

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Засухин В. Ф., Романычев А. А., Романычев Ю. Н., Титов Г. К. Двухканальный усилитель-преобразователь для радиоастрономических измерений | 949 |
| Гоцакова Л. С., Крупина А. Е., Яшин Ю. Я. К вопросу о взаимности электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме | 956 |
| Степанов Н. С. О диэлектрической проницаемости нестационарной плазмы | 960 |
| Демченко В. В., Омельченко А. Я. Абсолютная параметрическая неустойчивость низкочастотных волн в неоднородной анизотропной плазме | 969 |
| Капельзон А. А. К вопросу о взаимодействии мощных встречных электромагнитных волн | 973 |
| Ефимова Т. В., Митяков Н. А., Митякова Э. Е., Писарева В. В., Рапопорт В. О., Чугунов Ю. В. Исследование пассивных плазменных резонансов на спутнике «Космос-259» | 977 |
| Филоненко В. А., Ручкин В. В., Тельпуховский Е. Д., Фортес В. Б. Результаты экспериментальных исследований энергетической импульсной реакции тропосферного канала | 984 |
| Кулагин Е. В., Пихтелеев А. И., Тутуркин Ю. П., Тимофеев Ю. В., Фатеев Б. П. Исследование оптической накачки в квантовом генераторе на парах Rb ⁸⁷ и его амплитудных характеристик | 993 |
| Рыжов Ю. А. О статистическом описании динамических систем, находящихся под действием случайных сил | 1001 |
| Кон А. И., Миронов В. Л., Носов В. В. Дисперсия смещений светового пучка в атмосфере в условиях сильных флуктуаций интенсивности | 1015 |
| Васильев Е. Н., Леснова Т. А. Излучение щели в экране в неоднородное полупространство | 1020 |
| Коноплева Н. П. Об инвариантных соотношениях между энергией и импульсом в макроскопической электродинамике | 1025 |
| Дугин Н. А., Дмитренко Д. А. К вопросу о распределении поля в районе фокуса параболоида при расположении источника в зоне Френеля | 1031 |
| Курин А. Ф., Курина Г. А., Новиков В. В. Нелинейная теория МЦР с резонатором Фабри—Перо | 1047 |
| Курина Г. А. О втором приближении метода усреднения в теории электронных мазеров | 1054 |
| Насонов Н. Н., Шендерович А. М. Самоускорение при ударном возбуждении системы полосовых линий интенсивным электронным пучком | 1060 |
| Красильник З. Ф., Реутов В. П. К нелинейной теории усиления волн пространственного заряда в тонких пленках <i>n</i> -GaAs | 1067 |
| Гиматутдинова Г. Н., Степанова Г. А., Баранов В. А., Юмакулова Ф. Ф. Кривые равной координатной чувствительности фотодиодов и фототранзисторов | 1074 |
| Метель А. С., Настюха А. И. Исследование газовой среды, образующейся при тлеющем разряде с полым катодом | 1078 |
| Краткие сообщения и письма в редакцию | |
| Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г., Игнатьев Ю. А., Комраков Г. П. Обратное рассеяние радиоволн от искусственно возмущенной F-области ионосферы | 1084 |
| Манева Г. М. Синхротронное излучение сверхсветового источника | 1086 |
| Прохода И. Г., Лозяной В. И., Карлов В. А. Влияние толщины общей стенки между волноводами на параметры волноводного щелевого моста | 1088 |
| Онуфриенко В. М., Прохода И. Г. Расчет многоволновых многоплечевых волноводных соединений | 1089 |
| Информация | |
| Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XV, № 5, 6, 1975 г., т XVI, № 1, 1976 г. | 1091 |
| Аннотации работ, отмеченных медалями по итогам Всесоюзного конкурса 1974—75 учебного года на лучшую научную работу студентов | 1093 |

УДК 621.396.628 : 523.164

ДВУХКАНАЛЬНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ДЛЯ РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

В. Ф. Засухин, А. А. Романычев, Ю. Н. Романычев, Г. К. Титов

Описывается двухканальный усилитель-преобразователь для радиоастрономических измерений. Этот усилитель совместно с высокочастотными головками различного диапазона, имеющими выход на фиксированную промежуточную частоту, дает возможность при помощи внешней коммутации получить три основных типа радиоастрономических приемников: модуляционный и корреляционный радиометры и мультиплексивный интерферометр. Прибор может работать как при амплитудной, так и при фазовой ($0 \div \pi$) модуляции. Наличие двух каналов позволяет реализовать $\sin\text{-}\cos$ -прием, что обеспечивает одновременное получение амплитудной и фазовой информации.

В радиоастрономической практике получили широкое распространение компенсационные, модуляционные, корреляционные и балансные радиометры. Лучшей чувствительностью обладает компенсационная схема. Однако сильная подверженность ее влиянию флуктуаций коэффициента усиления не позволяет реализовать эту чувствительность. Поэтому в том случае, когда необходима максимально возможная чувствительность, предпочтение отдается двухканальным схемам. Среди двухканальных схем корреляционная и балансная обладают преимуществом перед модуляционной ввиду отсутствия на входе модулятора, вносящего дополнительные погрешности [1]. Для ухода от аномального повышения шумов у нулевой частоты в этих схемах может быть применена фазовая модуляция [1]*. Корреляционная и балансная схемы отличаются лишь способом отделения в обоих каналах когерентного полезного сигнала от некогерентных собственных шумов. В корреляционной схеме напряжения с выходов УПЧ двух отдельных каналов перемножаются, а в балансной складываются.

Разработанный авторами двухканальный усилитель-преобразователь (для краткости обозначим УПД), описываемый в настоящей статье, может быть использован как в модуляционных и корреляционных радиометрах**, так и в мультиплексивных интерферометрах. Особый интерес, как нам представляется, может составить применение УПД в антенных измерениях как радиометрических [3], так и фазометрических [4].

Известные нам реализации схем фазометрических измерений на радиочастотах предполагают перемножение непосредственно на частоте сигнала***, для чего используются гибридные схемы. Однако эти узлы узкополосны, что ограничивает диапазон, в котором могут быть проведены измерения. Диапазон частот УПД при наличии ВЧ головок с вы-

* Впервые фазовая модуляция в двухканальной системе была применена, по-видимому, Райллом [2].

** Корреляционные радиометры подробно исследованы в [6-8], а также в [1].

*** В корреляционных приемниках перемножение осуществляют также на промежуточной частоте.

ходом на фиксированную промежуточную частоту практически ничем не ограничен. Кроме того, УПД позволяет осуществить одновременное измерение синусных и косинусных компонент сигнала (что существенно, например, в системах апертурного синтеза), а также повысить точность измерений по сравнению со схемами, использующими перемножение на СВЧ. Высокая чувствительность приемников с применением УПД и возможность работы по шумовому сигналу также дает известные преимущества, в частности, перед промышленными приборами, используемыми в фазометрических антенных измерениях (например, ФК2-14).

Принцип действия УПД заключается в том, что сигналы промежуточной частоты от ВЧ головок разделяются на два канала, затем преобразуются к видеочастоте с сохранением обеих полос приема и перемножаются. Перемножение сигналов (перекрестное или попарное) выбирается в зависимости от режима, в котором должен работать УПД,—мультитипликативного интерферометра, корреляционного или модуляционного приемника,—и осуществляется внешней коммутацией входов перемножителей.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Блок-схему УПД (рис. 1) можно условно разбить на 3 части. Две из них представляют собой схемы усиления и преобразования сигнала; они совершенно идентичны. Третья часть включает в себя гетеродин, переключатель $0 \div \pi$ и фазосдвигающую цепь $\pi/2$.

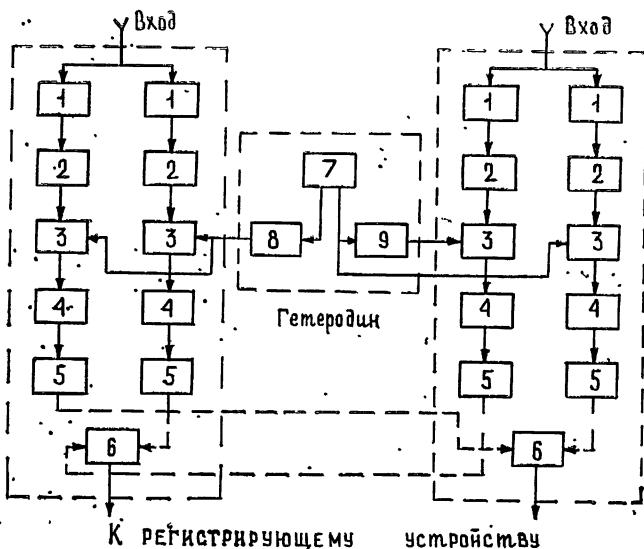


Рис. 1. Блок-схема двухканального усилителя-преобразователя:
1, 5—эмиттерные повторители, 2—транзисторный усилитель
промежуточной частоты 60 МГц , 3—транзисторный смеситель,
4—транзисторный усилитель с полосовым фильтром $0\text{--}5\text{ МГц}$,
6—перемножитель, 7—гетеродин 60 МГц , 8—переключатель
 $0 \div \pi$, 9—фазосдвигающая цепь $\pi/2$.

Наиболее ответственный элемент первых двух частей — перемножитель. Для осуществления перемножения необходимы точные множительные устройства с возможно более широким динамическим диапазоном. Величина сигнала на выходе перемножителя должна быть пропорциональна произведению коррелированных компонент и независима от величины некоррелированных. Практически любой перемножитель

дает на выходе, кроме произведения сигналов с обоих входов, также мешающие составляющие, пропорциональные каждому входному напряжению, а также содержащие комбинации этих напряжений различных порядков. Соответствующие амплитуды мешающих компонент зависят от таких факторов, как баланс перемножающей схемы и степень, с которой характеристика схемы приближается к линейному закону в пределах требуемого диапазона уровней входных сигналов.

а) *Перемножитель*. В УПД используется перемножитель, выполненный по принципу, описанному Фрейтером [5]. Схема перемножителя приведена на рис. 2. Он выполнен как дифференциальный усилитель с эмиттерной связью на транзисторах T_3 и T_4 . Выходной сигнал этих транзисторов включает величины, пропорциональные току радиочастоты T_2 и дифференциальному напряжению между базами T_3 и T_4 . Это позволяет осуществить точное перемножение сигналов в широком диапазоне входных уровней. Токи через транзисторы T_3 и T_4 балансируются сопротивлением R_{13} . Выполненный по указанной схеме на транзисторах КТ-312 перемножитель в полосе 0—5 МГц осуществляет перемножение с точностью не хуже 1% при уровне паразитного сигнала менее 20 дБ.

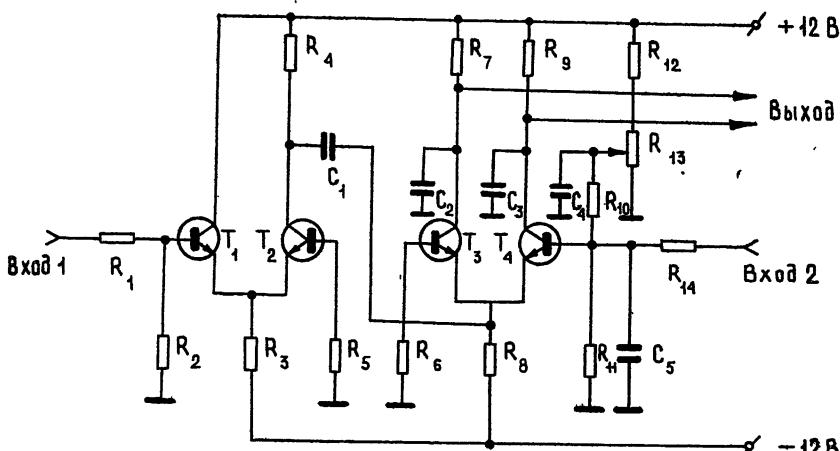


Рис. 2. Принципиальная схема перемножителя.

Определение уровня паразитного сигнала производилось по блок-схеме, изображенной на рис. 3. Отношение показаний регистрирующего прибора при полном подключении перемножителя и при подключении только одного из входов определяет уровень преобладания полезного сигнала над сигналом, обусловленным непосредственным детектированием на каждом входе перемножителя.

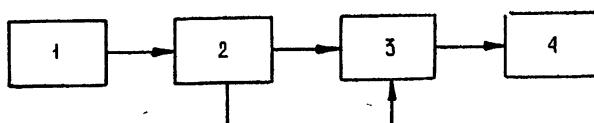


Рис. 3. Блок-схема для определения уровня паразитного сигнала:

1—АМ генератор, 2—делитель 3 дБ, 3—перемножитель, 4—регистрирующий прибор.

б) Гетеродин. В качестве гетеродина в УПД используется кварцевый генератор (5 МГц) с умножителем до 60 МГц . Предусмотрена возможность использования внешнего генератора. К системе гетеродина, кроме генератора и умножителя, относятся и элементы, осуществляющие фазовые операции: переключатель $0 \div \pi$ и цепь фазового сдвига на $\pi/2$ (см. рис. 1).

Как уже указывалось, фазовая $0 \div \pi$ модуляция необходима для получения полезного сигнала после перемножения на частоте модуляции, что позволяет уйти из области аномальных флюктуаций. Кроме того, таким способом достигается возможность использования стандартных методов выделения и регистрации сигналов, хорошо разработанных для модуляционных радиометров. Переключатель $0 \div \pi$ представляет собой коммутатор, в одно плечо которого введен полуволновый отрезок кабеля. Переключатель выполнен по схеме, приведенной на рис. 4. Использовались переключающие диоды 1А501 и кабель РК-50-4-11. Переключатель настроен на частоту 60 МГц . Настройка производилась по минимуму КСВ. Переключатель на $f = 60 \text{ МГц}$ имеет прямые потери менее 4 дБ и обратные потери не менее 30 дБ . Введение фазового сдвига на $\pi/2$ необходимо для одновременного получения синусного и косинусного выходов, что позволяет определить действительную и мнимую составляющие комплексного коэффициента видимости. Постоянный сдвиг фазы $\pi/2$ вводится в канал гетеродина отрезком кабеля РК-50-4-11.

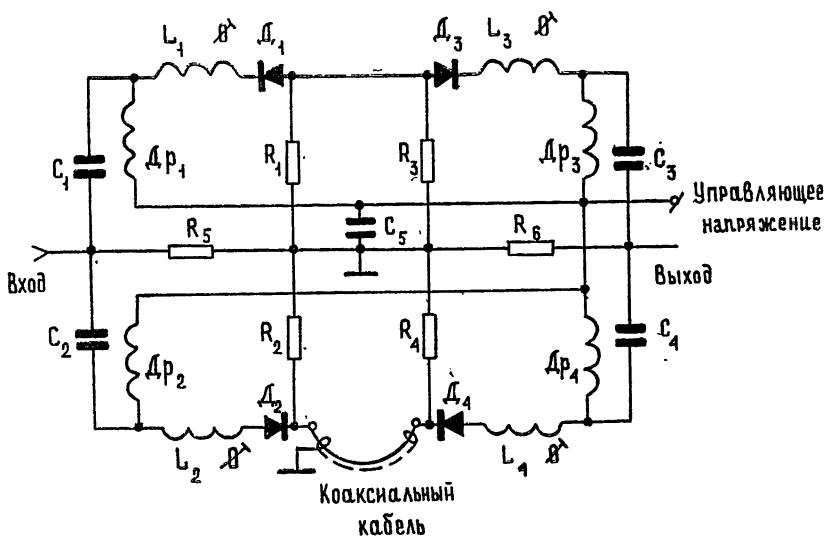
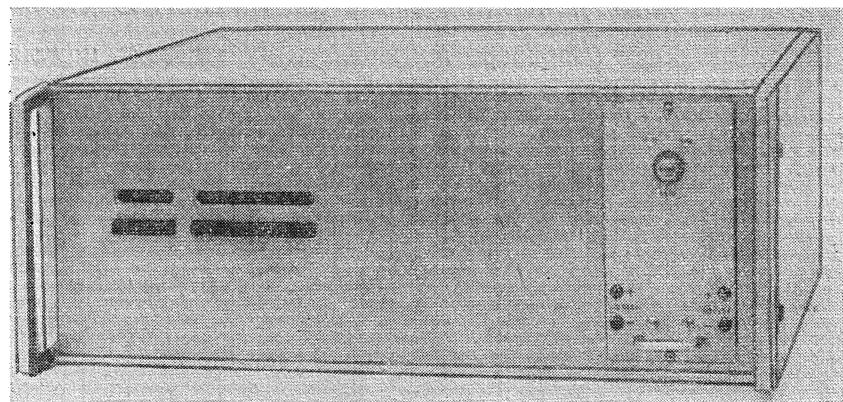


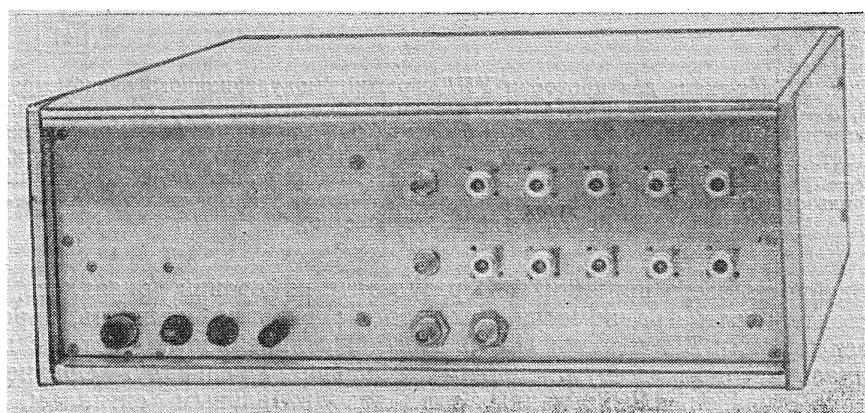
Рис. 4. Принципиальная схема переключателя $0 \div \pi$.

2. КОНСТРУКЦИЯ

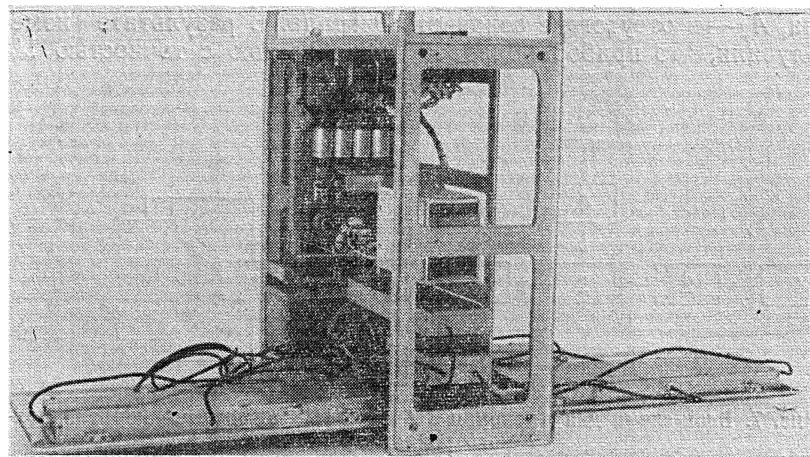
УПД оформлен в виде настольного прибора бесфутлярной конструкции (см. рис. 5). Конструктивное исполнение его повторяет структуру блок-схемы, что дало возможность с максимальным удобством разместить функциональные узлы на шасси, обеспечивая свободный доступ к любой части схемы для регулировки прибора. Функциональные узлы выполнены с применением печатного монтажа.



а)



б)



в)

Рис. 5. Внешний вид прибора:
а) вид спереди, б) вид сзади, в) общий вид раскрытоя прибора.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ УСИЛИТЕЛЯ-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Работоспособность прибора проверялась в режимах модуляционного и корреляционного радиометров. При проверке в составе модуляционного радиометра использовался высокочастотный блок промышленного прибора П5-16. Измерения проводились по схеме, изображенной на рис. 6. Приведенная схема позволяет определить чувствительность

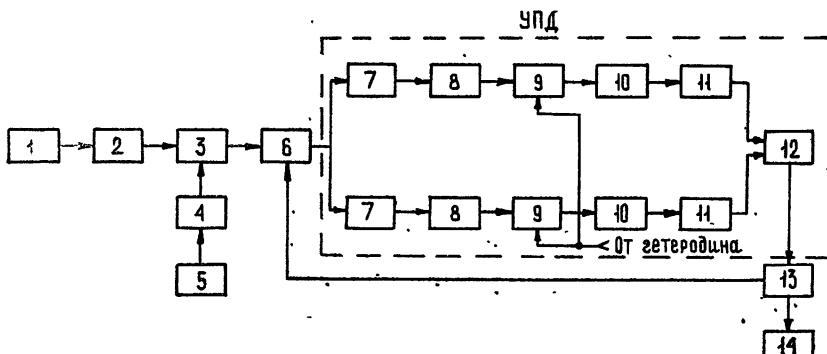


Рис. 6. Блок-схема для проверки УПД в режиме модуляционного радиометра: 1, 5 — генераторы шума, 2, 4 — регулируемые аттенюаторы, 3 — направленный ответвитель, 6 — высокочастотный блок прибора П5-16, 7, 11 — эмиттерные повторители, 8 — транзисторный усилитель промежуточной частоты 60 МГц, 9 — транзисторный смеситель, 10 — транзисторный усилитель с полосовым фильтром 0—5 МГц, 12 — перемножитель, 13 — гетеродинный фильтр, 14 — регистрирующее устройство.

и линейность всего приемника. В результате измерений оказалось, что чувствительность радиометра, как это и следовало ожидать, определяется шумами ВЧ головки П5-16. Проверка линейности системы проводилась методом «дошумливания» к большому сигналу. Сравнение величин ступенек, обусловленных этим дополнительным сигналом, при наличии основного сигнала и при его отсутствии дает возможность определить степень нелинейности системы. Выражение для определения степени нелинейности в процентах имеет вид $x = (1 - A_1/A_2) \cdot 100\%$, где A_1 — величина ступенек дошумливания при наличии основного сигнала, A_2 — в отсутствие основного сигнала. В результате измерений мы получили, что прибор обладает линейностью с точностью 1% для

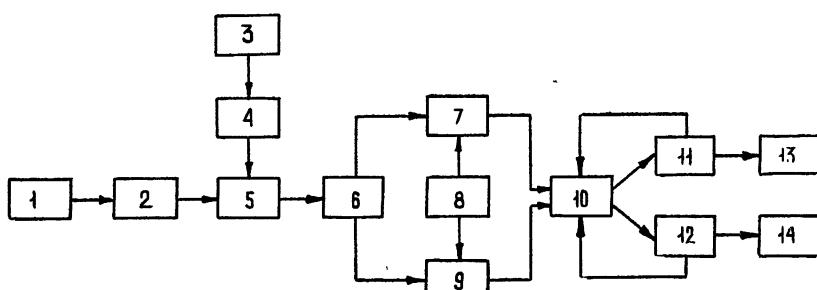


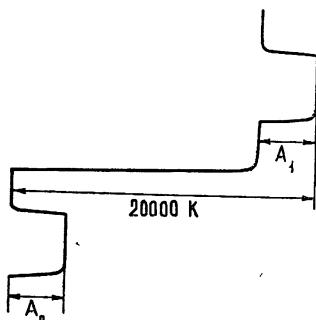
Рис. 7. Блок-схема для проверки работы УПД в режиме корреляционного радиометра:

1, 3 — генераторы шума, 2, 4 — регулируемые аттенюаторы, 5 — направленный ответвитель, 6 — гибридный разветвитель, 7, 9 — высокочастотные блоки приборов П5-16, 8 — гетеродин, 10 — двухканальный усилитель-преобразователь (УПД), 11, 12 — гетеродинные фильтры, 13, 14 — регистрирующие устройства.

шумовых сигналов величиной до 20000°K . Проверка линейности для сигналов с большей шумовой температурой не проводилась. Испытания прибора в составе корреляционного радиометра дали такие же результаты. Измерения проводились по аналогичной методике по блок-схеме, приведенной на рис. 7. В качестве примера на рис. 8 приведена диаграмма, полученная на ленте самописца при проверке линейности корреляционного радиометра.

Рис. 8. Пример диаграммы, полученной на ленте самописца при проверке линейности УПД в режиме корреляционного радиометра:

A_1 — сигнал дошумливания при наличии основного сигнала, A_2 — сигнал дошумливания при отсутствии основного сигнала.



ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Есепкина, Д. В. Корольков, Ю. Н. Парийский, Радиотелескопы и радиометры, изд. Наука, М., 1973.
2. M. Ryle, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 211, 351 (1952).
3. Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966.
4. В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, [А. К. Чандаев], Радиотехника и электроника, 18, № 4, 725 (1973).
5. R. H. Frater, The review of scientific instruments, 35, № 7, 810 (1964).
6. В. С. Воюцкий, Корреляционный метод обнаружения и измерения слабых сигналов, изд. Недра, М., 1965.
7. В. А. Удальцов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, № 1, 5 (1962).
8. Н. С. Кардашев, Б. М. Чихачев, Корреляционный приемник для исследования космического радиоизлучения, Сообщение ГАИШ, М., № 126, 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 января 1975 г.,
после доработки
23 января 1976 г.

A TWO-CHANNEL AMPLIFIER-CONVERTER FOR RADIO ASTRONOMICAL MEASUREMENTS

V. F. Zasukhin, A. A. Romanychev, Yu. N. Romanychev, G. K. Titov

A two-channel amplifier-converter for radio astronomical measurements developed by the authors is described. This amplifier together with the high-frequency different-range heads having the fixed intermediate frequency output makes it possible by the external commutation to obtain three main types of radio astronomical receivers: modulation and correlation radiometers and multiplicative interferometer. The device may operate both at the amplitude and phase ($0 \div \pi$) modulation. Two channels permit to realize sin-cos-reception providing a simultaneous receiving of amplitude and phase information.

УДК 538.574.5

К ВОПРОСУ О ВЗАИМНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Л. С. Гоцакова, А. Е. Крупина, Ю. Я. Яшин

Рассматривается вопрос о взаимности при распространении радиоволн в магнитоактивной плазме при учете многомодовости и поглощения. В ряде практических важных случаев поглощение может играть определенную роль.

В некоторых случаях представляет интерес вопрос о взаимности при распространении радиоволн в магнитоактивной плазме как с учетом, так и без учета поглощения. Указанная задача важна, например, когда одна и та же антенная система работает в режимах приема и передачи при заданном месте расположения приемника и передатчика. Данный вопрос в указанной постановке рассматривался для одной моды в непоглощающей среде [1]. В настоящей работе учтено поглощение, которое в целом ряде практических важных случаев может являться определяющим, а также проведены расчеты с учетом многомодовости.

1. Рассмотрим анизотропную гиротропную среду (магнитоактивная плазма, магнитная проницаемость $\mu = 1$), когда тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij} \equiv \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^g + \hat{\epsilon}^a$ имеет как эрмитову $\hat{\epsilon}^g$, так и антиэрмитову $\hat{\epsilon}^a$ части. В этом случае при $\lambda \ll L$ (L — характерный масштаб неоднородности среды, λ — длина волн) поле описывается в геометрооптическом приближении [2, 3] в комплексной форме и для каждой из нормальных волн имеет вид

$$\mathbf{E} = \Phi \mathbf{f} e^{ik_0 \varphi}, \quad (1)$$

где $k_0 = \omega/c$, ω — частота волн, c — скорость света в вакууме, φ — эйконал, \mathbf{f} — вектор поляризации, Φ — амплитудный множитель*. Эйконал находится как решение уравнения

$$F(\omega, n, x_l) \equiv \det ||A_{ij}|| = 0, \quad (2)$$

$$A_{ij} = n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}, \quad n \equiv \nabla \varphi = \mathbf{n}_1 + i \mathbf{n}_2,$$

\mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — вещественные векторы. Уравнение (2) является условием существования нетривиального решения системы $A_{ij} f_j = 0$, откуда компоненты вектора поляризации определяются из соотношения [4] $f_1/T_{1i} = f_2/T_{2i} = f_3/T_{3i}$, где T_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A_{ij} .

Представим вектор \mathbf{f} в виде суммы двух комплексных векторов:

* Φ, f, φ — в данном случае комплексные величины.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)},$$

где в $\mathbf{f}^{(1)}$ входят комбинации $A_{ij}^3 A_{lm}^3$, $A_{ij}^a A_{lm}^a$, а в $\mathbf{f}^{(2)} - A_{ij}^3 A_{lm}^a$.

Рассмотрим систему уравнений с транспонированной матрицей $\tilde{A}_{ij} \equiv A_{ji}$:

$$\tilde{A}_{ij} \tilde{f}_j = 0.$$

Тогда между векторами \mathbf{f} и $\tilde{\mathbf{f}}$ существует следующая связь [3]:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)*}, \quad \tilde{\mathbf{f}}^{(2)} = -\mathbf{f}^{(2)*}.$$

Амплитудный множитель Φ находится из уравнения

$$\mathcal{S}_0 \nabla \ln \Phi - M = 0, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{S}_0 \equiv (\tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{f}) \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{f}}) - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}),$$

$$M = \tilde{\mathbf{f}} \operatorname{rot}(\mathbf{n} \times \mathbf{f}) + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{f}).$$

Распространение волн происходит вдоль комплексных лучей \mathcal{S}_0 , совпадающих по направлению с комплексными характеристиками, определяемыми уравнениями Гамильтона

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial n}, \quad \frac{dn}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial r}. \quad (4)$$

2. Введем комплексный угол α между \mathbf{n} и \mathbf{H}_0 . Находя из векторного и скалярного произведений величины $\sin \alpha = \frac{|\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{H}_0|}$, $\cos \alpha =$

$= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0}{|\mathbf{n}| |\mathbf{H}_0|}$ и подставляя их в соответствующие выражения для компонент тензора ε_{ij} , приведенные в [5], получим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \left(\omega, \omega_H, \omega_0, \frac{|\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{H}_0|}, \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0}{|\mathbf{n}| |\mathbf{H}_0|} \right). \quad (5)$$

3. Рассмотрим вопрос о взаимности лучей, выходящих из некоторой точки K и попадающих в L , и наоборот. Заметим, что если в среде с эрмитовым тензором ε_{ij} произвести замену $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$, то получаем полную взаимность по $|\Phi|$ и невзаимность по фазе φ [1].

Произведем аналогичную замену в нашем случае. Тогда нетрудно видеть, что $\varepsilon_{ij}(-\mathbf{n}) \rightarrow \tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{n}) \equiv \varepsilon_{ji}(\mathbf{n})$ (более подробно о свойствах тензора ε_{ij} см. в [6], § 4). Из уравнения эйконала (2) видно, что $|\mathbf{n}(-\mathbf{n})| = |\mathbf{n}(\mathbf{n})|$. Тогда с учетом сказанного выше $\mathbf{f}(-\mathbf{n}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{n})$, а принимая во внимание (3), получаем $\mathcal{S}_0(-\mathbf{n}) = -\mathcal{S}_0(\mathbf{n})$. Однако

$$M(-\mathbf{n}) \equiv -\mathbf{f} \operatorname{rot}(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{f}}) - \mathbf{f}(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{f}}) \neq M(\mathbf{n}).$$

Поскольку при произвольном расположении двух комплексных точек K и L комплексные лучи идут вдоль одной и той же комплексной траектории и отличаются лишь направлением, условием взаимности амплитудного множителя Φ является условие

$$\int_K^L [f \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{n} \times f) + \tilde{f}(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} f) - f \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{n} \times \tilde{f}) - f(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \tilde{f})] d\tau = 0. \quad (6)$$

Последнее соотношение записано с учетом $d\tau(-\mathbf{n}) = -d\tau(\mathbf{n})$. В этом случае $\mathcal{S}_0 \cdot \nabla \ln [\Phi(-\mathbf{n})/\Phi(\mathbf{n})] = 0$. Нетрудно видеть, что условие (6) в общем случае, когда $A_{ij}^a \neq 0$, не выполняется.

Рассматривая замену $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}^{**}$, можно показать, что $S(-\mathbf{n}) = -S(\mathbf{n})$, тогда как $M(-\mathbf{n}) = -M(\mathbf{n})$. В этом случае взаимности также нет, поскольку интегралы от одной и той же функции вдоль, вообще говоря, совершенно разных комплексных траекторий не совпадают.

Если сделать произвольную замену

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2 \rightarrow N \equiv -\mathbf{n}_1 - iN_2 \quad (\mathbf{n}_2 \neq \pm N_2),$$

то

$$S(N) \neq -S(\mathbf{n}), \quad M(N) \neq -M(\mathbf{n}).$$

Таким образом, поскольку ни вещественная, ни мнимая части по отдельности в (6) и в аналогичных соотношениях, которые могут быть записаны при заменах $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}^*$, $\mathbf{n} \rightarrow N$, не обращаются в нуль, имеем

$$\frac{\Phi(-\mathbf{n})}{\Phi_0(-\mathbf{n})} - \frac{\Phi(\mathbf{n})}{\Phi_0(\mathbf{n})} \neq 0, \quad (7)$$

где Φ_0 — начальные значения соответствующих величин. Заметим, что в нуль не обращается не только сама величина (7), но и вещественная, ни мнимая ее части.

Если $\hat{\epsilon}^a = 0$ или $\hat{A}^a = 0$, то $f_2 \equiv 0$ и

$$\left| \frac{\Phi(-\mathbf{n})}{\Phi_0(-\mathbf{n})} - \frac{\Phi(\mathbf{n})}{\Phi_0(\mathbf{n})} \right| = 0, \quad \arg \left(\frac{\Phi(-\mathbf{n})}{\Phi_0(-\mathbf{n})} - \frac{\Phi(\mathbf{n})}{\Phi_0(\mathbf{n})} \right) \neq 0,$$

откуда следует, что для модуля амплитудного множителя справедлива взаимность, а для фазы — нет (см., например, [1, 7]).

4. Рассмотрим также случай, когда поле принимаемого сигнала определяется не одной, а несколькими модами. К таким задачам, например, относятся случаи, когда связь осуществляется через ионосферу и полное поле определяется односкакковой, двухскакковой и т. д. траекториями для обычной и необычной волн.

Запишем отношение модулей полей в точках K и L , если излучение приходит соответственно из L и K :

$$\left| \frac{\Phi(K)}{\Phi(L)} \right| = \frac{\left| \sum_i \Phi_i(LK) \exp[i\varphi_i(LK)] \right|}{\left| \sum_i \Phi_i(KL) \exp[i\varphi_i(KL)] \right|} = \frac{|\Phi(LK) \exp[i\varphi(LK)]|}{|\Phi(KL) \exp[i\varphi(KL)]|}, \quad (8)$$

где индекс i перебирает все возможные моды, приходящие из одной точки в другую. Поскольку фазы $\varphi(LK)$ и $\varphi(KL)$ невзаимны (не равны друг другу с противоположными знаками), то даже в случае непоглощающей среды соотношение (8) не равно единице (при одинаковых мощностях излучения). Можно видеть, что в поглощающей среде это соотношение в общем случае никогда не равно единице. В случае же

* Поскольку в случае $A_{ij} \equiv A_{ij}^a$ замена $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ приводит к взаимности, при выяснении вопроса о взаимности при произвольной матрице $A_{ij} \neq A_{ij}^a$ вполне естественно потребовать такой замены \mathbf{n} , при которой бы $\operatorname{Re} n$ меняла знак, а $\operatorname{Im} n$ менялась произвольным образом.

непоглощающей среды о взаимности можно говорить в двух случаях:
 1) если поле определяется в основном одной модой, а все остальные в рамках заданной точности можно отбросить, 2) если осуществить дополнительный поворот антенны на угол, определяющийся разностью аргументов числителя и знаменателя правой части соотношения (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. K. G. Budden, G. W. null, Can. J. Phys., **42**, 113 (1964).
2. J. B. Keller, F. C. Karal, J. Appl. Phys., **31**, 1035 (1960).
3. Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **12**, № 5, 674 (1969).
4. Ю. А. Зайцев, Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **11**, № 12, 1802 (1968).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1968.
6. В. М. Агронович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965.
7. К. Дэвис, Радиоволны в ионосфере, изд. Мир, М., 1973.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
4 ноября 1974 г,
после доработки
26 ноября 1975 г.

ON RECIPROCITY OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A NONHOMOGENEOUS MAGNETOACTIVE PLASMA

L. S. Gotsakova, A. E. Krupina, Yu. Ya. Yashin

The reciprocity of radio waves propagating in magnetoactive plasma is considered, the multi-modeness and absorption being taken into account. In a number of practically important cases the absorption may play the definite role.

УДК 533.9.01

О ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЫ

H. С. Степанов

Исследуется вопрос о виде материальных уравнений для высокочастотных полей в плазме, концентрация которой произвольно быстро меняется во времени из-за процессов ионизации и рекомбинации. Получены выражения для коэффициента поляризуемости как для частных случаев, когда преобладает один из указанных процессов, так и для общего случая. Приводятся конкретные примеры, кратко обсуждаются закономерности изменения частоты и энергии электромагнитных волн в такой среде. Показано, что результаты существенно отличаются от случая, когда изменение концентрации происходит из-за движения неоднородной плазмы, что часто не учитывается в литературе.

Изучению распространения электромагнитных волн в средах с переменными параметрами в течение последних 15 лет было посвящено довольно много работ (см., например, обзоры [1, 2] и [3–11]). Однако особенности материальных уравнений нестационарных сред с дисперсией в литературе не всегда учитываются должным образом. В феноменологической теории эти уравнения, как известно, можно записать в виде интегрального соотношения, связывающего вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ или поляризацию \mathbf{P} с напряженностью \mathbf{E} , например [12],

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{\chi}(t, t-t') \mathbf{E}(t') dt', \quad (1)$$

где в случае нестационарных сред ядро $\hat{\chi}$ зависит не только от разности $t - t'$, но и явно от времени t .

Как обычно, при рассмотрении высокочастотных полей, мы будем включать в $\mathbf{P} = \int_{-\infty}^t j dt'$ все инаведенные в среде токи; для краткости ниже ограничимся случаем изотропных сред без пространственной дисперсии. Тогда исчерпывающей характеристикой электромагнитных свойств среды является диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega, t) = 1 + 4\pi\chi(\omega, t)$, где коэффициент поляризуемости

$$\chi(\omega, t) = \int_0^\infty \hat{\chi}(t, \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

представляет собой фурье-образ ядра $\hat{\chi}(t, \tau)$ в (1) и характеризует отклик $\mathbf{P}(\omega, t)$ на строго гармоническую составляющую поля $\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t}$ (т. е. $\mathbf{P}(\omega, t) = \chi(\omega, t) E_0 e^{i\omega t}$, соответственно $\mathbf{D}(\omega, t) = \epsilon(\omega, t) E_0 e^{i\omega t}$).

Пусть p_i — набор макроскопических параметров среды, определяющих квазистационарное значение диэлектрической проницаемости

$\epsilon_0(\omega, p_i)$. Первое, что часто упускается из виду — отличие реального оператора $\epsilon(\omega, t)$ для нестационарных сред от квазистационарного предела $\epsilon_0[\omega, p_i(r, t)]$, найденного при постоянных p_i . Второй момент, ясное понимание которого отсутствует в ряде работ ([5, 7, 9–11] и др.), заключается в том, что при одном и том же законе изменения $p_i(r, t)$ (и, следовательно, $\epsilon_0[\omega, p_i(r, t)]$) оператор ϵ может быть различным в зависимости от конкретного механизма изменения параметров. Иначе говоря, задание макроскопических параметров среды (плотности, температуры, невозмущенной функции распределения и т. п.) еще не определяет однозначно электромагнитных процессов, что и естественно.

В настоящей работе мы рассмотрим эти вопросы на примере плазмы с переменной концентрацией электронов $N(r, t)$. Изменение концентрации во времени может быть обусловлено как процессами ионизации и рекомбинаций, так и движением неоднородной плазмы; строго говоря, диэлектрическая проницаемость и поведение электромагнитных волн для этих случаев при одинаковых зависимостях $N(r, t)$ оказываются различными. Для краткости ниже рассмотрим случай неподвижной плазмы (некоторые эффекты, связанные с движением, обсуждаются в [1, 2]). Не претендуя на общность, ограничимся элементарными моделями процессов в плазме, тренебрегая, в частности, тепловым движением электронов и вкладом ионов в высокочастотный ток.

В этом случае квазистационарная поляризуемость χ_0 дается обычным выражением:

$$\chi_0 = \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega(\omega - i\nu)},$$

что соответствует

$$\overset{\wedge}{\chi}_0(t, \tau) = \frac{e^2 N(t)}{m\nu} (1 - e^{-\nu\tau}). \quad (3)$$

Здесь $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$, e , m и $N(r, t)$ — заряд, нерелятивистская масса и концентрация электронов, ν — эффективная частота упругих столкновений электронов с ионами и нейтральными частицами. Для нахождения $\overset{\wedge}{\chi}(t, \tau)$ нужно подсчитать ток \hat{j} , индуцированный в среде электрическим полем \hat{E} . Для большей ясности сначала приведем эти расчеты в отдельности для процессов рекомбинации и ионизации.

1. Пусть ионизация отсутствует, так что концентрация электронов N является монотонно убывающей функцией времени из-за рекомбинации или, более общо, захвата свободных электронов ионами и нейтральными частицами; предположим, что такой захват происходит в результате однократного неупругого столкновения и вероятность этого не зависит от скорости электронов v . Тогда вынужденное движение можно считать моноскоростным и для плотности тока записать выражение

$$\hat{j}(t) = eN(t)v(t). \quad (4)$$

Величину v можно выразить через заданное поле E из обычного уравнения движения:

$$m \frac{dv}{dt} = eE - m\nu v, \quad (5)$$

где величину ν для простоты будем считать постоянной. Интегрируя (5) и (4), находим орбиту $P(t)$ на произвольное поле $E(t)$:

$$P(t) = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^t N(t') e^{-\nu t'} dt' \int_{-\infty}^{t'} E(t'') e^{\nu t''} dt''. \quad (6)$$

На первый взгляд это соотношение отличается от феноменологического (1), однако, проинтегрировав (6) по частям, можно привести его к виду (1) с ядром, равным

$$\hat{x}(t, \tau) = \frac{e^2}{m} e^{-\nu \tau} \int_0^\tau e^{\nu \tau'} N(t - \tau') d\tau'. \quad (7)$$

Квазистационарное значение $\hat{x}_0(t, \tau)$, отвечающее (3), соответствует пренебрежению в (7) зависимостью N от τ , т. е. замене $N(t - \tau) \rightarrow N(t)$.

Приведем для сравнения выражение для $x(\omega, t)$ в случае линейного изменения концентрации: $N(t) = N_0 - \mu t$, где N_0 и μ могут быть произвольными функциями координат. Из (7) или непосредственно из (6) при этом нетрудно найти

$$x(\omega, t) = x_0 + x_1, \quad x_1 = -\frac{\mu e^2 (\omega - i\nu)}{m \omega^2 (\omega^2 + \nu^2)}. \quad (8)$$

Заметим, что поправка x_1 (вообще говоря, не малая) содержит как мнимую, так и вещественную части, которые связаны с соответствующими частями x_0 формулами

$$\left| \frac{\operatorname{Im} x_1}{\operatorname{Re} x_0} \right| = \left| \frac{\operatorname{Re} x_1}{\operatorname{Im} x_0} \right| = \frac{\mu}{\omega N}. \quad (9)$$

В пренебрежении членами $\sim (\nu/\omega)^2$ мнимая часть x_1 связана с x_0 следующим образом:

$$\operatorname{Im} x_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \operatorname{Re} x_0}{\partial t \partial \omega}. \quad (10)$$

Ранее подобное соотношение было получено лишь для медленного изменения параметров среды [1, 2]*. Отметим, наконец, что при $\nu \rightarrow 0$

* То обстоятельство, что при плавном изменении параметров между x_1 и x_0 должна существовать связь типа (10) (вообще говоря, с некоторым неизвестным заранее коэффициентом порядка единицы вместо $1/2$ в (10)), легко пояснить в рамках феноменологической теории для произвольной диспергирующей среды. В самом деле, при этом отличие ядра $\hat{x}(t, \tau)$ от квазистационарного значения $\hat{x}_0(t, \tau)$ (соответствующего поляризумости $x_0(\omega, t)$) мало и можно записать:

$$\hat{x}(t, \tau) = \hat{x}_0(t, \tau) + \xi \tau \frac{\partial \hat{x}_0}{\partial t} + O(\chi^2),$$

где $\chi \sim (\omega \rho)^{-1} \frac{\partial p}{\partial t}$ — малый параметр, ξ — коэффициент порядка единицы. Подставляя это выражение в (2), нетрудно найти

$$x(\omega, t) = x_0 + x_1,$$

где $x_1 = i\xi \frac{\partial^2 x_0}{\partial t \partial \omega}$. Конкретное значение $\xi = 1/2$ получается для прозрачной среды (т. е. при вещественных x_0) из дополнительного условия, что число квантов в волновом пакете является адабатическим инвариантом [1, 2]. Отметим, что случай $\xi = 1/2$ фактически означает, что эффективность вклада $E(t')$ в $P(t)$ определяется значением ядра $\hat{x}(t, \tau)$ в промежуточный момент $(t + t')/2$. Подобное предположение подтверждается результатами расчетов из микротеории в ряде случаев [2], однако оно не является универсальным, и далее будет приведен пример плазмы, образованной источником ионизации, когда $\xi \neq 1/2$.

величина χ_1 совпадает с найденной в [2] в рамках геометрической оптики (т. е. в пренебрежении членами порядка $(\mu/\omega N)^2$) для произвольного, но плавного закона изменения $N(t)$.

2. Рассмотрим кратко противоположный случай, когда концентрация электронов увеличивается под воздействием ионизирующих факторов, а рекомбинацией можно пренебречь. Здесь уже выражение (4) для плотности тока несправедливо, поскольку электроны, рожденные в разное время, имеют различные скорости (колеблются в различных фазах) и моноскоростное описание в принципе становится не адекватным физической сущности процесса даже в пренебрежении тепловым движением. Учтем, что электроны, образовавшиеся в произвольный момент \tilde{t} , имеют согласно (5) при $t > \tilde{t}$ скорость $v(t, \tilde{t})$ и смещение $r(t, \tilde{t})$, равные

$$v(t, \tilde{t}) = \frac{e}{m} e^{-\nu t} \int_{\tilde{t}}^t e^{\nu t'} E(t') dt', \quad r(t, \tilde{t}) = \int_{\tilde{t}}^t v(t', \tilde{t}) dt'. \quad (11)$$

Пусть $\mu(t)$ — число свободных электронов, генерируемых в единицу времени, тогда вектор поляризации в текущий момент можно записать в виде интеграла:

$$P(t) = e \int_{-\infty}^t r(t, \tilde{t}) \mu(\tilde{t}) d\tilde{t}. \quad (12)$$

Это эквивалентно введению функции распределения по времени рождения электронов: $dN = \mu(\tilde{t}) d\tilde{t}$. От присутствующих в (12) кратных интегралов опять можно избавиться, интегрируя по частям. В результате, полагая при $t \rightarrow -\infty N \rightarrow 0$, выражение (12) снова можно свести к виду (1), где теперь*

$$\hat{\chi}(t, \tau) = \frac{e^2}{m\nu} N(t - \tau) (1 - e^{-\nu\tau}). \quad (13)$$

Как видно, за исключением случая постоянной концентрации, ядро (13) отличается от (7). В частности, для $\mu = \text{const}$ (т. е. $N(t) = N_0 + \mu t$) из (2) и (13) имеем

$$\chi_1 = - \frac{\mu e^2 (2i\omega + \nu)}{m\omega^2 (\omega - i\nu)^2}. \quad (14)$$

Таким образом, значение $\text{Im } \chi_1$ здесь получается вдвое большим, чем должно быть по соотношению (10). При $\nu \rightarrow 0$ формула (14) также совпадает с полученной в [2] с точностью до членов порядка $\mu/\omega N$ включительно**.

3. Перейдем далее к общему случаю, когда процессы ионизации и рекомбинации идут одновременно. Считая, как и выше, среду неподвижной, можно записать:

* Как стало известно автору, равнозначное (13) выражение для $P(t)$ несколько иным способом было получено также в [8].

** Возвращаясь к примечанию к формуле (10), заметим, что здесь оказывается $\xi = 1$, иначе говоря, вклад $E(t')$ в $P(t)$ определяется значением $\hat{\chi}$ (и концентрации N) в момент t' . Физически это можно интерпретировать так, что в данном случае появившиеся позднее электроны не успевают «раскачаться» до равновесного значения $eE_0/m(l\omega + \nu)$.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mu_i - \mu_r, \quad (15)$$

где $\mu_i(r, t)$ — число свободных электронов, появляющихся за единицу времени в результате ионизации, а $\mu_r(r, t)$ — число «выбывающих» за тот же отрезок времени. Естественно ожидать, что при плавном изменении концентрации, когда величина $\chi \sim \mu/\omega N$, ν/ω является малым параметром, обусловленные ионизацией и рекомбинацией поправки в x_1 (см. (8) и (14)) входят аддитивно [2]:

$$x_1 = -i \frac{e^2}{m\omega^3} (2\mu_i - \mu_r) + O(\chi^2). \quad (16)$$

Заметим, что здесь, в отличие от (9), (10), поправка x_1 в принципе не может быть выражена через квазистационарное значение x_0 , зависящее только от результирующей концентрации $N(r, t)$. В частности, при $\mu_i = \mu_r$ имеем $N = \text{const}$, $x_0 = \text{const}$, однако $x_1 \neq 0$. При быстром изменении параметров ($\chi \geq 1$ и т. д.) соотношение (16) теряет силу и вопрос о виде $x(\omega, t)$ нужно рассматривать заново.

Строго говоря, значения μ_i и μ_r нельзя считать независимыми, и параметр μ , в качестве первичной величины для расчета поляризуемости не подходит. Запишем $N(r, t)$ в виде интеграла:

$$N = \int_{-\infty}^t \mu_i(\tilde{t}) \psi(t, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (17)$$

где $\psi(t, \tilde{t})$ — некоторая монотонно убывающая функция $t - \tilde{t}$ (причем, $0 < \psi < 1$ и при $t = \tilde{t}$ $\psi = 1$), показывающая, какая часть электронов, рожденных в интервале $\tilde{t}, \tilde{t} + d\tilde{t}$, доживает до момента t . Тогда из (15) и (17) следует

$$\mu_r(r, t) = - \int_{-\infty}^t \mu_i(\tilde{t}) \frac{\partial \psi(t, \tilde{t})}{\partial t} d\tilde{t}. \quad (18)$$

Переходя к вычислению $P(t)$, запишем выражение для приращения плотности тока за малый отрезок времени Δt :

$$\Delta j = e \left(\sum_{N(t)} \Delta v_i - \sum_{\Delta N_r} v_i \right). \quad (19)$$

Здесь первый член в скобке — обусловленное полем E суммарное приращение скорости электронов, имеющихся к моменту t , а второй член описывает изменение тока за счет убыли электронов вследствие рекомбинационных процессов ($\Delta N_r = \mu_r \Delta t$). При этом учтено, что вновь рождающиеся электроны в начальный момент не дают вклада в индуцированный ток. Переходя, по аналогии с (12), от суммирования к интегрированию по \tilde{t} , с учетом (17) и (18) имеем

$$\frac{\partial j}{\partial t} = e \int_{\tilde{t}}^t \mu_i(\tilde{t}) \frac{\partial \psi}{\partial t} d\tilde{t}. \quad (20)$$

Соотношение (20) вместе с (11) и представляет собой общий случай материального уравнения нестационарной, но неподвижной плазмы

с учетом как ионизации, так и рекомбинационных процессов. Учитывая, что $v(t, t) = 0$, его можно переписать также в формах

$$j(t) = e \int_{-\infty}^t \mu_i(\tilde{t}) \psi v d\tilde{t}, \quad P(t) = e \int_{-\infty}^t \mu_i(\tilde{t}) R(t, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (21)$$

где $R = \int_{\tilde{t}} \psi v(t', \tilde{t}) dt'$. Если в качестве примера взять $\psi(t, \tilde{t}) =$

$= \exp[-\delta(t - \tilde{t})]$, где δ — постоянный коэффициент (что соответствует $\mu_r = \delta \cdot N(r, t)$), последнее выражение можно привести к виду (1) с ядром

$$\hat{x}(t, \tau) = \frac{e^2 N(t - \tau)}{m(\nu + \delta)} (1 - e^{-(\nu + \delta)\tau}). \quad (22)$$

В пределе при $\delta \rightarrow 0$ отсюда получаем (13), а при $N(t) = N_0(r) e^{-\delta t}$ (т. е. $\mu_i = 0$) — формулу (7).

