

УДК 532.782

ТРЕХМОДОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

A. M. Обухов

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение
2. Аппроксимация уравнений гидродинамики по методу Галеркина. Понятие систем гидродинамического типа
3. Применение модели триплета к описанию простейших гидродинамических систем.
4. Явление неустойчивости при «эллиптическом вращении» жидкости

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическим примером существенно нелинейной теории поля является, бесспорно, гидродинамика. Об этом уже говорил в своем вступительном слове на 2-й школе председатель Оргкомитета академик Гапонов-Грехов [1]. Точное решение одномерной задачи газовой динамики — знаменитая «простая волна», открытая еще Риманом более ста лет назад, — и поныне является пробным камнем (эталонной задачей) при разработке многих вопросов нелинейной теории волновых процессов. Успешно развивается нелинейная акустика, в полной мере использующая арсенал современных методов, в частности, хорошо развитую теорию трехмодовых взаимодействий.

В задачах гидродинамики несжимаемой среды эволюция системы также определяется трехмодовыми взаимодействиями, поскольку уравнения движения — квадратично-нелинейны. При этом, однако, возникает ряд специфических трудностей, связанных с выделением «вихревых мод» в конкретных задачах, а также благодаря весьма сложному характеру «сцепления» мод в реальных системах, имеющих большое число степеней свободы, например, в турбулизированной жидкости.

Тем не менее, понятие трехмодовых взаимодействий может оказаться полезным и в динамике несжимаемой жидкости, что будет показано на примере простейших гидродинамических систем, допускающих реализацию в лабораторных условиях.

2. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПО МЕТОДУ ГАЛЕРКИНА. ПОНЯТИЕ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости внутри замкнутого сосуда V , ограниченного твердой поверхностью S . Состояние системы в любой момент времени t определяется полем скоростей — бездивергентным векторным полем $\mathbf{v}(x, t)$ ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), удовлетворяющим граничному условию $v_n = 0$ на S . Если на первых порах отвлечься от действия вязкости, то эволюция системы описывается классическими уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p; \quad (1)$$

плотность принята за единицу, p — скалярное поле давления. Давление в несжимаемой жидкости играет пассивную роль — это потенциал сил реакций, обеспечивающих выполнение в любой момент времени «неголономных связей»*, выраженных условием $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Поскольку силы реакции над системой в целом работы не совершают, интеграл энергии в данном случае сводится к сохранению кинетической энергии системы T ,

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V v^2 dV, \quad dV = dx dy dz, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = 0,$$

что легко проверить непосредственно вычислением.

Для аппроксимации уравнений гидродинамики системой обыкновенных уравнений, что важно, например, для решения ряда практических задач (прогноз погоды с помощью ЭВМ и др.), обычно применяется метод Галеркина. Для этого выбирается некоторая последовательность бездивергентных «опорных» полей $\mathbf{W}_1(x)$, $\mathbf{W}_2(x)$, ..., удовлетворяющих соответствующим граничным условиям $(\mathbf{W}_l)_n = 0$ на S , а поле скоростей аппроксимируется линейными комбинациями опорных полей со скалярными коэффициентами u^i , выбранными так, чтобы энергия «остатка» была наименьшей:

$$\mathbf{v}(x, t) \approx \hat{\mathbf{v}}_N(x, t) = \sum_{i=1}^N u^{(i)}(t) \mathbf{W}_i(x), \quad (3)$$

$$T'_N = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}_N)^2 dV = \text{minima (по } u^i).$$

Предполагается также, что система опорных полей образует ортогональный базис в функциональном пространстве соответствующих векторных полей, т. е. для любых индексов $i \neq j$:

$$\int_V (\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j) dV = 0. \quad (4)$$

Можно показать, что «остаточная энергия» T'_N , определяющая точность аппроксимации, остается постоянной во времени, а коэффициенты $u^i(t)$, образующие N -мерный «вектор состояния» усеченной системы (модели), удовлетворяют системе обыкновенных уравнений, которая является, естественно, квадратично-нелинейной и допускает квадратичный интеграл энергии. Запишем соответствующие уравнения движения в общем виде, пользуясь тензорными обозначениями и соглашением о суммировании по одинаковым индексам:

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2} \Gamma_{i,jk} u^j u^k, \quad (5)$$

где

$$u_i = g_{ik} u^k, \quad g_{ik} = \int_V (\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_k) dV = g_{(i)} \delta_{ik}.$$

* Неголономными связями в теоретической механике называются связи, накладываемые на обобщенные скорости, которые принципиально не могут быть «произ интегрированы», т. е. сведены к связи между координатами.

