ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIX, № 5—6 *РАДИОФИЗИКА* *1976*

УДК 538.574 : 530.18

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Е. Н. Пелиновский

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Приближенные методы анализа нелинейных волн, интенсивно развиваемые в настоящее время, уже излагались на прошлых школах [1–3]. В то же время не ослабевает интерес и к точным решениям в нелинейной теории волн, нахождение которых придает теории определенную законченность и изящество. Важное значение точные решения имеют и для развития приближенных методов, область применения которых значительно шире. Во-первых, они являются «эталонами» для приближенных, что позволяет убедиться в справедливости тех или иных используемых приближений, и, во-вторых, они «наталкивают» на разработку новых приближенных способов в тех случаях, когда точных решений отыскать не удается. В качестве примера достаточно указать две задачи: а) об эволюции ударной волны (ступеньки) в рамках уравнения Кортевега—де Вриза (КДВ), которая сначала была решена приближенно [4], а затем точно [5], и б) о взаимодействии солитонов, решенная сначала точно [6], а затем приближенно, причем для более сложных случаев [7]. Исторически первыми точными решениями в нелинейной теории волн следует считать установившиеся волны на воде, о которых уже говорилось на школе [8]. Сейчас стационарные волны известны практически для всех областей физики. Ясно, что существование стационарных волн связано, вообще говоря, только с определенными граничными и начальными условиями и жесткими требованиями, предъявляемыми к свойствам среды.

Исследование нестационарных волновых процессов представляет очевидный физический интерес; несомненны и возникающие здесь трудности. Пожалуй, наиболее «повезло» недиспергирующим системам. Здесь разработан весьма мощный аппарат теории гиперболических уравнений (метод характеристик, преобразование Лежандра и т. д.), частично обсуждаемый в лекциях Г. И. Баренблатта и Л. А. Островского. Что же касается нелинейных волн в диспергирующих средах, то здесь развитие точных методов шло чрезвычайно медленно и точные нестационарные решения, по-видимому, найдены только после 1950 года (1950 г. — точное решение уравнения Бюргерса [9], 1953 г. — двухсолитонное решение синус-уравнения Гордона (СГ) [10], 1966 г. — решение уравнения Борна—Инфельда [11]). Начиная с 1967 года наблюдается определенный «бум» в отыскании точных решений и развитии соответствующих методов (о чем можно судить по приведенной в этой лекции и в [12] библиографии). Здесь можно выделить: а) преобразование Бэклунда [10, 13–17], б) метод обратной задачи теории рассеяния [18–29], в) преобразование Хироты [30–34], г) метод вариации параметров стационарных волн [35, 36], д) преобразование Миуры [37], е) «обратные» методы [38–40], ж) законы сохранения и канонические преобразования [41–43], з) методы разделения переменных [78, 87].

Отметим, что к диспергирующим системам в некоторых случаях применим и классический аппарат теории гиперболических уравнений. Так, например, удается найти решение с помощью преобразования Лежандра [11, 44, 45, 89], автомодельных подстановок [46–49], методов теории групп [50–52]. Иногда точные утверждения о характере волнового процесса могут быть сделаны с помощью метода моментов без знания в явном виде самого решения [53, 54]. Уже простое перечисление показывает большое разнообразие развитых методов.

Возникла определенная «конкуренция» методов, создалось впечатление, что часть из них является следствием других или что они полностью эквивалентны [56–61]. Поскольку до настоящего времени заранее не ясно, к каким уравнениям применимы точные методы, то выбор того или иного метода весьма объективен. Успех в отыскании наиболее подходящего метода для каждого конкретного случая во многом зависит от интуиции и удачи. Уравнения редко «подсказывают» нам способ решения. В конкретной ситуации получение ответа может быть связано с перебором нескольких (а то и всех) вариантов известных методов (разумеется, возможны случаи, когда точных решений в аналитической форме вообще отыскать не удается и с этим придется мириться!). Поэтому, если даже некоторые методы эквивалентны по своей математической структуре, но различаются алгоритмами построения, то на практике использование этих вариантов не равноценно. В этих условиях представляется важным ознакомление с основными алгоритмами отыскания точных решений, чтобы на практике выбрать наиболее удобный метод при минимальном числе переборов. На наших школах наиболее подробно излагался метод обратной задачи теории рассеяния в лекциях В. Е. Захарова. Мы продолжим этот рассказ, обсудив некоторые (разумеется, не все) другие точные методы.

Методы отыскания точных решений, обсуждаемых здесь, принадлежат к методам преобразования (или замены переменных) искомых уравнений, решение которых мы не знаем, к другим, решение которых нам по каким-либо причинам получить легче. В сущности, эта идея лежит в основе и приближенных методов, где замена переменных осуществляется с помощью асимптотических рядов. Нас интересует сейчас возможность точного решения без использования каких-либо рядов. Преобразование может связывать решения одних и тех же уравнений или решения различных уравнений. Здесь будут представлены оба типа преобразований.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА

Найденное еще в 1876 году применительно к проблемам дифференциальной геометрии, это преобразование исторически оказалось первым, с помощью которого были отысканы многосолитонные решения [10, 62]. Его основная идея заключается в том, что оно преобразует одни решения нелинейных уравнений в другие, не меняя формы исходных уравнений. Это преобразование осуществляется с помощью дифференциальных уравнений, решение которых (как мы ожидаем) получить легче, чем непосредственно проинтегрировать исходные уравнения. Продемонстрируем идею преобразования Бэклунда на примере нелинейного уравнения Клейна—Гордона:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = F(\Phi), \tag{2.1}$$

где F—произвольная однозначная функция Φ. Пусть мы знаем какое-то решение этого уравнения $\Phi_{n-1}(x, y)$. Попытаемся отыскать другое решение $\Phi_n(x, y)$, связанное с Φ_{n-1} системой двух уже обыкновенных дифференциальных уравнений [13]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = P\left\{\Phi_{n-1},\ \Phi_n,\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x}\right\}, \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = Q\left\{\Phi_{n-1},\ \Phi_n,\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y}\right\}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где неизвестные пока функции (или функционалы) P и Q подлежат определению. Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к уравнениям для P и Q:

$$\begin{gathered} Q\frac{\partial P}{\partial \Phi_n} + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial \Phi_{n-1}} + F(\Phi_{n-1})\frac{\partial P}{\partial \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x}} = F(\Phi_n), \\ P\frac{\partial Q}{\partial \Phi_n} + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial \Phi_{n-1}} + F(\Phi_{n-1})\frac{\partial Q}{\partial \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y}} = F(\Phi_n). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Эта система, вообще говоря, может оказаться несовместной, например, из-за недостаточного выбора аргументов функций P и Q, что означало бы несуществование преобразования Бэклунда, по крайней мере, в форме (2.2). Обратимся сначала к простейшему случаю линейного уравнения, когда $F(\Phi) = \gamma\Phi + \Gamma$. При этом функции P и Q находятся элементарно:

$$\begin{gathered} P = k(\Phi_n - \Phi_{n-1}) + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x}, \\ Q = \gamma k^{-1}(\Phi_n - \Phi_{n-1}) + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь k — постоянный параметр, имеющий смысл волнового числа. Таким образом, уравнения Бэклунда имеют простой вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} + k(\Phi_n - \Phi_{n-1}), \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y} + \frac{\gamma}{k}(\Phi_n - \Phi_{n-1}). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Решение этой пары уравнений легко находится:

$$\Phi_n(x, y) = \Phi_{n-1}(x, y) + \mathrm{const}\, \exp(kx + \gamma y/k). \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что искомое решение получается из известного прибавлением к нему монохроматической бегущей волны с волновым числом k и «частотой» γ/k, определяемой из дисперсионного соотношения линейной задачи. Выбирая в качестве начального («вакуумного») решение (2.1) в виде $\Phi_0 = -\Gamma/\gamma$, можно набрать при $n \to \infty$ ряд (или интеграл) Фурье, так что преобразование Бэклунда выглядит тривиально. Обратим внимание на одно чрезвычайно важное свойство преобразования Бэклунда. Каждому этапу (формуле (2.6)) может быть сопоставлена диаграмма Лэмба и коэффициент преобразования k (рис. 1) [63]. Легко показать, что последовательные преобразования с коэффициентами k_1, k_2 и k_2, k_1 коммутативны (рис. 2), причем четыре

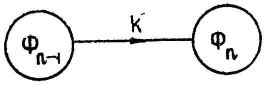

Рис. 1.

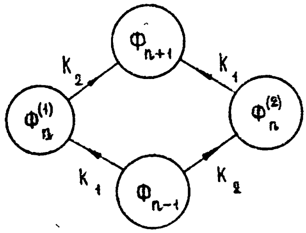

Рис. 2.

функции, образующие одну «клетку» на диаграмме Лэмба, связаны между собой алгебраически (для доказательства этого утверждения нет необходимости в использовании явного вида (2.6); достаточно уравнений (2.5)):

$$\Phi_{n+1} = -\Phi_{n-1} + \Phi_n^{(1)} + \Phi_n^{(2)}. \tag{2.7}$$

Таким образом, с помощью только алгебры удается найти любое решение линейного уравнения Клейна—Гордона, что графически может быть изображено пирамидой на диаграмме Лэмба (рис. 3). Разместив на нижнем этаже вакуумное решение Φ_0, получим на первом этаже монохроматические бегущие волны с различными волновыми числами,

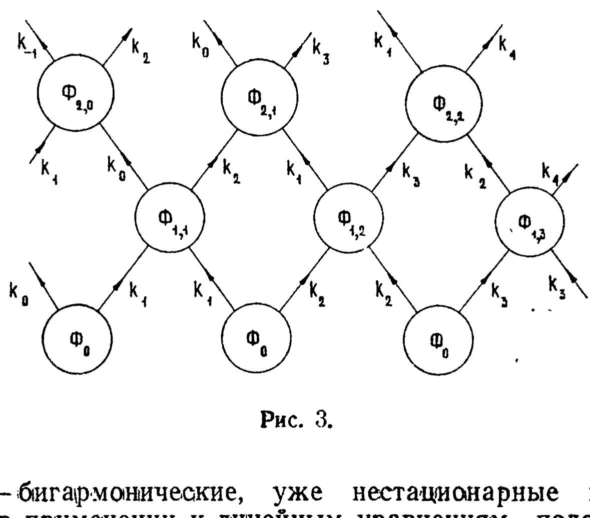

Рис. 3.

на втором — бигармонические, уже нестационарные волны и т. д. Разумеется, в применении к линейным уравнениям подобная техника выглядит весьма тяжеловесной. Однако в нелинейной задаче у нас нет особого выбора.

Найдем вид P и Q для произвольной функции $F(\Phi)$. Дифференцируя первое уравнение в (2.3) дважды по $\dfrac{\partial\Phi_{n-1}}{\partial y}$, находим, что $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial^2 \dfrac{\partial\Phi_{n-1}}{\partial y}} - \dfrac{\partial P}{\partial\Phi_n} = 0$. Отсюда следует, что

$$Q = Q_1(\Phi_n, \Phi_{n-1}) + Q_2(\Phi_n, \Phi_{n-1})\frac{\partial\Phi_{n-1}}{\partial y} \tag{2.8}$$

и аналогичное выражение получается для P. Подставим (2.8) в (2.3) и обратим слагаемое перед производными от Φ в нуль. Это приводит к системе восьми уравнений для четырех неизвестных Q_1, Q_2, P_1, P_2:

$$\begin{aligned} &Q_1\frac{\partial P_1}{\partial\Phi_n} + P_2F(\Phi_{n-1}) = F(\Phi_n),\\ &P_1\frac{\partial Q_1}{\partial\Phi_n} + Q_2F(\Phi_{n-1}) = F(\Phi_n); \end{aligned} \tag{2.9а}$$

$$\begin{aligned} &Q_2\frac{\partial P_1}{\partial\Phi_n} + \frac{\partial P_1}{\partial\Phi_{n-1}} = 0,\\ &P_2\frac{\partial Q_1}{\partial\Phi_n} + \frac{\partial Q_1}{\partial\Phi_{n-1}} = 0; \end{aligned} \tag{2.9б}$$

$$Q_1\frac{\partial P_2}{\partial\Phi_n} = 0, \qquad P_1\frac{\partial Q_2}{\partial\Phi_n} = 0; \tag{2.9в}$$

$$Q_2\frac{\partial P_2}{\partial\Phi_n} + \frac{\partial P_2}{\partial\Phi_{n-1}} = 0, \qquad P_2\frac{\partial Q_2}{\partial\Phi_n} + \frac{\partial Q_2}{\partial\Phi_{n-1}} = 0. \tag{2.9г}$$

Если бы $P_1 = Q_1 = 0$, то из (2.9 а) следовало бы, что $P_2 = Q_2 = F(\Phi_n)/F(\Phi_{n-1})$ и из (2.9 г) $-F'(\Phi_n) = F'(\Phi_{n-1})$, что, очевидно, невозможно в нелинейных задачах. Следовательно, из (2.9 в) и (2.9 г) имеем P_2, $Q_2 = \mathrm{const}$. Таким образом, в преобразовании Бэклунда производные входят аддитивно с нелинейными функциями. Из (2.9 б) получим общий вид P_1 и Q_1: $P_1 = P_1(\Phi_n - Q_2\Phi_{n-1})$ и $Q_1 = Q_1(\Phi_n - P_2\Phi_{n-1})$. Наконец, из (2.9 а) находим, что $Q_2 = -P_2$ и функция F удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора $F'' + \mathrm{const}\,F = 0$. Таким образом, условия совместности (2.8) приводят к тому, что преобразование Бэклунда существует не для любого нелинейного уравнения Клейна—Гордона, а лишь для двух его модификаций, когда F — синусоидальная или гиперболическая функция. В первом случае уравнение (2.2) получило название синус-уравнения Гордона:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = \sin\Phi. \tag{2.10}$$

Поскольку это уравнение почти не обсуждалось на школе, перечислим основные области его применения: движение дислокаций в твердом теле, распространение ультракоротких оптических импульсов, эффект Джозефсона и единая теория поля [63–67].

