ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIX, № 5—6 РАДИОФИЗИКА 1976

УДК 532.5

О СТРУЙНОМ ТЕЧЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В СИЛЬНОМ ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. В. Derендяев

Всякий раз, когда удается получить автомодельное решение, возникает вопрос о его физической интерпретации. Дело в том, что автомодельные решения содержат особые точки. Как уже отмечалось в лекциях Г. И. Баренблатта, обычно принято рассматривать автомодельные решения как некоторые асимптотики решений тех или иных краевых задач. Цель настоящего выступления — показать на примере, что дело обстоит несколько сложнее.

Рассмотрим слабую осесимметричную затопленную струю электропроводящей жидкости в сильном продольном магнитном поле при малых магнитных числах Рейнольдса. Линеаризованная система уравнений пограничного слоя струи, в соответствии с [1], записывается в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -mu, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} w, \quad \frac{\partial}{\partial r} ru + \frac{\partial}{\partial z} rw = 0, \tag{1}$$

где p — давление; u, w — радиальная и осевая компоненты скорости; ν — кинематическая вязкость жидкости; $m = \sigma B^2/\rho$; σ — проходимость; ρ — плотность жидкости; B — индукция внешнего однородного магнитного поля; z — координата вдоль оси симметрии струи; r — расстояние от оси симметрии.

Решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям на входе в пограничный слой струи

$$w(r, 0) = w_0(r) \tag{2}$$

и на бесконечности

$$u, w, p \to 0; \; r \to \infty, \tag{3}$$

может быть получено методом интегральных преобразований и имеет вид

$$u = \alpha I_{12}; \; w = I_{01}; \; p = \rho \frac{\nu}{\alpha} w, \qquad I_{pq} = \int_0^\infty A(k) J_p(kr) e^{-\alpha k^2 z} k^q dk, \tag{4}$$

где $\alpha = \sqrt{\nu/m}$, $A(k) = \int_0^\infty w_0(r) J_0(kr) r dr$.

Нетрудно проследить выход решения (4) на автомодельную асимптотику при $z \to \infty$. Используя метод перевала [2], получим из (4) при больших z

$$u = \alpha\, a(\alpha z)^{-\frac{n+3}{2}} \widetilde{I}_{12}, \quad w = a(\alpha z)^{-\frac{n+2}{2}} \widetilde{I}_{01},$$
$$\widetilde{I}_{pq} = \int_0^\infty \varkappa^{n+q} J_p(\beta\varkappa)\, e^{-\varkappa^2} d\varkappa, \tag{5}$$

где $\beta = r/\sqrt{\alpha z}$, ak^n — старший член степенного разложения функции $A(k)$ в нуле, которое существует, например, в случае, когда струйное течение вызвано финитными распределениями компонент скорости на твердой плоскости $z = \text{const}$, ограничивающей полупространство, в котором затоплена струя.

Формулы (5) дают автомодельные решения системы (1), описывающие асимптотическое поведение (4), причем в силу четности $A(k)$ число n четное. В то же время уравнения (1) допускают автомодельные решения типа (5) при всех $n > -1$.

Приведенный пример показывает, что, вообще говоря, не всякое автомодельное решение можно рассматривать как асимптотику некоторого решения краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Горбачев, Н. В. Никитин, Е. П. Потанин, МГ, 3, 138 (1972).
2. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.

Научно-исследовательский институт прикладной математики
и кибернетики при Горьковском университете