

УДК 538.57 : 530.18

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ*М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант***СОДЕРЖАНИЕ****Введение****I. Бегущие одномерные волны**

1. Волны в средах с низкочастотной неустойчивостью
 - а) Среда без дисперсии. Возникновение разрывов
 - б) Структура разрыва. Влияние дисперсии.
 - в) Солитоны в средах с низкочастотной неустойчивостью
2. Волны в средах с отрицательной вязкостью
 - а) Взрывная неустойчивость бегущих волн. Волны на стекающей пленке
 - б) Ионно-звуковые волны в плазме без столкновений

II. Взаимодействие устойчивых и неустойчивых волн.

1. Усредненные уравнения
2. Усиление слабых сигналов
3. Стабилизация линейной неустойчивости за счет передачи энергии затухающим волнам
4. Распадный триплет. Возникновение стохастичности
 - а) Усреднение по эллиптическим функциям
 - б) Качественный анализ. Точный синхронизм
 - в) Влияние расстройки от точного синхронизма
5. Распадный триплет. Машинные эксперименты
 - а) В резонансном случае.
 - б) В нерезонансном случае.
6. Резонансное взаимодействие нарастающих мод с «автоколебательной»

III. Взрывное взаимодействие волн.

1. Взаимодействие волн разных знаков энергий. Пучок в плазме
2. Взаимодействие волн Толлмина—Шлихтинга в пограничном слое
3. Взрывная неустойчивость в активной среде
4. Взаимодействие импульсов и пучков при взрывной неустойчивости

IV. Волновая турбулентность в неравновесных средах

1. Общие замечания
2. Турбулентность в средах с линейной неустойчивостью и затуханием
 - а) Узкий спектр возбуждения
 - б) Кинетическое уравнение для распадных триплетов.
3. Структура турбулентности при взрывной неустойчивости
4. Многофазная турбулентность

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени наиболее развитой, если не сказать «в основном построенной», в смысле доступности аналитических результатов, выработки интуиции и легкости понимания качественной стороны процессов, является теория нелинейных волн в прозрачных равновесных средах, где отсутствуют и диссипация и неустойчивости. Наиболее важными областями приложения этой теории являются нелинейная оптика, нелинейная акустика, многие задачи гидродинамики и физики плазмы и т. д. [1—3, 43]. Предметом данных лекций будет теория нелинейных волн в неравновесных средах, для которых затухание и нарастание волн является как раз наиболее принципиальным. Причины неравновесности могут быть самыми разнообразными, в частности,

нескомпенсированные направленные движения, внешние поля, градиенты (плотности, температуры,...) и т. д. Примеры неравновесных сред хорошо известны — электронный пучок, связанный с замедляющей системой, плазма с многогорбой функцией распределения по скорости, среды с отрицательной проводимостью или вязкостью — в частности, туннельные и ганновские полупроводники, пограничный слой и другого рода течения в гидродинамике и т. д.

Обилие разнообразных неустойчивостей и отсутствие законов сохранения существенно усложняет задачу построения теории нелинейных волн в неравновесных средах. Трудности увеличиваются еще и потому, что при описании таких сред, как правило существенно неконсервативных, обычно не удается перейти к их единообразному описанию на основе, например, гаммильтонова или лагранжева формализма. Тем не менее, по крайней мере для одномерных задач (моделей), можно надеяться на построение довольно развитой теории, если учесть, что характер протекающих в неравновесных средах нелинейных волновых процессов определяется лишь конечным числом комбинаций таких параметров, как дисперсия, нелинейность, частотные характеристики неустойчивостей и поглощения (т. е. неконсервативности). Именно это обстоятельство позволяет единообразно подойти к описанию нелинейных волн в различных неравновесных средах и на основе рассмотрения сравнительно небольшого числа основных (часто модельных) задач попытаться воссоздать более или менее общую картину волновых явлений в таких средах.

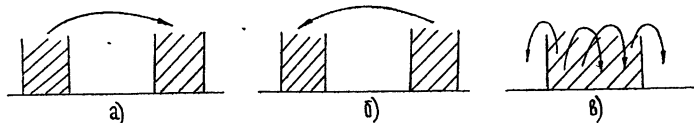


Рис. 1. Возможное расположение областей неустойчивости и диссипации по спектру волновых чисел

а) неустойчивость сосредоточена в нижней части спектра, а диссипативная область — в верхней. Поток энергии — вверх по спектру; б) неустойчивость — в верхней части спектра; в) промежуточный случай.

Основное внимание в лекциях будет уделено анализу волновых полей, для которых в k -пространстве (при спектральном описании) инерционный интервал — область, где нет ни неустойчивости, ни диссипации, — мал, либо отсутствует вовсе. При этом будем различать следующие ситуации (см. рис. 1) — а) неустойчивость сосредоточена в нижней части спектра, б) — в верхней, в) промежуточный случай. Стабилизация неустойчивости может осуществляться как за счет передачи энергии в другую область спектра, где преобладает диссипация, так и в той же области спектра, где проявляется линейная неустойчивость, благодаря нелинейным потерям (вязкости) — рис. 1 в. Напомним, что источником энергии при неустойчивостях могут быть внешние поля, либо основное (первичное) течение; для волн опабающих таким источником может быть поле заполнения ($\sim \exp(i\omega t)$).

1. БЕГУЩИЕ ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ

Как и для равновесных сред, нелинейные бегущие волны в неравновесных средах во многих практически интересных случаях удается описать в рамках так называемого одноволнового приближения [6], когда, ввиду малости нелинейности, можно приближенно ограничиться рассмотрением волновых возмущений лишь одного вида — принадлежащих одной ветви дисперсионного уравнения (бегущие в одну сторону

нонно-звуковые волны в плазме, бегущие капиллярные волны, катящиеся волны в канале и т. д.). Формальное описание бегущих волн при этом сводится к анализу решений нескольких основных уравнений, часть из которых является обобщением уравнений Бюргерса и Кортевега—де Вриза на неравновесные среды.

