

УДК 538.56

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ: ПОДОБИЕ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Г. И. Баренблатт

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение
2. Бегущие волны и автомодельные решения
3. Анализ размерностей
4. Модифицированная задача о тепловом источнике
5. Задача о сильном взрыве и ее модификация. Промежуточные асимптотики
6. Полная и неполная автомодельность. Классификация автомодельных решений
7. Неполная автомодельность в теории турбулентности

1. ВВЕДЕНИЕ

Установление автомодельности всегда было успехом исследователя. В задаче математической физики с двумя независимыми переменными x , t , требовавшей решения уравнений в частных производных, автомодельность означала, что можно так выбрать переменные масштабы $u_0(t)$, $l(t)$ искомых величин и независимой переменной x , что измеренные в новых масштабах характеристики явления выражаются через функции одной переменной: $u = u_0(t) U(x/l(t))$. Решение задачи при этом приводилось к решению обыкновенных уравнений для функций $U(\xi)$. При обработке данных опыта автомодельность приводила к тому, что облако опытных точек ложилось на единую кривую, построенную в некоторых специальным образом выбранных координатах. Все это упрощало получение результата и его представление. Поэтому поиск автомодельностей начинался сразу, как только намечалась новая область исследования. При помощи автомодельных решений исследователи стремились увидеть характерные свойства новых явлений; автомодельные решения использовались как эталоны при оценке приближенных методов решения более сложных задач, как первая ступень при начале счета на ЭВМ и т. д.

Естественной была попытка разобраться в природе автомодельностей. Здесь на определенном этапе существенную роль сыграло привлечение идей анализа размерностей. Действительно, использование естественного произвола в выборе основных единиц измерения, т. е. по существу инвариантности задач относительно некоторой подгруппы группы преобразований подобия, всегда позволяет уменьшить число аргументов в отыскиваемых зависимостях. Оказалось, что во многих случаях этого достаточно для того, чтобы обосновать автомодельность исходя из математической формулировки задачи и получить выражения автомодельных переменных. Таковы, например, хорошо известные задачи о распространении сильных тепловых и сильных взрывных волн. Известная книга Седова [36] содержит большое собрание примеров, иллюстрирующих применение анализа размерностей для установления автомодельности и определения автомодельных переменных, а также изложение применимого в таких случаях общего подхода.

Автомодельности, даже понятые с точки зрения анализа размерностей, оставались в представлении большинства исследователей лишь изолированными точными решениями частных задач: изящными, иногда полезными, но все же весьма ограниченными по своему значению атрибутами физических теорий. Только постепенно было осознано, что значение этих решений гораздо шире: они на самом деле описывают не только поведение физических систем в некоторых частных условиях, но и «промежуточно-асимптотическое» поведение решений много более широких классов задач в областях, где эти решения перестают зависеть от деталей начальных и граничных условий, т. е. поведение физических систем во много более богатом классе условий. Применение вычислительных машин также внесло свой вклад в изменение отношения к автомодельным решениям. Именно, раньше считалось, что переход от уравнений с частными производными к обыкновенным уравнениям упрощает дело, и автомодельные решения привлекали внимание прежде всего с точки зрения простоты их вычисления. Постепенно ситуация усложнялась и во многих случаях оказывалось, что наиболее простым способом счета краевых задач для систем обыкновенных уравнений, к которым приводилось построение автомодельных решений, становится счет методом установления решений исходных уравнений в частных производных. Автомодельность же продолжала привлекать внимание как глубокий физический факт, свидетельствующий о наличии определенного типа стабилизации исследуемых процессов, имеющего место для достаточно широкого круга условий. Уместно провести параллель между автомодельностью и стационарностью: всем понятно, например, насколько содержательно утверждение: «решение быстро стремится к стационарному с ростом времени». Столь же содержательно аналогичное утверждение применительно к автомодельному, а не к стационарному решению.

Рассмотрение автомодельностей как промежуточных асимптотик позволило правильно понять роль анализа размерностей при установлении автомодельности. Как оказалось, соображения размерности достаточны для установления автомодельности далеко не всегда; более того, можно утверждать, что, как правило, это не так. Зельдович [15] впервые явно выделил решения, в которых анализа размерности оказывается недостаточно для установления автомодельности, хотя фактически подобные задачи рассматривались и ранее (Гудерлей [13], Вейцеккер [11]); они были названы автомодельностями второго рода (следует отметить, что сам термин «автомодельность второго рода» употреблялся Я. Б. Зельдовичем в его ранних работах в более узком смысле). В известной книге Зельдовича и Райзера [16], а также в статье Брушлинского и Каждана [10] был проведен подробный анализ известных к тому времени автомодельных решений такого типа.

В работах автора и Сивашинского [7, 8] были разобраны два показательных класса задач, связанных с уравнениями теплопроводности и газодинамики. Обе задачи содержали некоторый безразмерный постоянный параметр. Как оказалось, при одном единственном значении этого параметра асимптотики решения получаются в виде обычных автомодельностей, автомодельностей первого рода. В частности, выражения автомодельных переменных получаются при этом значения параметра анализом размерностей с привлечением имеющихся в этом случае интегральных законов сохранения. При всех остальных значениях параметра асимптотики решения представляют собой автомодельности второго рода. Рассмотрение этих задач позволило понять, в чем природа классификации автомодельностей. Оказалось, что предельный переход от неавтомодельного решения к автомодельной промежуточной асимптотике может быть регулярным или нет: при стремлении неавтомодельной

переменной к нулю решение может либо стремиться к конечному пределу, либо не стремиться к конечному пределу, но иметь степенную асимптотику. При этом неавтомодельная переменная либо вовсе исчезает из предельного решения, либо остается в нем. В зависимости от этого предельная автомодельность будет полной или неполной, т. е. принадлежит к автомодельностям первого или второго рода.

Выяснению природы неполных автомодельностей помогло установление тесной связи классификации автомодельностей и решений типа бегущих волн [5, 6], для которых подобная классификация уже существовала; рассмотрение бегущих волн для нелинейной задачи диффузии в классической работе Колмогорова, Петровского и Пискунова [20] вообще было первым примером строгого анализа промежуточной асимптотики нелинейных задач.

Таким образом, автомодельность связывается [5, 6] с нелинейной, вообще говоря, задачей на собственные значения, существование решения которой наряду с групповой инвариантностью обеспечивает глобальное существование искомой промежуточной асимптотики. Оказывается нетривиальным вопрос о спектре — множестве собственных значений в задаче. В частности, в тех случаях, когда спектр оказывается непрерывным, показатели степени в автомодельных переменных, вообще говоря, определяются начальными условиями — показательный пример здесь доставляет автомодельная интерпретация уравнения Кортевега—де Вриза.

В последнее время идеи, связанные с концепцией неполной автомодельности и автомодельных решений второго рода, были использованы для анализа многих важных задач, представляющих самостоятельный, неиллюстративный интерес. О некоторых из этих задач также будет идти речь ниже.

В прошедшем десятилетии соображения автомодельности широко использовались в теории фазовых переходов физиками (они именуют автомодельность «скейлингом»). В этой теории нет точно сформулированной краевой задачи, и поэтому предлагаемые рецепты и высказываемые утверждения носят в значительной мере интуитивный характер. На самом деле, скейлинг в теории фазовых переходов — это в точности то, что нами сегодня понимается под неполной автомодельностью. Поэтому мне кажется, что тем, кто интересуется скейлингом, бесполезно взглянуть, как работает это понятие в других ситуациях, где на самом деле имеются точные формулировки краевых задач и возникновение автомодельной асимптотики можно непосредственно проследить.

2. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Бегущие волны — это движения, все характеристики которых зависят только от комбинации $x - \lambda t + c$ (x — пространственная декартова координата, t — время, λ , c — постоянные). Простейший пример — «волна Бюргерса» — решение уравнения

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_{xx}^2 u \quad (2.1)$$

вида $u = U(x - \lambda t + c)$, удовлетворяющее условиям $u(-\infty) = u_1$, $u(\infty) = u_2$. Важно, что скорость распространения волны Бюргерса λ выражается только через граничные значения функции u и не зависит от параметра ν , т. е. от структуры решения в переходной области:

$$\lambda = (u_1 + u_2)/2 \quad (2.2)$$

— это соотношение получается элементарно из закона сохранения, т. е. интегрированием уравнения от $x = -\infty$ до $x = \infty$ в предполо-

жении, что решение — бегущая волна. Олейник строго доказано [30], что к решению такого вида асимптотически стремится при возрастании времени решение произвольной начальной задачи, значения которого в начальный момент достаточно быстро стремятся к u_1 и u_2 соответственно при x , стремящемся к $-\infty$ и ∞ .

Решения такого типа, для которых скорость распространения определяется из законов сохранения, представляют собой на самом деле редкое исключение среди бегущих волн. Как правило, для нахождения скорости распространения нужно определить структуру решения в переходной области. Показательный пример решений такого типа доставляет задача о распространении гена, имеющего преимущество в борьбе за существование, рассмотренная Колмогоровым, Петровским и Пискуновым [20]. В этой работе строилось решение типа бегущей волны $u = U(x - \lambda t + c)$ для нелинейного уравнения диффузии

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u + f(u), \quad (2.3)$$

где $f(u)$ — функция, удовлетворяющая условиям $f(u_1) = f(u_2) = 0$, $f(u) > 0$, $f'(u) < f'(0) = \alpha$, $u_1 < u < u_2$. Построение решения типа бегущей волны $u = U(\xi)$, $\xi = x - \lambda t + c$, удовлетворяющего условиям $U(-\infty) = u_1$, $U(\infty) = u_2$, приводит, очевидно, к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\lambda p + \kappa p \frac{dp}{du} + f(u) = 0$$

($p = \frac{dU}{d\xi}$) при двух краевых условиях: $p(u_1) = 0$, $p(u_2) = 0$, т. е. к нелинейной задаче на собственные значения. Анализ показал, что скорость распространения λ может быть произвольной величиной, большей или равной $\lambda_0 = 2\sqrt{\kappa\alpha}$, $\lambda \geq \lambda_0$. Однако только решение, отвечающее $\lambda = \lambda_0$, может быть асимптотикой при $t \rightarrow \infty$ — решения начальной задачи с начальными данными для u , стремящимися достаточно быстро к u_1 и u_2 при $x \rightarrow \mp \infty$; остальные решения неустойчивы. Близкий пример доставляет задача теплового распространения пламени, изученная Зельдовичем и Франк-Каменецким [17], где дело также сводится к построению решений типа бегущих волн для уравнения (2.3), но $f(u)$ — несколько иная функция, она тождественно равна нулю на некотором отрезке вблизи $u = u_1$: $f(u) \equiv 0$, $u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta$, обращается в нуль при $u = u_2$ и положительна между $u_1 + \Delta$ и u_2 . В этом случае, как показано Зельдовичем [14], скорость распространения λ определяется единственным образом из условия существования решения вида $u = U(x - \lambda t + c)$, удовлетворяющего условиям $U(-\infty) = u_1$, $U(\infty) = u_2$. Многочисленные задачи такого рода возникают также при исследовании распространения газового разряда, они рассмотрены в монографии Райзера [34].

Таким образом, бегущие волны разбиваются на два класса: для одних скорость распространения можно определить только из «внешних» законов сохранения, для других — скорость распространения находится из условия существования в целом решения рассматриваемого вида, удовлетворяющего нужным условиям.

