ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIX, № 5—6 РАДИОФИЗИКА 1976

УДК 621 371 222.4

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ РАВНОВЕСНОГО СПЕКТРА ВОЛНЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

В. А. Красильников, В. И. Павлов

В задаче об установлении равновесного спектра на поверхности океана следует иметь в виду два обстоятельства, учет которых является существенным. Во-первых, формирование спектра поверхностного волнения происходит в результате воздействия на поверхность турбулентного движения атмосферы в приповерхностном слое. Во-вторых, поверхностные волны обладают конечным «временем жизни», которое может определяться как диссипативными, так и нелинейными эффектами. В зависимости от того, в какой области частот проводится рассмотрение, тот или иной механизм диссипации является преобладающим. Учет конечности времени жизни поверхностных волн приводит к тому, что разрешенные в низшем порядке теории возмущений условия взаимодействия между гравитационными и капиллярными волнами, с образованием капиллярных волн, несколько изменяются. В процессе взаимодействия основную роль играют волны, частоты которых удовлетворяют условиям $|\omega_1 + \omega_2 - \omega_3|\,\tau \leqslant \pi$, где

$$\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2, \quad k \ll k_m \ll k_{1,2}, \quad k_m^2 = g/\sigma, \quad \omega_i^2 = g k_i + \alpha k_i^3. \tag{1}$$

В качестве τ, очевидно, следует взять минимальное время для каждой из вступающих во взаимодействие волн; предположим, что $\tau = (2\nu k_1^2)^{-1}$, ν — коэффициент вязкости, k_1 — принадлежит области капиллярных волн. При обычных условиях, когда $\nu = 10^{-2}$ при заданном значении волнового числа k, принадлежащего состоянию гравитационных волн, минимальное значение волнового числа вступающей во взаимодействие капиллярной волны определяется выражением $k_{\min} = f\,(k/k_m)^{1/4}\,k_m$, где $\chi^2 = \pi\nu\,(g/k_m^3)^{1/2}$. Здесь $k_m^2 = g/\alpha$, где g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения. Отсюда видно, что для не слишком длинных гравитационных волн $k_{\min}$ близко к $k_m\,\chi^2$, т. е. во взаимодействии участвует практически вся область капиллярных волн, обеспечивая сток энергии в высокочастотную область, с последующей ее диссипацией, в отличие от идеального случая, когда, очевидно, при $\tau \to \infty$ $k_{\min} = \dfrac{4}{9}\,\dfrac{k_m^2}{k}$.

С другой стороны, присутствие в приповерхностном слое регулярного потока u^R, параллельного поверхности, который сносит «замороженную» турбулентность $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^R + \boldsymbol{v}(x, z, t)$, приводит к тому, что энергия турбулентных пульсаций атмосферы резонансным образом передается гравитационным волнам и затем сбрасывается с учетом указанного нелинейного механизма в область капиллярных волн, где она необратимо поглощается. Предположим, что для турбулентных пульсаций скорости $\boldsymbol{u}$ выполняется неравенство $\langle u^2\rangle \ll (u^R)^2 \ll c^2$, где c — скорость звука. В этом случае в интересующем нас приближении выражение для энергии взаимодействия, обеспечивающее перекачку энергии из атмосферы в поверхностные волны, имеет вид

$$H^{(t)} = \frac{1}{2}\rho \int dx \int\limits_{\xi}^{\infty} dz\, u^R u. \tag{2}$$

Аналогично выражение для $H^{(n)}$, которое описывает переброс энергии по спектру поля поверхностных волн, записываем в виде

$$H^{(n)} = \frac{1}{2}\rho_1 \int dx \int\limits_{0}^{\xi} dz \left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Здесь ρ, ρ_1 — соответственно плотности воздуха и воды, движение предполагается потенциальным.

Стандартная процедура вывода кинетического уравнения [1, 2] с учетом условий (1)—(3) приводит к следующему уравнению для изменения числа элементарных возбуждений поля поверхностных волн в результате действия нелинейности и турбулентности:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\sum_{k_1} W^{(n)}(NN_1 - N_1N_+ - N_+N) + W^{(t)}. \tag{4}$$

Здесь состояние $k \ll k_m$, а вероятности переходов $W^{(n)}$ и $W^{(t)}$ определяются выражениями

$$W^{(n)} = \frac{\pi}{32}\left(\frac{\hbar\alpha}{\rho_1 g^{1/2}}\right) k^{1/2} k_1^5 D\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right); \tag{5}$$

$$W^{(t)} = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{\rho^2 (u^R)^2 E_0}{\rho_1 \hbar}\,(c_k k^{\gamma+1})^{-1} \sin\theta\,\delta\,(\omega - u^R k\cos\theta). \tag{6}$$