1. Волны в средах с низкочастотной неустойчивостью

Нелинейные волны, возникающие благодаря низкочастотной неустойчивости, наиболее типичны для неравновесных сред. Их установление связано с передачей (за счет нелинейности) энергии из области неустойчивости вверх по спектру волновых чисел и последующей диссипацией высших гармоник. Поскольку в области неустойчивости обычно могут нарастать возмущения разных масштабов, при наличии в среде заметной дисперсии, фазы отдельных спектральных компонент сбиваются и процесс стохастизируется — возникает турбулентность. Однако, если одна из неустойчивых гармоник выделена по сравнению с другими (например, граничными условиями, или резонансным внешним полем), в среде установится динамический режим бегущих нелинейных волн. Добавим, что если даже такая выделенность определенного масштаба отсутствует, в среде со слабой дисперсией хаотизации фаз отдельных гармоник не происходит — образуются группы сильно коррелированных друг с другом гармоник, причем эти группы слабо взаимодействуют между собой [7–9]. Это позволяет и турбулентность в среде со слабой дисперсией с низкочастотной неустойчивостью рассматривать как ансамбль слабовзаимодействующих нелинейных волн, каждая из которых есть решение динамических уравнений движения среды — бюргерсовская турбулентность [10].

а) *Среды без дисперсии. Возникновение разрывов.* Начнем с примера капиллярной неустойчивости жидких струй. Известно [11], что для цилиндрической струи наибольший инкремент соответствует симметричным возмущениям, их развитием на нелинейной стадии мы и будем интересоваться. При числах Рейнольдса, меньших некоторого критического ($Re = \sqrt{\sigma r / \nu_0}$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, ν_0 — вязкость), фазовая скорость этих возмущений вдоль струи равна нулю и не зависит от волнового числа — дисперсия отсутствует. Инкремент симметричных возмущений положителен лишь при малых волновых числах (см. рис. 2). С уменьшением Re граница неустойчивости k_0 не изменяется, а значение k^0 , при котором инкремент максимален, стремится к нулю. Следовательно, при $Re \ll 1$ развитие возмущений в такой системе можно рассматривать в приближении «низкочастотной неустойчивости» — инкремент $\gamma(k)$ монотонно спадает с ростом k и при $k = k_0$ меняет знак, например,

$$\gamma(k) = \gamma - \nu k^2, \quad (1.1)$$

где γ , ν определяются параметрами струи.

Воспользовавшись (1.1), можем записать уравнение одноволнового приближения для функции тока u [12]:

$$u_t + uu_x = \gamma u + \nu u_{xx} \quad (1.2)$$

(компоненты скорости осесимметричного движения несжимаемой жидкости выражаются в цилиндрической системе координат через u : $v_\theta = 0$, $v_r = -u_x$, $v_x = u_r$, θ — азимутальный угол, r — радиальная координата, x — координата вдоль струи).

Уравнение (1.2), отличающееся от уравнения Бюргерса слагаемым γu , ответственным за низкочастотную неустойчивость, является одним

из основных (эталонных) в теории нелинейных волн в неравновесных средах. Напомним, что оно относится к средам без дисперсии (точнее без реактивной дисперсии).

Периодические волны, возбужденные в среде, описываемой (1.2), затухают при $\lambda < \lambda_0 = 2\pi\sqrt{\nu/\gamma}$ и нарастают до конечной амплитуды при $\lambda > \lambda_0$. Амплитуду стационарных ($u_t = 0$) волн нетрудно оценить. В случае, когда их длина лишь незначительно превышает критическую, u можно найти методом последовательных приближений и представить в виде $u = \sum_n u_n \sin(kn\lambda + \varphi_n)$, тогда после подстановки в (1.2) найдем

при $(\lambda - \lambda_0) \ll \lambda_0$ амплитуду основной гармоники $u_1 = A\sqrt{\lambda - \lambda_0}$, где $A = \left(\frac{12}{\pi}\sqrt{\nu\gamma^3}\right)^{1/2}$, т. е. стабилизация неустойчивости происходит на уровне

$$u \sim \sqrt{\lambda - \lambda_0}. \quad (1.3)$$

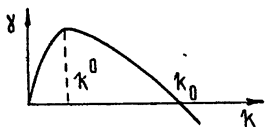


Рис. 2.

Рис. 2. Инкремент осесимметричных капиллярных колебаний цилиндрической вязкой струи ($\text{Re} \ll 1$).

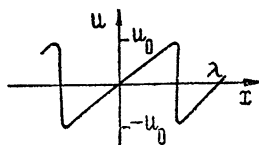


Рис. 3.

Рис. 3. Форма длинных стационарных волн в среде с низкочастотной неустойчивостью ($\lambda \gg \lambda_c$).

Наибольший интерес представляет поведение длинноволновых возмущений — $\lambda \gg \lambda_0$. По мере нарастания их профиль будет искажаться, подобно профилю простой волны в равновесной среде, вплоть до образования крутых фронтов — «разрывов», где уже существенно высокочастотная вязкость* (такому искажению соответствует генерация гармоник, т. е. передача энергии вверх по спектру). В результате диссипации энергии на фронте, т. е. в высокочастотной части спектра, происходит стабилизация неустойчивости — установление стационарной нелинейной волны. На спектральном языке этому процессу соответствует установление постоянного потока энергии по спектру. Поскольку низкочастотная неустойчивость практически не влияет на характер нелинейной эволюции возмущения, можно рассчитывать, что в данном случае, как и в равновесной среде, форма его будет стремиться к пилообразной (см. рис. 3) с амплитудой**

$$u_0 \approx \gamma\lambda/2, \quad (1.4)$$

если $u_t = 0$, то $u_x = \gamma$, т. е. $u = \gamma x$ при $-\frac{\lambda}{2} \leq x \leq \frac{\lambda}{2}$. Подчеркнем, что

амплитуда установившейся волны не зависит от величины затухания ν , которое определяет лишь ширину фронта волны, т. е. толщину «разрыва». Эту толщину Δ можно оценить из условия баланса процессов нелинейной перекачки энергии вверх по спектру и высокочастотного затухания — $uu_x \approx \nu u_{xx}$, отсюда при учете (1.4) найдем

$$\Delta \sim 2\nu/\gamma\lambda. \quad (1.5)$$

* Если бы вязкость отсутствовала, то такая «квазипростая» волна опрокидывалась бы, как и в обычной (равновесной) среде.