Сделаем теперь замену переменных:

$$x = \ln \xi, \quad t = \ln \tau, \quad c = -\ln A. \quad (2.4)$$

При этом решение типа бегущей волны принимает вид

$$u = U(x - \lambda t + c) = U\left(\ln \frac{\xi}{A\tau^\lambda}\right) = V\left(\frac{\xi}{A\tau^\lambda}\right), \quad (2.5)$$

т. е. в переменных ξ , τ , оно автомодельно: распределения характеристик движения в различные моменты времени получаются одно из другого не параллельным переносом, как для бегущих волн, а преобразованием подобия. Общая форма таких автомодельных решений такова:

$$u = u_0(t) U(x/l(t)). \quad (2.6)$$

Здесь u , вообще говоря, — векторная характеристика рассматриваемого движения, $u_0(t)$ — зависящий от времени масштаб данной характеристики, $l(t)$ — зависящий от времени масштаб независимой переменной x . Разумеется, выбор в качестве названия одной из независимых переменных времени t чисто условен.

Перефразируя уже известную классификацию решений типа бегущих волн, мы получаем, что автомодельные решения могут быть двух типов. Для решений первого типа показатель степени λ в выражении автомодельной переменной

$$\xi/A\tau^\lambda$$

— аналог скорости распространения для бегущей волны — находится из одних законов сохранения. Для решений второго типа показатель λ определяется из условия существования в целом решения рассматриваемого вида, т. е. автомодельного решения, удовлетворяющего определенным граничным условиям.

При установлении автомодельности в ряде случаев бывает полезно использовать соображения анализа размерности. Для полноты ниже дается краткое изложение анализа размерностей. Это изложение отличается от имеющихся в литературе, хотя в основных идеях следует превосходной и незаслуженно забываемой в последнее время книге Бриджмена [9].

3. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

1) Как хорошо известно, физические величины выражаются числами, которые получаются путем измерения — прямого или косвенного сравнения с соответствующими единицами измерения. Единицы измерения разделяются на основные и производные. Основные единицы измерения задаются произвольно в виде некоторых эталонов, искусственных или природных, производные получаются из основных в силу определения физической величины, которое всегда является указанием способа ее измерения, по крайней мере мысленного. Совокупность основных единиц измерения, достаточных для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений, называется системой единиц измерения.

Классом систем единиц измерения называется совокупность систем единиц измерения, отличающихся между собой только величиной основных единиц измерения. Так, система СГС входит в класс систем единиц измерения, в котором основными единицами являются g/M , cm/L , c/T , где M , L , T — отвлеченные числа, показывающие, во сколько раз уменьшаются основные единицы массы, длины, времени при переходе от исходной системы СГС к другой системе данного класса. Этот класс обозначается MLT^* . Размерностью физической величины называется функция, определяющая, во сколько раз изменится численное значение этой величины при переходе от исходной системы к другой системе единиц измерения внутри данного класса. Размерность величины φ

* Обозначение класса систем единиц измерения получается последовательным выписыванием символов величин, единицы измерения которых приняты за основные. Одновременно эти символы обозначают, во сколько раз уменьшается соответствующая единица измерения при переходе от одной системы к другой системе данного класса.

мость (2.5), или, что то же, исходная зависимость (3.1) представляется на самом деле через функцию $n - k$ аргументов:

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (3.6)$$

— на k аргументов меньше, чем исходная зависимость. Этот факт составляет содержание центрального (и, по существу, единственного содержательного) утверждения анализа размерностей — Π -теоремы, явно сформулированной и доказанной, по-видимому, впервые Э. Баккингемом. Более полное доказательство Π -теоремы можно найти у Бриджмена [9]. Конечно, Π -теорема интуитивно вполне очевидна, и ее неявное использование началось задолго до того, как она была явно сформулирована и доказана; здесь следует, прежде всего, назвать имена Фурье, Рейнольдса и Релея.

3) Теперь мы можем продемонстрировать, как анализ размерности применяется для установления автономности решения и определения автономных переменных, исходя из математической формулировки задачи. Сделаем это на хорошо известном примере решения типа источника линейного уравнения теплопроводности:

$$\partial_t u = \kappa \partial_{xx}^2 u \quad (-\infty < x < \infty, t > 0), \quad (3.7)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) \equiv 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = Q \quad (3.8)$$

и условию на бесконечности

$$u(\pm \infty, t) \equiv 0. \quad (3.9)$$

Решение, очевидно, зависит от обеих независимых переменных и всех постоянных параметров задачи:

$$u = f(t, \kappa, Q, x). \quad (3.10)$$

Размерности определяющих параметров суть $[t] = T$, $[x] = L^2 T^{-1}$, $[Q] = [u]L$, $[x] = L$ (L — символ размерности длины, T — символ размерности времени, $[u]$ — размерность определяемой величины u). Размерности первых трех определяющих параметров независимы. Имеем, очевидно, $n = 4$, $k = 3$, $n - k = 1$, $\Pi = u/Q(\kappa t)^{-1/2}$, $\Pi_1 = x/(\kappa t)^{1/2}$, откуда

$$u = \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{\kappa t}}\right). \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в уравнение (3.7) и условия (3.8), (3.9), легко находим $f = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2/4)$. Мы могли бы захотеть получить закон подобия для убывания температуры в точке максимума — те же рассуждения дают с точностью до универсальной константы:

$$u_{\max} \sim Q/\sqrt{\kappa t}. \quad (3.12)$$

Проведенное рассуждение типично. Таким способом часто устанавливают автономность решения по математической формулировке задачи, определяют автономные переменные (в нашем случае $u\sqrt{\kappa t}/Q$, $x/\sqrt{\kappa t}$) и находят законы подобия.

Оказывается, однако, что такое рассуждение, бесспорно применимое в отдельных случаях, вообще говоря, недостаточно и может привести к прямой ошибке. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим небольшую, на

первый взгляд, модификацию рассмотренной только что задачи о тепловом источнике.

4. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА О ТЕПЛОМ ИСТОЧНИКЕ

1) В модифицированной задаче меняется только уравнение, которому удовлетворяет функция u . Оно таково:

$$\partial_t u = \begin{cases} \kappa \partial_{xx}^2 u & (\partial_t u \geq 0) \\ \kappa_1 \partial_{xx}^2 u & (\partial_t u \leq 0) \end{cases}, \quad (4.1)$$

где κ_1 — константа, отличная, вообще говоря, от κ , так что коэффициент температуропроводности зависит от того, нагревается тело в данной точке или остывает*. Существенно, что подобное поведение коэффициента температуропроводности связано с теплоемкостью: теплопроводность не зависит от направления изменения температуры, как что условие непрерывности теплового потока требует непрерывности производной $\partial_x u$. Нас интересует, таким образом, решение уравнения (4.1), непрерывное с непрерывными производными, удовлетворяющее тем же условиям (3.8) и (3.9). Казалось бы, соображения размерности при $\kappa_1 \neq \kappa$ должны проходить совершенно так же, как и при $\kappa_1 = \kappa$, поскольку список определяющих параметров дополняется только безразмерным постоянным параметром $\varepsilon = \kappa_1/\kappa$. Поэтому, на первый взгляд, искомое решение должно представляться в виде

$$u = \frac{Q}{\sqrt{\kappa t}} \Phi(\xi, \varepsilon), \quad \xi = x/\sqrt{\kappa t}, \quad (4.2)$$

причем функция Φ — четная, $\Phi(\xi, \varepsilon) = \Phi(-\xi, \varepsilon)$. Далее, область, где $\partial_t u \geq 0$, должна соответствовать по тем же соображениям размерности $|x| \geq x_0(t) = \xi_0 \sqrt{\kappa t}$, область, где $\partial_t u < 0$, должна соответствовать $|x| < \xi_0 \sqrt{\kappa t}$. Здесь ξ_0 — константа, зависящая от ε . Однако оказывается, что решения уравнения (4.1) в форме (4.2), непрерывного и обладающего непрерывной производной по x и удовлетворяющего естественным условиям симметрии и обращения в нуль на бесконечности, не существует. Чтобы в этом убедиться, подставим (4.2) в (4.1), получаем для Φ обыкновенное уравнение с разрывным коэффициентом:

$$\varepsilon \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi \Phi = 0 \quad (0 \leq \xi \leq \xi_0), \quad \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi \Phi = 0 \quad (\xi_0 < \xi), \quad (4.3)$$

причем точка $\xi = \xi_0$ соответствует обращению в нуль величины $\frac{d(\xi\Phi)}{d\xi}$, которой пропорциональна $\partial_t u$. Интегрируя и используя граничные условия для функции Φ , имеем

$$\Phi = c_1 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\varepsilon}\right) \quad (0 \leq \xi \leq \xi_0), \quad \Phi = c_2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right) \quad (\xi_0 < \xi), \quad (4.4)$$

где c_1 и c_2 — константы. Из условий непрерывности функции u и ее производной $\partial_x u$ вытекает непрерывность Φ и $\frac{d\Phi}{d\xi}$ при $\xi = \xi_0$, откуда

* Такая задача встречается в теории движения жидкости в пористой среде. Подробнее обсуждение постановки этой задачи не имеет сейчас для нас значения, интересующиеся могут найти ее в книге [4].

и из (4.4) получается система линейных однородных алгебраических уравнений для определения c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{4\varepsilon}\right) &= c_2 \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{4}\right), \\ c_1 \frac{\xi_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{4\varepsilon}\right) &= c_2 \xi_0 \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

При $\varepsilon \neq 1$, т. е. $x_1 \neq x$, эта система, очевидно, не имеет нетривиального решения ни при каком конечном ξ_0 , поскольку ее определитель отличен от нуля. Тем самым доказано, что решения поставленной задачи в форме (2.5) не существует.

2) Для того, чтобы разобраться в возникшем парадоксе, заметим, что условия (3.8) носят предельный характер и описываются обобщенной функцией — δ -функцией Дирака. На самом деле нас интересует не решение вырожденной задачи, а асимптотика при больших временах решений начальной задачи, удовлетворяющих начальным условиям, описываемым обычными гладкими функциями вида

$$u(x, 0) = (Q/l) u_0(x/l), \quad (4.6)$$

где l — некоторый пространственный масштаб, а u_0 — четная гладкая быстро монотонно убывающая с ростом своего аргумента функция, интеграл от которой по всей оси равен единице (рис. 1). Для таких

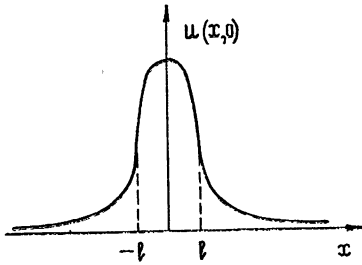


Рис. 1.