В качестве конкретного примера приведем случай

$$\mu_i(r, t) = \begin{cases} N_0(r) \delta(t) + \mu_0(r) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}, \quad (23)$$

где $\delta(t)$ — δ -функция. Согласно (17) и (18) это соответствует изменению N и μ_r при $t > 0$ по закону

$$N = (N_0 - N_\infty) e^{-\delta t} + N_\infty, \quad \mu_r = \mu_0 + \delta(N_0 - N_\infty) e^{-\delta t}, \quad (24)$$

где N_0 — первоначальная концентрация образующейся при $t = 0$ плазмы, $N_\infty = \mu_0/\delta$ — ее равновесное значение при $t \rightarrow \infty$. Из (1) и (22) — (24) нетрудно найти

$$P(t) = x(\omega, t) E_0 e^{i\omega t} + P_0(t),$$

где первый член определяет осциллирующую часть $P(t)$:

$$x(\omega, t) = - \frac{e^2}{m} \left\{ \frac{N_\infty}{\omega [\omega - i(\nu + \delta)]} + \frac{(N_0 - N_\infty) e^{-\delta t}}{(\omega - i\nu)(\omega + i\delta)} \right\}, \quad (25)$$

а $P_0(t)$ — релаксирующая к постоянному уровню составляющая, зависящая от начальных условий:

$$P_0 = \frac{e^2 E_0}{m(\nu + \delta)} \left\{ \frac{N_0 - \mu_0(i\omega + \nu + \delta)^{-1}}{i\omega + \nu} e^{-(\nu + \delta)t} + \frac{\mu_0 - i\omega N_0}{i\omega m(i\omega - \delta)} \right\}.$$

В зависимости от соотношения между N_0 и N_∞ в (24) преобладающим является процесс рекомбинации или ионизации. Видно, что с точностью до величины первого порядка включительно относительно χ из (25) следует (16), т. е. параметры μ_i и μ_r в поправку x_1 входят аддитивно. При $t \geq \delta^{-1}$, когда $\mu_r \rightarrow \mu_i$ и устанавливается стационарное значение концентрации $N \rightarrow N_\infty$, наличие процессов ионизации и рекомбинации эквивалентно лишь увеличению эффективной частоты столкновений ($\nu \rightarrow \nu + \delta$). В общем случае, однако, влияние этих процессов на высокочастотные процессы нельзя свести только к изменению эффективного значения ν .

Заметим, что наличие в плазме свободных электронов приводит к тому, что ядро $\hat{x}(t, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ не стремится к нулю (что обычно

предполагается в феноменологической теории диэлектрических сред при выводе некоторых асимптотических соотношений [2, 12]), а, наоборот, монотонно возрастает. Подобным свойством локализованности, как следует из (2), (22), обладает проводимость $\hat{\sigma}$:

$$\mathbf{j} = \int_0^\infty \hat{\sigma}(t, \tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$\hat{\sigma}(t, \tau) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} = \frac{e^2}{m} N(t - \tau) e^{-(\nu+\delta)\tau}.$$

Здесь ядро $\hat{\sigma}$ при больших τ стремится к нулю, т. е. вклад $\mathbf{E}(t - \tau)$ в ток $\mathbf{j}(t)$ затухает с ростом τ .

4. В заключение обсудим некоторые свойства свободных электромагнитных волн в плазме с концентрацией, изменяющейся из-за процессов ионизации и рекомбинации. В общем случае строгое решение уравнений Макдональда с оператором $\hat{x}(t, \tau)$ в форме (7), (13) или (22) в аналитическом виде получить, естественно, не удается. Для выяснения качественных закономерностей рассмотрим случай медленного изменения концентрации ($\chi \ll 1$), когда решение можно найти в приближении геометрической оптики.

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}$, где \mathbf{E}_0 и $\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ — медленные функции \mathbf{r} и t .

В этом приближении поправкой x_1 в уравнении эйконала можно пренебречь, и изменение частоты $\omega(\mathbf{r}, t)$ определяется (как и в случае движущейся плазмы) только результирующей концентрацией $N(\mathbf{r}, t)$ [1, 2]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \right) \omega^2 = \frac{\partial \omega_p^2}{\partial t}, \quad (27)$$

где \mathbf{u} — групповая скорость волн. Отсюда следует, что при $\mu_i > \mu_r$ частота растет и наоборот. Максимальное смещение частоты в пространственно-однородном случае ограничивается перепадом концентрации:

$$\max |\omega^2 - \omega_0^2| = \frac{4\pi e^2}{m} |N_0 - N_\infty|,$$

однако эффект может быть повышен, если возмущение концентрации перемещается в пространстве синхронно с групповой скоростью волн.

Для выяснения энергетических соотношений представляет интерес рассмотреть теорему Пойнтинга, которую можно записать в виде [2]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = q = - \left(2i \omega \varepsilon^a + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} - \omega \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial t \partial \omega} \right) \frac{E_0^2}{16\pi}, \quad (28)$$

где w и \mathbf{S} — плотность энергии и вектор Пойнтинга, ε^a — антиэрмитова часть $\varepsilon(\omega, t)$. Подставляя сюда x_0 и x_1 из (3) и (16), имеем

$$q = - \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} (\nu N + \mu_i + \mu_r).$$

Таким образом, электромагнитная энергия в такой среде всегда

$\left(\text{независимо от знака } \frac{\partial N}{\partial t} \right)$ поглощается. Это и понятно, так как при рекомбинации, как и при упругих столкновениях, запасенная электронами кинетическая энергия передается ионам и нейтральным частицам, а при ионизации в среднем такая же энергия идет на сообщение монотонно-поступательного движения вновь рождающимся электронам, которая в результате столкновений в конечном счете тоже переходит тяжелым частицам. В этом отношении ситуация существенно отличается от случая движущейся плазмы, где при $\frac{\partial N}{\partial t} > 0$ может быть

$q > 0$, причем в бесстолкновительной плазме ($v = 0$) энергия волнового пакета меняется пропорционально частоте* [13]. Что, однако, примечательно, при «чистой» рекомбинации ($\mu_i = v = 0$) поправка χ_1 также удовлетворяет соотношению (10). Последнее означает, что поглощается ровно столько энергии, сколько нужно для сохранения числа квантов в волновом пакете (с учетом уменьшения $\omega(t)$, см. (27)), как это свойственно «консервативной» системе (т. е. позрачной среде), описываемой функцией Лагранжа [1, 2, 9]. Этот пример лишний раз показывает, что разделение нестационарных (параметрических) систем на консервативные и диссипативные является весьма условным.

При быстром изменении параметров геометрооптическое приближение становится неприменимым, и даже в пространственно-однородной среде имеет место отражение волн. Наиболее просто рассчитать противоположный случай скачкообразного изменения концентрации, когда для отыскания полей достаточно задать начальные условия на скачке параметров [1, 5–7, 11]. Однако и в этом случае нередко допускается существенная ошибка, связанная с неправомерным использованием для диспергирующих сред формул, полученных для диэлектриков без дисперсии. В последнем случае из очевидных условий непрерывности вектора D легко получить [1, 7, 11] соотношение $E_2/E_1 = \epsilon_1/\epsilon_2$ (где величины с индексами 1 и 2 относятся соответственно к значениям их до и после скачка параметров), при $\epsilon_2 < \epsilon_1$, тогда как напряженность E , так и энергия электромагнитного поля возрастают. Однако нельзя обобщать эти формулы на случай плазмы, просто подставляя в них вместо ϵ_2 стационарное значение $\epsilon_{20}(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, даже если после скачка концентрация постоянна и ионизация и столкновительными процессами можно пренебречь. Это физически очевидно уже из отмечавшегося выше обстоятельства, что, например, при ионизации (т. е. в момент скачка концентрации) энергия поля может только убывать. Для получения правильных соотношений следует исходить из строгих выражений для $\hat{x}(t, \tau)$ или $\hat{\sigma}(t, \tau)$ (см. (22), (26)), которые и после скачка параметров до завершения релаксационных процессов в среде отличаются от квазистационарных значений $\hat{x}_0(\tau)$ или $\hat{\sigma}_0(\tau)$. Не останавливаясь здесь на этом вопросе более подробно, укажем, что фактически из конечности значений $\hat{x}(t, \tau)$ и $\hat{\sigma}(t, \tau)$ следует непрерывность величин P и $j = \frac{\partial P}{\partial t}$ (а значит, и напряженности E) на скачке концентрации. В результате оказывается [14], что амплитуды «остаточных» волн (при $t \gtrsim \delta^{-1}$) могут быть значительно меньше амплитуды начального поля E_1 . Для плоского движущегося «профиля ионизации» произвольного

* Это справедливо и в случае локального движения электронов в макроскопически неподвижной плазме, модулированного внешними полями (например, плазменными волнами).

вида соотношения связывающие энергию и частоты волн (с учетом их отражения), были получены в [1].

Таким образом, ионизационно-рекомбинационный механизм изменения концентрации имеет существенную специфику по сравнению с движущейся плазмой, прежде всего, в энергетических соотношениях. Кроме того, в случае движущейся плазмы оказывается необходимым учет пространственной дисперсии (в том числе и при нерелятивистских скоростях), что приводит к дополнительным особенностям в поведении электромагнитных волн [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
2. Ю. А. Кравцов, L. A. Ostrovsky, N. S. Stepanov, Proc. IEEE, 62, № 11, 1492 (1974).
3. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 5, 908 (1962).
4. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 686 (1971).
5. G. M. Whitman, L. B. Felsen, J. Math. Phys., 13, № 5, 760 (1972).
6. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 512 (1973).
7. С. Н. Столяров, Краткие сообщения по физике, изд. ФИАН СССР, № 1, 26 (1974).
8. В. Н. Красильников, Диссертация, ЛГУ, 1972.
9. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 39, № 5, 1450 (1960).
10. C. Chen, J. Math. Phys., 12, № 5, 743 (1971).
11. F. R. Morgenthaler, IRE Trans., MTT-6, № 2, 167 (1958).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
13. Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 53, № 12, 2186 (1967).
14. Н. С. Степанов, XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, т IV, изд. КГУ, 1975, стр. 15.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 декабря 1974 г.

THE DIELECTRIC PERMITTIVITY IN NONSTATIONARY PLASMA

N. S. Stepanov

The form of material equations for high-frequency fields in plasma the density of which changes arbitrarily quickly in time due to ionization and recombination processes is investigated. Expressions are derived for the polarization coefficients both for partial cases when one of the given processes prevails and for a general case. Particular examples are given, the regularities of electromagnetic wave frequency and energy variation in such a medium is briefly discussed. It is shown that the results differ essentially from the case when the density variation takes place due to the inhomogeneous plasma motion that is frequently disregarded in the literature.

УДК 533.951

АБСОЛЮТНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

В. В. Демченко, А. Я. Омельченко

Исследована абсолютная параметрическая неустойчивость НЧ колебаний, возбуждаемых монохроматическим полем накачки произвольной амплитуды, в холодной неоднородной магнитоактивной плазме. Найдены инкременты нарастания колебаний, показано, что пространственная неоднородность плазмы оказывает стабилизирующее влияние на параметрическую неустойчивость

В последнее время большое внимание уделяется исследованию абсолютной параметрической неустойчивости в неоднородной плазме. В работах [1-4] рассматривалась параметрическая неустойчивость распадного типа, возбуждаемая монохроматическим полем накачки малой амплитуды в изотропной плазме.

В настоящей работе изложен метод, позволяющий свести задачу об абсолютной параметрической неустойчивости, возбуждаемой монохроматическим полем накачки произвольной амплитуды, в неоднородной магнитоактивной плазме к задаче о параметрическом возбуждении объемных колебаний в однородной изотропной плазме. Ниже рассмотрим параметрическое возбуждение НЧ волны, дисперсия которых полностью определяется ВЧ полем, в сильном магнитном поле, когда циклотронная частота ионов значительно превосходит частоту возбуждаемых колебаний.

Рассмотрим холодную неоднородную плазму, равновесная плотность которой изменяется вдоль оси x и которая помещена в однородное статическое магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси z . Направление внешнего однородного электрического поля $E = E_0 \sin \omega_0 t$ совпадает с направлением статического магнитного поля. Представляя неравновесные величины в виде $f(r, t) = f(x, t) \exp(i k_z z)$ и линеаризируя систему уравнений двумерной гидродинамики, дополненную уравнением Пуассона, для величин $v_\alpha = e_\alpha n_\alpha \exp(-i A_\alpha(t))$ и потенциала электрического поля φ получим

$$\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} = \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \exp(-i A_\alpha(t)) \hat{L}_2 \varphi; \quad (1)$$

$$\hat{L}_1 \varphi = 4\pi \sum_{\alpha=e, i} v_\alpha \exp(i A_\alpha(t)), \quad (2)$$

где n_α — отклонения частиц сорта α от равновесного значения n_0 ,

$$\hat{L}_1 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_z^2, \quad \hat{L}_2 = -k_z^2 n_0, \quad A_\alpha = \frac{e_\alpha k_z E_0}{m_\alpha \omega_0^2} \sin \omega_0 t. \quad (3)$$

Полагая $v_\alpha(x, t) = v_{\alpha 1}(t)v_{\alpha 2}(x)$, $\varphi(x, t) = \varphi_1(t)\varphi_2(x)$ и разделяя переменные в уравнениях (1) и (2), находим

$$\frac{\partial^2 v_{e1}}{\partial t^2} + p^2 \{v_{e1} + v_{ii} \exp[i(A_i - A_e)]\} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v_{ii}}{\partial t^2} + \frac{m_e}{m_i} p^2 \{v_{ii} + v_{e1} \exp[-i(A_i - A_e)]\} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} - k_z^2 \epsilon \varphi_2 = 0, \quad (6)$$

где $\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(x)}{p^2}$, p — постоянная разделения.

Решив уравнение (6) с учетом конкретных граничных условий, находим возможные значения постоянной p . Система уравнений (4), (5) в этом случае с точностью до переобозначений $\omega_{pe}^2 \rightarrow p^2$, $\omega_{pi}^2 \rightarrow \frac{m_e p^2}{m_i}$ совпадает с системой уравнений, описывающей параметрическое возбуждение объемных колебаний в однородной изотропной плазме [5].

В качестве примера рассмотрим абсолютную параметрическую неустойчивость в слое неоднородной плазмы, распределение плотности в котором определяется соотношением $n = n_0 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$. Уравнение (6) в этом случае приобретает вид

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} + (A - Bx^2) \varphi_2 = 0, \quad (7)$$

где

$$A = -k_z^2 \epsilon_0, \quad B = \frac{\omega_{p0}^2 k_z^2}{p^2 L^2}, \quad \epsilon_0 = 1 - \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e p^2}.$$

Решения уравнения (7), описывающего запертые колебания, возможны при $A < 0$ ($\epsilon_0 < 0$) в области $-\sqrt{\frac{|A|}{B}} < x < \sqrt{\frac{|A|}{B}}$.

Производя в уравнении (7) подстановку $\varphi_2 = \psi(\xi) \exp(-\xi^2/2)$, $\xi = \left(\frac{k_z \omega_{p0}}{L p}\right)^{1/2} x$ и вводя обозначение

$$2n + 1 = \frac{|A|}{\sqrt{B}} = \frac{k_z |\epsilon_0| p L}{\omega_{p0}}, \quad (8)$$

для функции $\psi(\xi)$ получаем уравнение $\psi''_{\xi\xi} - 2\xi\psi'_{\xi} + 2n\psi = 0$. Решениями этого уравнения являются полиномы Эрмита, удовлетворяющие условию локализации (ширина области локализации колебаний предполагается значительно меньше ширины плаэменного слоя) лишь при целых положительных значениях числа n (включая нуль). Это позволяет рассматривать соотношение (8) как аналог правила квантования, которое служит для определения возможных значений величины p :

$$p^2 = \omega_{p0}^2(1 - \delta), \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{2n + 1}{k_z L} \left\{ \left[4 + \left(\frac{2n + 1}{k_z L} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{2n + 1}{k_z L} \right\}. \quad (9)$$

Согласно [5], периодические решения системы уравнений (4), (5) являются неустойчивыми в области низких частот при выполнении неравенств $0 > \Delta_n > -2 \left[4J_n^2(a) \frac{m_e}{m_i} \right]^{1/2}$, а максимальное значение величины инкремента нарастания колебаний γ равно

$$\gamma = p \left[\frac{\sqrt{27}}{32} J_n^2(a) \frac{m_e}{m_i} \right]^{1/3}, \quad (10)$$

где $|\Delta_n| = \left| \frac{p^2}{(n\omega_0)^2} - 1 \right| \ll 1$, $J_n(a)$ — функция Бесселя, $a = \frac{ek_z E_0}{m_e \omega_0^2}$.

Пороговое значение амплитуды электрического поля волны накачки определяется соотношением

$$32J_n^2(a) \frac{m_e}{m_i} \geq |\Delta_n|^3, \quad (11)$$

из которого для малых амплитуд волны накачки следует

$$a_{\text{пор}}^2 = \frac{1}{8} \frac{m_i}{m_e} \left(|\Delta_0| + \delta \frac{\omega_{p0}^2}{(n\omega_0)^2} \right)^3, \quad (12)$$

где $\Delta_0 = \frac{\omega_{p0}^2}{(n\omega_0)^2} - 1$.

Рассмотрим параметрическую раскачуку колебаний в слое $-L < x < L$ слабонеоднородной плазмы $\left(k_z \left| \frac{d \ln \epsilon}{dx} \right|^{-1} \equiv k_z H \gg 1 \right)$. Плотность плазмы монотонно возрастает от нуля при $x = -L$, достигая максимального значения n_0 при $x = 0$, и монотонно убывает до нуля при $x = L$. При $\epsilon_0 < 0$ внутри слоя находятся точки $x_{(1,2)}$, в которых диэлектрическая проницаемость плазмы обращается в нуль. В этом случае уравнение (6) описывает квазиклассические возмущения, «запертые» в области $x_1 < x < x_2$. Для таких возмущений возможные значения постоянной разделения p находятся с помощью квазиклассического правила квантования

$$k_z \int_{x_1}^{x_2} V |\epsilon| dx = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (13)$$

которое в случае параболического распределения плотности по ширине слоя совпадает с уравнением (8). Для параметрических возбуждаемых периодических НЧ колебаний, распространяющихся в слое слабонеоднородной плазмы, максимальный инкремент нарастания, пороговое значение амплитуды электрического поля волны накачки, как и в случае параболического распределения плотности, определяются соотношениями (10) — (12), в которых постоянная разделения p определяется теперь из соотношения (13).

Из выражений (9) — (12) следует, что учет неоднородности плотности плазмы приводит к уменьшению максимальных значений инкрементов нарастания колебаний и увеличению порогового значения амплитуды электрического поля волны накачки по сравнению со случаем однородной плазмы, причем в слабонеоднородной плазме наиболее эффективно стабилизируются моды с $n \gg 1$.

В заключение выражаем благодарность А. Б. Киценко и К. Н. Степанову за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. D. Pilić, Proceedings of the X-th conference of phenomena in ionized gases, contributed papers, Oxford, 1971, p. 320; А. Д. Пилић, ЖЭТФ, 64, 1237 (1973).
2. F. W. Perkins, T. Flick, Phys. Fluids, 14, 2012 (1971).
3. В. П. Силин, А. Н. Стародуб, ЖЭТФ, 66, 176 (1974).
4. R. White, P. Kaw, D. Pesme, M. N. Rosenbluth, G. Laval, R. Huff, R. Varga, Nucl. Fusion, 14, 45 (1974).
5. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.

Поступила в редакцию
29 августа 1975 г.

**ABSOLUTE PARAMETRIC INSTABILITY OF LOW-FREQUENCY WAVES
IN INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC PLASMA**

V. V. Demchenko, A. Ya. Omel'chenko

The absolute parametric instability of LF oscillations excited by a monochromatic arbitrary-amplitude pump field in a cold inhomogeneous magnetoactive plasma has been investigated. The growth rates of oscillations are found. The spatial plasma inhomogeneity is shown to have a stabilizing effect on the parametric instability.

УДК 538.574.4

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МОЩНЫХ ВСТРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

A. A. Капельзон

Рассматривается взаимодействие плоских электромагнитных волн, распространяющихся навстречу друг другу. Учитывается рассеяние волн не только на первой пространственной гармонике электронной температуры, но и на последующих. Получены уравнения для амплитуд поля волн произвольной мощности.

При нормальном падении мощной радиоволны на ионосферу необходимо учитывать наличие отраженной волны. Действительно, падающая и отраженная волны образуют стоячую волну, в силу чего в ионосфере возникает пространственная периодическая структура электронной температуры, на которой, в свою очередь, рассеиваются обе волны. Это явление рассмотрено в [1] при слабой нелинейности среды, когда пространственный профиль электронной температуры можно считать синусоидальным и поле волны представить в виде

$$E = E_p [a_1 \exp(i\omega t - ikz) + a_2 \exp(i\omega t + ikz) + \text{к. с.}]$$

Строго говоря, профиль электронной температуры имеет более сложный вид и следует учитывать не только его первую пространственную гармонику, но и последующие. Тогда решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon (|E|) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \sigma (|E|) \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

можно искать в более общем виде

$$E = E_p r \cos(\omega t - \varphi), \quad (2)$$

где r , φ — некоторые функции координаты z [2]. В этом случае (1) преобразуется в систему

$$2y\dot{y} - (y')^2 - 4M^2 + 4\varepsilon_0 y = -\mu y^2 f(y), \quad (3)$$

$$\dot{M} = -\mu y g(y),$$

где $y = r^2$, $\theta = \frac{\omega}{c} z$, $M = r^2 \frac{d\varphi}{d\theta}$, $\mu = \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2} \frac{\nu_0}{\omega}$, $f = \frac{\nu_0 \omega (\tau^2 - 1)}{\omega^2 + \nu_0^2 \tau^2}$,

$g(\tau) = \frac{\tau(\omega^2 + \nu_0^2)}{\omega^2 + \nu_0^2 \tau^2}$, ε_0 — диэлектрическая проницаемость невозмущенной плазмы. Точка сверху над буквой обозначает дифференцирование по θ , а зависимость τ от r определяется выражением [3]

$$\frac{T_e}{T} - 1 = r^2 \frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2 (T_e)}, \quad (4)$$

где $\nu_{\text{эфф}} = \nu_0 \left(\frac{T_e}{T} \right)^{\gamma} = \nu_0 \tau$, $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

Будем считать, что $\mu \ll 1$. Решение (3) при $\mu = 0$ имеет достаточно простой вид:

$$\begin{aligned} y &= a + b \cos 2\sqrt{\epsilon_0} \theta, \\ M &= M_0 = \sqrt{\epsilon_0} \sqrt{a^2 - b^2} = \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

Действительно, в среде без поглощения ($\mu = 0$) поле распространяющихся навстречу друг другу волн можно записать как

$$E = \alpha \cos(\omega t - kz) + \beta \cos(\omega t + kz),$$

что совпадает с (5), если положить

$$\alpha^2 + \beta^2 = a, \quad 2\alpha\beta = b, \quad kz = \frac{\omega}{c} nz = \sqrt{\epsilon_0} \theta. \quad (6)$$

Решение (3) при $\mu \neq 0$ будем искать согласно [4] в виде разложения

$$\begin{aligned} y &= a + b \cos \psi + \mu u_1(a, b, \psi) + \mu^2 u_2(a, b, \psi) + \dots, \\ M &= M_0(a, b) + \mu M_1(a, b, \psi) + \mu^2 M_2(a, b, \psi) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\frac{da}{d\theta} = \mu A_1(a, b) + \mu^2 A_2(a, b) + \dots,$$

$$\frac{db}{d\theta} = \mu B_1(a, b) + \mu^2 B_2(a, b) + \dots,$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 2\sqrt{\epsilon_0} + \mu D_1(a, b) + \mu^2 D_2(a, b) + \dots$$

Здесь $u_1(a, b, \psi)$, $u_2(a, b, \psi)$ являются периодическими функциями угла ψ с периодом 2π .

Подставляя выражения (7) и их производные в исходную систему (3) и собирая члены при одинаковых степенях параметра μ , получим систему

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \frac{B_1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sin \psi - b \frac{D_1}{\sqrt{\epsilon_0}} \cos \psi \right) (a + b \cos \psi) + b \sin \psi \left(\frac{\partial u_1}{\partial \psi} + \right. \\ &\left. + \frac{B_1}{2\sqrt{\epsilon_0}} \cos \psi + \frac{A_1}{2\sqrt{\epsilon_0}} - b \frac{D_1}{2\sqrt{\epsilon_0}} \sin \psi \right) - \frac{M_0}{\epsilon_0} M_1 + au_1 = \\ &= -\frac{1}{8\epsilon_0} (a + b \cos \psi)^2 f(a + b \cos \psi), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{A_1}{2\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial M_0}{\partial a} + \frac{B_1}{2\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial M_0}{\partial b} + \frac{\partial M_1}{\partial \psi} = -\frac{1}{2\sqrt{\epsilon_0}} (a + b \cos \psi) g(a + b \cos \psi).$$

Представим правые части (8) в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} (a + b \cos \psi)^2 f(a + b \cos \psi) &= \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos n\psi, \\ (a + b \cos \psi) g(a + b \cos \psi) &= \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos n\psi. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции u_1 и M_1 также будем искать в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} (p_n \cos n\psi + q_n \sin n\psi), \\ M_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_n \cos n\psi + \xi_n \sin n\psi). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда, обозначив $q_0 = \frac{A_1}{2\sqrt{\varepsilon_0}}$, $q_1 = \frac{B_1}{2\sqrt{\varepsilon_0}}$, $h = \frac{a}{b}$, получим для коэффициентов q_i бесконечную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} -2h q_0 + 2q_1 &= \frac{M_0}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0} b} \frac{G_0}{2}, \\ -2q_0 + 4hq_1 + 6q_2 &= \frac{M_0}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0} b} G_1, \\ q_1 + 6hq_2 + 12q_3 &= \frac{M_0}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0} b} \frac{G_2}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$n \geq 3$:

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2)q_{n-1} + 2h(n-1)(n+1)q_n + (n+1)(n+2)q_{n+1} &= \\ = \frac{M_0}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0} b} \frac{G_n}{n}. \end{aligned}$$

Решая эту систему, для первых двух коэффициентов q_0 , q_1 , получим

$$q_0 = -\frac{M_0}{2\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0} b} \frac{1}{\sqrt{h^2-1}} \left[\frac{G_0}{2} - G_1(h - \sqrt{h^2-1}) + G_2(h - \sqrt{h^2-1})^2 + \right. \\ \left. + \dots + (-1)^n G_n(h - \sqrt{h^2-1})^n + \dots \right]; \quad (12)$$

$$q_1 = -\frac{M_0}{2\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon_0} b} \frac{h - \sqrt{h^2-1}}{\sqrt{h^2-1}} \left[\left(\frac{G_0}{2} - hG_1 \right) + G_2 h(h - \sqrt{h^2-1}) + \right. \\ \left. + \dots + (-1)^n G_n h(h - \sqrt{h^2-1})^{n-1} + \dots \right]. \quad (13)$$

Если теперь перейти к переменным α и β , определенным выражениями (6), то из (7), (12), (13) получим

$$\frac{d\alpha^2}{d\theta} = -\frac{\mu}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \left[G_0 - G_1 \frac{\beta}{\alpha} + G_2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \dots + (-1)^n G_n \frac{\beta^n}{\alpha^n} + \dots \right]; \quad (14)$$

$$\frac{d\beta^2}{d\theta} = \frac{\mu}{2\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{\beta}{\alpha} \left[G_1 - G_2 \frac{\beta}{\alpha} + \dots + (-1)^{n+1} G_n \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \dots \right]. \quad (15)$$

Для высокочастотных волн $\omega^2 \gg v^2 \tau^2$ система (14), (15) совпадает с выражениями, полученными в [1]. Для случая волн низкой частоты, $\omega^2 \ll v^2$, и большой мощности, $y \gg 1$, из (4) получим $\tau^{(2\gamma+1)/\gamma} = y$.

Тогда $g(\tau) = y^{-[\gamma/(2\gamma+1)]}$, а $y g(y) = y^{(\gamma+1)/(2\gamma+1)} = y^u$, где $u = \frac{\gamma+1}{2\gamma+1}$. Система (14), (15) принимает вид

$$\frac{d\alpha^2}{d\theta} = -\frac{\mu}{V\varepsilon_0} (\alpha^2 - \beta^2)^u \left[P_u \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta/\alpha)^n}{(u+1)(u+2)\dots(u+n)} \times \right. \\ \left. \times P_u^n \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right]; \quad (16)$$

$$\frac{d\beta^2}{d\theta} = \frac{\mu}{V\varepsilon_0} (\alpha^2 - \beta^2)^u \frac{\beta}{\alpha} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\beta/\alpha)^{n-1}}{(u+1)(u+2)\dots(u+n)} \times \right. \\ \left. \times P_u^n \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right], \quad (17)$$

где P_u^n — функции Лежандра.

Интерес представляет случай, когда $\beta/\alpha \ll 1$. Тогда, отбрасывая члены $\sim \beta^2/\alpha^2$, из (16), (17), находим

$$\frac{dm_1}{d\theta} = -2x_0 m_1^{2/3}, \quad \frac{dm_2}{d\theta} = \frac{4}{3} x_0 m_1^{-1/3} m_2.$$

Первый интеграл этой системы будет $m_1 m_2^{3/2} = \text{const}$ (см. [1]).

Таким образом, получены достаточно общие выражения, определяющие амплитуду поля встречных волн в нелинейной среде. Задача в этом случае сводится к определению G_n , однако в аналитическом виде эти коэффициенты выражаются только в ряде частных случаев. В общем случае система (14), (15) может быть использована для расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Митяков, М. И. Рабинович, В. О. Рапопорт, Л. Е. Штильман, ЖЭТФ, 65, 1893 (1973).
2. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Ю. Г. Гуревич, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 10, 1480 (1968).
3. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
4. Н. Н. Богоявленский, Ю. Г. Митропольский, Асимптотическая теория нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.

Поступила в редакцию
17 сентября 1975 г.

ON THE INTERACTION BETWEEN POWERFUL OPPOSITE ELECTROMAGNETIC WAVES

A. A. Kapel'son

The interaction between plane electromagnetic waves propagating opposite to each other is considered. The wave scattering not only at the first spatial harmonic of the electron temperature but also at the subsequent ones is taken into account. The equations are obtained for the field amplitude of arbitrary-power waves.

УДК 621.371.25

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАССИВНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ РЕЗОНАНСОВ НА СПУТНИКЕ «КОСМОС-259»

*Т. В. Ефимова, Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова, В. В. Писарева,
В. О. Рапопорт, Ю. В. Чугунов*

Приводятся результаты исследований пассивных плазменных резонансов на частотах 1395, 1730, 3270 и 5850 кГц, полученных на ИСЗ «Космос-259». Анализ экспериментальных данных, проведенный на основе теории тонких антенн в магнитоактивной плазме, свидетельствует о существовании в ионосфере плазменных волн, интенсивность которых определяется быстрыми фотоэлектронами с энергией 1—50 эВ.

Плазменные резонансы в ионосфере регулярно наблюдаются при радиовоздиравании с борта ИСЗ [1—7]. Эти так называемые активные резонансы объясняются наличием вблизи спутника интенсивных плазменных колебаний, возбуждаемых передатчиком ионозонда.

Плазменные резонансы регистрируются также и в отсутствие передатчика (пассивные резонансы). Так, в [8] отмечается, что при изменении высоты спутника «Космос-142» от 700 до 900 км бортовой приемник на частоте 1680 кГц регистрировал максимумы радиоизлучения, отвечающие полюсе частот от плазменной ω_0 до верхней гибридной $(\omega_0^2 + \omega_H^2)^{1/2}$ (ω_H — гармоническая частота электронов). Аналогичные резонансы наблюдались на спутнике «Космос-259» в декабре 1968—январе 1969 гг. Прием радиоизлучения проводился на частотах 1395, 1730, 3270 и 5850 кГц. Приемная антенна представляла собой два перпендикулярных диполя с длиной плеча $L = 15$ м. Ориентация антенны относительно магнитного поля Земли определялась с помощью магнитометра.

Для иллюстрации на рис. 1 представлены усредненные с постоянной времени $\tau = 1$ мин графики выходного напряжения приемников на восходящем участке траектории спутника для каждой из четырех частот. Широкие максимумы обусловлены приемом космического радиоизлучения. Полная «опасечка» космического радиоизлучения четко заметна на высоких частотах и происходит на высотах 650 и 800 км соответственно для частот 5850 и 3270 кГц.

Для низких частот (1395 и 1730 кГц) спутник всегда находился в достаточно плотной плазме. Поэтому даже в апогее (1300 км) на этих частотах наблюдались значительные колебания интенсивности сигнала. Однако именно на низких частотах отчетливо проявляются пассивные плазменные резонансы на высотах $h \approx 1100$ км ($f = 1730$ кГц) и $h \approx 1200$ км ($f = 1395$ кГц) с интенсивностью, превышающей интенсивность космического радиоизлучения в апогее примерно в 1,5 раза. Значительно меньший по интенсивности резонанс длительностью ~ 15 с часто регистрировался также на частоте 3270 кГц. На высокой частоте (5850 кГц) плазменный резонанс не был зарегистрирован.

Некоторые характеристики пассивных резонансов для пяти витков спутника приведены в табл. 1, где указана продолжительность резонансов (Δt), высота (h) и географические координаты (φ, λ) спутника.

Характерной особенностью записей пассивного резонанса с малой постоянной времени является наличие модуляции, обусловленной вращением спутника, глубина и период которой изменяются во времени.

Типичный пример записи пассивного резонанса с малой постоянной времени на частоте 1730 Гц приведен на рис. 2. Минутные всплески на записи относятся к калибровочным временным меткам. В начале резонанса (рис. 2а) модуляция имеет четко выраженную картину чередующихся больших (ось антennы почти параллельна магнитному полю Земли H_0) и малых (ось антennы перпендикулярна H_0) максимумов. Далее (рис. 2б) максимумы сравниваются по величине и период колебаний становится равным $T/4$ (T — период вращения спутника).

Пассивные резонансы наблюдаются на высотах, где имеет место «отсечка» космического радиоизлучения, т. е. в области

$$v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sim 1 \quad (\omega_0 \text{ — ленгмюровская}$$

частота плазмы). Поэтому естественно предположить, что эти резонансы обусловлены воздействием на антенну плазменных волн, которые существуют в области между ленгмюровской частотой плазмы и верхней гибридной частотой $(\omega_0^2 + \omega_H^2)^{1/2}$.

Высокая интенсивность плазменных резонансов объясняется тем, что эффективная температура плазменных волн определяется средней энергией фотоэлектронов. Действительно, в экспериментах по некогерентному рассеянию радиоволн в ионосфере зарегистрированы плазменные волны с температурой, в десятки раз превышающей температуру холодной плазмы [9].

Характерная модуляция при вращении спутника связана с зависимостью импеданса антennы от ее ориентации по отношению к магнитному полю Земли. Наблюдавшаяся на эксперименте резкая частотная зависимость интенсивности плазменного резонанса могла быть обусловлена, в частности, техническими причинами (сильной связью антennы с входным контуром приемника на частотах 3270 и 5850 кГц), поэтому в дальнейшем мы будем обсуждать резонансы на частотах 1395 и 1730 кГц.

В первом приближении ионосферную плазму при наличии фотоэлектронов можно рассматривать как двухтемпературную среду. Холодные электроны с концентрацией $N_0 \sim 3 \cdot 10^4$ и температурой $T_0 \sim 2000$ К определяют дисперсионные свойства плазмы. Имеется также примесь

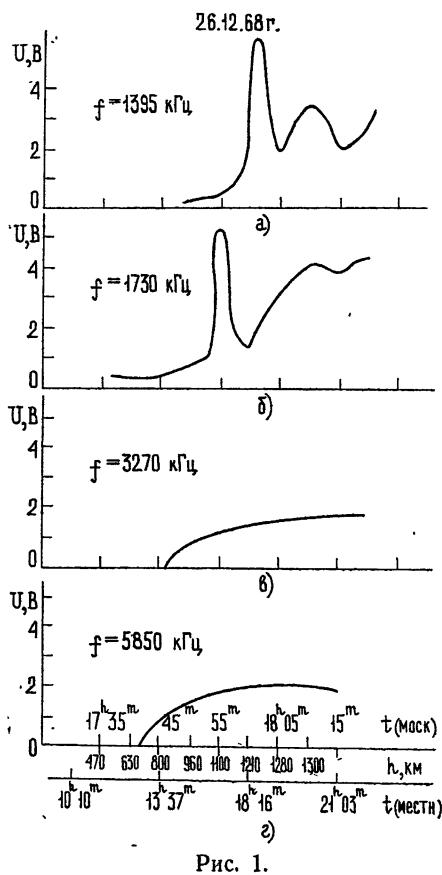


Рис. 1.

16.12.68 г.

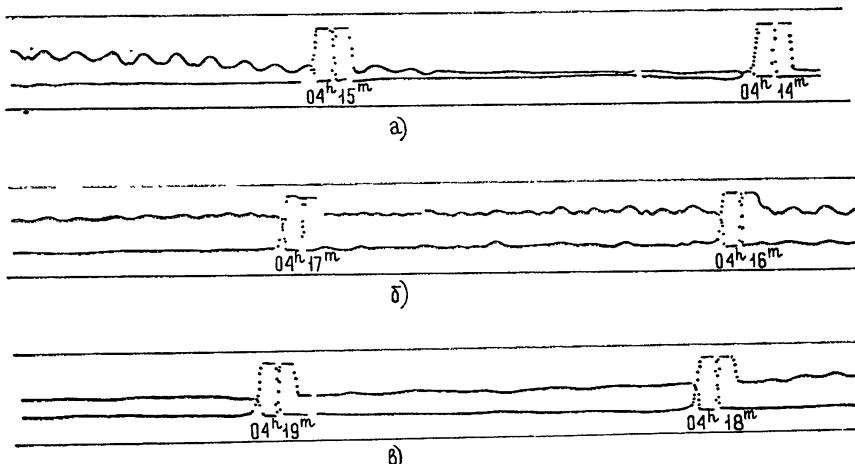


Рис. 2.

Таблица 1

| № | Дата (время московское) | Частота 3270 кГц | | | | Частота 1730 кГц | | | |
|---|---------------------------------------------|------------------|----------|------------------------------|---------------------|---------------------|-----------|------------------------------|------------------|
| | | Δt , с | h , км | φ , град ю. ш. | λ , град | Δt , мин | h , км | φ , град ю. ш. | λ , град |
| 1 | 18.12.68 04 ^h 35 ^m | 10—15 | 840 | 22 | 198 | 4 | 1040—1020 | 38—45 | 213—226 |
| 2 | 19.12.68 00 ^h 39 ^m | 10—15 | 800 | 26 | 250 | 5 | 1060—1180 | 42—47 | 277—286 |
| 3 | 25.12.68 01 ^h 42 ^m | 20 | 740 | 38 | 218 | 6 | 980—1140 | 45—48 | 248—272 |
| 4 | 27.12.68 21 ^h 56 ^m | 20—15 | 680 | 41 | 264 | 4 | 1020—1140 | 48—43 | 312—335 |
| 5 | 28.12.68 21 ^h 18 ^m | 10 | 770 | 45 | 286 | 3 | 1120—1180 | 42—38 | 340—350 |

горячих фотоэлектронов, энергия и концентрация которых может быть определена по наблюдаемой интенсивности плазменных волн, если предположить, например, что имеет место максвелловское распределение фотоэлектронов по скоростям со средней энергией T_s и концентрацией N_s . О наличии на этих высотах в ионосфере фотоэлектронов с широким спектром энергий свидетельствуют эксперименты [10].

Для двухтемпературной модели однородной плазмы спектральная плотность наиводимых на антенну шумов равна

$$\mathcal{E}_\omega^2 = \frac{2}{\pi} \frac{32\pi^4}{\omega} \int d\mathbf{k} (f_k)^2 \frac{T_0 \operatorname{Im} \epsilon_0^l(\omega, \mathbf{k}) + T_s \operatorname{Im} \epsilon_s^l(\omega, \mathbf{k})}{(\operatorname{Re} \epsilon_0^l)^2 + (\operatorname{Im} \epsilon_0^l + \operatorname{Im} \epsilon_s^l)^2}. \quad (1)$$

Здесь рассматриваются только продольные колебания, так как вклад в шумы поперечных (электромагнитных) колебаний для рассматриваемого

мых частот 1,3 и 1,7 МГц и антенны длиной $L \sim 10$ м мал. Антенна производит усреднение по волновым числам возбуждаемых продольных волн, это усреднение производится с помощью форм-фактора $|f_k|^2$, определяющего распределение токов по апертуре антенны. В выражение (1) входят также мнимые и действительные части продольных диэлектрических проницаемостей основной $\epsilon_0^l(\omega, k)$ и горячей $\epsilon_s^l(\omega, k)$ компонент плазмы, причем мнимая часть $\text{Im } \epsilon_0^l$ определяется в условиях эксперимента столкновениями между собой частиц основной плазмы ($\tau_{\text{эфф}} \sim 10$ с⁻¹), а мнимая часть горячей примеси $\text{Im } \epsilon_s^l$ — бесстолкновительными механизмами поглощения (типа затухания Ландau).

Формулу (1) можно упростить, если учесть, что основной вклад в интеграл (1) дают полюсы подынтегрального выражения $\text{Re } \epsilon_0^l = 0$, $|\text{Im } \epsilon_0^l + \text{Im } \epsilon_s^l| \rightarrow 0$.

Из дисперсионного соотношения в магнитоактивной холодной плазме можно определить направление плазменного резонанса в полосе частот от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$, т. е. угол θ_p между волновым вектором k возбуждаемых волн и магнитным полем Земли H_0

$$\tan^2 \theta_p = \left| 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right| \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \right)^{-1}.$$

Учитывая также, что антенна производит усреднение по модулю $|k|$ с весом $|f_k|^2$, с помощью (1) можно записать выражение для эффективной температуры плазменных колебаний, возбуждаемых в двухкомпонентной плазме при резонансных условиях:

$$T_{\text{эфф}} \approx T_0 + T_s \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^4(x/2)}{x^2} \left\{ \frac{\exp[-(\omega^2 L^2/v_{Ts}^2 x^2)]}{\exp\left(-\frac{\omega^2 L^2}{v_{Ts}^2 x^2}\right) + \frac{N_0 \tau_{\text{эфф}}}{N_s} \frac{v_{Ts}^3}{\omega} \frac{\omega^3 L^3}{x^3} f(\theta_p) x^3} \right\} dx. \quad (2)$$

Здесь для простоты принято, что антенна в виде штыря ориентирована вдоль магнитного поля, поэтому форм-фактор равен $\frac{\sin^4(x/2)}{x^2}$, выписан только нулевой член в разложении $\text{Im } \epsilon_s^l$ по гармоникам гирочастоты, дающий основной вклад в интеграл, v_{Ts} — тепловая скорость фотоэлектронов, $f(\theta_p)$ — некоторая функция порядка единицы, зависящая от угла между направлением возбуждаемого резонанса и магнитным полем.

Из выражения (2) для $T_{\text{эфф}}$ следуют два важных вывода. Во-первых, для выбранной модели примеси горячих электронов имеет место резкая зависимость эффективной температуры плазменных волн от частоты. Этим, в частности, можно объяснить отсутствие ярко выраженных резонансов на более высоких частотах в эксперименте ($f = 3270$ кГц, $f = 5850$ кГц). Во-вторых, для штыревой антенны форм-фактор достаточно медленно спадает при $|k| \rightarrow \infty$ ($\sim 1/|k|^2$ при $|k| \rightarrow \infty$). Это обстоятельство позволяет в члене для $T_{\text{эфф}}$, определяемом фотоэлектронами, продвинуться без существенных потерь в интегрировании по x вплоть до $x \sim \frac{\omega L}{v_{Ts}}$, где функция в фигурных скобках, стоящая под интегралом, становится порядка единицы. Другими сло-

вами, медленное спадание $\frac{\sin^4(x/2)}{x^2}$ при $x \rightarrow \infty$ обеспечивает не экспоненциально малое значение интеграла по x , и, следовательно, при определенных соотношениях параметров, входящих в выражение для $T_{\text{эфф}}$, вклад члена, определяемого фотоэлектронами, может стать определяющим, т. е. $T_{\text{эфф}}$ может стать больше T_0 .

Интеграл в (2) рассчитывался на ЭВМ. Как показывают расчеты, наблюдаемую интенсивность плазменных волн можно объяснить, если предположить, что в условиях эксперимента имелась горячая примесь фотоэлектронов со средней энергией $\sim 50 \div 60 \text{ эВ}$ и концентрацией $\sim 10^{-1} \text{ см}^{-3}$. При этом эффективная температура излучения порядка $5 \cdot 10^4 \text{ К}$. Эти цифры, вообще говоря, не противоречат имеющимся экспериментальным данным по наблюдению фотоэлектронов [10], тем более, что при расчетах спектр фотоэлектронов предполагался экспоненциальным. В действительности реальные спектры фотоэлектронов являются степенными, что, как следует из вышесказанного, дает более благоприятную оценку для средней энергии фотоэлектронов.

Приведенное выше рассуждение касалось локально-однородной плазмы. При наличии неоднородностей плазмы особенности распространения плазменных волн могут приводить также к увеличению эффективной температуры излучения. Однако в силу того, что в магнитоактивной плазме волны возбуждаются лишь в узком телесном углу вблизи резонансных направлений, изменения $T_{\text{эфф}}$ за счет эффектов распространения в неоднородной среде, по-видимому, будут незначительны. Вместе с тем целесообразно в дальнейшем сделать более точные оценки этих эффектов.

Наблюдение резонансов на более высоких частотах и на длинных антенных, как уже отмечалось, будет затруднено из-за резкой зависимости $T_{\text{эфф}}$ от этих параметров. Таким образом, на частотах 1395 и 1730 кГц , находимые на антенну шумы определяются формулой

$$\bar{\mathcal{E}}_{\omega}^2 = \frac{2}{\pi} T_{\text{эфф}} R_{\Sigma}, \quad (3)$$

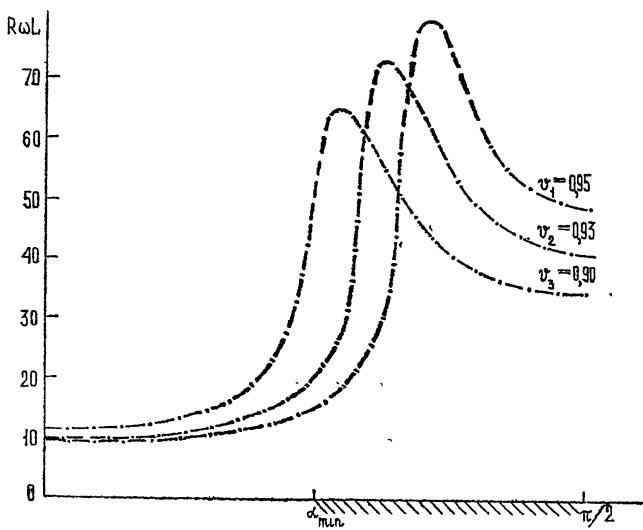


Рис. 3.

где R_{Σ} — активная часть импеданса антенны. С учетом входных цепей приемника шумовое напряжение на его выходе равно

$$\bar{V}^2 = \gamma \frac{T_{\text{эфф}} R_z \Delta f |z|^2}{(|z_a + z|)^2}, \quad (4)$$

где γ — коэффициент усиления, Δf — полоса приемника, $|z|$ — импеданс входных цепей приемника, $|z_a|$ — импеданс антенны. Поскольку $R_z = |z_a| > |z|$, то $\bar{V}^2 \sim 1/R_z$.

Сопротивление излучения R_z зависит от угла между осью антенны и магнитным полем Земли α . На рис. 3 приведена эта зависимость R_z от α в относительных единицах для различных значений V , рассчитанная на основе работы [11]. По оси абсцисс отложены значения α в радианах. Заштрихованная область соответствует реальному изменению угла α в условиях эксперимента. Максимальное значение R_z отвечает полюсу дисперсионной ветви $1 - u - v + uv \sin^2 \alpha = 0$. В области высот, где v близко к единице, максимальный выход сигнала должен наблюдаться для $\alpha = \alpha_{\min}$. Второй, относительно небольшой максимум должен наблюдаться при $\alpha = \pi/2$. Полюс дисперсионной ветви должен соответствовать минимальному выходному напряжению с учетом шунтировки. С уменьшением v максимумы выравниваются. При дальнейшем увеличениистройки максимум вблизи $\alpha = \alpha_{\min}$ может исчезнуть. Именно такая картина наблюдалась на эксперименте.

Экспериментальные данные позволяют также определить профили электронной концентрации в ионосфере вдоль орбиты спутника. Примеры таких профилей приведены на рис. 4. При расчете $N(h)$ использовался метод «отсечек» космического радиоизлучения на частотах 3270 и 5850 кГц, а также сведения о плазменных резонансах на частотах 1395, 1730 и 3270 кГц. Это распределение электронной концентрации имело место в дневные часы на средних и низких широтах. Для сравнения пунктиром обозначен $N(h)$ -профиль, полученный на тех же широтах в дневные часы с помощью спутника Алуэт 1 [12]. Имеет место хорошее совпадение.

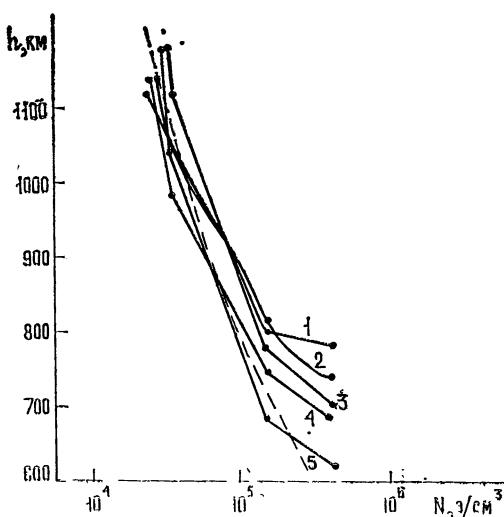


Рис. 4.

В заключение авторы выражают благодарность В. Ю. Трахтенгерцу за участие в обсуждении и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Knecht, T. E. Van Zandt, S. Russell, J. Geophys. Res., **66**, 3078 (1961).
2. R. W. Knecht, S. Russell, J. Geophys. Res., **67**, 1178 (1962).
3. G. E. K. Lokwood, Canad. J. Phys., **41**, 190 (1963).
4. G. E. K. Lokwood, Canad. J. Phys., **43**, 291 (1965).
5. W. Calvert, G. B. Goe, J. Geophys. Res., **68**, 6113 (1963).
6. E. S. Warren, Canad. J. Phys., **41**, 188 (1963).
7. W. Calvert, R. W. Knecht, T. E. Van Zandt, Science, **146**, 391 (1964).
8. Н. А. Буренин, Г. Г. Гетманцев, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, А. М. Сильмин, В. Н. Тюкин, Космические исследования, **6**, вып. 2, 313 (1968).

9. J. V. Evans, Proc. IEEE, 57, 496 (1969).
10 Ю И Гальперин, А. Верник, М Дымек и др., Космические исследования, 11, вып. 1, 101 (1973)
11 Ю В. Чугунов, Известия высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1829 (1968)
12. A. J. Legg, J. W. King, D. M. Preese, J. Atm. Terr. Phys., 29, 13997 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 декабря 1974 г.

INVESTIGATION OF PASSIVE PLASMA RESONANCES BY SATELLITE
„COSMOS-259“

*T. V. Efimova, N. A. Mityakov, E. E. Mityakova, V. V. Pisareva, V. O. Rapoport,
Yu. V. Chugunov*

The results of investigations of passive plasma resonances at the frequencies of 1395, 1730, 3270 and 5850 kc/s by the satellite „Cosmos-259“ are presented. The analysis of experimental data made on the basis of thin antennas theory in the magnetoactive plasma testify to the existence in the ionosphere of plasma waves the intensity of which is determined by fast photo-electrons with the energy 1—50 ev.

УДК 621.371.24

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ИМПУЛЬСНОЙ РЕАКЦИИ ТРОПОСФЕРНОГО КАНАЛА

B. A. Филоненко, B. B. Ручкин, E. D. Тельпуховский, B. B. Фортес

Приводятся результаты экспериментальных исследований статистических характеристик энергетической импульсной реакции (ЭИР) морского тропосферного канала распространения радиоволны. Исследования проводились в 10-сантиметровом диапазоне волн при дальности 220 км с помощью зондирующего импульса длительностью 100 нс. На основе экспериментальных измерений исследуется характер «мгновенных» и средних ИЭР в зависимости от времени суток и сезона, обсуждаются взаимно-корреляционные свойства сигналов в лучах и флюктуационные характеристики огибающих сигналов в лучах. Показана эффективность использования разноса по лучам для повышения потенциала систем, применяющих явление тропосферного распространения радиоволн и возможность использования ультракоротких импульсов для исследования условий захвата волн УКВ диапазона при сверхдальнем тропосферном распространении.

Широкое применение в современной радиолокации и системах связи широкополосных сигналов и сигналов со сложными видами модуляции делает актуальным исследование влияния среды распространения радиоволн на искажения параметров таких сигналов и их информационной структуры. Оценка возможных искажений может быть проведена лишь при детальном знании строения канала распространения радиоволн. Специфическая особенность тропосферного канала распространения состоит в его многолучевом характере, что приводит наряду с общими замираниями к замираниям селективным, к искажениям тонкой структуры сигналов. Наряду с бесспорно отрицательными последствиями многолучевое распространение имеет и положительные стороны, открывая возможность применения нового вида разноса для борьбы с общими замираниями — разноса по лучам. Результаты исследований последнего в известных работах представлены слабо. Можно указать лишь работы [1—4], где в [1, 2] приводятся результаты экспериментальных исследований многолучевой структуры тропосферного канала с помощью широкополосного сигнала ($\Delta f = 10 \text{ Гц}$), а в [3, 4] содержатся некоторые результаты исследований амплитудно-частотной характеристики тропосферного канала, пропущенного времени запаздывания в полюсе 8 Гц и указаны возможные пути восстановления импульсной реакции тропосферного канала.