** Сопоставляя это с (1.3), получаем качественную зависимость равновесной амплитуды от длины волны, приведенную на рис. 4.

На рис. 5 даны результаты численного решения уравнения (1.2) при $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{25} + 0,053 \sin \frac{\pi x}{50}$, $\nu = 0,1$, $\gamma = 1$. Видно, что в процессе эволюции почти гармонического возмущения возникала пилообразная волна, которая оказалась неустойчивой по отношению к длинноволновым возмущениям, приводящим к установлению волны с максимально возможным периодом*. В реальной ситуации этот период может определяться как начальными, так и граничными условиями.

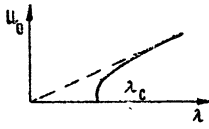


Рис. 4.

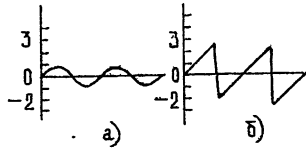


Рис. 5.

Рис. 4. Зависимость амплитуды стационарных волн от длины волны в среде с низкочастотной неустойчивостью.

Рис. 5. Результат численного расчета нелинейной эволюции длинных волн в среде с низкочастотной неустойчивостью ($\nu = 0,1$, $\gamma = 1,0$); а) $u(x, 0)$ — начальное условие, б) $u(x, t_0)$ — установившаяся волна.

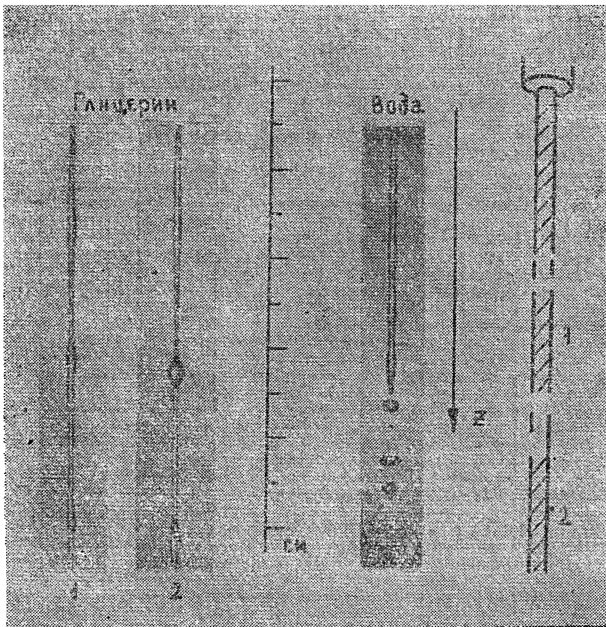


Рис. 6. Эволюция вязкой капиллярной струи при $Re \ll 1$ [12].

Возвращаясь к задаче об осесимметричных колебаниях вязких струй, заметим, что пилообразной форме волны функции тока соответствует солитоноподобная волна поперечной скорости $v_r = -\frac{\partial u}{\partial x}$. Поэтому

* Этот результат легко, понять, если вспомнить, что большим периодам соответствует больший инкремент.

в результате разлггия неустойчивости струя примет вид тонкой шпги с насаженными на нее каплями-бусинками. Именно такая картина наблюдается экспериментально (см. рис. 6), но лишь на промежуточном этапе эволюции. Дело в том, что шпть между бусинками, в свою очередь, неустойчива по отношению к возникновению новых более мелких капель-сателлитов. Эта вторичная неустойчивость (она также описывается (1.2)) имеет инкремент много меньший, чем исходная. Ввиду ограниченности отрезка нити крупными каплями, масштаб нарастающего вторичного возмущения будет меньше, чем первичного, т. е. сателлиты будут значительно мельче сразу образовавшихся капель (см. рис. 6). Аналогично можно рассмотреть неустойчивость третьего порядка, приводящего к возникновению еще более мелких сателлитов, и т. д. до нарушения условий применимости уравнения (1.2).

б) *Структура разрыва. Влияние дисперсии.* Легко убедиться, что при отсутствии дисперсии (применимо уравнение Бюргерса для неравновесной среды (1.2)) фронт волны будет гладким. Действительно, рассматривая стационарные решения $u = u(\xi = x - Vt)$, $V = \text{const}$ уравнения (1.2), найдем при $V = 0$ в результате интегрирования

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2} = \nu \left[u_\xi - \gamma \ln \frac{\gamma - u_\xi}{\gamma} \right], \quad (1.6)$$

где u_0 — параметр, характеризующий амплитуду. Из (1.6) следует, что ограниченные стационарные решения обязательно периодические, причем форма их с ростом u_0 приближается к пилообразной (фазовый

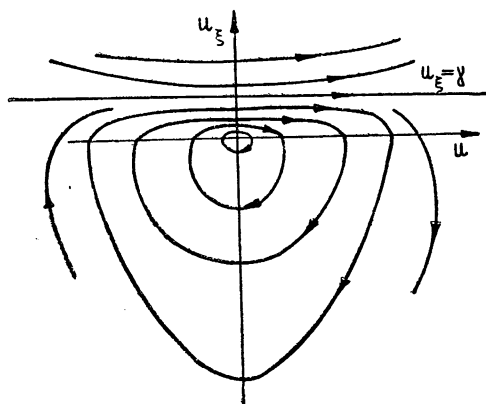


Рис. 7. Фазовый портрет стационарных решений уравнения (1.2). Все замкнутые кривые находятся ниже прямой $u_\xi = \gamma$.

портрет, построенный на основании (1.6), приведен на рис. 7). Волны с большой амплитудой имеют участок медленного изменения — на фазовой плоскости ему соответствует движение вблизи прямой $u_\xi = \gamma$ и участок быстрого изменения — движение по уходящей далеко вниз петле*.