начальных условий уже можно быть уверенным, что решение задачи Коши существует, единственно и достаточно гладко — это следует из общих теорем, доказанных Каменостской [18]. Однако в этой задаче появился новый размерный определяющий параметр l , и ее решение уже не будет автомодельным. В самом деле, та же процедура анализа размерностей, что и в конце предыдущего параграфа, дает в этом случае

$$u = \frac{Q}{\sqrt{x t}} f(\xi, \eta, \varepsilon), \quad \eta = \frac{l}{\sqrt{x t}}. \quad (4.7)$$

Рассмотренное выше автомодельное решение при $x_1 = x$ отвечает сингулярному начальному условию, получающемуся из (4.6) при $l = 0$. Но, как хорошо известно, решение типа мгновенного источника шире, чем просто точное частное решение отдельной задачи — это асимптотика определенного класса решений начальной задачи при больших временах. В самом деле, при $t \rightarrow \infty$ величина η стремится к нулю. Выбирая соответственно x , можно этот предельный переход осуществлять так, чтобы $\xi = x/\sqrt{x t}$ оставалось постоянным; при $x_1 = x$ в пределе получается рассмотренное выше автомодельное решение. Несуществование при $x_1 \neq x$ решения начальной задачи с сингулярными начальными данными (3.8) означает, что при $\varepsilon \neq 1$ не существует конечного неравного нулю предела функции $f(\xi, \eta, \varepsilon)$ при $\eta \rightarrow 0$. Тем не менее асимптотика решения (4.7) при $\eta \rightarrow 0$ оказывается автомодельной. Дело в том, что при $\varepsilon \neq 1$ и малых η функция $f(\xi, \eta, \varepsilon)$, определяющая решение (4.7), представляется в виде

$$f(\xi, \eta, \varepsilon) = \eta^\alpha F(\xi, \varepsilon) + \dots, \quad (4.8)$$

где α — некоторое действительное число, неравное нулю при $x_1 \neq x$, откуда следует, что при $t \rightarrow \infty$ асимптотическая форма решения задачи Коши (4.7) имеет вид

$$u = \frac{Ql^\alpha}{(xt)^{\frac{1+\alpha}{2}}} F(\xi, \varepsilon). \quad (4.9)$$

Заметим теперь, что стремление неавтономного параметра η к нулю при конечном ξ может осуществляться также путем предельного перехода при $l \rightarrow 0$ и неизменных x и t . Выражение (4.9) показывает, что если выполнять этот предельный переход, оставляя Q неизменным, то при $x_1 \neq x$ предел решения будет равен нулю или бесконечности, в зависимости от того, положительно α или отрицательно. Для того, чтобы получить при помощи предельного перехода $l \rightarrow 0$ правильное предельное выражение решения задачи, которое получается при конечном l и $t \rightarrow \infty$, нужно переходить к пределу при $l \rightarrow 0$, устремляя одновременно Q к бесконечности или нулю, в зависимости от знака α , так чтобы оставалось конечным произведение Ql^α . Получающееся при таком предельном переходе автономное решение имеет уже не форму (4.2), но представляется в виде

$$u = \frac{A}{(xt)^{\frac{1+\alpha}{2}}} \Phi(\xi, \varepsilon), \quad A = \beta \lim_{l \rightarrow 0} Ql^\alpha, \quad x_0(t) = \xi_0 \sqrt{xt}. \quad (4.10)$$

Здесь β — безразмерная постоянная, зависящая от нормировки функции Φ , а параметр α остался «следом» исчезнувших при предельном переходе параметров Q и l . Параметр α можно вычислить, на самом деле выполняя, например, при помощи численного счета предельный переход от решения неавтономной задачи к автономной асимптотике, но можно найти также, строя непосредственно автономное решение, из условия его существования. При непосредственном построении автономного решения параметр α неизвестен и подлежит определению; его нахождение будет явно фигурировать в задаче построения автономного решения.

Действительно, подставляя (4.10) в основное уравнение (4.1), получаем для функции $\Phi(\xi, \varepsilon)$ обыкновенное уравнение с разрывным коэффициентом при старшей производной:

$$\varepsilon \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1+\alpha}{2} \Phi = 0 \quad (0 \leq \xi \leq \xi_0), \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{1+\alpha}{2} \Phi = 0 \quad (\xi_0 < \xi),$$

причем в точке $\xi = \xi_0$ обращается в нуль величина $\xi \frac{d\Phi}{d\xi} + (1+\alpha)\Phi$

которой пропорциональна $\partial_t u$. Решение уравнения (4.11) просто выражается (см. [1]) через вырожденные гипергеометрические функции $M(p, q, z)$ или родственные им функции параболического цилиндра $D_m(z)$. При этом при произвольном α это уравнение нужного решения не имеет, но из условия обращения в нуль величины $\xi \frac{d\Phi}{d\xi} + (1+\alpha)\Phi$

при $\xi = \xi_0 \pm 0$ получаются с использованием рекуррентных соотношений для производных функций параболического цилиндра два соотношения:

$$D_{\alpha+2} \left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}} \right) = 0, \quad M \left(-\frac{\alpha}{2} - 1, \frac{1}{2}, \frac{\xi_0^2}{4\varepsilon} \right) = 0, \quad (4.12)$$

определяющие параметр α и величину ξ_0 в зависимости от ε , для которых решение уравнения (4.11), обладающее нужными свойствами, существует. Можно показать, что в известных предположениях величины α и ξ_0 определяются соотношениями (4.12) однозначно; график функции $\alpha(\varepsilon)$ представлен на рис. 2. Как видно, при $\varepsilon = 1$ величина α обращается в нуль в полном соответствии с известными результатами для классического случая. При $\varepsilon > 1$ величина α положительна, при $\varepsilon < 1$ — отрицательна.

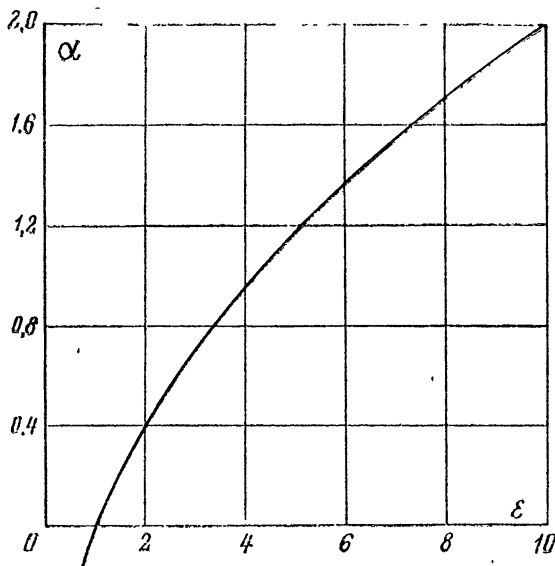


Рис. 2.

Таким образом, определение автомодельного решения в общем случае, $\varepsilon \neq 1$, приводит к нелинейной задаче на собственные значения; роль собственного значения играет показатель степени времени в выражении для автомодельной переменной. Решение задачи на собственные значения определяет искомую асимптотику (4.10) решения рассматриваемой задачи с точностью до константы A . В классическом случае, $\varepsilon = 1$, эта константа находится из интегрального закона сохранения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = A, \quad (4.13)$$

справедливого и для неавтомодельного движения. Интегральный закон сохранения при $x_1 \neq x(\varepsilon \neq 1)$ не имеет смысла, заменяясь неинтегрируемым соотношением:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = -2(x_1 - x) (\partial_x u)_{x=x_1(t)} \neq 0; \quad (4.14)$$

поэтому определить константу A по начальным условиям неавтомодельной задачи при $\varepsilon \neq 1$ непосредственно не удается: константа A является более сложным функционалом начального распределения $u(x, 0)$. Заме-

тим, что если вместо $u(x, 0)$ взять в качестве начального распределения функцию $u(x, t_1)$, соответствующую любому моменту времени $t = t_1 > 0$, то константа A не изменится; в этом смысле A является «интегралом» уравнения (4.1). Изложенное здесь рассмотрение модифицированной задачи о тепловом источнике было проведено в работе автора и Сивашинского [7].

3) Было бы весьма важно строго доказать, что решение любой начальной задачи (4.6) при быстро убывающей на бесконечности функции $u(x, 0)$ выходит при больших временах на построенную автомодельную асимптотику. Пока это было проверено численно студентом-дипломником МГУ В. М. Уроевым. Именно, им считалось решение неавтомодельной начальной задачи для уравнения (4.1) при $\kappa = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и различных начальных условиях для разных значений ε . В результате счета оказалось, что решение сравнительно быстро выходит на автомодельную асимптотику нужного вида:

$$u = \frac{A}{(xt)^{\frac{1+\alpha}{2}}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{xt}}\right)$$

(функцию Φ удобно нормировать так, что $\Phi(0) = 1$), причем получающиеся значения α с хорошей точностью совпадают со значениями α , найденными из решения задачи на собственные значения и представленными на рис. 2. На графике рис. 3 представлены значения функции

$u(x, t)(xt)^{\frac{1+\alpha}{2}}/A$ в зависимости от x/\sqrt{xt} для разных моментов t при $\varepsilon = 2$ и начальном условии $u(x, 0) \equiv 10$ ($0 \leq x \leq 0,1$), $u(x, 0) \equiv 0$ ($x > 0,1$). Как видно, с ростом t решение быстро стремится к автомодельному. Предельная кривая, получающаяся при больших t , практически совпала с кривой, полученной из решения задачи на собственные значения. При этом величины A и α находились по асимптотике закона убывания максимума, который в данном случае имеет вид

$$u_{\max} = \frac{A}{(xt)^{\frac{1+\alpha}{2}}}. \quad (4.15)$$

При изменении начальных условий константа A менялась, константа же α оставалась неизменной.

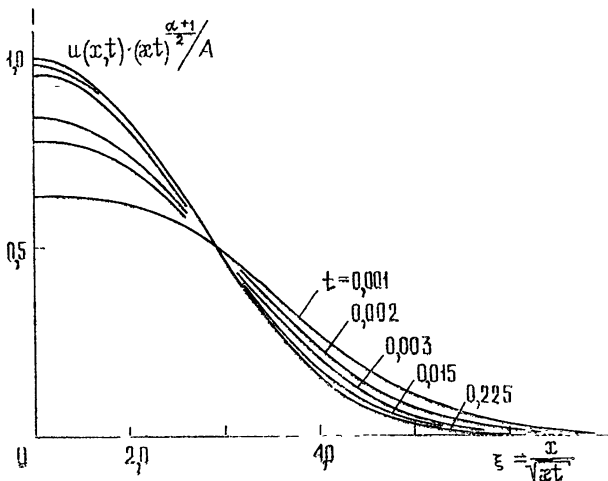


Рис. 3.