Преобразования Бэклунда впервые были найдены именно для этого уравнения и имеют вид

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x} + 2k \sin \frac{\Phi_n + \Phi_{n-1}}{2},$$
$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y} + \frac{2}{k} \sin \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{2}. \qquad (2.11)$$

Существенно, что форма диаграммы Лэмба в нелинейной задаче остается такой же, как и в линейной, изменился лишь вид алгебраической связи между четырьмя решениями:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_{n-1} + 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \operatorname{tg} \frac{\Phi_n^{(1)} - \Phi_n^{(2)}}{4}\right). \qquad (2.12)$$

Важно отметить, что уравнения Бэклунда, хотя и более простые, чем (2.10), тем не менее не решаются в квадратурах. Поэтому соотношение (2.12) является единственным источником, порождающим новые решения уравнения (2.10). Простота расчетов по формуле (2.12) оправдала поиск преобразования Бэклунда, который хоть и не привел к решаемым уравнениям, но дал возможность нахождения четвертого решения по известным трем. Однако эти три решения также обязаны быть связаны преобразованием Бэклунда! Поэтому применимость изложенной процедуры ограничена возможностью нахождения хотя бы двух решений непосредственно из уравнений Бэклунда. Эта возможность реализуется, например, для солитонных решений уравнения (2.10). Действительно, полагая $\Phi_0 = 0$ (или 2π) (Φ_0 — также решение (2.10)), из (2.11) находим $\Phi_1^{(1)} = \pm 4 \operatorname{arctg} \exp(k_1 x + y/k_1 + b_1)$. Это решение описывает солитон. С помощью k_2 находим аналитическое выражение для $\Phi_1^{(2)}$. В результате мы заполнили нижних два этажа на диаграмме Лэмба: на первом — константы, на втором — солитоны. Заполнение высших этажей теперь уже легко сделать, используя (2.12). В частности, на третьем этаже располагаются двухсолитонные решения вида

$$\Phi_2 = 4 \operatorname{arctg}\left\{\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \frac{\exp(k_1 x + y/(k_1 + b_1)) \mp \exp(k_2 x + y/(k_2 + b_2))}{1 \pm \exp\left[(k_1 + k_2)x + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) y + b_1 + b_2\right]}\right\}. \qquad (2.13)$$

Это решение для различных значений k_1 и k_2, описывающее взаимодействие двух солитонов, рассматривалось в [10, 62]; N-солитонные решения* с помощью (2.12) получены в [68].

Отметим еще один класс решений, который может быть получен с помощью преобразования Бэклунда. В уравнениях (2.10) параметр k может быть комплексным. Следовательно, имеются комплексные решения синус-уравнения Гордона, как правило, не имеющие физического смысла для большинства приложений этого уравнения (из-за нелинейности их реальная или мнимая часть уже не является решением). Однако из комплексных стационарных волн с помощью преобразования Бэклунда могут быть построены действительные решения, уже имеющие физический смысл. Для этого достаточно считать k_1 и k_2 комплексно-сопряженными: $k_{1,2} = a \pm ik$. Тогда из (2.13) немедленно получаем (при $b_1 = b_2 = 0$)

* По «лазерной» терминологии солитоном называют 2π-импульс. Следовательно, на N-м этаже располагается $2(N-1)$ π-импульс.

$$\Phi_2 = 4\,\mathrm{arctg}\left[\frac{a}{k}\,\frac{\sin k\left(x - \dfrac{y}{k^2+a^2}\right)}{\mathrm{ch}\, a\left(x + \dfrac{y}{k^2+a^2}\right)}\right]. \tag{2.14}$$

Это уже существенно нестационарное решение, его иногда называют двойным солитоном, а в нелинейной оптике — π-импульсом, π-импульсы наравне с 2π-импульсами играют важную роль в эволюции начального возмущения и в формировании его асимптотической формы. Задача нахождения других решений синус-уравнения Гордона упирается в указанную ранее проблему корректного заполнения нижних двух этажей на диаграмме Лэмба и еще далека от ее полного решения.

Особо следует отметить существование тесной связи между преобразованием Бэклунда и методом обратной задачи теории рассеяния, которые некоторое время развивались для различных уравнений независимо. После того, как оба подхода стали применимы к одним и тем же уравнениям, стала очевидной их связь [55, 57–61]. Выведем, например, уравнения обратной задачи из уравнений Бэклунда. Для этого введем две новые функции ψ_1 и ψ_2 по формуле

$$\mathrm{tg}\,\frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{4} = \frac{\psi_2}{\psi_1}. \tag{2.15}$$

Используя (2.11), получим два уравнения:

$$\begin{gathered}
\psi_1\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{k}{2}\psi_1 \sin\Phi_n + \frac{k}{2}\psi_2\cos\Phi_n\right) = \\
= \psi_2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{k}{2}\psi_2\sin\Phi_n - \frac{k}{2}\psi_1\cos\Phi_n\right), \\
\psi_1\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial y} - \frac{\psi_1}{2}\frac{\partial\Phi_n}{\partial y} + \frac{1}{2k}\psi_2\right) = \\
= \psi_2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \frac{\psi_2}{2}\frac{\partial\Phi_n}{\partial y} - \frac{1}{2k}\psi_1\right).
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Из всевозможных решений (2.16) выберем такие, которые обращают в нуль круглые скобки. Это означает, что $\psi_{1,2}$ являются решением системы линейных уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{1}{2k}\psi_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi_2, \\
\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{1}{2k}\psi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi_1;
\end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \frac{k}{2}\sin\Phi\psi_2 + \frac{k}{2}\cos\Phi\,\psi_1, \\
\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \frac{k}{2}\sin\Phi\,\psi_1 - \frac{k}{2}\cos\Phi\,\psi_2.
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Эти уравнения являются основными для метода обратной задачи [20, 22, 23]. Уравнения (2.17) используются для восстановления Ф по данным рассеяния, а (2.18) описывает «временную» (по оси x) эволюцию собственных функций. Можно поступить наоборот: вывести преобразование Бэклунда из уравнений обратной задачи [61, 85]. Таким образом, уравнения Бэклунда и обратной задачи связаны между собой. Отметим также, что из преобразований Бэклунда следует, кроме уравнений обратной задачи, и неограниченное число законов сохранения [56, 61].