Для ответа на вопрос, как влияет на структуру разрыва дисперсия, следует модифицировать уравнение (1.2), введя в него слагаемое, ответственное за дисперсию. Сделаем это на примере ионно-звуковых волн в неравновесной плазме.

Как известно [13], в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) в результате осносительного движения электронов и ионов при

$$v_{Te} \sqrt{\frac{m}{M}} = v_s < V \ll v_{Te} \quad (1.7)$$

(v_s — скорость ионного звука, V — скорость взаимного дрейфа, v_{Te} — тепловая скорость электронов) возможна неустойчивость относи-

* Ограниченные решения в классе стационарных волн существуют в (1.2) только при $V = 0$, при этом, независимо от периода, все возмущения распространяются с одинаковой скоростью — фазовой скоростью малых возмущений. Естественно, что такая ситуация возможна лишь в среде без дисперсии.

тельно длинноволновых ионно-звуковых возмущений. Характер этой неустойчивости качественно различен при малом и при большом числе столкновений. Рассмотрим здесь предельный случай большой частоты столкновений, когда возможно использование гидродинамического приближения*. Исходными будут уравнения двухжидкостной модели [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i u_i) &= 0, \\ \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_e u_e) &= 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial x}(n_e T_e) &= 0, \\ \frac{\partial T_e}{\partial t} + n_e \frac{\partial T_e}{\partial x} + \frac{2}{3} T_e \frac{\partial u_e}{\partial x} &= \frac{2}{3} \kappa \frac{\partial^2 T_e}{\partial x^2}, \\ \frac{\lambda_D^2}{l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= n_e - n_i, \end{aligned} \tag{I.8}$$

где λ_D — дебаевский радиус, l — характерная длина возмущения, $n_{e,i}$ — концентрации электронов и ионов, φ — потенциал поля, T_e — электронная температура, ν_i — ионная вязкость, κ — электронная теплопроводность**. Здесь в уравнении Навье—Стокса для ионов пренебрегается ионным давлением (ввиду малости T_i), а в уравнении для электронов — инерцией электронов, т. е. малым слагаемым $\frac{m}{M} \frac{du_e}{dt}$.

Уравнения непрерывности, теплопроводности и Пуассона записаны в обычной форме.

В рассматриваемой модели имеются два механизма диссипации — ионная вязкость и электронная теплопроводность, предполагаемая здесь достаточно большой. Если $V > v_s$, то электронная теплопроводность приводит не к затуханию волн, а к низкочастотной неустойчивости, развитие которой и последующую стабилизацию за счет ионной вязкости можно описать в одноволновом приближении уравнением [14]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \gamma u + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{I.9}$$

где $\gamma = \frac{V/v_s - 1}{2\kappa}$, $\beta = \lambda_D^2/l^2$, $\nu = \nu_i/2$. В отличие от (I.2), в этом уравнении, которое можно считать обобщенным уравнением Кортевега—де Вриза—Бюргерса для неравновесных сред, учитывается высокочастотная дисперсия — $\beta \neq 0$.

В равновесной среде ($\gamma = 0$) при достаточно сильной дисперсии — $\beta > v^2/2 \Delta u$ (Δu — амплитуда разрыва) — на фронте волны появляются затухающие осцилляции. Поскольку в рассматриваемом случае неравновесность определяет лишь амплитуду установившейся волны, есте-

* Случай бесстолкновительной плазмы рассмотрен ниже — см. п. 2б.

** В рассматриваемой модели не учитываются электрон-ионные столкновения.

сверенно ожидать, что то же самое получится и при $\gamma > 0$. На рис. 8 приведен результат численного счета для (I.9) при $\beta > v^2/2\gamma v$, подтверждающий нашу интуицию.

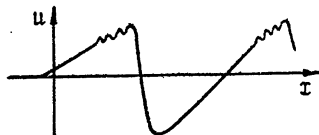


Рис. 8. Влияние слабой дисперсии на форму стационарной волны в среде с низкочастотной неустойчивостью [14] ($\beta > v^2/2\gamma v$).

в) *Солитоны в средах с низкочастотной неустойчивостью.* Если дисперсия столь велика, что осциллирующие изрезают весь профиль волны, то естественно говорить уже не о фронте и его структуре, а о поведении самих осцилляций, т. е. солитонов. Так получается при

$$\beta u''' \sim uu' \gg \gamma u \sim \nu u'' \quad (\text{I.10})$$

Имея в виду, что при малых γ и ν параметры солитонов медленно меняются, для анализа нестационарного процесса удобно воспользоваться методом усреднения по стационарным волнам [6, 15]. Решение представляется в виде солитона с медленно меняющимися амплитудой, шириной и скоростью:

$$u = A(t) \operatorname{ch}^{-2} \left[\left(x - \int_0^t V(t) dt \right) / \lambda(t) \right], \quad (\text{I.11})$$

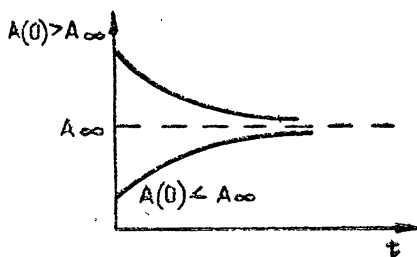
где $V(t) = \frac{1}{3} A(t)$, а $\lambda^2(t) = 12\beta/A(t)$, т. е. параметры солитона связаны друг с другом, как и в прозрачной среде, описываемой обычным уравнением КДВ. После подстановки (I.11) в исходное уравнение (I.9), записанное в виде закона сохранения —

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} uM[u] dx = 0, \quad (\text{I.12})$$

$M[u] = -\gamma u - \nu u$ — диссипативный оператор, получается уравнение для амплитуды [14]:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4}{2} \gamma A - \frac{4}{45} \frac{\nu}{\beta} A^2. \quad (\text{I.13})$$

Рис. 9. Динамика солитонов в среде с низкочастотной неустойчивостью. Амплитуда солитонов стремится при $t \rightarrow \infty$ к постоянной A_{∞} .