5. ЗАДАЧА О СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ И ЕЕ МОДИФИКАЦИЯ. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ

1) Задача о сильном точечном взрыве, изученная Седовым [35] и Тейлором [38], представляет собой показательный пример применения анализа размерности. Именно, строится решение уравнений центрально-симметричного адиабатического движения газа

$$\begin{aligned} \partial_t v + v \partial_r v + \partial_r p / \rho &= 0, \\ \partial_t \rho + \partial_r \rho v + 2\rho v / r &= 0, \\ \partial_t (p / \rho^\gamma) + v \partial_r (p / \rho^\gamma) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

соответствующее мгновенному выделению в некоторой точке конечной порции энергии E . Здесь p — давление, ρ — плотность, v — скорость, r — радиальная координата, отсчитываемая от центра взрыва, t — время. Газ предполагается вначале покоящимся, его давление равно нулю, начальная плотность газа считается равной ρ_0 везде кроме центра взрыва. В каждый момент времени пространство разбивается на возмущенную область, внутри которой решение меняется гладко и описывается уравнениями (5.1), ограниченную ударной волной — сферой радиуса $r_f(t)$, на которой характеристики движения — давление, плотность, скорость — меняются скачкообразно. Вне этой сферы сохраняется состояние покоя газа. Условия сохранения массы, импульса и энергии на фронте ударной волны записываются в виде (индексом f обозначены значения величин за фронтом ударной волны, т. е. при $r = r_f - 0$)

$$\begin{aligned} \rho_f (v_f - D) &= -\rho_0 D, \\ \rho_f (v_f - D) v_f + p_f &= 0, \\ \rho_f (v_f - D) \left[\frac{p_f}{(\gamma - 1) \rho_f} + \frac{v_f^2}{2} \right] + p_f v_f &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь $D = \frac{dr_f}{dt}$ — скорость распространения ударной волны по покоящемуся газу. Поскольку энергия единицы объема газа равна $\rho(v^2/2 + p/(\gamma - 1)\rho)$, начальное условие можно записать в виде

$$\rho(r, 0) \equiv \rho_0, \quad p(r, 0) \equiv 0, \quad v(r, 0) \equiv 0 \quad (r \neq 0), \quad (5.3)$$

$$4\pi \int_0^\infty \rho \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \right] r^2 dr = E.$$

Все характеристики движения зависят, как видно, от величин E , ρ_0 , t , r , γ и только от них. Применяя описанную выше технику анализа размерностей, получаем

$$\begin{aligned} p &= \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\xi, \gamma), & \rho &= \rho_0 R(\xi, \gamma), & v &= \frac{r}{t} V(\xi, \gamma), \\ r_f &= \xi_0(\gamma) \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь $\xi = r/(Et^2/\rho_0)^{1/5}$. Подставляя (5.4) в уравнения (5.1), получаем для функций P , V , R некоторую систему обыкновенных уравнений,

которую мы здесь не выписываем. Условия на фронте дают граничные условия для функций P , V , R :

$$P(\xi_0 - 0) = \frac{8}{25(\gamma + 1)}, \quad V(\xi_0 - 0) = \frac{4}{5(\gamma + 1)}, \quad R(\xi_0 - 0) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (5.5)$$

Далее, из (5.4) следует, что полная энергия газа в возмущенной области \mathcal{E} постоянна во времени, т. е. является интегралом движения:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 4\pi \int_0^{r_f} \rho \left(\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) r^2 dr = \\ &= 4\pi \rho_0 \frac{E}{\rho_0} \int_0^{\xi_0} R(\xi) \left[\frac{V^2(\xi)}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P(\xi)}{R(\xi)} \right] \xi^4 d\xi = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В силу начального условия (5.3) постоянная в правой части равна E , откуда

$$\int_0^{\xi_0} R(\xi) \left[\frac{V^2(\xi)}{2} + \frac{P(\xi)}{(\gamma - 1) R(\xi)} \right] \xi^4 d\xi = \frac{1}{4\pi}. \quad (5.7)$$

Решение упомянутой системы уравнений при условиях (5.5) получается, как можно показать, в конечном виде. Константа ξ_0 находится из нормировочного условия (5.7). Как можно показать, далее, построенное решение удовлетворяет важному условию симметрии:

$$v(0, t) \equiv 0, \quad (5.8)$$

обеспечивающему отсутствие притока вещества и энергии в центре при $t > 0$.

Построенное решение представляет собой промежуточно-асимптотическое описание движения газа на газодинамической стадии ядерного взрыва. Газодинамическая стадия ядерного взрыва начинается (подробности можно найти в монографии Зельдовича и Райзера [16]), когда мощная ударная волна, образующаяся вследствие разогрева газа, обгоняет предшествовавшую ей тепловую волну, распространявшуюся по еще неподвижному газу, так что начальное выделение энергии происходит не в точке, а в сфере некоторого радиуса R_0 . Далее покоящийся газ находится под давлением p_0 , а не под нулевым давлением. Это приводит к тому, что на самом деле в задаче имеются два характерных масштаба времени и два характерных линейных размера:

$$T_1 = \left(\frac{\rho_0 R_0^5}{E} \right)^{1/2}, \quad T_2 = \left(\frac{\rho_0 E^{2/3}}{\rho_0^{5/3}} \right)^{1/2}, \quad L_1 = R_0, \quad L_2 = \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/3}. \quad (5.9)$$

Однако для ядерного взрыва в отличие от обычного эти масштабы сильно «разнесены» между собой: $T_1 \lll T_2$, $L_1 \lll L_2$. Поэтому изложенное выше решение представляет собой промежуточную асимптотику, описывающую газодинамическую стадию ядерного взрыва при

$$T_1 \ll t \ll T_2, \quad L_1 \ll r \ll L_2, \quad (5.10)$$

т. е. при временах и расстояниях от центра взрыва, достаточно больших, чтобы исчезло влияние размера области начального выделения

энергии, и, вместе с тем, достаточно малых, чтобы еще не чувствовались влияния противодействия.

2) Обратимся теперь к модифицированной задаче о сильном взрыве. Именно, предположим, что на фронте ударной волны имеет место приток (например, вследствие химической реакции) или потери (например, вследствие излучения) энергии. Тогда уравнение энергии на фронте принимает форму

$$\rho_f(v_f - D) \left(\frac{v_f^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_f}{\rho_f} \right) + p_f v_f - \rho_f(v_f - D) \varepsilon = 0, \quad (5.11)$$

где ε — интенсивность потерь ($\varepsilon < 0$) или притока ($\varepsilon > 0$) энергии за единицу времени в единице массы газа, проходящей через фронт.

Мы здесь рассмотрим модельную задачу, в которой предполагается, что интенсивность потерь или выделения энергии пропорциональна температуре: $\varepsilon = \tilde{A}T_f = C p_f / \rho_f$, где \tilde{A} , C — константы. Удобно ввести новое обозначение

$$C = \frac{\gamma_1 - \gamma}{(\gamma_1 - 1)(\gamma - 1)}. \quad (5.12)$$

При $\gamma_1 = 1$, $C = -\infty$ это означает, что вся тепловая энергия частиц газа теряется на фронте; при возрастании γ_1 от единицы до γ величина C возрастает от $-\infty$ до нуля, доля теряемой тепловой энергии уменьшается. Случай $\gamma_1 = \gamma$ соответствует отсутствию притока или потерь энергии на фронте — нормальному сильному взрыву. При $\gamma_1 > \gamma$ имеет место приток энергии на фронте. С учетом (5.12) условие сохранения энергии на фронте волны записывается в виде

$$\rho_f(v_f - D) \left(\frac{v_f^2}{2} + \frac{1}{\gamma_1 - 1} \frac{p_f}{\rho_f} \right) + p_f v_f = 0, \quad (5.13)$$

т. е. так же, как и при обычном сильном взрыве, но с измененным эффективным показателем адиабаты: вместо γ в (5.13) стоит γ_1 .

Уравнения движения (5.1), условия сохранения массы и импульса на фронте (первые два соотношения (5.2)), а также условие симметрии (5.8) остаются для модифицированной задачи в силе.

Попробуем теперь построить такое же, как раньше, решение этой задачи, отвечающее мгновенному выделению в точке-центре взрыва конечной порции энергии E , т. е. начальному условию (5.3). Казалось бы, ничто в наших рассуждениях, основанных на анализе размерностей, не должно измениться, поскольку единственным новым определяющим параметром в рассматриваемой нами задаче по сравнению с обычной задачей о сильном взрыве является постоянный безразмерный параметр γ_1 . Поэтому искомое решение должно на первый взгляд по тем же основаниям иметь вид

$$\rho = \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\xi, \gamma, \gamma_1), \quad p = \rho_0 R(\xi, \gamma, \gamma_1), \quad v = \frac{r}{t} V(\xi, \gamma, \gamma_1), \quad (5.14)$$

$$r_f = \xi_0(\gamma, \gamma_1) (Et^2/\rho_0)^{1/3},$$

где по-прежнему $\xi = r(Et^2/\rho_0)^{-1/3}$. Однако решения нашей новой задачи при $\gamma_1 \neq \gamma$, имеющего форму (5.14), в разумном классе функций не

существует. В самом деле, если бы решение имело форму (5.14), то полная энергия газа в возмущенной области \mathcal{E} была бы постоянна, что доказывается точно так же, как и раньше (соотношение (5.6)). Однако при $\gamma_1 \neq \gamma$ полная энергия \mathcal{E} должна изменяться за счет потерь или притока энергии на фронте волны:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -4\pi r_f^2 D \frac{\gamma - \gamma_1}{(\gamma - 1)(\gamma_1 - 1)} \rho_0 \frac{p_f}{\rho_f} \neq 0. \quad (5.15)$$

3) Для того, чтобы разобраться в причинах возникшего парадокса, отступим от формулировки вырожденной автомодельной задачи и вспомним, что решение, отвечающее точечному взрыву, имеет смысл лишь постольку, поскольку оно представляет собой промежуточную асимптотику для решения, отвечающего начальному выделению энергии в малой, но конечной области. Обратимся поэтому к рассмотрению задачи, в которой энергия в момент $t = 0$ выделяется не в точке, а сферически симметрично внутри сферы радиуса R_0 , а в остальном обе задачи совпадают.

В этом случае к определяющим параметрам задачи добавляется еще R_0 , так что в задаче появляются не одна, а две безразмерных независимых переменных

$$\xi = r(Et^2/\rho_0)^{-1/5}, \quad \eta = R_0(Et^2/\rho_0)^{-1/5}, \quad (5.16)$$

и скорость, плотность и давление выражаются в виде

$$v = \frac{r}{t} V(\xi, \eta, \gamma, \gamma_1), \quad p = \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\xi, \eta, \gamma, \gamma_1), \quad \rho = \rho_0 R(\xi, \eta, \gamma, \gamma_1). \quad (5.17)$$

Как мы только что выяснили, при $\gamma_1 \neq \gamma$ в отличие от случая $\gamma_1 = \gamma$ решения вырожденной предельной задачи, отвечающей $R_0 = 0$, в разумном классе функций не существует. Но нас на самом деле интересует асимптотическое представление решения неавтомодельной задачи с $R_0 \neq 0$ при больших t , а не решение вырожденной задачи. При возрастании t и конечных r к нулю стремится как ξ , так и η . При $\gamma_1 = \gamma$ существует конечный предел функций P, V, R при произвольных ξ и $\eta \rightarrow 0$, он и представляет собой решение предельной задачи. Для $\gamma_1 \neq \gamma$ такого предела нет, но при $\xi, \eta \rightarrow 0$ главные члены асимптотических представлений функций P, V, R имеют вид

$$P = P(\xi \eta^{-\beta}), \quad V = V(\xi \eta^{-\beta}), \quad R = R(\xi \eta^{-\beta}) \quad (5.18)$$

и предельное движение автомодельно, так как $\xi \eta^{-\beta} = r/Bt^\alpha$, где $B = (E/\rho_0)^{\frac{1-\beta}{5}} R_0^{\frac{2}{5}}$, $\alpha = \frac{2}{5}(1-\beta)$. Здесь β — некоторое число, зависящее только от γ и γ_1 и отличное от нуля при $\gamma_1 \neq \gamma$.