Свойства тропосферного канала как некоего эквивалентного четырехполюсника могут быть описаны в принципе любой из системных функций [5]. Это может быть функция рассеяния, передаточная функция канала (амплитудно-фазово-частотная характеристика) или функции, связанные с ними парой фурье-преобразований, например, функции импульсной реакции и др. Для решения задач практически необходимо знание как тех, так и других функций.

В данной работе приводятся результаты экспериментальных исследований энергетической импульсной реакции тропосфера и ее статистических характеристик, таких, как средняя энергетическая реакция, взаимно-корреляционные свойства сигналов в лучах (по задержкам), параметры одномерных законов распределения огибающих в лучах и автокорреляционных свойств последних. Исследования проведены в 10-сантиметровом диапазоне волн на морской трассе протяженностью 220 км при зондировании тропосферы коротким импульсом длительностью 100 нс на уровне 10 дБ от максимума.

АППАРАТУРА

Для проведения исследований на базе типового магнетронного передатчика было создано устройство, позволяющее обеспечить его работу в режиме излучения импульса с длительностью порядка 0,1 мкс на уровне 10 дБ от максимума, с частотой повторения 400 Гц. Пиковая мощность сохранилась на уровне пиковых мощностей, характерных для излучающих средств УКВ диапазона, что обеспечило практически 100-процентную наблюдаемость излученного импульса на трассе $D = 220$ км. Длительная работа передатчика в этом режиме показала устойчивость параметров излученного импульса.

Ширина диаграммы направленности передающей антенны составляла соответственно по азимуту и углу места 1,5 и 4 град. Приемная антenna с шириной диаграммы направленности в азимутальной плоскости, равной 1 град, а по углу места 2,5 град, располагалась на высоте 5 метров над уровнем моря и обеспечивала оптимальное антеннное усилие при полном охвате запаздывающих лучей.

Приемник был выполнен на базе УВЧ и широкополосного линейного УПЧ с полосой пропускания 30 МГц. Пороговая чувствительность приемника составляла $4 \cdot 10^{-12}$ Вт. Динамический диапазон УПЧ позволял регистрировать замырания сигналов с глубиной 25—28 дБ. В качестве индикатора использовался импульсный осциллограф с полосой пропускания 20 МГц. Регистрация ЭИР осуществлялась путем их фотографирования с экрана осциллографа кинокамерой РФК-5. Использование для запуска кинокамеры тактового генератора позволило вести съемку с частотой от 0,1 до 16 Гц.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

Методика проведения экспериментальных исследований в качестве основного элемента предусматривала регистрацию «мгновенных» ЭИР. Под «мгновенной» ЭИР будем в дальнейшем понимать ЭИР, снятую при излучении единичного зондирующего импульса.

Для исследования сезонной и суточной зависимости измерения проводились сеансами продолжительностью до 30 мин четыре раза в сутки (03; 09; 15; 21 час местного времени) в различные сезоны. В течение сеанса производилась регистрация ЭИР с различной частотой съемки (0,5; 0,1; 16 Гц). Всего за сеанс регистрировалось от 500 до 600 мгновенных ЭИР. Общее число обработанных сеансов измерений равно 150.

В качестве исходного материала для статистической обработки принималась выборка объемом в 100—120 статистически независимых ЭИР*. Каждая из ЭИР описывалась дискретно в 62 точках при шаге дискретизации 6,5 нс. Обрабатываемый материал с помощью автомата-

* Для расчета автокорреляционных функций сигналов в лучах использовались результаты съемки со скоростью 16 Гц и объемом в 180 последовательно снятых ЭИР.

ческого устройства кодирования графической информации представлялся на перфоленте и вместе с градуировочной характеристикой УПЧ вводился в ЭВМ М-220М.

Программа статистической обработки предусматривала по каждой выборке ЭИР расчет перечисленных выше статистических характеристик ЭИР. Аналогичной статистической обработке были подвергнуты серии неискаженных зондирующих импульсов, снятых при совмещенной передающей и приемно-регистрирующей аппаратуре, что позволило оценить суммарные погрешности процесса обработки. В результате было установлено, что зондирующий импульс имеет колокольную форму с шириной на уровне 3, 6, 10 и 14 $\mu\text{с}$ соответственно 54, 73, 92 и 102 $\mu\text{с}$. Случайные отклонения ширины составляли не более $\pm 3-5\%$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 1 а—1 д представлены образцы записей «мгновенных» ЭИР на исследуемой траассе при различном характере искажений, вносимых средой распространения радиоволн. Мгновенные ЭИР, представленные на рис. 1 а, соответствуют условиям однолучевого распространения радиоволн, связанным с образованием над морем интенсивных инверсионных слоев. Сравнение таких записей с записями зондирующих

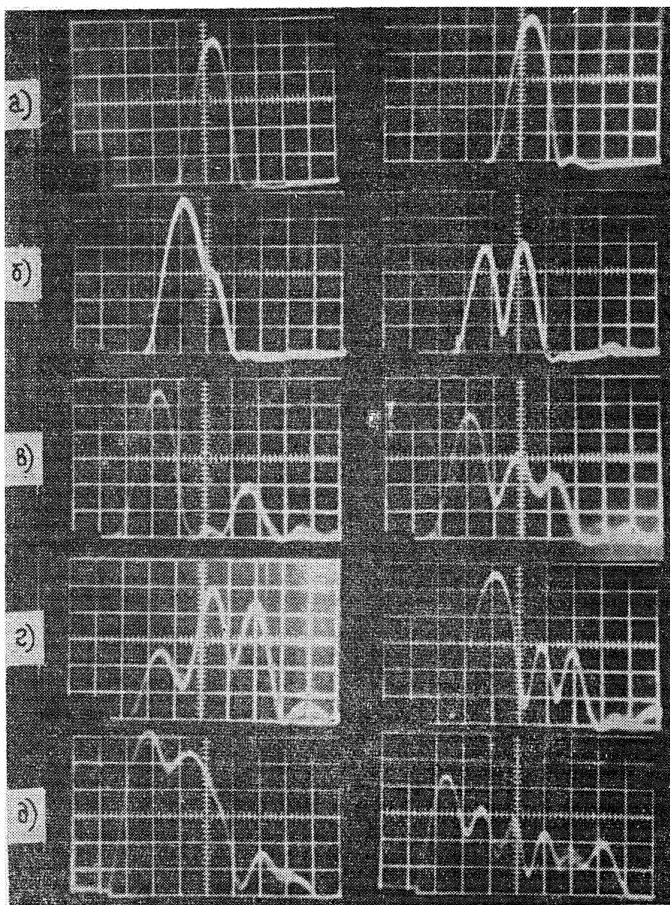


Рис. 1.

импульсов показывает, что до уровня 18—20 дБ от максимума степень их отличия не превышает погрешностей процесса измерений и обработки. На следующих фотографиях представлены характерные типы искажений при многолучевой структуре канала от плавного расширения ЭИР до ярковыраженного двух-, трех- и более лучевого характера искажений (рис. 1 б—1 д).

Для зимнего и части весеннего периодов наблюдений (январь—май) наиболее типичны записи вида 1 а—1 в, процентное содержание которых в этом периоде составляет около 70 %. В летний период измерений (июль—август) для 60 % случаев характерны записи вида 1 а. Обычно они наблюдаются одновременно с аномально высокими уровнями сигналов (10^{-5} — 10^{-6} Вт). В остальных случаях летнего периода, так же как и в зимне-весенний период, наиболее распространены записи ЭИР вида 1 б, 1 в. Миниоголучевой характер ЭИР, отраженный на фотографиях 1 г, 1 д, встречается лишь в 19 и 5 % случаев зимне-весен- него периода и 8 и 2 % случаев летнего периода измерений соответственно.

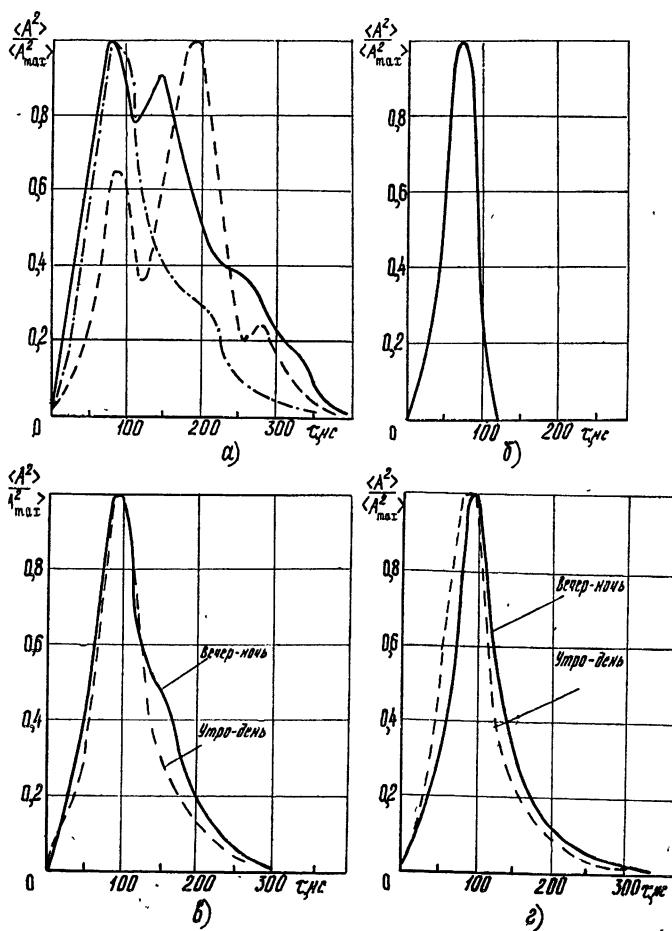


Рис. 2.

На рис. 2 приведены примеры усредненных ЭИР за сеанс (рис. 2 а) и за сезон (рис. 2 в, 2 г), а на рис. 2 б для сравнения представлена ЭИР свободного пространства. Как видно из рисунков, не только единичные ЭИР, но и средние за сеанс ЭИР обладают выраженной лучевой струк-

турой. Число разрешаемых лучей с различным энергетическим весом от 3 до 20 дБ колеблется в пределах от двух до трех-четырех. Такое сохранение многолучевой структуры за достаточно большой промежуток времени говорит об эффективности применения разноса по лучам.

При усреднении за сезон немонотонности в поведении средних ЭИР значительно сглаживаются (рис. 2в, 2г). Однако эффект многолучевости в тропосферном канале приводит к существенному отличию средних за сезон ЭИР от зондирующего импульса. Это отличие проявляется в выраженной асимметрии средних за сезон ЭИР, связанный с характером зависимости мощности сигнала от угла рассеяния в тропосфере [6] и в заметном расширении средних ЭИР.

Для количественной оценки вклада, вносимого запаздывающими лучами в расширение ЭИР, были построены усредненные за сезон зависимости ширины средних за сеанс ЭИР (Δ) от уровня, на котором делается оценка. Эти зависимости представлены на рис. 3а. Треугольниками на рисунке обозначены точки, соответствующие летнему периоду измерений (при исключении из его числа случаев однолучевого распространения), кружками — точки, относящиеся к зимне-весеннему циклу измерений. Для летнего периода каждая из точек построена по результатам усреднения в 52 независимых сеансах, для зимне-весенне — по результатам усреднения в 98 независимых сеансах. Сплошной линией на рисунке нанесена зависимость ширины зондирующего импульса от уровня отсчета.

На рис. 3б приведены гистограммы значений ширины средних ЭИР для трех уровней: 3, 6 и 10 дБ слева направо соответственно, которые позволяют оценить возможные границы их разброса. По оси ординат отложены вероятности $W(\Delta_i \leq \Delta < \Delta_{i+1})$. Над каждой из гистограмм указана длительность зондирующего импульса для данного уровня. Первый из секторов в каждой гистограмме (они заштрихованы) содержит отсчеты, близкие к ширине зондирующего импульса. Соответственно можно видеть, что вероятность расширения ЭИР монотонно увеличивается от 68% на уровне 3 дБ до 80% на уровне 10 дБ. Одновременно увеличивается и степень расширения средних ЭИР (рис. 3а).

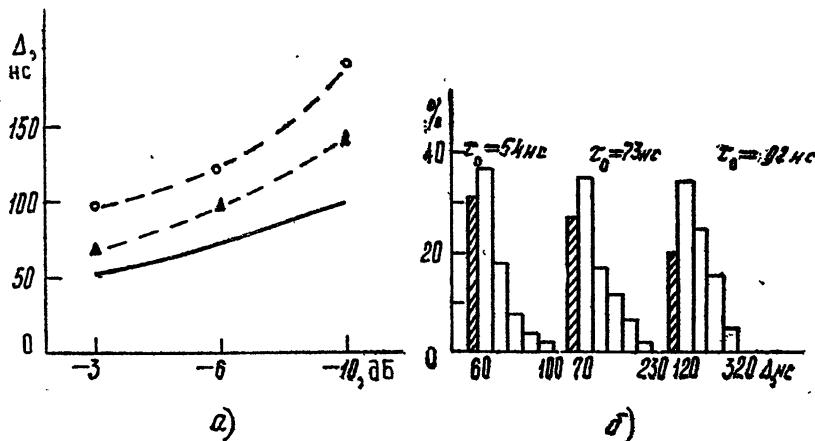


Рис. 3.

Принимая во внимание результаты, представленные на рис. 2 и 3, можно сделать вывод об эффективности даже некогерентного сложения сигналов в лучах. Для количественной иллюстрации этого вывода для зимне-весенне цикла измерений были рассчитаны функции такого вида:

$$\eta(T) = 10 \lg \frac{\int_0^T \langle |A(\tau)|^2 \rangle d\tau}{\int_0^{\tau_0} \langle |A(\tau)|^2 \rangle d\tau},$$

где $\langle |A(\tau)|^2 \rangle$ — средняя за сеанс ЭИР, $\tau_0 = 0,1 \text{ мкс}$, $T = n \tau_0$ ($n = 1 \div 5$). Анализ зависимости $\eta(T)$ показал, что с увеличением T $\eta(T)$ монотонно возрастает, достигая насыщения при $T = 0,4 \div 0,5 \text{ мкс}$. Значения $\eta(T)_n$ составляют величины порядка 4—6 dB, что подтверждает сделанный выше вывод.

ВЗАИМНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИГНАЛОВ В ЛУЧАХ

Результаты исследований взаимно-корреляционных функций флюктуаций сигналов в лучах $\rho(\tau)$ представлены на рис. 4. Расчет корреляционной функции проводился путем ансамблевого усреднения по формуле

$$\rho(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^{180} [A_j(\tau_i) - \langle A(\tau_i) \rangle] [A_j(\tau_{i+k}) - \langle A(\tau_{i+k}) \rangle]}{\sigma_A(\tau_i) \sigma_A(\tau_{i+k})},$$

j — номер мгновенной реализации ЭИР, i — порядковый номер точки на оси задержек, соответствующих положению 1-го, 2-го и 3-го лучей, $(\tau_{i+k} - \tau_i) = 25 \text{ нс}$, $k = 1 \div 6$, $\sigma_A(\tau_i)$ — среднеквадратичное значение огибающей ЭИР на i -й задержке.

Было проанализировано около 300 корреляционных функций сигналов, соответствующих различным сезонам наблюдений. Анализ показал, что в 100 процентах случаев флюктуации сигналов в лучах статистически независимы, а радиус корреляции сигналов, отсчитанный на уровне $1/e$, не превышает длительности зондирующего импульса на уровне 10 dB от максимума. Кроме того, было замечено, что практически в каждом из сеансов наблюдений радиус корреляции флюктуаций огибающих в первом луче в 1,5—2 раза больше радиуса корреляции флюктуаций огибающих во втором луче. Такое соотношение между этими величинами остается и при усреднении за сезон (рис. 4 — кривые 1, 2 — лето; 1a, 2a — зима — весна).

Из рисунка видно, что $\rho_1 \approx 1,6 \div 1,7 \rho_2$, где ρ_i отсчитано на уровне $1/e$. Статистическое обеспечение этих построений позволяет с 95-процентной вероятностью принять гипотезу о различии величин ρ_1 и ρ_2 .

Раскоррелированность сигналов в лучах еще раз указывает на эффективность разнесенного приема по лучам для повышения надежности систем связи.

АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ФЛЮКТУАЦИЙ СИГНАЛОВ В ЛУЧАХ

Измерения автокорреляционных функций проводились в наиболее типичных для каждого из сезонов условиях, за исключением условий, близких к условиям распространения радиоволн в свободном простран-

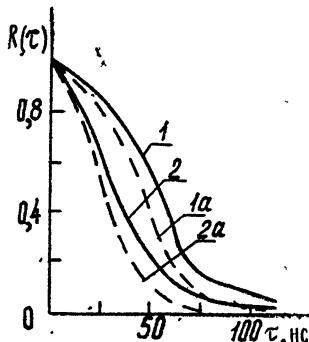


Рис. 4.

стве с ярко выраженной однолучевой структурой сигнала. Последние характеризуются весьма медленными замираниями с частотой, меньшей десятых и сотых долей герца с синхронным изменением огибающей в лучах.

Наиболее типичные из автокорреляционных функций представлены на рис. 5 (а, б, в). Кривые, изображенные на рисунках, имеют три номера, обозначающие порядковые номера лучей. Картинка поведения корреляционных функций весьма разнообразна. Их объединяет то, что частота флюктуаций в первом луче несколько меньше, чем во втором и третьем, а во втором меньше, чем в третьем. Степень различия колеблется в широких пределах. В большинстве случаев радиус автокорреляции флюктуаций огибающей первого луча в 1,5—2 раза больше, чем во втором. Лишь в случае весьма быстрых флюктуаций они мало отличаются друг от друга (рис. 5 б). Если соотнести поведение автокорреляционных функций с характером поведения мгновенных ЭИР (рис. 1 а—1 д), можно отметить следующее. Так, автокорреляционные функции вида рис. 5 а, 5 в характерны для большинства случаев, когда интенсивность первого луча больше второго, а второго больше третьего (рис. 1 б, 1 в). Автокорреляционные функции вида 5 б наблюдаются в случае многолучевой структуры сигнала (рис. 1 г, 1 д) с примерно одинаковым весом лучей, т. е. лучи с меньшей интенсивностью, как правило, имеют и меньший период флюктуаций. Зависимость степени временной изменчивости от сезона и времени суток неоднозначна и определяется погодными условиями на трассе. Анализ показывает, что при исключении случаев с условиями распространения радиоволн, близкими к условиям свободного пространства, радиус автокорреляции флюктуаций сигналов колеблется от 0,1 до 2 с модальным значением порядка 0,2—0,3 с.

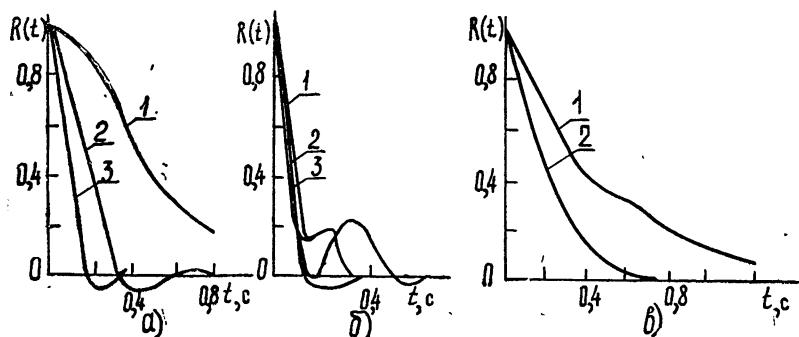


Рис. 5

ИНТЕНСИВНОСТЬ ФЛУКТУАЦИЙ ОГИБАЮЩИХ СИГНАЛОВ В ЛУЧАХ

Одной из важных характеристик, необходимых для анализа флюктуационных искажений сигналов в лучах, является интенсивность флюктуаций сигналов в лучах и закон распределения этих флюктуаций. Анализ последних показал, что в большинстве случаев закон распределения флюктуаций огибающих в лучах близок к обобщенному релеевскому закону распределения. Этот закон распределения является однопараметрическим и может быть полностью описан по известным значениям параметра $\nu = \sigma / \langle A \rangle$ [3], где σ — среднеквадратичное значение огибающей, $\langle A \rangle$ — среднее значение огибающей. Для релеевского распределения $\nu \approx 0,527$.

Гистограммы параметра ν для первых двух лучей представлены на рис. 6. Из рисунка видно, что наиболее вероятными для первого луча являются значения $\nu \approx 0,2 \div 0,4$, в то время как во втором случае заметны более сильные флюктуации. Здесь модальное значение относительной интенсивности флюктуаций близко к 0,5—0,6. Зависимость относительной интенсивности флюктуаций от сезона и времени суток не выражена. Исключение составляют те 60% случаев наблюдений летнего цикла измерений, когда наряду со слабыми искажениями формы сигнала наблюдаются аномально высокие уровни сигналов и их глубокие медленные общие замирания с периодом от десятков секунд до нескольких минут. Эти эффекты, как показало сравнение результатов радиоизмерений и синхронных метеозондирований тропосферы в районе трассы, связанны с наличием повышенной рефракции ($-0,104 \div -0,157 \text{ Нед./м}$) в слое тропосферы 200—600 м над уровнем моря.

Интересно отметить, что предварительные исследования влияния угла ориентации оси передающей антенны в вертикальной плоскости на характер мгновенных ЭИР в этих условиях показали, что подъем максимума диаграммы передающей антенны на 1,5—2 град выше уровня горизонта приводит к резкому изменению формы мгновенных ЭИР. Если при ориентации оси падающей антенны на горизонт наблюдается устойчивая однолучевая структура ЭИР, то смещение максимума диаграммы приводит, во-первых, к падению уровня сигнала, а во-вторых, к ярковыраженной трех-четырех- и даже пяти-шести-лучевой структуре мгновенных ЭИР. Не приводя специально фотокопий мгновенных ЭИР, этот эффект можно иллюстрировать последовательной сменой ЭИР, приведенных на рис. 1 а, на ЭИР, приведенные на рис. 1 д.

Из вышеизложенного следует, что с помощью короткого импульса могут изучаться строение нижней тропосферы в связи с аномальными условиями распространения радиоволн, условия захвата радиоволн УКВ диапазона в зависимости от углов скольжения и другие вопросы, связанные со сверхдальним распространением УКВ.

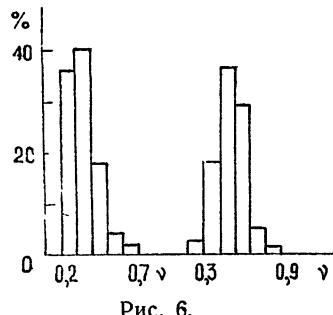


Рис. 6.

Полученные результаты показывают эффективность применения на морских тропосферных линиях УКВ разноса по лучам, обеспечивающего повышение потенциала радиотехнических систем за счет, по крайней мере, некогерентного сложения сигналов в статистически независимых лучах с одновременным увеличением надежности этих систем.

ЛИТЕРАТУРА

- Барроу, Абрахам и др., ТИИЭР, 57, № 4, 1837 (1969).
- D R Bitser, D. A. Chesler, R. Ivers, S. Stein, IEEE Trans. Commun Techn., COM-14, 499 (1966).
- Дальнее тропосферное распространение УКВ (под ред. Б В Введенского, М А Колосова, А И Калинина, Я С Шифрина), изд. Сов радио, М., 1965
- И. А. Гусятинский, А. С. Немировский, А. В. Соколов, В. Н. Троицкий, Дальняя тропосферная связь, изд. Связь, М., 1968.

- 5 Н. Е. Кирilloв, Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно изменяющимися параметрами, изд. Связь, М., 1971.
6. Я. А. Фикс, Труды НИИР, № 4, 32 (1974).

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
30 сентября 1974 г.,
после доработки
3 февраля 1976 г.

THE RESULTS OF EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF ENERGETIC PULSE REACTION OF A TROPOSPHERE CANAL

V. A. Filonenko, V. V. Ruchkin, E. D. Tel'pukhovsky, V. B. Fortes

The results of experimental investigations of statistical characteristics of energetic pulse reaction (EPR) of the sea troposphere radio wave propagation canal are presented. Investigations were made in 10 cm wave range at the distance 220 km by a probing-pulse of 100 ns duration. Based upon the experimental measurements, the instantaneous and mean EPR as a function of the day time and season are investigated, the mutual-correlation features of signals in rays and fluctuation characteristics of the signal envelopes in rays are discussed. The efficiency of using the ray separation for increasing the potential of the systems applying the phenomenon of troposphere radio wave propagation is shown, as well as the possibility of using ultra-short pulses to investigate the microwave trapping at super-distant troposphere propagation.

УДК 621.378.325

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ НАКАЧКИ В КВАНТОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ НА ПАРАХ Rb⁸⁷ И ЕГО АМПЛИТУДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

*E. B. Кулагин, A. I. Пихтелеv, Ю. П. Тутуркин,
Ю. В. Тимофеев, Б. П. Фатеев*

Исследуется оптическая накачка в генераторе на парах рубидия. Рассматривается методика расчета характеристик рубидиевого генератора для общих предположений о спектральном составе света накачки, структуре СВЧ поля в резонаторе и переизлученном свете. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований процесса оптической накачки в рубидиевом квантовом генераторе (РКГ) достаточно широко представлены в отечественной и зарубежной литературе [1-6]. Однако, как правило, в этих работах проводился качественный анализ характеристики РКГ [2, 3, 6]. При этом накладывались значительные ограничения на модель РКГ. Например, не учитывались спектральное распределение света накачки и его поглощение вдоль резонатора, структура СВЧ поля в резонаторе генератора, распределение переизлученного света вдоль резонатора и т. д. Эти ограничения не давали возможности провести точного количественного анализа работы РКГ, в частности, определить оптимальные параметры РКГ (температуру резонатора, давление и состав буферного газа в резонаторе, температуру ячееки-фильтра и т. д.) и их влияние на характеристики РКГ.

В данной работе при рассмотрении модели РКГ снимаются указанные выше ограничения и дляstationарного случая проводится анализ оптической накачки в генераторе и его амплитудных характеристик.

Для описания процесса оптической накачки в РКГ используем условие энергетического баланса. Мощность, излучаемую атомной системой в резонаторе, можно представить в виде [2]

$$P_{\text{изл}} = h f_0 n_p \int_V \Delta \sigma W_{6-2} dV, \quad (1)$$

где h — постоянная Планка, f_0 — частота атомного перехода в рубидии, n_p — плотность атомов рубидия в резонаторе [7], V — объем резонатора, $\Delta \sigma$ — разность населенностей между рабочими уровнями генератора, обусловленная оптической накачкой, W_{6-2} — вероятность перехода в единицу времени атома рубидия между рабочими уровнями генератора под действием СВЧ поля.

Учитывая только продольное распределение СВЧ поля в резонаторе и полагая равными поперечное и продольное времена релаксации, для вероятности W_{6-2} в случае резонатора с типом колебания TE_{011} , настроенного на частоту атомного перехода, можем записать

$$W_{6-2} = \frac{\frac{x}{2\tau} \left(\frac{\mu_{6-2} H_0}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l_p}}{x \left(\frac{\mu_{6-2} H_0}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l_p} + \left(\frac{1}{2\pi\tau} \right)^2}, \quad (2)$$

где x — коэффициент заполнения резонатора [8], τ — время продольной релаксации с учетом влияния света накачки [8, 9], μ_{6-2} — матричный элемент магнитного дипольного момента перехода, H_0 — максимальное значение магнитной составляющей напряженности СВЧ поля в резонаторе, x — расстояние от переднего торца резонатора вдоль направления распространения света, l_p — длина резонатора.

Мощность, поглощаемая стенками резонатора, будет равна

$$P_{\text{погл}} = \frac{f_0 H_0^2 V}{8 Q}, \quad (3)$$

где Q — добротность резонатора.

Порог самовозбуждения в РКГ достигается в тот момент, когда мощность излучения (1) превышает мощность, поглощаемую стенками резонатора (3). Имея в виду это обстоятельство и используя выражения (1) и (3), для параметра самовозбуждения легко получить

$$\beta = \frac{8\pi Q n_p x \mu_{6-2}^2}{l_p h} \int_0^{l_p} \tau(x) \Delta\sigma(x) \sin^2 \frac{\pi x}{l_p} dx > 1. \quad (4)$$

Разность населенностей $\Delta\sigma$, входящую в выражение (4), найдем из решения уравнений накачки в стационарном случае ($\dot{\sigma}_j = 0$) [9]:

$$\Delta\sigma = \frac{W_1 - W_2}{3W_2 + 5W_1 + 8/T}, \quad (5)$$

где

$$W_n = \sum_{k=1}^4 \frac{\gamma_k r_0 c f_k g_k \delta_{nk}}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} [J_k(x, \omega) + J_k^n(x, \omega)] d\omega \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_k^2 + \gamma_k^2 (\omega + \beta_k p_p - y)^2},$$

$$\delta_{1k} = \begin{cases} 1, & k = 1; 2 \\ 0, & k = 3; 4 \end{cases}, \quad \delta_{2k} = \begin{cases} 0, & k = 1; 2 \\ 1, & k = 3; 4 \end{cases}$$

T — время релаксации без учета света накачки, p_p — давление буферного газа в резонаторе, $J_k(x, \omega) + J_k^n(x, \omega)$ — сумма спектральных распределений основного и переизлученного света вдоль резонатора соответственно [9, 10]. Заметим, что, пренебрегая поглощением света вдоль резонатора, которое приводит к зависимости продольного времени релаксации и разности населенностей от x , мы получим выражение для параметра самовозбуждения, совпадающее с результатом работы [6, 8].

Выходную мощность РКГ, измеряемую приемником, в стационарном случае можно найти из уравнения баланса:

$$P_0 = m (P_{\text{изл}} - P_{\text{погл}}), \quad (6)$$

где m — коэффициент связи резонатора РКГ с нагрузкой [4, 6, 8]. Подставляя (1) и (3) в (6) и учитывая (2), получим

$$P_0 = \frac{mf_0 H_0^2 V}{2l_p} \left[\frac{n_p \times \mu_{6-2}^2}{h} \int_0^{l_p} \frac{\frac{\Delta\sigma}{\tau} \sin^2 \frac{\pi x}{l_p} dx}{\left(\frac{\mu H_0}{h} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l_p} + \left(\frac{1}{2\pi\tau} \right)^2} - \frac{l_p}{4Q} \right]. \quad (7)$$

В режиме колебаний РКГ населенности определяются из следующей системы уравнений [9]:

$$\dot{\sigma}_j = -\sigma_j \sum_i \lambda_{ji} W_i + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 \sigma_n \sum_i \lambda_{ni} W_i + \frac{1}{T} \left(\frac{1}{8} - \sigma_j \right) + \delta_j W_{6-2} (\sigma_6 - \sigma_2), \quad (8)$$

где

$$\lambda_{j1} = \begin{cases} 1 & \text{для } j = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{для } j = 4, 5, 6, 7, 8 \end{cases},$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j=2 \\ -1 & \text{при } j=6 \\ 0 & \text{при остальных } j \end{cases},$$

$$\lambda_{j2} = 1 - \lambda_{j1}.$$

Решение системы (8) для стационарного случая имеет вид

$$\sigma_6 = \frac{1}{1 + 4\beta_0\gamma_0 + \beta_0 + 2\alpha_0\beta_0\gamma_0}, \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \beta_0\sigma_6, \quad \sigma_4 = \gamma_0\sigma_2, \quad \sigma_1 = \alpha_0\sigma_4,$$

где

$$\alpha_0 = \frac{W_2 + 1/T}{W_1 + 1/T}, \quad \beta_0 = \frac{W_2 + 2W_{6-2} + 1/T}{W_1 + 2W_{6-2} + 1/T},$$

$$\gamma_0 = \frac{W_1 + W_{6-2} + 1/T - W_{6-2}/\beta_0}{W_2 + 1/T}.$$

Окончательно для $\Delta\sigma$ получим

$$\Delta\sigma = \frac{1 - \beta_0}{1 + 4\beta_0\gamma_0 + \beta_0 + 2\alpha_0\beta_0\gamma_0}. \quad (10)$$

Необходимо отметить, что, пренебрегая в (7) потерями в резонаторе, структурой СВЧ поля и поглощением света вдоль резонатора, можно получить упрощенное выражение для выходной мощности РКГ, которое приводится в работе [6].

При использовании выражений (4)–(6) и уравнения (7) нами исследовались на ЭВМ зависимости основных параметров генератора — условия самовозбуждения β и мощности генерации P_0 — от различных условий накачки. За основу была взята методика расчета, учитывающая поглощение света в ячейке-фильтре и резонаторе, описанная нами в работе [9]. При определении вероятности W_1 и W_2 проводился учет влияния на них переизлученного света, распределение которого по длине резонатора было взято из работы [10]. Результаты расчетов и эксперимента приведены на рис. 1–7.

Теоретические зависимости параметра самовозбуждения и мощности генерации от давления газа в резонаторе с разными значениями поперечного сечения гасящих столкновений приводятся на рис. 1. Эти зависимости имеют ярко выраженные максимумы, которые достигаются при разных давлениях. Оптимальные давления для газа с полным пашением резонансной люминесценции и без гашения одинаковы и равны 13 тор и определяются временем релаксации рубидия в основ-

ном состоянии. Оптимальное давление для азота более высокое (~ 38 tor), что объясняется ростом степени гашения переизлучения с увеличением давления, которое зависит от поперечного сечения гасящих столкновений рубидия с газом [5]. В отсутствие гашения люминесценции параметр самовозбуждения существенно уменьшается и генерация становится невозможной.

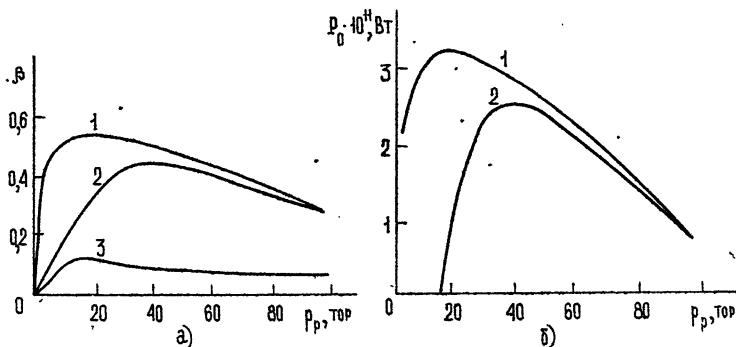


Рис. 1. Расчетные зависимости параметра самовозбуждения и выходной мощности от давления газа в резонаторе.

Условия расчета: $p_\Phi = 100$ tor (Ar), $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, $T_p = 75^\circ\text{C}$, $Q = 3 \cdot 10^4$, $J_0 = 10^5$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma_u$;

1—с полным гашением переизлучения, 2—при частичном гашении переизлучения, $\sigma_{N_2} = 36 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2}$ (поперечное сечение гасящих столкновений), 3—без гашения переизлучения.

Выбор газовой смеси в значительной мере определяет давление газа и выходную мощность РКГ. Как следует из рис. 2, оптимальное давление аргон-азотной газовой смеси более высокое и равно 50 tor. Мощность генерации для чистого азота примерно в два раза больше, чем для аргон-азотной смеси, при котором начинается генерация, примерно в два раза меньше. Экспериментальные зависимости подтверждают результаты проведенного анализа. Количественное расхождение между экспериментальными и расчетными данными (порядка 20—30%) можно объяснить, в частности, расходимостью светового пучка при прохождении резонатора, которое не учитывалось при расчете.

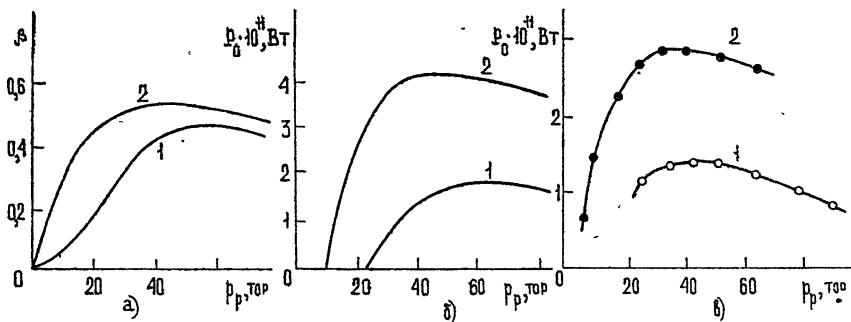


Рис. 2. Расчетные (а, б) и экспериментальные (в) зависимости параметра самовозбуждения (а) и выходной мощности (б, в) от давления аргон-азотной (33% N₂ + 67% Ar) газовой смеси (1) и азота (2) в резонаторе.

Условия расчета: $p_p = 100$ tor (Ar), $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, $T_p = 70^\circ\text{C}$, m —коэффициент связи, $m = 15\%$, $J_0 = 10^5$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma_u$.

Условия эксперимента: $p_\Phi = 100$ tor (Ar), $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, $T_p = 70^\circ\text{C}$, $m \sim 15\%$, $J_0 \sim 10^5$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma_u$.

Как и в рубидиевом диспергаторе [9], на оптическую накачку атомов рубидия в генераторе влияют смещения и уширение оптических линий поглощения (рис. 3). Наиболее высокое оптимальное давление имеют газы, обладающие малыми коэффициентами смещений и уширения (рис. 3). При больших значениях юни существенно влияют на величину параметра самовозбуждения и выходную мощность РКГ, но не определяют оптимального значения.

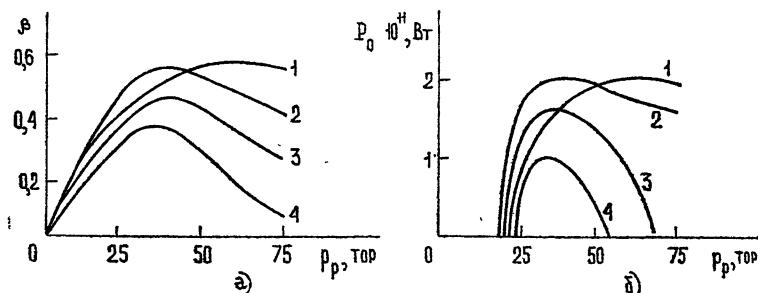


Рис. 3. Расчетные зависимости параметра самовозбуждения (а) и выходной мощности (б) от давления газов, имеющих разные коэффициенты смещения и уширения. Условия расчета: $p_{\text{ф}} = 100 \text{ torr}$ (Ar), $T_{\text{ф}} = 80^\circ\text{C}$, $T_p = 75^\circ\text{C}$, $Q = 3 \cdot 10^4$, $J_0 = 10^5 \text{ фот}/\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц}$, $m = 15\%$;

$1-\beta = 0$, $\alpha = 0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$; $2-\beta = 0$, $\alpha = 1,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$; $3-\beta = -0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$, $\alpha = 1,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$; $4-\beta = -0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$, $\alpha = 0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$.

На рис. 4 приведены зависимости параметра самовозбуждения и мощности генерации от температуры резонатора для разных значений спектральной интенсивности. Максимумы кривых с увеличением спектральной интенсивности смещаются в сторону больших температур, и каждому значению спектральной интенсивности света соответствует свое оптимальное значение температуры резонатора. Экспериментальные результаты совпадают с теоретическими, а количественное расхождение объясняется расходимостью светового пучка.

Из выражений (4) и (7) следует, что выходная мощность и параметр самовозбуждения зависят не только от величины разности населенностей и ширины спектральной линии атомного перехода, но и от их распределения вдоль резонатора. Поэтому для выбора оптимальных условий РКГ необходимо проведение исследований распределения этих характеристик вдоль резонатора. Некоторые результаты приведены на рис. 5—7. При низких температурах ячейки-фильтра ($60—70^\circ\text{C}$) [11] свет недостаточно отфильтрован, поэтому разность населенностей в передней части ячейки мала (рис. 5 а), а ширина спектральной линии атомного перехода велика (рис. 5 б). Однако по мере фильтрации света вдоль резонатора разность населенностей возрастает, а ширина спектральной линии достигает минимального значения, которая определяется тепловым временем релаксации [9]. При высоких температурах ячейки-фильтра ($90—100^\circ\text{C}$) свет имеет высокую степень фильтрации [11], следовательно, в передней части резонатора ширина спектральной линии минимальна, а разность населенностей максимальна, а затем она уменьшается, что связано с поглощением рабочей компоненты вдоль резонатора. Параметр самовозбуждения непосредственно

связан с величиной $\frac{\Delta \sigma n_p}{\Delta f}$, распределение которой по резонатору существенно зависит от температуры ячейки-фильтра. С уменьшением темпе-

ратуры ячейки-фильтра максимум $\beta(x) \sim \frac{\Delta \sigma n_p}{\Delta f}$ смещается по направлению распространения света.

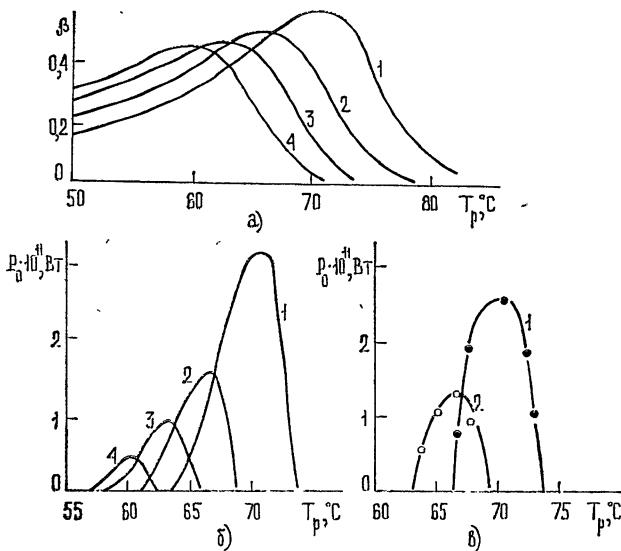


Рис. 4. Расчетные (а, б) и экспериментальные (в) зависимости параметра самовозбуждения (а) и выходной мощности от температуры резонатора для разных значений спектральной интенсивности.

Условия расчета: $p_\Phi = 100$ тор (Арг), $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, $p_p = 20$ тор (N_2), $Q = 2,4 \cdot 10^4$, $m = 15\%$, 1— $J_0 = 2 \cdot 10^5$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma\text{ц}$, 2— $J_0 = 10^6$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma\text{ц}$, 3— $J_0 = 5 \cdot 10^4$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma\text{ц}$, 4— $J_0 = 2,5 \cdot 10^4$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma\text{ц}$.

Условия эксперимента: $p_\Phi = 100$ тор (Арг), $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, $p_p = 20$ тор (N_2), $Q \sim 2,4 \cdot 10^4$, $m \sim 15\%$, 1— $J_0 \sim 2 \cdot 10^5$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma\text{ц}$; 2— $J_0 \sim 10^6$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma\text{ц}$.

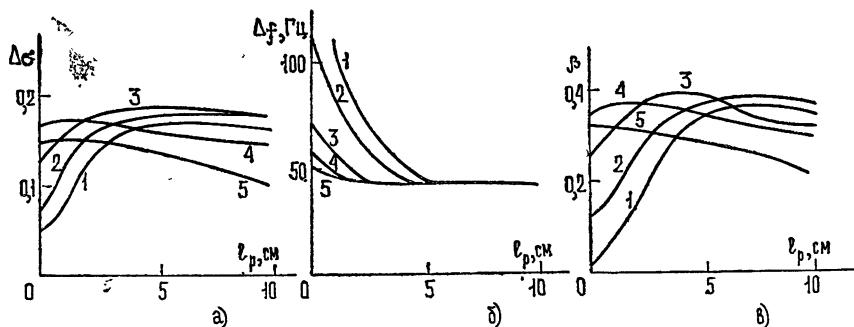


Рис. 5. Расчетные зависимости разности населенностей (а), ширины спектральной линии эталонного атомного перехода (б) и параметра самовозбуждения (в) от длины резонатора для разных температур ячейки-фильтра.

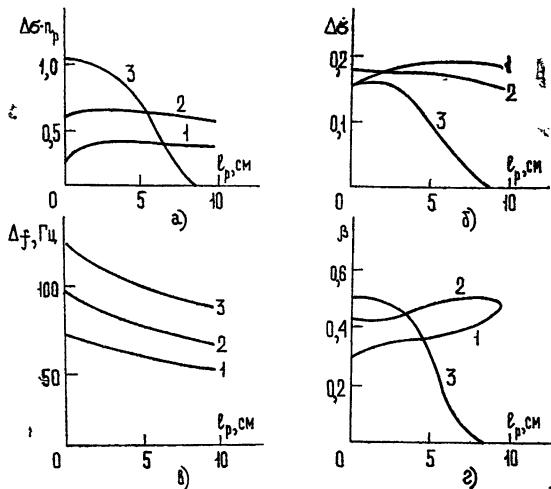
Условия расчета: $p_\Phi = 100$ тор (Арг), $T_p = 60^\circ\text{C}$, $J_0 = 10^5$ фот/ $\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma\text{ц}$, $p_p = -40$ тор (N_2); 1— $T_\Phi = 60^\circ\text{C}$, 2— $T_\Phi = 70^\circ\text{C}$, 3— $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, 4— $T_\Phi = 90^\circ\text{C}$, 5— $T_\Phi = 100^\circ\text{C}$.

При низких температурах резонатора ($\sim 60 — 70^\circ\text{C}$) плотность пара рубидия незначительна и свет осуществляет полную перекачку атомов рубидия из состояния $F = 1$ в состояние $F = 2$ (рис. 6 а, 6 б). При высокой температуре резонатора свет создает высокую инверсию населенностей только в передней части резонатора. Затем по мере его поглощения разность населенностей уменьшается. Ширина спектральной

линии эталонного перехода увеличивается с ростом температуры резонатора, что обусловлено увеличением роли спин-обменных столкновений [9] (рис. 6 в). Максимум параметра самовозбуждения $\beta(x) \sim \frac{\Delta\sigma n_p}{\Delta f}$ с ростом температуры резонатора T_p смещается к переднему торцу резонатора.

Рис. 6. Расчетные зависимости плотности активных атомов в относительных единицах (а), разности населенностей (б), ширины спектральной линии эталонного перехода (в) и параметра самовозбуждения (г) от длины резонатора для разных его температур.

Условия расчета: $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, $p_\Phi = 100 \text{ torr}$ (Ar), $p_p = 40 \text{ torr}$ (N_2), $J_0 = 10^6 \text{ фот}/\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц}$; 1 — $T_p = 60^\circ\text{C}$, 2 — $T_p = 70^\circ\text{C}$, 3 — $T_p = 80^\circ\text{C}$.



На рис. 7 приводятся зависимости относительной населенности подуровней основного состояния от длины резонатора для двух случаев $Q < Q_{\text{кр}}$ и $Q > Q_{\text{кр}}$. Как видно из рис. 7, относительные населенности подуровней значительно меняются при возникновении генерации, причем $\sigma_6 < \sigma_4$ и $\sigma_2 > \sigma_1$, что связано с переходами под действием СВЧ поля.

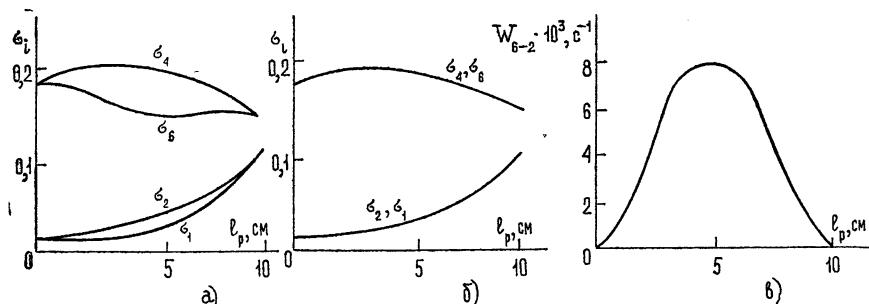


Рис. 7. Расчетные зависимости населенности зеемановских подуровней основного состояния атомов рубидия (а, б) и вероятности переходов под действием СВЧ поля (в) от длины резонатора.

Условия расчета: $T_\Phi = 80^\circ\text{C}$, $p_\Phi = 100 \text{ torr}$ (Ar), $T_p = 75^\circ\text{C}$, $p_p = 20 \text{ torr}$ (N_2), $J_0 = 10^6 \text{ фот}/\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц}$.

а) $Q = 3 \cdot 10^4$, $Q > Q_{\text{кр}}$; б) $Q < Q_{\text{кр}}$.

На основании проведенного анализа можно заключить, что при выборе конкретной газовой смеси необходимо учитывать поперечное сечение гасящих столкновений, коэффициенты смещения и уширения оптических линий поглощения и влияние пазовых смесей на время релаксации рубидия в основном состоянии. При вариации параметров

РКГ меняется не только величина разности населенностей и ширина линии, но и их расположение вдоль резонатора. Для получения оптимальных условий оптической накачки максимумы магнитной продольной составляющей СВЧ поля и $\frac{\Delta \sigma n_p}{\Delta f}$ должны совпадать.

Таким образом, в результате проведенного нами исследования получены выражения для параметра самовозбуждения (4) и мощности генерации (7) с учетом различных факторов, которые позволили провести количественный и более полный качественный анализ работы РКГ, чем это сделано ранее [1-6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Якобсон, Вопросы радиоэлектроники, сер. XII, вып 29, 60 (1963).
2. А. Н. Орловский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
3. Е. Н. Базаров, Радиотехника и электроника, 14, № 6, 1035 (1969).
4. Е. Н. Базаров, В. П. Губин, Радиотехника и электроника, 14, № 6, 1043 (1969).
5. Е. Н. Базаров, В. Д. Бикетов, В. П. Губин, Я. А. Юхвидин, Радиотехника и электроника, 17, № 3, 556 (1972).
6. R. Davidovits, R. Novick, IEEE, 54, № 2, 155 (1966).
7. Н. М. Еремина, Е. В. Кулагин, А. И. Пихтелев, Н. К. Рудневский, ЖПС, 14, № 3, 395 (1973).
8. В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968.
9. Е. В. Кулагин, Г. А. Мишаков, А. И. Пихтелев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1801 (1972).
10. Г. А. Мишаков, Диссертация, Горький, 1974.
11. Е. В. Кулагин, Г. А. Мишаков, А. И. Пихтелев, Н. К. Рудневский, ЖПС, 19, № 5, 800 (1973).

Поступила в редакцию
26 августа 1974 г.,
после доработки
29 августа 1975 г.

INVESTIGATION OF OPTICAL PUMPING IN Rb⁸⁷ VAPOUR LASER AND ITS AMPLITUDE CHARACTERISTICS

E. V. Kulagin, A. I. Pikhatev, Yu.P. Tuturkin, Yu. V. Timofeev, B. P. Fateev

The optical pump of the rubidium vapour laser is investigated. The methods of calculating the rubidium laser characteristics for general assumptions on the spectral composition of the pump light, microwave field structure in the resonator and re-radiated light is considered. The results obtained are in good agreement with the experimental data.

УДК 538.56 . 519.25

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

Ю. А. Рыжов

Из стохастического уравнения Лиувилля, выражающего закон сохранения вероятности в фазовом пространстве, выводятся обобщенные кинетические уравнения, управляющие прямой и обратной вероятностями перехода, которые статистическим образом описывают эволюцию динамических систем, находящихся под действием не δ -коррелированных флуктуационных сил. В частности, рассматриваются системы негамильтоновского типа, статистическое описание которых осуществляется с помощью плотности вероятности состояний в фазовом пространстве с сжимаемой «жидкостью», переносящей вероятность.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статистической физике и теории случайных процессов широко используется диффузионное приближение, которое заключается в применении дифференциального диффузионного уравнения обобщенного типа для функции распределения динамической системы, подверженной действию случайных сил. Теория этих уравнений изложена в ряде фундаментальных работ [1–8]. Появление за последние годы статей, посвященных выводу и анализу этих уравнений, объясняется рядом причин. Заметно повысился интерес к применению кинетических уравнений в различных областях физики. С другой стороны, появились работы с анализом условий применимости этих уравнений к описанию реальных процессов и систем [9–12], в которых флуктуационные силы не являются δ -коррелированными. Отказ от условий δ -корреляции приводит к приближениям, выходящим за пределы классической формы кинетических уравнений [10, 13, 14]. Мы здесь не касаемся чисто математических исследований в теории марковских процессов, которым посвящена обширная литература.

Цель и результаты настоящей работы можно сформулировать следующим образом. Предложен общий метод получения кинетических уравнений для описания динамических систем общего вида. Этот метод основан на рассмотрении закона сохранения вероятности в фазовом пространстве системы и связанных с ним двух взаимосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка. Одно из них можно рассматривать как стохастическое уравнение Лиувилля*. Эти уравнения рассматриваются с естественными граничными условиями, согласованными с законом сохранения вероятности в фазовом пространстве. Нахождение кинетических уравнений, управляющих вероятностями перехода в процессе эволюции системы, сводится к усреднению этих двух уравнений по ансамблю реализаций случайных сил (скоростей), действующих на динамическую систему. При этом усреднение гранич-

* Стохастическое уравнение Лиувилля использовалось также в работе [19] при изучении статистики лучей в среде со случайными неоднородностями.