При соответствующей нормировке опорных функций $g_{(i)} = 1$, $g_{ik} = -\delta_{ik}$, что соответствует выбору некоторой декартовой системы координат в фазовом пространстве системы*. В такой системе координат коэффициенты взаимодействия $\Gamma_{i,jk}$ имеют размерность обратной длины (волнового числа), при этом различие между верхними и нижними индексами пропадает.

Иногда удобно пользоваться другой нормировкой, при которой Γ_{ijk}^l выражаются просто числами, а координаты состояния имеют размерность частоты. В этом случае весовой тензор g_{ik} имеет размерность квадрата длины (тензор инерции для системы с единичной массой), а квадратный корень из его главных значений $L_i = \sqrt{g_{(i)}}$ можно интерпретировать как «динамический масштаб», соответствующий степени свободы (моды).

Уравнение движения (5) конечно-мерной модели является аппроксимацией исходных уравнений гидродинамики по методу Галеркина. Их можно получить, «проектируя» уравнение движения несжимаемой жидкости (1) на «координатные оси», определяемые опорными функциями W_i , при этом легко убедиться, что

$$\Gamma_{i,jk} = - \int_V [(\mathbf{W}_j \nabla) \mathbf{W}_k + (\mathbf{W}_k \nabla) \mathbf{W}_j] \mathbf{W}_i dV. \quad (6)$$

Квадратично-нелинейные системы вида (5), получающиеся при указанной выше аппроксимации, обладают некоторыми общими характеристиками, отражающими основные физические свойства гидродинамических систем.

1) Наличие квадратичного интеграла (энергии)

$$E = \frac{1}{2} g_{ik} u^i u^k$$

приводит к фундаментальному циклическому соотношению

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ij} = 0. \quad (7)$$

Так выражается закон сохранения энергии в любой квадратично-нелинейной системе.

2) Можно показать также (это было сделано впервые Ли [2]), что при надлежащей аппроксимации уравнений гидродинамики фазовый объем в усеченной системе (конечно-мерной модели) при движении сохраняется и, тем самым, применима теорема Лиувилля. Это означает, что

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial u^i} \equiv 0$$

и, следовательно, обращается в нуль ковариантный вектор:

$$\gamma_k = \Gamma_{kk}^\lambda. \quad (8)$$

Системы, обладающие указанным выше свойством «лиувилльности», будем называть регулярными.

Условие регулярности тесно связано с важным статистическим свойством системы, а именно с инвариантностью (сохранением во времени) канонического распределения

* Энергию замкнутой системы удобно относить к единице массы, что дает величину, имеющую размерность квадрата скорости. Соответственно этому компоненты вектора состояния в энергетическом представлении всегда имеют размерность скорости.

$$f(u) = Ce^{-\theta E},$$

где $\beta = 1/\theta$, θ — аналог температуры.

Если система регулярна, то это распределение, описывающее «белый шум», сохраняется во времени. Верно и обратное утверждение. Пусть в начальный момент $\langle u^i \rangle = 0$, $\langle u^i u^k \rangle = \theta \delta^{ik}$ (g^{ik} — обратный тензор по отношению к g_{ik}). На основании уравнения движения (5) и циклического соотношения (7) получаем

$$\langle \dot{u}_i \rangle_{t=0} = \frac{\theta}{2} \Gamma_{i,jk} g^{jk} = -\frac{\theta}{2} (\Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ij}) = -\theta \gamma_i. \quad (9)$$

Если потребовать, чтобы для любого θ левая часть обращалась в нуль, то $\gamma_i = 0$, т. е. система регулярна. Таким образом, регулярные системы (и только они) обладают тем важным свойством, что они не способны «детектировать» белый шум. Это, в какой-то мере, соответствует второму принципу термодинамики в его статистической интерпретации.

