), \quad B(x_1 - x_2, z_1 - z_2)$$

— корреляционная функция диэлектрической проницаемости среды, имеющая по обоим переменным характерный линейный масштаб  $\Lambda$ .

Решение (1) представляет собой сумму когерентной и флуктуационной составляющих. Влияние неоднородностей среды на когерентную составляющую, равную произведению средних полей, описывается множителем  $\exp(-k^2\gamma(0)z/2)$ . Введем критическую дистанцию  $z = h$ , начиная с которой флуктуационная компонента становится сравнима с когерентной. Величину  $h$  определим из условия  $k^2\gamma(0)h/2 = 1$ . Рассмотрим функцию  $F$  при  $z \gg h$ , когда когерентная компонента мала. В этом случае в показателе подынтегрального множителя выражения (1) можно выделить большой параметр  $k^2z\gamma(0)/2 = z/h \gg 1$  и записать этот множитель в виде

$$\exp\left\{\frac{k^2z}{2(\tau_1 - \eta_1)} \int_{\eta_1}^{\tau_1} d\nu [\gamma(\nu) - \gamma(0)]\right\} = \exp\left[-\frac{z}{h} f(\tau_1, \eta_1)\right], \quad (2)$$

где

$$f(\tau_1, \eta_1) = \frac{1}{\tau_1 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\tau_1} d\nu \left[1 - \frac{\gamma(\nu)}{\gamma(0)}\right]. \quad (3)$$

Поскольку по определению  $\gamma(\nu)$  является монотонно убывающей функцией  $|\nu|$  и  $\max[\gamma(\nu)] = \gamma(0)$ , функция (3) положительно определена и экспоненциальный множитель (2) всегда является убывающим. Поэтому при  $z/h \gg 1$  основной вклад в интеграл (1) определяется той областью изменения переменных  $\tau_1, \eta_1$ , в которой функция  $f(\tau_1, \eta_1)$  мала. В этой области функцию  $\gamma$  можно аппроксимировать полиномом и выполнить интегрирование в (3). Для аппроксимации воспользуемся теоремой о среднем

$$f(\tau_1, \eta_1) = 1 - \frac{\gamma(\nu_{cp})}{\gamma(0)},$$

где

$$\nu_{cp} \in [\eta_1, \tau_1].$$

Из условия  $f(\tau_1, \eta_1) \ll 1$  получаем  $\nu_{cp} \ll \Lambda$ . Таким образом, малые значения  $f$  определяются поведением функции  $\gamma(\nu)$  вблизи нуля.

Разлагая  $\gamma(\nu)$  в степенной ряд в окрестности  $\nu = 0$  и удерживая первый исчезающий член разложения, вместо (1) получим искомую асимптотическую формулу:

$$F(\tau_1, \tau_2, z) = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \tilde{F}_0\left[\eta_1, \frac{k}{z}(\tau_1 - \eta_1)\right] \times \\ \times \exp\left[\frac{ik}{z}(\tau_2 - x_0)(\tau_1 - \eta_1)\right] \exp\left[-\frac{z}{h} \frac{\gamma''(0)}{6\gamma(0)}(\tau_1^2 + \tau_1\eta_1 + \eta_1^2)\right], \quad (4)$$

где

$$\gamma''(0) = \left.\frac{d^2\gamma(s)}{ds^2}\right|_{s=0}.$$

На достаточно длинных трассах, когда радиус корреляции поля становится меньше размеров антенны, функцию  $\tilde{F}_0$  в (4) можно вынести из-под знака интеграла как медленно изменяющуюся и вместо (4) получить

$$F(\tau_1, \tau_2, z) = \left[\frac{3k^2h\gamma(0)}{2\pi z^3 |\gamma''(0)|}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{3}{4} \left[ \frac{ik(\tau_2 - x_0)\tau_1}{z} - \frac{k^2 h \gamma(0)}{2z^3 |\gamma''(0)|} (\tau_2 - x_0)^2 \right] \right\} \times \\ \times \exp \left( -\frac{\tau_1^2}{4\tau_{1\text{эфф}}^2} \right) \tilde{F}_0(0, 0),$$