ных условий для сингулярной плотности вероятности приводит к естественным граничным условиям для искомой функции распределения состояний системы. Обладая высокой степенью наглядности, метод позволяет формализовать вычисления в духе работ [10, 15]. В отличие от этих работ мы будем различать ограниченное и безграничное фазовое пространство, имея в виду, что кинетическое описание систем с ограниченным фазовым пространством, вообще говоря, отличается от такового для случая неограниченного фазового пространства из-за эффекта влияния границ.

Рассматриваемые обычно динамические системы таковы, что могут быть описаны статистически с помощью вероятности состояний, определенной в фазовом пространстве. Эта вероятность переносится в процессе эволюции «некимпаемой» жидкостью (например, в кинетической теории газов). Мы откажемся от этого ограничения, рассмотрев более широкий класс систем.

Наконец, следует отметить, что задача о воздействии на динамическую систему флуктуационных сил аналогична соответствующей проблеме в электродинамике случайно-неоднородных сред в том смысле, что ее решение приводит к проблеме вычисления эффективной скорости переноса вероятности в фазовом пространстве. Имеющаяся здесь аналогия с эффективной диэлектрической проницаемостью достаточно глубока и может представлять общий интерес. Приближение, которое будет рассмотрено ниже, соответствует приближению Бурре для скалярного волнового стохастического уравнения.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть случайный вектор $\xi(t) = \{\xi^1(t), \xi^2(t), \dots, \xi^n(t)\}$ удовлетворяет системе дифференциальных стохастических уравнений первого порядка

$$\frac{d\xi^i}{dt} = v^i(\xi, t), \quad \xi(t_0) = \xi_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Здесь $v^i(\xi, t)$ — случайная вектор-функция $n + 1$ переменных (ξ^i, t) с заданными статистическими свойствами.

Задача интегрирования системы (1) эквивалентна задаче интегрирования линейного уравнения

$$A W(x, t) = \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(v W) = 0, \quad (2)$$

для которого система (1) является уравнением характеристик.

Решение этого уравнения $W(x, t)$, удовлетворяющее определенным условиям, мы можем интерпретировать как стохастическую функцию распределения состояний системы. Действительно, состояние системы, определяемое решением системы (1), изображается в фазовом пространстве отдельной точкой (с радиусом-вектором $x(t)$). В процессе эволюции системы изображающая точка движется вдоль характеристики уравнения (2), проходящей через точку с радиусом-вектором ξ_0 . Решение уравнения (2), которое соответствует интерпретации $W(x, t)$ как функции распределения, должно удовлетворять начальному условию

$$W(x, t = t_0) = \delta(x - \xi_0). \quad (3)$$

Уравнение (2) при этом выражает закон сохранения плотности вероятности в n -мерном фазовом пространстве. Полная вероятность найти

изображающую точку в области, отвечающей допустимым значениям x , должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{\Omega} W(x, t) dx = 1. \quad (4)$$

Функцию распределения, удовлетворяющую уравнению (2) и условиям (3), (4), мы будем также называть сингулярной условной плотностью перехода и обозначать через $G(x, t/\xi_0, t_0)$.

Если мы рассмотрим теперь различные реализации процесса $v^i(x, t)$, то последним соответствует пучок характеристик уравнения (2), расходящийся по мере удаления от начальной точки ξ_0 . Ансамбль этих характеристик порождает ансамбль решений $W(x, t)$. Можно поставить вопрос о средней функции распределения плотности фазовых траекторий или о средней плотности изображающих точек вблизи заданной точки фазового пространства. Мы принимаем, что функцией распределения случайных решений системы (1) является функция $\langle W(x, t) \rangle$ — среднее значение по ансамблю реализаций вектора $v^i(x, t)$. Эта функция удовлетворяет усредненному уравнению (2), начальному условию (3) и условию нормировки. Последнее условие однозначно определяет граничное условие для функций $W(x, t)$ и $\langle W(x, t) \rangle$, приводя к условию отсутствия потока вероятности через границу фазового объема σ :

$$\begin{aligned} n v(x, t) W(x, t)|_{\sigma} &= 0, \\ n \langle v(x, t) W(x, t) \rangle|_{\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где n — единичный вектор нормали к поверхности, ограничивающей фазовый объем.

Наряду с уравнением (2) мы рассмотрим сопряженное ему уравнение:

$$\tilde{A}U(x, t) = -\frac{\partial U}{\partial t} - (v \nabla U) = 0. \quad (6)$$

Решения уравнений (2) и (6) тесно связаны друг с другом. Если известно какое-либо решение $W(x, t)$, удовлетворяющее некоторым начальным условиям $W(x, t = t_0) = W_0(x)$, то решение $U(x, t)$, удовлетворяющее начальным данным $U(x, t = t_0) = W_0(x)$, имеет вид

$$U(x, t) = W(x, t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \operatorname{div} v(s, t') dt' \right\}_{s=\xi(t', t, x)}, \quad (7)$$

где $\xi(t', t, x)$ — решение системы (1), которое мы предполагаем единственным. Приведенная форма записи означает, что рассматривается положение вектора ξ в момент времени t' , если в момент времени t изображающая точка находилась в положении с радиусом-вектором x .

Забегая несколько вперед, отметим, что для δ -коррелированных во времени флуктуаций вектора $v^i(x, t)$ усреднение уравнения (2) приводит к уравнению Эйнштейна—Фоккера—Планка—Колмогорова, а уравнение (6) — к первому уравнению Колмогорова.

Прежде чем приступить к процедуре усреднения, сделаем следующее замечание. Мы будем считать, что фазовое пространство системы (1) является евклидовым с декартовой параметризацией. Этого предположения можно не делать и рассматривать риманово пространство. В частности, существует метрика, которая органически связана с системой

мой (1) (см. [3, 6, 16]). Использование такой специальной метрики автоматически приводит к инвариантной форме записи кинетических уравнений.

3. ФУНКЦИИ ГРИНА ОПЕРАТОРОВ A И \tilde{A}

Мы будем различать две постановки задачи и соответственно две формы функции Грина для каждого из операторов A и \tilde{A} . Рассмотрим первую постановку задачи. Требуется найти решение $G_1(x, t/x_0, t_0)$ уравнения

$$AG_1(x, t/x_0, t_0) = \delta(t - t_0) \delta(x - x_0), \quad (8)$$

равное нулю при $t < t_0$, т. е.

$$G_1(x, t/x_0, t) = 0 \text{ при } t < t_0. \quad (8.1)$$

Искомое решение имеет вид [17]

$$G_1(x, t/x_0, t_0) = \delta(t - t_0) \delta[x - \xi(t, t_0, x_0)], \quad (8.2)$$

где $\xi(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1), а

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases}. \quad (8.3)$$

Для оператора \tilde{A} мы рассмотрим решение $\tilde{G}_1(x, t/x_0, t_0)$, которое обращается в нуль при $t > t_0$ и удовлетворяет уравнению

$$\tilde{A}\tilde{G}_1(x, t/x_0, t_0) = \delta(t - t_0) \delta(x - x_0). \quad (9)$$

Это решение можно записать в форме

$$\tilde{G}_1(x, t/x_0, t_0) = \delta(t_0 - t) \delta[x - \xi(t, t_0, x_0)] \exp \left\{ \int_{t_0}^t \operatorname{div} v(s, t') ds' \right\}_{s=\xi(t', t, x)}. \quad (9.1)$$

Легко видеть, что справедлив обобщенный принцип взаимности (см. [18]):

$$G_1(x, t/x_0, t_0) = \tilde{G}_1(x_0, t_0/x, t). \quad (10)$$

Из формул (8) — (10) следует, что функции $G_1(x, t/x_0, t_0)$ и $\tilde{G}_1(x, t/x_0, t_0)$ удовлетворяют по переменным x_0, t_0 следующим уравнениям:

$$\tilde{A}_0 G_1(x, t/x_0, t_0) = \delta(t - t_0) \delta(x - x_0), \quad (11)$$

$$A_0 \tilde{G}_1(x, t/x_0, t_0) = \delta(t - t_0) \delta(x - x_0).$$

Вторая постановка задачи заключается в том, что для оператора A мы ищем решение уравнения

$$AG_2(x, t/x_0, t_0) = -\delta(t - t_0) \delta(x - x_0), \quad (12)$$

такое, что $G_2(x, t/x_0, t_0) = 0$ при $t > t_0$. Это решение имеет вид

$$G_2(x, t/x_0, t_0) = \delta(t_0 - t) \delta[x - \xi(t, t_0, x_0)]. \quad (12.1)$$

Для оператора \tilde{A} нас будет интересовать решение $\tilde{G}_2(x, t/x_0, t_0)$ уравнения

$$\tilde{A}\tilde{G}_2(x, t/x_0, t_0) = -\delta(t-t_0)\delta(x-x_0) \quad (13)$$

при условии $\tilde{G}_2(x, t/x_0, t_0) = 0$ при $t < t_0$. Это решение можно записать в форме

$$\tilde{G}_2(x, t/x_0, t_0) = \delta(t-t_0)\delta[x - \xi(t, t_0, x_0)] \exp \left\{ \int_{t_0}^t \operatorname{div} v(s, t') dt' \right\}_{s=\xi(t', t, x)} \quad (13.1)$$

Функции G_2 и \tilde{G}_2 также удовлетворяют принципу взаимности:

$$G_2(x, t/x_0, t_0) = \tilde{G}_2(x_0, t_0/x, t). \quad (14)$$

По переменным x_0, t_0 они подчиняются уравнениям

$$\tilde{A}_0 G_2(x, t/x_0, t_0) = -\delta(t-t_0)\delta(x-x_0), \quad (15)$$

$$A_0 \tilde{G}_2(x, t/x_0, t_0) = -\delta(t-t_0)\delta(x-x_0).$$

Экспоненциальные множители в (9.1) и (13.1) учитывают сжимаемость жидкостей, переносящей вероятность в фазовом пространстве.

Построенные функции Грина можно рассматривать как решение соответствующих обобщенных задач Коши. Например, $G_1(x, t/x_0, t^0)$ является решением следующей задачи с начальными условиями:

$$AG_1(x, t/x_0, t_0) = 0,$$

$$G_1(x, t_0^+/x_0, t_0) = \delta(x-x_0) \quad (t=t_0), \quad (16)$$

$$G_1(x, t/x_0, t_0) = 0 \quad (t < t_0).$$

Поэтому функции G_1 и G_2 являются сингулярными условными функциями распределения вероятности перехода и их использование эквивалентно использованию одиночных фазовых траекторий. Функция распределения $G_2(x, t/x_0, t_0)$ позволяет вычислять распределение вероятностей в моменты времени, предшествующие начальному. Ее мы будем называть обращенной функцией распределения вероятности перехода [6] (или опережающей функцией Грина).

4. НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ $AW = \rho$ И $\tilde{A}U = \rho$

В дальнейшем нам будет нужно решение неоднородных уравнений. Источники предполагаются расположеными внутри фазового объема.

Рассмотрим уравнение

$$AW(x, t) = \rho(x, t). \quad (17)$$

Для решения уравнения (17) поступим следующим образом [18]. Наряду с этим уравнением рассмотрим уравнение (9), дополненное граничным условием

$$v_n \tilde{G}_1(x^\sigma, t/x_0, t_0) = 0. \quad (18)$$

Умножив уравнение (9) на $W(x, t)$, а уравнение (17) на \tilde{G}_1 и вычитая полученные соотношения одно из другого, получим

$$A [W \tilde{G}_1] = \rho \tilde{G}_1 - W \delta(t-t_0) \delta(x-x_0). \quad (19)$$

Интегрируя это уравнение по t и x (по t в интервале $[-\infty, +\infty]$, по x — по всему фазовому объему), имеем

$$\begin{aligned} \int dx [W \tilde{G}_1] & \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^t dt \oint v_n W \tilde{G}_1 d\sigma = \\ & = -W(x_0, t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} \int dx dt \rho(x, t) \tilde{G}_1(x, t/x_0, t_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Левая часть этого равенства обращается в нуль, если положить $W(x, t) = 0$ при $t = -\infty$ (следует учесть, что $\tilde{G}_1(x, t/x_0, t_0) = 0$ при $t > t_0$, а также условие (18)). В результате получаем

$$W_1(x, t) = \int_{-\infty}^{t_0} dt' \int dx' \rho(x', t') \tilde{G}_1(x', t'/x, t). \quad (21)$$

Мы получим решение уравнения (17) второго типа, если воспользуемся уравнением (13) и функцией Грина $\tilde{G}_2(x, t/x_0, t_0)$:

$$W_2(x, t) = - \int_{t_0}^{\infty} dt' \int dx' \rho(x', t') \tilde{G}_2(x', t'/x, t), \quad (22)$$

где мы положили $W_2(x, t \rightarrow \infty) = 0$.

Решение уравнения $\tilde{A}V = \rho$ мы также можем записать в двух формах, используя для этой цели функции Грина G_1 и G_2 :

$$V_1(x, t) = \int_{t_0}^{\infty} dt' dx' \rho(x', t') G_1(x', t'/x, t); \quad (23)$$

$$V_2(x, t) = - \int_{-\infty}^{t_0} dt' dx' \rho(x', t') G_2(x', t'/x, t). \quad (24)$$

Заметим, что граничные условия, которым удовлетворяют функции G_1 и G_2 (\tilde{G}_1 и \tilde{G}_2), имеют смысл отсутствия потока вероятности через границу области. Однако эти условия не означают исчезновения на границе самой плотности вероятности G_1 и т. д.

5. ВЫВОД КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (2). Усредняя его по ансамблю, получим

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle v W \rangle = 0. \quad (25)$$

Задача сводится к вычислению среднего значения $\langle v^i W \rangle$. Можно доказать, что это среднее значение можно представить в виде

$$\langle v^i W \rangle = v_{\text{эфф}}^i \langle W \rangle, \quad (26)$$

где $v_{\text{эфф}}^i$ — линейный интегральный оператор, который может быть сведен к дифференциальному только в определенном приближении.

С нахождением оператора $\hat{v}_{\text{эфф}}^i$ задача вывода кинетического уравнения для $\langle W \rangle$ будет решена.

Удобно ввести в рассмотрение уравнение

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} + \operatorname{div} [\langle v(x, t) \rangle W_0] = 0, \quad (27)$$

в котором в качестве скорости переноса взята средняя скорость $\langle v(x, t) \rangle$. Вычитая уравнение (27) из (2), имеем

$$\frac{\partial (W - W_0)}{\partial t} + \operatorname{div} [\langle v \rangle (W - W_0)] = -\operatorname{div}(v - \langle v \rangle)W. \quad (28)$$

Перепишем уравнение (28) в виде интегрального, используя для этой цели формулу (21):

$$W(x, t) = W_0(x, t) - \int_{-\infty}^{t+} dt' dx' \tilde{G}_1^0(x', t'/x, t) \operatorname{div} f W(x', t'), \quad (29)$$

где $f = v - \langle v \rangle$.

Это уравнение удобно использовать для построения итерационного ряда. Введем условную запись всех выражений, в которой интегрирование подразумевается по индексам, встречающимся трижды:

$$W(x, t) = W_0(x, t) - G_1^0(x, t/x', t') \operatorname{div} f(x', t') W(x', t'). \quad (29.1)$$

Здесь функции Грина G_1^0 и \tilde{G}_1^0 относятся к оператору со средней скоростью переноса. Итерационный ряд, выражающий решение уравнения (29.1) через функцию $W_0(x, t)$, запишем в виде

$$W^{(n)}(y) = \hat{M}_n(y/z) W_0(z). \quad (30)$$

Здесь $W^{(n)}(y)$ — n -е приближение (за нулевое взята функция W_0), в y и z включены пространственные и временные координаты, $\hat{M}_n(y/z)$ — сингулярный интегродифференциальный оператор,

$$\hat{M}_n(y/\xi) = \delta(y - \xi) - G_1^0(y/\xi) \operatorname{div} f(\xi) +$$

$$+ G_1^0(y/x_1) \operatorname{div} f(x_1) G_1^0(x_1/\xi) \operatorname{div} f(\xi) + \dots + \quad (31)$$

$$+ (-1)^{n+1} G_1^0(y/x_1) \operatorname{div} f(x_1) G_1^0(x_1/x_2) \operatorname{div} f(x_2) \dots G_1^0(x_n/\xi) \operatorname{div} f(\xi),$$

так что первые два члена ряда (30) имеют вид

$$W(y) = W_0(y) - \int_{-\infty}^t \int d\xi G_1^0(y/\xi) \operatorname{div} [f(\xi) W_0(\xi)].$$

Если аналогичным путем провести сравнение уравнений (25) и (27), то получим интегральное уравнение

$$\langle W \rangle = W_0 - G_1^0(y/\xi) \operatorname{div} [\hat{v}_{\text{эфф}}^i - \langle v \rangle] \langle W \rangle. \quad (32)$$

Решая это уравнение итерациями, найдем

$$\langle W^{(n)} \rangle = \hat{M}_n^{\text{эфф}} (y/\xi) W_0(\xi), \quad (33)$$

где $\hat{M}_n^{\text{эфф}}$ — ряд, который можно получить из ряда \hat{M}_n , если в последний вместо вектора f подставить разность $\hat{f}_{\text{эфф}} = \hat{v}_{\text{эфф}} - \langle \hat{v} \rangle$.

Сравним выражение (33) с усредненным рядом (30) и получим операторное уравнение для определения $\hat{f}_{\text{эфф}}$:

$$\hat{M}_n^{\text{эфф}} = \langle M_n \rangle. \quad (34)$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{f}_{\text{эфф}}(x) \langle W(x) \rangle - \operatorname{div} \hat{f}_{\text{эфф}}(x) G_1^0(x/\xi) \operatorname{div} \hat{f}_{\text{эфф}}(\xi) \langle W \rangle + \dots = \\ = - \operatorname{div} \langle f(x) G_1^0(x/\xi) \operatorname{div} f(\xi) \rangle \langle W(\xi) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнение (34) можно решать методом последовательных приближений, используя предполагаемую малость величины $\sigma = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$. Так, с точностью до членов $\sim \sigma^3$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{f}_{\text{эфф}} \langle W(x) \rangle = - \operatorname{div} \langle f(x) G_1^0(x/\xi) \operatorname{div} f(\xi) \rangle \langle W(\xi) \rangle + \\ + \operatorname{div} \langle f(x) G_1^0(x/x_1) \operatorname{div} f(x_1) G_1^0(x_1/\xi) \operatorname{div} f(\xi) \rangle \langle W(\xi) \rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

Полезно иметь в виду, что разложение $\hat{f}_{\text{эфф}}$ начинается с членов $\sim \sigma^2$, так что второй член левой части (35) имеет порядок σ^4 . Выражение (36) можно использовать для получения следующих членов разложения величины $\operatorname{div} \hat{f}_{\text{эфф}} \langle W \rangle$, входящей в кинетическое уравнение (25).

Мы ограничимся квадратичными по σ членами, предполагая, что флуктуации достаточно малы и можно пренебречь всем остатком итерационного ряда, получающимся при решении уравнения (35). Функция Грина $G_1^0(x, t/x', t')$ может быть записана в виде (см. (8.2))

$$G_1^0(x, t/x', t') = \delta(t - t') \delta[x - \varphi(t, t', x')],$$

где $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ — решение системы $\dot{x} = \langle v(x, t) \rangle$. После интегрирования по координатам получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle v \rangle \langle W \rangle - \frac{\partial}{\partial x^i} \int_{-\infty}^t dt' \left. \frac{\partial B^{ij}(x, y; t, t') \langle W(y, t') \rangle}{\partial y^j} \right|_{y=\varphi(t', t, x)} \times \\ \times \exp \left\{ - \int_{t'}^t \operatorname{div} \langle v(s, \tau) \rangle d\tau \right\}_{s=\varphi(\tau, t, x)} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $B^{ij}(x, y; t, t') = \langle f^i(x, t) f^j(y, t') \rangle$ — корреляционный тензор флуктуаций скорости.

Если использовать решение второго типа (22) и соответствующую функцию Грина $G_2^0(x, t/x', t') = \delta(t_0 - t) \delta[x - \varphi(t, t', x')]$, то придем к уравнению

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle v \rangle \langle W \rangle + \frac{\partial}{\partial x^i} \int_t^\infty dt' \frac{\partial B^{ij}(x, y; t, t') \langle W(y, t') \rangle}{\partial y^j} \Big|_{y=\varphi(t', t, x)} \times \\ \times \exp \left\{ \int_t^t \operatorname{div} \langle v(s, \tau) \rangle d\tau \right\}_{s=\varphi(\tau, t, x)} = 0. \quad (38)$$

Это уравнение отличается от уравнения (37) и может быть приведено к нему лишь при специальных предположениях о свойствах поля скоростей $v(x, t)$.

Таким образом, усредненные по ансамблю характеристик, проходящих через точку (x_0, t_0) , функции Грина $\langle G_1(x, t/x_0, t_0) \rangle = G^+(x, t/x_0, t_0)$ и $\langle G_2(x, t/x_0, t_0) \rangle = G^-(x, t/x_0, t_0)$ по переменным x, t удовлетворяют уравнениям (37) и (38) соответственно и определяют условное распределение величины x как в поиследующие, так и в предыдущие по отношению к t_0 моменты времени.

Теперь рассмотрим уравнение

$$\tilde{A} U = 0. \quad (39)$$

Вычисления, аналогичные проведенным выше, дают интегральное уравнение

$$U(x, t) = U_0(x, t) + \int_t^\infty \int dt' dx' G_1^0(x', t'/x, t) f(x', t') \nabla U(x', t'), \quad (40)$$

где $U_0(x, t)$ — решение уравнения $\frac{\partial U_0(x, t)}{\partial t} + \langle v \rangle \nabla U_0 = 0$,

а $G_1^0(x, t/x', t')$ — функция Грина, отвечающая эволюции системы со скоростью $\langle v(x, t) \rangle$. С точностью до членов $\sim \sigma^2$ среднее значение $\left\langle f_i \frac{\partial U}{\partial x^i} \right\rangle$, которое возникает при усреднении уравнения (39), имеет вид

$$\left\langle f_i \frac{\partial U}{\partial x^i} \right\rangle = B^{nk}(x, x'; t, t') \frac{\partial G_1^0(x', t'/x, t)}{\partial x^k} \frac{\partial \langle U(x', t') \rangle}{\partial x'^n}. \quad (41)$$

Таким образом, при усреднении (39) мы получим следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \langle v \rangle \nabla U + \int_t^\infty dt' \frac{\partial \varphi^m(t', t, x)}{\partial x^k} \frac{\partial [B^{ik}(x, y; t, t') \partial \langle U \rangle / \partial y^i]}{\partial y^m} \Big|_{y=\varphi(t', t, x)} = 0. \quad (42)$$

Если же рассмотреть функцию Грина G_2^0 и решение типа (24), то

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \langle v \rangle \nabla U - \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial \varphi^m(t', t, x)}{\partial x^k} \frac{\partial [B^{ik}(x, y; t, t') \partial \langle U \rangle / \partial y^i]}{\partial y^m} \Big|_{y=\varphi(t', t, x)} = 0. \quad (43)$$

Из уравнений (11), (15) следует, что условные вероятности перехода $G^+(x, t/x_0, t_0)$ и $G^-(x, t/x_0, t_0)$ по переменным x_0, t_0 удовлетворяют уравнениям (42), (43). Уравнения (37) и (42) при $B^{ik}(x, y; t_1, t_2) = F^{ik}(x, y, t_1) \delta(t_1 - t_2)$ переходят в уравнение Колмогорова и уравнение ЭФПК.

Если интервал корреляции процесса $f_i(x, t)$ по времени конечен, но мал по сравнению с характерным масштабом изменения функций $W(y, t)$, $\frac{\partial W(y, t)}{\partial y^i}$, $\frac{\partial^2 W(y, t)}{\partial y^i \partial y^k}$, то последние можно разложить в ряд Тейлора вблизи $t' = t$ и свести уравнения (37) и (42) к дифференциальным. Уравнение (37) можно записать при этом в виде

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} (\langle v \rangle \langle W \rangle + S) = 0, \quad (44)$$

где поток вероятности S представляется рядом $S^i(x, t) = S_{(0)}^i + S_{(1)}^i + S_{(2)}^i + \dots$. Каждый член этого ряда соответствует разложению распределения и его производных по степеням величины $t' - t$. Учет новых степеней $t' - t$ приводит к повышению порядка дифференциального уравнения.

Таким образом, легко находим

$$\begin{aligned} S_{(0)}^i &= A^i(x, t) \langle W \rangle + \frac{\partial \langle W \rangle}{\partial x^j} \tilde{B}^{ij}(x, t), \\ A^i(x, t) &= - \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial B^{ij}(x, y; t, t')}{\partial y^j} \Big|_{y=\varphi(t', t, x)} \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_{t'}^t \operatorname{div} \langle v(s, \tau) \rangle d\tau \right\}_{s=\varphi(\tau, t, x)}, \\ \tilde{B}^{ij}(x, t) &= - \int_{-\infty}^t dt' B^{ij}(x, y; t, t') \Big|_{y=\varphi(t', t, x)} \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_{t'}^t \operatorname{div} \langle v(s, \tau) \rangle d\tau \right\}_{s=\varphi(\tau, t, x)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Выпишем также члены следующего приближения, поскольку они несколько отличаются от соответствующих выражений в статье [12]:

$$\begin{aligned} S_{(1)}^i &= A_{(1)}^i(x, t) \langle W(x, t) \rangle \operatorname{div} \langle v(x, t) \rangle + \\ &+ \tilde{B}_{(1)}^{ij}(x, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} (\operatorname{div} \langle v \rangle \langle W \rangle) - \langle v^k \rangle \frac{\partial^2 \langle W \rangle}{\partial x^j \partial x^k} \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} A_{(1)}^i &= \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) \frac{\partial B^{ij}(x, y; t, t')}{\partial y^j} \Big|_{y=\varphi(t', t, x)} \times \\ &\times \exp \left\{ - \int_{t'}^t \operatorname{div} \langle v(s, \tau) \rangle d\tau \right\}_{s=\varphi(\tau, t, x)}, \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_{(1)}^{ij} = \int_{-\infty}^t dt' (t' - t) B^{ij}(x, y; t, t') \Big|_{y=\varphi(t', t, x)} \exp \left\{ - \int_{t'}^t \operatorname{div} \langle v(s, \tau) \rangle d\tau \right\}_{s=\varphi(\tau, t, x)}.$$

Аналогично можно преобразовать интегральный член в уравнении (42), который можно представить рядом

$$P(\mathbf{x}, t) = P_0 + P_1 + P_2 + \dots,$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{\partial U(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i} \int_t^\infty dt' \left. \frac{\partial \varphi^m(t', t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \frac{\partial B^{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t')}{\partial y^m} \right|_{\mathbf{y}=\varphi(t', t, \mathbf{x})} + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 U(\mathbf{x}, t)}{\partial x^i \partial x^m} \int_t^\infty dt' B^{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t; t') \frac{\partial \varphi^m(t', t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{y}=\varphi(t', t, \mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \left[-\frac{\partial}{\partial x^i} (\langle \mathbf{v} \rangle \nabla U) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} \langle v^k \rangle \right] \int_t^\infty dt' (t' - t) \frac{\partial \varphi^m(t', t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \times \\ &\times \left. \frac{\partial B^{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t')}{\partial y^m} \right|_{\mathbf{y}=\varphi(t', t, \mathbf{x})} + \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^m} (\langle \mathbf{v} \rangle \nabla U) + \frac{\partial^3 U}{\partial x^n \partial x^m \partial x^i} \langle v^n \rangle \right] \times \\ &\times \left. \int_t^\infty dt' (t' - t) B^{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, t') \frac{\partial \varphi^m(t', t, \mathbf{x})}{\partial x^k} \right|_{\mathbf{y}=\varphi(t', t, \mathbf{x})}. \end{aligned}$$

Легко вывести общий закон образования членов рассматриваемых рядов. Однако практическая ценность дальнейших приближений, по-видимому, невелика.

Если функция $\varphi(t', t, \mathbf{x})$ меняется медленно на интервале корреляции τ_0 процесса $f^i(\mathbf{x}, t)$, то можно положить $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ и значительно упростить полученные формулы. Особенно простыми уравнения получаются при $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$. В этом случае все $S_{(n)}^i$ и P_n (кроме $S_{(0)}^i$ и P_0) равны нулю. При вычислении $S_{(0)}^i$ и P_0 следует положить в (45) и (47) $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $\frac{\partial \varphi^m}{\partial x^k} = \delta^{mk}$, $\exp[\dots] = 1$.

6. ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЙ (37) И (42)

Необходимое условие возможности отбросить последние члены итерационного ряда, возникающего при вычислении $\mathbf{v}_{\text{эфф}}$, можно получить из требования малости членов порядка σ^3 по сравнению с членами $\sim \sigma^2$. Для простоты будем считать $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$, так что в (36) можно положить $G_1^0(\mathbf{x}, t/\xi, \tau) = \delta(t - \tau) \delta(\mathbf{x} - \xi)$. Искомое условие имеет вид

$$\begin{aligned} &-\int_{-\infty}^t \langle f^i(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) \rangle W(\mathbf{x}, \tau) d\tau \gg \\ &\gg \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t_1} \langle f^i(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{y}, t_1) \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{z}, t_2) \rangle W(\mathbf{x}, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (48)$$

Вводя величину τ_{korr} , характеризующую область, существенную для интегрирования в (48), можно приближенно записать неравенство (48) в виде

$$\langle f^i(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle W(\mathbf{x}, t) \gg$$

$$\gg \frac{\tau_{\text{корр}}}{2} \langle f^i(x, t) \operatorname{div} f(y, t) \operatorname{div} f(z, t) \rangle W(z, t) \Big|_{z=y=x},$$

или

$$\frac{\partial B^{ij}(x, y; t, t) W(y, t)}{\partial y^j} \Big|_{y=x} \gg \frac{\tau_{\text{корр}}}{2} \frac{\partial^2 B^{ilm}(x, y, z; t, t, t) W(z, t)}{\partial y^l \partial z^m} \Big|_{y=z=x}. \quad (49)$$

В зависимости от конкретной ситуации это неравенство может быть упрощено. Простой случай, когда $W(x, t)$ мало меняется на масштабе l корреляции поля $f(x, t)$, приводит к неравенству

$$\frac{\tau_{\text{корр}} \sigma}{2l} \ll 1. \quad (50)$$

7. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В качестве примера мы рассмотрим задачу о распространении плоской монохроматической волны в одномерной случайно-неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon(z)$. Для δ -коррелированных флюктуаций $\Delta\epsilon(z)$ эта задача рассматривалась в [16], где коэффициенты уравнения ЭФПК вычислялись непосредственно из динамических уравнений. Последние были записаны для коэффициента отражения от слоя:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= \alpha(z) [2x_1 x_2 \cos 2kz - (x_1^2 - x_2^2) \sin 2kz + 2x_2 + \sin 2kz], \\ \frac{dx_2}{dz} &= \alpha(z) [(x_2^2 - x_1^2) \cos 2kz - 2x_1 x_2 \sin 2kz - 2x_1 - \cos 2kz], \end{aligned} \quad (51)$$

где $x_1 + ix_2 = s(z)$ — коэффициент отражения неоднородного слоя, $\alpha(z) = k_0 \Delta\epsilon(z)/2\sqrt{\epsilon_0}$, $k = k_0 \sqrt{\epsilon_0}$, $\epsilon_0 = \langle \epsilon \rangle$ — средняя диэлектрическая проницаемость слоя, $\Delta\epsilon(z)$ — флюктуационный однородный случайный процесс.

Усредненная правые части (51), находим

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle = 0. \quad (52)$$

Предположим, что процесс $\alpha(z)$ имеет конечный интервал корреляции l , который находится в произвольном соотношении с длиной волны, но мал по сравнению с характерным масштабом изменения функции распределения $W(x_1, x_2, z)$. Уравнение (42) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial A^k W}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \tilde{B}^{kj}(x, x; z) W}{\partial x^k \partial x^j} &= 0, \\ A^k &= \frac{\partial \tilde{B}^{kj}(x, y; z)}{\partial x^j} \Big|_{y=x}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\tilde{B}^{ij}(x, y; z) = \int_0^z B^{ij}(x, y; z, z') dz', \quad B^{ij}(x, y; z, z') = \langle v^i(x, z) v^j(y, z') \rangle.$$

Коэффициенты A^k и \tilde{B}^{ij} , подсчитанные по формулам (53), являются периодическими функциями z . Если предположить, что длина волны мала по сравнению с масштабом изменения функции распреде-

ления, то можно полученные коэффициенты усреднить (на длине волны λ), пренебрегая, таким образом, деталями колебательных изменений коэффициента отражения и рассматривая регулярное, среднее поведение последнего на расстояниях, больших по сравнению с λ . В результате мы получаем следующие значения коэффициентов уравнения (53):

$$\begin{aligned} A^1 &= -\langle D^2 \rangle (2 + \gamma) x_1, \quad A^2 = -\langle D^2 \rangle (2 + \gamma) x_2, \\ \tilde{B}^{11} &= -\frac{\langle D^2 \rangle}{4} [\gamma + 4\rho^2 + \gamma\rho^4 - 2\rho^2(2 + \gamma) \cos 2\varphi], \\ \tilde{B}^{12} = \tilde{B}^{21} &= -\frac{\langle D^2 \rangle}{2} (2 + \gamma) \rho^2 \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (54)$$

где $\langle D^2 \rangle = k_0^2 l \langle \Delta e^2 \rangle / 4 \varepsilon_0$, l — радиус корреляции функции $\Delta e(z)$, $\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x) e^{2iklx} dx$, $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$, $s = \rho e^{i\varphi}$, $\Gamma(x)$ — нормированная функция корреляции $\Delta e(z)$.

Решение уравнения (53) показывает, что масштабом функции $W(\rho, \varphi, z)$ при ее изменении вдоль z является величина $z_0 = 4\varepsilon_0/k_0^2 l \langle \Delta e^2 \rangle$, которая может быть сделана большой по сравнению с l независимо от отношения l/λ . Это опровергивает сделанное предположение о соотношении масштабов функций $\Delta e(z)$ и $W(\rho, \varphi, z)$.

Статистическое описание решений стохастической системы (1) достигается с помощью двух функций распределения вероятностей перехода $\langle G_1 \rangle$ и $\langle G_2 \rangle$, с каждой из которых связана пара кинетических уравнений. Если не делать специальных предположений о характере случайных сил и их высших моментах, то лишь для достаточно малых флуктуаций правых частей системы (1) эти уравнения имеют сравнительно простую форму. Заметим, что полученные уравнения можно вывести методом, развитым в работах [10–12]. В появившейся недавно работе [20] рассматриваются аналогичные проблемы для линейных дифференциальных уравнений.

Автор благодарен Н. Г. Денисову и В. И. Татарскому за обсуждение работы, а также А. И. Саичеву и С. Н. Гурбатову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, Mathem. Ann., 104, 415 (1931); А. Н. Колмогоров, УМН, 5, 5 (1938).
2. В. Феллер, УМН, 5, 57 (1938).
3. А. Н. Колмогоров, Mathem. Ann., 113, 766 (1933).
4. I. L. Doob, Annal. Mathem., 43, 361 (1942).
5. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, изд. Мир, М., 1967.
6. А. М. Яглом, Матем. сборник, 24 (66), № 3, 457 (1949).
7. С. Чандraseкар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, М., 1947.
8. Н. Н. Боголюбов, Избранные труды, т. 2, изд. Наукова думка, Киев, 1970.
9. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
10. В. И. Татарский, В. И. Кляцкин, УФН, 110, 4, 409 (1973).
11. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Теорет. и матем. физика, 17, № 2, 273 (1973).

12. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 14, № 5, 706 (1971).
13. M. R. Crutty, K. C. So, Phys. Fluids, 16, № 10, 1765 (1973).
14. I. M. Besieris, F. D. Tappert, Mathem. Phys., 14, № 12, 1829 (1973).
15. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, 1919 (1964).
16. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 16, № 8, 1240 (1973).
17. Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкин, Элементы математической физики, изд. Наука, М., 1973.
18. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т 1, ИЛ, М, 1958.
19. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 14, № 6, 960 (1971).
20. A. Brissand, U. Frisch, J. Math. Phys., 15, № 5, 524 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 декабря 1974 г

STATISTIC DESCRIPTION OF DYNAMIC SYSTEMS UNDER THE ACTION OF THE RANDOM FORCES

Yu. A. Ryzhov

The generalized kinetic equations are derived from the stochastic Liouville equation describing the conservation law in phase space. These equations control the direct and inverse transition probabilities which describe the evolution of dynamic systems affected by non- δ -correlation fluctuation forces. In particular, non-Hamiltonian systems are considered. Their statistical description is realized by the probability density in phase space with compressible liquid, transferring the probability.

УДК 621.371.22

ДИСПЕРСИЯ СМЕЩЕНИЙ СВЕТОВОГО ПУЧКА В АТМОСФЕРЕ В УСЛОВИЯХ СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

A. I. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов

В приближении марковского случайного процесса для колмогоровского спектра атмосферной турбулентности строится асимптотическая теория смещений центра тяжести светового пучка, не ограниченная требованием малости флюктуаций интенсивности. Использование метода Гюйгенса—Кирхгофа для расчета корреляционной функции интенсивности позволило дать обоснование введенной в [1] приближенной замены второго момента интенсивности на произведение первых, оценить возникающую при этом погрешность и уточнить формулы для дисперсии смещений центра тяжести пучка.

Расчеты дисперсии случайных смещений оптического пучка в турбулентной атмосфере в условиях сильных флюктуаций интенсивности проводились [1, 2] при приближенной замене второго момента интенсивности излучения на произведение первых моментов. Путем модельных расчетов в [2] было показано, что максимальная ошибка, возникающая в результате подобной замены, по-видимому, приходится на область так называемой фокусировки флюктуаций интенсивности.

В настоящей работе в приближении марковского случайного процесса для колмогоровского спектра атмосферной турбулентности строится асимптотическая теория смещений светового пучка, справедливая как для случая $D_s(2a) \ll 1$ ($D_s(2a)$ — структурная функция фазы сферической волны, вычисленная на диаметре пучка $2a$), так и для $D_s(2a) \gg 1$. В отличие от предыдущих работ второй момент интенсивности записывается в приближении модифицированного метода Гюйгена—Кирхгофа [3], которое в условиях сильных флюктуаций дает результаты [4, 5], количественно согласующиеся с экспериментом. Этот подход позволил уточнить результаты для дисперсии смещений центра тяжести пучка и оценить ошибку, к которой приводят расчеты с заменой второго момента интенсивности на произведение первых.

Определим, как обычно, положение светового пучка координатами центра тяжести распространения интенсивности $I(x, p)$ в плоскости $x = \text{const}$:

$$p_c(x) = p_0^{-1} \int d^2 p \rho I(x, p),$$

где $p_0 = \int d^2 p I(x, p)$ — полный поток интенсивности в пучке. Для дисперсии смещений пучка воспользуемся выражением, полученным в приближении марковского случайного процесса [1]:

$$\begin{aligned} \langle p_c^2 \rangle &= \frac{\pi}{2 p_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \int d^2 R_1 \int d^2 R_2 \langle I(\xi, R_1) I(\xi, R_2) \rangle \times \\ &\quad \times \int d^2 x \pi^2 \Phi_s(x) \exp [i \pi (R_1 - R_2)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Phi_e(x)$ — трехмерный спектр флюктуаций диэлектрической проницаемости среды.

Для второго момента интенсивности $\langle I(\xi, \mathbf{R}_1) I(\xi, \mathbf{R}_2) \rangle$ используем приближение метода Гюйгенса — Кирхгофа. В случае простейшего одномодового лазерного пучка

$$u(\rho) = u_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} - \frac{ik\rho^2}{2F}\right),$$

где F — радиус кривизны фазового фронта волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, второй момент интенсивности можно записать в виде [4]

$$\begin{aligned} \left\langle I\left(x, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) I\left(x, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) \right\rangle &= \frac{k^4 a^2 u_0^4}{32\pi^3 x^4} \int d^2 t_1 \int d^2 t_2 \int d^2 t_3 \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2a^2} \left[g(x) t_1^2 + t_2^2 + \frac{t_3^2}{4} \right] + \frac{ik}{2x} \left(1 - \frac{x}{F}\right) t_2 t_3 - \right. \\ &- \frac{ik}{x} (2Rt_1 + \rho t_2) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \left[D_s(x, 0, t_1 + (-1)^n t_3) + \right. \\ &\left. \left. + D_s\left(x, \rho, \frac{t_3}{2} + (-1)^n t_1\right) - D_s\left(x, \rho, \frac{t_3}{2} + (-1)^n t_2\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

В выражении (2) $g(x) = 1 + \Omega^2 (1 - x/F)^2$, $\Omega = ka^2/x$ — число Френеля передающей апертуры, $D_s(x, \rho, \rho')$ — структурная функция фазы двух сферических волн, источники которых разнесены на вектор ρ' , а точки наблюдения — на вектор ρ .

В приближении геометрической оптики для колмогоровского спектра $\Phi_e(x)$ функция $D_s(x, \rho, \rho')$ представляется следующим образом:

$$D_s(x, \rho, \rho') = D_s(2a) \frac{8}{3} (2a)^{-5/3} \int_0^1 dv |v\rho + (1-v)\rho'|^{5/3}, \quad (3)$$

где $D_s(2a) = 0,274 k^2 x C_e^2 (2a)^{5/3}$ — структурная функция фазы сферической волны, вычисленная на диаметре передающей апертуры, C_e^2 — структурная характеристика колмогоровского спектра флюктуаций диэлектрической проницаемости среды.

Подставим в соотношение (1) функцию (2). Учитывая выражение (3), для дисперсии смещений пучка получим

$$\begin{aligned} \langle \rho_c^2 \rangle &= \frac{4xk^2 a^4}{\pi^2} A C_e^2 (2a)^{-1/3} \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \xi^{-2} \int d^2 x x^{-5/3} \times \\ &\times \int d^2 \rho \int d^2 t_2 \int d^2 t_3 \exp \left\{ -2t_2^2 - 2t_3^2 + i4\Omega \xi^{-1} \left(1 - \frac{x}{F}\xi\right) t_2 t_3 - \right. \\ &- i4\Omega \xi^{-1} \rho t_2 + i x \rho - \xi D_s(2a) t_2^{5/3} \left. \right\} \exp \left\{ -\xi D_s(2a) \frac{8}{3} \times \right. \\ &\times \int_0^1 dv \left(|v\rho + (1-v)t_3|^{5/3} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 |v\rho + (1-v) \times \right. \\ &\times [t_3 + (-1)^n t_2]|^{5/3} \left. \right\} (A = 0,033). \end{aligned} \quad (4)$$

Построим асимптотические представления для величины (4) в области слабых ($D_s(2a) \ll 1$) и сильных ($D_s(2a) \gg 1$) флюктуаций интенсивности.

При условии $D_s(2a) \ll 1$ разложим в подынтегральном выражении (4) в степенной ряд экспоненту, содержащую в показателе параметр $D_s(2a)$. Вычисляя появляющиеся интегралы, для дисперсии смещений $\langle \rho_c^2 \rangle$ будем иметь

$$\begin{aligned} \langle \rho_c^2 \rangle = 2^{1/6} \frac{10}{9} \Gamma(11/6) a^2 \Omega^{-2} D_s(2a) \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \left[\left(1 - \frac{x}{F}\xi\right)^2 + \right. \\ \left. + \Omega^{-2} \xi^2 \right]^{-1/6} + f(\Omega) a^2 D_s^2(2a) + O[a^2 D_s^3(2a)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция $f(\Omega)$ в практически важном случае $\Omega \gg 1$ (френелевская зона дифракции) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(\Omega) = \frac{25}{81} \frac{\Gamma^2(11/6)}{\Gamma^2(1/6)} \Gamma(1/3) 2^{10/3} \Omega^{-10/3} \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \xi^{7/3} \times \\ \times \left(1 - \frac{x}{F}\xi\right)^{-5/3} \int_0^1 d\eta (1-\eta)^{10/3} \left(1 - \frac{x}{F}\xi\eta\right)^{-5/3} + O(\Omega^{-11/3}). \end{aligned}$$

В области сильных флюктуаций интенсивности $D_s(2a) \gg 1$. Разложим в степенной ряд последнюю экспоненту подынтегрального выражения (4). В этом случае средний квадрат смещений представляется в виде ряда

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \langle \rho_c^2 \rangle_1 + \langle \rho_c^2 \rangle_2 + \dots, \quad (6)$$

члены которого соответствуют членам разложения экспоненты в подынтегральном выражении (4).

Для первого члена ряда (6), выполняя интегрирование по векторам x , ρ , t_3 , можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle \rho_c^2 \rangle_1 = r a^2 \Omega^{-2} D_s(2a) \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \int_0^\infty dt t^{-2/3} \exp \left\{ -2t^2 \times \right. \\ \times \left. \left[\Omega^{-2} \xi^2 + \left(1 - \frac{x}{F}\xi\right)^2 \right] - \xi^{8/3} D_s(2a) \Omega^{-5/3} t^{5/3} \right\} \\ \left(r = \frac{2^{1/3} 50}{27} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Раскладывая в (7) в степенные ряды экспоненту с целыми степенями ξ в показателе, вычислим интеграл по переменной ξ . Интеграл по переменной t удается вычислить после некоторых ненесложных преобразований. При этом для $\langle \rho_c^2 \rangle_1$ можно получить асимптотический ряд:

$$\begin{aligned} \langle \rho_c^2 \rangle_1 = \frac{3}{5} r a^2 \Omega^{-2} D_s(2a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \left(\Omega^{-2} + \frac{x^2}{F^2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(4 \frac{x}{F} \right)^k \times \\ \times \frac{1}{k!} \sum_{q=0}^2 \frac{(q+1)^{2-q} (-1)^q}{1+q+k+2n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} \sum_{p=0}^{m+1} \binom{m}{p} (-1)^p \left\{ \Gamma(1+N) \times \right. \\ \left. \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \Gamma(M-N) 2^{N-M} [D_s(2a) \Omega^{-5/3}]^{-N} + \frac{N \Gamma(M)}{N-M} [D_s(2a) \Omega^{-5/3}]^{-M} + \\ + O([D_s(2a) \Omega^{-5/3}]^{-M-1}) \Big\}, \quad (8)$$

$$N = \frac{3}{8}(1+q+k+2n), \quad M = \frac{1}{5} + m + \frac{p}{5} + \frac{6}{5}(n+k).$$

Подобное (8) асимптотическое разложение при $D_s(2a) \gg 1$ можно построить и для $\langle \rho_c^2 \rangle_2$. Однако полученный результат является слишком громоздким. Мы ограничимся записью первого члена этого ряда:

$$\langle \rho_c^2 \rangle_2 = \kappa a^2 \Omega^{-3/2} D_s^{1/2}(2a) + O[a^2 \Omega^{-4/3} D_s^{2/5}(2a)],$$

$$\kappa = \frac{\Gamma^2(11/6)}{\Gamma^2(1/6)} \frac{25}{27} \frac{2^{2/3}}{\pi^{3/2}} \int_0^1 dv (1-v)^{10/3} \int d^2 t t^{-5/2} \int d^2 \rho |\rho - t|^{-11/3} \times \\ \times |t - v \rho|^{-5/3} [t(\rho - t)]^2 \exp(-2\rho^2) \quad (\kappa > 0). \quad (9)$$

Используя соотношения (6), (8), (9), для среднего квадрата смещений пучка в области $D_s(2a) \gg 1$ находим следующее асимптотическое представление:

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \mu a^2 \Omega^{-5/3} D_s^{4/5}(2a) \{ 1 + \nu \Omega^{7/24} D_s^{-7/40}(2a) + \\ + O[\Omega^{1/6} D_s^{-3/10}(2a)] \},$$

$$\mu = 2^{1/3} \frac{10}{9} \Gamma\left(\frac{1}{5}\right) B\left(3, \frac{7}{15}\right) \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)}, \quad \nu = \frac{5}{16} \frac{\Gamma(3/8) \Gamma(-7/48) 2^{7/48}}{\Gamma(1/5) B(3,7/15)}. \quad (10)$$

Из сравнения результатов работ [1, 2] и выражений (5), (10) следует, что величина $\langle \rho_c^2 \rangle$, исследованная в [1, 2], в случаях $D_s(2a) \ll 1$ и $D_s(2a) \gg 1$ представляется соответственно первыми членами разложений (5), (10). При учете вторых членов рядов (5), (6) в области, где $D_s(2a) \sim \Omega^{5/3}$, наблюдается некоторое увеличение уровня дисперсии смещений пучка по сравнению с результатами работ [1, 2]. Отметим, что при использовании в [2] аппроксимации

$$\exp[-D_s(2a) (\xi t_2^{5/3})] \approx \exp[-D_s^{6/5}(2a) \xi^{6/5} t_2^2]$$

ошибка в определении коэффициентов μ и ν в соотношении (10) составляет 4%.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 9, 1381 (1972).
2. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 10, 1501 (1974).
3. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 886 (1969).
4. В. А. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 252 (1974).
5. М. С. Беленький, В. Л. Миронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 7, 1050 (1974).

**DISPERSION OF LIGHT BEAM DISPLACEMENTS IN THE ATMOSPHERE
UNDER THE CONDITIONS OF STRONG INTENSITY FLUCTUATIONS***A. I. Kon, V. L. Mironov, V. V. Nosov*

In the approximation of a Markovian random process an asymptotic theory of displacements of the light beam gravity center is built for the Kolmogor spectrum of the atmosphere turbulence, the smallness of intensity fluctuations being not required. The use of the Huygens—Kirchhoff method for calculating the intensity correlation function permits to substantiate the introduced [1] approximate substitution of the second intensity moment by the product of the first ones, to estimate the error occurred and to specify the formulas for dispersion of displacements of the light beam gravity center.

УДК 538.57

ИЗЛУЧЕНИЕ ЩЕЛИ В ЭКРАНЕ В НЕОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

E. H. Васильев, T. A. Леснова

Методом интегральных преобразований получено аналитическое выражение для проводимости излучения щели в экране, ограничивающем неоднородное полупространство. Приведены результаты расчета проводимости излучения для точного решения и квазиоднородного приближения.

Для определения диэлектрической проницаемости диэлектриков и плазмы достаточно широко используются методы, основанные на измерении входной проводимости открытого конца волновода в рассматриваемой среде [1]. С целью интерпретации результатов измерений необходимо установить связь между входной проводимостью излучающей антенны и диэлектрической проницаемостью исследуемой среды. Для однородных сред, а также сред с градиентом диэлектрической проницаемости, нормальных к излучающему раскрыву, такая связь найдена в ряде работ, например, [2, 5].

В некоторых случаях возникает необходимость измерять диэлектрическую проницаемость $\epsilon(z)$ неоднородной среды с продольным градиентом. При этом обычно пользуются квазиоднородным приближением, когда при расчете проводимости среда в каждом отдельном сечении $z = z_0$ считается однородной с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z_0)$. Для оценки методической погрешности определения ϵ в квазиоднородном приближении необходимо установить строгую зависимость проводимости излучения антенны от диэлектрической проницаемости неоднородной среды. Определение этой зависимости для некоторого частного случая и является предметом настоящей статьи, где для простоты вместо прямоугольного волновода будем рассматривать плоский.

Рассмотрим следующую постановку задачи. В идеально проводящем экране, расположенному в плоскости $y = 0$ (рис. 1), имеется бесконечная

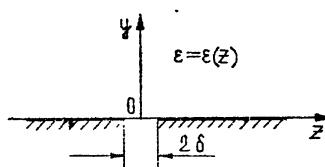


Рис. 1. Идеально проводящий экран со щелью.

(вдоль оси x) синфазно возбужденная щель шириной 2δ . Полупространство $y > 0$ занято непоглощающей изотропной средой, относительная диэлектрическая проницаемость которой ϵ меняется вдоль оси z . Такая щель эквивалента плоскому магнитному вибратору. Последний может быть заменен цилиндрическим с радиусом, равным $\delta/2$, подобно тому, как это делается в теории тонкого вибратора [7]. При равномерном распределении тока вдоль цилиндрического магнитного вибратора проводимость излучения его на единицу длины, найденная методом наводимых МДС, равна

$$Y = \frac{1}{2} i \omega \epsilon_0 \epsilon(z) G^M(y, y_0, z, z_0), \quad (1)$$

где $G^M(y, y_0, z, z_0)$ — функция Грина для полупространства $y > 0$. Если это полупространство однородное, то G^M выражается через функцию Ганкеля, и проводимость щели при этом записывается следующим образом:

$$Y^0 = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{8} H_0^{(2)}\left(\frac{\delta}{2} k_0 V \sqrt{\epsilon}\right). \quad (2)$$

Для точного определения проводимости щели в неоднородной среде необходимо найти функцию Грина неоднородного полупространства. Если представить функцию Грина интегралом Фурье

$$G^M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, z, z_0) \exp[-ix(y - y_0)] dx, \quad (3)$$

то для $g(x, z, z_0)$ будем иметь [8]

$$g(x, z, z_0) = -\frac{1}{\Delta(x, z_0)} \begin{cases} u_1(x, z) u_2(x, z_0) & (z \leq z_0) \\ u_1(x, z_0) u_2(x, z) & (z \geq z_0) \end{cases}, \quad (4)$$

где u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon(z)} \frac{du}{dz} + [k_0^2 \epsilon(z) - x^2] u = 0. \quad (5)$$

Кроме того, предполагается, что u_1 удовлетворяет условию излучения при $z \rightarrow -\infty$, а u_2 — при $z \rightarrow \infty$. Здесь Δ — определитель Вронского этих решений.