Для дальнейшего рассмотрения удобно перенормировать автомодельную переменную и взять ее в виде

$$\zeta = \text{const} \xi \eta^{-\beta} = r(At^2/\rho_0)^{-\frac{1-\beta}{5}}, \quad A = \sigma ER_0^{\frac{5\beta}{1-\beta}}, \quad (5.19)$$

где постоянный параметр σ выбран так, чтобы на фронте ударной волны было $\zeta = 1$. Асимптотический закон распространения ударной волны записывается при этом в виде

$$r_f = (A/\rho_0)^{5/2} t^\alpha. \quad (5.20)$$

Стремление ξ и η к нулю можно осуществлять и иначе: при фиксированном t стремиться R_0 к нулю. Однако, желая получить ту же асимп-

тотику, которая получается для решения исходной задачи с конечным R_0 при больших временах, это надо делать так, чтобы оставалось постоянным произведение $ER_0^{1-\beta}$. Таким образом, при $\gamma_1 \neq \gamma$ автомодельное предельное решение соответствует не точечному взрыву, т. е. не выделению в начальный момент в центре взрыва конечной порции энергии, а выделению в конечной области радиуса R_0 порции энергии E , стремящейся при $R_0 \rightarrow 0$ к нулю или бесконечности, в зависимости от знака β .

Для определения параметра β или, что то же, показателя степени α , с которой время входит в автомодельную переменную, можно снова поступить двояко. Во-первых, можно проследить, например, численно, эволюцию неавтомодельного решения исходной задачи до ее выхода на автомодельную асимптотику. Во-вторых, можно воспользоваться тем, что автомодельная асимптотика сама является решением уравнений газодинамики, удовлетворяющим определенным условиям, и попытаться построить это решение, определив при этом показатель α . Выберем сперва второй путь. Искомое предельное решение ищется в виде

$$p = p_0 \frac{r^2}{t^2} P(\zeta, \gamma, \gamma_1), \quad v = \frac{r}{t} V(\zeta, \gamma, \gamma_1), \quad \rho = \rho_0 R(\zeta, \gamma, \gamma_1). \quad (5.21)$$

Подставляя это выражение решения в уравнения газодинамики (5.1), получаем, следуя обычной технике, одно уравнение первого порядка

$$\frac{dz}{dV} = -\frac{z}{V-\alpha} \left\{ \frac{[2(V-1) + 3(\gamma-1)V][V(V-\alpha)^2 - z]}{[(3V-z)z - V(V-1)(V-\alpha)]} + \gamma - 1 \right\} \quad (5.22)$$

$$(\alpha = 2(1-\alpha)/\gamma, \quad z = \gamma P/R)$$

и два других уравнения первого порядка, приводящиеся к квадратурам, если известно нужное решение уравнения (5.22). Существенно, что искомое решение уравнения первого порядка (5.22) должно проходить через две точки — образ фронта и образ центра симметрии. Используя представление (5.21) искомого решения и условия на фронте, получаем, что образом фронта в плоскости zV будет точка

$$V = \frac{2\alpha}{\gamma_1 + 1}, \quad z = \frac{2\alpha^2\gamma(\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}, \quad (5.23)$$

а образом центра симметрии — особая точка типа седла

$$V = \frac{2(1-\alpha)}{3\gamma}, \quad z = \infty. \quad (5.24)$$

Вообще говоря, при произвольном α удовлетворить этим условиям невозможно: нельзя провести решение уравнения первого порядка через две произвольные точки. Существуют, однако, такие исключительные значения α , для которых это возможно. Мы снова получили нелинейную задачу на собственные значения: нужно построить решение уравнения первого порядка (5.22), проходящее через две точки (5.23) и (5.24), и определить значение параметра α , при котором такое решение существует — собственное значение задачи.

4) Рассмотрим фазовый портрет — картину интегральных кривых уравнения (5.22) в интересующей нас части плоскости zV . Для случая $\gamma < 2$, $1 < \gamma_1 < 2\gamma + 1$ фазовый портрет представлен на рис. 4, где цифрами 1, 2, 3 обозначены, соответственно, кривая $z = -\gamma V(V-\alpha)$ и кривые

$$z = (V - \alpha)^2, \quad z = V(V - 1)(V - \alpha)(3V - \alpha)^{-1}. \quad (5.25)$$

Точки пересечения кривых (5.25) — особые точки уравнения (5.22). При $\gamma_1 < 2\gamma + 1$ все такие особые точки располагаются под кривой 1. Нетрудно видеть, что при таких γ_1 существует такое α и притом для каждой пары γ, γ_1 только одно, что точка M — образ фронта и точка N — образ центра симметрии лежат на одной интегральной кривой — сепаратрисе двух семейств интегральных кривых — единственной кривой, входящей в образ центра симметрии. График функции $\alpha(\gamma_1)$ при $\gamma = 1,1$ представлен на рис. 5. При $\gamma_1 = 2\gamma + 1$ особая точка типа узла попадает на кривую 1 и совпадает с образом фронта, так что искомая интегральная кривая соединяет две особые точки. Соответствующее движение весьма любопытно, оно соответствует детонации с переменной скоростью и выполнению так называемого условия Чепмена—Жуге: равенству скорости газа относительно фронта местной скорости звука.

При $\gamma_1 > 2\gamma + 1$ особая точка типа узла выходит из-под кривой 1, вследствие чего получается целый интервал возможных значений α . Однако при таких γ_1 скорость газа относительно фронта становится большей местной скорости звука, и для выделения единственного решения требуется дополнительное условие уже в неавтономной задаче; рассмотрение этого вопроса для нас здесь не представляет интереса, и мы ограничимся $\gamma_1 \leq 2\gamma + 1$.

Итак, нами получено автомодельное решение, которое может быть промежуточной асимптотикой решения исходной неавтономной задачи. Неопределенной осталась только постоянная A , или, что то же, безразмерная постоянная σ . В случае $\gamma_1 = \gamma$ величина $A = \sigma E$ находится из интегрального закона сохранения полной энергии (5.6). При $\gamma_1 \neq \gamma$ такого закона сохранения нет: закон сохранения энергии принимает интегрируемую форму (5.15). Энергия в возмущенной области согласно автомодельному предельному решению, как нетрудно показать, ведет себя как

$$\mathcal{E} = \frac{\text{const}}{t^{2-5\alpha}}. \quad (5.26)$$

Единственным способом определения константы σ остается проследивание эволюции решения неавтономной задачи к автомодельной промежуточной асимптотике, если это решение на нее выйдет.

Для выяснения этого был поставлен численный эксперимент. Решалась следующая начальная задача: вне сферы радиуса R_0 плотность газа постоянна и равна ρ_0 , давление равно нулю. Внутри сферы $r \leq R_0$ распределение давления, плотности и скорости в начальный момент соответствует решению обычной задачи о сильном взрыве без притока или потерь энергии на фронте при энергии взрыва E и тех же значе-

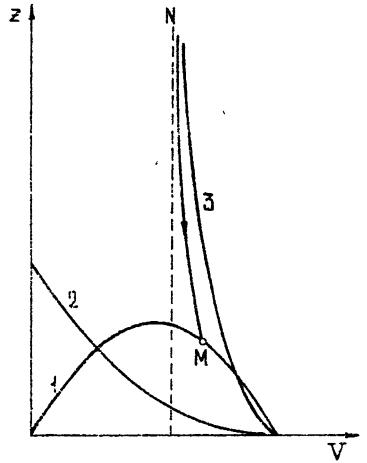


Рис. 4.

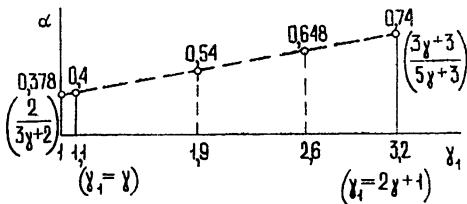


Рис. 5.

ниях прочих параметров, что и в рассматриваемой задаче. Численный счет показал, что решение очень быстро выходит на автомодельную асимптотику рассмотренного нами вида (5.21). При этом постоянная A оказалась зависящей только от γ и γ_1 , она совпала по величине с соответствующей постоянной, полученной численным счетом сформулированной выше нелинейной задачи на собственные значения. Напротив, постоянная A оказалась зависящей также и от начальных условий. Выход на автомодельный режим показан на рис. 6 и 7. На этих рисунках представлены для случая $\gamma = 1,9$, $\gamma_1 = 1,1$: зависимость $\ln r_f(t)$ от $\ln t$, которая быстро выходит на прямую $\ln r_f(t) \sim \sigma \ln t$; зависимость $\ln \left| \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right|$ от $\ln t$ (\mathcal{E} — полная энергия газа в возмущенной области), которая также быстро выходит на прямую $\ln \left| \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right| \sim (5\alpha - 3) \ln t$, и зависимость величины p/p_f от r/r_f для разных моментов времени, которая быстро стремится к стационарной.

Рассмотренное здесь автомодельное решение было построено в работе автора и Сивашинского [8] (см. также работы автора и Зельдовича [5, 6]). Численный счет был выполнен в работе Андрущенко, автора и Чудова [2]. Другим способом к автомодельному решению задачи, рассмотренной в этом разделе и соответствующей $\gamma_1 = 2\gamma + 1$ (удовлетворяющей условию Чепмена—Жуге), пришел Оппенгейм с сотрудниками [31—33].

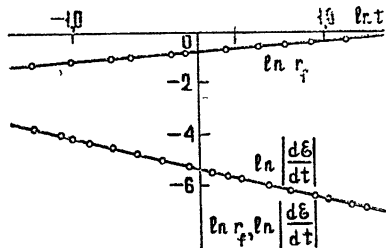


Рис. 6.

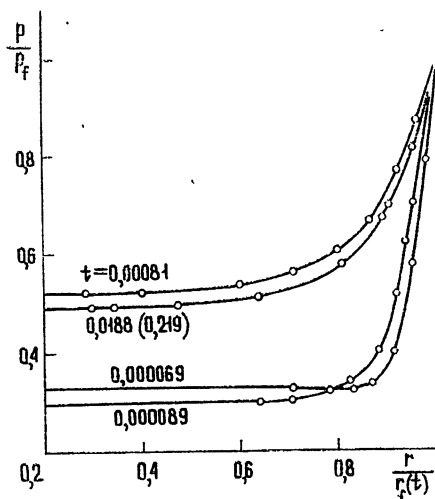


Рис. 7.

6. ПОЛНАЯ И НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ. КЛАССИФИКАЦИЯ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

1) Нами рассмотрено несколько показательных автомодельных задач. В задаче о тепловом источнике и задаче о сильном взрыве без притока или потери энергии на фронте волны ситуация относительно проста. Именно, существует некоторая предельно схематизированная вырожденная постановка задачи (мгновенное выделение энергии в точке). Рассматривая эту постановку задачи и применяя процедуру анализа размерности, можно обнаружить автомодельность решения, выяснить строение автомодельных переменных и, благодаря наличию некоторого интеграла, даже получить решение в конечном виде. Соображения размерности позволяют в этих случаях весьма просто получить также важные законы подобия (для затухания максимальной температуры $u_{\max} \sim Q/\sqrt{x t}$ и для закона распространения ударной волны $r_f \sim (Et^2/\rho_0)^{1/5}$). Более глубокое рассмотрение показало нам, однако,

что эта простота иллюзорна: делая предположение о точечном выделении энергии в начальный момент, мы, что называется, ходили по краю пропасти. Именно, слепка, на первый взгляд, обобщив постановку задач и притом так, что все соображения анализа размерности, казалось бы, должны были сохранить силу, мы пришли к противоречию — оказалось, что в общем случае нужных нам решений в форме, подсказываемой «панвными» соображениями размерности, просто не существует.

Более детальный анализ показал нам, что в нашем первоначальном поиске решений обобщенных задач неправильной оказалась самая постановка вопроса. На самом деле нам нужны были не точные решения упрощенно сформулированных вырожденных задач, соответствующих мгновенному точечному выделению энергии, а промежуточные асимптотики решений невырожденных задач, где энергия выделялась в начальный момент в конечной области.

