

УДК 539.2

ДЕРЕВЬЯ И ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ

Я. А. Смородинский

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение
2. «Дерево» координат
3. Коэффициенты Ляме
4. Оператор Лапласа
5. Собственная функция
6. Пересадка
7. Угловые моменты
8. Открытые развилки
9. Теорема Бидерхарна

1. ВВЕДЕНИЕ

То, о чем будет речь, не связано прямо с физикой нелинейных систем. Речь будет идти о сферических системах координат в многомерных пространствах. Но так как решение любой задачи начинается с выбора систем координат, то содержание статьи может пригодиться в самых разных областях. Если в квантовомеханической задаче речь идет о многих частицах или возбуждениях и если при взаимодействии закон сохранения углового момента играет свою роль, то в такой задаче мы встретимся и со сложением квантованных угловых моментов и с вычислением матричных элементов. В задаче классической приходится вычислять разные корреляционные функции — здесь опять нужны разные системы координат. Система параллелей и меридианов на многомерной сфере может быть проведена многими способами, но все такие системы не обладают симметрией, которая обычно есть у систем из многих частиц (в простейшем случае тождественных). Задача о симметризации различных величин как квантовых, так и классических приводит к преобразованиям между разными схемами сложения моментов и между разными системами координат. Такие соображения позволяют считать исследование разных систем координат делом вполне практическим.

Уже на задаче трех тел, в которой используется пятимерная сфера*, обнаружили красивые свойства многомерных сферических гармоник или, как их называют, гиперсферических функций. Как во всякой многомерной задаче, основная трудность изучения свойств таких функций состояла в громоздких алгебраических выкладках, которые не позволили выписывать явно различные выражения, если число измерений сколько-нибудь велико. Надо было построить новый формальный аппарат, в рамках которого можно было сформулировать простое правило для выписывания громоздких выражений и действий с ними. Оказалось,

* Размерность сферы в пространстве импульсов в задаче N тел $3N - 4$ при постоянной энергии системы,

что для этой цели полезно использовать теорию графов в ее простейшем варианте — теории деревьев. Оказалось, что любой системе координат можно сопоставить граф-дерево, которое характеризует многие свойства этой системы: геометрия многомерной системы вполне определяется топологией дерева. Такая техника была описана в работе Виленкина, Кузнецова и Смородинского [1] в 1962 году, с тех пор техника еще упростилась. Работа [1] была дополнена работой Кильдюшова [2], в которой были вычислены коэффициенты преобразования между разными системами координат (формулы этой работы также сильно упрощаются). После этого работу можно было бы считать законченной, если бы вид коэффициентов преобразования не обнаружил неожиданную связь с коэффициентами теории угловых моментов. Оказалось, что T -коэффициенты, как они были названы в [2], представляют собой аналитическое продолжение так называемых коэффициентов Рака ($6j$ коэффициентов). Коэффициенты Рака, как известно, совершают преобразование между разными схемами сложения трех моментов: от схемы $(j_1 + j_2) + j_3$ к схеме $j_1 + (j_2 + j_3)$. Поскольку алгебра моментов не ассоциативна, эти две схемы разные. Складываемые моменты подчиняются правилу треугольника, т. е. из трех моментов $j_1 + j_2 = j_3$ можно построить треугольник $|j_1 - j_2| < j_3 < j_1 + j_2^*$. Условия треугольника определяют область существования коэффициентов Рака. T -коэффициенты можно выразить теми же формулами, что и коэффициенты Рака, только для значений аргументов, не удовлетворяющих правилу треугольника. Кроме того, значения аргументов (целые и полуцелые в теории угловых моментов) могут быть целыми, полуцелыми и четвертьцелыми — обстоятельство, групповой смысл которого не вполне ясен (ср. [3]). Формально оказалось, что оба типа коэффициентов суть значения обобщенной гипергеометрической функции при аргументе единица: ${}_4F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3; 1)$. При этом должно быть выполнено условие $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$. Коэффициенты преобразования для «деревьев» оказалось возможным представить как произведение или сумму произведений коэффициентов Рака, совсем так, как $3nj$ коэффициенты в теории угловых моментов строятся из $6j$ коэффициентов. Так возникает изоморфизм двух теорий, проявляющийся в том, что одни и те же граф-дерево или систему деревьев — «сеть» можно «перевести» на два разных языка — сложение угловых моментов и системы координат на многомерной сфере. Параллелизм получающихся формул указывает на глубокую связь двух задач, связь, смысл которой не вполне ясен.