С физической точки зрения представляет интерес «переходный» слой, в котором диэлектрическая проницаемость, плавно изменяясь, переходит от одного наперед заданного значения к другому. Однако, не прибегая к численному решению (5), такую задачу решить не удается, за исключением одного частного случая, когда уравнение (5) можно решить аналитически. При этом зависимость диэлектрической проницаемости от координаты Z необходимо задать в виде

$$\epsilon(z) = \frac{A}{1 + e^{\varphi z}}. \quad (6)$$

График этой зависимости для значений $\varphi \lambda = 1, 3, 5$ (λ — длина волны) приведен на рис. 2. При заданной величине A скорость изменения $\epsilon(z)$, как это видно из рисунка, определяется параметром φ . Подстановка (6) в (5) приводит к уравнению, сводящемуся к гипергеометрическому.

Его решение может быть представлено в виде

$$u = -u^* \exp(V x^2 - k_0^2 A z), \quad (7)$$

где u^* удовлетворяет гипергеометрическому уравнению, все возможные решения которого представлены таблицей Куммера [9]. Чтобы составить пару u_1 и u_2 для (4), необходимо выбрать такие u_1^* и u_2^* , чтобы u_1 и u_2 удовлетворяли условию излучения при $z \rightarrow \pm\infty$. Это требование является определяющим. Кроме того, выбирая пару решений из таблицы Куммера, необходимо учитывать скорость сходимости

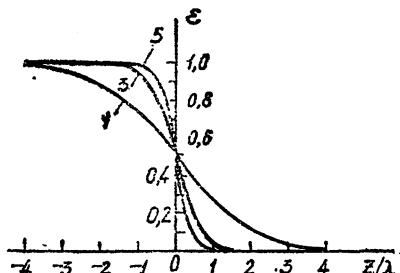


Рис. 2. Зависимость диэлектрической проницаемости от приведенной координаты.

гипергеометрических рядов в интересующих нас областях изменения переменной. В рассматриваемой задаче перечисленные выше требования выполняются для решений

$$\begin{aligned} u_1 &= -\exp(\sqrt{x^2 - k_0^2 A z})(1 + e^{\varphi z})^{-a_1} F \left(a_1, a_1, c_1, \frac{e^{\varphi z}}{1 + e^{\varphi z}} \right), \\ u_2 &= -\exp(\sqrt{x^2 - k_0^2 A z})(1 + e^{\varphi z})^{-a_2} F \left(a_2, a_2, c_2, \frac{1}{1 + e^{\varphi z}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$F \left(a_1, a_1, c_1, \frac{e^{\varphi z}}{1 + e^{\varphi z}} \right), \quad F \left(a_2, a_2, c_2, \frac{1}{1 + e^{\varphi z}} \right)$$

— гипергеометрические функции с параметрами

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\varphi + 2\sqrt{x^2 - k_0^2 A} - \sqrt{4x^2 + \varphi^2}}{2\varphi}, \quad c_1 = \frac{\varphi + 2\sqrt{x^2 - k_0^2 A}}{\varphi}, \\ a_2 &= \frac{\varphi - 2\sqrt{x^2 - k_0^2 A} + \sqrt{4x^2 + \varphi^2}}{2\varphi}, \quad c_2 = \frac{\varphi + \sqrt{4x^2 + \varphi^2}}{\varphi}. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом сказанного из формулы (1) следует, что для щели шириной 2δ проводимость излучения в расчете на единицу длины записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(z_0) &= i \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon(z)}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1 + e^{\varphi z}}{1 + \exp[\varphi(z_0 - \delta/2)]} \right\}^{a_1} \times \\ &\times \frac{\exp\left(-\frac{\delta}{2}\sqrt{x^2 - k_0^2 A}\right)}{\sqrt{4x^2 + \varphi^2}} \frac{F_1 F_2}{F_3} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 &= F \left(a_1, a_1, c_1, \frac{\exp[\varphi(z_0 - \delta/2)]}{1 + \exp[\varphi(z_0 - \delta/2)]} \right), \\ F_2 &= F \left(a_2, a_2, c_2, \frac{1}{1 + \exp(\varphi z_0)} \right), \\ F_3 &= F(a_1, a_1, c_1, 1). \end{aligned}$$

Формула (10) выражает точную зависимость проводимости щелевой антенны от диэлектрической проницаемости среды, изменяющейся по закону (6). Если потери в среде отсутствуют, то для восстановления $\epsilon(z)$ достаточно знать либо активную, либо реактивную составляющую проводимости. Как показал анализ, удобнее использовать активную часть $\operatorname{Re} Y$.

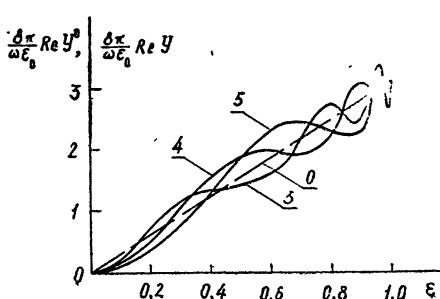


Рис. 3. Зависимость активной составляющей проводимости щели от диэлектрической проницаемости для точного решения и квазиднородного приближения.

Для сравнения точного решения и квазиоднородного приближения нами проведены расчеты по формулам (2) и (10). Зависимость $Re Y^0$ от диэлектрической проницаемости среды (квазиоднородное приближение) иллюстрируется кривой со значком «0» на рис. 3. Там же приведены результаты расчета проводимости щели по формуле (10). Кривые 3, 4, 5 соответствуют различным профилям диэлектрической проницаемости, характеризуемым параметром $\varphi\lambda = 3, 4, 5$. Параметр $\varphi\lambda$ нетрудно связать с более удобной для практики величиной — максимальным градиентом диэлектрической проницаемости (табл. 1).

Таблица 1

| $\varphi\lambda$ | 3 | 4 | 5 |
|---------------------------------------------------------------|------|-----|------|
| Максимальное значение градиента диэлектрической проницаемости | 0,75 | 1,0 | 1,25 |

Как видно из рис. 3, изменение проводимости щели при перемещении вдоль неоднородности носит колебательный характер, причем колебания осуществляются около некоторой «средней» линии, которая и соответствует квазиоднородному приближению. Чем меньше значение наибольшего градиента ϵ для данного профиля, тем меньшую абсолютную ошибку дает квазиоднородное приближение. При возрастании максимального градиента диэлектрической проницаемости эта ошибка возрастает (рис. 4 а). Относительная ошибка восстановления ϵ в квазиоднородном приближении, как видно из рис. 4 б, не превышает 25% всюду, кроме области, близкой к $\epsilon = 0$. Если такую ошибку считать допустимой, то можно использовать квазиоднородное приближение (2) при достаточно высоких градиентах диэлектрической проницаемости.

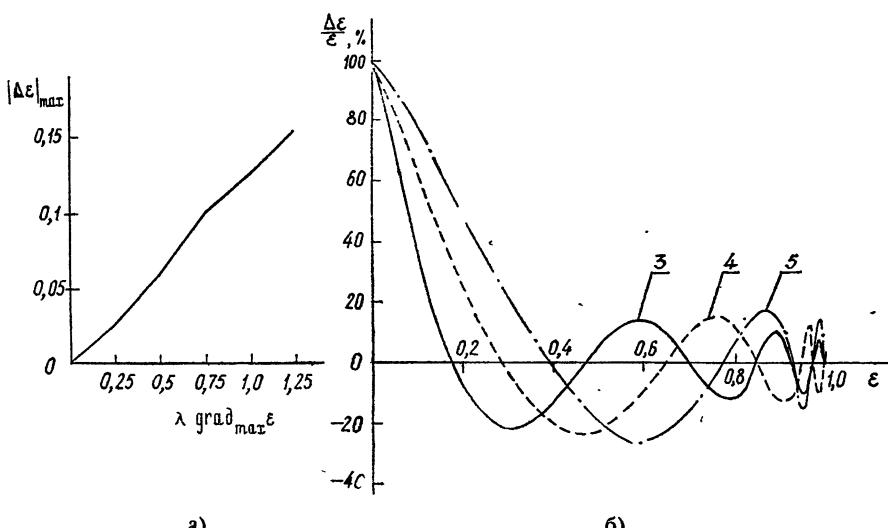


Рис. 4. а) Абсолютная ошибка при восстановлении параметров плазмы по квазиоднородному приближению. б) Относительная ошибка квазиоднородного приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Apparatus for measuring plasma parameters about a vehicle, Патент США, № 3317826, кл. 324-58, опубл. 2.05.67.
2. Д. А. Дулленков, В. П. Лисицын, Труды МЭИ, вып. 119 (1972).
3. C. J. Swift, NASA Technical note, D-4197, October (1967).
4. W. F. Crosswell, W. C. Jayler, C. J. Swift, C. K. Cockrell, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-16, № 4, 475 (1968).
5. K. E. Golden, G. E. Stewart, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-17, № 6, 763 (1969).
6. Л. Левин, Современная теория волновода, ИЛ, М., 1954.
7. М. А. Леонович, ЖЭТФ, 16, № 6, 474 (1946).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
9. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, изд. Наука, М., 1973.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
26 декабря 1974 г.

RADIATION FROM A SLOT IN A SCREEN TO INHOMOGENEOUS SEMI-SPACE

E. N. Vasil'ev, T. A. Lesnova

An analytical expression is derived for the conductivity of radiation from a slot in the screen bounding the inhomogeneous semi-space by the integral transformation method. The results of calculations of the radiation conductivity are presented for exact solution and quasi-homogeneous approximation.

УДК 538.3

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ЭНЕРГИЕЙ И ИМПУЛЬСОМ В МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Н. П. Коноплева

Получены квадратичные соотношения между энергией и импульсом электромагнитного поля, справедливые в любой среде и в произвольной системе отсчета. Показано, что в простых средах в покоящейся системе отсчета из них могут быть получены известные линейные соотношения, связывающие энергию и импульс, а также импульс и тензор натяжений электромагнитного поля.

1. В связи с продолжающейся дискуссией о правильном выборе тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде (см. [1, 2]) представляется целесообразным обсудить данный вопрос с новой точки зрения. Как показывает анализ, величиной, сохраняющейся в силу теоремы Нетер, т. е. соответствующей интегралу движения, является импульс электромагнитного поля, полученный интегрированием плотности потока импульса в форме Минковского g^M . Он описывает суммарный импульс системы поле+среда. В то же время импульс, полученный интегрированием плотности потока импульса в форме Абрагама g^A , описывает изменение энергии системы за счет излучения и не совпадает, вообще говоря, с g^M . Плотности потоков импульсов g^A и g^M связаны между собой как компоненты T_0^i и T_i^0 тензора плотности энергии-импульса электромагнитного поля в форме Минковского.

Соотношения между энергией и импульсом, обсуждающиеся в [1, 2], не являются инвариантными и поэтому допускают различные толкования, изменяя свой вид в зависимости от свойств среды и выбора системы отсчета. В данной статье получены инвариантные соотношения, которые оказались квадратичными по энергии и импульсу. Этим соотношениям связывают плотности потоков импульса в форме Абрагама g^A и в форме Минковского g^M с плотностью энергии таким образом, как если бы эти величины образовывали наборы контра- и ковариантных компонент одного и того же 3-мерного вектора. Однако в линейных соотношениях между энергией и импульсом электромагнитного поля в среде g^A и g^M ведут себя различным образом. Известные линейные соотношения (см. [2]) можно получить из инвариантных квадратичных соотношений данной статьи в предположении однородности, изотропности, неподвижности среды и отсутствия дисперсии. При этом необходимо также специальным образом выбрать систему координат. Квадратичные инвариантные соотношения позволяют при переходе к линейным соотношениям оценить, в каких случаях и с какой точностью выполняются линейные соотношения между энергией и импульсом, а также между плотностью потока импульса и тензором натяжений. В данной статье получено инвариантное квадратичное соотношение, связывающее плотность потока импульса и плотность тензора натяжений электромагнитного поля в среде.

2. Как известно, уравнения Максвелла в среде содержат четыре группы переменных: D , E , B и H , связь между которыми устанав-

ливаются с помощью материальных уравнений, дополняющих уравнения поля и отражающих феноменологические свойства среды: $D = \epsilon E$ и $B = \mu H$. В общем случае неизотропной неоднородной движущейся среды связь между этими группами переменных более сложная. Иногда при описании электромагнитного поля в среде переходят к системе двух антисимметричных тензоров поля (вместо одного в вакууме или простой среде). Эти тензоры связывают друг с другом посредством метрики. Тогда напряженности и индукции электромагнитного поля выражаются друг через друга с помощью квадратичных комбинаций компонент метрического тензора, который в этом случае описывает диэлектрические и магнитные свойства среды [3, 4]. В однородной изотропной покоящейся среде без дисперсии метрический тензор принимает диагональный вид, причем его компоненты выражаются через ϵ , μ (см. [3]). В неоднородной неизотропной среде связь между индукциями и напряженностями поля описывается формулами работы [4].

В данной статье не делается никаких предположений относительно свойств среды, т. е. не вводится ни скалярной (как обычно), ни тензорной связи между индукциями и напряженностями электромагнитного поля в среде. Переменные D , E , B и H группируются в два, вообще говоря, независимых антисимметричных тензора второго ранга $F_{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$). В координатах x, y, z, t $F_{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$ имеют вид*

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B^z & -B^y & -\frac{1}{c}E_x \\ -B^z & 0 & B^x & -\frac{1}{c}E_y \\ B^y & -B^x & 0 & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & cD^x \\ -H_z & 0 & H_x & cD^y \\ H_y & -H_x & 0 & cD^z \\ -cD^x & -cD^y & -cD^z & 0 \end{pmatrix}.$$

Подобные тензоры предлагал вводить еще Зоммерфельд [5], который считал, что входящие в них переменные имеют различный физический смысл. С геометрической точки зрения это различие соответствует различию ко- и контравариантных величин. Ковариантные величины подобны градиентам потенциалов (силам), а контравариантные — скоростям или токам. Ко- и контравариантные величины экспериментально измеряются различными способами (в разных типах экспериментов). Поэтому, если заранее неизвестны свойства среды, т. е. неизвестен способ, позволяющий универсальным образом пересчитывать друг в друга ко- и контравариантные величины, такие величины необходимо считать различными. Обсуждение этого вопроса можно также найти в статье Максвелла [6].

* Здесь и далее используется система единиц CGSE.

Можно показать*, что любой тензор, построенный из двух антисимметричных тензоров по правилу

$$T_v^{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(G^{\mu\tau} F_{\tau v} + \frac{1}{4} \delta_v^{\mu} G^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \quad (2)$$

удовлетворяет тождествам (разложение по инвариантам)

$$T_{\mu}^{\alpha} T_{\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{(16\pi)^2} \delta_{\beta}^{\alpha} (I_1 I_2 + L^2), \quad (3)$$

где $I_1 = G^{\mu\nu} * G_{\mu\nu}$, $I_2 = * F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $L = G^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ и * означает дуальное сопряжение.

Если антисимметричные тензоры $F_{\mu\nu}$ и $G^{\mu\nu}$ описывают электромагнитное поле в среде** в соответствии с (1), причем предполагается, что $F_{\mu\nu} = (g_{\mu\tau} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau}) G^{\lambda\tau}$ (см. [4]), тогда $T^{\mu\nu}$ можно понимать как тензор плотности энергии-импульса поля, который получается как вариационная производная по метрике $g_{\mu\nu}$ из лагранжиана

$$\hat{L} = - \frac{1}{16\pi} V \sqrt{-g} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4)$$

Такой тензор энергии-импульса симметричен. Однако для тождеств (3) существования связи между $G^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$ (т. е. каких-либо материальных уравнений) не требуется, и мы в дальнейшем полагаем свойства среды произвольными.

Удобно записать T_v^{μ} в виде разложения по компонентам ($i, k, l = 1, 2, 3$):

$$T_0^i = \frac{1}{4\pi} G^{ik} F_{k0} = \frac{1}{4\pi c} [EH]; \quad (5)$$

$$T_i^0 = \frac{1}{4\pi} G^{0k} F_{ki} = \frac{c}{4\pi} [BD]; \quad (6)$$

$$T_0^0 = \frac{1}{4\pi} \left[G^{0i} F_{i0} - \frac{1}{4} (G^{\mu\nu} F_{\nu\mu}) \right] = \frac{1}{8\pi} (DE + HB); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T_k^i &= \frac{1}{4\pi} \left[G^{i\lambda} F_{\lambda k} - \frac{1}{4} \delta_k^i (G^{\mu\nu} F_{\nu\mu}) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[D^i E_k + B^i H_k - \frac{1}{2} \delta_k^i (DE + HB) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Все компоненты T_v^{μ} имеют одинаковую размерность плотности потока импульса или плотности энергии, что соответствует объединению вектора плотности потока импульса и плотности энергии в один тензор. Этот тензор представляет собой тензор энергии-импульса в форме Минковского [2]. Тензор энергии-импульса в форме Абрагама получается из него, если положить $T_i^0 = -T_0^i$. Такое равенство (или

* При доказательстве учитывались тождества, справедливые для любых антисимметричных тензоров:

$$G^{\mu\tau} F_{\tau v} - * F^{\mu\tau} * G_{\tau v} = \frac{1}{2} \delta_v^{\mu} (G^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}).$$

** Среда предполагается для простоты недиспергирующей,

пропорциональность) возможно при специальном выборе системы координат в вакууме или простой среде, но оно нарушается, например, при переходе к системе координат, движущейся по отношению к первой, поскольку не имеет инвариантного смысла.

Если $G^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$ связаны между собой произвольным метрическим тензором, соотношение между плотностью импульса в форме Минковского $g^M = \frac{1}{c} T_i^0$ и $g^A = \frac{1}{c} T_0^i$ — плотностью импульса в форме Абрагама — имеет вид

$$T_i^0 = \sum_{\mu, \nu} g^{0\mu} g_{i\nu} T_{\mu}^{\nu} = g^{00} \left(\sum_k g_{ik} T_0^k + g_{i0} T_0^0 \right) + \sum_k g^{0k} \left(g_{ik} T_k^0 + \sum_l g_{il} T_k^l \right), \quad (9)$$

или

$$(\delta_i^k - g^{0k} g_{i0}) T_k^0 = g^{00} \left(\sum_k g_{ik} T_0^k + g_{i0} T_0^0 \right).$$

Из формулы (9) следует, что в однородной изотропной покоящейся среде, где метрический тензор диагонален, соотношение между T_i^0 и T_0^i сводится к равенству

$$T_i^0 = g^{00} g_{ii} T_0^i.$$

Плотность силы Абрагама тогда принимает вид $f^A = (g^{00} g_{ii} - 1) \partial_0 T_0^i$. В движущейся среде для перехода от плотности потока импульса в форме Абрагама к плотности потока импульса в форме Минковского необходимо учитывать энергию и тензор напряжений электромагнитного поля.

Тензор энергии-импульса (2) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\sum_k T_k^i T_i^k = (T_0^0)^2 + \sum_{k \neq i} T_k^0 T_0^k, \quad (10)$$

$$\sum_{i, k} T_k^i T_i^k = 2 \sum_i T_i^0 T_0^i + 3 (T_0^0)^2;$$

$$\operatorname{Sp} T = 0, \quad \sum_k T_k^i T_0^k = - T_0^i T_0^0, \quad \sum_k T_k^0 T_i^k = + T_i^0 T_0^0. \quad (11)$$

Из (3) следует тождество

$$\sum_i T_i^0 T_0^i + (T_0^0)^2 = \frac{1}{(16\pi)^2} (I_1 I_2 - L^2), \quad (12)$$

которое в плоской волне (если она определена как поле, для которого $I_1 = I_2 = L = 0$), переходит в

$$\sum_i T_i^0 T_0^i + (T_0^0)^2 = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно рассматривать как аналог уравнения для массовой оболочки $\mathbf{k}^i \mathbf{k}_i + m^2 = 0$, записанный для плотностей потоков соответствующих величин. Здесь T_i^0 и T_0^i эффективно ведут себя как ко- и контравариантные компоненты одного 3-вектора плотности потока импульса, причем уравнение (13) инвариантно относительно 3-мерных преобразований координат и не зависит ни от метрики, ни от свойств среды. Подставляя в (13) выражения для компонент T_{ν}^{μ} , получим

$$[EH] [BD] + (T_0^0)^2 = 0,$$

откуда для однородной изотропной покоящейся среды следует

$$\frac{c^2 \epsilon \mu}{4 \pi c} \left(\frac{1}{4 \pi c} [EH] \right)^2 = (T_0^0)^2; \quad (14)$$

$$\frac{1}{c^2 \epsilon \mu} \left(\frac{c}{4 \pi} [BD] \right)^2 = (T_0^0)^2. \quad (15)$$

Выберем систему отсчета и систему координат так, чтобы вектор $[EH]$ имел лишь одну отличную от нуля компоненту. Тогда, обозначив направление этого вектора через \mathbf{k}/k и извлекая корень из каждой части (14), получим ($\epsilon \mu = n^2$, $N = cn$ — безразмерный показатель преломления)

$$g^A = \frac{1}{4 \pi c^2} [EH] = \frac{T_0^0}{c^2 n} \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (16)$$

Аналогично из (15) будем иметь

$$g^M = \frac{1}{4 \pi} [BD] = T_0^0 cn \frac{l}{l}. \quad (17)$$

Заметим, что \mathbf{k} является обычным, т. е. контравариантным вектором, а \mathbf{l} — ковариантный вектор типа угловой скорости (см. [4–6]).

Интегрируя (16) и (17) по 3-мерному объему, найдем

$$G^A = \frac{1}{4 \pi c^2} \int [EH] d^3 v = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{1}{c^2 n} \int T_0^0 d^3 v = \frac{\mathcal{E}}{c^2 n} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{\mathcal{E}}{c N} \frac{\mathbf{k}}{k}; \quad (18)$$

$$G^M = \frac{1}{4 \pi} \int [BD] d^3 v = \frac{l}{l} n \int T_0^0 d^3 v = \mathcal{E} n \frac{l}{l} = \frac{\mathcal{E} N}{c} \frac{l}{l}. \quad (19)$$

Можно показать, что соотношение (19), будучи хронометрическим инвариантным, справедливо в любой системе координат, связанной с данной системой отсчета, и имеет аналогию в квантовом подходе. Напротив, (18) не имеет квантового аналога и не инвариантно, но инвариантным является поверхностный интеграл

$$\tilde{G}^A = \frac{1}{4 \pi c^2} \int \epsilon_{ikl} [EH]^i d\sigma^{kl} = \frac{1}{c^2 n} \int T_0^0 \frac{\mathbf{k}^i N_i}{k} d\sigma$$

(N_i — нормаль к поверхности σ), для которого справедливо

$$\tilde{G}^A = \frac{1}{c^2 n} \tilde{\mathcal{E}} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{c^2} \frac{c}{N} = mv.$$

Таким образом, использование инвариантов тензора энергии-импульса в форме Минковского позволяет получить классический аналог дисперсионного уравнения $\mathbf{k} = (\omega/c) \mathbf{n}(\omega)$ без привлечения квантовых представлений (формула (19)).

Выведем теперь инвариантное соотношение между плотностью потока импульса и тензором напряжений. Из (3) в случае плоской волны следует

$$\sum_k T_k^i T_i^k + T_0^i T_i^0 = \frac{1}{(16\pi)^2} (I_1 I_2 + L^2) = 0 \quad (20)$$

(по i нет суммирования).

Считая среду однородной изотропной покоящейся прозрачной и без дисперсии, т. е. T_i^0 и T_0^i , а также T_k^i и T_i^k пропорциональными друг другу, получим из (20)

$$\sum_k (T_i^k)^2 = c^2 n^2 (T_0^i)^2 = \frac{1}{c^2 n^2} (T_i^0)^2. \quad (21)$$

Выбирая систему координат так, чтобы \sum_k свелась к одному члену, и обозначая соответствующее направление вектором k/k , из (21) найдем

$$T_i^k = \frac{1}{cn} \frac{k^k}{k} T_i^0 = v^k g_i^M, \quad (22)$$

где v^k — скорость света в среде.

Легко видеть, что связь между T_i^k и T_0^i нельзя представить в столь же простой с точки зрения интерпретации форме, как (22). Заметим также, что в общем случае (16), (17) и (22) могут не выполняться в отличие от (3), (10) — (13).

Автор признателен А. Г. Иосифьяну и сотрудникам лаборатории теоретической физики за стимулирующее обсуждение затронутых проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Скобельцын, УФН, 110, вып. 2, 253 (1973).
2. В. Л. Гинзбург, УФН, 110, вып. 2, 309 (1973).
3. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
4. Н. П. Коноплева, В. Н. Попов, Калибровочные поля, Атомиздат, М., 1972.
5. А. Зоммерфельд, Электродинамика, ИЛ, М., 1958.
6. Д. К. Максвелл, Статьи и речи, изд. Наука, М., 1968, стр. 23.

Поступила в редакцию
26 декабря 1974 г.

INVARIANT RELATIONS BETWEEN ENERGY AND MOMENTUM IN MACROSCOPIC ELECTRODYNAMICS

N. P. Konoplyova

Square relations between energy and momentum of the electromagnetic field are obtained which are valid in any medium and in the arbitrary frame of reference. It is shown that in simple media in the rest frame of reference the known linear relations connecting energy and momentum may be obtained from the above relations as well as momentum and strain tensor of the electromagnetic field.

УДК 523.164.3

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ В РАЙОНЕ ФОКУСА ПАРАБОЛОИДА ПРИ РАСПОЛОЖЕНИИ ИСТОЧНИКА В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

Н. А. Дугин, Д. А. Дмитренко

Рассчитано распределение векторов поля вблизи фокуса параболоида с $f/D = 0,4$ для различных отношений D/λ , когда источник излучения расположен на расстоянии $R_n = 2D^2/\lambda N$ ($N < 300$) от рефлектора. Показано изменение распределения интенсивности и фазы компонент поля как в плоскости фокусировки, так и вдоль оси параболоида; вычислено распределение энергии в плоскости фокусировки для различных N .

Распределение поля в районе фокуса приемной зеркальной антенны представляет не только теоретический, но и практический интерес в связи с возможностью, например, повышения коэффициента использования зеркала (КИП) путем выбора оптимального варианта облучения. В работах, посвященных исследованию поля вблизи фокуса линз или рефлекторов (например, [1] — скалярное рассмотрение, [2, 3] — векторное), рассматривалось падение на фокусирующую систему плоской волны. В то же время в случае фокусировки антенны на конечное расстояние приходится иметь дело с источником, расположенным вблизи рефлектора, что требует рассмотрения сферической волны и соответственно распределения поля в районе точки, смещенной из фокуса вдоль оси антенны.

В настоящей работе проведен расчет распределения векторов поля около фокуса параболоида вращения при различном расположении источника излучения относительно рефлектора от бесконечности (плоская волна) до конечных расстояний порядка $2D^2/\lambda N$, где D — диаметр раскрытия, λ — длина волны, N — число Френеля (здесь $N \ll 300$). Исследовано изменение распределения интенсивности и фазы поля вдоль оси рефлектора, определены величины смещения максимума из фокуса и опад энергии в точке фокусировки, изменение интенсивности и фазы основной и кросс-поляризационной составляющих поля и изменение распределения энергии в плоскости фокусировки. Полученные результаты позволяют определить максимально возможный КИП антенны при различных расстояниях до источника излучения и при необходимости подобрать оптимальный вариант облучения; они также могут быть полезными для оценки облучателей, применяемых в конкретных антенных системах.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривалось поле вблизи фокуса идеального параболоида с $f/D = 0,4$, облучаемого электрическим диполем $p = -i$ (i, j, k — орты системы координат, рис. 1), расположенным на расстоянии $R_n = 2D^2/\lambda N$ от рефлектора; в качестве переменных параметров взяты N и отношение D/λ . Исходя из общих интегралов дифракции электро-

магнитных волн для отраженного от поверхности рефлектора поля в точке наблюдения P , можно записать (пренебрегая полем на задней стороне рефлектора и опуская члены, обусловленные магнитными токами и зарядами)

$$E_P = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[-j \omega \mu [nH] \frac{e^{-ikr}}{r} + (nE) \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} \right] dS -$$

$$-\frac{1}{2\pi j \omega} \int_L (lH) \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} dl;$$

$$H_P = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[[nH] \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} \right] dS,$$

где $k = 2\pi/\lambda$, ϵ и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства, S — передняя поверхность параболоида, L — граница параболоида. Линейный интеграл в (1а) обусловлен граничными эффектами, связанными с переходом при интегрировании к ограниченной поверхности S .

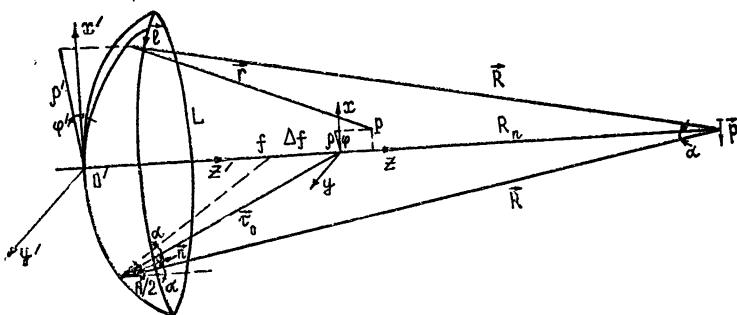


Рис. 1. Система координат.

Преобразованием подынтегральных функций в соответствии с принятой системой координат получены следующие выражения для компонент поля в точке P (более подробно ход решения и иллюстрация полученных данных приведены в работе [4]):

$$E_{Px} = E_0 \left[I_0^E + \cos 2\varphi I_2^E - j \frac{\lambda}{\pi D} (I_0 - \cos 2\varphi I_2) \right]; \quad (1a)$$

$$E_{Py} = E_0 \left[\sin 2\varphi I_2^E + j \frac{\lambda}{\pi D} \sin 2\varphi I_2 \right]; \quad (1b)$$

$$E_{Pz} = j E_0 \left[2 \cos \varphi I_1^E - j \frac{\lambda}{\pi D} \cos \varphi I_1 A_1^i \right]; \quad (1c)$$

$$H_{Px} = \frac{E_0}{Z} \sin 2\varphi I_2^H; \quad (1d)$$

$$H_{Py} = \frac{E_0}{Z} [I_0^H - \cos 2\varphi I_2^H]; \quad (1e)$$

$$H_{P_z} = \frac{E_0}{Z} j \sin \varphi I_1^H; \quad (1e)$$

$$\begin{aligned}
J_m^{E, H} &= \frac{2}{u_0^2} \int_0^{u_0} A_m^{E, H} B^{E, H} \frac{u^{m+1}}{(1+u^2)^2} J_m \left(\frac{2k\rho u(R_n/f - 1)}{(1+u^2)\sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}} \right) e^{-j\gamma} du, \\
B^E &= \frac{(R_n/f - 1)(R_n/f - u^2)}{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}, \quad B^H = \frac{(R_n/f - 1)^2(R_n/f - u^2)}{[(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2]^{3/2}}, \\
A_0^E &= 1 + \frac{4u^2 R_n/f}{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}, \quad A_0^H = 1 + \frac{2u^4 + u^2 + 1}{R_n/f - u^2}, \\
A_1^E &= 1 + \frac{(3u^2 - 1)R_n/f}{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}, \quad A_1^H = 1 + \frac{u^2}{R_n/f - u^2}, \\
A_2^E &= 1 - \frac{2(1-u^2)R_n/f}{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}, \quad A_2^H = 1 - \frac{1-u^2}{R_n/f - u^2}, \\
A_1^t &= \frac{1-u_0^2}{u_0} + \frac{1+u_0^2}{u_0(R_n/f - 1)}, \quad E_0 = jE \frac{\pi D^2}{4\lambda f}, \quad u = \frac{\rho'}{2f}, \\
J_m &= \frac{2u_0}{(1-u_0^2)^2} \frac{(R_n/f - u_0^2)(R_n/f - 1)^2}{[(R_n/f - u_0^2)^2 + 4u_0^2]^{3/2}} \times \\
&\times J_m \left(\frac{2k\rho u_0(R_n/f - 1)}{(1+u_0^2)\sqrt{(R_n/f - u_0^2)^2 + 4u_0^2}} \right) e^{-j\chi_0}, \quad (2) \\
\chi &= kf \left(\frac{R_n/f - u^2}{R_n/f - 1} \sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2} - \sqrt{(R_n/f - u_0^2)^2 + 4u_0^2} \right) - \\
&- \frac{(R_n/f - 1)}{\sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}} \frac{2k\rho u}{(1+u^2)} \cos(\varphi - \varphi') + \\
&+ kz \left(\frac{1-u^2}{1+u^2} \frac{(R_n/f - 1)}{\sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}} + \frac{1+u^2}{\sqrt{(R_n/f - u^2)^2 + 4u^2}} \right).
\end{aligned}$$

Здесь J_m — функции Бесселя, E — амплитуда падающей волны, Z — импеданс свободного пространства, индексом «0» обозначены величины, в которых $\rho' = D/2$.

Фаза подынтегральной функции χ вычислялась обычным образом [1, 3] с учетом фазы поля в точке отражения и разложения в ряд вектора r с точностью до членов первого порядка относительно ρ и z . В выражении для амплитуды подынтегральной функции пренебрегали членами второго порядка ρ , z и более высоких порядков, чем f/R_n . Расчет проводился на ЭВМ; при вычислении поля E_{P_x} на оси и в фокальной плоскости не учитывались члены, обусловленные практическими эффектами ($\lambda/\pi D \ll 1$), поле E_{P_y} вычислялось по полной формуле (1б).

2. ПОЛЕ НА ОСИ РЕФЛЕКТОРА

Поскольку приближение источника излучения к рефлектору вызывает смещение максимума распределения поля из точки фокуса, то при рассмотрении поля на оси в первую очередь определялась величина смещения максимума Δf для различных N . График зависимости

$\Delta f(N)$ (рис. 2) был получен из выражения (1а) при $p = 0$ и изменении в широких пределах координаты z ; при этом, кроме $z = z_m$ — точки на оси, где поле максимально, определялись также величины максимумов (рис. 3 — зависимость спада интенсивности на оси от N) и непосред-

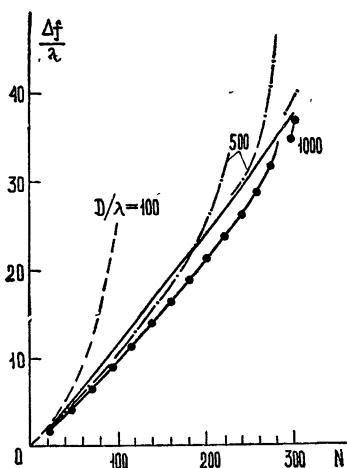


Рис. 2.

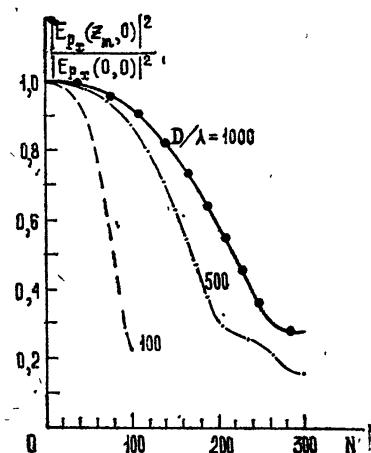


Рис. 3.

Рис. 2. Зависимость величины смещения максимума распределения поля вдоль оси вращения параболоида от величины сокращения дальней зоны N .

Рис. 3. Интенсивность поля в точке фокусировки в зависимости от N .

стvenno распределение поля вдоль оси (рис. 4 а). Легко видеть, что с увеличением N , кроме смещения максимума вдоль оси, происходит искажение распределения E -поля — падает мощность в центре и начинают расти «боевые» максимумы. Один из них в момент $N = N_{\text{ск}}$ превосходит центральный, при этом полностью изменяется характер распределения и происходит скачок величины смещения, максимум перемещается в точку, близкую к точке смещения, определяемой по формуле [5]

$$\Delta f = \frac{f^2}{R_n - f} \left(1 + \frac{D^2}{16f^2} \right)$$

(на рис. 2 сплошная кривая, рассчитанная по этой формуле, приведена только для $D/\lambda = 500$). Таких скачков может быть несколько. Изменение фазы поля вдоль оси показано на рис. 4 б. В районе главного максимума фаза меняется практически линейно и угол наклона от N зависит слабо, наибольшие искажения распределения фазы происходят в области первых минимумов.

Зависимость $\Delta f(N)$ для H -поля (уравнение (1д)) имеет некоторое отличие от $\Delta f(N)$ (рис. 2) при $N \geq (0,3 \div 1)D/\lambda$.

3. ПОЛЕ В ПЛОСКОСТИ ФОКУСИРОВКИ

Распределение поля в фокальной плоскости представляет наибольший интерес, поскольку оно связано с диаграммой направленности антенн. Изменение распределения поля определит, в основном, характер изменения параметров антennы, хотя для каждого конкретного вида облучения необходимы соответствующие поправки [5]. Кроме того, вычислив поток энергии через заданную площадку в плоскости фоку-

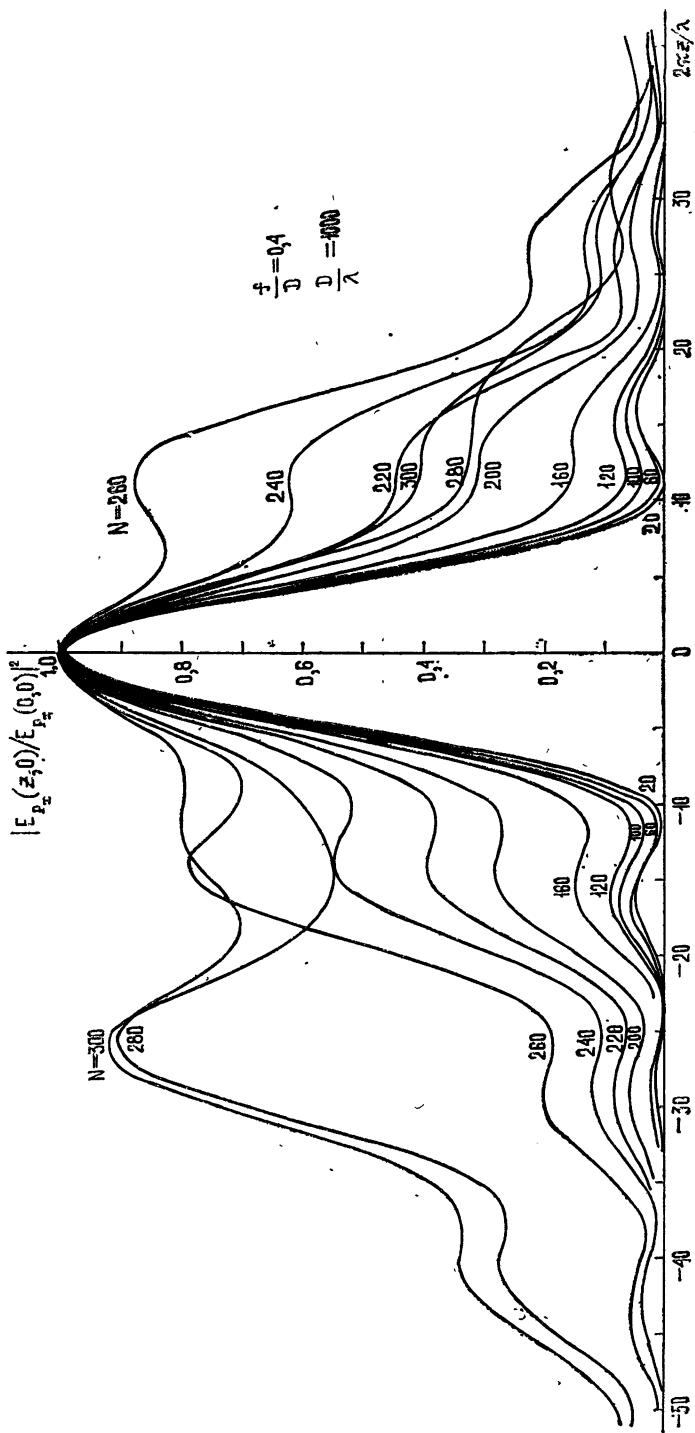


Рис. 4а. Распределение поля вдоль оси вращения параболонда.

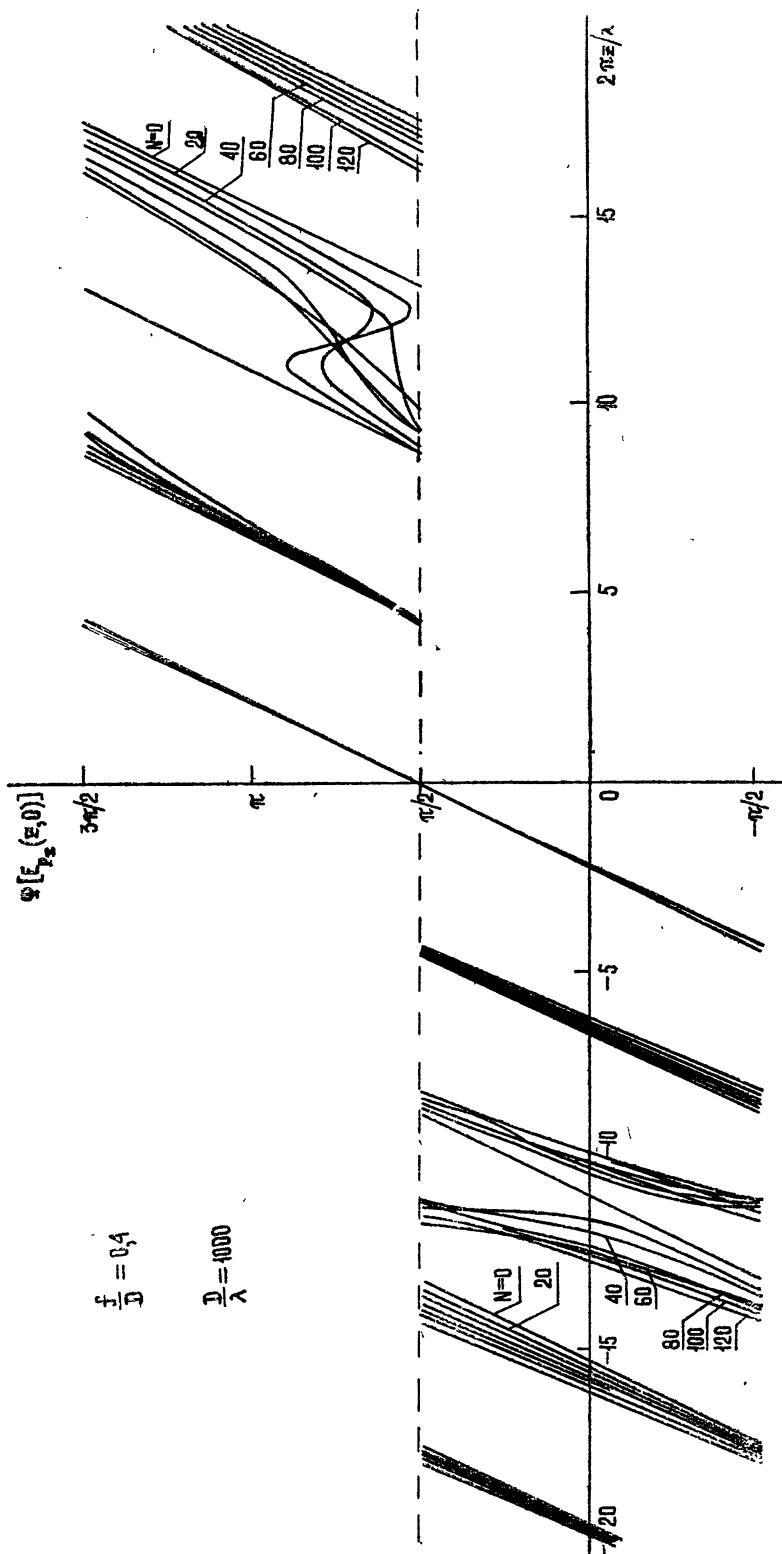


Рис. 4б. Распределение поля вдоль оси вращения параболоида.

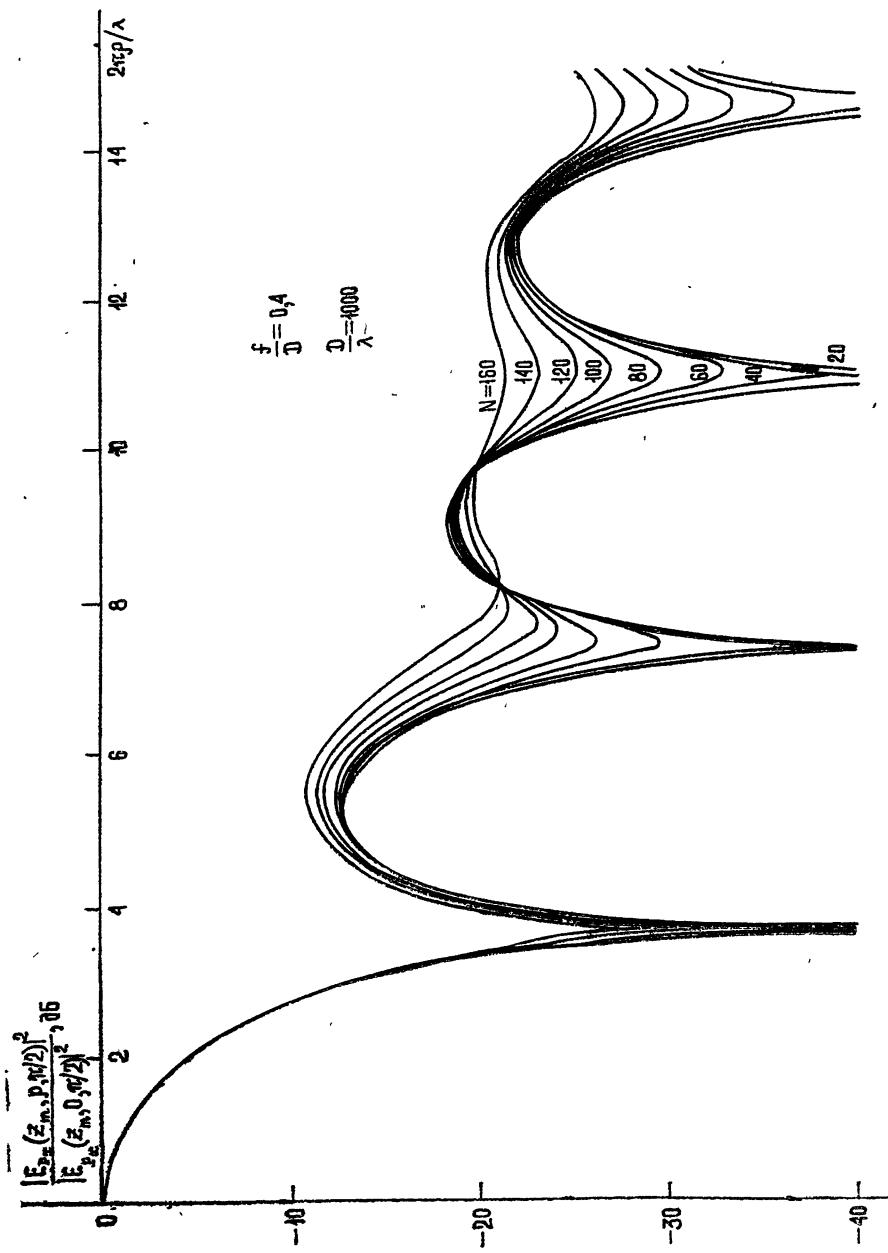


Рис. 5а. Распределение поля в плоскости фокусировки.

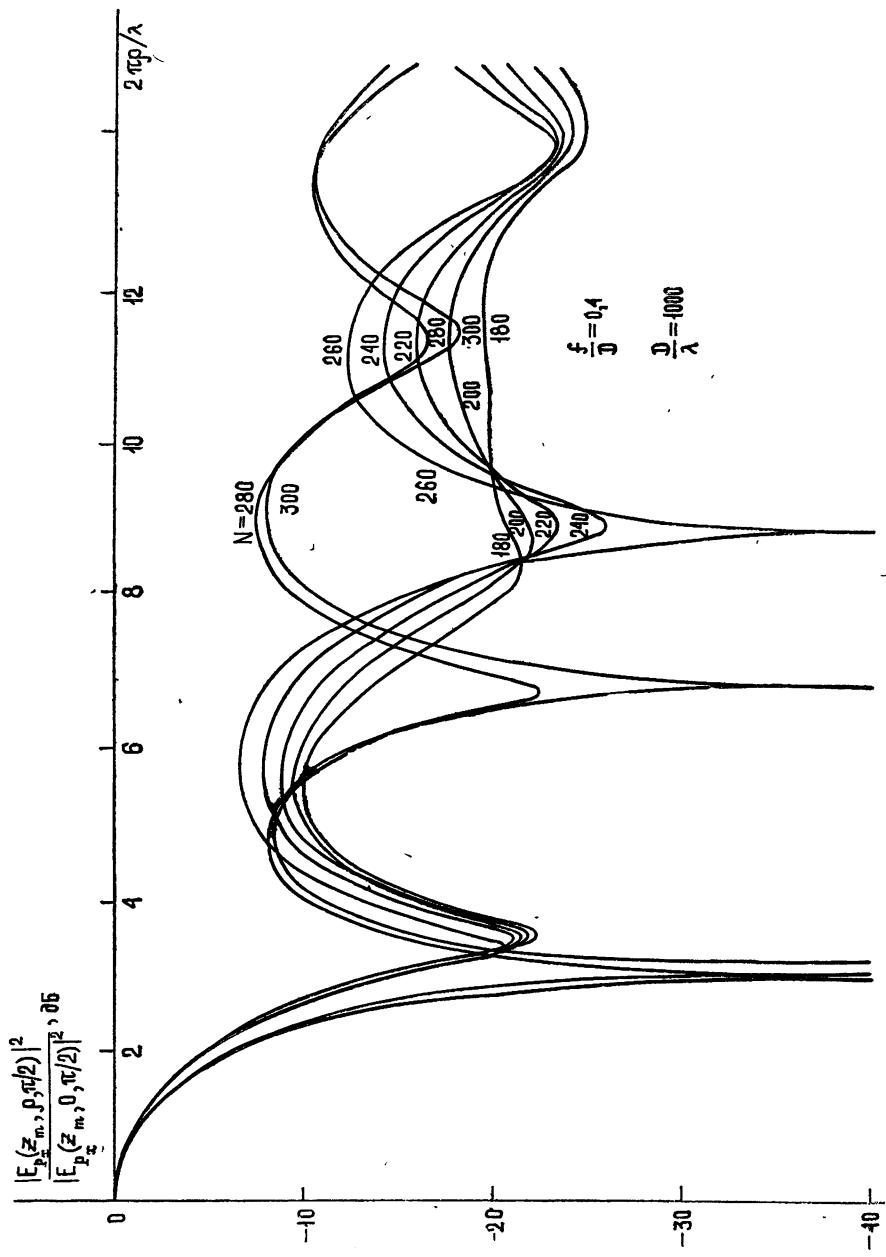


Рис. 5б. Распределение поля в плоскости фокусировки.