где

$$\tau_{1\text{эфф}} = \frac{2\gamma(0)h}{z|\gamma''(0)|}.$$

При  $\tau_1 = 0$  выражения (4), (5) переходят в асимптотические формулы для интенсивности поля, впервые полученные в [6].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Radio Sci., 10, 1 (1975).
2. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
3. H. Bremner, J. Res. Nat. Bureau Stand., 68, 976 (1964).
4. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика 9, № 1, 61 (1966).
5. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
6. A. H. Whitman, M. J. Veegan, J. Opt. Soc. Amer., 60, № 11, 1595 (1970).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
7 апреля 1975 г.

УДК 621.371

### КОРРЕКЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИНТЕЗИРУЕМОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТЕРЬ

О. Н. Терешин, В. М. Седов, Р. Н. Костиков

В задачах синтеза импедансных устройств без учета потерь граничные условия на импедансной поверхности  $z_0(y)$  (рис. 1), при которых реализуется заданное поле  $\dot{H}_x$ , определяется формулой [1]

$$\dot{Z}[y; z_0(y)] = \frac{\dot{E}_z}{\dot{H}_x} = \frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} z'_0 - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}}{\dot{H}_x \sqrt{z_0'^2 + 1}}. \quad (1)$$

Из условия чисто реактивного характера  $\dot{Z}[y; z_0(y)]$  определяется форма импедансной поверхности

$$z'_0 = \frac{\text{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_x \right)}{\text{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x \right)}.$$

На практике импедансные устройства обладают малыми, но конечными потерями. Наличие потерь может привести к значительному отличию поля над импедансной поверхностью от расчетного значения, что, естественно, отразится на эффективности этих устройств.

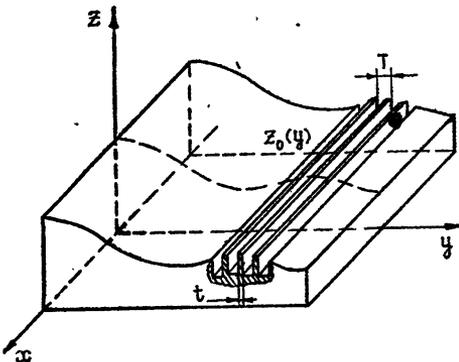


Рис. 1.

Проведем коррекцию параметров синтезируемой импедансной поверхности, позволяющую сохранить расчетную структуру поля над нею при наличии потерь. Для простоты анализа будет рассматриваться ребристая замедляющая поверхность. Нормированный поверхностный импеданс для такой однородной структуры при условии  $T \ll \lambda$ ,  $t \ll T$  ( $T$  — период структуры,  $t$  — толщина ребер) приближенно может быть вычислен по формуле

$$\dot{Z} \approx i \operatorname{tg} (k - ia) h,$$

где  $k$  — волновое число для волны типа ТЕМ в канавке,  $a$  — коэффициент затухания волны,  $h$  — глубина канавки.

Учитывая, что обычно  $a \ll k$ , и пренебрегая членами порядка  $(ah)^2$ , получаем

$$\dot{Z} \cong i\dot{X} + \kappa(1 + \dot{X}^2), \quad (2)$$

где  $\dot{X}$  — чисто реактивный нормированный импеданс,  $\kappa = ah$  — параметр малости

Связь между активной и реактивной частями импеданса подобна известной для других видов замедляющих структур.

