

УДК 621.371.222.4

## ВОЗМОЖНАЯ РОЛЬ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ВОЗНИКНОВЕНИИ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ

*B. M. Конторович*

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Внутренние волны и турбулентность
2. Статистическое описание ансамбля внутренних поверхностных волн
3. Адиабатическое взаимодействие длинных волн и турбулентности в системе внутренних волн
4. Раскачка объемной турбулентности внутренними волнами

### 1. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Удивительный факт был установлен в результате измерений последнего десятилетия: вопреки ожиданиям (турбулентность убывает с глубиной, происходит привычное дробление масштабов и т. п.) оказалось, что турбулентность буквально пронизывает толщу океана и распределена несмьма неравномерно. Очень крупных масштабов в ряде случаев вообще нет, зато есть подвижная, но довольно устойчивая стратификация, определяющая мелкомасштабную структуру океана, а области турбулентности сосредоточены вблизи слоев с максимальными градиентами [1—3]. Первичным, по-видимому, является возникновение градиента температуры (термоклина), в других случаях — солености и, как следствие, изменение плотности. Легко понять образование термоклина у поверхности (нагрев и перемешивание за счет волнения). Но в глубинах возникновение стратификации более загадочно. Спектры турбулентности также не вполне обычны [2, 3].



Рис. 1.

Однако если принять существование слоев со скачками плотности (рис. 1), то тогда уже кажется возможным объяснить, хотя бы в принципе, возникновение турбулентности и некоторые особенности ее спектров.

Заменим резко выраженный термоклин толщины  $d$  скачком. Внутренние волны вырождаются в «поверхностную» ветвь волн на границе раздела при  $\lambda \gg d$ , где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны, соответствующая частоте [4] (см. также ниже)

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\delta\rho}{\rho} g k}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho} \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} > 0. \quad (1)$$

Волна представляет собой колебание поверхности раздела  $z = \zeta(r, t)$ ; ее частоты в  $\sqrt{\rho/\delta\rho}$  раз меньше соответствующих тем же длином волн частот колебаний свободной поверхности жидкости. Скорость жидкости

убывает по экспоненциальному закону по обе стороны от границы раздела, тангенциальная компонента  $u$  претерпевает скачок, причем

$$u_1 = -u_2 \quad (z = \zeta). \quad (2)$$

Длинные внутренние волны могут возбуждаться приливными движениями [5] и т. п. Если их амплитуда  $u_0$  становится больше фазовой скорости ряби (коротковолновых внутренних поверхностных волн),

$$u_0 > \frac{\rho_2}{\rho_1} v_{\text{фаз}}(d^{-1}) \sim \sqrt{\frac{\delta\rho}{\rho} gd}, \quad (3)$$

возникает неустойчивость. Это известная неустойчивость Кельвина — Гельмгольца (тангенциальный разрыв в поле тяжести) [6]. Ввиду близости  $\rho_1$  к  $\rho_2$  она гораздо существенней, чем для волн на свободной поверхности. По этой же причине гораздо более существенным оказывается и взаимодействие между волнами, осуществляющееся путем рассеяния, вероятность которого не содержит малости по  $\delta\rho/\rho$ , в то время как частота волн (1) ее содержит (см. [7] и ниже). Таким образом развивается турбулентность в подсистеме внутренних волн. Если турбулентность слабая, могут установиться стационарные спектры, вполне подобные спектрам Захарова и Филоненко для волн на поверхности [8]. При постоянном потоке энергии  $P$  число волн  $N_k$  и спектральная плотность энергии  $E(k) \sim \omega_k N_k k$  соответственно пропорциональны

$$N_k \sim P^{1/3} k^{-4}, \quad E(k) \sim P^{1/3} k^{-5/2}, \quad (4)$$

а при постоянном потоке числа волн  $Q$

$$N_k \sim Q^{1/3} \omega_k^{1/3} k^{-4} \sim Q^{1/3} k^{-23/6}, \quad E(k) \sim Q^{1/3} k^{-7/3}. \quad (4a)$$

Уже это обстоятельство объясняет некоторые особенности наблюдаемых спектров океанической турбулентности, в частности, их отличие от закона Обухова — Колмогорова  $E(k) \sim P^{2/3} k^{-5/3}$ . Слаботурбулентные спектры при больших амплитудах (обрушение волн) сменяются универсальным спектром типа спектра Филлипса [5]. Такое объяснение для спектров мелкомасштабной океанической турбулентности обсуждалось в [7, 9].