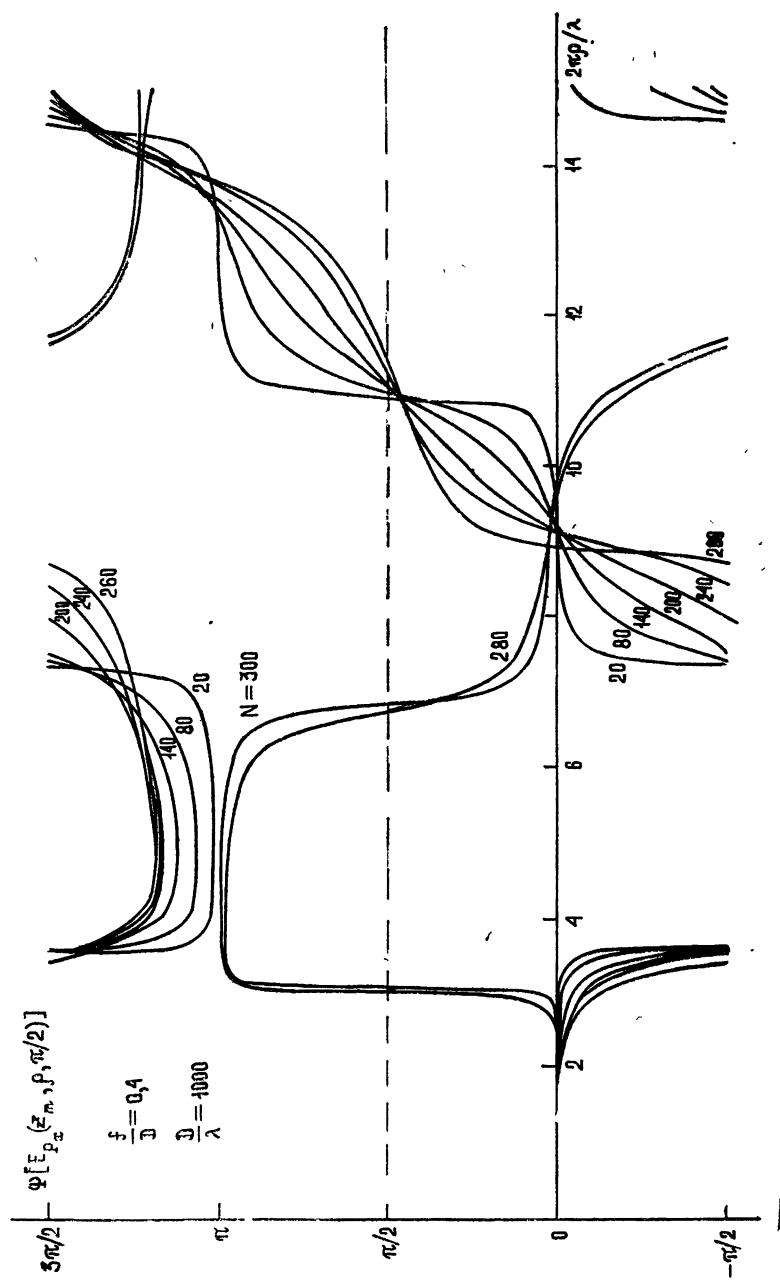


Рис. 5в. Распределение поля в плоскости фокусировки.

сировки, равную, например, апертуре облучателя, можно определить максимальную возможный КИП антенны или величину мощности, рассеянной вне какой-нибудь заданной площадки. Распределение поля в обеих главных плоскостях $E_{P_x}(\rho, z_m, 0)$ и $E_{P_x}(\rho, z_m, \pi/2)$ с ростом N меняется одинаково (на рис. 5 а, б показано только поле $E_{P_x}(\rho, z_m, \pi/2)$): главный максимум искается слабо, пока смещение вдоль оси не достигнет района скачка, боковые лепестки постепенно возрастают и расширяются, нули сглаживаются. Полуширина центрального максимума $\Delta\rho_{0,5}$ возрастает с увеличением N до N_{ck} (рис. 6),

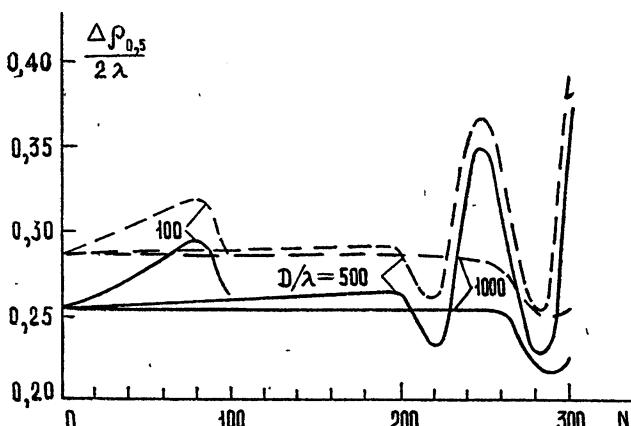


Рис. 6. Изменение полуширины центрального максимума распределения поля в плоскости фокусировки в зависимости от N (сплошная линия — $E_{P_x}(z_m, \rho, \pi/2)$, пунктирные — $E_{P_x}(z_m, \rho, 0)$).

однако видно, что величина расширения сильно зависит от D/λ и при $D/\lambda = 1000$ $\Delta\rho_{0,5}$ практически постоянна. Кроме того, есть некоторое различие в изменении полуширины центральной зоны в разных плоскостях ($\varphi = 0; \pi/2$), обусловленное изменением амплитудного распределения поля в плоскости $\varphi = 0$, что связано с выбором диполя в качестве источника излучения. Фаза поля Ψ (рис. 5в) также претерпевает существенные искажения: резкие скачки на π от лепестка к лепестку при увеличении N сглаживаются и после первого минимума наблюдается тенденция к линейному изменению фазы вдоль координаты ρ . Обращает на себя внимание резкое сужение главного максимума в момент $N = N_{ck}$: ширина его становится в 1,18—1,22 раза меньше ширины центральной зоны при удаленном источнике. Объяснить это явление можно из рассмотрения зависимостей интенсивности поля в точке фокусировки от величины ρ' (рис. 7), позволяющих оценить вклад в суммарную интенсивность различных частей параболоида с радиусами от 0 до $D/2$. Видно, что при $N = N_{ck}$ не работает центральная часть рефлектора в нашем случае до значения $\rho' \sim \rho_m'/3$, т. е. при расположении источника в N_{ck} раз ближе условной границы дальней зоны. параболический рефлектор эквивалентен кольцевой антенне, а следовательно, имеет главный дифракционный максимум более узкий, чем полная круговая апертура (см., например, [1]).

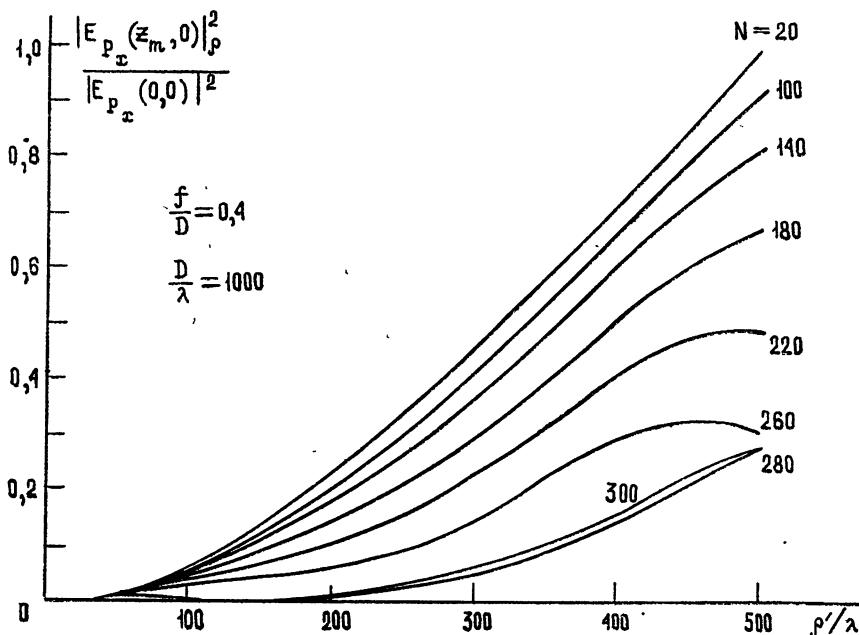


Рис. 7. Зависимость интенсивности поля в точке фокусировки от величины работающей части параболоида.

Изменение кросс-поляризационной составляющей поля $E_{P_y}(\rho, z_m, \pi/4)$ более сложно. Спадание максимума напряженности поля в первом лепестке имеет неравномерный характер (рис. 8 а), но в среднем соответствует закону спадания поля $E_{P_x}(0, z_m, 0)$: отношение интенсивностей $\frac{|\mathcal{E}_{P_y}(\rho_m, z_m, \pi/4)|^2}{|\mathcal{E}_{P_x}(0, z_m, 0)|^2}$ колеблется около значения 23,5 дБ в пределах $\pm 1,5$ дБ (рис. 8 б) вплоть до величин N , соответствующих скачку смещения. Распределение амплитуды и фазы поля E_{P_y} с ростом N искажается так же, как и у поля E_{P_x} : постепенно растут дальние максимумы, минимумы выражены менее четко, зависимость фазы от ρ после первого нуля стремится к линейному закону (рис. 9 а—9 в).

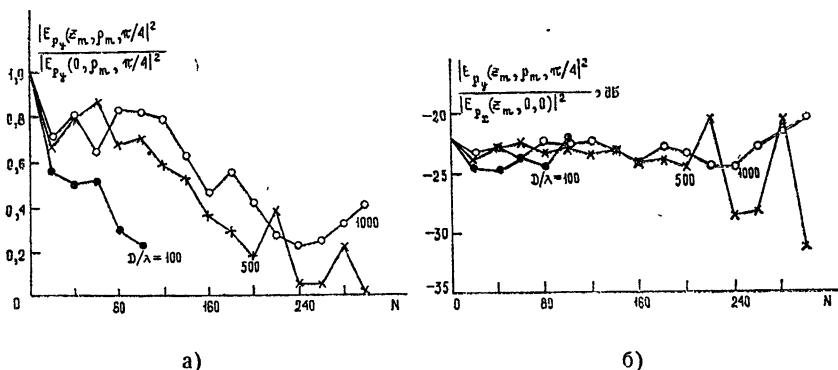


Рис. 8 Изменение величины первого максимума кросс-поляризационной составляющей поля в плоскости фокусировки от N .

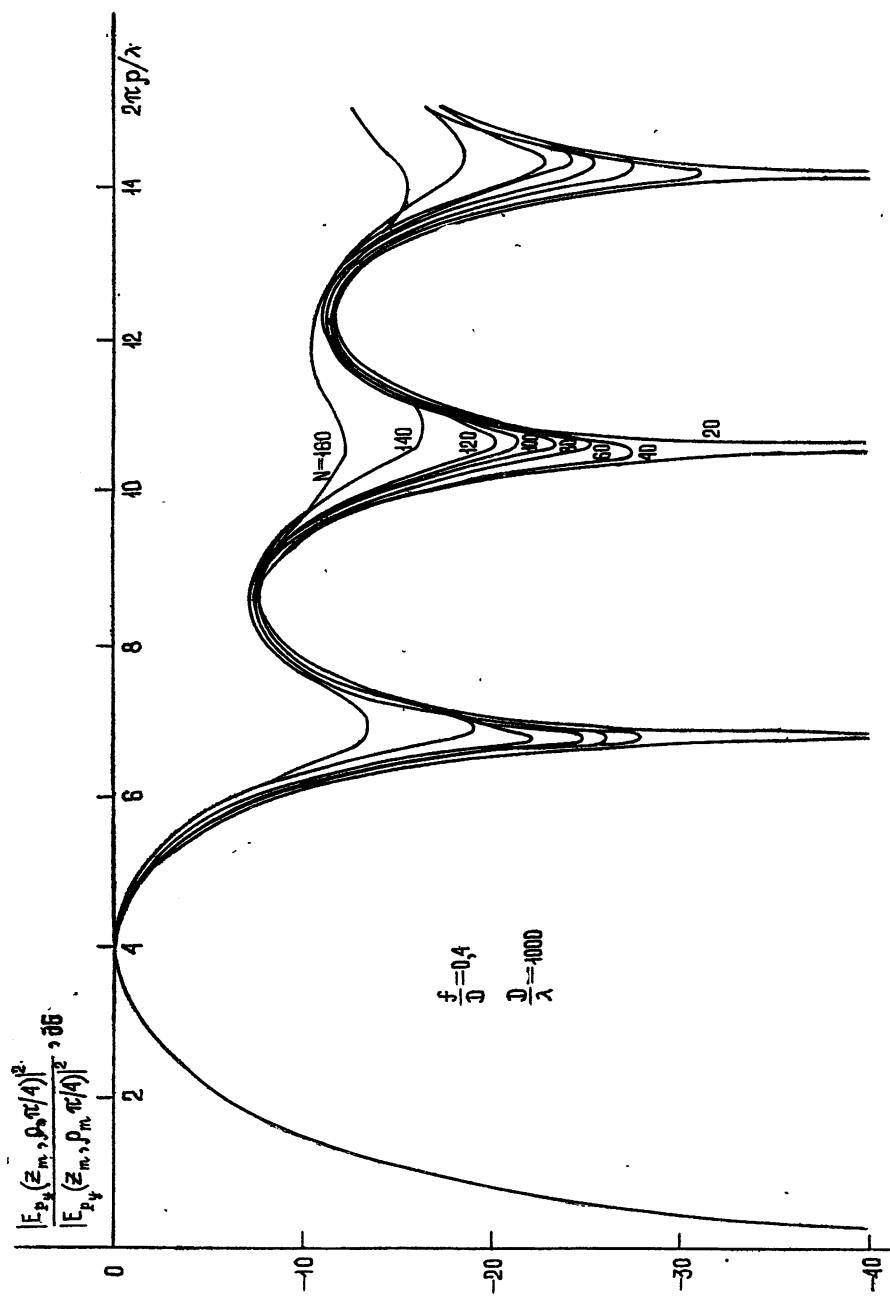


Рис. 9а. Распределение кросс-поляризационной составляющей поля в плоскости фокусировки.

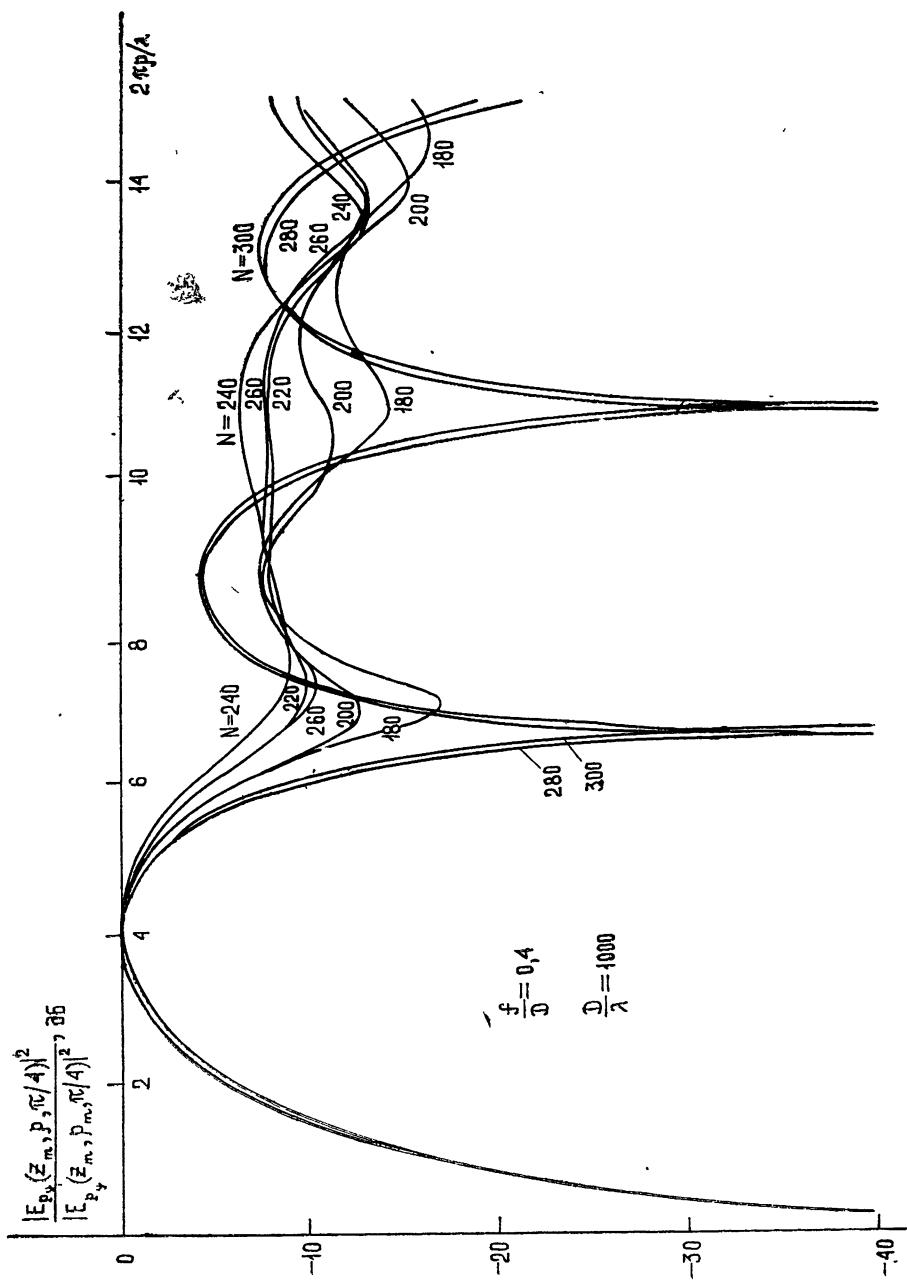


Рис. 96. Распределение кросс-поляризационной составляющей поля в плоскости фокусировки.

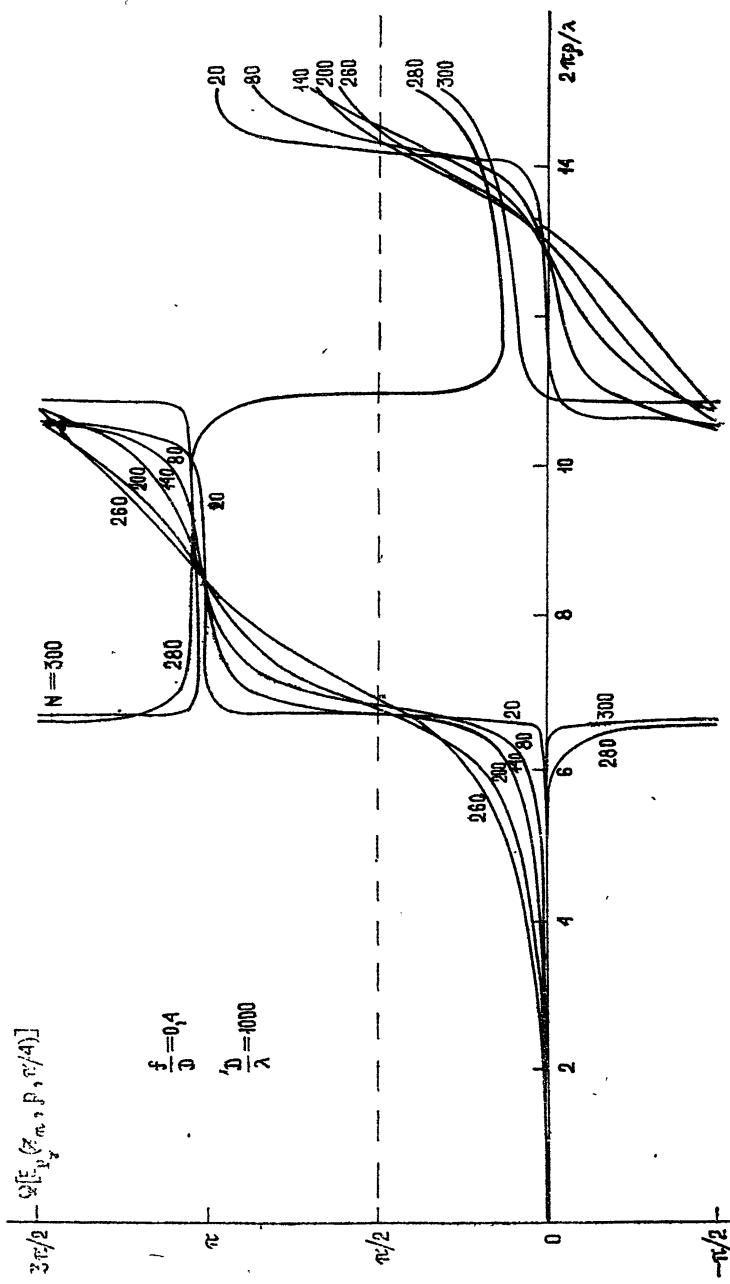


Рис. 9в. Распределение кросс-поляризационной составляющей поля в плоскости фокусировки.

Поток энергии через площадку определенной величины, перпендикулярную оси z и расположенную в точке z_m , вычислялся через вектор Пойнтинга (из уравнений (1)) интегрированием по координатам ρ и φ и нормировался к полной энергии $P_{\text{п}}$, падающей на параболоид. Графики распределения энергии в плоскости фокусировки для различных сокращений зоны приведены на рис. 10. Из этих данных можно получить значения максимального КИП для облучателя с определенными размерами апертуры при различных N , т. е. зависимость спада энергии, сконцентрированной на кружке с радиусом ρ от N . Для $D/\lambda = 1000$ график $\frac{P}{P_{\text{п}}}(N)$ через площадку, охватывающую главный лепесток в фокальной плоскости, практически совпадает с графиком функции $\frac{|E_{P_x}(z_m, 0)|^2}{|E_{P_x}(0, 0)|^2}$ (рис. 3).

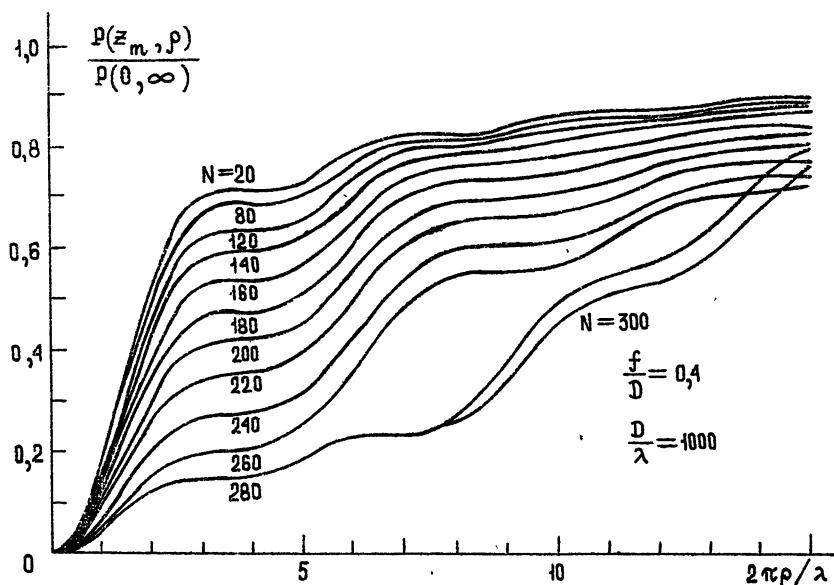


Рис. 10. Часть полной энергии, приходящейся на круглую площадку заданного радиуса, расположенную в плоскости фокусировки.

4. ВЫВОДЫ

Получены формулы для расчета компонент поля в точке фокусировки параболоида с $f/D = 0,4$ при расположении источника излучения на расстоянии $R_{\text{п}} = 2D^2/\lambda N$, которые в предельном случае $N \rightarrow 0$ (плоская волна) совпадают с известными соотношениями [3].

Численные расчеты, проведенные на ЭВМ, показывают, что:

1) смещение максимума концентрации энергии вдоль оси рефлектора $\Delta f(N)$ имеет разрывный характер (при значительных сокращениях дальней зоны $N \geq (0,3 \div 1)D/\lambda$); четко выражена асимметрия распределения энергии вдоль оси относительно точки максимума;

2) при увеличении N в плоскости фокусировки происходит перераспределение энергии между центральным и боковыми лепестками; уровень «боковыхиков» повышается, минимумы выражены менее четко, фаза поля от лепестка к лепестку стремится к плавному закону изменения; однако при $N = N_{\text{ск}}$ происходит качественное изменение в распределении поля, обусловленное тем, что создавшееся фазовое распреде-

ление поля по раскрыву приводит кнейтрализации центральной части рефлектора (до трети диаметра при $D/\lambda = 1000$); параболоид становится эквивалентен кольцевой антенне и создает «нормальное» распределение поля в плоскости фокусировки с четко выраженным минимумами и скачком фазы на π от лепестка к лепестку;

3) ширина центральной зоны на уровне половинной мощности $\Delta\rho_{0,5}$ при изменении N непрерывно растет до значений $N \sim N_{ск}$, соответствующих скачку функции смещения $\Delta f(N)$; скорость расширения зависит от D/λ (и при $D/\lambda = 1000$ $\Delta\rho_{0,5}$ практически постоянна);

4) величина первого максимума кросс-поляризационной составляющей поля с ростом N (до $N \sim N_{ск}$) колеблется в незначительных пределах около значения ~ 23 дБ от уровня основной составляющей поля в точке фокусировки.

Авторы выражают благодарность Н. М. Цейтлину за ценные советы и постоянный интерес к работе и И. Ф. Забродиной за помощь в оформлении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970
2. B. Richards, E. Wolf, Proc. Roy. Soc., Ser A, 253, № 1274 35c (1959).
3. H. Gniss, G. Ries, AEU, 23, № 10, 481 (1969).
4. Н. А. Дугин, Д. А. Дмитренко, Препринт НИРФИ, № 66, Горький, 1975
5. Д. А. Дмитренко, В. В. Анкина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 262 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 декабря 1974 г

THE PROBLEM OF THE FIELD DISTRIBUTION NEAR THE PARABOLOID FOCUS AT THE SOURCE POSITION IN THE FRESNEL ZONE

N. A. Dugin, D. A. Dmitrenko

The distribution of the field vector near the paraboloid focus with $f/D = 0.4$ for different relations D/λ is calculated when the radiation source is situated at the distance $R_n = 2D^2/\lambda N$ ($N < 300$) from the reflector. The change in the intensity and field component phase distribution both in the focal plane and along the paraboloid axis is shown. The energy distribution in the focal plane for different N is calculated.

УДК 621.378.25

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МЦР С РЕЗОНАТОРОМ ФАБРИ—ПЕРО

A. Ф. Курин, Г. А. Курина, В. В. Новиков

Проведен нелинейный анализ стационарного режима работы МЦР с резонатором Фабри—Перо, ось которого совпадает с направлением статического магнитного поля. Показано существование четырех ветвей усиления. Для ряда значений продольной и поперечной скоростей электронов проведен расчет оптимальных значений коэффициента полезного действия, длины резонатора и расстройки.

1. Использование открытого резонатора типа Фабри—Перо в качестве электродинамической системы МЦР позволяет в зависимости от ориентации оси резонатора по отношению к статическому H_0 -полю осуществлять генерацию как в условиях одного механизма взаимодействия, приводящего к поперечной (фазовой) группировке под действием высокочастотного E -поля [1] (при этом ось резонатора нормальна H_0), так и в условиях двух механизмов, обеспечивающих поперечную под действием E -поля и продольную (по отношению к статическому H_0 -полю) под действием H -поля резонатора группировки [1]. В предельном случае, когда ось резонатора параллельна H_0 , продольная группировка наиболее выражена. Совместное действие двух одинаково эффективных механизмов приводит к сужению областей частот, в которых возможно усиление. Линейный анализ взаимодействия в резонаторе в этом случае содержится в работах [2, 3]. Эксперименты по возбуждению колебаний в резонаторе с небольшими уровнями генерируемой мощности описаны в [4]. В настоящей работе приведена нелинейная теория стационарного режима данной модели МЦР. Заметим, что нелинейный анализ МЦР с одним механизмом фазовой группировки изложен в [1, 5], анализ МЦР с частичным влиянием механизма продольной группировки содержится в [6].

2. Рассмотрим электронный поток с циклическими траекториями электронов, направляемый статическим H_0 -полем, в резонаторе Фабри—Перо, ось которого совпадает с направлением поля H_0 (рис. 1). Электромагнитное поле резонатора образовано наложением двух встречных волн, распространяющихся вдоль H_0 -поля. Строго говоря, эти волны вследствие дифракционных потерь на краях отражателей резонатора являются слегка ускоренными волнами, однако при малых дифракционных потерях их можно считать незамедленными. Дифракция приводит также к наличию вариаций в распределении поля в поперечной к оси резонатора плоскости. Будем считать, что электронный

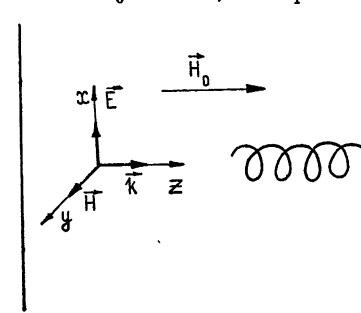


Рис. 1. Электронный поток в резонаторе Фабри—Перо.

поток не слишком широк и помещается в максимум поля какой-либо моды резонатора, так что в пределах поперечного сечения потока изменением высокочастотного поля можно пренебречь. Таким образом, рассматривается взаимодействие электронов с плоскими однородными ТЕМ-волнами, образующими стоячую волну:

$$E_x = E_0 \sin \frac{\omega}{c} z \sin \omega t, \quad H_y = E_0 \cos \frac{\omega}{c} z \cos \omega t. \quad (1)$$

Электроны считаем моноэнергетическими, без разброса по продольным скоростям.

Уравнение движения релятивистского электрона

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{r}}{[1 - (\dot{r}/c)^2]^{1/2}} + \frac{e}{cm_0} [\dot{r}, H_0] = - \frac{e}{cm_0} [\dot{r}, H] - \frac{e}{m_0} E \equiv \mathbf{a} \quad (2)$$

в отсутствие высокочастотных полей ($\mathbf{a} = 0$) имеет решение

$$\begin{aligned} x_0 &= A_1 \cos(\omega_c t + A_2) + A_4, \\ y_0 &= A_1 \sin(\omega_c t + A_2) + A_5, \\ z_0 &= A_3 t + A_6, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\omega_c = eH_0 \sqrt{1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_z^2}/m_0 c$ — релятивистская циклотронная частота электрона (m_0 — его масса покоя, $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$, $\beta_z = v_z/c$ — относительные скорости вращательного и поступательного движений невозмущенного электрона), A_i — неопределенные коэффициенты.

Следуя методу вариации произвольных постоянных, будем считать в \dot{r}_0 коэффициенты A_i зависящими от времени. Тогда после подстановки скорости \dot{r}_0 , получаемой из (3), в уравнение (2) приходим к системе алгебраических уравнений относительно \dot{A}_1 , \dot{A}_2 , \dot{A}_3 , решение которой с учетом соотношения $\omega_c A_1 = v_t$, а также обозначений $A_2 = \psi$, $A_3 = v_z$ дает

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_t &= \frac{1}{c} [-a_x(1 - \beta_t^2) \sin \psi + a_y(1 - \beta_t^2) \cos \psi - a_z \beta_t \beta_z] \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{c \beta_t} (-a_x \cos \psi - a_y \sin \psi) \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2} - \omega_c \left[1 - \frac{(1 - \beta_t^2 - \beta_z^2)^{1/2}}{(1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_z^2)^{1/2}} \right], \\ \dot{\beta}_z &= \frac{1}{c} [a_x \beta_t \beta_z \sin \psi - a_y \beta_t \beta_z \cos \psi + a_z (1 - \beta_z^2)] \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\beta_t = v_t/c$, $\beta_z = v_z/c$ — относительные скорости вращательного и поступательного движений невозмущенного электрона, $\psi = \omega_c t + \phi$. Система уравнений (4) полностью совпадает с аналогичными уравнениями, полученными в работе [5].

Значения проекций вектора \mathbf{a} , равные

$$a_x = \frac{eE_0}{m_0} \left(-\sin \frac{\omega}{c} z \sin \omega t + \beta_z \cos \frac{\omega}{c} z \cos \omega t \right),$$

$$a_y = 0,$$

$$a_z = \frac{eE_0}{m_0} \beta_t \cos \frac{\omega}{c} z \cos \omega t \sin \psi,$$

позволяют записать систему (4) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_t &= \frac{eE_0}{4m_0 c} \left\{ (1 - \beta_t^2 - \beta_z) [\sin(\theta^+ + 2\psi) - \sin \theta^+] - (1 - \beta_t^2 + \beta_z) \times \right. \\ &\quad \times [\sin(\theta^- + 2\psi) - \sin \theta^-] \} \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{eE_0}{4m_0 \beta_t c} \left\{ (1 - \beta_z) [\cos(\theta^+ + 2\psi) + \cos \theta^+] - (1 + \beta_z) [\cos(\theta^- + 2\psi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta^-] \right\} \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2} - \omega_c \left[1 - \frac{(1 - \beta_t^2 - \beta_z^2)^{1/2}}{(1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} \right], \\ \dot{\beta}_z &= \frac{eE_0 \beta_t}{4m_0 c} \left\{ (1 - \beta_z) [\sin(\theta^+ + 2\psi) - \sin \theta^+] + (1 + \beta_z) [\sin(\theta^- + 2\psi) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta^-] \right\} \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь в аргументах тригонометрических функций выделены фазы

$$\begin{aligned} \theta^+ &= \omega t - \frac{\varphi}{c} z - \psi, \\ \theta^- &= \omega t + \frac{\varphi}{c} z - \psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Как показано в работе [7], эти фазы можно считать медленными по сравнению с фазой циклотронных колебаний ψ в случае малых продольных скоростей $\beta_{\parallel} \ll 1$.

Проведем усреднение в уравнениях (5) по ψ , считая β_t , β_z , θ^+ , θ^- медленно меняющимися величинами, остающимися практически постоянными на отрезке ψ , равном π . Тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_t &= \frac{eE_0}{4m_0 c} \left[-(1 - \beta_t^2 - \beta_z) \sin \theta^+ + (1 - \beta_t^2 + \beta_z) \sin \theta^- \right] \times \\ &\quad \times \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{eE_0}{4m_0 \beta_t c} \left[(1 - \beta_z) \cos \theta^+ - (1 + \beta_z) \cos \theta^- \right] \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2} - \\ &\quad - \omega_c \left[1 - \frac{(1 - \beta_t^2 - \beta_z^2)^{1/2}}{(1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} \right], \\ \dot{\beta}_z &= \frac{eE_0 \beta_t}{4m_0 c} \left[-(1 - \beta_z) \sin \theta^+ - (1 + \beta_z) \sin \theta^- \right] \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Переходя в уравнениях (7) к новой переменной $\frac{\omega}{c} z$ по формуле

$$\frac{d}{dt} = \omega \beta_z \frac{d}{d(\omega z/c)},$$

после несложных преобразований с учетом соотношений (6) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_t}{d(\omega z/c)} &= -\frac{p}{4\beta_z} [(1-\beta_t^2 - \beta_z) \sin \theta^+ - (1-\beta_t^2 + \beta_z) \sin \theta^-] \sqrt{1-\beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \frac{d\beta_z}{d(\omega z/c)} &= -\frac{p\beta_t}{4\beta_z} [(1-\beta_z) \sin \theta^+ + (1+\beta_z) \sin \theta^-] \sqrt{1-\beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \frac{d\theta^+}{d(\omega z/c)} &= -\frac{p}{4\beta_t \beta_z} [(1-\beta_z) \cos \theta^+ - (1+\beta_z) \cos \theta^-] \sqrt{1-\beta_t^2 - \beta_z^2} + \\ &\quad + \frac{\sigma-1}{\beta_z} \frac{(1-\beta_t^2 - \beta_z^2)^{1/2}}{(1-\beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} + \frac{1-\beta_z}{\beta_z}, \\ \frac{d\theta^-}{d(\omega z/c)} &= -\frac{p}{4\beta_t \beta_z} [(1-\beta_z) \theta^+ - (1+\beta_z) \cos \theta^-] \sqrt{1-\beta_t^2 - \beta_z^2} + \\ &\quad + \frac{\sigma-1}{\beta_z} \frac{(1-\beta_t^2 - \beta_z^2)^{1/2}}{(1-\beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} + \frac{1+\beta_z}{\beta_z}. \end{aligned} \quad (8)$$

В этих выражениях введены относительная расстройка $\sigma = (\omega - \omega_c)/\omega$ и параметр поля $p = \frac{eE_0}{m_0 \omega c}$.

Решение уравнений (8) дает скорости электронов v_t , v_z в некоторой точке z , которые позволяют подсчитать энергообмен, существующий в системе электронный поток + высокочастотное поле резонатора.

Несфазированный электронный поток, вступающий в резонатор, моделировался шестнадцатью группами электронов, что в уравнениях (8) соответствовало начальным условиям

$$\beta_{t_i}(0) = \beta_{\perp}, \quad \beta_{z_i}(0) = \beta_{\parallel}, \quad \theta_t^+(0) = \theta_t^-(0) = \theta_{0i} = 2\pi i/16 \quad (i = 0, \dots, 15).$$

Система уравнений (8) описывает нераздельное взаимодействие электронов с электромагнитными волнами резонатора. При синхронизме с одной из этих волн другая в случае $z/\lambda \gg 1$ (λ — длина волны генерируемого излучения) оказывается нерезонансной. Однако эта нерезонансная волна, кроме возмущений колебательного характера с малой амплитудой колебаний, оказывает на электроны также накаливающееся воздействие [7]. Поэтому усредненное движение, рассчитываемое с помощью уравнений раздельного движения, которые получаются из (8) усреднением по быстрой фазе θ^+ (при синхронизме с обратной волной) или θ^- (при синхронизме с прямой волной), содержит значительные ошибки. Уравнения (8) решались по описанной нами в [7] методике, основанной на втором приближении метода усреднения, которое учитывает влияние нерезонансной волны. При этом для усредненных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\beta}_t}{d(\omega z/c)} &= \mp \frac{p}{4\bar{\beta}_z} (1 - \bar{\beta}_t^2 \mp \bar{\beta}_z) \sin \bar{\theta}^{\pm} \sqrt{1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2}, \\ \frac{d\bar{\beta}_z}{d(\omega z/c)} &= -\frac{p\bar{\beta}_t}{4\bar{\beta}_z} (1 \mp \bar{\beta}_z) \sin \bar{\theta}^{\pm} \sqrt{1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2}, \\ \frac{d\bar{\theta}^{\pm}}{d(\omega z/c)} &= \mp \frac{p}{4\bar{\beta}_t \bar{\beta}_z} (1 \mp \bar{\beta}_z) \cos \bar{\theta}^{\pm} \sqrt{1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2} + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \frac{\sigma - 1}{\bar{\beta}_z} \frac{(1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2)^{1/2}}{(1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} + \frac{1 \mp \bar{\beta}_z}{\bar{\beta}_z},$$

$$\frac{d\bar{\theta}^{\mp}}{d(\omega z/c)} = \frac{d\bar{\theta}^{\pm}}{d(\omega z/c)} \pm 2$$

начальные условия записываются как

$$\bar{\beta}_t(0) = \beta_{\perp} \pm \frac{p(1 - \beta_{\perp}^2 \pm \beta_{\parallel}^2)}{4(\sigma \pm \beta_{\parallel})} (1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2} \cos \theta_0,$$

$$\bar{\beta}_z(0) = \beta_{\parallel} - \frac{p\beta_{\perp}(1 \pm \beta_{\parallel})}{4(\sigma \pm \beta_{\parallel})} (1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2} \cos \theta_0,$$

$$\bar{\theta}^{\pm}(0) = \theta_{0i} \mp \frac{p(1 \pm \beta_{\parallel})}{4\beta_{\perp}(\sigma \pm \beta_{\parallel})} (1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2} \sin \theta_0,$$

$$\bar{\theta}^{\mp}(0) = \theta_{0i}.$$

Решение, включающее колебания, вызванные нерезонансной волной, определяется по формулам

$$\beta_t = \bar{\beta}_t \mp \frac{p(1 - \bar{\beta}_t^2 \pm \bar{\beta}_z)(1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2)^{1/2}}{4 \left[\frac{(\sigma - 1)(1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2)^{1/2}}{(1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} + 1 \pm \bar{\beta}_z \right]} \cos \bar{\theta}^{\mp},$$

$$\beta_z = \bar{\beta}_z + \frac{p\bar{\beta}_t(1 \pm \bar{\beta}_z)(1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2)^{1/2}}{4 \left[\frac{(\sigma - 1)(1 - \bar{\beta}_t^2 - \bar{\beta}_z^2)^{1/2}}{(1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2)^{1/2}} + 1 \pm \bar{\beta}_z \right]} \cos \bar{\theta}^{\mp}.$$

Верхний знак относится к прямой волне ($\sigma > 0$), нижний — к обратной волне ($\sigma < 0$).

Все вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-4 методом Милна. Начальный отрезок несамоначищающегося метода Милна находился методом последовательных приближений. Коэффициент полезного действия определялся по формуле

$$\eta = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{15} \left(1 / \sqrt{1 - \beta_{ti}^2 - \beta_{zi}^2} - 1 \right)}{16 \left(1 / \sqrt{1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2} - 1 \right)}.$$

При этом положительные значения η соответствуют отдаче электронами своей энергии полю резонатора.

3. Остановимся на основных закономерностях взаимодействия описываемой модели МЦР. Данные расчетов, представленные на

рис. 2—4, получены в результате обработки кривых $\eta = \eta(\omega z/c = n\pi)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) при постоянных значениях параметров p и σ . Поскольку

в нашей задаче, в отличие от [5], нет возможности выделить единый параметр поля (как v^{-1} в работе [5]), куда входили бы также характеристики потока β_{\perp} , β_{\parallel} , то при расчетах необходимо задавать значения этих величин. На рисунках сплошная линия относится к $\beta_{\perp} = 0,2$, $\beta_{\parallel} = 0,05$, пунктирная — к $\beta_{\perp} = 0,2$, $\beta_{\parallel} = 0,07$. z_{opt} и σ_{opt} представляют собой соответственно длину взаимодействия и относительную расстройку, обеспечивающие максимальный коэффициент полезного действия η_{opt} при данном уровне поля p в резонаторе и фиксированных β_{\perp} , β_{\parallel} .

Характерной особенностью рассматриваемой модели МЦР является наличие четырех ветвей усиления вблизи допплеровских частот $\omega^{(\pm)} = \omega_c/(1 \mp \beta_{\parallel})$ ($\sigma^{(\pm)} = \pm \beta_{\parallel}$): двух ветвей ($1^+, 2^+$) на прямой волне вблизи $\omega^{(+)}$ и двух ветвей ($1^-, 2^-$) на обратной волне вблизи ω^- (рис. 3). Общим

Рис. 2. Оптимальный КПД мазера.

для всех ветвей является удаление оптимальных частот от допплеровских частот $\omega^{(\pm)}$ с ростом поля p в резонаторе.

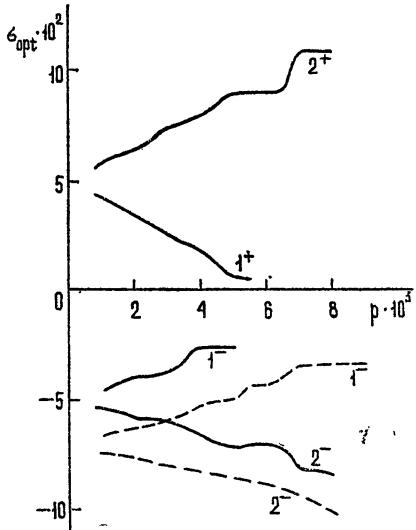


Рис. 3. Оптимальная расстройка мазера.

В заключение заметим, что линейный анализ системы уравнений (8) приводит к возможности самовозбуждения генератора при синхронизме как с прямой, так и с обратной волнами, в том числе и на длинах взаимодействия $z \gg \lambda$.

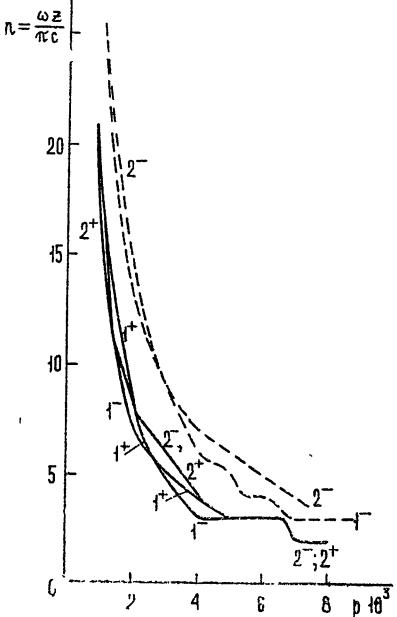


Рис. 4. Оптимальная длина взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. А. Ф. Курин, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1908 (1969).
3. А. Ф. Курин, Вестник МГУ, серия физ., астрон., 1, 47 (1970).
4. Ф. А. Королев, А. Ф. Курин, Радиотехника и электроника, 15, № 10, 2143 (1970).
5. Г. Н. Рапопорт, А. К. Немак, В. А. Жураховский, Радиотехника и электроника, 12, № 4, 633 (1967).
6. А. А. Курاءв, Радиотехника и электроника, 14, № 9, 1614 (1969).
7. Г. А. Курина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 19, № 7, 1059 (1976).

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
2 апреля 1973 г.,
после доработки
27 мая 1975 г.

NONLINEAR THEORY OF CYCLOTRON RESONANCE MASER WITH
FABRY—PEROT RESONATOR

A. F. Kurin, G. A. Kurina, V. V. Novikov

A nonlinear analysis of the stationary regime of operation of the cyclotron resonance maser with Fabry—Perot resonator which axis coincides with the direction of the static magnetic field has been made. The existence of four amplification regimes is shown. The optimal values of efficiency, resonator length and mistuning are calculated for some values of longitudinal and transverse electron velocities.

УДК 621.378.25

О ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОННЫХ МАЗЕРОВ

Г. А. Курина

В рамках второго приближения метода усреднения рассмотрены нелинейные дифференциальные уравнения с одной быстрой фазой, описывающие колебания электронов в мазерах. На примере МЦР с резонатором Фабри—Перо, ось которого параллельна статическому магнитному полю, показана необходимость учета нерезонансной волны при любой длине взаимодействия. Этот учет осуществляется применением второго приближения метода усреднения.

В теории электронных мазеров при наличии допплеровских поправок к частоте действующего в резонаторе поля, если длина взаимодействия z значительно превосходит длину волны λ генерируемого излучения, пользуются обычно раздельным приближением, что соответствует первому приближению теории усреднения. В настоящей работе в рамках второго приближения этой теории рассмотрены нелинейные дифференциальные уравнения с одной быстрой фазой, описывающие колебания электронов в мазерах. На примере МЦР показана необходимость учета нерезонансной волны при любой длине взаимодействия.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \varepsilon \varphi_1^i(x) \psi_1^i(y) + \varepsilon \varphi_2^i(x), \\ \frac{dy}{dt} &= w(x) + \varepsilon \varphi_3(x) + \varepsilon \varphi_4(x) \psi_2(y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, m$, $x = (x^1, \dots, x^m)$, y — скаляр, t — независимая скалярная переменная, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Допустим, что φ_3 , φ_4 , ψ_2 — дифференцируемые, а φ_1^i , φ_2^i , ψ_1^i , w — дважды дифференцируемые функции. Пусть ψ_1^i , ψ_2 — периодические функции быстрой фазы y с периодом 2π , причем $\bar{\psi}_1^i = \bar{\psi}_2 = 0$. Через $\bar{f}(x)$ обозначается среднее значение по y некоторой функции $f(x, y)$, т. е. $\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) dy$.

Будем рассматривать решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $x^i(t_0) = x_0^i$, $y(t_0) = y_0$ в промежутке $t \sim 1/\varepsilon$. Система (1) является системой с вращающейся фазой. Известно (см., например, [1], гл. 1, § 2 или [2], гл. III, § 4), что в результате замены переменных

$$x^i = \bar{x}^i + \varepsilon u_1^i(\bar{x}, \bar{y}) + O(\varepsilon^2),$$

$$y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + O(\varepsilon^2),$$

где \bar{x} , \bar{y} удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^i}{dt} &= \varepsilon \varphi_2^i(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2^i(\bar{x}) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= w(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2)$$

решения системы (1)

$$x^i = \bar{x}^i + \varepsilon u_1^i(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3)$$

определяются с точностью $O(\varepsilon^2)$, а $y = \bar{y}$ — с точностью $O(\varepsilon)$.

Для однозначного определения функций $u_1^i(\bar{x}, \bar{y})$, $B_1(\bar{x})$, $A_2^i(\bar{x})$ потребуем, чтобы выполнялось условие

$$u_1^i(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0. \quad (4)$$

Начальные значения для решения усредненной системы (2) зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}^i(t_0) &= x_0^i - \varepsilon u_1^i(x_0, y_0), \\ \bar{y}(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (5)$$

При условии (4) функции u_1^i , B_1 , A_2^i для системы (1) имеют наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} u_1^i(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\varphi_1^i(\bar{x})}{w(\bar{x})} \hat{\psi}_1^i(\bar{y}), \\ B_1(\bar{x}) &= \varphi_3(\bar{x}), \\ A_2^i(\bar{x}) &= \frac{1}{w(\bar{x})} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_1^i(\bar{x})}{\partial x^j} \varphi_1^i(\bar{x}) \hat{\psi}_1^i(\bar{y}) \hat{\psi}_1^i(\bar{y}) + \frac{\varphi_1^i(\bar{x}) \varphi_4(\bar{x})}{w(\bar{x})} \times \\ &\times \frac{d \hat{\psi}_1^i(\bar{y})}{d \bar{y}} \hat{\psi}_2(\bar{y}) + \frac{\varphi_1^i(\bar{x})}{w^2(\bar{x})} \sum_{j=1}^m \frac{\partial w(\bar{x})}{\partial x^j} \varphi_1^i(\bar{x}) \frac{d \hat{\psi}_1^i(\bar{y})}{d \bar{y}} \hat{\psi}_1^i(\bar{y}), \end{aligned}$$

где $\hat{f}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x)$, $\tilde{f}(x, y) = \int_0^y \hat{f}(x, y) dy + c(x)$, $c(x)$ — произвольная функция.

Решение системы (2) существенно упрощается, если $A_2^i(x) \equiv 0$. В частности, так будет, если $\varphi_1^i = \sin y$, $\varphi_2 = \cos y$, или $\varphi_1^i = \cos y$, $\varphi_2 = \sin y$, или $\varphi_1^i = \sin y$ ($i = 1, \dots, m-1$), $\varphi_1^m = \varphi_2 = \cos y$, а функции $\varphi_1^i(\bar{x})$, $\varphi_4(\bar{x})$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1^i(\bar{x})}{\partial x^m} - \frac{\varphi_1^i(\bar{x})}{w(\bar{x})} \frac{\partial w(\bar{x})}{\partial x^m} \right) \varphi_1^m(\bar{x}) &\equiv 0 \quad (i = 1, \dots, m-1), \\ \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\varphi_1^m(\bar{x})}{w(\bar{x})} \frac{\partial w(\bar{x})}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_1^m(\bar{x})}{\partial x^j} \right) \varphi_1^i(\bar{x}) - \varphi_1^m(\bar{x}) \varphi_4(\bar{x}) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (6)$$

При $A_2^i(\bar{x}) \equiv 0$ усредненное движение описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^i}{dt} &= \varepsilon \varphi_2^i(\bar{x}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= w(\bar{x}) + \varepsilon \varphi_3(\bar{x}) \end{aligned} \quad (7)$$

с начальными условиями (5). Решение x , включающее колебания, находится по формуле (3).

Остановимся на примере МЦР с резонатором Фабри—Перо, ось которого параллельна статическому H_0 -плюю. Используя метод вариации произвольных постоянных, аналогично тому, как это сделано, например, в [3], для электронов, колеблющихся в статическом поле $H_0 = \{0, 0, H_0\}$ с частотой $\omega_c = eH_0/mc$ и высокочастотном поле с постоянной амплитудой $E_x = E_0 \sin(\omega t) \sin(\omega z/c)$, $H_y = E_0 \cos(\omega t) \cos(\omega z/c)$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_t &= -\frac{p}{4\beta_z} \{(1 - \beta_t^2 - \beta_z) [\sin \theta^+ - \sin(\theta^+ + 2\psi)] - (1 - \beta_t^2 + \beta_z) \times \\ &\quad \times [\sin \theta^- - \sin(\theta^- + 2\psi)]\} \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\beta}_z &= -\frac{p\beta_t}{4\beta_z} \{(1 - \beta_z) [\sin \theta^+ - \sin(\theta^+ + 2\psi)] + (1 + \beta_z) \times \\ &\quad \times [\sin \theta^- - \sin(\theta^- + 2\psi)]\} \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\theta}^+ &= -\frac{p}{4\beta_z \beta_t} \{(1 - \beta_z) [\cos \theta^+ + \cos(\theta^+ + 2\psi)] - (1 + \beta_z) \times \\ &\quad \times [\cos \theta^- + \cos(\theta^- + 2\psi)]\} \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2} + \frac{\sigma - 1}{\beta_z} \frac{\sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}}{\sqrt{1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2}} + \\ &\quad + \frac{1 - \beta_z}{\beta_z}, \\ \dot{\theta}^- &= \dot{\theta}^+ + 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь выделены фазы

$$\begin{aligned} \theta^+ &= \omega t - \frac{\omega}{c} z - \psi, \\ \theta^- &= \omega t + \frac{\omega}{c} z - \psi, \\ \psi &= \omega_c t + \varphi, \end{aligned} \quad (9)$$

а также использованы обозначения: $p = eE_0/(m_0 \omega c)$ — параметр поля, $\sigma = (\omega - \omega_c)/\omega$ — относительнаястройка, $\beta_t = v_t/c$, $\beta_z = v_z/c$ — относительные вращательная и поступательная скорости электрона, $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$, $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ — относительные скорости в момент влета электрона в резонатор, φ — поправка к невозмущенному углу поворота. Гочкой в (8) и далее обозначено дифференцирование по $\omega z/c$.