Определим параметр синтезируемой поверхности, учитывая связь между активной и реактивной частями импеданса в соответствии с (2):

$$i\dot{X} + \kappa(1 + \dot{X}^2) = \frac{i}{\omega \varepsilon W_0} \frac{\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} z'_0 - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z}}{\dot{H}_x \sqrt{z_0'^2 + 1}}. \quad (3)$$

Приравнявая действительные и мнимые части (3), получаем

$$\dot{X} = \frac{1}{\omega \varepsilon W_0} \frac{1}{|\dot{H}_x|^2 \sqrt{z_0'^2 + 1}} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_0 - \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_x^* \right) \right]; \quad (4)$$

$$\kappa(1 + \dot{X}^2) = - \frac{1}{\omega \varepsilon W_0} \frac{1}{|\dot{H}_x|^2 \sqrt{z_0'^2 + 1}} \left[ \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_0 - \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_x^* \right) \right]. \quad (5)$$

Для случая малых потерь и их локального воздействия на структуру поля в каждом сечении устройства искомые решения могут быть представлены в виде разложения (метод возмущений):

$$\begin{aligned} \dot{X}[y; z_0(y)] &= \dot{X}_0 + \kappa \dot{X}_1 + \kappa^2 \dot{X}_2 + \dots, \\ z_0(y) &= z_{00} + \kappa z_{01} + \kappa^2 z_{02} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\dot{X}_0$  и  $z_{00}$  — соответственно закон распределения импеданса и функция рельефа, найденные в предположении об отсутствии потерь в системе. Действительно, подстановка (6) в (4) и (5) и предположение  $\kappa = 0$  приводит к обычным формулам синтеза реактивных импедансных поверхностей по заданному полю  $\dot{H}_x$  [1]:

$$\dot{X}_0 = \frac{1}{\omega \varepsilon W_0} \frac{1}{|\dot{H}_x|^2 \sqrt{z_{00}'^2 + 1}} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_{00} - \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_x^* \right) \right]; \quad (7)$$

$$z'_{00} = \frac{\operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_x^* \right)}{\operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right)}. \quad (8)$$

Определим первое приближение формул коррекции с учетом потерь. Для этого, ограничиваясь в выражениях (6) двумя первыми членами, подставим их в уравнения (4) и (5). Раскладывая (4) и (5) в ряд Тейлора по  $\kappa$  и приравнявая члены при  $\kappa'$  и при  $\kappa = 0$ , получим

$$1 + \dot{X}_0^2 = - \frac{1}{\omega \varepsilon W_0} \frac{1}{|\dot{H}_x|^2 \sqrt{z_{00}'^2 + 1}} \left\{ \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_{01} + \right. \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{z'_{01} z'_{00}}{1 + z'^2_{00}} \left[ \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_{00} - \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_x^* \right) \right]; \\
 \dot{X}_1 = & \frac{1}{\omega \varepsilon W_0} \frac{1}{|\dot{H}_x|^2 \sqrt{z'^2_{00} + 1}} \left\{ \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_{01} - \right. \\
 & \left. - \frac{z'_{01} z'_{00}}{1 + z'^2_{00}} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_{00} - \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_x^* \right) \right] \right\}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Учитывая (8), из выражения (9) получим дифференциальное уравнение для определения функции  $z_{01}(y)$ , корректирующей в соответствии с (6) первоначальную функцию рельефа  $z_{00}(y)$ ,

$$z'_{01} = - \frac{(1 + \dot{X}_0^2) \omega \varepsilon W_0 |\dot{H}_x|^2}{\operatorname{Im} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right)} \sqrt{1 + z'^2_{00}}. \quad (11)$$

Подстановка (7) в (10) приводит к уравнению,

$$\dot{X}_1 = \frac{1}{\omega \varepsilon W_0} \frac{1}{|\dot{H}_x|^2 \sqrt{1 + z'^2_{00}}} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} \dot{H}_x^* \right) z'_{00} - \frac{z'_{01} z'_{00}}{1 + z'^2_{00}} \dot{X}_0. \quad (12)$$

Аналогично могут быть вычислены  $\dot{X}_2$  и  $z_{02}$  и т. д.