Но развитие ряби «поверхностных» внутренних волн должно приводить и к возникновению объемной турбулентности, которая возбуждается механизмом, обратным возбуждению ветровых волн. Этот механизм (Майлса — Филлипса [5, 10]) состоит в резонансе между вихрями в движущейся жидкости и поверхностными волнами, возникающим при равенстве их скоростей. Неустойчивость соответствует превышению скоростью потока минимальной скорости волн ( $u > V_{\min}$ ), которая реализуется для волн на поверхности при значительно меньших скоростях, чем те, для которых наступает неустойчивость Кельвина — Гельмгольца ( $u > \sqrt{\rho/\rho_{\text{возд}}} V_{\min}$ ) (см., например, [11]). Для внутренних же волн обе неустойчивости должны возникнуть практически одновременно.

Таким образом, развитие неустойчивости слоя скачка (термоклина) может привести к возбуждению объемной турбулентности при малых числах Рейнольдса и установлению распределений, отличающихся от колмогоровского.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АНСАМБЛЯ ВНУТРЕННИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

При замене области быстрого градиента плотности скачком внутренние волны с длиной волны, превышающей толщину переходной области, вырождаются в хорошо изученные поверхностные волны на границе

раздела. Исходными для их описания [6] являются уравнения для потенциала скорости

$$\Delta\varphi_{1,2} = 0 \quad (\varphi_1 \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty, \varphi_2 \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty) \quad (5)$$

и уравнения Бернулли в каждом из полупространств, откуда из равенства давлений на границе раздела следует:

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_2)^2 \right) \quad (z = \zeta), \quad (6)$$

причем из определения скорости  $\frac{d\zeta}{dt} = v_z$  возвышение  $\zeta$  связано с потенциалом условиями

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - (\nabla \zeta \nabla \varphi_1) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - (\nabla \zeta \nabla \varphi_2) \quad (z = \zeta). \quad (7)$$

Для волны малой амплитуды  $\varphi_{1,2} \sim \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \mp kz]$  из (5)—(7) следует связь (1) между  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , а также разрывность тангенциальных скоростей (2). При учете нелинейных взаимодействий, имея в виду дальнейшее статистическое описание, удобно перейти к гамильтоновым переменным, которыми оказываются возвышение  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  и линейная комбинация потенциалов на границе раздела [7]:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (\rho_2 \psi_2 - \rho_1 \psi_1) (\rho_1 + \rho_2)^{-1}, \quad \psi_{1,2}(\mathbf{r}, t) = \varphi_{1,2}(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t). \quad (8)$$

При этом уравнения (5)—(7) сводятся к

$$\dot{\zeta} = \frac{\delta \varepsilon}{\delta \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\delta \varepsilon}{\delta \zeta}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon = (\rho_1 + \rho_2) \mathcal{E}$  — полная энергия жидкости,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\zeta} \rho_2 \left[ (\nabla \varphi_2)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int_{\zeta}^{\infty} \rho_1 \left[ (\nabla \varphi_1)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \int d\mathbf{r} (\rho_2 - \rho_1) g \frac{\zeta^2}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

При  $\rho_1 = 0$  уравнения (8)—(10) описывают волны на свободной поверхности тяжелой жидкости и в таком виде были получены в [7, 12], для жидкости конечной глубины см. [13, 14].