Из (8) и (9) получаем оценки

$$\frac{d\theta^+}{\omega_c dt} \approx \frac{\omega(1 - \beta_{||}) - \omega_c}{\omega_c}, \quad \frac{d\theta^-}{\omega_c dt} \approx \frac{\omega(1 + \beta_{||}) - \omega_c}{\omega_c},$$

$$\frac{d\theta^-}{\frac{dt}{d\theta^+}} \approx \frac{\sigma + \beta_{||}}{\sigma - \beta_{||}} = R,$$

которые показывают, что при синхронизме с прямой волной ($\omega \approx \omega_c/(1 - \beta_{||})$) $d\theta^+/(d\theta^-) \approx 0$, $d\theta^-/(d\theta^+) \approx 2\beta_{||}$, при синхронизме с обратной волной ($\omega \approx \omega_c/(1 + \beta_{||})$) $|d\theta^+/(d\theta^-)| \approx 2\beta_{||}$, $d\theta^-/(d\theta^+) \approx 0$. Таким образом, в случае $\beta_{||} \ll 1$ справедливо усреднение в уравнениях (8) по ψ :

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_t &= -\frac{p}{4\beta_z} [(1 - \beta_t^2 - \beta_z) \sin \theta^+ - (1 - \beta_t^2 + \beta_z) \sin \theta^-] \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\beta}_z &= -\frac{p\beta_t}{4\beta_z} [(1 - \beta_z) \sin \theta^+ + (1 + \beta_z) \sin \theta^-] \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\theta}^+ &= -\frac{p}{4\beta_t\beta_z} [(1 - \beta_z) \cos \theta^+ - (1 + \beta_z) \cos \theta^-] \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2} + \\ &\quad + \frac{\sigma - 1}{\beta_z} \frac{\sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}}{\sqrt{1 - \beta_\perp^2 - \beta_{||}^2}} + \frac{1 - \beta_z}{\beta_z}, \\ \dot{\theta}^- &= \dot{\theta}^+ + 2,\end{aligned}\tag{10}$$

причем раздельному взаимодействию соответствуют уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_t &= \mp \frac{p}{4\beta_z} (1 - \beta_t^2 \mp \beta_z) \sin \theta^\pm \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\beta}_z &= -\frac{p\beta_t}{4\beta_z} (1 \mp \beta_z) \sin \theta^\pm \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}, \\ \dot{\theta}^\pm &= \mp \frac{p}{4\beta_t\beta_z} (1 \mp \beta_z) \cos \theta^\pm \sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2} + \frac{\sigma - 1}{\beta_z} \times \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1 - \beta_t^2 - \beta_z^2}}{\sqrt{1 - \beta_\perp^2 - \beta_{||}^2}} + \frac{1 \mp \beta_z}{\beta_z}.\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь верхний знак относится к прямой волне (θ^+ — медленная фаза), нижний — к обратной волне (θ^- — медленная фаза).

При $p, p/\beta_{||}, p/\beta_\perp \ll 1$, $|\sigma| \sim \beta_{||}$, $\beta_\perp < 1$ система (10) имеет форму (1). В уравнениях (10) $m = 3$, $x = (\beta_t, \beta_z, \theta^\pm)$, $y = \theta^\mp$, $x_0 = (\beta_\perp, \beta_{||}, \theta_0)$, $y_0 = \theta_0$.

Как показывают расчеты на ЭВМ, решение уравнений (10) с необходимой точностью нельзя заменить решением уравнений раздельного взаимодействия (11), в том числе и для $z/\lambda \gg 1$. Погрешность особенно велика, когда приходится вычислять величину, зависящую от решений нескольких систем (10), например, при подсчете КПД электронного потока η .

Рис. 1, 2 иллюстрируют сказанное. Все уравнения решались методом Милна на ЭВМ БЭСМ-4. Начальный отрезок находился методом последовательных приближений. Для уравнений (10) $A_2^i \equiv 0$. Значит, решение x системы (10) в виде (3) находится из уравнений (7) с корректированными начальными условиями (5).

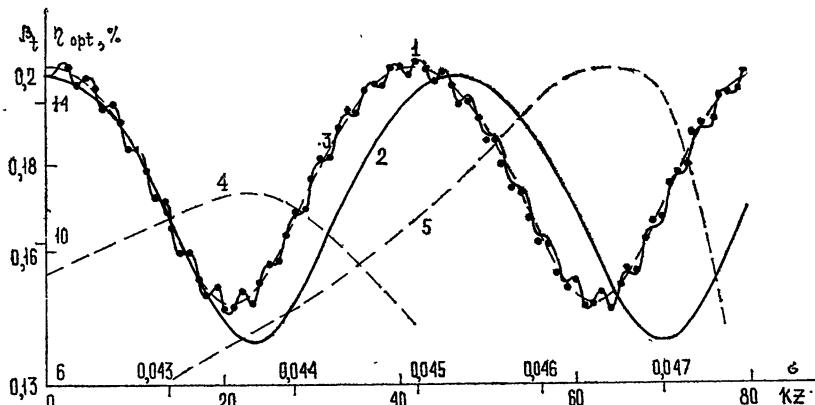


Рис. 1. Зависимость $\beta_t = \beta_t(\omega z/c)$ ($p = 8 \cdot 10^{-4}$, $\beta_{\perp} = 0,2$, $R = 17,67$, $\sigma = 0,056$, $\beta_{\parallel} = 0,05$, $\theta_0 = 0$):
 1—решение исходных неукороченных уравнений движения, 2—уравнений (11) с начальными условиями x_0 , 3—уравнений (11) с начальными условиями (5), точки—решение в виде (3) с начальными условиями (5). Зависимость $\eta_{\text{opt}} = \eta(\sigma)$ ($p = 8 \cdot 10^{-4}$), 4—КПД нераздельного взаимодействия, 5—КПД раздельного взаимодействия.

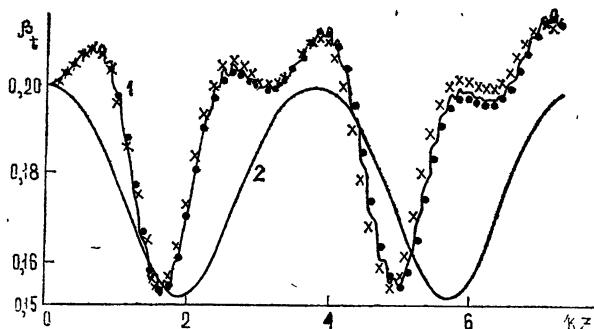


Рис. 2. Зависимость $\beta_t = \beta_t(\omega z/c)$ ($p = 8 \cdot 10^{-3}$, $\beta_{\perp} = 0,2$, $R = 2,3$, $\sigma = 0,125$, $\beta_{\parallel} = 0,05$, $\theta_0 = 0$).

Кривые 1, 2, точки—то же, что и на рис. 1; кресты—решение уравнений (10) с начальными условиями x_0 (на рис. 1 это решение с точностью, лучшей, чем 10^{-3} , совпадает с кривой 1).

При $|R| \gg 1$, если $\sigma > 0$, и при $|R| \ll 1$, если $\sigma < 0$, амплитуда колебаний, вызванных воздействием на электроны нерезонансной силы, значительно меньше амплитуды резонансных колебаний. В этом случае решение x системы (10) можно приблизить решением x уравнений раздельного движения (11) с начальными условиями в виде (5).

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Крейну и А. Ф. Курину за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, изд. МГУ, М., 1971.
- 2 Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, изд. Наука, М., 1969
- 3 Г. Н. Рапопорт, А. К. Немак, В. А. Жураховский, Радиотехника и электроника, 12, № 4, 633 (1967).

Воронежский лесотехнический институт

Поступила в редакцию
27 мая 1975 г

ON THE SECOND APPROXIMATION OF THE AVERAGING METHOD IN THE ELECTRON MASER THEORY

G. A. Kurina

The nonlinear differential equations with a single fast phase which describe electron oscillations in masers are considered in the framework of the second approximation of the averaging method. By the example of the cyclotron resonance maser with Fabry—Perot resonator which axis is parallel to the static magnetic field, it is shown that the nonresonant wave at any interaction length is to be taken into account. This account is realized by using the second approximation of the averaging method.

УДК 621.372.821.1

САМОУСКОРЕНИЕ ПРИ УДАРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ СИСТЕМЫ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ ИНТЕНСИВНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

Н. Н. Насонов, А. М. Шендерович

Теоретически исследовано ударное возбуждение электронным пучком замедляющей системы с полосковыми линиями. Для случая плоского замедляющего волновода (двумерная задача) выяснены условия возбуждения в полосковых линиях низкочастотных ТЕМ-волн. Для различных конфигураций волновода исследовано влияние на возбуждение отверстий для пролета пучка и взаимного расположения полосковых линий и пучка. Показано, что возбуждаемые электромагнитные волны можно использовать для эффективного перераспределения энергии частиц пучка. Исследована трехмерная задача о возбуждении электронным пучком системы полосковых линий конечной ширины.

1. Одним из возможных методов самоускорения (автоускорения) [1] интенсивных электронных пучков является возбуждение ускоряющего вихревого электрического поля при прерывании пучка, взаимодействующего с резонансными системами [2-4].

В качестве одной из таких систем в [3] предложено использовать закороченную с одного конца полосковую линию (рис. 1). В этом методе (процесс аналогичен в случае любых резонансных систем) пучок с длинным передним фронтом (для уменьшения возникающего тормоз-

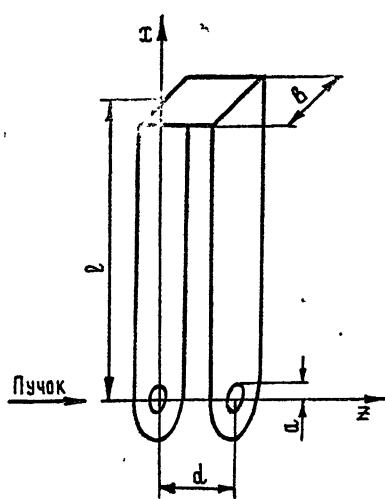


Рис. 1.

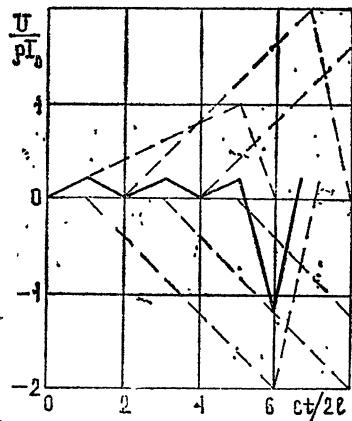


Рис. 2. $\rho = 4\pi/bc$ — волновое сопротивление полосковой линии (пунктир — падающие и отраженные волны, сплошная линия — результирующее напряжение на линии).

ящего напряжения) и коротким задним фронтом, пролетая через отверстия в пластинках, возбуждает в линии электромагнитные волны; при этом часть энергии частиц, расположенных на переднем фронте

пучка, накапливается в виде энергии магнитного поля волн. При обрывании пучка возникает индукционное электрическое поле, ускоряющее частицы, расположенные на заднем фронте (см. ниже рис. 2).

Поскольку фронты реальных интенсивных электронных пучков много длиннее расстояния между пластинами линии (d — порядка единиц сантиметров), то частотный спектр тока пучка практически ограничен следующим условием:

$$\omega \ll \frac{\pi \beta c}{d}. \quad (1)$$

Здесь $\beta = v/c$, v — скорость пучка. При этом в линии возбуждаются только бездисперсионные ТЕМ-волны с амплитудой, пропорциональной току пучка $J(t)$, и напряжение на линии в месте пролета пучка будет, очевидно, определяться суммой бегущих и отраженных от закороченного конца линии волн:

$$\frac{U}{d} = -\frac{4\pi}{bc} \left[J(t) - 2J\left(t - \frac{2l}{c}\right) + 2J\left(t - \frac{4l}{c}\right) - \dots \right]. \quad (2)$$

Из (2) следует, что, выбирая импульс тока пучка с длительностью заднего фронта порядка удвоенного времени пробега волны по линии ($\tau_{зад} \sim 2l/c$) и длинным передним фронтом ($\tau_{фр} \gg 2l/c$), можно получить значительную величину ускоряющего напряжения на заднем фронте ($E \equiv \frac{U}{d} = \frac{4\pi}{bc} J_0$, J_0 — амплитуда тока пучка); при этом тормозящее напряжение на переднем фронте гасится за счет благоприятной интерференции последовательных волн. Зависимость E от времени в случае пилообразного импульса тока пучка приведена на рис. 2. Легко видеть, что при достаточно длинном переднем фронте ($\tau_{фр} \gg 2l/c$) усредненное значение тормозящего напряжения дается выражением

$$E \approx -\frac{4\pi}{bc} \frac{\partial J}{\partial t} \frac{2l}{c}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что величину тормозящего напряжения можно регулировать, меняя длину линии l .

Величина всплеска ускоряющего напряжения может быть значительной, например, при $J_0 = 10 \text{ кA}$, $b = 6 \text{ см}$ имеем $E_{\max} \approx 600 \text{ кВ/см}$, что существенно превышает возможности резонаторов других типов [1, 3]; поэтому представляется весьма интересным исследовать случай последовательности линий, когда энергия ускоряемых частиц наращивается от линии к линии. Рассмотрим вначале самоускорение электронного пучка в плоском замедляющем волноводе.

2. Пусть пучок электронов движется в направлении z в пролетном пространстве плоского замедляющего волновода, изображенного на рис. 3.

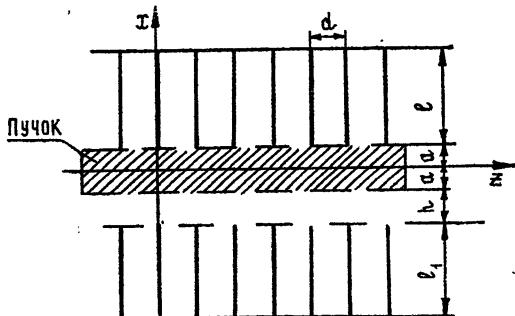


Рис. 3.

Как хорошо известно [5], решения уравнений Максвелла в пролетном пространстве представляются в общем случае суммой простран-

ственных гармоник Флока с продольным волновым вектором $k_{zn} = \frac{\omega}{v} + \frac{2\pi}{d}n$, а в пространстве между двумя любыми диафрагмами суммой TEM- и TM-волн с вектором $k_{xm} = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2}{d^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}$.

В случае (1), согласно [6, 7], легко получить, используя приближенное равенство $\int_0^d \exp(ik_{zn}z)dz \approx \int_0^d \exp\left(-\frac{2\pi in}{d}z\right)dz = 0$ при $n \neq 0$ (усредненно-импедансное приближение), следующее выражение для фурье-образа продольного электрического поля в области пучка:

$$\begin{aligned} E_{\omega z} = & -\frac{4\pi}{i\omega} j_{\omega} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \{ 1 - [\Psi_{\omega} - \psi_{\omega}(a, l)] \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + [F_{\omega} - \varphi_{\omega}(a, l)] \operatorname{sh} \lambda x [F_{\omega} \psi_{\omega}(a, l) + \Psi_{\omega} \varphi_{\omega}(a, l)]^{-1} \}, \\ F_{\omega} = & \operatorname{ch} \lambda a - T_{\omega} \operatorname{sh} \lambda a, \\ T_{\omega} = & \frac{\varphi_{\omega}(a + h, l_1) \operatorname{sh} \lambda a - \psi_{\omega}(a + h, l_1) \operatorname{ch} \lambda a}{\varphi_{\omega}(a + h, l_1) \operatorname{ch} \lambda a - \psi_{\omega}(a + h, l_1) \operatorname{sh} \lambda a}, \\ \Psi_{\omega} = & \operatorname{sh} \lambda a - T_{\omega} \operatorname{ch} \lambda a, \\ \varphi_{\omega}(a, l) = & \operatorname{ch} \lambda a - \beta \gamma \operatorname{sign}(\omega) \frac{\omega l}{c} \operatorname{sh} \lambda a, \\ \psi_{\omega}(a, l) = & \operatorname{sh} \lambda a - \beta \gamma \operatorname{sign}(\omega) \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c} \operatorname{ch} \lambda a, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda = |\omega|/v\gamma$. Более точные расчеты с учетом членов с $n = -1; 0; 1$ и $m = 0; 1; 2$ дают поправку к (4) порядка $(\omega d/\pi v)^2 \ll 1$.

Легко видеть, что при $\frac{|\omega|}{v\gamma}(a + h) \ll 1$ ($\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$) поле в пролетном пространстве волновода не зависит от распределения плотности тока пучка по x ; при этом (4) в случае $l = l_1$ принимает вид

$$E_{\omega z} = \frac{2\pi}{ic} J_{\omega} \exp\left(-i \frac{\omega}{v} z\right) \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c}, \quad (5)$$

где J_{ω} — фурье-образ линейной плотности тока пучка вдоль оси y . При совершении обратного преобразования Фурье в (5) методом вычетов для E_z получаем представление в виде дискретного набора волн, синхронных с пучком. Замечая, что $\operatorname{tg}(\omega l/c)$ можно представить в виде $-i \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{2i\omega l}{c}\right) + 2 \exp\left(-\frac{4i\omega l}{c}\right) - \dots \right]$, из (5) легко получить формулу, отличающуюся от (2) только множителем $1/2$, наличие которого объясняется параллельным включением линий, расположенных по разные стороны пучка.

3. Для выяснения возможности увеличения действующего на электронами поля рассмотрим случай, когда диафрагмы в волноводе расположены только с одной стороны пучка (т. е. $l_1 = 0$ на рис. 3). При этом для $E_{\omega z}$ в области пучка ($|x| < a$) получаем из (4) выражение

$$E_{\omega z} = -\frac{4\pi}{c} J_{\omega} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \frac{\frac{\operatorname{th} \lambda h}{\operatorname{th} \lambda h + i\beta\gamma \operatorname{sign}(\omega)} \left(1 - e^{-\frac{2i\omega l}{c}}\right)}{1 + \frac{\operatorname{th} \lambda h - i\beta\gamma \operatorname{sign}(\omega)}{\operatorname{th} \lambda h + i\beta\gamma \operatorname{sign}(\omega)} e^{-\frac{2i\omega l}{c}}} . \quad (6)$$

Как следует из (6), в полосковых линиях не возбуждаются бегущие волны, если выполнено условие $\operatorname{th} \lambda h \ll \beta\gamma$.

Предположим, что нижняя стенка волновода достаточно удалена, тогда для нерелятивистских скоростей пучка ($\omega d/\pi c \ll \beta \ll 1$) получаем из (6)

$$E_{\omega z} = -\frac{4\pi}{c} J_{\omega} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \frac{1 - \exp\left(-\frac{2i\omega l}{c}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2i\omega l}{c}\right)}, \quad (7)$$

откуда непосредственно следует формула (2). Таким образом, в этом случае действительно можно удвоить поле по сравнению с (5), однако в случае больших скоростей выражение для $E_{\omega z}$ принимает совершенно иной вид:

$$E_{\omega z} = \frac{4\pi}{c\gamma^2} J_{\omega} e^{-i\frac{\omega}{v}z} (1 - i\beta\gamma \operatorname{sign}(\omega)), \quad (8)$$

т. е. при переходе к релятивистским энергиям электронного пучка возбуждаемое поле существенно ослабляется.

Результаты (7) и (8) легко интерпретировать на основе решенной в [8, 9] двумерной задачи дифракции ТЕМ-волн на открытом конце периодической структуры, образованной полуограниченными полосковыми линиями, при синфазном возбуждении. При возбуждении ТЕМ-волн пучком заряженных частиц (как в настоящей работе) сдвиг во времени между фронтами распространяющихся в любых соседних линиях волн равен $t_0 = d/v > d/c$. При этом коэффициент отражения для падающих волн в случае (1) можно, используя результаты [8], записать в виде

$$K(\omega) = \left(1 - \frac{2v^2}{c^2}\right) - \frac{2iv\sqrt{1-v^2/c^2}}{c} \operatorname{sign}(\omega). \quad (9)$$

Как следует из (9), при $\frac{\omega d}{\pi c} \ll \beta \ll 1$ $K(\omega) \rightarrow 1$, т. е. отраженная волна имеет знак падающей; это является, очевидно, предельным переходом к случаю одиночной линии, что и объясняет (7). При $\beta \approx 1$ $K(\omega) \rightarrow -1$, т. е. открытый конец системы действует как закороченный, что легко понять из простых радиотехнических рассуждений. Таким образом, и результат (8) находит простое объяснение.

Исследованная двумерная модель не учитывает краевых эффектов, возникающих в реальной конструкции с полосковыми линиями конечной ширины. Для выяснения влияния этих эффектов в следующем

разделе рассматривается трехмерная модель волновода с диафрагмами конечной ширины.

4. Пусть в области диафрагм замедляющего волновода, схема которого изображена на рис. 4, пролетает в направлении z электронный пучок с плотностью тока

$$j_x = j_y = 0, \quad j_z = \frac{J(t - z/v)}{2b} \Phi(x) \equiv J \left(t - \frac{z}{v} \right) \Phi(x), \quad (10)$$

$$\int_{-l}^l \Phi(x) dx = 1.$$

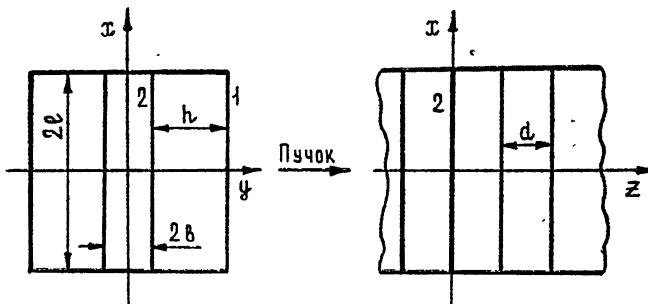


Рис. 4. 1 — корпус волновода, 2 — диафрагмы.

Решение уравнений Максвелла ищем путем разложения в интеграл Фурье по времени и ряд Фурье по x . С учетом (1) и симметричных условий симметрии можно получить для $E_{\omega z}$ в области диафрагм следующее выражение:

$$E_{\omega z} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos k_n x \frac{\int_l^l j_{\omega}(x) \cos(k_n x) dx}{k_n^2 - \omega^2/c^2} \times \\ \times \left\{ \frac{2\pi i \omega e^{-i \frac{\omega}{v} z}}{v^2 \gamma^2 l} \frac{\nu_n^2}{\alpha_n^2} + \frac{2\pi k_n^2}{vl \alpha_n^2} \frac{\nu_n}{\sinh \nu_n d} [\cosh(\nu_n d) e^{-i \frac{\omega}{v} d} - \cosh \nu_n (d - z)] - \right. \\ \left. - \frac{2\pi v}{c^2 l} \frac{\frac{1}{d} (e^{-i \frac{\omega}{v} d} - 1)}{\cosh \nu_n b + \frac{\alpha_n}{\nu_n} \sinh \nu_n b \tanh \alpha_n h} \right\}, \quad (11)$$

$$\text{где } k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}, \quad \nu_n^2 = k_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \alpha_n^2 = k_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2 \gamma^2}.$$

Обратное преобразование Фурье для (11) будем проводить методом вычетов. Заметим, что $E_{\omega z}$ имеет простые полюсы, определяемые из уравнений $\nu_n^2 = 0$, $\alpha_n^2 = 0$, $\nu_n/\alpha_n + \tanh(\alpha_n h) \tanh(\nu_n b) = 0$, причем полюсы в точках $\omega_n = \pm ck_n$ соответствуют главной части возбуждаемого поля волнового типа (которое нас будет интересовать в дальнейшем), полюсы в точках $\omega_n = \pm iv\gamma k_n$ (полюсы в точках $\omega_n = -iv\gamma k_n$ не дают

вклада в возбуждаемое поле) соответствуют якулоновским полям пучка, а полюсы, определяемые из третьего уравнения, характеризуют тонкую структуру распределения поля по оси y .

Вычисляя вычеты, имеем для основного волнового поля

$$E_z^0 = -\frac{\pi}{vl} \sum_{n=0}^{\infty} \cos k_n x \frac{\operatorname{th}\left(\frac{ck_n h}{v}\right) \int_{-l}^l \Phi(x) \cos(k_n x) dx}{1 + \frac{ck_n b}{v} \operatorname{th}\left(\frac{ck_n h}{v}\right)} \times \\ \times \int_0^t J(t') \cos[k_n c(t-t')] ck_n dt'. \quad (12)$$

Пусть $\operatorname{th}\left(\frac{ck_n h}{v}\right) = 1$, $\Phi(x) = \delta(x)$, т. е. боковые стенки достаточно удалены, а размер пучка по x пренебрежимо мал, тогда, как легко видеть из (12), при выполнении условия

$$b > \frac{2\beta l}{\pi} \quad (13)$$

краевыми эффектами можно пренебречь, и выражение (12) принимает при $t - t' < 2l/c$ (т. е. до прихода первой отраженной от корпуса волновода волны) вид

$$E_z^0 = -\frac{2\pi}{l} \int_0^t dl' J(t') \sum_{n=0}^{\infty} \cos(k_n x) \cos k_n c(t-t') = -\frac{2\pi}{c} J\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (14)$$

совпадающий с видом отражения для E_z в двумерном случае.

При невыполнении (13), выделяя из (12) слагаемые вида (14), получаем для поля, вызванного краевыми эффектами, выражение

$$E_z^1 = \frac{2\pi}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos k_n x}{1 + ck_n b/v} \int_0^t J(t') \cos k_n c(t-t') dt'. \quad (15)$$

В интервале времени $t - t' < 2l/c$ в (15) можно перейти к пределу $l \rightarrow \infty$, при этом простые вычисления дают

$$E_z^1 = -\frac{2\pi}{c} \int_0^{t-x/c} J(t') \left[\sin \frac{v}{b} (\xi - t') \sin \frac{v}{b} (\xi - t') + \right. \\ \left. + \cos \frac{v}{b} (\xi - t') \operatorname{ci} \frac{v}{b} (\xi - t') \right] \frac{v}{b} dt', \quad (16)$$

где $\xi \equiv t - x/c$, ci и si — интегральные синус и косинус.

Таким образом, в общем случае волновое поле может существенно отличаться от возбуждаемого в двумерном случае.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Н. Казанский, А. В. Кислецов, Л. Н. Лебедев, Атомная энергия, 30, вып. 1 (1971).
- Г. А. Аскарьян, Атомная энергия, № 6, 658 (1959).

3. И А Гришаев, А М Шендерович, ЖТФ, 42, 2409 (1972).
4. Ю А Башмаков, К А Беловинцев, Е Г Бессонов, Я А Ваздик, С М Николаев, П А Черенков, ЖТФ, 43, 1092 (1973).
- 5 Р А Силин, В Т Сazonov, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. E. Chu, W. Hansen, J. Appl. Phys., 18, 996 (1947).
7. А И Ахиезер, Я Б Файнберг, УФН, 10, 3 (1951).
8. Л А Вайнштейн, Теория дифракций и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
9. Р Миттра, С Ли, Аналитические методы теории волноводов, изд. Мир, М, 1974

Поступила в редакцию
15 января 1975 г.,
после доработки
23 октября 1975 г.

SELF-ACCELERATION AT SHOCK EXCITATION OF STRIP LINE SYSTEM BY INTENSIVE ELECTRON BEAM

N. N. Nasonov, A. M. Shenderovich

A shock excitation of a slow-down system with strip lines by an electron beam has been theoretically investigated. For the case of a plane slow-down waveguide (two-dimensional problem) the excitation conditions in strip lines of low-frequency TEM-waves are clarified. The influence on the opening excitation for the beam transit and mutual situation of strip lines and beam is investigated for different waveguide configurations. It is shown that excited electromagnetic waves may be used for effective energy re-distribution of the beam particles. The three-dimensional problem of excitation of finite-width strip line system by an electron beam has been investigated.

УДК 539.293 : 537.525.92

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСИЛЕНИЯ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ *n*-GaAs

З. Ф. Красильник, В. П. Реутов

Выведены приближенные одномерные нелинейные уравнения для волн пространственного заряда в тонких пленках *n*-GaAs с симметричными диэлектрическими покрытиями. Методом усреднения получены «укороченные» уравнения для комплексных амплитуд гармоник монохроматической волны, заданной на входе усилителя. Показано, что характер усиления может быть качественно различным в зависимости от покрытий, окружающих пленку. Найдена форма и спектр волны при насыщении усиления. Обсуждается нестационарное усиление.

Как известно, в кристалле *n*-GaAs, обладающем во внешнем поле отрицательной дифференциальной проводимостью (ОДП), возможно усиление бегущих волн пространственного заряда. Однако усиление плоских волн осуществить практически не удается, поскольку длина усиления должна быть достаточно большой: $l \gg \lambda$ (λ — длина волны), в то же время условие устойчивости относительно генерации доменов требует малости длины образца $-n_0 l < 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ [1] (n_0 — равновесная концентрация электронов). Если использовать тонкие полупроводниковые пленки с диэлектрическими покрытиями, второе ограничение удается обойти благодаря эффекту ослабления пространственного заряда. При этом критерий устойчивости принимает вид $n_0 b < \frac{\epsilon'}{\epsilon_a} \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ [1, 2], где b — толщина проводящего слоя, ϵ' и ϵ_a — диэлектрическая проницаемость покрытия и полупроводника. Линейная теория волн в такого рода двумерных системах неоднократно обсуждалась в различных предположениях [3—5].

В настоящей работе развивается нелинейная теория волн пространственного заряда в тонких (по сравнению с длиной волны) пленках, в которых редукция пространственного заряда связана с малой толщиной пленки, в приближении, позволяющем описывать волну в системе как одномерную. Рассмотрение относится к случаю не слишком большого легирования n_0 , когда амплитуды колебаний продольного поля в режиме насыщения невелики. На основе укороченных уравнений, описывающих эволюцию первоначально синусоидальной волны, обсуждаются различные режимы стационарного и нестационарного нелинейного усиления.

1. Исходные уравнения. Одномерная модель системы. Рассмотрим плоскопараллельную структуру, образованную проводящим слоем *n*-GaAs, в котором поддерживается дрейф электронов, и прилегающими к нему диэлектрическими покрытиями (рис. 1). Будем предполагать, что колебания поля двумерны и статическое электрическое поле в отсутствие волн в полупроводнике постоянно: $E_0 = (-E_0, 0)$ ($E_0 > 0$).

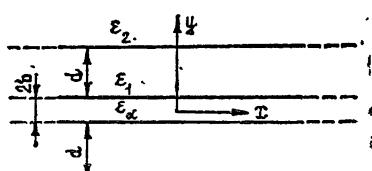


Рис. 1.

Уравнения задачи (1)–(3) [1] и граничные условия на поверхностях раздела слоев [4, 7] (4)–(5 а) записуются в виде

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{en}{\epsilon_a}, \quad E_{x,y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x, y}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} - e \frac{\partial n}{\partial t} = 0; \quad (2)$$

$$j_{x,y} = -e(n + n_0)v_{x,y} + eD \frac{\partial n}{\partial x, y}; \quad (3)$$

$$j_y = 0|_{y=\pm b}, \quad \Phi|_{y=\pm\infty} = 0; \quad (4)$$

$$\epsilon^{(1)}E_y^{(1)} = \epsilon^{(2)}E_y^{(2)}, \quad E_x^{(1)} = E_x^{(2)}; \quad (5)$$

для рассматриваемых далее симметричных распределений поля (Φ, E_x, v_x, j_x — четные функции, E_y, j_y, v_y — нечетные функции y) [7]

$$E_y = 0, \quad j_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (5a)$$

n_0 — равновесная концентрация электронов, n, E, Φ — отклонения концентрации электрического поля и потенциала от равновесных распределений, j — плотность тока, ϵ_a — диэлектрическая проницаемость полупроводника, e — абсолютное значение заряда электрона, D — коэффициент диффузии, v — скорость электронов. Выражение для v в предположении изотропности эффекта Ганна запишем в виде

$$v = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}} v(\mathcal{E}), \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}, \quad (6)$$

где $\mathcal{E} = E_0 + E$.

Из-за сильной редукции пространственного заряда в тонкой пленке переменные поля невелики. Если предположить справедливость соотношений

$$\frac{E_x}{E_0} \ll 1, \quad \frac{E_y}{E_0} \ll 1, \quad (7)$$

можно воспользоваться линейной аппроксимацией $v(\mathcal{E}) = -\mu_x(\mathcal{E} - E_0) + v_0$ ($v_0 = v(E_0)$, $\mu_x = -\left(\frac{\partial v}{\partial \mathcal{E}}\right)_{E_0}$) и, сохраняя главные члены разложений по параметрам (7), записать уравнения движения (6) в виде

$$v_x \approx v_0 + \mu_x E_x - \frac{1}{2}(\mu_x + |\mu_y|) \frac{E_y^2}{E_0}, \quad v_y = \mu_y E_y$$

$$\left(\mu_y = -\frac{v_0}{E_0} \right). \quad (8)$$

Как будет показано ниже, особенностью нелинейного усиления дрейфовых волн в условиях ганновской неустойчивости является быстрое нарастание колебаний плотности заряда до значений $n \sim n_0$, так что волны уже нельзя считать по структуре близкими к волнам линейной задачи. Тем не менее для достаточно тонких пленок, когда нелинейная система (1)–(6) сводится к одномерному описанию, все же удается выделить малые параметры, что упрощает решение задачи.

Решая уравнения Пуассона, внутри слоев ϵ_1 и ϵ_2 с учетом (4) — (5 а), можно отыскать граничные условия для фурье-гармоник потенциала на границе проводящего слоя

$$\left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right)_b = -|k| \epsilon_r(|k|) \Phi_k(b), \quad \Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{-ikx} dk, \quad (9)$$

где ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость. Например, для структуры, изображенной на рис. 1, ϵ_r имеет вид

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_a} \frac{1 + (\epsilon_1/\epsilon_2) \operatorname{th} kd}{(\epsilon_1/\epsilon_2) + \operatorname{th} kd}. \quad (10)$$

Интегрируя (1) по y от 0 до b и используя (5 а), (9), свяжем продольное поле со средней концентрацией:

$$ik \left[\frac{1}{b} \int_0^b E_k dy + \frac{\epsilon_r(|k|)}{b|k|} E_k(b) \right] = \frac{eN_k}{\epsilon_a}, \quad (11)$$

где $N = \frac{1}{b} \int_0^b ndy$, E_k , N_k — фурье-гармоники E_x и N соответственно.

Используя (4), (5 а), (11), несложно свести систему (1) — (3) к двум одномерным уравнениям относительно E_x и N . Когда справедливы допущения об однородности E_x поперек пленки, условие (7) и $v_x = v_0 + \mu_x E_x$ (ср. (8)), получим

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v_0 \frac{\partial N}{\partial x} = -n_0 \mu_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \mu_x \frac{\partial}{\partial x} N E_x; \quad (12)$$

$$ik \left(1 + \frac{\epsilon_r(|k|)}{b|k|} \right) E_k = \frac{eN_k}{\epsilon_a}. \quad (13)$$

Уравнение (12) есть условие неразрывности среднего по толщине пленки заряда. Уравнение (13) отличается от уравнения Пуассона наличием коэффициента редукции пространственного заряда $F_k = 1 + \frac{\epsilon_r}{bk}$ [1].

Обсудим допущения, при которых получены уравнения (12), (13). Неоднородность E_x поперек пленки и величину E_y можно оценить, когда поперечное распределение n также близко к однородному. Представляя n , E_x и E_y из соображений симметрии по y в виде $n \approx n^{(0)}(x, t) + \beta_n y^2$, $E_x \approx E_x^{(0)}(x, t) + \beta_x y^2$, $E_y = \beta_y y$ и решая (1) — (3) совместно с (5 а), (9), находим при $F_k \gg 1$ максимальное значение E_y в пленке — $|E_y|_{\max} \sim en^{(0)}b/\epsilon_a$ — и определяем условия квазиоднородности полей —

$$\frac{(E_x - E_x^{(0)})_k}{E_k} \approx b \epsilon_r k \ll 1, \quad \frac{n - n^{(0)}}{n} \approx \frac{b^2}{\lambda_y^2} \ll 1, \quad F_k \approx \frac{\epsilon_r}{bk} \gg 1, \quad (14)$$

где $\lambda_y = \sqrt{D/\omega_y}$ — поперечная дебаевская длина, $\omega_y = \frac{en^{(0)}}{\epsilon_a} \mu_y$.

Рассмотрим также ограничения на параметры системы, которые накладываются условием (7) и пренебрежением E_y^2 в (8). Для характерных значений амплитуды $\delta E_x \sim 2en_0b/\epsilon_a$ (см. п. 3) получаем:

$$\frac{\delta E_x}{E_0} \sim \frac{2en_0b}{\varepsilon_a E_0} \ll 1, \quad \frac{n^{(0)}}{n_0} \frac{\delta E_x}{E_0} \ll 1, \quad \frac{1}{4} \left(\frac{n^{(0)}}{n_0} \right)^2 \frac{\delta E_x}{E_0} \ll 1. \quad (15)$$

Наиболее жестким из этих неравенств при сильных колебаниях $\left(\frac{n^{(0)}}{n_0} > 1 \right)$ является последнее. Задавая величину бунчировки, ей можно удовлетворить, когда n_0 и b достаточно малы.

2. Укороченные уравнения. После выведения безразмерных переменных

$$f = \frac{N}{N_0}, \quad G = \frac{E_x}{E_*}, \quad \tau = \omega_1 t, \quad \xi = k_1 x, \quad (16)$$

где $E_* = en_0 b / \varepsilon_a \varepsilon_r$, $(k_1) = \omega_1 / v_0$ — характерное волновое число, система (12), (13) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \tau} = -\alpha \frac{\partial G}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} G f, \quad G_k = -i \zeta_k f_k. \quad (17)$$

Здесь $\zeta_k = \frac{|k|}{k} \frac{\varepsilon_r(k_1)}{\varepsilon_r(|k|)}$, $\alpha = \frac{\omega_x b}{v_0 \varepsilon_r(k_1)}$, $\beta = \frac{k_1 D}{v_0}$, $\omega_x = \frac{en_0 \mu_x}{\varepsilon_a}$, причем при

больших коэффициентах редукции $\alpha \ll 1$ — малый параметр (считаем также $\beta \sim \alpha$). Во втором уравнении (17) мы пренебрели поправками порядка $bk/\varepsilon_r \ll 1$, учет которых являлся бы превышением точности используемых уравнений, в которых опущены малые члены, связанные с поперечной неоднородностью E_x .

Решение системы (17) с малым параметром ищем методом усреднения [8] в виде квазипериодической волны с частотой ω_1 :

$$f = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m a_l(\tau, \xi) \exp [il(\tau - \xi)] + \text{к. с.}, \quad (18)$$

где a_l — медленно меняющиеся комплексные амплитуды. Число гармоник m ограничено благодаря фактическому обрезанию спектра из-за действия диффузии на высоких частотах. Условия (14), позволяющие считать пленку тонкой, должны выполняться для всех m гармоник.

Поскольку a_l — медленные функции x , из (17), (18) нетрудно найти выражение для продольного поля:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m b_l e^{il(\tau - \xi)} + \text{к. с.},$$

$$b_l = -i \zeta_l(k_l) a_l + \frac{\partial \zeta_l}{\partial k_l} k_l \frac{\partial a_l}{\partial \xi_l} + \dots, \quad k_l = lk_1. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17) и сохраняя члены главного порядка, получим укороченные уравнения, описывающие эволюцию гармоник нелинейной волны, в виде

$$\frac{\partial a_n}{\partial \tau} + \frac{\partial a_n}{\partial \xi} = \alpha \left(\gamma_n a_n + \sum_{j=1}^{m-n} \alpha_{nj} a_j^* a_{n+j} + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{nj} a_j a_{n-j} \right),$$

$$\gamma_n = n \frac{\varepsilon_r(k_1)}{\varepsilon_r(k_n)} - n^2 g, \quad g = \frac{\varepsilon_r(k_1) k_1 D}{\omega_x b}, \quad (20)$$

$$\alpha_{nj} = \frac{n}{2} \left(\frac{\varepsilon_r(k_1)}{\varepsilon_r(k_{n+j})} - \frac{\varepsilon_r(k_1)}{\varepsilon_r(k_j)} \right), \quad \beta_{nj} = \frac{n}{2} \frac{\varepsilon_r(k_1)}{\varepsilon_r(k_j)}. \quad .$$

При выводе (20) мы пренебрегли изменением статических распределений n, E под действием волн. Не трудно убедиться, что такие изменения дают вклады в (20) более высокого порядка малости, чем взаимодействие гармоник.

3. Эволюция волны, возбуждаемой на границе системы. Рассмотрим стационарное усиление $\left(\frac{\partial a_n}{\partial \tau} = 0\right)$ возбуждаемой на границе монохроматической волны с частотой ω_1 : $a_1(0) = a_{10}$, $a_n(0) = 0$ ($n = 2 \div m$). Как следует из (20), слабая волна ($|a_1| \ll 1$) нарастает вдоль x с линейным инкрементом (ср., например, [14]) $\Gamma_x = \frac{\omega_x b k_1}{v_0 \varepsilon_r(k_1)} - \frac{k_1^2 D}{v_0}$.

Увеличение энергии волны сопровождается генерацией гармоник, взаимодействие которых качественно отличается при разных покрытиях. Проиллюстрируем это на трех примерах.

а) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_a$ либо $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 = \varepsilon_a$ и $k_1 d > 2$, так что $\varepsilon_r(k_n) \approx 1$ и слабо зависит от k_n . Тогда, в рамках используемой модели коэффициенты связи $\alpha_{nj} \approx 0$, $\beta_{nj} \neq 0$, т. е. отсутствует обратная реакция генерируемых гармоник на возбуждающие их. В данном случае ясно, что приближение ограниченного спектра для достаточно больших значений ξ заведомо некорректно. Расширение спектра приводит также к нарушению предположений о попечной однородности поля (14),

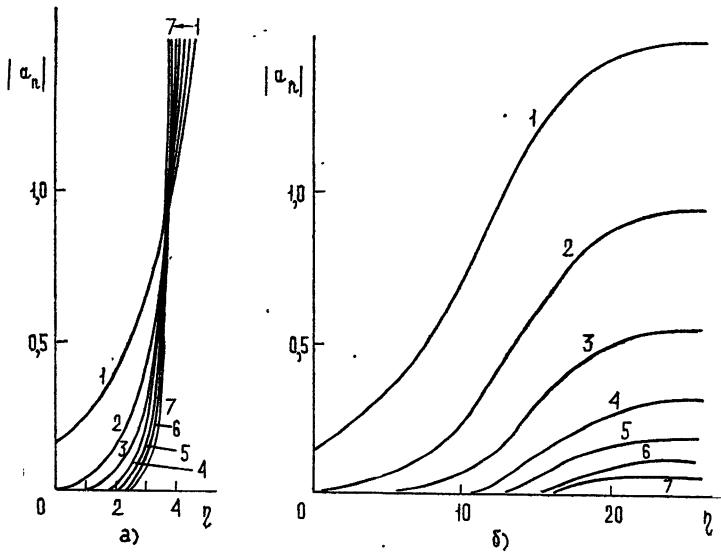


Рис. 2.

(15). Численное решение системы (20) изображено на рис. 2 а. В качестве примера приведем значения физических параметров системы, при которых найденное решение удовлетворяет сделанным предположениям (14), (15) на начальной стадии усиления: $n_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $D = 300 \text{ см}^2/\text{с}$,

$E_0 = 9 \text{ кВ/см}$, $v_0 = 1,34 \cdot 10^7 \text{ см/с}$, $\mu_y = 1490 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$, $\rho_x = 855 \text{ см}^3/\text{В} \cdot \text{с}^2$, $2b = 4 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, $v_1 = \omega_1/2\pi = 0,875 \text{ ГГц}$. При этом $k_1 b = 8,1 \cdot 10^{-3}$, $\alpha \approx 1,9 \cdot 10^{-2}$, $x \approx 0,13 \eta \text{ (см)}$, $b^2/\lambda_y^2(n_0) = 0,028$, $E_* \approx 290 \text{ В/см}$. ($\eta = d\xi$).

б) $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1 = \varepsilon_a$ либо на границе слоя ε_1 имеются металлические покрытия ($\varepsilon_r(k) \approx \operatorname{cth} kd$), и частота волны такова, что k_1 попадает в область быстрого спадания $\varepsilon_r(k)$. В этом случае $\alpha_{nj} > 0$ и генерация высших гармоник приводит к увеличению инкремента волн низших гармоник. Формальные решения (20) при этом обращаются в бесконечность на конечных расстояниях η — взрывное взаимодействие [9-11]. Своеобразие коэффициентов связи, определяющих взаимодействие гармоник в случаях а), б), связано с неравновесным характером системы, содержащей ток электронов в условиях междолинного рассеяния.

Усиление волны на расстояниях от границы, на которых еще имеет физический смысл решение системы (20), отличается от предыдущего случая большими значениями нелинейных инкрементов основной волны и гармоник.

в) $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 = \varepsilon_a$ ($\varepsilon_r \approx \operatorname{th} kd$), причем ω_1 таково, что k_1 находится в области быстрого подъема $\varepsilon_r(k_n)$. При этом $\beta_{nj} > 0$, $\alpha_{nj} < 0$ и возможно насыщение усиления, за счет генерации высших гармоник. Спектр волны эффективно обрезается, если уже на частоте второй гармоники диффузионные потери превышают линейное усиление, связанное с ОДП ($\gamma_n < 0$, $n > 2$)**.

Решение (20) при $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 12,5$, $g = 0,83$, $\varepsilon_r(k_1) = 0,558$, $a_{10} = 0,15$ изображено на рис. 2 б. Видно, что генерация гармоник приводит к насыщению усиления и образованию стационарной волны. На рис. 3 изображена форма установившихся профилей продольного поля и концентрации, вычисленных по формулам (18), (19).

Приведем пример физических параметров системы, при которых построенное решение имеет смысл и удовлетворяет ограничениям (14), (15): $\varepsilon_1 = 12,5 \varepsilon_0$ (диэлектрический n -GaAs), $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ (воздух), $n_0 \approx 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $v_1 = \omega_1/2\pi = 1,31 \text{ ГГц}$; остальные параметры те же, что в случае 3 а. При этом $k_1 b = 0,012 \ll 1$, $k_1 d = 0,55$, $\alpha = 1,65 \cdot 10^{-2}$, $E_* = 260 \text{ В/см}$, $b^2/\lambda_y^2(n_0) = 0,014$, $x = 0,1 \eta \text{ (см)}$. Поскольку соотношение фаз гармоник E_x таково, что их сложение изменяет, главным образом, крутизну профиля, амплитуду поля достаточно точно можно оценить по семи гармоникам (рис. 3): $\delta E_x \sim 2E_* \sim \frac{2en_0b}{\varepsilon_a \varepsilon_r(k_1)}$.

Обсудим кратко нестационарные решения (20). Пусть граничные условия имеют вид модулированного квазигармонического колебания: $a_1(0, \tau) = a_{10}(\tau)$. После замены переменных $\xi' = \xi$, $\tau' = \tau - \xi$, при которой $\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi'}$, система (20) сводится к системе уравнений в обыкновенных производных, совпадающей при фиксированном τ'

* При вычислениях использована аппроксимация $v(\xi)$, предложенная в [6].

** При этом γ_1 должно быть все же велико по сравнению с поправками к инкременту усиления, вызванными неоднородностью поля: $\gamma_1 \gg \varepsilon_r(k_1) b k_1$ (см. (14)).

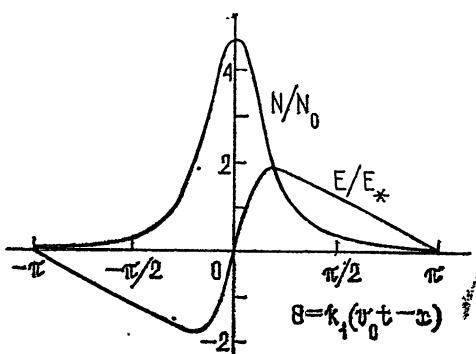


Рис. 3.

с рассмотренной выше стационарной. При этом временной профиль в сечении ξ в системе отсчета (ξ', τ') , в которой время запаздывает по отношению к τ на время распространения волны до сечения ξ , получается интегрированием уравнений стационарной задачи для каждой точки профиля $a_{10}(\tau)$. Например, характер изменений амплитудно-модулированного импульсного сигнала (a_{10} — действительное), заданного на границе, при наличии насыщения в стационарной задаче будет таким: формирование несинусоидального заполнения временной огибающей (рис. 3) будет сопровождаться уплощением вершины импульса.

Проведенный в работе анализ распространения волн пространственного заряда представляется нам полезным при конструировании полупроводникового прибора нового типа — транзистора бегущей волны (ТБВ) с разделенными в пространстве входным и выходным устройствами. Активным элементом в ТБВ является длинная тонкая полупроводниковая пленка.

Дополнение к известной линейной теории ТБВ в нашей работе рассмотрено нелинейное усиление входного монохроматического сигнала, приводящее к генерации гармоник. Процесс стабилизации усиления существенным образом зависит от покрытий, окружающих пленку, и частоты волны на входе. Предполагая жесткость границы электронного потока, однородность поля E_x поперек пленки, а также достаточно малый уровень легирования n_0 , удалось описать стабилизацию усиления и определить форму волны, если $k_1 = \omega/v_0$ попадает в интервал резкого нарастания диэлектрической проницаемости.

Показано, что в ряде случаев из-за «взрывного» характера взаимодействия гармоник следует ожидать широкий спектр волны в режиме насыщения. Соответственно ТБВ в этом режиме мог бы работать как генератор синхронизованных гармоник.

Авторы призывают А. В. Гапонову, М. И. Рабиновичу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Кэррол, СВЧ генераторы на горячих электронах, изд. Мир, М., 1972.
2. H. Dean, J. Matarese, Proc. IEEE, **60**, 1486 (1972).
3. G. S. Kino, IEEE Trans., Electron. Dev., ED-17, 178 (1970).
4. W. Heinle, Electron. Lett., **7**, 245 (1971).
5. H. Dean, B. Robinson, IEEE Trans., Electron. Dev., ED-17, 61 (1974).
6. I. G. Ruch, G. S. Kino, Phys. Rev., **174**, 921 (1969).
7. K. Blotekjaer, IEEE Trans., Electron. Dev., ED-17, 38 (1970).
8. А. В. Гапонов, Л. А Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **13**, № 2, 163 (1970).
9. М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **16**, № 6, 815 (1973).
10. З. Ф. Красильник, М. И. Рабинович, ФТП, **9**, 113 (1975).
11. М. И. Рабинович, В. П. Реутов, А. А. Цветков, ЖЭТФ, **67**, 525 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
29 мая 1975 г.

THE NONLINEAR AMPLIFICATION THEORY SPATIAL CHARGE WAVES IN THIN FILMS *n*-GaAs

Z. F. Krasil'nik, V. P. Reutov

Approximate one-dimensional nonlinear equations are deduced for waves of a spatial charge in thin films *n*-GaAs with symmetric dielectric coatings. Abbreviated equations are obtained by the averaging method for the complex harmonics of a monochromatic wave at the amplifier input. It is shown that the amplification may be qualitatively different depending on coatings surrounding the film. The form and spectrum of a wave when the amplification is saturated is found. The nonstationary amplification is discussed.

УДК 621.383.52 : 621.383.53

КРИВЫЕ РАВНОЙ КООРДИНАТНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ФОТОДИОДОВ И ФОТОТРАНЗИСТОРОВ

Г. Н. Гиматутдинова, Г. А. Степанова, В. А. Баранов,
Ф. Ф. Юмакулова

В статье изложены результаты исследования координатной чувствительности $S_0(x, y)$ девяти типов новых промышленных фотодиодов и фототранзисторов. Графически представлено изменение $S_0(l)$ координатной чувствительности вдоль диаметра освещаемой поверхности. Показано, что у фотодиодов зависимость $S_0(l)$ носит синусоидальный характер, максимум которого соответствует центру освещаемой поверхности, а у фототранзисторов зависимость $S_0(l)$ — еще более сложной формы. Получены кривые равной координатной чувствительности и определены эффективные площади $A_{\text{эфф}}$, где чувствительность $S_0(x, y) = 90\% S_{0, \max}(x, y)$. Результаты рекомендуются к использованию при разработках схем слежения и наведения, а также других схем автоматики.

В фотоэлектронных автоматических устройствах в качестве преобразователей световой энергии в электрическую используются фотоприемники. При этом на светочувствительную поверхность последних свет от излучателя чаще всего фокусируется в точку. Если точечное изображение излучателя динамично, то при разработке таких устройств необходимо знать кривую равной координатной чувствительности [1, 2], о которой не сообщается в паспорте на фотоприемник и почти нет сведений в литературе. Это снижает качество вышеизложенных устройств и интенсификацию технического внедрения фотоприемников.

Нами исследовалась координатная чувствительность по слою $S_0^*(x, y)$ у ряда типов фотоприемников и определялись кривые равной чувствительности, характеризуемые процентным отношением $S_0(x, y)$ к максимальной чувствительности $S_{0, \max}$, из которых, в свою очередь, определялись эффективные площади приемника $A_{\text{эфф}}^*$. Очевидно, особый интерес должны представлять результаты исследования высокочувствительных промышленных фотоприемников последних лет выпуска — фотодиодов и фототранзисторов, которые мы предлагаем для шести типов фотодиодов (1690В, КФДМ, ФД-3А, ФД-9К, ФД-23К, ФД-10Г) и трех типов фототранзисторов (ФТ-1К, ФТГ-3, ФТГ-5), изготовленных специально, а именно, на светочувствительной поверхности этих фотодиодов у края ее расположен точечный металлический электрод (кроме фотодиода типа ФД-10Г, где он находится на противоположной к свету поверхности), у фототранзисторов типа ФТ-1К он расположен в центре освещаемой поверхности, а у ФТГ-3, ФТГ-5 на ней имеются два электрода (и юмический и выпрямляющий) на некотором расстоянии друг от друга и от края.