Здесь мы дадим краткое изложение метода деревьев в обоих его вариантах. Так как в теории угловых моментов метод деревьев не приводит к новым формулам, то мы начнем с его координатного варианта.

2. «ДЕРЕВО» КООРДИНАТ

Мы начинаем с уравнения $N-1$ -мерной сферы, на которой мы должны построить ортогональную систему координат:

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = 1. \quad (2.1)$$

Смысл координат может быть разный: импульсы, тогда (2.1) — поверхность постоянной энергии или координаты в методе K -гармоник и т. п.

* Это правило удобнее записывать в форме условия на площадь треугольника

$$p(p - j_1)(p - j_2)(p - j_3) > 0,$$

где

$$2p = j_1 + j_2 + j_3.$$

На двумерной сфере существуют две сферические системы

$$x_3 = \cos \theta, \quad x_2 = \sin \theta \cos \Phi, \quad x_1 = \sin \theta \sin \Phi; \quad (2.2)$$

$$x_3 = \cos \theta \cos \Phi, \quad x_2 = \cos \theta \sin \Phi, \quad x_1 = \sin \theta, \quad (2.3)$$

мы их изобразим деревьями (рис. 1). На трехмерной сфере существуют 5 систем координат*

$$\begin{aligned} x_4 &= \cos \psi, & x_2 &= \sin \psi \sin \theta \cos \Phi, \\ x_3 &= \sin \psi \cos \theta, & x_1 &= \sin \psi \sin \theta \sin \Phi; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \cos \psi, & x_2 &= \sin \psi \cos \theta \sin \Phi, \\ x_3 &= \sin \psi \cos \theta \cos \Phi, & x_1 &= \sin \psi \sin \theta; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \cos \psi \cos \theta, & x_2 &= \cos \psi \sin \theta \sin \Phi, \\ x_3 &= \cos \psi \sin \theta \cos \Phi, & x_1 &= \sin \psi; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \cos \psi \cos \theta \cos \Phi, & x_2 &= \cos \psi \sin \theta, \\ x_3 &= \cos \psi \cos \theta \sin \Phi, & x_1 &= \sin \psi; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \cos \psi \cos \Phi_1, & x_2 &= \sin \psi \cos \Phi_2, \\ x_3 &= \cos \psi \sin \Phi_1, & x_1 &= \sin \psi \sin \Phi_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

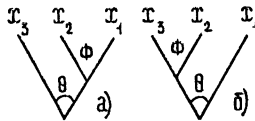


Рис. 1.

Эти координатные системы мы изобразим деревьями (рис. 2). Общие правила построения координатной системы по дереву формулируются так.

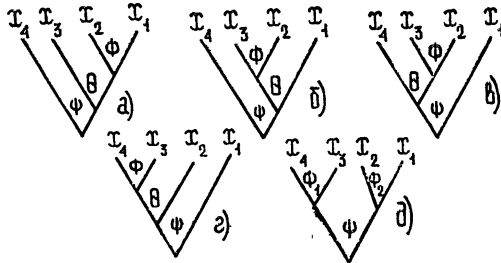


Рис. 2.

Дерево имеет N концов-веток, равное числу измерений. Каждой координате-ветке отвечает определенный путь от корня дерева. Этот путь состоит из отрезков веток (или пропагаторов). Число веток, составляющих путь, определяет число множителей в выражении для координаты. Ветка соединяет два узла — развилки. Каждому узлу (развилке) сопоставлен угол. Координата выражается так: следуя от корня дерева

* Ко всем формулам надо еще добавить системы, получающиеся заменой $\Phi \rightarrow \pi - \Phi$ (поворот в узле Φ на π).

и ветки, мы, проходя через очередной узел с углом θ , выписываем множитель $\cos \theta$, если следующая ветка пойдет налево, или $\sin \theta$, если она пойдет направо. Сопоставив формулы (2.2), (2.3) и (2.8) с деревьями на рис. 2, легко понять и запомнить это правило.