Применительно к уравнениям другого типа, не сводящимся к нелинейному уравнению Клейна—Гордона, необходимо увеличить число аргументов функций P и Q для того, чтобы можно было найти преобразование Бэклунда [14] (полезными для упрощения формы P и Q могут оказаться соображения о совпадении порядка уравнений Бэклунда и исходных, а также об однотипности формы стационарной волны; в частности, в синус-уравнении Гордона стационарная волна имеет форму перепада, а не импульса). Мы приведем здесь вид преобразований Бэклунда для весьма важного уравнения Кортевега—де Вриза, широко обсуждавшегося на наших школах,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{2.19}$$

записанных относительно функции w $\left(u=-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$ [15]:

$$\frac{\partial w_n}{\partial x}=-\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}-k+\frac{1}{12\beta}(w_n-w_{n-1})^2,$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial t}=-\frac{\partial w_{n-1}}{\partial t}+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial w_n}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial w_n}{\partial x}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}+\right. \tag{2.20}$$

$$\left.+\left(\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{1}{6}(w_n-w_{n-1})\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2}\right).$$

Алгебраическая связь между четырьмя решениями на диаграмме Лэмба имеет вид

$$w_{n+1}=w_{n-1}+12\beta\frac{k_1-k_2}{w_n^{(1)}-w_n^{(2)}}. \tag{2.21}$$

Форма диаграммы Лэмба при этом не меняется.

Применение преобразования Бэклунда к различным уравнениям и связь с другими методами содержатся в [10, 12—17, 55—61, 85, 86].

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХОПФА—ХИРОТЫ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Преобразование Бэклунда является частным видом преобразований, не изменяющих вида исходных уравнений. Более общим является преобразование к другим уравнениям, решение которых мы знаем. Наиболее эффектным было бы нахождение преобразований, переводящих нелинейные уравнения в линейные.

Эта идея лежит в основе преобразования, связываемого с именем Кирхгофа и сводящегося к замене переменной типа $u=U(\theta)$ [87]. Например, нелинейное уравнение диффузии вида $\operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u)=0$

заменой переменной $\theta = \int_0^u \lambda(v)dv$ переводится в хорошо известное линейное уравнение Лапласа: $\Delta\theta = 0$. Данное преобразование имеет наиболее простой алгоритм; во всяком случае с помощью минимальных математических выкладок быстро удается убедиться в возможности линеаризации исходного уравнения. Очевидно, что применимость преобразования Кирхгофа весьма ограничена, что не исключает, конечно, возможности решения некоторых конкретных задач (см., например, [87, 88]). Более общим является отыскание функциональных преобразований типа $u = U(\theta, \theta_x, ...)$*. Эта идея была реализована Хопфом применительно к достаточно хорошо известному уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3.1}$$

Делая замену переменных [9],

$$u = -2\delta\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta, \tag{3.2}$$

уравнение (3.1) преобразуется к линейному уравнению диффузии:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \delta\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0.$$

В результате удается найти общее решение нелинейного уравнения Бюргерса. Очевидно, нам просто «повезло», что такое важное уравнение решается точно; модификации уравнения Бюргерса (учет неоднородности или изменение степени нелинейного члена), как правило, не приводятся к линейным уравнениям** [69]. Это относится и к другим уравнениям. Тем не менее, преобразование типа (3.2), хотя и переводящее нелинейные уравнения в нелинейные, оказывается эффективным. Так, Хирота [30] применил преобразование вида

$$u = 12\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta \tag{3.3}$$

к уравнению Кортевега—де Вриза (2.18) и получил для θ нелинейное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\theta_t + \beta\theta_{xxx}}{\theta}\right) = \frac{3\beta}{\theta^2}(\theta_x\theta_{xxx} - \theta_{xx}^2). \tag{3.4}$$

Заметим, что это нелинейное уравнение обладает одним линейным свойством: если θ — решение, то const $\cdot\,\theta$ также является решением (3.4), однако из (3.3) видно, что const не влияет на вид функции $u(x, t)$. Хотя уравнение (3.4) и нелинейное, одно из его решений может быть получено «разделением» уравнения на два, одно из которых нелинейное, но в обыкновенных производных, а другое, линейное уравнение, — в частных производных:

---

* Иногда с помощью замены как функций, так и аргументов также удается перейти от исходных нелинейных уравнений к линейным [71]. К сожалению, отыскание этих замен, по-видимому, не легче, чем непосредственное интегрирование исходных уравнений.

** Исключение представляет неоднородное уравнение Бюргерса (в правой части (3.1) содержится произвольная функция x и t), описывающее генерацию гиперзвука лазерным пучком [70].

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}-\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)^2=0,$$
$$\frac{\partial_t \theta}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}=0. \tag{3.5}$$

Решение (3.5) имеет вид

$$\theta(x,\ t)=1+\exp(kx-\beta k^3 t-\varphi). \tag{3.6}$$

Легко видеть, что это решение соответствует солитону

$$u\ (x,\ t)=3\beta k^2\,\mathrm{sch}^2\left(\frac{kx-\beta k^3 t-\varphi}{2}\right), \tag{3.7}$$

где k — определяет его амплитуду, а φ — фазу.

Таким путем мы нашли стационарную волну, что, очевидно, легко можно было сделать и непосредственно из (2.18). Однако удается найти и нестационарные решения (3.4) сравнительно простым путем, а именно: добавлением в (3.6) еще нескольких экспонент с другими значениями k (как будто справедлив линейный принцип суперпозиции). Из-за нелинейности, однако, к произвольному числу экспонент с разными k должны быть добавлены множители из всевозможных произведений этих экспонент. Например, двухсолитонное решение (3.4) описывается формулой

$$\theta=1+e^{\xi_1}+e^{\xi_2}+\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2 e^{\xi_1+\xi_2},$$
$$\xi_{1,2}=k_{1,2}\,x-\beta k_{1,2}^3\,t-\varphi_{1,2}. \tag{3.8}$$

Громоздкость этих формул быстро растет с увеличением числа солитонов. По этому способу нахождение N-солитонных решений связано только с алгеброй.

Заметим, что решение (3.8) не удовлетворяет системе (3.5), однако вводя в (3.5) некоторый линейный оператор, можно добиться, чтобы N-солитонное решение удовлетворяло обыкновенному дифференциальному уравнению [72].