Регулярные квадратично-нелинейные системы, обладающие квадратичным интегралом, были названы автором [3] системами гидродинамического типа (СГТ). Любая «хорошая» аппроксимация уравнений гидродинамики приводит к СГТ. О таких системах уже говорилось в прошлой школе в докладе Кляцкина [1]; более подробная информация содержится в монографии [4].

3. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ТРИПЛЕТА К ОПИСАНИЮ ПРОСТЕЙШИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Три взаимодействующие степени свободы $i < j < k$, для которых хотя бы один коэффициент взаимодействия (фактически их будет не менее двух) отличен от нуля, образуют триплет. всякая СГТ может рассматриваться как «суперпозиция» триплетов. Различные триплеты могут находиться в состоянии «зацепления», если имеются общие моды. Существует два вида зацепления — простое, когда имеется одна общая мода, и двойное — отвечающее наличию двух общих мод.

Уравнение движения любого триплета в произвольной ортогональной системе координат (энергетическом представлении) содержит пять независимых параметров:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= pu_2 u_3 + l(u_2^2 - u_3^2) + (mu_2 - nu_3) u_1, \\ \frac{du_2}{dt} &= qu_3 u_1 + m(u_3^2 - u_1^2) + (nu_3 - lu_1) u_2, \\ \frac{du_3}{dt} &= ru_1 u_2 + n(u_1^2 - u_2^2) + (lu_1 - mu_2) u_3, \\ p + q + r &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко проверить, что $\frac{d}{dt} \left(\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2} \right) \equiv 0$

$$\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial u_2} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial u_3} \equiv 0.$$

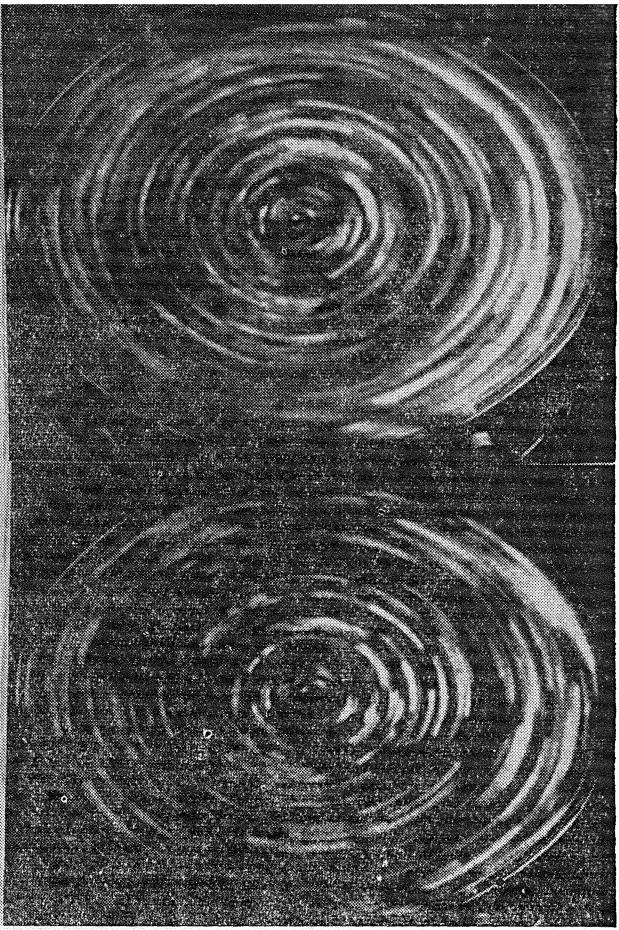
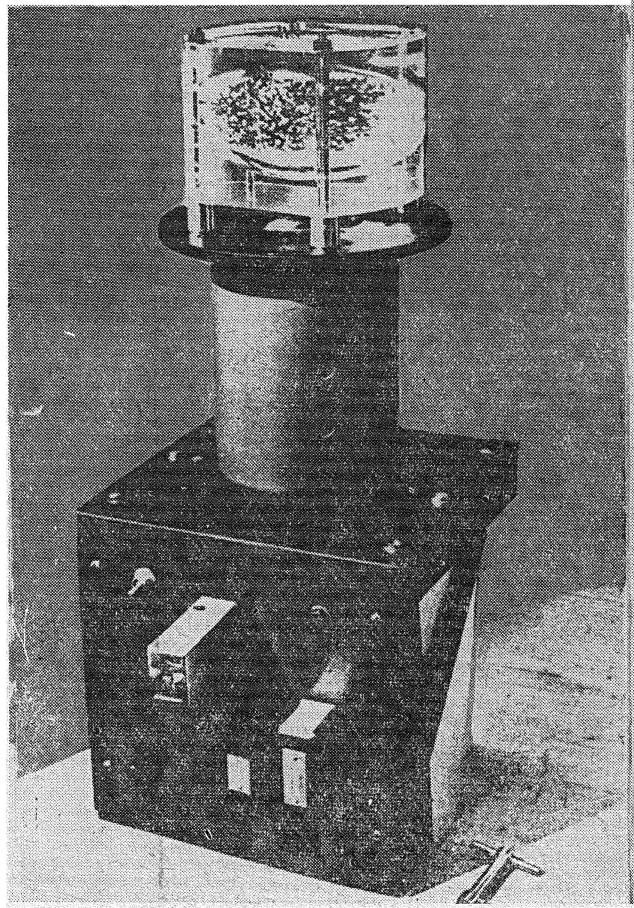