Освещаемая поверхность имела форму прямоугольника $1,4 \times 1,4 \text{ мм}^2$ у 1690В, КФДМ, ФД-10К и $1,2 \times 2 \text{ мм}^2$ у ФТГ-3, ФТГ-5, а у остальных — форму круга диаметром $d \approx 1,6 \text{ мм}$ у ФД-3А, ФТ-1К, $d \approx 1,13$

* Координатная чувствительность S_0 определялась по известной формуле [3], а эффективная площадь $A_{\text{эфф}}$ по [4].

у ФД-10Г (А) и $d \approx 5$ мм у ФД-9К. При исследовании стабильное по интенсивности световое пятно диаметром $d \approx 0,15$ мм от излучателя типа А с помощью объектива создавалось на светочувствительной поверхности приборов, которые перемещались на каждые 0,15 мм относительно излучателя микрометрическим винтом с шагом 2,5 мк*.

Координатная чувствительность S_0 определялась в диаметральных направлениях l , отстоящих друг от друга на каждые 45°. Эта зависимость $S_0(l)$ усреднялась сначала из измерений в 6 направлениях для каждого прибора, а затем для 10 штук каждого типа. В результате получили, что координатная чувствительность $S_0(x, y)$ в пределах поверхности указанных приборов одного типа не одинакова по величине и, более того, у разных типов приборов зависимости $S_0(l)$ различны. Так, у фотодиодов типа 1690В, КФДМ, ФД-ЗА, ФД-10Г зависимость $S_0(l)$ синусоидальная (см. рис. 1). Максимальное значение координатной чувствительности $S_{0, \max}$ приходится приблизительно на центр освещаемой поверхности, которое в диаметральных направлениях к ее краям уменьшается и составляет 50% $S_{0, \max}$ на расстоянии $l \approx 0,5 \div 0,62$ мм. У ФД-23К и ФД-9К зависимость $S_0(l)$ имеет вид трапеции (см. рис. 2, где значение $S_{0, \max}$ сохраняется в области центра радиусом $\approx 0,43$ и $\approx 1,3$ мм соответственно, а 50% $S_{0, \max}$ — на расстоянии $l \approx 0,65$ и $l \approx 1,65$ мм).

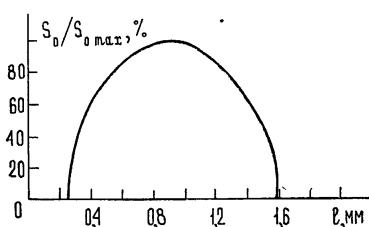


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость координатной чувствительности в диаметральных направлениях освещаемой поверхности для фотодиодов типа КФДМ, 1690В, ФД-ЗА, ФД-10Г.

Рис. 2. Зависимость координатной чувствительности в диаметральных направлениях освещаемой поверхности для фотодиодов типа ФД-9К, ФД-23К.

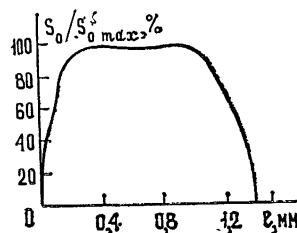


Рис. 2.

Графическая зависимость $S_0(l)$ у фототранзисторов имеет сложную форму. Так, у ФТ-1К $S_0(l)$ имеет два максимума с точкой провала между ними, которой соответствует расположение светового пятна на металлическом электроде (рис. 3). Максимумам кривой соответствуют

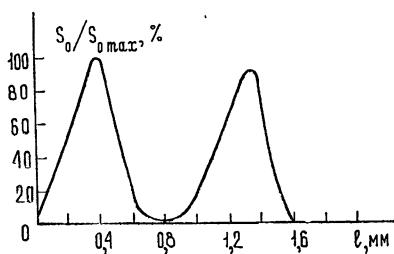


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость координатной чувствительности в диаметральных направлениях освещаемой поверхности для фототранзисторов типа ФТ-1К.

Рис. 4. Зависимость координатной чувствительности в диаметральных направлениях освещаемой поверхности для фототранзисторов типа ФТГ-3, ФТГ-5.

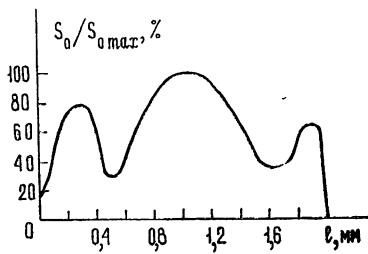


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость координатной чувствительности в диаметральных направлениях освещаемой поверхности для фототранзисторов типа ФТГ-3, ФТГ-5.

* Светочувствительная поверхность приборов устанавливалась в фокальной плоскости микролинзы с точностью $\pm 6\%$.

положения пятна в диаметрально противоположных точках поверхности на расстояниях от центра, равных половине радиуса этой поверхности. При этом спад S_0 относительно $S_{0,\max}$ весьма резкий. У фототранзисторов ФТГ-3 и ФТГ-5 график зависимости $S_0(l)$ имеет три максимума и две точки провала между ними (типа рис. 4). Последние оять-таки соответствовали положению светового пятна на электродах. Наблюдаемая величина S_0 при этом обусловлена большей площадью светового пятна, чем у электродов. $50\% \cdot S_{0,\max}$ на межэлектродной поверхности (центральный график) составляла координатная чувствительность на расстоянии $l \approx 0,45 \text{ mm}$ от точки $S_{0,\max}$.

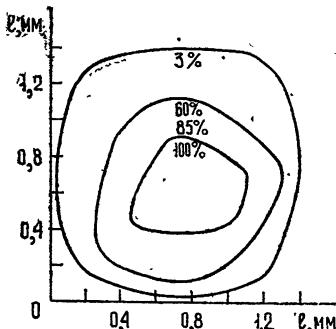


Рис. 5.

Рис. 5. Усредненные для партий фотодиодов кривые равной координатной чувствительности разных процентных отношений к максимальной чувствительности.

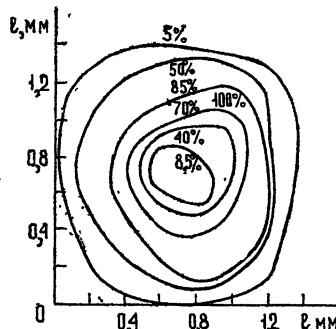


Рис. 6.

Рис. 6. Усредненные для партий фототранзисторов типа ФТ-1К кривые равной координатной чувствительности разных процентных отношений к максимальной чувствительности.

Кривые равной координатной чувствительности, усредненные для партии приборов каждого типа для разных процентных отношений относительно максимальной чувствительности $S_{0,\max}$, представлены на рис. 5—7. Как отмечено на рисунках, у некоторых типов приборов координатная чувствительность принимала значение $S_{0,\max}$ лишь в одной или отдельных точках освещаемой поверхности, а у других—в небольшой области, часто имеющей отличную от круга форму. Следует отметить также, что у приборов всех типов наблюдался разброс $S_{0,\max}$ по величине и месту расположения относительно центра освещаемой поверхности.

Эффективная площадь $A_{\text{эфф}}$ равной координатной чувствительности легко может быть подсчитана с помощью кривых рис. 5—7. В пределах $\approx 10\%$ $A_{\text{эфф}} \approx 0,15 \text{ mm}^2$ для ФТГ-3, ФТГ-5, ФД-ЗА, ФД-10Г, $A_{\text{эфф}} \approx 0,25 \text{ mm}^2$ для 1690В, КФДМ, $A_{\text{эфф}} \approx 0,34 \text{ mm}^2$ для ФД-23К и $A_{\text{эфф}} \approx 5,6 \text{ mm}^2$ для ФД-9К.

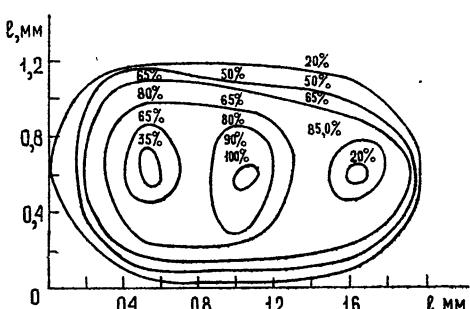


Рис. 7. Усредненные для партии фототранзисторов типа ФТГ-3, ФТГ-5 кривые равной координатной чувствительности разных процентных отношений к максимальной чувствительности.

Анализ результатов исследования позволяет заключить, что кривая равной координатной чувствительности является одним из основных параметров фотоприемников в ряде систем типа слежения. При этом

эффективная площадь, ограниченная этой кривой, определяется свойствами фотоприемника и требуемой точностью показаний системы. В этом плане можно рекомендовать все исследуемые нами приборы и особенно типа ФД-9К, кроме ФТ-1К, где в центре освещаемой поверхности имеется мертвая точка. Более того, синусоидальная зависимость $S_0(l)$ у фотодиодов расширяет область их технического применения из-за того, что координатная чувствительность, соответствующая любой кривой равной чувствительности (кроме 100-процентной), может быть предварительной командой, а величина $S_{0, \max}$ (или момент прохождения через нее) — окончательной.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Павлов, А. И. Черников, Приемники излучения автоматических оптико-электронных приборов, изд. Энергия, М., 1972.
2. H. William Sahn, III, IEEE Intercom. Electr. Opt. Techn., N. Y., 5, № 4 (1973).
3. В. И. Туркулец, Н. П. Удалов, Фотодиоды и фототриоды, Госэнергоиздат, М., 1962.
4. Л. Шоль, И. Марфан, М. Минш, П. Топель, П. Комбет, Приемники инфракрасного излучения, изд. Мир, М., 1969.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию
9 сентября 1975 г.

CURVES OF EQUAL COORDINATE SENSITIVITY OF PHOTODIODES AND PHOTOTRANSISTORS

G. N. Gimatutdinova, G. A. Stepanova, V. A. Baranov, F. F. Yumakulova

The paper sets forth the results of investigation of the coordinate sensitivity $S_0(x, y)$ of nine types of new commercial photodiodes and phototransistors. The change in the coordinate sensitivity $S_0(l)$ along the illuminated surface diameter is graphically shown. It is shown that the photodiode dependence $S_0(l)$ is of sinusoidal character the maximum of which corresponds to the illuminated surface center and the phototransistor dependence $S_0(l)$ has a more-complicated form. The curves of the equal coordinate sensitivity are obtained and the effective areas A_{eff} are determined where the sensitivity is $S_0(x, y) = 90\% S_{0, \max}(x, y)$. The results are recommended to use when designing the tracking and homing schemes, as well as the other automatic schemes.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАЗОВОЙ СРЕДЫ, ОБРАЗУЮЩЕЙСЯ ПРИ ТЛЕЮЩЕМ РАЗРЯДЕ С ПОЛЫМ КАТОДОМ

A. C. Метель, A. I. Настиха

Получены характеристики газовой среды, образующейся в тлеющем разряде с медным полым катодом при давлении гелия $p = 0,05 \text{--} 1,0 \text{ tor}$ и плотности тока на катоде $j = 0,5 \div 2,5 \text{ mA/cm}^2$. Интерферометрическим методом измерены температуры атомов меди T_{Cu} и гелия T_{He} . С уменьшением давления нарушается тепловое равновесие между атомами металла и газа в центре полости. При $p = 0,05 \text{ tor}$ $T_{\text{Cu}} = 7000 \text{ K}$ и на порядок превышает температуру гелия. Концентрация атомов меди n_{Cu} в центре полости увеличивается с ростом тока и уменьшением давления и составляет $n_{\text{Cu}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ при $j = 2,5 \text{ mA/cm}^2$ и $p = 0,05 \text{ tor}$. Обсуждается возможность экстраполяции полученных результатов до величины плотности тока $j \sim 10 \text{ A/cm}^2$.

Создание газовой среды, содержащей пары тугоплавких металлов, является сложной технической задачей. В равновесных условиях получение заметной плотности газовой фазы путем нагревания в вакууме образцов металлов требует высоких температур и предъявляет жесткие требования к аппаратуре.

В настоящей работе рассматриваются характеристики газовой среды, состоящей из атомов металла и инертного газа, образующейся в металлической полости в условиях тлеющего разряда с полым катодом (ТРПК). Эмиссия атомов металла с холодной поверхности осуществляется при этом в результате катодного распыления.

Явление распыления материала катода в условиях ТРПК широко используется в спектроскопии. Известно, что ТРПК при низких давлениях газа является интенсивным источником богатого спектра узких спектральных линий атомов материала катода. Несмотря на это, имеется лишь ограниченное количество данных о составе и параметрах образующейся в катодной полости среды, о зависимости концентрации и температуры атомов металла от параметров разряда и о характере их взаимодействия с атомами инертного газа.

Специфика ТРПК заключается в возможности достижения больших плотностей разрядного тока при величине катодного падения, близкой к нормальному катодному падению потенциала и при сравнительно низком давлении газа. Явление, известное под называнием эффекта полого катода [¹⁻³], обусловлено дополнительной ионизацией атомов в области катодного падения осциллирующими между противоположными участками поверхности катодной полости первичными электронами.

ТРПК характеризуется наличием в полости ярко светящейся области плазмы, отделенной от катода узким темным катодным пространством. Во время разряда поверхность катода бомбардируется нормально направленным потоком ионов с энергиями E_p порядка нескольких сотен электроновольт. Плотность потока нейтральных ато-

мов материала катода j_m с его поверхности в полость пропорциональна плотности тока ионов j_p на катоде:

$$j_m = \theta \frac{j_p}{e}. \quad (1)$$

Коэффициент катодного распыления θ зависит от массы, энергии ионов и материала катода. В ряде случаев для рассматриваемых величин энергии ионов θ может превышать единицу [4].

Функция распределения по энергиям атомов, покидающих поверхность катода, имеет вид

$$n(E) = AE^{1/2} \exp(-E/E_0),$$

где A — постоянный коэффициент, а E_0 — параметр, характеризующий распределение, E_0 возрастает с увеличением энергии ионов и уменьшается с ростом массы бомбардирующих ионов. Для различных металлов при энергии ионов порядка нескольких сотен электроновольт E_0 изменяется в диапазоне $E_0 \sim 0,1 \div 10$ эВ.

Угловое распределение атомов с точностью 10—20% подчиняется закону косинуса, т. е. поверхность катодной полости в ТРПК является ламбертовским источником атомарных частиц. Поэтому, пролетающие через пространство замкнутой полости без столкновений атомы металла распределены однородно и изотропно. Движение последних без столкновений возможно лишь в том случае, если длина свободного пробега атома металла в инертном газе λ_m превышает расстояние a между противолежащими участками поверхности. Для меди и гелия при $a = 3$ см это соответствует давлению газа $p < 10^{-2}$ мм рт. ст.

Если поверхность эмиттирует моноэнергетический поток атомов с энергией $E = E_0$, то скорость их $v = \sqrt{2E_0/M}$, где M — масса атомов, а концентрация атомов металла в полости равна

$$n_m = 2\theta \frac{j_p}{e} \frac{1}{v} = \sqrt{2} \theta \frac{j_p}{e} \sqrt{\frac{M}{E_0}}. \quad (2)$$

В работе [5] описана специфическая форма сверхплотного тлеющего разряда (СПР) с величиной плотности тока на катоде, достигающей 50 A/cm^2 .

Переход к СПР возможен лишь в условиях, характерных для развития эффекта полого катода. Оценка концентрации атомов меди в плазме ТРПК при низком давлении аргона с помощью выражения (2) при $\theta = 1,7$ ($E_p = 500$ эВ), $E_0 \sim 4$ эВ и $j_p = 1 \text{ A/cm}^2$ дает $n_{\text{Cu}} = 6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

При малых плотностях разрядного тока и низком давлении газа распределение по энергиям движущихся без столкновений атомов металла соответствует температуре T_m ($kT_m = E_0$). С увеличением давления возрастает число их столкновений с атомами газа, и их средняя энергия в центре полости уменьшается до величины, соответствующей температуре инертного газа. Измерение температуры газа T_g в ТРПК в гелии [6] при плотностях тока $j \sim 10^{-2} \text{ A/cm}^2$ свидетельствует о величинах $T_g \sim 400 \div 500$ К. Поэтому эмиттируемые с начальной энергией $E_0 \sim 0,1 \div 10$ эВ атомы материала катода даже после большого числа столкновений с холодными атомами газа обладают средней энергией, несколько превышающей среднюю энергию атомов газа. Случай многократных столкновений рассмотрен в работе [7]. Рассчитанные методом Монте-Карло распределения атомов материала катода находят удовлетворительное согласие с измеряемыми величинами. Увели-

чению давления соответствует уменьшение E_0 в выражении (2) до величины $E'_0 \sim kT_g$. Поэтому при постоянной плотности тока наряду с уменьшением «температуры» атомов металла следует ожидать увеличения в несколько раз их концентрации n_m в центре полости. При значительном увеличении давления атомы металла уже в непосредственной близости от поверхности катода отдают атомам газа избыток энергии, и вследствие их обратной диффузии к катодной поверхности концентрация n_m в центре полости уменьшается.

В настоящей работе исследовались параметры ТРПК в гелии в диапазоне давлений $p = 0,05 \div 1,0$ тор. Разрядная трубка (рис. 1), состоящая из двух цилиндрических водоохлаждаемых медных катодов диаметром 3 см, длиной 20 см и кольцевого центрального анода, снабжена торцовыми кварцевыми окнами. В указанном диапазоне давлений и при величине разрядного тока $I > 300$ мА пространство внутри трубы заполняется однородным светящимся цилиндрическим столбом плазмы.

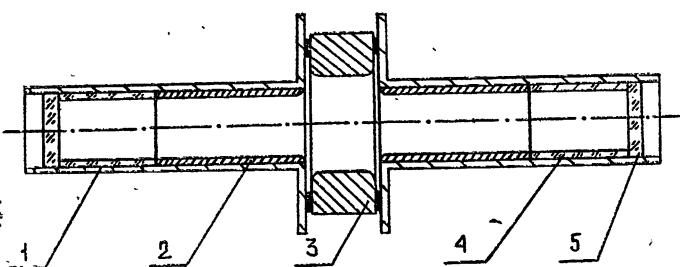


Рис. 1. Схема разрядной трубы:

1—корпус, 2—катоды, 3—анод, 4—охраные кварцевые кольца,
5—кварцевые окошки.

Электрическое поле в плазме ТРПК мало [8], и поэтому при низких давлениях существенным является лишь допплеровское уширение линий. С помощью спектрографа ИСП-51 и интерферометра Фабри—Перо ИТ-51 с серебряными зеркалами измерялись ширина линии гелия $\lambda_{He} = 492,2$ нм ($2 p^1 P^0 - 4 d^1 D^2$) и ширина линии меди $\lambda_{Cu} = 515,3$ нм. Полученные при этом значения температуры гелия заключены в диапазоне $T_{He} = 400 \div 700$ К. Наблюдается рост T_{He} с уменьшением давления и увеличением разрядного тока. При обработке результатов измерений ширины линии $\lambda_{Cu} = 515,3$ нм учитывалась ее тонкая структура. Если атомы меди в центре полости имеют максвелловское распределение по скоростям (это справедливо в случае очень малых и сравнительно больших давлений), параметр этого распределения T_{Cu} можно получить из измеренной ширины линии $\lambda_{Cu} = 515,3$ нм. Зависимость T_{Cu} от параметров разряда представлена на рис. 2. При давлении $p = 1$ мм рт. ст. T_{Cu} в пределах ошибки измерений ($\sim 20\%$) соответствует значениям температуры гелия T_{He} . С уменьшением давления температура меди возрастает до 7000 К при $p = 0,05$ мм рт. ст. и на порядок величины превышает температуру гелия. При этом для величины разрядного тока $I = 400$ мА T_{Cu} сохраняет постоянное значение при давлениях до $p = 0,1$ мм. рт. ст. и лишь с дальнейшим уменьшением давления резко возрастает. При больших значениях разрядного тока наблюдается постепенное увеличение температуры меди.

Концентрация атомов меди в основном состоянии измерялась методом одного зеркала [9] по реабсорбции излучения резонансных линий

меди $\lambda_{\text{Cu}} = 324,7 \text{ нм}$ и $\lambda_{\text{Cu}} = 327,4 \text{ нм}$ на установке, включающей монохроматор ЗМР-2 с фотоумножителем. При этом были измерены значения концентрации n_{Cu} , не превышающие $n_{\text{Cu}} \sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Для измерения n_{Cu} при меньших давлениях и больших плотностях тока использован следующий метод. С торца трубы в катодную полость вводилась небольшая стеклянная подложка (2) (рис. 3), заключенная в медном корпусе (3). Поверхность подложки отделена от объема полости диафрагмой (1) с центральным отверстием диаметром 1 мм, отстоящей от нее на расстоянии 2 мм. Во время разряда корпус находился под плавающим потенциалом, а на поверхность подложки напылялась пленка меди.

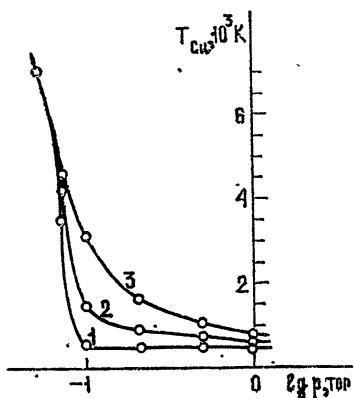


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость температуры атомов меди T_{Cu} в центре полости от давления газа (1 — $I = 0,4 \text{ A}$, 2 — $I = 0,6 \text{ A}$, 3 — $I = 0,8 \text{ A}$).

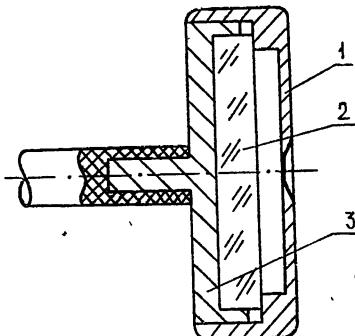


Рис. 3.

Рис. 3. Конструкция адсорбционного зонда:
1 — диафрагма, 2 — стеклянная подложка, 3 — корпус.

Поток атомов металла через отверстие в диафрагме пропорционален их концентрации n_{Cu} и корню квадратному из температуры $\sqrt{T_{\text{Cu}}}$. Толщина пленки контролировалась с помощью микрофотометра МФ-4. При этом была получена характеристическая кривая зависимости оптической плотности S_0 , образующейся пленки от времени экспозиции t , в постоянном режиме разряда при давлении $p_0 = 0,5 \text{ мм рт. ст.}$ и токе $I_0 = 400 \text{ mA}$. Для выбранного режима методом реабсорбции были получены значения $T_{\text{Cu}}^0 = 450 \text{ K}$ и $n_{\text{Cu}}^0 = 5,8 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$. Измеряя оптическую плотность полученной в некотором режиме за время t медной пленки, с помощью характеристической кривой $S_0(t)$ определяем время t_0 , необходимое для напыления равного количества меди в режиме с $T_{\text{Cu}} = T_{\text{Cu}}^0$ и $n_{\text{Cu}} = n_{\text{Cu}}^0$. Так как толщина пленки пропорциональна времени экспозиции, неизвестное значение концентрации получим из выражения

$$n_{\text{Cu}} = n_{\text{Cu}}^0 \frac{t_0}{t} \sqrt{\frac{T_{\text{Cu}}^0}{T_{\text{Cu}}}}. \quad (3)$$

Зависимость концентрации атомов меди от параметров разряда представлена на рис. 4. Ошибка измерений n_{Cu} составляет $40 \div 50 \%$.

Для тока $I = 600 \text{ mA}$ и давления $p = 0,05 \text{ мм рт. ст.}$ измеренная плотность $n_{\text{Cu}} = 10^{11} \text{ см}^{-3}$. При площади поверхности катода трубы

$S = 400 \text{ см}^2$ средняя плотность тока на катоде $j = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}/\text{см}^2$. Пренебрегая величиной плотности электронного тока на катоде, для $j_p = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}/\text{см}^2$, $\theta = 0,5$ [4] и средней энергии атомов меди в центре полости $E'_0 = 0,6 \text{ эВ}$ (измеренная температура $T_{\text{Cu}} = 7000 \text{ К}$) получим из выражения (2) величину концентрации $n_{\text{Cu}} = 0,6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. В пределах ошибки полученная оценка соответствует измеренной величине.

О высоких концентрациях ионизированных атомов меди свидетельствуют спектральные характеристики, полученные в импульсном режиме с длительностью импульса тока $\tau = 1 \div 4 \text{ мс}$ и амплитудой до 100 A (рис. 5). Если при $I = 1 \text{ A}$ линии меди значительно уступают по интенсивности линиям гелия, то при низком давлении и токе, превышающем 50 A , резонансные линии меди являются наиболее интенсивными в спектре.

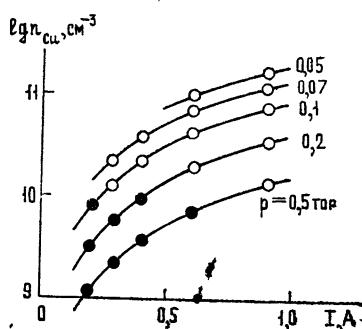


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость концентрации атомов меди n_{Cu} в центре полости от параметров разряда.

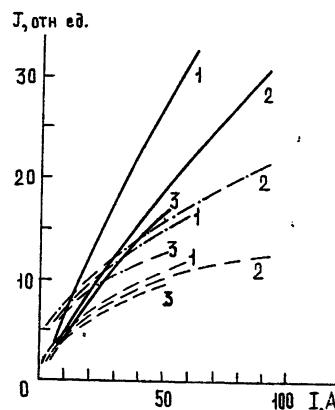


Рис. 5.

Рис. 5. Спектральные характеристики импульсного разряда ($1 - p = 0,07 \text{ torr}$, $2 - p = 0,1 \text{ torr}$, $3 - p = 0,2 \text{ torr}$). Сплошные кривые—зависимости интенсивности линии меди ($\lambda = 324,7 \text{ м.м.}$). Пунктирные ($\lambda = 504,8 \text{ нм}$) и штрих-пунктирные ($\lambda = 492,2 \text{ нм}$) кривые—зависимости интенсивностей линий гелия.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности формирования в тлеющем разряде с холодным полым катодом импульсов плотности паров материала катода длительностью от нескольких микросекунд до нескольких сотен микросекунд. При этом концентрация атомарных частиц для ряда материалов катода может достигать значений $n_m \sim 10^{14} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$. В нижнем диапазоне давлений газа температура паров металла может достигать величины, соответствующей средней энергии эмиттируемых с катода атомов, т. е. значительно превышать температуру кипения материала катода [4]. Концентрация атомов металла в полости пропорциональна плотности тока на катоде. При столкновениях с холодными атомами инертного газа атомы металла отдают им избыток энергии. Поэтому, увеличивая давление газа, можно уменьшать их температуру до значений, близких к температуре инертного газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Badarei, I. Popescu, J. Electr. Control., 4, 503 (1958).
2. C. Popovici, M. Somesan, V. Nistor, Ann. Phys., 19, 225 (1967).
3. B. N. Гофмейстер, Ю. М. Каган, Rev. Roum. Phys., 13, 1 (1968).
4. Н. В. Плещивцев, Катодное распыление, Атомиздат, М., 1968.

- 5 Л. Ю. Абрамович, Б. Н. Клярфельд, Ю. Н. Настич, ЖТФ, 36, 714 (1966).
- 6 И. Х. Пачева, П. М. Праматоров, А. А. Христов, ЖТФ, 42, 2353 (1972).
- 7 R. Bacis, J. Daniege, J. Phys. D: Appl. Phys., 3, 586 (1970).
- 8 H. Schüller, Phys. Zeitschr., 22, 264 (1921).
- 9 С. Э. Фриш, в сб. Спектроскопия газоразрядной плазмы, изд. Наука, М., 1970, стр. 47.

Поступила в редакцию
3 июня 1975 г.,
после доработки
24 декабря 1975 г

INVESTIGATION OF GAS MEDIUM FORMED IN GLOW DISCHARGE WITH HOLLOW-TYPE CATHODE

A. S. Metel', A. I. Nastukha

The characteristics of a gas medium formed in a glow discharge with a copper hollow-type cathode under the helium pressure $p=0.05\text{--}1.0$ torr and the current density of the cathode $j=0.5\text{--}2.5$ mA/cm². The copper and helium atom temperatures T_{Cu} and T_{He} are measured by the interferometric method. As the pressure decreases, the thermal equilibrium between metal and gas atoms at the cavity center is violated. For $p=0.05$ torr $T_{\text{Cu}}=7000$ K and exceeds the helium temperature by an order of magnitude. The copper atom concentration n_{Cu} at the cavity center increases with the growth of current and with the decrease in the pressure and amounts to $n_{\text{Cu}}=2\cdot10^{11}$ cm⁻³ for $j=2.5$ A/cm² and $p=0.05$ torr. The possibility of extrapolation of the results obtained up to the current density $j\sim10$ A/cm² is discussed.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.25

**ОБРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН ОТ ИСКУССТВЕННО
ВОЗМУЩЕННОЙ F -ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ**

*В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Ю. А. Игнатьев,
Г. П. Комраков*

В экспериментах, проведенных в г. Горьком весной 1975 г., было обнаружено, что при воздействии на ионосферу интенсивным КВ радиоизлучением на частоте 4,6 МГц с эквивалентной мощностью порядка 12 МВт возникало обратное рассеяние пробных волн двух видов на частоте 5,75 МГц. Один из них возникал несколько ниже уровня отражения обычновенной компоненты волны накачки [1], а другой, описанный в данной работе, связан с рассеянием на неоднородностях ионосферной плазмы вблизи максимума F-области.

Наиболее отчетливо рассеянный сигнал пробных волн с высотой максимума F-области наблюдался тогда, когда критические частоты ионосферы f_0F2 были меньше 4,9 МГц и, следовательно, отсутствовал зеркально отраженный сигнал необыкновенной компоненты на частоте 5,75 МГц. Появление или усиление обратно рассеянных сигналов регистрировалось лишь при излучении обычновенной компоненты мощного передатчика. Этот эффект отсутствовал, если критические частоты ионосферы f_0F2 опускались ниже 4,6 МГц.

На рис. 1 а—1 в приведены три кинокадра амплитудно-высотных зависимостей рассеянных сигналов, полученные в последовательные моменты времени в естествен-

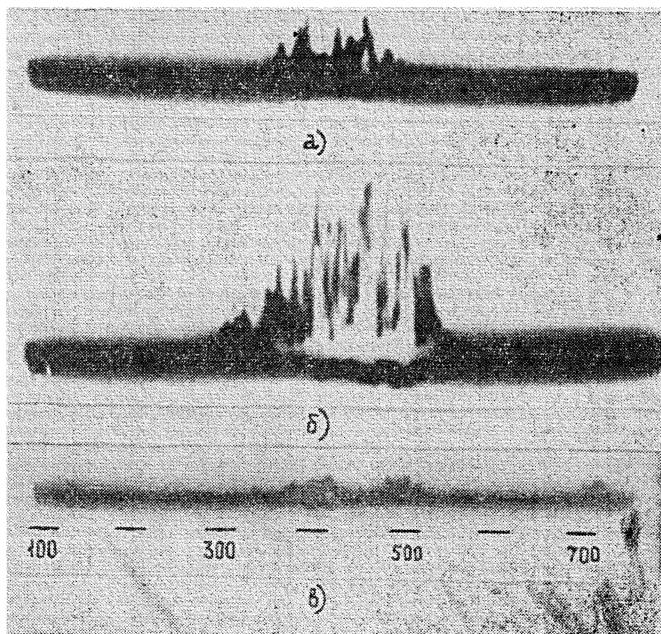


Рис. 1.

ных условиях (рис. 1 а), через две минуты после включения мощного передатчика (рис. 1 б) и через три минуты после его выключения (рис. 1 в). Действующие высоты h_d на кинокадрах увеличиваются слева направо, начало развертки соответствует $h_d = 100$ км, конец — $h_d = 800$ км. Длительность зондирующего импульса составляла 50 мкс. Амплитуда необыкновенной компоненты отложена вверх, а обычной — вниз от горизонтальной оси. Наличие относительно слабой обычной компоненты на высотных зависимостях объясняется неполной развязкой нормальных волн в приемных антенных.

Как видно из рис. 1 б, рассеянные сигналы эшелонированы в пределах нескольких сотен километров по действующей высоте с постепенным ростом амплитуды с высотой и довольно резким падением амплитуды после максимума.

На рис. 2 приведены изменения во времени нормированной амплитуды $\bar{A}(t)/A_{\max}$, усредненной по 17 сеансам нагрева ионосферы. Время работы мощного передатчика отмечено штриховкой. Значения \bar{A}/A_{\max} взяты через 20 с. Пунктиром приведены кривые, аппроксимирующие возрастание амплитуды после включения передатчика по закону $\bar{A}/A_{\max} = 1 - \exp(-t/\tau_1)$ и ее уменьшение после выключения передатчика по закону $\bar{A}/A_{\max} = \exp(-t/\tau_2)$. Значения τ_1 и τ_2 оказались равными примерно 50 и 60 с соответственно. Интенсивность рассеянных сигналов обычно превышала уровень помех на несколько десятков децибел* и уменьшалась при изменении критических частот f_0F2 от 4,9 до 4,6 МГц. В нескольких сеансах прием сигналов осуществлялся на пространственно-разнесенные антенны.

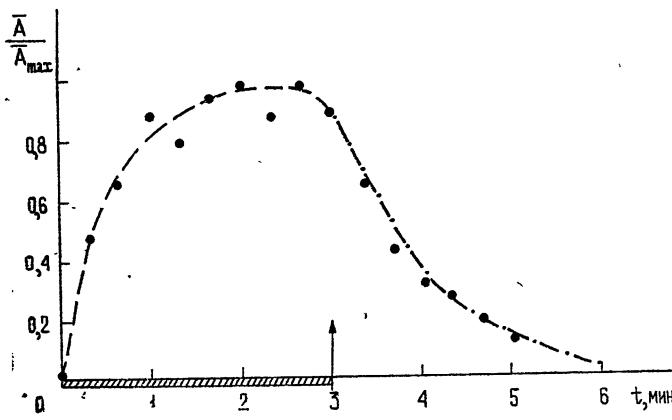


Рис. 2.

Обработка соответствующих записей показала, что характерный размер дифракционной картины на поверхности Земли составлял в этих сеансах около нескольких сотен метров при типичных для F -области горизонтальных скоростях движения картины порядка 50—100 м/с.

Как следует из проведенных экспериментов, обратно рассеянные сигналы возникали вблизи максимума F -области, где показатель преломления необыкновенной волны n_x становился весьма малым. Следует полагать поэтому, что неоднородности электронной концентрации при искусственном нагреве ионосферы распределены в большей по диапазону высот области ионосферы. Вариациями в показателе преломления n_x можно объяснить как ослабление интенсивности сигнала при уменьшении критических частот с 4,9 до 4,6 МГц, так и (отчасти) постепенный рост амплитуды сигнала с высотой (см. рис. 1 б). Вместе с тем довольно быстрое падение амплитуды сигнала на высотной развертке после максимума связано, по всей видимости, с ракурсной чувствительностью рассеяния радиоволн на неоднородностях ионосферной плазмы, вытянутых вдоль магнитного поля**. Поперечные размеры этих неоднородностей имеют порядок сотни и более метров. По-видимому, обратное диффузное рассеяние радиоволн, о котором речь шла выше, во многом аналогично явлениям, наблюдавшимся в США [2, 3].

* При импульсной мощности передатчика пробных волн порядка 500 кВт и КНД антennes, равной 250.

** Рассеяние радиоволн от вытянутых вдоль магнитного поля Земли неоднородностей электронной концентрации по аналогии с радиоотражениями от полярных сияний имеет резкую угловую зависимость, называемую ракурсной чувствительностью. При этом обратное рассеяние максимально при нормальной ориентации падающей волны по отношению к магнитному полю.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. С. Голубу, А. И. Ежову, Л. М. Елхиной и Л. Н. Казаковой за помощь в работе, Н. Г. Денисову, Л. М. Ерухимову, Н. А. Митякову и В. Ю. Трахтенгерцу за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Ю. А. Игнатьев, Г. П. Комраков, Письма в ЖЭТФ, 22, вып. 10, 497 (1975).
2. P. A. Fialer, Rad. Sci., 9, № 11, 923 (1974).
3. W. F. Utlauf, E. J. Violette, Rad. Sci., 9, № 11, 895 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
30 июля 1975 г.

УДК 535.2

СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СВЕРХСВЕТОВОГО ИСТОЧНИКА

Г. М. Манева

В работах [1, 2] было обращено внимание на возможность существования таких источников электромагнитного излучения, скорость которых превосходит скорость света в вакууме с. Ниже мы рассмотрим модель такого источника.

Пусть пучок заряженных частиц падает нормально на плоскую границу раздела двух прозрачных немагнитных сред, причем пучок управляет таким образом, что точка пересечения его с границей раздела движется по окружности радиуса a с периодом $2\pi/\Omega$ и произвольно большой скоростью $v=a\Omega$. Фурье-компоненты плотности пучка $j_n \{0, 0, j_n\}$ запишем в виде

$$j_n = -\frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(x - a \cos \psi) \delta(y - a \sin \psi) e^{in\psi} \exp\left(-in\frac{\Omega}{u}z\right), \quad (1)$$

где q — заряд, пересекающий плоскость раздела в единицу времени. Здесь ось z выбрана перпендикулярно к плоскости раздела, причем среды, заполняющие полу-пространства $z > 0$ и $z < 0$, имеют диэлектрические проницаемости соответственно ϵ_1 и ϵ_2 .

При условии $a \ll R$ (R — радиус-вектор точки наблюдения с полярными координатами $\{R, \theta, \varphi\}$) получаем выражение для фурье-компонент вектора Герца $\Pi \{0, 0, \Pi_n\}$.

$$\Pi_n^1(R) = \frac{2q c \cos \theta}{n^2 \Omega^2} f_1(\theta) \frac{\exp\left(i \frac{\Omega n}{c} \sqrt{\epsilon_1} R\right)}{R} \exp\left[in\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \times$$

$$\times J_n\left(n \frac{v \sqrt{\epsilon_1}}{c} \sin \theta\right), \quad z > 0, \quad (2)$$

$$\Pi_n^2(R) = -\frac{2q c \cos \theta}{n^2 \Omega^2} f_2(\theta) \frac{\exp\left(i \frac{\Omega n}{c} \sqrt{\epsilon_2} R\right)}{R} \exp\left[in\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \times$$

$$\times J_n\left(n \frac{v \sqrt{\epsilon_2}}{c} \sin \theta\right), \quad z < 0$$

$$(n = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$f_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \theta + \epsilon_2 \cos \theta}} \left(\frac{\epsilon_1 \frac{c}{u} - \epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}}{\epsilon_1 \sin^2 \theta - \epsilon_2 + c^2/u^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\epsilon_2 \frac{c}{u} - \epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta}}{-\epsilon_1 \cos^2 \theta + c^2/u^2} \right),$$

$$f_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1 \cos \theta}} \left(\frac{\varepsilon_1 \frac{c}{u} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta}}{-\varepsilon_2 \cos^2 \theta + c^2/u^2} - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_2 \frac{c}{u} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta}}{\varepsilon_2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1 + c^2/u^2} \right). \quad (3)$$

Формулы (2) представляют поле синхротронного излучения источника, движущегося на границе двух сред с произвольно большой скоростью.

Спектральная плотность усредненной по периоду энергии, излучаемой в единицу времени в телесный угол $\sin \theta d\theta d\varphi$ с частотой $n\Omega$ в среде с ε_l ,

$$\frac{dW_{n,\theta,\varphi}^l}{dt} = \frac{2q^2 \sqrt{\varepsilon_l}}{\pi c} \sin^2 \theta \cos^2 \theta |f_l(\theta)|^2 J_n^2 \left(n \frac{v \sqrt{\varepsilon_l}}{c} \sin \theta \right) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4)$$

В случае вращения источника на плоской границе раздела вакуум—идеальный проводник выражение для энергии синхротронного излучения совпадает с результатом, полученным Афанасьевым.

При скорости вращения источника $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_l}}$, используя формулу Шотта [3],

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(nx) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right), \quad |x| < 1,$$

получаем полную энергию излучения на единицу времени в телесный угол $\sin \theta d\theta d\varphi$:

$$\frac{dW_{\theta,\varphi}^l}{dt} = \frac{q^2 \sqrt{\varepsilon_l}}{\pi c} \sin^2 \theta \cos^2 \theta |f_l(\theta)|^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_l \sin^2 \theta \right)^{1/2}} - 1 \right] \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5)$$

Выражение (5) в случае заполнения полупространства диэлектриком и идеальным проводником, записывается в виде

$$\frac{dW_{\theta,\varphi}^l}{dt} = \frac{q^2 u^2 \sqrt{\varepsilon_1}}{\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(\alpha_l^2 \cos^2 \theta - 1)^2} \left[\frac{1}{(1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} - 1 \right] \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6)$$

где $\alpha_l = \frac{u \sqrt{\varepsilon_l}}{c}$, $\beta_l = \frac{v \sqrt{\varepsilon_l}}{c}$, $i = 1, 2$. Видно, что при нерелятивистском движении $\beta_1 < 1$, максимум излучения лежит в плоскости вращения источника. При $\beta_2 \rightarrow 1$ излучение концентрируется в плоскости раздела ($\theta = \pi/2$) и неограниченно возрастает с ростом $v \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$.

При вращении с произвольно большой скоростью $v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_l}}$ энергия излучения в соответствующей среде для углов $\theta < \arcsin \frac{1}{\beta_1} < \frac{\pi}{2}$ или $\theta > \arcsin \frac{1}{\beta_2} \geq \frac{\pi}{2}$ выражается формулой (5). Как видно, при стремлении угла $\theta \rightarrow \arcsin \frac{1}{\beta}$ полная интенсивность излучения обращается в бесконечность аналогично синхротронному излучению заряда, вращающегося по окружности со скоростью больше скорости света в среде [4].

Используя асимптотическое выражение для функций Бесселя большого аргумента, при очень большой скорости $v \gg \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_l}}$ и углах $\sin \theta \gg \frac{1}{\beta_l}$ получаем

$$\frac{dW_{n,\theta,\varphi}^l}{dt} = \frac{2q^2}{nv} \sin \theta \cos^2 \theta [1 + (-1)^n \sin(2n\beta_l \sin \theta)]. \quad (7)$$

При скоростях $v \rightarrow \infty$ формула справедлива практически для любых углов (слишком

малые углы $\theta \approx 0$ или $\theta \approx \pi$ вообще исключены из рассмотрения). Как видно из (7), в спектральном распределении имеется серия максимумов и минимумов интенсивности, зависящих от номера n . При неограниченном возрастании $v \rightarrow \infty$ излучение данного сверхсветового источника стремится к нулю.

Автор выражает благодарность Б. М. Болотовскому за советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 62, 173 (1972).
2. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, 578 (1972).
3. Т. А. Schott, Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912.
4. В. Н. Цытович, Вестник МГУ, № 11 (1951).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
21 апреля 1975 г.

УДК 621.372.821.2

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ ОБЩЕЙ СТЕНКИ МЕЖДУ ВОЛНОВОДАМИ НА ПАРАМЕТРЫ ВОЛНОВОДНОГО ЩЕЛЕВОГО МОСТА

И. Г. Прохода, В. И. Лозяной, В. А. Карлов

Существуют различные способы увеличения широкополосности волноводных щелевых мостов (см., например, [1-3]). Однако все они, как правило, ведут к усложнению конструкции и снижению электрической прочности устройств. В настоящей работе показана возможность расширения рабочей полосы частот щелевых мостов, лишенная вышеприведенных недостатков. Это достигается выбором оптимальной толщины общей стенки между волноводами и длины щели связи. Требуемое переходное ослабление обеспечивается определенной длиной щели связи, а согласование в широкой полосе частот — соответствующей толщиной общей стенки между волноводами.

Полученные результаты следуют из анализа влияния толщины общей стенки между волноводами на параметры волноводного щелевого моста, проведенного авторами на основе численного решения электродинамической задачи. Для этого было использовано решение задачи дифракции электромагнитного поля в H -плоскостном щелевом направленном ответвителе [4].

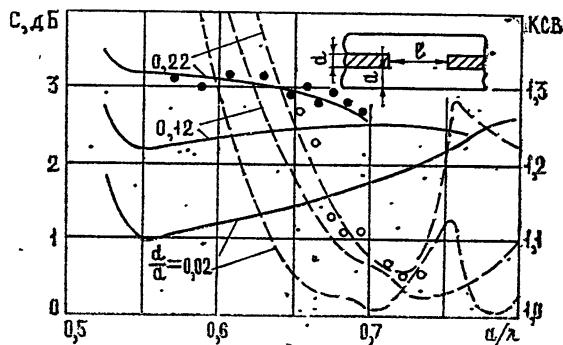


Рис. 1.

На рис. 1 изображены теоретические зависимости переходного ослабления (сплошная линия) и КСВ (пунктирная линия) от относительных частот a/λ и толщины общей стенки d/a при $l/a = 2$, где λ — длина волны в свободном пространстве. Из графиков видно, что при толщине общей стенки от 0,1 до 0,22 ширины волновода улучшается равномерность деления мощности щелевого моста, благодаря чему значительно увеличивается его рабочая полоса частот. Объяснить это интересное явление можно следующим образом. Размеры волноводов обычного волноводного щелевого

моста таковы, что по ним может распространяться только волна H_{10} . При возбуждении моста сторонним полем волны H_{10} в области связи возникает весь набор волн H_{m0} ($m = 1, 2, 3, \dots$), рабочими являются волны H_{10} и H_{20} . При очень тонкой общей стенке набег фазы из-за отражения от краев щели возникает только у волны H_{10} в области связи и суммарный фазовый сдвиг между волнами H_{10} и H_{20} равен (см., например, [2])

$$\alpha = \frac{2\pi l}{\lambda_{10}} + \varphi_{10} - \frac{2\pi l}{\lambda_{20}}, \quad (1)$$

где λ_{10} — длина волны H_{10} в области связи, λ_{20} — длина волны H_{20} в области связи, φ_{10} — дополнительный фазовый сдвиг волны H_{10} в области связи, возникающий из-за отражения волны от краев щели. Дополнительный фазовый сдвиг зависит от частоты, и поэтому его компенсируют использованием согласующих элементов (емкостный винт, индуктивные стержни), влияющих в основном на фазовую скорость волны H_{10} в области связи. В рассматриваемом случае увеличение толщины общей стенки между волноводами приводит к образованию набега фазы и у волны H_{20} в области связи, поэтому суммарный сдвиг между волнами H_{10} и H_{20} теперь будет равен

$$\alpha = \frac{2\pi l}{\lambda_{10}} + \varphi_{10} - \frac{2\pi l}{\lambda_{20}} - \varphi_{20}, \quad (2)$$

где φ_{20} — дополнительный фазовый сдвиг волны H_{20} в области связи, возникающий из-за отражения волны от краев щели связи. Из рассмотрения выражения (2) видно, что при определенной толщине общей стенки между волноводами дополнительный фазовый сдвиг волны H_{10} может быть скомпенсирован дополнительным фазовым сдвигом волны H_{20} . При этом суммарный фазовый сдвиг между волнами H_{10} и H_{20} в области связи будет оставаться относительно постоянным в широкой полосе частот, что приводит к улучшению равномерности деления мощности волноводного щелевого моста. Экспериментальные исследования подтверждают эти выводы (см. рис. 1 при $d/a = 0,22$). Дополнительные фазовые сдвиги волн в области связи можно определить, используя работу [4].

В заключение следует отметить, что описанная выше возможность улучшения равномерности деления мощности щелевого моста может быть использована для улучшения равномерности деления мощности H -плоскостного щелевого направленного ответвителя с любым переходным ослаблением.

Авторы выражают свою признательность В. П. Прудкому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Риблет, Proc. IRE, 40, № 2, 180 (1952).
2. А. М. Сосунов, С. А. Шибаев, Направленные ответвители сверхвысоких частот, Приволжское книжное изд., Саратов, 1964.
3. Н. Л. Коган, Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Сложные волноводные системы, Судпромгиз, Л., 1963.
4. И. Г. Прохода, В. И. Лозянай, В. П. Чумаченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 8, 1214 (1974).

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию
24 октября 1975 г.

УДК 621.372.2

РАСЧЕТ МНОГОВОЛНОВЫХ МНОГОПЛЕЧЕВЫХ ВОЛНОВОДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В. М. Онуфриенко, И. Г. Прохода

В последнее время возрос интерес к практическому применению волноводных устройств на основе многоволновых волноводов. Теоретическому исследованию некоторых многоволновых устройств посвящены работы [1, 2].

В работах [3, 4] на основе интегральных уравнений Фредгольма второго рода разработан метод численного расчета электродинамических характеристик волноводных трансформаторов с соединительной полостью сложной формы. В настоящем сообщении

этот метод применен к расчету характеристик сложных многоволновых многоплечевых волноводных соединений. Как и в работе [4], задача дифракции электромагнитных волн в такого рода устройствах может быть сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которые, в итоге, преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Постоянная распространения i -го волновода ($i = 1, 2, \dots, N$) N -плечевого волноводного соединения в нашем случае принимает значения $\gamma_{m(i)}^2 < 0$ для $m \leq n$ и $\gamma_{m(i)}^2 > 0$ для $m > n$, где n — количество распространяющихся в многоволновой системе типов волн.

Нами составлены алгоритм и программа численного расчета элементов матриц рассеяния для задачи дифракции основной волны H_{10} в многоплечевых волноводных соединениях. На рис. 1 представлены результаты численного расчета модулей коэффициентов отражения R_{11}^{m0} и прохождения $T_{21}^{m0} = T_{31}^{m0}$ основной волны ($m = 1$) и возбуждаемых на неоднородностях других типов волн ($m = 2, 3$) для симметричного Y -соединения (возбуждается плеcho 1). С уменьшением длины волны в боковых волноводах наблюдается значительное преобразование основной волны H_{10} в другие типы волн.

Расчет показывает, что в плеcho, подключенному к генератору, типы волн с четными номерами не возбуждаются. Этот результат можно подтвердить простыми физическими соображениями. Действительно, Y -соединение (рис. 1) и напряженность электрического поля возбуждающей волны H_{10} симметричны относительно плоскости, проходящей перпендикулярно через середину широкой стенки плеcho 1. Поэтому четные типы волн на неоднородностях в точках A и B возбуждаются в противофазе и,

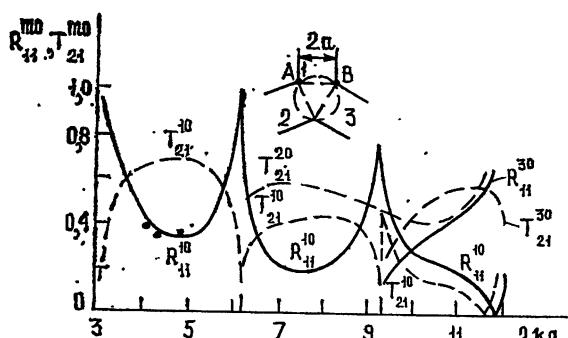


Рис. 1.

следовательно, в плеcho 1 гасят друг друга. На рис. 1 точками показаны результаты, приведенные в [5].

В качестве тестовой задачи нами использована задача дифракции волны H_{10} на изломе широкого волновода. На рис. 2 точками представлены результаты численного расчета зависимости от угла излома φ распределения мощности падающей волны H_{10} ($m = 1$) между волнами прошедшего поля ($m = 2, 3, 4, \dots$) для $2ka = 20.7$ ($k = 2\pi/\lambda$, в волноводах могут распространяться шесть типов волн). Видно хорошее соответствие полученных нами результатов с данными работы [1] (сплошные линии).

Разработанные алгоритм и программа численного расчета характеристик многоплечевых многоволновых соединений могут быть использованы и для расчета различных многоволновых T -мостов, щелевых ответвителей, несимметричных волноводных соединений и других устройств СВЧ.

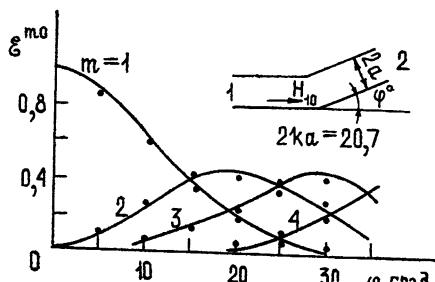


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Кириленко, Л. А. Рудь, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника, 19, № 4, 687 (1974)
2. А. В. Фойгель, Радиотехника и электроника, 18, № 11, 2276 (1973).
3. И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1578 (1973).
4. В. М. Онуфrienko, И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 18, № 4, 584 (1975).
5. Справочник по волноводам, изд. Сов. радио, М., 1952.