Теперь легко видеть, что можно строить разные системы координат, выбирая разные деревья — разную систему путей между корнем и ветками дерева.

Среди деревьев можно определить классы. Класс — это множество деревьев, получаемых друг из друга с помощью вращений в узлах (представив себе, что узлы — это шарниры). Преобразования между деревьями одного класса имеют особенно простой вид. Можно сосчитать число разных деревьев, число их классов при заданном N .

Без вывода укажем, что если фиксировать порядок координат, то число деревьев равно

$$v(N) = \frac{[2(N-1)]!}{(N-1)!N!}$$

Если допустить еще и перестановку координат (что нужно при симметризациях), то

$$v(N) = \frac{[2(N-1)]!}{(N-1)!}$$

Основная идея метода сводится к тому, что все нужные нам выражения факторизуются — составляются из произведения (кроме лапласиана) множителей, составленных для каждого узла отдельно.

3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛЯМЕ

Квадрат элемента длины в ортогональной системе координат выражается формулой

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h_i^2 d\theta_i^2, \quad (3.1)$$

где θ_i — углы при узлах, число узлов равно $N-1$, h_i называются коэффициентами Ляме.

Каждый из коэффициентов Ляме определяется произведением

$$h_i = \prod_j h_{ij}. \quad (3.2)$$

Значок j пробегает все узлы (включая корень и исключая узел i), которые надо пройти, чтобы дойти до ветки (координаты i). Пропагатор h_{ij} определяется так:

$$h_{ij} = \frac{\cos \theta_j}{\sin \theta_j}, \quad (3.3)$$

в зависимости от того, в какую сторону продолжается путь от узла j : влево (косинус) или вправо (синус). Эту инструкцию просто понять, проследив за тем, как построены выражения для двух- и трехмерных сфер:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2; \quad (3.4)$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \theta d\Phi^2; \quad (3.5)$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \cos^2 \theta d\Phi^2; \quad (3.6)$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \cos^2\psi d\theta^2 + \cos^2\psi \sin^2\theta d\Phi^2; \quad (3.7)$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \cos^2\psi d\theta^2 + \cos^2\psi \cos^2\theta d\Phi^2; \quad (3.8)$$

$$ds^2 = d\psi^2 + \cos^2\psi d\Phi_1^2 + \sin^2\psi d\Phi_2^2. \quad (3.9)$$

Как мы видим, в каждое слагаемое входит дифференциал угла от вершины и все предшествующие пропагаторы.

4. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

Зная коэффициент Ляме, построим оператор Лапласа на сфере

$$\Delta = \left(\prod_j h_j\right)^{-1} \sum \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{1}{h_j} \prod_{s \neq j} h_s \frac{\partial}{\partial \theta_j}. \quad (4.1)$$

Запишем его опять для 2- и 3-мерных сфер:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2}; \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\sin^2\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \sin^2\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin^2\psi} \left(\frac{1}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right); \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\sin^2\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \sin^2\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin^2\psi} \left(\frac{1}{\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right); \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\cos^2\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \cos^2\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\cos^2\psi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right); \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\cos^2\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \cos^2\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\cos^2\psi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \right); \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{\cos\psi \sin\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \cos\psi \sin\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{\cos^2\psi} \frac{\partial^2}{\partial \Phi_1^2} + \frac{1}{\sin^2\psi} \frac{\partial^2}{\partial \Phi_2^2}. \quad (4.5)$$

Если мы обозначим через l и r число узлов, лежащих слева и справа от рассматриваемого узла, то оператор Лапласа записывается так:

$$\Delta = \frac{1}{\cos^l\theta \sin^r\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos^l\theta \sin^r\theta + \frac{1}{\cos^{2\theta}} \Delta^l + \frac{1}{\sin^{2\theta}} \Delta^r, \quad (4.6)$$

где операторы Δ^l и Δ^r строятся так же, как и оператор Δ ; только построение начинается со следующей левой или правой вершины.

Сумму $l+r$ мы обозначим через s ,

$$l+r = s. \quad (4.7)$$

Нетрудно видеть, что

$$s_j = N_j - 2, \quad (4.8)$$

где N_j — размерность пространства, включающего все узлы, начиная с j и выше.