Из его решения

$$A(t) = \frac{A_0 A_{\infty} e^{\alpha t}}{A_0 (e^{\alpha t} - 1) + A_{\infty}} \quad (\text{I.14})$$

(A_0 — начальная амплитуда, $A_{\infty} = 5\gamma/\nu$, $\alpha = 4\gamma/3$) следует, что солито-

ны с начальной амплитудой $A_0 < A_\infty$ ускоряются до скорости $V_\infty = \frac{1}{3} A_\infty$ и усиливаются до A_∞ , а солитоны с $A_0 > A_\infty$ замедляются и затухают до A_∞ (см. рис. 9). В результате при $t \rightarrow \infty$ устанавливается режим в виде солитонов, имеющих одинаковые амплитуды и скорости. Физически этот результат кажется довольно очевидным — солитоны малой амплитуды имеют большую ширину и низкочастотная неустойчивость приводит к их усилению, узкие солитоны (большой амплитуды) затухают из-за высокочастотной вязкости.

2. Волны в средах с отрицательной вязкостью

Ясно, что реальная среда не может быть неравновесной по отношению к возмущениям с произвольными пространственно-временными масштабами. Более того, в большинстве случаев неравновесность проявляется лишь для сравнительно узкой «полосы» возмущений, т. е. существуют явно выраженные масштабы. Например, для гидродинамической неустойчивости течений [16, 17] таким масштабом является характерный размер потока, для пучковой неустойчивости в плазме временным масштабом служит обратная плазменная частота и т. д. Наиболее типичный механизм стабилизации неустойчивости в этих случаях, как уже говорилось, заключается в передаче энергии вверх по спектру, где она диссипирует, например, из-за вязкости.

Однако сравнительно недавно стало ясно, что существуют и другого рода неравновесные среды, при распространении волн в которых проявляются инкременты, растущие с частотой, — «отрицательная вязкость». Именно так, например, обстоит дело при распространении волны в среде с турбулентностью, характеризующей малым временем корреляции. При этом волна нарастает за счет передачи энергии от мелких масштабов к крупным (процесс, обратный ричардсоновской каскадной передаче энергии от «вихрей побольше вихрям поменьше» [18]). Механизм отрицательной вязкости, по-видимому, реализуется для течений в океане и атмосфере [19].

а) *Взрывная неустойчивость бегущих волн. Волны на стекающей пленке.* Эффект отрицательной вязкости проявляется в совершенно привычных и ясных, на первый взгляд, явлениях. Возьмем, к примеру, стекающий по наклонной плоскости с углом α слой вязкой жидкости толщины H (см. рис. 10). Плоскопараллельное стационарное течение имеет параболический профиль скорости $U(y)$ —

$$U(y) = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} (2Hy - y^2), \quad (1.15)$$

где y — нормальная к поверхности потока координата, $U(y)$ — параллельная наклонной плоскости компонента скорости, ν — кинематическая вязкость, а g — ускорение свободного падения.

Исследование линейной устойчивости такого течения приводит к результату, представленному на рис. 11 графически. Здесь на плоскости k, Re (k — волновое число гармонического возмущения, $\text{Re} = \frac{g \sin \alpha H^3}{2\nu^2}$ — число Рейнольдса) проведена нейтральная кривая — граница между областями устойчивости и неустойчивости. Эта граница состоит из двух ветвей. Верхняя представляет собой слегка деформированную нейтральную кривую течения Пуазейля (между двумя плоскостями) с параболическим профилем скорости [16]. Для нее существует

критическое число Рейнольдса Re_* , при превышении которого — $Re > Re_*$ — в потоке нарастают волны Толлмина—Шлихтинга [16, 20], что затем может привести к возникновению сильной турбулентности.

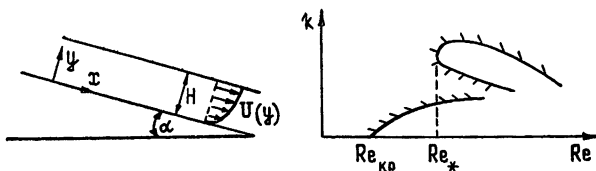


Рис. 10.

Рис. 11.

Рис. 10. Ламинарное стекание вязкой жидкости вниз по наклонной плоскости.

Рис. 11. Нейтральные кривые для течения по наклонной плоскости. Штриховка направлена в устойчивую область.

Нижняя ветвь нейтральной кривой также имеет критическое число Рейнольдса

$$Re_{кр} = \frac{5}{4} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (I.16)$$

при превышении которого возбуждаются поверхностные гравитационно-капиллярные волны (течение по вертикальной плоскости, очевидно, всегда неустойчиво — $Re_{кр} = 0$)*.

Для течений, обычно наблюдаемых в лабораторных условиях (вода или спирт; $H \sim 0,01 \div 1$ см), $Re_* \gg Re_{кр}$, т. е. течение всегда можно считать ламинарным и исследовать лишь неустойчивость поверхностных волн. При заданном Re инкремент $\gamma(k)$ этой неустойчивости нарастает с ростом волнового числа k и при некотором $k = k^0$ максимален (см. рис. 12). Для возмущений с $k \ll k^0$, которым соответствует $\gamma(k) \sim k^2$, описывающее их уравнение одноволнового приближения, содержит слагаемое, ответственное за отрицательную вязкость [21, 22]:

$$\dot{\eta} + v \eta_x + d \eta \eta_x + \beta \eta_{xxx} + \nu \eta_{xx} = 0, \quad (I.17)$$

где η — отклонение уровня поверхности, v, d, β — постоянные, определяемые параметрами потока и поверхностным натяжением, а $\nu \sim (Re - Re_{кр})$ — эффективная вязкость, которая становится отрицательной при $Re > Re_{кр}$. Этим же уравнением описываются и длинные волны, бегущие по наклонному каналу произвольного поперечного сечения [22].