Рис. 1. Общий вид установки. Устойчивое „эллиптическое вращение“ вокруг короткой оси.

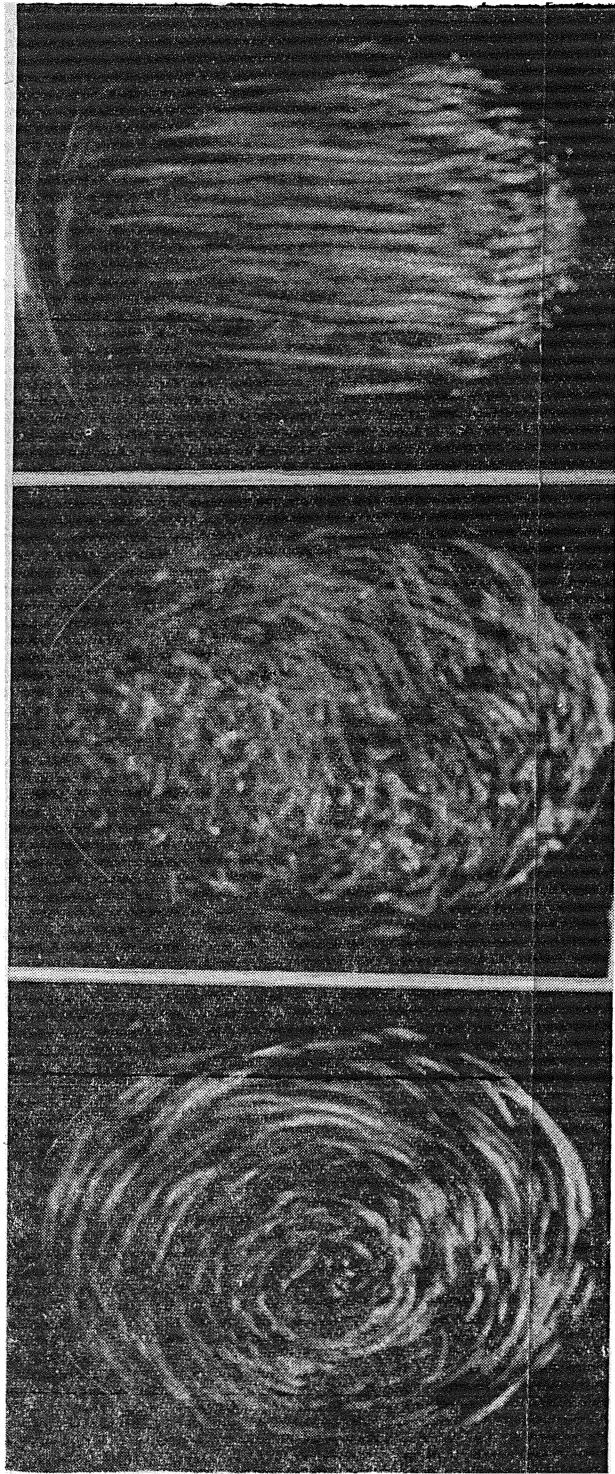


Рис. 2. Процесс опрокидывания жидкости при разгоне вокруг средней оси эллипсоида.

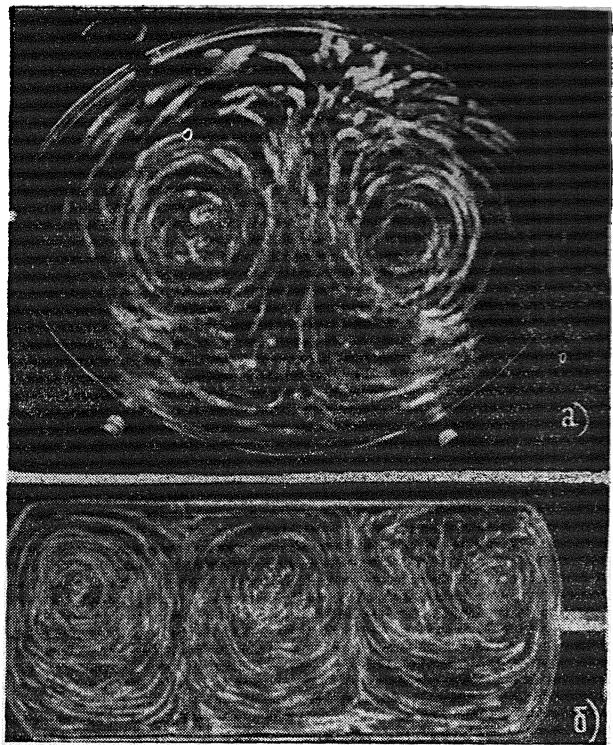


Рис. 3. Многовихревая неустойчивость в сосудах удлиненной формы:
а) двухвихревая мода в эллипсоиде, б) трехвихревая мода в эллиптическом цилиндре.

Специальным выбором координатных осей система приводится к канонической форме, в которой $I = m = n = 0$. В таком представлении координатные оси определяются стационарными состояниями системы, а уравнения движения совпадают с уравнениями Эйлера для классического гироскопа*. В последнем случае

$$u_1 = \sqrt{I_1} \omega_1, \quad u_2 = \sqrt{I_2} \omega_2, \quad u_3 = \sqrt{I_3} \omega_3,$$

$$p = \frac{I_3 - I_2}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}, \quad q = \frac{I_1 - I_3}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}}, \quad r = \frac{I_2 - I_1}{\sqrt{I_1 I_2 I_3}},$$

где I_k — главные значения момента инерции, ω_k — проекции вектора угловой скорости тела на оси инерции.

Простейшей гидродинамической интерпретацией триплета является движение жидкости внутри трехосного эллипсоида $S = 1$, где