Переходя к фурье-представлению по поперечным координатам и вводя комплексные амплитуды нормальных колебаний  $a_k (\sim \exp(-i\omega t))$  в линейном приближении (см., например, [11, 13]), придем к функции Гамильтона

$$\begin{aligned} \varepsilon \equiv H(a) = & \int dk \omega_k a_k^* a_k + \frac{1}{3} \int d1 d2 d3 V_{123} a_1 a_2 a_3 \delta_k^{(3)} + \\ & + \frac{1}{4} \int d1 d2 d3 d4 V_{1234} a_1 a_2 a_3 a_4 \delta_k^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$a_1 \equiv a_{\vec{k}_1}^{\sigma_1} = \begin{cases} a_{\vec{k}_1}^- \equiv a_{\vec{k}_1}, & V_{123} \equiv V_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, \\ a_{\vec{k}_1}^+ \equiv a_{\vec{k}_1}^*, & V_{1234} \equiv V_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}, \end{cases}, \quad \int d\mathbf{l} \equiv \sum_{\sigma_1} \int d\mathbf{k}_1, \quad (12)$$

$\delta$ -функции выражают закон сохранения импульса. В общем, здесь все очень напоминает задачу о волнах на свободной поверхности жидкости [8] с тем отличием, что в уравнениях, в частности в  $\omega_{\vec{k}}$ , возникает малый параметр:  $\delta\rho/\rho \ll 1$ . Как показывают вычисления [7], этот малый параметр появляется множителем в  $V_{123}$  и не возникает в  $V_{1234}$ :

$$V_{123} \sim \frac{\delta\rho}{\rho} \omega_{\vec{k}}^{1/2} \vec{k}^{3/2} \sim \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right)^{5/4}, \quad V_{1234} \sim \vec{k}^3. \quad (13)$$

Последнее означает значительно большую роль четырехволнового рассеяния для внутренних, чем для поверхностных волн (рис. 2). В то же время роль тройных процессов для внутренних волн уменьшается. В частности, область существования стационарных распределений (4), устанавливающихся за счет рассеяния, должна быть значительно шире, чем для волн на поверхности жидкости. Нелинейные взаимодействия, приводя к хаотизации фаз, формируют распределение волн

$$\langle a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}'} \rangle \equiv N_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}') = (2\pi)^2 \left( \frac{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}{\vec{k} \cdot \vec{k}'} \right)^{1/2} \langle \zeta_{\vec{k}}(t) \zeta_{\vec{k}'}(t) \rangle, \quad (14)$$

описываемое кинетическим уравнением

$$\dot{N}_{\vec{k}} = I_{\text{cr}} \{ N \} \equiv \int d\tau_{\vec{k}} w_{\vec{k}} f_{\vec{k}}, \quad (15)$$

$$f_{\vec{k}} = N_1 N_2 N_3 + N N_2 N_3 - N N_1 N_2 - N N_1 N_3,$$

$$w_{\vec{k}} = 2\pi |V_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}|^2 \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3),$$

$$d\tau_{\vec{k}} = d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3.$$

Средняя энергия ансамбля волн  $\langle \epsilon \rangle = \int d\vec{k} \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$ . Скобки здесь и выше означают статистическое усреднение (среднее по фазам). Тербулизация термоклина может приводить к установлению стационарных спектров (4), которые являются решениями (15) и описывают каскадную передачу энергии. Эти спектры могут непосредственно проявлять себя в эксперименте.

### 3. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН И ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СИСТЕМЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Существование длинных внутренних волн, возбуждаемых, например, приливными движениями и содержащих значительную энергию [5], может приводить и к непосредственной передаче энергии от длинных волн к коротким, минуя эстафету промежуточных масштабов [7]. Эта связь движений разных масштабов, в частности, возникает благодаря модуляции частоты коротких волн длинноволновыми движениями. Благодаря этому появляются силы, действующие на коротковолновую подсистему, и обратные силы, действующие на длинную волну и вызывающие ее затухание. Такая связанная система уравнений, где коротковолновая

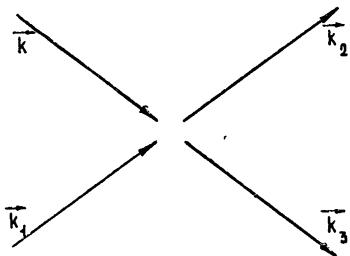


Рис. 2

система описывается статистической функцией распределения, а длинноволновая — динамически, обсуждалась для звуковых и электронных движений в металлах [15], для плазмы [16], для волн на поверхности жидкости [17], для когерентных и тепловых звуковых волн в диэлектриках [18].