Обратим внимание, что N-солитонное решение может быть записано в изящной форме [15, 72]:

$$\theta=\det\ |\,M\,|,$$
$$M_{ij}=\delta_{ij}+\frac{2\sqrt{k_i k_j}}{k_i+k_j}\exp\frac{\xi_i+\xi_j}{2}. \tag{3.9}$$

Выражение (3.9) следует также из формул обратной задачи теории рассеяния [18]. Таким образом, один из алгоритмов нахождения преобразования Хопфа—Хироты может быть связан с обратной задачей теории рассеяния (мы не останавливаемся здесь на формальных попытках записи преобразования Хопфа для уравнения Бюргерса в форме уравнений обратной задачи [73]). Мы подчеркнем другую интерпретацию преобразования Хопфа—Хироты, удобную, на наш взгляд, для практического использования. Легко заметить, что преобразование Хопфа—Хироты переводит решение типа (3.6) в стационарную волну исходного уравнения (в солитон для уравнения Кортевега—де Вриза и в ударную волну для уравнения Бюргерса). Поэтому преобразование Хопфа—Хироты в простейших случаях может быть интерпретировано как переход от стационарной волны определенной формы к волне экспоненциальной формы. Поскольку структура стационарных волн, как правило, известна, то задача нахождения формул перехода к экспоненте в ряде случаев вполне разрешима (разумеется, такая интерпретация возможна в сравнительно простых, но достаточно распространенных случаях, когда стационарная волна содержит только экспоненты). Далее, представляя θ в виде суммы экспонент (или в виде отношения таких сумм), с помощью алгебраических операций находятся все коэффициенты. Этот алгоритм достаточно прост. В частности, для синус-уравнения Гордона стационарная волна имеет вид

$$\Phi = 4 \operatorname{arctg} \exp (kx + y/k + \varphi), \tag{3.10}$$

и, следовательно, преобразование Хироты может быть выбрано в следующей форме [30]:

$$\Phi = 4 \operatorname{arctg} \theta. \tag{3.11}$$

Очевидно, что переход к экспоненте можно сделать различными путями. Например, для синус-уравнения Гордона наряду с (3.11) справедливы следующие формы преобразования Хироты [20, 32]:

$$\Phi = \arccos \left(1 - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \ln \theta \right); \tag{3.12}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 = 4 \ln \theta \tag{3.13}$$

(формула (3.13) может быть найдена также с помощью обратной задачи теории рассеяния [20]). С помощью подобных преобразований найдены N-солитонные решения для широкого класса нелинейных уравнений [30–34]*.

Отметим также, что применение преобразования Хопфа—Хироты позволяет предложить другой способ вывода преобразования Бэклунда и уравнений обратной задачи, чем изложенный выше [58].

Область применения преобразования Хопфа—Хироты шире, чем просто нахождение N-солитонных решений. Например, преобразованное уравнение может допускать разделение переменных, в то время как в исходных уравнениях переменные не разделяются**. В частности, легко убедиться, что в (3.4) $\theta(x, t)$ представима в виде $T(t)\,X(x)$, где T — произвольная функция времени, а X является решением нелинейного уравнения $XX^{\text{IV}} - 4X'X''' + 3(X'')^2 = 0$. Однако это решение тривиальное, поскольку в этом случае u не зависит от t. Также тривиальным выглядит разделение переменных в синус-уравнении Гордона (2.9); оно приводит к формуле для одного солитона. Нетривиальные результаты получаются для следующей формы синус-уравнения Гордона:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \beta \sin \Phi = 0, \tag{3.14}$$

---

* По аналогии с (3.2) и (3.3) можно найти формулы преобразования Хопфа—Хироты для обобщенных (с нелинейностью u^n) уравнений Бюргерса $u^n = -\frac{n+1}{n} \delta \frac{\partial}{\partial x} \ln \theta$ и уравнения Кортевега—де Вриза $u^n = 2\beta \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta$. Однако уравнения для θ получаются слишком громоздкими, и мне не удалось отыскать каких-либо новых решений.

** Отметим возможность представления решения уравнения $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = F(\Phi)$ в виде $\Phi_1(x)\,\Phi_2(y)$ с аргументами, связанными между собой, $y = y(x)$ [74].

в которой t и z — «истинные» время и координата (в (2.9) x и y — характеристики (3.14)). Преобразование Хопфа—Хироты в форме (3.11) переводит его в следующее:

$$(1+\theta^2)(\theta_{tt}-c^2\theta_{zz})-2\theta(\theta_t^2-c^2\theta_z^2)+\beta\theta(1-\theta^2)=0. \tag{3.15}$$

Попытаемся сделать разделение переменных в виде $\theta = T(t)Z(z)$ (или в виде T/Z, как в [63]) с дополнительным условием, что T и Z удовлетворяют нелинейным уравнениям

$$T''+\omega^2(T)\,T=0, \qquad Z''+k^2(Z)\,Z=0 \tag{3.16}$$

с законами сохранения «энергии»

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(T')^2+V(T)=E, \qquad \frac{1}{2}(Z')^2+W(Z)=H,\\ V=\int T\,\omega^2(T)\,dT, \qquad W=\int Z\,k^2(Z)\,dZ,\end{gathered} \tag{3.17}$$

где k, ω, E, H подлежат определению. Подставляя все в (3.15), получим

$$\begin{gathered}\{c^2k^2(Z)+Z^2[-T^2\omega^2(T)+4V(T)-\beta q T^2-4E]+\beta\}+\\ +\{-\omega^2(T)+T^2[c^2Z^2k^2(Z)-4c^2W(Z)-\\ -\beta(1-q)Z^2+4c^2H]\}=0,\end{gathered} \tag{3.18}$$

где q — произвольная постоянная. Как обычно, в методе разделения переменных, приравнивая две квадратные и фигурные скобки константам, находим непротиворечивые уравнения для T и Z:

$$\begin{gathered}\frac{d^2T}{dt^2}+\beta q T+4c^2HT^3=0,\\ \frac{d^2Z}{dz^2}+\frac{\beta(q-1)}{c^2}Z+\frac{4E}{c^2}Z^3=0,\end{gathered} \tag{3.19}$$

причем одновременно справедливы законы сохранения «энергии»:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\frac{dT}{dt}\right)^2+\frac{\beta q}{2}T^2+c^2HT^4=E,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2+\frac{\beta(q-1)}{2c^2}Z^2+\frac{E}{c^2}Z^4=H.\end{gathered} \tag{3.20}$$

Таким образом, удалось разделить переменные в нелинейном уравнении, причем констант разделения три: H, E и q. Одним из частных решений является π-импульс,

$$\begin{gathered}\theta(z,\ t)=\frac{ck}{\cancel{\sqrt{2}}\,\omega}\operatorname{sch} kz\sin\omega t\\ (\omega^2+c^2k^2=\beta),\end{gathered} \tag{3.21}$$

уже полученный ранее с помощью преобразования Бэклунда (формула (2.14)). Форма такой волны может быть найдена и приближенно из (3.14) [75].

При $\omega \to 0$ π-импульсы, так же как 4π-импульсы, переходят в «вырожденные» солитоны [63]:

$$\theta = \sqrt{\beta}\, t \operatorname{sch} \sqrt{\beta}\, z/c. \tag{3.22}$$

Наряду с π-импульсами удается найти и периодические (по z и t) решения (3.14) и (3.15), соответствующие определенной моде нелинейного резонатора. Например,

$$\theta = \frac{ck}{\omega} \frac{\gamma}{\sqrt{1-s^2}} \operatorname{Cn}(\omega t, s) \operatorname{Cn}(kz, \gamma),$$

$$\omega^4 = \beta^2 + c^4 k^4 + 2\beta c^2 k^2 (1 - 2\gamma^2), \tag{3.23}$$

$$s^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\beta + c^2 k^2 (1 - 2\gamma^2)}{\omega^2}\right]$$

и

$$\theta = \frac{ck}{\omega} \operatorname{Sn}(\omega t, s) \operatorname{dn}(kz, \gamma),$$

$$\omega^2 = \beta - c^2 k^2 (2 - \gamma^2) + \sqrt{\beta^2 - 2\beta c^2 k^2 (2 - \gamma^2) + \gamma^4 c^4 k^4}, \tag{3.24}$$

$$s^2 = \frac{c^4 k^4}{\omega^4} (1 - \gamma^2).$$

Здесь $\operatorname{Sn} \xi$, $\operatorname{Cn} \xi$ и $\operatorname{dn} \xi$ — эллиптические функции Якоби. Эти решения зависят от двух произвольных постоянных k и γ (на самом деле, это — четырехпараметрическое семейство решений, но две константы соответствуют сдвигу t и z и здесь опущены).