В новых переменных — $x' = x - vt$, $u = d\eta$ уравнение (I.17) имеет вид (при $\beta = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (I.18)$$

т. е. отличается от уравнения Бюргерса лишь знаком ν и переходит в него при замене: $t \rightarrow \partial - t$, $x \rightarrow -x$, $u \rightarrow -u$. Это уравнение допускает точное решение — заменой $u = \frac{2\nu}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ оно сводится к линейному

уравнению теплопроводности.

* Условие неустойчивости поверхностных волн иногда записывают в виде $\Phi > \sqrt{5/2}$, где $\Phi = U_{\max} / \sqrt{gH}$ с $\frac{\sigma}{\rho g a}$ — число Фруда

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0. \tag{I.19}$$

Легко показать [24], что гладкое решение (I.18) вначале эволюционирует как простая волна—его профиль укрупняется, а затем обращается в бесконечность за конечное время (см. рис. 13)— взрывная неустойчивость бегущей волны. Этот результат на спектральном языке можно пояснить следующим образом. К экспоненциальному росту высокочастотных гармоник добавляется нарастающий по мере их усиления поток энергии от низкочастотных мод, что и приводит к нелинейному инкременту высокочастотных мод, обеспечивающему взрыв.

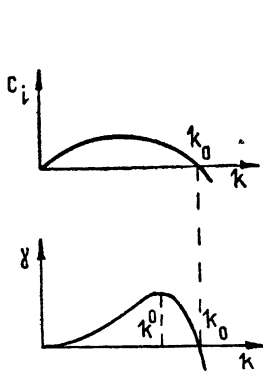


Рис. 12.

Рис. 12. Зависимость мнимой части фазовой скорости $c_i(k)$ и инкремента $\gamma(k) = kc_i(k)$ от волнового числа для возмущений течения по наклонной плоскости при $\text{Re} = \text{const}$.

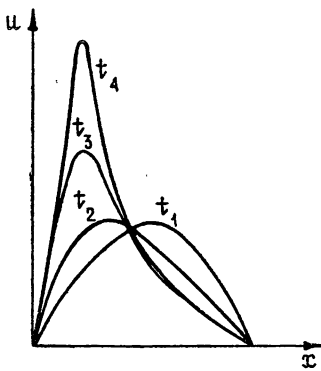


Рис. 13.

Рис. 13. Эволюция нелинейной волны в среде с отрицательной вязкостью. Форма волны изображена для последующих моментов времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ [24].

Естественно, что в реальной ситуации до взрыва дело не доходит—проявляется либо нелинейное затухание, либо поглощение на более высоких частотах. В нашем случае — длинных волн на поверхности стекающей жидкости — необходимо учесть затухание в области малых масштабов — $\lambda < \frac{2\pi}{k^0}$ (см. рис. 12). Установившиеся, в результате ограничения взрывной неустойчивости, длинные нелинейные волны на поверхности вертикально стекающей жидкой пленки приведены на рис. 14 [25]. Для более коротких волн уже существенна дисперсия ($\beta \neq 0$ в (I.17)), и на профиле волны появляются осцилляции (см. рис. 15). Волны, длина которых близка к критической — $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, будут, очевидно, квазисинусоидальны (рис. 15 а) [26].



Рис. 14. Форма длинных волн на пленке, стекающей по вертикальной трубе большого диаметра [25].

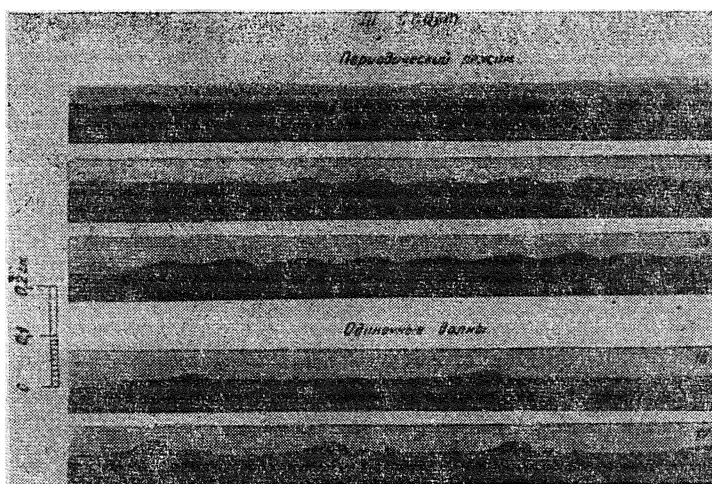


Рис. 15. Волны различной длины на стекающей пленке [26]. Форма волны меняется с длиной волны — от квазисинусоиды до релаксационных волн.

б) *Ионно-звуковые волны в плазме без столкновений.* Вернемся к рассмотренному выше примеру об ионно-звуковых волнах в неравновесной плазме. Мы говорили о случае, когда ионная вязкость велика, и получили для нелинейных волн уравнение одноволнового приближения (1.9), где неустойчивость описывается слагаемым γu . При этом инкремент $\sim (\gamma - \nu k^2)$. В другом предельном случае — бесстолкновительной плазмы (вязкость отсутствует), инкремент ионно-звуковых волн, определяемый резонансным взаимодействием электронов с ионами, уже иной:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi m}{8M}} (V - v_s) |k| \quad (1.20)$$

— пропорционален модулю волнового числа. Подобную неустойчивость уже нельзя учесть в рамках уравнений в частных производных, и «эталонное» (модельное) уравнение одноволнового приближения становится интегральным* [28] (n — плотность):

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \alpha n \frac{\partial n}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (1.21)$$

В равновесной плазме — $V = 0$ интегральное слагаемое ($\gamma < 0$) описывает резонансное затухание ионного звука на электронах. При наличии тока, когда $V > v_s$, затухание сменяется неустойчивостью. Для малых масштабов становится существенным затухание Ландау на ионах [27], поэтому следующий член разложения полного инкремента по k даст в (1.21) слагаемое, аналогичное вязкости —

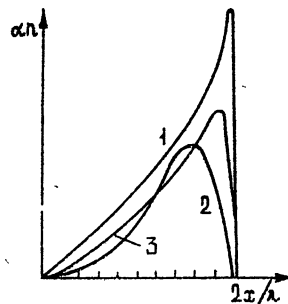
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \alpha n \frac{\partial n}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial n}{\partial \xi} \frac{d\xi}{x - \xi} + \nu \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (1.22)$$

* Аналогично описываются нелинейные волны, нарастающие в результате резонансного взаимодействия волн с частицами или волн с потоками, и в других случаях — ветровые волны на мелководье, ленгмюровские волны в плазме с пучком [29] и т. д. Такое же интегральное слагаемое следует добавить и в уравнение (1.2) для функции тока в капиллярной струе. Оно учитывает отклонение $\sim |k|$ реального инкремента от аппроксимации (1.2).