В случае внутренних волн модуляция частоты  $\delta\omega_k(r, t)$  связана с эффектом Доплера, приобретающим вследствие разрывности тангенциального движения во внутренней волне несколько необычный вид [7]:

$$\delta\omega_k(r, t) = ku(r, t), \quad u = \frac{\rho_2 u_2 + \rho_1 u_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad u_2 = -u_1. \quad (16)$$

Эта модуляция приводит к отклонению  $\delta N_k(r, t)$  от стационарного распределения, описываемого в линейном приближении кинетическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta N_k + v \frac{\partial}{\partial r} \delta N_k - \frac{\partial N_k}{\partial k} \frac{\partial \delta\omega_k}{\partial r} = I_{ct}\{\delta N\}, \quad (17)$$

в котором правая часть представляет собой линеаризованный по отклонениям  $\delta N$  интеграл столкновений (15).

В динамических уравнениях для возвышения  $\zeta$  и потенциала  $\psi$  длинной волны появляется дополнительное слагаемое, связанное с обратным воздействием на нее возмущенной коротковолновой подсистемы [7], например

$$\ddot{\psi}_q + \frac{\delta\rho}{\rho} g q \psi_q = -i \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right)^2 g \int dk (qk) \langle a_{k-q}^* a_k \rangle, \quad (18)$$

где  $\psi_q$  — фурье-преобразование от гамильтоновой координаты (8). При адиабатическом взаимодействии существенны тройные процессы. Они, в действительности, сводятся не только к модуляции распределения, т. е. появлению средних  $\langle a_k^* a_{k\pm q} \rangle$  из-за когерентного длинноволнового поля  $\langle a_q \rangle \equiv A_q \neq 0$ , но и к возникновению «аномальных» корреляторов  $\langle a_k a_{-k\pm q} \rangle$ . Таким образом, связанная система уравнений получается усреднением по ансамблю исходных динамических уравнений

$$\dot{a}_k^\sigma = i\zeta \delta H / \delta a_k^{\sigma'},$$

а также следующих из них уравнений для моментов  $\langle a_k^\sigma a_{k'}^{\sigma'} \rangle$  и т. п. и расцеплением цепочек уравнений при наличии когерентного поля  $A$ , [17]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - i\zeta\omega_q \right) A_{\sigma q}^\sigma &= i\zeta \sum_{\sigma' \sigma''} \int V_{qk q-k}^{-\sigma' \sigma''} \langle a_{\sigma' k}^* a_{\sigma''(q-k)}^{\sigma''} \rangle dk, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial t} - i(\sigma' \omega_k + \sigma'' \omega_{q-k}) \right] \langle a_{\sigma' k}^* a_{\sigma''(q-k)}^{\sigma''} \rangle &+ \\ + 2i(\sigma' N_k + \sigma' N_{q-k}) \sum_{\sigma_1} V_{k q-k q}^{-\sigma' - \sigma'' \sigma_1} A_{\sigma_1 q}^{\sigma_1} &= I^{\sigma' \sigma''}. \end{aligned} \quad (19)$$

«Интегралы столкновений»  $I^{\sigma' \sigma''}$  в уравнениях для аномальных средних всегда малы по сравнению со слагаемым, содержащим сумму частот  $\omega_k + \omega_{-k+q}$  (в силу условия малости нелинейного затухания  $\omega_{kq}^{NL} \gg 1$ ). В кинетическом уравнении, где входит разность частот, вклад аномальных слагаемых в интеграл столкновений не меняет порядковых оценок,

ввиду чего достаточно рассматривать обычное уравнение (17). Для оценок введем частоту столкновений

$$I_{ct} \{ \delta N \} = - \nu \delta N_k, \quad \nu \sim \frac{|V|^2 N_k^2}{\omega_k} k^4. \quad (20)$$

Условие разрешимости (дисперсионное уравнение) системы (19) приводит к связи  $\omega$  и  $q$ :

$$\omega = \omega_q + \alpha \int d\mathbf{k} V_{qkqk} N_k - \\ - \beta \omega_q \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2 \left( \frac{g}{q} \right)^{1/2} \int d\mathbf{k} \frac{(kq)^2}{\omega_q - qv_k + i\nu_k} \frac{\partial N_k}{\partial \omega_k}, \quad (21)$$