Собственное значение оператора Лапласа на $N'-1$ -мерной сфере равно

$$\sigma(\sigma + N - 2) = \sigma(\sigma + s), \quad (4.9)$$

$$\Delta f_\sigma = -\sigma(\sigma + s) f_\sigma,$$

где σ — целое число.

5. СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

При построении оператора Лапласа мы сопоставили каждому узлу три числа: l — число левых последующих узлов, r — число правых последующих узлов ($s = l + r$), и постоянную σ (константу разделения*). Для дальнейшего оказывается достаточным использовать вместо трех чисел одно (индекс узла j_θ), определяемое так:

$$2j_\theta + 1 = \sigma_\theta + \frac{s_\theta}{2}. \quad (5.1)$$

Собственную функцию оператора Лапласа надо нормировать на $N-1$ -мерной сфере. Оказывается, однако, удобнее нормировать вклад от каждого узла (входящий множителем в полную собственную функцию) на трехмерной сфере, интегрируя норму функции по θ с весом $\mu(\theta) = \sin 2\theta$.

Полная собственная функция представляется как произведение множителей, каждый из которых зависит от одного угла и трех индексов, самого узла и двух вышележащих слева и справа.

Нетрудно понять, что узлы могут быть четырех разных сортов (рис. 3). Кружочком отмечены последующие узлы, отсутствие кружочка означает, что мы имеем дело с веткой — координатным концом дерева.

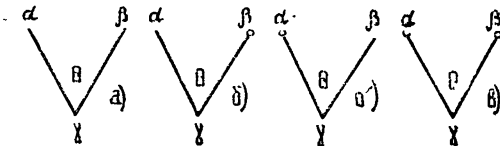


Рис. 3.

При работе с деревьями надо быть аккуратным в выборе границ изменения переменных. Эти границы выбираются так, чтобы сфера покрывалась координатной сеткой один раз. За этим проще всего проследить по аргументу полинома Якоби (см. ниже), который всегда должен изменяться на интервале $(0, 1)$. Отсюда получаем следующие пределы:

$$0 \leq \varphi_a \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_b \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{\sigma'} \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi_n \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5.2)$$

Наиболее общий тип узла — это узел типа б. Он дает вклад в собственную функцию (α, β, γ — номера трех узлов (см. рис. 3)):

$$f(\theta) = (N_{\gamma}^{\alpha, \beta})^{-1/2} \sin^{2j_{\beta}+1}\theta \cos^{2j_{\alpha}+1}\theta P_{j_{\gamma}-j_{\alpha}-j_{\beta}-1}^{(2j_{\beta}+1, 2j_{\alpha}+1)}(\cos 2\theta). \quad (5.3)$$

Нормировочная постоянная определяется известной формулой нормировки полиномов Якоби:

$$(N_{\gamma}^{\alpha, \beta})^{-1} = \frac{(j_{\gamma} - j_{\alpha} - j_{\beta} - 1)!(j_{\gamma} + 1)}{(j_{\gamma} + j_{\alpha} - j_{\beta})!(j_{\gamma} - j_{\alpha} + j_{\beta})!}. \quad (5.4)$$

В начальной стадии работы с деревьями казалось, что узлы а, б, б' должны быть рассмотрены отдельно. Так и было сделано в работах [1, 2]. Однако небольшое обобщение позволяет избежать этого. Рассмот-

* Факторизация, очевидно, есть следствие разделения переменных.

рим простейший узел (а). От него возникает множитель $(2\pi)^{-1/2} \exp im \varphi$, или если ограничиться вещественными функциями, то $\cos m \varphi$ (замену $\cos m \varphi \rightarrow \exp im \varphi$ всегда можно иметь в виду).