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}. \quad (11)$$

При линейной зависимости вектора скорости от координат (для идеальной жидкости это свойство сохраняется во времени) задача допускает точное решение (впервые это было сделано Гринхиллом в 1879 г., современное изложение вопроса имеется в монографии [6]) и сводится к интегрированию уравнений гироскопа. В качестве «координатных осей» удобно выбрать бездивергентные поля:

$$\mathbf{W}_1 = -\frac{b}{c} z \mathbf{j} + \frac{c}{b} y \mathbf{k},$$

$$\mathbf{W}_2 = -\frac{c}{a} x \mathbf{k} + \frac{a}{c} z \mathbf{i}, \quad (12)$$

$$\mathbf{W}_3 = -\frac{a}{b} y \mathbf{i} + \frac{b}{a} x \mathbf{j}.$$

Эти поля удовлетворяют граничному условию, так как $(\mathbf{W}_i \nabla) S \equiv 0$, и ортогональны в фазовом пространстве системы. Каждое из них отвечает одному из возможных стационарных решений — «эллиптическому вращению» жидкости вокруг главных осей. Поля скоростей, представимые в форме $\mathbf{v}(x, t) = \omega_1(t) \mathbf{W}_1 + \omega_2(t) \mathbf{W}_2 + \omega_3(t) \mathbf{W}_3$, являются решением гидродинамической задачи, если фазовые координаты ω_i (их называют параметрами Пуанкаре) удовлетворяют динамическим уравнениям

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3,$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1, \quad (13)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2,$$

где $I_1 = b^2 + c^2$, $I_2 = c^2 + a^2$, $I_3 = a^2 + b^2$.

* «Комплексное расширение» уравнений гироскопа приводит к хорошо известному уравнению, описывающему трехмодовое взаимодействие колебаний (волн) (см., например, [8]).

Интеграл движения $E = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$ пропорционален кинетической энергии жидкости

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V v^2 dV = \frac{m}{5} E,$$

где m — масса жидкости, заключенной в полости.

Параметры Пуанкаре непосредственно связаны с компонентами вихря $\Omega = \text{rot } v$:

$$\omega_1 = \frac{bc}{b^2 + c^2} \Omega_1, \quad \omega_2 = \frac{ca}{c^2 + a^2} \Omega_2, \quad \omega_3 = \frac{ab}{a^2 + b^2} \Omega_3. \quad (14)$$

Уравнения гирокопа допускают, как известно, кроме энергии, второй квадратичный интеграл — квадрат момента. При нестационарном движении жидкости внутри трехосного эллипсоида момент не сохраняется, поэтому второй интеграл движения, являющийся математическим аналогом квадрата момента, в гидродинамике имеет существенно иной физический смысл:

$$I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = \frac{1}{\pi^2} (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2), \quad (15)$$

где $\Gamma_1 = \pi bc \Omega_1$, $\Gamma_2 = \pi ca \Omega_2$, $\Gamma_3 = \pi ab \Omega_3$ — значения циркуляций скорости по главным сечениям эллипсоида. Таким образом, для рассматриваемой гидродинамической системы интегралом движения является сумма квадратов циркуляций скорости по главным сечениям.

4. ЯВЛЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ «ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ВРАЩЕНИИ» ЖИДКОСТИ

Вопросы устойчивости движений описанной выше системы легко выяснить по аналогии с классическим «твёрдым» гирокопом. Всем хорошо известно (об этом написано в учебниках механики), что вращение асимметричного гирокопа вокруг средней оси является неустойчивым. В переводе на язык гидродинамики это означает, что «жидкое вращение» жидкости вокруг средней оси эллипсоида является неустойчивым и под влиянием сколь угодно малых возмущений должно как-то «опрокидываться».

Это явление легко наблюдать на эксперименте, используя методику, разработанную в ИФА АН СССР [4, 7].

Был изготовлен прозрачный контейнер из оргстекла с эллипсоидальной полостью. Полость заполняется водой специальной взвесью для визуализации движения. Начальное состояние системы создается с помощью вращения контейнера в течение достаточно длительного времени вокруг заданной оси с определенной скоростью ω_0 с последующей резкой остановкой. После остановки мы имеем жидкость с заданным значением вихря $\Omega = 2\omega_0$ (вдоль оси разгона) и которое постоянно в пространстве. Поле вихря, как известно, вместе с формой сосуда (теперь уже неподвижного!) однозначно определяет поле скоростей несжимаемой жидкости. В течение некоторого промежутка времени, пока постепенно распухающий вязкий пограничный слой занимает лишь малую часть объема, движение жидкости с достаточной точностью описывается уравнениями триплета (13) без учета диссипации.