При выводе выражений (5) и (6) предполагалось, что вблизи поверхности турбулентные пульсации u (удовлетворяющие условиям несжимаемости) слабо изменяются по направлению оси z. Фактически это означает слабую зависимость по z спектральной плотности энергии турбулентных пульсаций, которая в некотором диапазоне имеет степенную зависимость $E(k) = E_0 k^{-\gamma}$.

Аналогично (4) уравнение может быть записано и для k_1-состояния спектра капиллярных волн. Для упрощения задачи предположим, что характерное время релаксации моды k_1 вследствие диссипации энергии значительно меньше характерного времени релаксации вследствие переброса энергии от гравитационных волн к капиллярным. Из физических соображений ясно, что указанное неравенство выполняется тем точнее, чем слабее возбуждение поверхности океана. Кроме того, пренебрежем разрешенным взаимодействием капиллярных волн между собой, имея в виду конечный результат, показывающий, что спектр поверхностных волн быстро спадает с ростом волнового числа.

В этом случае уравнение для N_1 $(k_1 > k_m)$ линеаризуется. Решение его при $t > \tau_1 = (2\nu k_1^2)^{-1}$ стремится к некоторому асимптотическому выражению, которое полностью определяется распределением турбулентных пульсаций в приповерхностном слое. Поскольку время установления τ спектра гравитационных волн значительно больше $\tau_1 \sim 4$ *с*, то в уравнении (4) можно подставлять $(N_1)_{\text{асимпт}}$. Решая уравнение (4), получаем для асимптотического значения спектральной плотности энергии установившегося волнения $\varepsilon_k = \hbar\omega N$ следующее выражение:

$$\varepsilon_k = \left[\frac{32}{\pi} \cdot \frac{2\gamma+1}{3}(2\pi)^3 \chi^{\frac{2\gamma+1}{2}}\right] \rho_1 \nu^2 (u^R)^2 \left(\frac{k}{k_m}\right)^{-\frac{6\gamma+11}{8}} \sin\theta\, \delta(\omega - u^R k\cos\theta). \tag{7}$$

Отсюда видно, как и следовало ожидать, что распределение плотности поверхностного волнения носит анизотропный характер. В рамках рассмотренного механизма волнообразование возможно только в том случае, если скорсть потока $u^R > c_m$, где c_m — минимальная скорость поверхностных волн. Для воды $c_m \sim 23$ *см/с*. Максимальный по отношению к u^R угол, под которым могут расходиться зародившиеся поверхностные волны, равен $\theta = \arccos \frac{c_m}{u^R}$. Если провести усреднение по углам и перейти к частотному распределению из условия $\int \frac{dk}{(2\pi)^3} \varepsilon_k = \rho_1 g \int d\omega\, S(\omega)$, то, очевидно, $S(\omega) = A g^2 \omega^{-n}$ при $\omega \gg g/u^R$, где $n = \frac{6\gamma+7}{4}$, $A = 128 \frac{2\gamma+1}{3} \chi^{\frac{2\gamma+1}{2}} \rho_1 \nu^2 (k_m g^5)^{-1} (k_m g)^{\frac{6\gamma+19}{8}}$. Если принять $\gamma = 5/3$, что соответствует случаю развитой изотропной турбулентности, то при $\rho_1 = 1$, $\nu = 10^{-2}$, $k_m = 3{,}6$ мы получаем, что $S(\omega) = 1{,}4 \cdot 10^{-2} g^2 \omega^{-4{,}25}$. Этот результат хотя и отличается от спектра Филлипса с $n = 5$, полученного из соображений размерности [3], тем не менее не противоречит данным, полученным в результате многочисленных измерений [3, 4]. Существенным обстоятельством является то, что из проведенного рассмотрения следует не только значение показателя степени n, но и значение постоянной A, которая из соображений размерности получена быть не может.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Собр. трудов, 2, изд. Наука, М., 1969.
2. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, в сб. Вопросы теории плазмы, 7, Атомиздат, М., 1973.
3. О. М. Филлипс, Динамика верхнего слоя океана ,изд. Мир, М., 1969.
4. Ю. А. Волков, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 9, 968 (1968).

Московский государственный университет