Под промежуточными асимптотиками понимается следующее. Пусть в задаче имеются две характерные величины размерности независимой переменной x : X_1^1 и X_1^2 . Промежуточной асимптотикой называется асимптотическое представление решения при $x_i/X_1^i \rightarrow 0$, но $x_i/X_1^2 \rightarrow \infty$. Автомодельные решения всегда представляют собой промежуточные асимптотики, поскольку это всегда решения вырожденных задач, в которых параметры размерности независимых переменных либо нули, либо бесконечности: в противном случае решение не было бы автомодельным. Промежуточно-асимптотический характер автомодельных решений был продемонстрирован в предыдущем разделе на примере задачи о сильном взрыве.

Итак, мы применили анализ размерности к невырожденным задачам, существование и единственность решений которых либо была строго доказана, либо не вызывала сомнений. Поскольку формулировки невырожденных задач содержали характерные параметры размерности длины или времени, их решения, естественно, перестали быть автомодельными. Предельный переход при стремлении к нулю дополнительного параметра размерности длины, делавшего задачи неавтомодельными (размера области начального выделения энергии), оказался нерегулярным: в одном случае предел оказался равным нулю или бесконечности, в другом случае оказалось, что его просто не существует.

Тем не менее, оказалось, что в обоих случаях осмысленные промежуточные асимптотики существуют, и, более того, они автомодельны. Выяснилось, что эти асимптотики и есть на самом деле то, что нам нужно. Оказывается, что в обоих случаях начальное выделение энергии нельзя считать точечным: уменьшая размер области, в которой происходит начальное выделение энергии, мы обязаны, для получения правильной асимптотики решения исходной задачи при больших временах, соответствующим образом увеличивать или уменьшать выделяемую энергию, так чтобы был постоянен некоторый «момент» начального распределения энергии. Существенно, что степень, с которой длина входит в выражение этого момента, заранее не задана, и ее нельзя определить анализом размерности. Мы нашли эту степень в ходе построения автомодельной промежуточной асимптотики как условие существования в целом такого решения. Нетривиальным оказался вопрос о законах подобия: для затухания максимума температуры в первой задаче было получено соотношение

$$u_{\max} = A/(xt)^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

а для закона распространения ударной волны во второй задаче — соотношение

$$r_f = At^\alpha.$$

Эти соотношения имеют простые степенные формы, но их нельзя найти из соображений размерности по формулировке задачи. Дело в том, что заранее неизвестна размерность постоянной A , определяющей степень времени в законах подобия; для ее нахождения нужно решить задачу полностью или ее существенную часть. В рассмотренных нами примерах это оказалось относительно простым: показатель α однозначно определялся из решения нелинейной задачи на собственные значения, к которой нас привело построение промежуточной асимптотики (одноточечный спектр). Мы увидим дальше, что положение может быть более сложным, например, спектр может быть непрерывным: в этом случае показатели степени определяются начальными условиями задачи, и для их нахождения нужно свращивать автомодельную асимптотику с решением исходной неавтомодельной задачи.

Таким образом, мы продемонстрировали наличие двух типов автомодельных решений.

2) Дадим теперь формальную классификацию автомодельных зависимостей и, в частности, автомодельных решений задач математической физики. Напомним, что согласно П-теореме (разд. 3) любая зависимость, выражающая некоторую величину a в функции n определяющих параметров a_1, \dots, a_n , $a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$, может быть представлена функцией $n - k$ переменных

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (6.1)$$

где параметры подобия Π_1, \dots, Π_{n-k} — безразмерны. При этом предполагается, что определяющие параметры a_1, \dots, a_k имеют независимые размерности и что размерности остальных параметров a_{k+1}, \dots, a_n выражаются через размерности параметров a_1, \dots, a_k .

Рассмотрим теперь некоторый размерный определяющий параметр a_{k+i} . В обычных рассуждениях параметр считается существенным, т. е. на самом деле определяющим явление, если величина соответствующего безразмерного параметра подобия Π_i не слишком мала и не слишком велика, скажем условно, лежит между одной десятой и десятию. В противном случае считается возможным влиянием этого параметра пренебречь, в результате чего число аргументов функции Φ в соотношении (6.1), определяющем основную зависимость, уменьшается на один.

Очевидно, что, вообще говоря, так рассуждать нельзя; это рассуждение справедливо только, если существует конечный предел функции Φ при Π_i , стремящемся к нулю или бесконечности, и постоянных остальных параметрах Π_j . На самом деле требуется даже нечто большее: функция Φ должна достаточно быстро стремиться к своему пределу при Π_i , стремящемся к нулю или бесконечности для того, чтобы при $\Pi_i < 0,1$ или $\Pi_i > 10$ функция Φ принимала значения, близкие к предельным. Однако в общем случае функция Φ при возрастании или убывании Π_i , очевидно, не обязана стремиться к пределу и притом конечному и отличному от нуля, так что, вообще говоря, параметр a_{k+i} может оставаться существенным, как бы мала или велика ни была величина соответствующего ему безразмерного параметра Π_i . Подчеркнем, что речь здесь идет не о математических тонкостях, нужных для наведения строгости, а о вещах, имеющих вполне конкретные последствия для анализа.

Пусть, например, при $\Pi_i \rightarrow 0$ или $\Pi_i \rightarrow \infty$ функция Φ стремится к нулю или бесконечности. Разумеется, в этом случае величина Π_i остается существенной, как бы мала или велика она ни была. Поэтому, вообще говоря, просто выбросить параметры a_{k+i} и Π_i и заменить соответствующие функции f и Φ функциями на единицу меньшего числа аргументов в этом случае нельзя. Тем не менее, есть исключи-

тельный случай, когда уменьшить число аргументов можно. Именно, пусть при $\Pi_i \rightarrow 0$ или $\Pi_i \rightarrow \infty$

$$\Phi = \Pi_i^\alpha \Phi_1(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{n-k}) + \dots \quad (6.2)$$

(среди аргументов Φ_1 нет Π_i). Здесь α — некоторое действительное число, а отброшенное слагаемое мало сравнительно с первым при $\Pi_i \rightarrow 0, \infty$. В этом случае при достаточно малых (или достаточно больших) Π_i снова справедливо соотношение вида (6.1)

$$\Pi^* = \Phi_1(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (6.3)$$

где выражение

$$\Pi^* = \Pi \Pi_i^{-\alpha} = a (a_1^{p-\alpha} a_{k+1} a_2^{q-\alpha} a_{k+2} \dots a_k^{r-\alpha} a_{k+1} a_{k+1}^\alpha)^{-1} \quad (6.4)$$

имеет форму обычного определяемого безразмерного параметра. Таким образом, в этом случае основная зависимость снова записывается через функций $n - k - 1$ аргументов, как и тогда, когда параметр a_{k+i} несуществен. Однако параметр a_{k+i} остается в определяемом безразмерном параметре Π^* , и, далее, вид определяемого безразмерного параметра Π^* уже нельзя получить из анализа размерностей.

Далее, пусть малыми или большими являются два безразмерных параметра подобия Π_i и Π_j , но при Π_i и Π_j , порознь стремящихся к нулю или бесконечности, функция Φ стремится к нулю, бесконечности или вообще ни к какому пределу не стремится. В этом случае, как и в предыдущем, параметры подобия Π_i и Π_j остаются существенными, как бы малы или велики они ни были, а следовательно, остаются существенными и соответствующие размерные параметры a_{k+i} и a_{k+j} . Имеется, однако, и здесь исключительный случай, когда число аргументов функции Φ в (6.1) сокращается. В самом деле, пусть существуют такие действительные числа α и β , что при Π_i, Π_j , стремящихся к нулю или бесконечности,

$$\Phi = \Pi_i^\alpha \Phi_2(\Pi_j \Pi_i^{-\beta}, \Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{j-1}, \Pi_{j+1}, \dots, \Pi_{n-k}) + \dots, \quad (6.5)$$

где отброшенное слагаемое как угодно мало сравнительно с первым при достаточно малых (больших) Π_i, Π_j . В этом случае при достаточно малых (или больших) Π_i, Π_j справедливо соотношение

$$\Pi^* = \Phi_2(\overbrace{\Pi^{**}, \Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_{j-1}, \Pi_{j+1}, \dots, \Pi_{n-k}}^{n-k-1 \text{ аргумент}}), \quad (6.6)$$

где Π^* по-прежнему дается соотношением (6.4), а параметр подобия Π^{**} определяется соотношением

$$\Pi^{**} = \Pi_j \Pi_i^{-\beta} = \frac{a_{k+j}}{a_1^{p_{k+j} - \beta} a_{k+1} a_2^{q_{k+j} - \beta} a_{k+2} \dots a_k^{r_{k+j} - \beta} a_{k+1}^\beta}. \quad (6.7)$$

Как видно, и в этом случае основная зависимость записывается через функцию $n - k - 1$ аргументов, как и тогда, когда один из аргументов Π_i несуществен, но уже форма двух безразмерных параметров Π^* и Π^{**} не может быть получена из анализа размерности, поскольку этот анализ, в принципе, не может дать величин α и β . По существу, аналогичные подклассы можно выделить, когда стремятся к нулю или бесконечности три и более безразмерных определяющих параметра и конечного отличного от нуля предела функции Φ не существует: здесь важно несуществование предела.

Вывод, к которому мы пришли, весьма естествен: если значения

некоторых безразмерных параметров подобия Π_i малы или велики, то осуществляется одна из трех возможностей.

1. Пределы соответствующих функций Φ при $\Pi_i \rightarrow 0, \infty$ существуют, конечны и отличны от нуля. Соответствующие определяющие параметры — размерные a_{k+i} и безразмерные Π_i — могут быть исключены из рассмотрения, число аргументов функции Φ уменьшается. Все параметры подобия могут быть определены при помощи регулярной процедуры анализа размерностей. Этот случай называется полчой автомодельностью по параметру Π_i .

2. Конечных отличных от нуля пределов функций Φ при $\Pi_i \rightarrow 0, \infty$ не существует, но имеет место один из исключительных случаев, указанных выше. При этом уменьшение числа аргументов функции Φ тоже имеет место, но не все параметры подобия Π_i можно определить из анализа размерностей. В этом случае мы будем говорить о неполной автомодельности по параметрам Π_i .

3. Если конечных пределов функций Φ при $\Pi_i \rightarrow 0, \infty$ не существует и указанные исключения не имеют места, то мы будем говорить, что при малых (больших) Π_i автомодельность по параметрам Π_i не наступает. Целесообразно выделить специальный случай, когда при малых (больших) значениях параметров Π_i один из них «отделяется», хотя и не степенным образом. Это значит, что при таких значениях параметров подобия Π_i функция Φ представляется в виде

$$\Phi = \Psi(\Pi_i) \Phi_3 + \text{малая величина},$$

где Ψ — функция Π_i , отличная от степенной, например, $\ln \Pi_i$, а число аргументов функции Φ_3 меньше $n - k$.

Рассмотрим теперь некоторую задачу математической физики, имеющую единственное решение, и пусть величины a представляют собой неизвестные в этой задаче, величины a_1, \dots, a_n — независимые переменные и параметры, входящие в уравнения, граничные, начальные и т. п. условия, определяющие единственное решение.