Если обратить внимание на полиномы Чебышева и их связь с полиномами Эрмита, то мы обнаружим формулу

$$T_{n/2}(\cos \theta) = \cos \frac{n}{2} \theta = \frac{m! \Gamma\left(\frac{3}{2} - m\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} P_{n/2}^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\cos \theta), \quad (5.5)$$

г. е. нужный нам косинус возникает, если мы формально положим верхние индексы у полинома Якоби равными $-1/2$, или, что то же самое, будем рассматривать координатную вершину как узел с $2j + 1 = -\frac{1}{2}$,

т. е. $j = -3/4$. Все, что надо при этом помнить, это то, что $\exp im \Phi$ и $\cos m \Phi$ по-разному нормированы: при экспоненте надо писать множитель $(2\pi)^{-1/2}$, а при косинусе — $\pi^{-1/2}$ (учитывая, что угол изменяется теперь в пределе от 0 до 2π). Заметим еще, что в функции (5.3) появятся отрицательные дробные степени у тригонометрических функций; эти множители будут использованы для сокращения веса при интегрировании.

Не приводя подробностей, укажем лишь, что анализ формул для двух оставшихся случаев (б) и (б') показал, что и здесь остается справедливой формула (5.3), если свободному концу приписывать j , равное $-3/4$ *

Смысл такой операции не вполне ясен. Можно только отметить, что для 3-мерной сферы в системе координат (2.5) полином Якоби сводится к D -функции Вигнера. Для этого случая $s=2$ (см. рис. 2) и $2j + 1 = \sigma + 1$, т. е. $j = \sigma/2$, что правильно определяет индекс функции Вигнера (см. подробнее [1]). Это оправдывает выбор обозначений.

Отметим еще одну формулу. Собственное значение лапласиана можно переписать так**:

$$\sigma(\sigma + s_0) = (2j_\sigma + 1)^2 - \frac{s_\sigma^2}{4}$$

6. ПЕРЕСАДКА

Теперь мы можем перейти к основной задаче — показать, как преобразуются функции (5.2), заданные разными деревьями. Подробно вычисление таких коэффициентов было сделано в [2]. Решение задачи состояло в том, чтобы найти элементарные операции, на которые можно разбить (факторизовать) коэффициент преобразования. Таких операций оказалось две. Одна из них — поворот (рис. 4), который приводит к появлению фазового множителя. Этот фазовый множитель легко вычисляется, так как он происходит от замены $\theta \rightarrow \pi/2 - \theta$ в полиномах Якоби. Кроме того, происходит замена $\cos \theta \rightleftharpoons \sin \theta$ в множителях перед полиномами. На этом мы здесь останавливаться не будем.

Другая операция — пересадка, она и составляет существенный элемент преобразований. Пересадка (рис. 5) затрагивает узел и три ближайших к нему узла (два последующих и какой-то еще один за ними). Операция пересадки состоит в переносе одного последующего узла. Из

* Считая формально, что за координатным концом есть -1 узел.

** Замена $\sigma \rightarrow -\sigma - s$, $j \rightarrow -j - 1$ оставляет соотношение неизменным.

рисунка видно, что операция пересадки захватывает 6 узлов, они обозначены через $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \delta, \sigma$. Коэффициент преобразования определяется формулой

$$|\alpha \beta \gamma \epsilon \sigma\rangle = \left\| \begin{matrix} \alpha & \beta & \epsilon \\ \gamma & \sigma & \delta \end{matrix} \right\| |\alpha \beta \gamma \delta \sigma\rangle. \quad (6.1)$$

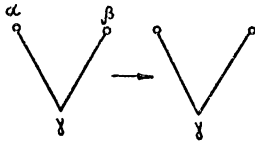


Рис. 4.

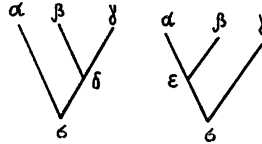


Рис. 5.

Для узлов общего вида, т. е. для узлов, которые не соседствуют со свободными, координатными концами, коэффициент преобразования оказался связанным с коэффициентом Рака [4]. Вычисления показали, что

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & \beta & \epsilon \\ \gamma & \sigma & \delta \end{matrix} \right\| = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} [(2j_\epsilon + 1)(2j_\delta + 1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} j_\alpha & j_\beta & j_\epsilon \\ j_\gamma & j_\sigma & j_\delta \end{matrix} \right\}. \quad (6.2)$$

Существенную роль в выводе играла симметрия формул теории угловых моментов относительно подстановки $j \rightarrow -j - 1^*$. Это благоприятное обстоятельство позволяет использовать хорошо развитый аппарат теории угловых моментов и применить его к преобразованиям координат.