На рис. 1 показан общий вид установки и результат эксперимента

при разгоне жидкости вокруг жороткой оси*. Фотография, снятая сверху, показывает устойчивое «эллиптическое вращение» вокруг начальной оси. На рис. 2 приведены результаты эксперимента, отвечающего неустойчивой ситуации (разгон вокруг средней оси). Съемка производилась сбоку. Первый кадр показывает начальное движение жидкости — в направлении разгона, однако уже через 0,2 с (интервал времени между кадрами) начинается процесс опрокидывания, который через 0,5 с приводит к повороту первичного вихря почти на 90°.

Устойчивость движения жидкости вокруг длинной оси также подтверждается экспериментом, если, однако, вытянутость эллипсоида не слишком велика (длинная ось должна быть меньше удвоенной короткой оси). Для эллипсоида, с которым проводились первые эксперименты (размеры его были уже указаны), это условие не выполняется, и при возбуждении движения вокруг длинной оси был экспериментально открыт (Ю. В. Новиковым) новый тип «двухвихревой» неустойчивости (рис. 3). Картина возмущений симметрична относительно экватора. Дело происходит качественно так, как если бы в каждой половине объема происходило опрокидывание, как было описано выше, причем роль средней оси выполняет теперь половина длинной оси (отсюда и упомянутое выше правило).

В экспериментах с цилиндрами эллиптического сечения нам удалось получать активные моды (развивающиеся за счет энергии основного течения благодаря его неустойчивости) не только двухвихревого, но также трехвихревого и даже четырехвихревого типа — в зависимости от длины цилиндра. При заданном сечении имеются промежуточные высоты цилиндра, при которых основное движение устойчиво. Теоретически вопрос об устойчивости мод и форме возникновения возмущений (активные моды) исследуется на основе решения линеаризованных уравнений гидродинамики [8].

Если неустойчивую моду подпитывать за счет внешних источников энергии, можно осуществить параметрическое возбуждение и длительное существование наиболее активного «сателлита». Знак возмущения при этом, вообще говоря, случаен — он определяется неконтролируемыми начальными «затравками». Соответствующий эксперимент был выполнен впервые Должанским [9], использовавшим проводящую жидкость — ртуть — и в качестве внешнего агента воздействия — вращающееся магнитное поле.

Представление о гидродинамической системе как совокупности связанных триплетов оказывается также полезным при построении математических моделей развитой турбулентности [4, 10].

Понятие трехмодового взаимодействия «работает» и в гидродинамике несжимаемой жидкости, позволяя находить новые подходы к физическому анализу таких явлений, как гидродинамическая неустойчивость или обмен энергии в спектре развитой турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляпкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 4, 631 (1974)
2. T. D. Lee, Quart. J. of Appl. Math., 10, № 1, 69 (1952).
3. А. М. Обухов, Докл. АН СССР, 184, № 2, 309 (1969).
- 4 Сб. Нелинейные системы гидродинамического типа, Отв. редактор А. М. Обухов, изд. Наука, М., 1974.

* В первом эксперименте полуоси составляли $a = 550 \text{ мм}$, $b = 120 \text{ мм}$, $c = 70 \text{ мм}$. Приводимые ниже результаты относятся к скорости начального разгона около 200 оборотов в минуту.

- 5 Б. В. Кадомцев, В. И. Карпман, Нелинейные волны, УФН, 103, № 2, 193 (1971).
6. Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев, Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, изд. Наука, М., 1965.
- 7 Е. Б. Гледзер, Ю. В. Новиков, А. М. Обухов, М. А. Чусов, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 10, № 2, 115 (1974).
- 8 Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, В. М. Пономарев, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 11, № 10, 981 (1975).
9. Ф. В. Должанский, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 8, № 6, 661 (1972).
- 10 А. М. Oboukhov, F. V. Dolzhansky, Geophys. Fluid Dynamics, 6, № 3, 195 (1975).

Институт физики атмосферы
АН СССР