Автомодельные решения всегда представляют собой решения вырожденных задач, которые получаются, если некоторые параметры a_{k+i} и соответствующие безразмерные параметры Π_i принимают нулевые или бесконечные значения. Они представляют собой одновременно точные решения вырожденных задач и асимптотические представления решений более широких классов невырожденных неавтомодельных задач. Поскольку эти асимптотики по предположению автомодельны, то если автомодельные переменные — степенные одночлены, имеет место один из первых двух случаев сформулированной выше альтернативы. В зависимости от того, полна автомодельность промежуточной асимптотики или неполна, автомодельные решения делятся на автомодельные решения первого рода и автомодельные решения второго рода. В соответствии с этим, для автомодельных решений первого рода выражения автомодельных переменных могут быть получены анализом размерности. Для автомодельных решений второго рода показатели степени в выражениях автомодельных переменных анализом размерности получить нельзя. Эти показатели могут быть получены из условия существования автомодельного решения в целом, т. е. из решения нелинейной задачи на собственные значения, если спектр в этой задаче дискретен. Если же спектр непрерывен, то для определения показателей степени в автомодельных асимптотиках необходимо срывать автомодельное решение с решением исходной неавтомодельной задачи, например, путем численного счета.

Поучительный пример непрерывного спектра дает автомодельная интерпретация известного уравнения Кортевега—де Вриза:

$$\partial_t u + u \partial_x u - \beta \partial_{xxx}^3 u = 0. \quad (6.8)$$

Полагая в этом уравнении $x = \ln \xi$, $t = \ln \tau$, перепишем его в виде

$$\tau \partial_\tau u + \xi (\partial_\xi u) u + \beta (\xi^3 \partial_{\xi\xi\xi}^3 u + 3\xi^2 \partial_{\xi\xi}^2 u + \xi \partial_\xi u) = 0 \quad (6.9)$$

$$(0 \leq \xi < \infty).$$

Уравнение (6.9) имеет автомодельные решения

$$u = \frac{12\lambda}{2 + \eta \sqrt{\lambda/\beta} + \eta^{-1} \sqrt{\lambda/\beta}} \quad \left(\eta = \frac{\xi}{A \tau^\lambda} \right) \quad (6.10)$$

(A — постоянная), причем спектр λ непрерывен и полуограничен: $\lambda \geq 0$ (это решение соответствует в обычной интерпретации солитону). Гарднером, Грином, Крускалом и Мигурой [12] получен замечательный результат, который в автомодельной интерпретации заключается в следующем: асимптотика при $\tau \rightarrow \infty$ и больших ξ решения начальной задачи $u = u(\xi, 0)$ (функция $u(\xi, 0)$ — положительная, достаточно быстро убывающая при $\xi \rightarrow 0, \infty$) для уравнения (6.10) представляется в виде

$$u \sim \sum_{n=1}^N 12\lambda_n \left[2 + \left(\frac{\xi}{A_n \tau^{\lambda_n}} \right)^{\sqrt{\lambda_n/\beta}} + \left(\frac{\xi}{A_n \tau^{\lambda_n}} \right)^{-\sqrt{\lambda_n/\beta}} \right]^{-1}, \quad (6.11)$$

где λ_n — дискретные собственные значения оператора Шредингера,

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{6} [-\lambda + u(e^x, 0)] \psi = 0. \quad (6.12)$$

Таким образом, начальное распределение $u(\xi, 0)$ определяет N положительных констант $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и N положительных констант A_1, \dots, A_N и выделяет N интервалов по ξ , так что внутри каждого из интервалов ξ имеет порядок τ^{λ_n} и асимптотика решения при больших τ имеет вид

$$u \sim 12\lambda_n \left[2 + \left(\frac{\xi}{A_n \tau^{\lambda_n}} \right)^{\sqrt{\lambda_n/\beta}} + \left(\frac{\xi}{A_n \tau^{\lambda_n}} \right)^{-\sqrt{\lambda_n/\beta}} \right]^{-1}. \quad (6.13)$$

Вне упомянутых интервалов решение при больших τ мало. Здесь показательно, что от начальных условий зависит не только постоянные A_n , как это обычно бывает, но и показатели степени в выражениях для автомодельных переменных. Этот пример дополнительно подчеркивает недостаточность в общем случае соображений размерности для определения этих показателей.

Примером автомодельных решений первого рода служат обычные задачи о тепловом источнике (разд. 3) и сильном взрыве (разд. 5). Пример автомодельных решений второго рода доставляют соответствующие модифицированные задачи, рассмотренные в разд. 4, 5. Существуют также автомодельные решения нестепенного типа, для которых автомодельные переменные уже не представляют собой степенные одночлены. Эти решения обязаны своим существованием специальному случаю, указанному в п. 3.

При рассмотрении всякой новой задачи и возникновении в ней малого или большого параметра подобия трудность заключается в том, что априори, до получения полного решения, неизвестно, с каким случаем сформулированной выше альтернативы мы встретимся в ее решении, вне зависимости от того, имеется ли явная математическая формулировка проблемы или нет. Поэтому можно рекомендовать лишь послед-

довательно испытывать возможные при малых (больших) параметрах подобия ситуации — полная автомодельность, неполная автомодельность, отсутствие автомодельности — и сопоставлять получаемые выводы с результатами аналитического, численного или экспериментального исследования. Следующий раздел покажет, как это делается при отсутствии математической формулировки задачи.

7. НЕПОЛНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

1) Показательные примеры автомодельностей различного типа доставляет теория турбулентности. Мы начнем с проблемы автомодельного вырождения изотропной однородной турбулентности, продемонстрируем здесь изложенный выше подход и убедимся в существовании неполной автомодельности, не обращая к математической формулировке задачи и существенно опираясь на экспериментальные данные.

Известно (см. книгу Момина и Яглома [26, 27]), что достаточно полное описание развитого турбулентного потока дается системой моментов связи, т. е. тензоров вида

$$B_{ijk\dots}(x, x_1, x_2 \dots) = \langle u_i(x) u_j(x_1) u_k(x_2) \dots \rangle, \quad (7.1)$$

$$B_{p ij\dots}(x, x_1, x_2 \dots) = \langle p(x) u_i(x_1) u_j(x_2) \dots \rangle.$$

Здесь p , u_i — соответственно давление и компоненты вектора скорости, знак $\langle \dots \rangle$ означает осреднение. В однородном изотропном турбулентном потоке тензоры моментов связи таковы, что они остаются неизменными при параллельном переносе, вращении или зеркальном отражении системы точек x, x_1, x_2, \dots в пространстве. Для такого потока существенно уменьшается число независимых компонент тензоров моментов связи и сокращается число величин, от которых они зависят. Так, в случае несжимаемой жидкости можно показать, что тензор момента связи второго порядка определяется одной скалярной функцией скалярных аргументов

$$B_{LL}(r, t) = \langle u_L(x, t) u_L(x + r, t) \rangle. \quad (7.2)$$

Здесь $r = |r|$ — расстояние между точками, u_L — проекции скорости на направление радиус-вектора r , соединяющего две точки, t — время. Аналогично обстоит дело и для «двухточечного» момента третьего порядка $B_{ij, k} = \langle u_i(x) u_j(x) u_k(x + r) \rangle$, все компоненты которого тоже можно выразить вследствие однородности, изотропии и несжимаемости потока через одну компоненту, например,

$$B_{LL, L}(r, t) = \langle u_L^2(x) u_L(x + r) \rangle, \quad (7.3)$$

являющуюся скалярной функцией аргументов r и t .

С самого возникновения в работах Тейлора [39] представления об однородном изотропном турбулентном потоке его пытались моделировать затуханием турбулентности за решеткой в аэродинамических и гидродинамических трубах. В последнее время исключительные по тщательности эксперименты были выполнены Лингом с сотрудниками [24, 25] на гидродинамической трубе — длинном канале квадратного сечения, в который подавалась вода через неподвижную или подвижную решетку стержней (в подвижной решетке стержни были снабжены лопатками, совершающими колебательное движение с различной скоростью). Таким образом, турбулентные возмущения вносятся в поток на решетке и затем затухают по мере своего продвижения по потоку. При этом пульсации скорости уже на небольших расстояниях от решетки оказались с большой точностью изотропными. Мы видим, что если принять за время величину $t = x/U$ (U — скорость подводимого

к решетке потока, x — координата, отсчитываемая вдоль качала от решетки), то картина затухания турбулентности по мере продвижения вдоль канала достаточно хорошо соответствует схеме вырождения однородной изотропной турбулентности во времени (однородность также проверялась специально путем перемещения по сечению $x = \text{const}$ датчиков, при помощи которых производились измерения скорости).

Статистические характеристики — моменты связи рассматриваемого турбулентного движения — определяются скоростью подводимого к решетке потока U , характерным размером решетки M и толщиной стержня d , коэффициентом вязкости ν , величинами r и $t - t_0$, и, для подвижной решетки, скоростью V_p и частотой ω колебаний лопаток. Здесь t_0 — некоторое начало отсчета времени.

Анализ размерности дает для двухточечных моментов

$$B_{LL}(r, t) = \frac{\nu}{t - t_0} \Phi_{LL} \left(\xi, \eta, \frac{M}{d}, \frac{MU}{\nu}, \frac{V_p}{U}, \frac{M\omega}{U} \right),$$

$$B_{LL,L}(r, t) = \left(\frac{\nu}{t - t_0} \right)^{3/2} \Phi_{LL,L} \left(\xi, \eta, \frac{M}{d}, \frac{MU}{\nu}, \frac{V_p}{U}, \frac{M\omega}{U} \right),$$
(7.4)

где Φ с индексами — безразмерные функции своих безразмерных аргументов $\xi = r/\sqrt{\nu(t - t_0)}$ и $\eta = M/U(t - t_0)$... Представляет интерес рассмотрение движения на достаточно больших удалениях от решетки, где $M/U(t - t_0) \ll 1$, и можно считать, что случайные детали начальных условий на решетке уже перестают сказываться.

Простейшее предположение состоит в том, что по параметру $\eta = M/U(t - t_0)$ имеет место полная автомодельность, такое предположение и было выдвинуто Карманом [19]. В этом случае на достаточно больших расстояниях от решетки должны быть справедливы соотношения

$$\frac{B_{LL}(r, t)}{B_{LL}(0, t)} = f \left(\xi, \frac{M}{d}, \dots \right), \quad B_{LL}(0, t) = \frac{A}{t - t_0};$$
(7.5)

$$\frac{B_{LL,L}(r, t)}{B_{LL,L}^{3/2}(0, t)} = g \left(\xi, \frac{M}{d}, \dots \right).$$
(7.6)

Здесь A — постоянная, зависящая от начальных условий.