Любое преобразование теперь сводится к вычислению произведений или сумм произведений коэффициентов Рака, т. е. к вычислению $3nj$ коэффициентов.

При этом действует правило Бидерхарна: если при пересадках не происходит существенной перестановки координат, то преобразование осуществляется простым преобразованием коэффициентов Рака. Если пересадка содержит существенную перестановку, то появляются суммы произведений, т. е. $3nj$ коэффициенты более высокого порядка: $9j, 12j, 15j$ символы и т. д.

7. УГЛОВЫЕ МОМЕНТЫ

Деревья можно прочесть и другим образом. Сопоставим каждому узлу момент j . Тогда дерево (рис. 1) можно расшифровать как сложение трех моментов. Разные деревья того же порядка отвечают разным способам суммирования. Элементарному дереву — вилке с тремя узлами — можно сопоставить коэффициент Клебша — Гордана (ККГ) или коэффициент Вигнера:

$$\left(\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}} (-1)^{m_3 - j_1 - j_2} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 m_3 \rangle. \quad (7.1)$$

Изображение ККГ в виде вилки позволяет развить технику суммирования, аналогичную известной технике Левинсона (см. [5, 6]). Надо ввести для этого перевернутые деревья («корнем вверх») и описывать суммиро-

* Если мы в нижнем индексе полинома Якоби произведем такую подстановку, то $j_\gamma - j_\alpha - j_\beta - 1 \rightarrow j_\alpha + j_\beta - j_\gamma$. Новые моменты будут удовлетворять правилу треугольника. При замене $j \rightarrow -j - 1$ σ переходит в $-\sigma - 2$, а из сохранения $j(j+1)$ вытекает, что при этом сохраняется $\sigma(\sigma + 5)$, т. е. это преобразование сохраняет собственное значение лапласиана, что проливает некоторый свет на смысл j .

вание по квантовому числу m как объединение концов с одинаковым номером.

Преобразование между деревьями есть коэффициент Рака:

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_2 j_{12} j_3 j | j_1 j_2 j_3 j_{23} j \rangle = \\ & = (-1)^{l_1+l_2+l_3+l} [(2j_{12} + 1)^{1/2} (2j_{23} + 1)^{1/2}] \begin{Bmatrix} j_1 j_2 j_{12} \\ j_3 j j_{23} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Из графа видно, что в преобразовании участвуют 6 моментов. Если все складывается n моментов, то число узлов в дереве (внутренних) равно $n-2$ (доказывается по индукции). Полное число разных углов в двух деревьях, между которыми происходит перестройка, равно $2(n-2) + n + 1 = 3(n-1)$. Отсюда возникает $6j$, $9j$, $12j$ и т. д. При классификации пересадки надо выделить те, которые сохраняют порядок складываемых моментов или различаются несущественной перестановкой (т. е. перестановкой, которая сводится к поворотам ветвей)*. Такие пересадки описываются произведением коэффициентов Рака (теорема Биденхарна, см. разд. 9). Если в пересадке участвует одна существенная транспозиция, то появляется новый старший коэффициент. Для 4 моментов $9j$ при двух существенных перестановках, 5 моментах $12j$ коэффициент и т. д. Таким образом, можно произвести полную классификацию всех $3nj$ коэффициентов и соответственно всех преобразований координат.

8. ОТКРЫТЫЕ РАЗВИЛКИ

При расчетах преобразований координат коэффициенты Рака упрощаются, если в элементарном узле (развилке) один или два конца свободные.

Подробно эти случаи разобраны в [2]. Назовем узел с двумя открытыми концами — открытой развилкой. Как обычно, открытому концу сопоставляется момент $-3/4$. Если открытая развилка присутствует в обоих деревьях, между которыми происходит пересадка, то коэффициент Рака сводится к D -функции Вигнера с аргументом $\cos \theta = 1$.

Если открытая вилка присутствует только у одного из двух деревьев, то коэффициент превращается в КГГ; операция оказывается идентичной построению представления $O(4)$ как произведения $O(3) \times O(3)$.