Особый интерес вызывает одно частное решение, легко следуемое из (3.24) при $s = 1$:

$$\theta(z, t) = (1 - \gamma^2)^{-1/4} \operatorname{th} \omega_0 t \operatorname{dn}(k_0 z, \gamma),$$

$$\frac{c^2 k_0^2}{\beta} = \left(2 - \gamma^2 + 2\sqrt{1-\gamma^2}\right)^{-1}, \quad \omega_0^2 = c^2 k_0^2 \sqrt{1 - \gamma^2}, \tag{3.25}$$

поскольку при $t \to \pm\infty$ оно соответствует известной стационарной периодической волне, относительно которой доказано, что она неустойчива по отношению к малым возмущениям [12]. Представленное здесь решение описывает частный случай нелинейной стадии развития неустойчивости. Поскольку форма волны в результате не изменяется, меняется только полярность поля (т. е. волна «перебрасывается» из одной области фазовой плоскости стационарных волн в другую в результате нестационарного процесса), то можно говорить, что это решение описывает «знаковую» (или фазовую) неустойчивость волны этого типа*. Хотя эти и подобные им решения получаются весьма громоздко, их, по-видимому, следует рассматривать как «элементарные», в том смысле, что они наряду со стационарными волнами определяют асимптотику произвольного начального возмущения. Разделение переменных возможно и в других уравнениях [76–79].

Преобразование Хопфа—Хироты, как уже указывалось, переводит заданную форму стационарной волны в простейшую (экспоненту). Очевидно, что можно исключить функцию θ и непосредственно связать

---

* Отметим, что эта волна неустойчива также к длинноволновым возмущениям — модуляционная неустойчивость [90].

стационарные решения различных уравнений. При этом также отыскивается замена переменных, переводящих одни нелинейные уравнения в другие. Эта идея лежит в основе преобразования Миуры [37]. Им замечено, что решение уравнения Кортевега—де Вриза u связано с решением модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза v:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm v^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \tag{3.26}$$

следующим соотношением:

$$u = \frac{1}{6}(v^2 \pm \sqrt{\beta} v_x). \tag{3.27}$$

Аналогично могут быть связаны решения уравнения Кортевега—де Вриза и синус-уравнения Гордона. Отметим, что в рамках обратной задачи может быть показано, что преобразование Миуры является следствием унитарного преобразования соответствующих операторов [79]. Нахождение таких преобразований искомых уравнений к уже известным означает их немеделнное решение.

4. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

В изложенных выше преобразованиях алгоритм основан на отыскании связи между стационарными решениями различных уравнений. Другая идея лежит в основе метода, который мы назовем методом вариации параметров стационарных волн [35, 36], а именно, предполагается, что форма волны по-прежнему описывается стационарным решением, однако параметры решения (константы интегрирования) являются произвольными функциями координат и времени, подлежащими определению. Очевидно, что преобразование к новым переменным может быть проведено в любых уравнениях; менее ясно удобство такого преобразования, поскольку автономные уравнения могут стать, например, уже не автономными. Основной целью асимптотических методов как раз и является упрощение подобных уравнений, причем оно делается приближенно с помощью рядов. Мы хотим обратить внимание на возможность точного перехода к «хорошим» уравнениям для параметров стационарных волн. Она реализуется не только в экзотических случаях, как это может показаться на первый взгляд, но и в физически важных задачах. Поясним идею этого метода на одном варианте нелинейного уравнения Клейна—Гордона, который, например, используется в единой теории поля:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = F(u\, u^*)\, u, \tag{4.1}$$

где u — комплексная функция. Форма стационарной волны находится элементарно: $u = Ae^{i\psi}$, $\psi = kx + hy + \mathrm{const}$, $kh = -F(A^2)$. Будем рассматривать это решение как формулу перехода от переменных u и u^* к переменным A и ψ. Подстановка в (4.1) приводит к системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 A}{\partial x\, \partial y} - A\,\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial \psi}{\partial y} = F(A^2)\, A, \\ &\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial A}{\partial x} + A\,\frac{\partial^2 A}{\partial x\, \partial y} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(В методе усреднения уравнения (4.2) следуют только во втором приближении [1,3].) Эти уравнения по-прежнему нелинейны, но автономны, так что, по крайней мере, один класс его решений—стационарные волны огибающих — может быть всегда найден в квадратурах. Стационарным решениям (4.2) соответствуют существенно нестационарные решения исходного уравнения. Таким путем в [35,76,82] исследованы циркулярно поляризованные волны в плазме. Гармонические стационарные волны являются частным случаем стационарных волн. Покажем возможности этого метода в системах, допускающих стационарные волны несинусоидальной формы, на примере уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = a e^{\lambda u}, \tag{4.3}$$

которое, как уже указывалось, решается также с помощью преобразования Бэклунда [13,14]. Стационарная волна $u = U(\psi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $U_{\psi\psi} = a e^{\lambda U}$, причем в этом случае нам даже не понадобится явная форма волны. Непосредственный переход от U к ψ, однако, к заметным упрощениям не приводит, но нетрудно «угадать» нужную замену [36]

$$u(x, y) = U[\psi(x, y)] + f(x, y) \tag{4.4}$$

с введением уже двух произвольных функций ψ и f. Подстановка (4.4) в (4.3) и приравнивание коэффициентов перед членами с $U_{\psi\psi}$, U_ψ, e^U нулю, приводит к системе уравнений для ψ и f:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = e^{\lambda f}. \tag{4.5}$$

Решение этой системы сразу находится:

$$\begin{gathered} \psi(x, y) = X(x) + Y(y), \\ f(x, y) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{dX}{dx} + \frac{1}{\lambda}\ln\frac{dY}{dy}, \end{gathered} \tag{4.6}$$

где X и Y — произвольные функции своих аргументов. Замечательно, что в этом случае удается найти общее решение (4.3)! Другие примеры, решаемые с помощью такого подхода, излагаются в работе [36].