Следующее по степени сложности — предположение о неполной автомодельности. В этом случае на больших расстояниях от решетки должны выполняться соотношения

$$B_{LL}(r, t) = \frac{\nu M^\alpha}{U^\alpha (t - t_0)^{1+\alpha}} F \left(\xi, \frac{M}{d}, \frac{MU}{\nu}, \frac{V_p}{U}, \frac{M\omega}{U} \right),$$

$$\frac{B_{LL}(r, t)}{B_{LL}(0, t)} = f \left(\xi, \frac{M}{d}, \dots \right),$$

$$B_{LL}(0, t) = \frac{A}{(t - t_0)^{1+\alpha}},$$
(7.7)

$$B_{LL,L}(r, t) = \frac{\nu^{3/2} M^\alpha}{U^\alpha (t - t_0)^{3/2+\alpha}} g \left(\xi, \frac{M}{d}, \dots \right),$$

$$\frac{B_{LL,L}(r, t)}{B_{LL,L}^{3/2}(0, t)} = B(t - t_0)^{\alpha/2} g \left(\xi, \frac{M}{d}, \dots \right).$$

Обратимся к результатам экспериментов. На рис. 8 представлены результаты измерений величины $f = B_{LL}(r, t)/B_{LL}(0, t)$ для случая неподвижной решетки в зависимости от $\xi = r/\sqrt{\nu(t-t_0)}$ (начало отсчета t_0 определялось надлежащим образом). Как видно, все опытные точки прекрасно ложатся на единую кривую. Аналогично обстоят дело и для подвижных решеток. Это подтверждает автомодельность коэффициента корреляции, но не определяет характера автомодельности моментов связи — соответствующий результат должен иметь место в обоих случаях, при полной и неполной автомодельности.

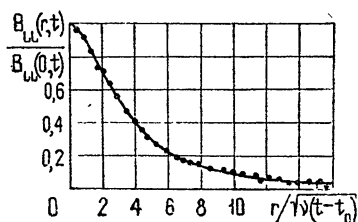


Рис. 8.

На рис. 9 и 10 представлены результаты измерения величины $B_{LL}(0, t)$, соответственно для неподвижной и подвижной решеток. Как видно, во всех случаях затухание уже на небольших расстояниях от решетки следует автомодельному степенному закону, причем показатель α оказывается отличным от нуля; он равен единице для неподвижных решеток, 0,73 для $V_p/U=3$ и 0,35 для $V_p/U=17$. Этот показатель зависит, как видно, от начальных условий, т. е. условий на решетке. Сравнение с другими опытами подтверждает эти выводы и показывает, что показатель α обращается в нуль, т. е. автомодельность оказывается полной, только для случая очень больших чисел Рейнольдса. К сожалению, в работах Линга с соопрудниками третьи моменты не измерялись. Единственной работой, где измерялись третьи моменты, остается на сегодня работа Стюарта [37]. В этой работе подтверждается автомодельность коэффициента корреляции и обращается внимание на отсутствие единой зависимости $B_{LL,L}(r, t)/B_{LL}^{3/2}(0, t)$ от автомодельной переменной для разных моментов времени, что согласуется с неполной автомодельностью и не должно иметь места при полной автомодельности.

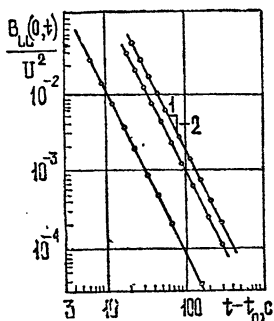


Рис. 9.

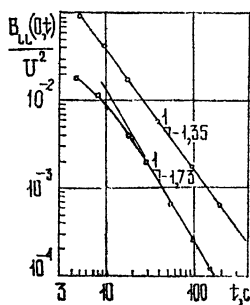


Рис. 10.

Таким образом, можно сделать вывод, что в опытах имеет место автомодельное вырождение турбулентности, причем эта автомодельность неполна, так что влияние начального размера — размера решетки — никогда не исчезает, но благодаря особенностям однородной изотропной турбулентности проявляется только в едином комплексе с другими параметрами. Показатель степени в законе вырождения не может быть определен из соображений анализа размерностей, но выделяется из непрерывного спектра возможных значений начальными условиями (условиями на решетке) — ситуация, в принципе, аналогичная

той, с которой мы столкнулись выше при рассмотрении автотомодельного аналога уравнения Кортевега—де Вриза.

Изложенный выше анализ автотомодельного вырождения изотропной одномерной турбулентности был выполнен в работе автора и Гаврилова [3].

2) Исследование локальной структуры турбулентных течений несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса в работах Колмогорова [21, 22] и Обухова [28, 29] также доставляет весьма показательные примеры автотомодельных промежуточных асимптотик различных типов.

Согласно основному предположению А. Н. Колмогорова, при больших числах Рейнольдса гидродинамические поля обладают свойством локальной изотропии, однородности и стационарности, т. е. свойством изотропии и однородности должны обладать тензоры моментов связи, в которые входят относительные скорости:

$$\Delta_r u = u(x+r, t) - u(x, t). \quad (7.8)$$

Как и в случае простой однородности и изотропии турбулентного потока, тензор вторых моментов величин $\Delta_r u$ выражается через одну из своих компонент, например,

$$D_{LL}(r) = \langle (u_L(x+r, t) - u_L(x, t))^2 \rangle, \quad (7.9)$$

(u_L — компонента вектора u по направлению r), являющуюся скалярной функцией скалярного аргумента r . Помимо r величина D_{LL} зависит также от кинематической вязкости жидкости ν , энергии, передаваемой по каскаду масштабов от внешнего масштаба Λ до внутреннего масштаба λ , на котором происходит вязкая диссипация (т. е. средней скорости диссипации энергии $\bar{\epsilon}$). Внутренний колмогоровский масштаб λ равен $\nu^{3/4} \bar{\epsilon}^{-1/4}$. Разумеется, локальная изотропия поля скоростей имеет место при $r \ll \Lambda$.

Анализ размерности дает

$$D_{LL} = \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3} \Phi\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{r}{\Lambda}\right). \quad (7.10)$$

Закономерности, справедливые в так называемом «инерционном интервале» масштабов, т. е. при $\lambda \ll r \ll \Lambda$, представляют собой промежуточную асимптотику (7.10) при $r/\lambda \rightarrow \infty$ и $r/\Lambda \rightarrow 0$ (считается, что при больших числах Рейнольдса $\lambda \ll \Lambda$). В простейшем варианте теории Колмогорова—Обухова делается предположение, равносильное предположению о полной автотомодельности по обоим параметрам r/λ и r/Λ , так что при $\lambda \ll r \ll \Lambda$ получается знаменитый «закон двух третей»

$$D_{LL} = C \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3}, \quad (7.11)$$

где C — универсальная постоянная, равная $\Phi(\infty, 0)$. На самом деле существование полной автотомодельности по r/Λ вызывает некоторые сомнения, поскольку на самом деле существен вклад флуктуирующей диссипации в масштабах вихрей, больших масштабов «интервала равновесия» $r \ll \Lambda$. Этот вопрос был впервые поднят в первом издании книги Ландау и Лифшица [23] и детально обсуждается в книге Моница и Яглома [27]. Предположим теперь, что имеет место полная автотомодельность по параметру r/λ и неполная автотомодельность по параметру r/Λ , так что при $r/\lambda \rightarrow \infty$ и $r/\Lambda \rightarrow 0$ $\Phi(r/\lambda, r/\Lambda) \approx C_1 (r/\Lambda)^\alpha$, где C_1, α — универсальные постоянные. Соотношение (7.10) при этом дает

$$D_{LL} = C_1 \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3+\alpha} \Lambda^{-\alpha}. \quad (7.12)$$

Но именно это соотношение получается в уточненной теории Колмогорова—Обухова. При этом по данным эксперимента $\alpha = 0,04$, так что зависимость (7.12) фактически мало отличается от закона двух претей, что не уменьшает теоретического интереса этого отличия.

В заключение можно указать следующее. Неполные автомодельности и законы подобия, автомодельные решения второго рода встречаются во многих проблемах, на них надо глядеть открытыми глазами. Простая общая философия и примеры, рассказанные в этих лекциях, показывают, что тут может быть. Я надеюсь, что увидев похожую ситуацию в своих задачах, слушатели смогут сами провести соответствующие рассуждения и получить нужную постановку задачи и ее решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Abramovitz, I. Stegun, ed. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., N. Y., 1970.
2. В. А. Андрущенко, Г. И. Баренблатт, Л. А. Чудов, в сб, посв. 100-летию со дня рождения Б. Г. Галеркина, изд. Наука, М., 1975
3. Г. И. Баренблатт, А. А. Гаврилов, ЖЭТФ, 65, № 2, 806 (1973).
4. Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик, Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа, изд. Наука, М., 1972.
5. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович, УМН, 26, вып. 2 (158), 115 (1971).
6. G. I. Barenblatt, Ya. B. Zel'dovich, Ann. Rev. Fluid Mech., 4, 285 (1972).
7. Г. И. Баренблатт, Г. И. Сивашинский, ПММ, 33, № 5, 861 (1969).
8. Г. И. Баренблатт, Г. И. Сивашинский, ПММ, 34, № 4, 685 (1970).
9. П. В. Бриджмен, Анализ размерностей. Перевод с англ. под редакцией С. И. Вавилова, ОНТИ, Л.—М., 1934.
10. К. В. Брушлинский, Я. М. Каждан, УМН, 18, вып. 2, 3 (1963).
11. C. F. von Weizsäcker, Zs. Naturforschung, 9a, 269 (1954).
12. S. C. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Phys. Rev Lett., 19, 1095 (1967).
13. G. Guderley, Luftfahrtforschung, 19, 302 (1942).
14. Я. Б. Зельдович, Журн. физ. химии, 22, № 1, 27 (1948).
15. Я. Б. Зельдович, Акуст. ж., 2, 352 (1956).
16. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, 2-е изд., Физматгиз, М., 1966.
17. Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк-Каменецкий, Докл. АН СССР, 19, 693 (1938).
18. С. Л. Каменомостская, Докл. АН СССР, 116, № 1, 18 (1957).
9. Th. von Karman, L. Howarth, Proc. Roy. Soc., A164, № 917, 192 (1938).
20. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов, Бюлл. МГУ, секция А, 1, № 6, 1 (1937).
21. А. Н. Колмогоров, Докл. АН СССР, 30, № 4, 299 (1941).
22. A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech., 13, Part 1, 82 (1962).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1-е изд., Гостехиздат, М., 1944, 2-е изд., Гостехиздат, М., 1953.
24. S. C. Ling, T. T. Huang, Phys. Fluids, 13, № 12, 2912 (1970).
25. S. C. Ling, C. A. Wan, Phys. Fluids, 15, № 8, 1363 (1972).
26. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, часть 1, Физматгиз, М., 1965.
27. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, часть 2, Физматгиз, М., 1967.
28. А. М. Обухов, Докл. АН СССР, 32, № 1, 22 (1941).
29. А. М. Обухов, J. Fluid Mech., 13, № 1, 77 (1962).
30. О. А. Олейник, УМН, 12, № 3 (75), 3 (1957).
31. A. K. Oppenheim, E. A. Lundström, A. L. Kuhl, M. M. Kamel, J. Appl. Mech., 38, № 4, 783 (1971).
32. A. K. Oppenheim, E. A. Lundström, A. L. Kuhl, M. M. Kamel, J. Fluid Mech., 52, Part 4, 657 (1972).
33. A. K. Oppenheim, A. L. Kuhl, M. M. Kamel, J. Fluid Mech., 55, Part 2, 257 (1972).

-
34. Ю. П. Райзер, Лазерная искра и распространение разрядов, изд. Наука, М., 1974.
 35. Л. И. Седов, ПММ, 10, № 2, 241 (1946).
 36. Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 7-е изд., изд. Наука, М., 1972.
 37. R. W. Stewart, Proc. Cambridge Philos. Soc., 47, 146 (1951).
 38. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc., A201, 159 (1950).
 39. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc., A151, № 874, 421 (1935).

Институт океанологии АН СССР.