Эти упрощения очень существенны. Так, например, при симметризации волновой функции 3 частиц приходится иметь дело с $15j$ коэффициентом ($3 \cdot 3 - 3 = 6$, $3(6 - 1) = 15$). Однако так как все 6 концов дерева свободные, то в коэффициент преобразования не входят коэффициенты выше $6j$. Эта задача приводит к вычислению обобщенных коэффициентов Талми — Мошинского [7]. Применение к ней метода деревьев будет опубликовано отдельно.

Результаты такого рода указывают на связь полученных коэффициентов с D -функциями на многомерных сферах, отвечающих повороту на $\pi/2$. Возникает подозрение, что поворотам на произвольный угол также отвечают значения обобщенных коэффициентов — коэффициентов Фурье от гипергеометрических функций при аргументе, отличном от единицы. Эта связь заслуживает дальнейшего изучения.

9. ТЕОРЕМА БИДЕРХАРНА

Всевозможные деревья заданной размерности можно соединить линиями. Образуется сеть, похожая на схему задачи Эйлера о мостах. Рассмотрим деревья четвертого порядка. Их сеть при непереставленных

* Их 2^{n-1} для каждого дерева.

концах образует замкнутое кольцо с пятью сторонами (рис. 6). Расшифровывая ее, мы можем записать, что произведение 5 коэффициентов Рака (просуммированное по внутренним моментам с учетом дополнительных множителей (6.2)) равно 1. Более эффективное равенство получится, если мы запишем условие, что от одного дерева к другому (через одно) можно прийти двумя путями — один путь содержит два звена без суммирования*, второй — два звена с одним суммированием. Отсюда следует, что сумма произведений трех коэффициентов Рака сводится к простому произведению двух коэффициентов. Это и есть теорема Бидерхарна, обеспечивающая отсутствие суммирования в преобразованиях без существенных перестановок.

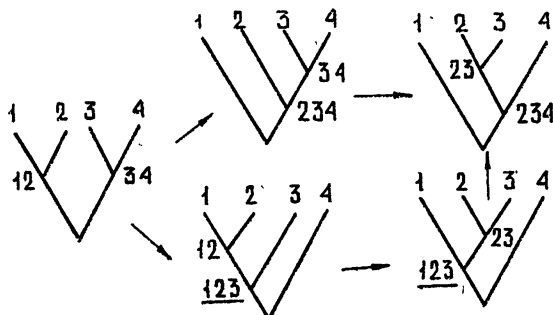


Рис. 6.

Так как (это доказывается) в сетях — таких преобразованиях — не встречается ячеек с числом сторон больше 5, а четырехугольные ячейки не дают новых соотношений, то теорема Бидерхарна исчерпывает все возможные преобразования без существенных перестановок. Мы оставляем без внимания другие задачи по теории угловых моментов и теории координат и их симметрий. Мы также не упоминаем естественно возникающих приложений к теории спецфункций. Задача доклада — обратить внимание на необыкновенную простоту метода деревьев и побудить физиков посмотреть на другие возможные приложения метода. Тот факт, что одно и то же дерево может иметь по крайней мере двойную расшифровку, указывает на возможную применимость метода деревьев к тем задачам, в которых решение выражается через обобщенные гипергеометрические функции.

Метод деревьев создавался в сотрудничестве с Н. Я. Виленкиным, Г. И. Кузнецовым, Е. Л. Сурковым, Ю. А. Даниловым, М. С. Кильдюшовым, В. С. Эфросом, Ю. А. Смирновым. Всем им приятно выразить мою признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Я. Виленкин, Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский, ЯФ, 2, 906 (1965).
2. М. С. Кильдюшов, ЯФ, 15, 197 (1972).
3. Ю. Ф. Смирнов, ЯФ, 20, 540 (1975).
4. Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский, Письма в ЖЭТФ, 22, 378 (1975).
5. А. П. Юцис, И. Б. Левинсон, В. В. Ванагас, Математический аппарат теории момента количества движения, изд. Наука, Вильнюс, 1960.
6. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, Квантовая теория углового момента, изд. Наука, Л., 1975.
7. Я. А. Смородинский, В. С. Эфрос, ЯФ, 17, 210 (1973).

Объединенный институт ядерных исследований

* Суммирование происходит по узлам, отсутствующим в начальном и конечном деревьях. Такие узлы подчеркнуты на рисунке.