где  $\omega_q$  приведено в (1),  $\alpha, \beta \sim 1$ . Второе слагаемое описывает перенормировку частоты внутренней волны при наличии ряби из-за четверных взаимодействий. Как указывалось выше, они, вообще говоря, не малы. Минимальная часть интеграла представляет собой декремент затухания внутренней волны из-за перехода энергии к ряби. Соответственно, подынтегральная функция пропорциональна коэффициенту усиления ряби, благодаря передаче энергии от длинной волны. Поскольку за рассматриваемый эффект ответственны тройные взаимодействия, он существенно ослаблен в сравнении с поверхностью волнами [7].

#### 4. РАСКАЧКА ОБЪЕМНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ

Итак, возбуждение длинной внутренней волны (либо другая причина, приводящая к течению) превращает резко выраженный термоклип в поверхность тангенциального разрыва, следствием чего является неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, если только амплитуда скорости волны превышает фазовую скорость коротких внутренних волн. Возникающая турбулентность внутренних волн приведет к раскачке объемной турбулентности за счет резонанса между вихрями, увлекаемыми длинной волной, и волнением на поверхности скачка. Отметим вихревой характер движения во внутренней волне благодаря разрыву касательных компонент скорости на поверхности раздела. Слой совпадения  $z=z_m$  (рис. 3), где выполняется условие  $u(z_m)=v_\phi$ , при этом зарождается вблизи от поверхности раздела и удаляется от нее на расстояние, не превышающее длину волны энергонесущего колебания, но практически он существует лишь на масштабах порядка длины волн ряби. Распределение скоростей при оценках будем брать экспоненциальное:  $u(z) = U_0 e^{-qz} \times \cos \omega t \cos \alpha$ , впрочем, среднее поле отличается от экспоненты. Зависимость от времени и угла ниже включаем в  $U_0$ . Из уравнения для потенциала скорости возмущения (ряби) в квазистационарном потоке

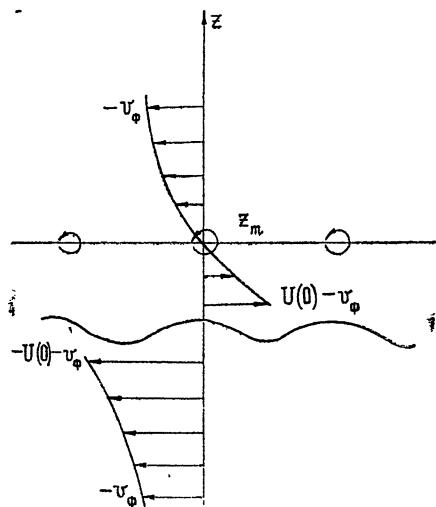


Рис. 3.

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} - k^2\varphi - \frac{1}{u(z) - \omega/k} \frac{d^2u}{dz^2} \varphi = 0 \quad (22)$$

и граничных условий на поверхности раздела  $z = \zeta$  следует, что инкремент неустойчивости, связанной с возбуждением вихрей  $\omega_k \mu$ , пропорционален  $u''(z_m)$  (вклад полувычета от последнего слагаемого в (22)) и выражается через напряжения Рейнольдса  $\tau(0)$ , индуцированные рябью на поверхности, формулой Майлса [5, 10]:

$$\mu = \frac{2\pi(0)}{\rho v_\Phi^2 k^2 \zeta_0^2}, \quad \tau(0) = -\frac{\pi\rho}{k} \left. \frac{\bar{v}_z^2 u''(z)}{u'(z)} \right|_{z=z_m}. \quad (23)$$

Для вычисления среднего квадрата вертикальной компоненты скорости возмущения, в отличие от случая ветровых волн, где выполнялось условие  $ku' \ll u''$ , удобно использовать оценки  $\bar{v}_z^2$ , основанные на обратном неравенстве (для экспоненциального профиля  $ku'/u'' \sim k/q \gg 1$ ). Отсюда, используя решение  $\varphi = \varphi^0 e^{-kz}$ , где  $\varphi^0 = -i\zeta(u(0) - v_\Phi)$  (см. (7)), получаем

$$v_z|_{z_m} = ik\zeta(u(0) - v_\Phi)e^{-kz_m}, \quad e^{-kz_m} = (v_\Phi/u(0))^{k/q}. \quad (24)$$