В результате стабилизации неустойчивости устанавливаются нелинейные стационарные волны, форму которых удается исследовать только численно. На рис. 16 приведена зависимость формы этих волн при $\beta = 0$ для различных ν [14]. Видно, что с ростом длины волны (или, что то же самое, — уменьшением затухания) ее передний фронт становится круче. Согласно результатам этого счета средняя энергия нелинейной волны с ростом ее длины растет значительно медленнее, чем в случае низкочастотной неустойчивости (ср. (I.3)) —

$$\langle n^2 \rangle \sim \sqrt[4]{\lambda}. \quad (\text{I.23})$$

Рис. 16. Форма стационарных ионно-звуковых волн в бесстолкновительной неравновесной плазме:
1 — $\nu = 0,5$; 2 — $\nu = 1$; 3 — $\nu = 2$.



Теперь ясно, что в случае, когда инкремент $\gamma|k|$ добавляется к низкочастотному — $\gamma(k) = \gamma_1 + \gamma_2|k| - \nu k^2$ (как при более строгом рассмотрении нелинейных волн на цилиндрической струе — см. сноску к (I.21)), профиль стационарных волн вблизи фронта должен становиться круче. В частности, для капиллярной струи этот результат означает появление перетяжек по обе стороны от каждой формирующейся капли [12]. Такие перетяжки действительно наблюдаются (см. рис. 6).

II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УСТОЙЧИВЫХ И НЕУСТОЙЧИВЫХ ВОЛН

В равновесных средах волны могут обмениваться энергией лишь друг с другом, и при их динамическом взаимодействии возникает периодический процесс. В простейшем случае трех волн высокочастотная волна при распаде отдает свою энергию низкочастотным и затем в результате их слияния получает ее обратно. Если же фазы волн случайны, то устанавливается равномерное распределение энергии между модами. В неравновесных средах волны могут еще и отбирать энергию у среды и волновые взаимодействия оказываются значительно разнообразнее и богаче. Например, распадаться может уже и низкочастотная волна, в результате взаимодействия возможен одновременный рост всех волн — взрывная неустойчивость, при большом числе взаимодействий фазы волн не обязательно хаотизируются, а могут и синхронизоваться за счет нарастания отдельных мод и т. д.

В этом и следующем разделах рассматриваются, в основном, трехволновые взаимодействия в средах с квадратичной нелинейностью. Мы обсудим взаимодействие волн Толлмина—Шлихтинга в пограничном слое, волн в системе электронный пучок — плазма, в полупроводниках с нелинейной зависимостью плотности тока от поля и некоторых других средах.

1. Усредненные уравнения

Прежде всего рассмотрим формальную сторону трехволновых взаимодействий. В средах с малой квадратичной нелинейностью взаимодействие резонансно связанных волн $\omega_1, k_1; \omega_2, k_2; \omega_3, k_3$, где $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1 + \Delta\omega$, $k_3 = k_2 + k_1$, может быть описано с помощью усредненных уравнений для комплексных амплитуд волн

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + \mathbf{v}_{1,2} \nabla a_{1,2} = \sigma_{1,2} a_3 a_{2,1}^* e^{i\Delta\omega t} + \nu_{1,2} a_{1,2},$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + \mathbf{v}_3 \nabla a_3 = \sigma_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} + \nu_3 a_3. \quad (\text{II.1})$$

Неравновесность среды в этих уравнениях может проявиться двояко. С одной стороны, коэффициенты взаимодействия σ , которые в равновесных средах всегда удовлетворяют соотношениям симметрии типа $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3$ (при $\sigma = \sigma^*$)*, в неравновесной среде могут оказаться произвольными комплексными, и в результате появятся «нелинейные» неустойчивости. С другой — σ могут остаться такими же, как и в равновесном случае, но отдельные волны окажутся неустойчивыми уже в линейном приближении — $\nu_i > 0$. Естественно, такие «чистые» ситуации не исчерпывают всех возможностей — встречаются и комбинированные случаи, однако часто можно пренебречь малыми линейными инкрементами по сравнению с нелинейными, или малыми мнимыми добавками в σ .

Пусть $\nabla = \Delta\omega = \nu = 0$. Используя замену $a_j = \frac{A_j}{\sqrt{|\sigma_i \sigma_k|}} e^{i\varphi_j}$ ($k \neq i \neq j$), $i, j, k = 1, 2, 3$, запишем (II.1) в действительной форме:

$$\dot{A}_1 = A_3 A_2 \cos(\Phi + \theta_1), \quad A_2 = A_3 A_1 \cos(\Phi + \theta_2),$$

$$\dot{A}_3 = A_1 A_2 \cos(\Phi + \theta_3), \quad (\text{II.2})$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{A_1 A_2}{A_3} \sin(\Phi + \theta_3) - \frac{A_2 A_3}{A_1} \sin(\Phi + \theta_1) - \frac{A_1 A_3}{A_2} \sin(\Phi + \theta_2).$$

Взаимодействующие волны демонстрируют качественно различное поведение при различных значениях θ_i . Периодическому обмену энергией (равновесная среда) соответствует случай — $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \pm \pi$. Для взрывной неустойчивости необходимо и достаточно, чтобы разность фаз Φ менялась лишь в таких пределах, что все $\cos(\Phi + \theta_{1,2,3})$ были знакоположительны. Этот случай реализуется, когда все θ_i относятся так, что $\max\{\theta_i\} - \min\{\theta_i\} < \pi$, т. е. лежат в одной полуплоскости [30]. При этом фазы волн быстро синхронизируются, а их амплитуды обращаются в бесконечность за конечное время (см. рис. 17).