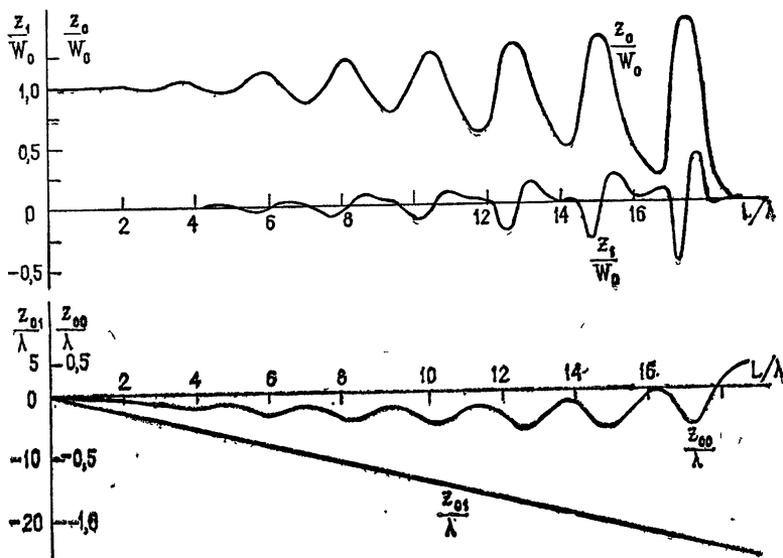


Рис. 2.

Порядок решения задачи синтеза в случае учета потерь должен быть следующим: по заданному полю  $\dot{H}_x$  при пренебрежении потерями определяются функции  $z_{00}$  и  $\dot{X}_0$ , далее по формулам (11) и (12) определяются  $z_{01}$  и  $\dot{X}_1$  и т. д. Параметр  $\alpha$  для ребристой структуры может быть приближенно вычислен, если представить канавку как короткозамкнутую полосковую линию бесконечной ширины с волной TEM по формуле [2],

$$\alpha = ah = h \frac{1}{W_0(T-t)} \sqrt{\frac{\pi \mu m f}{\sigma m}}.$$

где  $\mu_m$  — магнитная проницаемость металла,  $\sigma_m$  — электропроводность металла на расчетной частоте  $f$ .

Данная методика синтеза импедансных поверхностей, учитывающих потери, была проверена на примере ребристой поверхности, поддерживающей возле себя структуру магнитного поля вида

$$\begin{aligned} H_x = & A_1 e^{-n(y \sin \theta + z \cos \theta)} e^{-im(y \cos \theta - z \sin \theta)} + \\ & + A_2 \cos^2 \left[ \frac{\pi}{a} (-y \sin \varphi + z \cos \varphi) \right] e^{-ik(y \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \end{aligned}$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число.

Расчеты производились для следующих параметров:  $\frac{m}{k} = \sqrt{\left(\frac{n}{k}\right)^2 + 1} = 1,41$   
 $\theta = 1^\circ$ ,  $\varphi = 10^\circ$ ,  $a = 4,61$ ,  $A_1/A_2 = 3,71$ . Данная структура поля при синтезе антенны выбрана с целью получения пониженного уровня бокового излучения.

Если антенна, рассчитанная по данным параметрам, выполнена из дюралюминия с периодом структуры  $T = 3,2$  мм, толщиной ребра  $t = 1,2$  мм, при  $\lambda = 3,2$  см, средняя глубина канавок  $h = 5$  мм, а параметр малости  $\chi = 2,4 \cdot 10^{-4}$ .

Как видно из представленных расчетных данных (рис. 2), при обычной реализации импедансных структур (выполнение ребристой структуры из таких материалов, как латунь, алюминий и т. д.) и нормальных условиях даже при значительных длинах ( $\sim 20\lambda$ ) наличие потерь не вносит существенных изменений в ближнее поле антенны. Однако часто встречающиеся на практике случаи, в которых возникает необходимость реализации замедляющих структур на базе материалов с большими потерями, могут привести к необходимости коррекции величины импеданса и рельефа в задачах синтеза.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Терешин, Радиотехника и электроника, 8, № 4, 715 (1963).
2. Д. ж. М. Дьюкс, Печатные схемы, ИЛ, М., 1963.

Всесоюзный заочный электротехнический институт связи

Поступила в редакцию  
29 июля 1975 г.