Отсюда

$$\mu = \frac{2\pi q}{k} \left( \frac{u(0) - v_\Phi}{v_\Phi} \right)^2 e^{-2kz_m}. \quad (25)$$

Конвективный характер неустойчивости приводит к длине разгона  $L$ , соответствующей условию  $\text{Im } kL \sim kL \mu \sim 10$ . Коэффициент усиления как функция  $\xi = u(0)/v_\Phi > 1$ :

$$\frac{k\mu}{2\pi q} = \Phi(\xi) = (\xi - 1)^2 \xi^{-2k/q} \quad (26)$$

максимален при  $\xi = 1 + q/k$ , а затем быстро убывает с ростом  $\xi$  из-за подъема слоя совпадения. Максимум  $\mu$  соответствует слою совпадения на высоте длины волны  $z = \lambda/2\pi$ :

$$z_m(\xi_{\max}) = q^{-1} \ln \xi_{\max} = k^{-1}. \quad (27)$$

Минимальная длина разгона при этом

$$L_{\min} \sim \frac{10e^2}{2\pi} \lambda_q \left( \frac{k}{q} \right)^2. \quad (28)$$

Вообще говоря, в оценках не учтен ряд важных осложнений: усиление происходит лишь на доле периода, вихри возбуждаются на соседних полупериодах по разные стороны от границы раздела и т. п. Механизм раскачки вихрей поверхностью турбулентностью, обратный механизму Филлипса [5], по-видимому, приведет к существенному вкладу в инкремент при больших  $\xi$ . Однако непосредственно распространить результаты Филлипса на интересующий нас случай затруднительно ввиду необходимости использовать экспериментальные данные. Заметим также, что ограничивающая роль вязкости здесь также отличается от случая волн на поверхности жидкости из-за существенного вклада вихревого слоя скачка в затухание волн [19].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, УФН, 109, 333 (1973)
2. В. С. Беляев, А. С. Монин, Р. В. Озмидов, В. Т. Пака, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 10, 959 (1974).

- 3 А Г Колесников, Н А Пантелеев, Труды I Симпозиума «Исследование мелкомасштабной океанической турбулентности», г. Калининград, 1974.
- 4 Г. Лэмб, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947
- 5 О М Филиппс, Динамика верхнего слоя океана, изд Мир, М., 1969
- 6 Л. Д. Ландау, Е М Лифшиц, Механика сплошных сред, изд Наука, М., 1953
7. Ю. А. Синицын, В М. Конторович, Труды I Симпозиума «Исследование мелкомасштабной океанической турбулентности», г Калининград, 1974
- 8 В. Е. Захаров, Н Н Филоненко, Докл АН СССР, 170, № 6, 1292 (1966).
- 9 В. З. Дыкман, О. И Ефремов, Н. А. Пантелеев, Труды I Симпозиума «Исследование мелкомасштабной океанической турбулентности», г. Калининград, 1974
10. J. W. Miles, J. Fluid Mech., 3, 185 (1957).
- 11 Б Б Кадомцев, В М Конторович, Изв. высш уч. зав — Радиофизика, 17, № 4, 511 (1974).
- 12 В. Е. Захаров, ПМТФ, № 2, 86 (1968).
13. А. В. Кац, В М. Конторович, ПМТФ, № 6, 97 (1974).
- 14 В. Е. Захаров, Изв. высш уч. зав — Радиофизика, 17, № 4, 431 (1974)
15. В. М Конторович, ЖЭТФ, 45, 1638 (1963), 61, 1181 (1971)
- 16 А. А. Веденов, Л И Рудаков, Докл АН СССР, 159, 767 (1964).
17. В. М Конторович, Ю. А. Синицын, В М Цукерник, ПМТФ, № 1, 100 (1973).
18. Ю. А. Синицын, В. М. Конторович, В. М Цукерник, ФТТ, 15, 3573. (1973).
19. Haggison, Proc. Lond. Math. Soc. (2) VI, 396 (1908).

Институт радиофизики и электронники  
АН УССР