5. «ОБРАТНЫЕ» МЕТОДЫ

Выше рассматривалось построение методов отыскания точных решений наперед заданных уравнений. Можно предложить и «обратный» способ, заключающийся в придумывании преобразований от эталонных уравнений, решение которых мы знаем, к другим, решение которых мы, следовательно, тоже будем знать. Если среди этих других окажутся физически интересные уравнения, то это оправдает применимость этого подхода. По-видимому, впервые эта идея была использована в [38] для исследования линейного монохроматического поля в неоднородной среде на основе известных решений, описывающих поля в нелинейной однородной среде. Отметим, что способов перехода от нелинейных уравнений к линейным может быть несколько [38–40]. Продемонстрируем этот подход, взяв в качестве эталонного нелинейное уравнение Клейна—Гордона (2.1). Очевидно, что если $\Phi(x, y)$ есть решение уравнения (2.1), то частным решением линейного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{F[\Phi(x, y)]}{\Phi(x, y)} u = f_1(x, y)\, u \tag{5.1}$$

является функция const $\Phi(x, y)$. По данной $\Phi(x, y)$ можно построить другое линейное уравнение, решение которого мы знаем, а именно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \Phi}[\Phi(x, y)]\, u = f_2(x, y)\, u, \tag{5.2}$$

причем его решение имеет вид

$$u = C_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{5.3}$$

где $C_{1,2}$ — произвольные постоянные. По нелинейному уравнению может быть построено другое нелинейное уравнение, например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{F[\Phi(x, y)]}{Q[\Phi(x, y)]} Q(u), \tag{5.4}$$

одно из решений которого мы, очевидно, знаем. Таким же путем могут быть сконструированы и неоднородные уравнения с известными решениями (ср. [39]), например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f_3(u) + f_4(x, y), \tag{5.5}$$

где f_3 и f_4 — произвольные функции, удовлетворяющие условию $f_3(\Phi) + f_4(\Phi) = F(\Phi)$. Аналогичные способы можно применять для нахождения неизвестных решений нелинейных уравнений по известным линейным и одних линейных по другим, также линейным уравнениям. Наконец, делая замену в линейных уравнениях, можно найти классы нелинейных уравнений, решаемых точно («обратные» преобразования Кирхгофа—Хопфа—Хироты). Обратные методы применяются также при отыскании полей в резонаторах с движущимися стенками [80, 81]. В какой-то мере эта идея лежит и в методе обратной задачи теории рассеяния, где за исходные берутся произвольные операторы и по ним определяется то уравнение, решение которого, следовательно, становится известным.

Реализаций обратных методов можно придумать достаточно много. Их главным недостатком является отсутствие алгоритма нахождения соответствующих эталонных уравнений. Действительно, на самом деле нам заданы уравнения типа (5.2) с вполне определенной функцией $f(x, y)$, и догадаться о связи $f(x, y)$ с $F[\Phi(x, y)]$ практически невозможно. В сущности, мы отвечаем с помощью обратных методов не на те вопросы, которые задает нам природа, а на те, которые мы за нее придумываем, только потому, что знаем на них хорошие ответы. Поэтому попытки получения решений необходимых нам уравнений из эталонных путем простого перебора всевозможных подстановок, их комбинирования при отсутствии алгоритма такого перебора методически следует считать нецелесообразными. Это не исключает, конечно, возможности получения решений в некоторых конкретных задачах.

В этой небольшой лекции мы изложили лишь часть развиваемых сейчас методов отыскания точных решений задач нелинейной теории волн. С их помощью решено точно большое число модельных уравнений, хотя, как уже отмечалось, вывод этих уравнений зачастую является приближенным [3, 83]. Многочисленные публикации в настоящее время, как это видно из библиографии, посвящены, в основном, доказательству применимости различных подходов к уже изученным уравнениям и наведению определенной методической общности. Число же решаемых точно интересных для приложений уравнений растет пока медленно. Можно надеяться, что ознакомление с новыми идеями в этой области приведет к заметному увеличению числа решаемых уравнений. Совместное применение точных, приближенных и численных методов (которые Забуски объединил термином «синэнергетический» подход [84]) позволит значительно продвинуться в понимании общей картины волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах.

ЛИТЕРАТУРА

1 М И. Рабинович, Препринт НИРФИ № 35, Горький, 1972, Матем физика, 13, 124 (1973).
2. Г. М. Заславский, Препринт НИРФИ № 41, Горький, 1973; УФН, 111, 395 (1973).
3. Л. А. Островский, Изв. высш уч зав — Радиофизика, 17, № 3, 454 (1974); K. A. Gorshkov, L. A. Ostrovskii, E. N. Pelinovskii, Proc. IEEE, 62, 1511 (1974); ТИИЭР, 62, 113 (1974).
4. А. В. Гуревич, Л П Питаевский, Письма в ЖЭТФ, 17, 808 (1973); ЖЭТФ, 65, 590 (1973).
5. Е. Я Хруслов, Письма в ЖЭТФ, 21, 469 (1975).
6. P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math., 21, 467 (1968); Математика, 13 : 5, 128 (1969).
7. R. K. Dodd, R. K. Bullough, P. Duckworth, J. Phys., A8, L64 (1975); А Е Кудрявцев, Письма в ЖЭТФ, 22, 178 (1975); К А Горшков, Л А. Островский, В В Папко, ЖЭТФ (в печати)
8 Л. А Островский, Е. Н. Пелиновский, Препринт НИРФИ № 33, Горький, 1973
9. E. Hopf, Comm. Pure Appl. Math., 3, 201 (1950).
10. A. Seeger at al, Z. Phys., 134, 173 (1953).
11 Б. М Барбашов, Н. А. Черников, ЖЭТФ, 51, 658 (1966).
12. A. C. Scott, F. Y. F. Chu, D. W. Mc Laughlin, Proc. IEEE, 61, 1443 (1973); ТИИЭР, 61, 79 (1973).
13. D. W. McLaughlin, A. C. Scott, J. Math. Phys., 14, 1817 (1973).
14. G. L. Lamb, J. Math. Phys, 15, 2157 (1974).
15. H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook, Phys. Rev. Lett., 31, 1386 (1973).
16. M. Wadati, J. Phys. Soc. Japan, 36, 1498 (1974).
17. H. H. Chen, C. S. Liu, J. Math. Phys., 16, 1428 (1975).
18. C. S. Gardner at al., Phys. Rev. Lett., 19, 1095 (1967).
19. В Е Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ, 61, 118 (1971), 64, 1627 (1973), Функциональный анализ и его приложения, 8, 43 (1974).
20. M. J. Ablowitz at al., Phys. Rev. Lett., 30, 1262 (1973); 31, 125 (1973); St. Appl. Math., 53, 249 (1974).
21. Л А. Тахтаджян, Л. Д. Фадеев, ТМФ, 21, 160 (1974).
22 Л А. Тахтаджян, ЖЭТФ, 66, 476 (1974).
23. В. Е Захаров, Л. А Тахтаджян, Л. Д Фадеев, Докл АН СССР, 219, 1334 (1974)
24. Е А Кузнецов, А. В Михайлов, ЖЭТФ, 67, 1717 (1974).
25 В. А Марченко, Докл. АН СССР, 217, 276 (1974), Математический сб, 95, 331 (1974).
26 Б А Дубровин, С. П Новиков, Докл. АН СССР, 219, 531 (1974), ЖЭТФ, 67, 2131 (1974).
27. Y. Kato, Pr. Theor. Phys. Suppl., 55, 247 (1974).
28. M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, J. Math. Phys., 16, 598 (1975).
29. J. G. Kingston, C. Rogers, Can. J. Phys., 53, 58 (1975).
30. R. Hirota, Phys. Rev. Lett., 27, 1192 (1971); J. Math. Phys., 14, 805, 810 (1973); J. Phys. Soc. Japan, 33, 1456, 1459 (1972); 35, 286, 289 (1973); 35, 1566 (1973).
31. M. Wadati, M. Toda, J. Phys. Soc. Japan, 32, 1403 (1972); 34, 18 (1973).
32. P. J. Caudrey at al., Phys. Rev. Lett., 30, 237 (1973); J. Phys., A6, L53 (1973),

33. M. Toda, Pr. Theor. Phys. Suppl., **45**, 174 (1970).
34. M. Wadati, J. Phys Soc. Japan, **32**, 1681 (1972); **38**, 673, 681 (1973).
35. К. А. Горшков, В. А. Козлов, Л. А. Островский, ЖЭТФ, **65**, 189 (1973).
36. Е. И. Якубович, Изв. высш уч зав.— Радиофизика, **17**, № 5, 627 (1974).
37. P. M. Miura, J. Math. Phys, **9**, 1202 (1968).
38. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч зав.— Радиофизика, **9**, № 5, 910 (1966).
39. A. B. Almazov, V. N. Telijanz, Phys. Lett., **A26**, 206 (1968).
40. Е. Н Пелиновский, сб. Акуст. методы и средства исследования океана, Владивосток, **1**, 27 (1974).
41. В. Е. Захаров, Л. Д. Фадеев, Функциональный анализ и его приложения, **5**, 18 (1971).
42. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, ТМФ, **19**, 332 (1974).
43 D. W. McLauqhlin, J. Math. Phys, **16**, 96 (1975).
44. Е. М. Крушкаль, Препринт ИЯФ СО АН СССР № 197, Новосибирск, 1968
45. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд Наука, М, 1974
46. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд Наука, М, 1973
47. В. И. Таланов, Изв высш. уч. зав.— Радиофизика, **9**, № 2, 410 (1966).
48. О. В. Руденко, С И Солуян, Докл. АН СССР, **190**, 815 (1970).
49. М М. Ельяшевич, А. Х Фридман, Докл. АН БССР, **18**, 700 (1974).
50. В. М. Костин, ПМТФ, **4**, 69 (1969).
51. Ю. А. Данилов, Препринт ИАЭ-2003, Москва, 1970.
52 H. Shen, W. F. Ames, Phys. Lett., **A49**, 313 (1974).
53. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В И. Таланов, Изв. высш. уч зав — Радиофизика, **14**, № 9, 1353 (1971).
54. Е. Н. Пелиновский, В Е. Фридман, ПММ, **38**, 991 (1974).
55. F. Y. F. Chu, A. C. Scott. Phys. Lett., **A47**, 303 (1974).
56. J. Satsuma, Progr. Theor. Phys., **52**, 1393 (1974); **53**, 585 (1975).
57. H. H. Chen, Phys. Rev. Lett., **33**, 925 (1974).
58. R. Hirota, Progr. Theor, Phys., **52**, 1498 (1974).
59. M. Miyake at all, J. Phys. Soc. Japan, **37**, 868 (1974).
60. H. H. Chen, C. S. Liu, Bull. Amer. Phys., Soc., **19**, 860 (1974).
61. M. Wadati at all, Progr. Theor. Phys., **53**, 419 (1975).
62. J. K. Perring, T. H. R. Skyrme, Nucl. Phys., **31**, 550 (1962).
63. G. L. Lamb, Rev. Mod. Phys., **43**, 99 (1971).
64. И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов, В. С. Ройтберг, Квантовая электроника, **1**, 757; 1309 (1974).
65. А. М. Косевич, Основы динамики кристаллических решеток, изд. Наука, М, 1972.
66. И. О. Кулик, И. К. Янсон, Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах, изд. Наука, М, 1970.
67. A. Barone at all, Riv. Nouvo Cim., **1**, 227 (1971).
68. T. Barnard, Phys, Rev., **A7**, 373 (1973).
69. В. И. Ризун, Ю. К. Энгельбрехт, ПММ, **39**, 551 (1975).
70. О. В. Руденко, Письма в ЖЭТФ, **20**, 445 (1974).
71. Н Г. Бондарь, Некоторые автономные задачи нелинейной механики, изд Наукова Думка, Киев, 1969, Нелинейные автономные задачи механики упругих систем, изд. Будiвельник, Киев, 1971.
72. K. Sawada, T. Kotera, Progr. Theor. Phys., **51**. 1355 (1974).
73. Ю. В. Чугаевский, Уравнения нелинейных и быстропеременных волновых процессов, изд. Штиница, Кишинев, 1974.
74. P. A. Silberg, J. Fr. Inst., **288**, 17 (1969).
75. А. М. Косевич, А. С Ковалев, ЖЭТФ, **67**, 1793 (1974)
76. Л Я. Терлецкий, Докл. АН СССР, **216**, 763 (1974), **226**, 292 (1976), Изв высш. уч. зав.— Физика, **6**, 128 (1975).
77. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ, **66**, 594 (1974).
78. P. Havas, J. Math. Phys., **16**, 146, 2476 (1975).
79. Т. Л. Перельман, А Х. Фридман, М. М Ельяшевич, Письма в ЖЭТФ, **19**, 342 (1974); ЖЭТФ, **66**, 1316 (1974), Phys. Lett, **A47**, 321 (1974).
80. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **14**, № 10, 1538 (1971).
81. А. М. Весницкий, А. И Потапов, Прикл. механика, **11**, 98 (1975).
82. M. L. Woolley, Plasma Phys., **15**, 89 (1973).
83. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ПММ, **38**, 121 (1974).

84. N. J. Zabusky, In „Nonlinear partial differential equations". Ac. Press., Inc. N. Y., 1967, p, 223.
85. K. Konno, M. Wadati, Progr. Theor. Phys., **53**, 1652 (1975).
86. K. Konno, H. Sanuki, J. Phys. Soc. Japan, **39**, 22 (1975).
87. А. А. Березовский, Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики, ч II, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1974.
88. А. В. Бицадзе, Докл. АН СССР, **222**, 765 (1975).
89. П. М Колесников, Введение в нелинейную электродинамику, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
90. A. C. Scott, Amer. J. Phys., **37**, 52 (1969).
91. T. Kotera, K. Sawada, J. Phys. Soc. Japan, **39**, 501 (1975).
92. M. Toda, Phys. Rep., **18**, 1 (1975).

Научно-исследовательский радиофизический институт