Предполагая теперь, что σ такие же, как и в равновесной среде, рассмотрим подробно взаимодействие устойчивых и неустойчивых в линейном приближении волн.

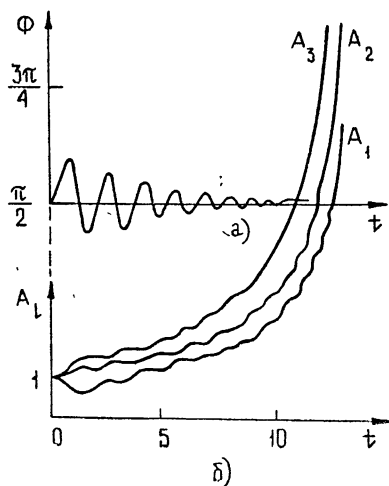


Рис. 17. Синхронизация фаз волн и обращение их амплитуд в бесконечность при взрывной неустойчивости.

* Нетрудно убедиться, что в равновесной среде всегда можно таким образом выбрать переменные, что σ будут либо чисто действительными и выполнится это условие, либо чисто мнимыми, тогда условия симметрии запишутся так: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

2. Усиление слабых сигналов

Пусть поле одной из волн задано. Если бы среда была равновесной, то здесь наибольший интерес представляла бы ситуация, когда малы амплитуды низкочастотных волн, т. е. параметрическое усиление этих волн за счет высокочастотной накачки ω_3 (распадная неустойчивость). Учет неравновесности среды в линейном приближении — появление линейного инкремента на одной из волн — может привести к качественно новым эффектам лишь в случае, когда параметрический инкремент оказывается значительно ниже инкремента неустойчивой волны. Как мы сейчас убедимся, при этом происходит перенос большого инкремента неустойчивой волны на слабую сигнальную, ввиду чего подобный процесс иногда называют супергетеродинным усилением [31]. Этот процесс наблюдается в физических и машинных экспериментах по взаимодействию устойчивых или нарастающих и неустойчивых волн в пьезополупроводниках [31, 32], неравновесной плазме [33] и т. д. Существенно, что такой «усилитель» будет работать и при низкочастотной накачке [33] (что в равновесной среде невозможно).

Рассмотрим параметрическое усиление в одномерной среде (вдоль x) волны сигнала $a_3(x)$ в заданном поле волны накачки $a_2 = a_{20} = \text{const}$, полагая $\frac{\partial}{\partial t} = \Delta\omega = \nu_{2,3} = 0$, т. е. вместо (II.1) имеем

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = \sigma_1 a_3 a_2^* + \gamma a_1, \quad (II.3)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial x} = -\sigma_3 a_1 a_2, \quad \sigma_i = \sigma_i^*, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2.$$

Если параметрическая связь слабая, т. е. отношение параметрического инкремента $\Gamma = A_{20} \sqrt{\sigma_1 \sigma_3}$ к γ : $\delta = (\Gamma/\gamma)^2 \ll 1$, то при граничных условиях $a_3(x=0) = a_3(0)$, $a_1(x=0) = 0$ из (II.3) приближенно имеем

$$a_3(x) = a_3(0) (1 - \delta e^{\Gamma x}), \quad (II.4)$$

$$a_1(x) = a_3(0) \frac{\sigma_1 a_{20}^*}{\gamma} (e^{\Gamma x} - 1).$$

На основе этого решения легко проследить отдельные стадии супергетеродинного усиления при распространении волны: 1) усиление холостой волны a_1 , учитывающей за счет граничных условий информацию о сигнале, этот процесс занимает интервал $0 < x \leq 1/\gamma$; 2) сильное нарастание холостой («гетеродинной») волны a_1 , эта стадия занимает

интервал $1/\gamma \leq x \leq x_0 = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{\delta}$ и завершается переносом большого

инкремента γ на сигнальную волну; 3) усиление волны a_3 с инкрементом γ в $k \gg 1$ раз на расстоянии $x = \frac{1}{\gamma} \ln k/\delta$ (при $x < x_0$ эта волна

практически не усиливается и равна $a_3(0)$). Таким образом, кажущийся на первый взгляд парадоксальным экспериментальный результат о резком нарастании вдали от границы неравновесной среды слабой волны, имеющей малый параметрический инкремент, может иметь тривиальное объяснение — вначале идет подспудный процесс переноса на эту волну большого инкремента другой волны, а затем резкий рост, по существу не имеющий отношения к параметрическому усилению (см. рис. 18 [33]).

В реальной неравновесной среде рассмотренный процесс ограничивается двумя факторами — ростом флуктуаций на частоте холостой волны и ограничением линейного роста этой волны за счет нелинейных эффектов, связанных со стремлением неравновесной среды перейти в равновесное состояние. В большинстве случаев наиболее опасным является первое, нелинейное же ограничение амплитуды линейно неустойчивой волны, как правило, не мешает дальнейшему усилению слабой сигнальной волны, и процесс будет продолжаться, пока эти волны не станут одного порядка. Такой процесс, в частности, подробно исследован применительно к взаимодействию волн в пучке с плазмой [33].

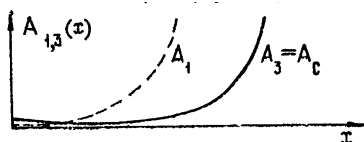


Рис. 18. Резкий рост сигнальной волны вдали от границы, обусловленный эффектом супергетеродинаического усиления.

3. Стабилизация линейной неустойчивости за счет передачи энергии затухающим волнам

Такой процесс, представляющий наибольший интерес для неравновесных сред со спектрально узкой областью неустойчивости (например, параметрически возбуждаемые среды; пучок в плазме), описывается системой (II.1) при $\sigma_{1,2}\sigma_3 < 0$ и $\nu_i\nu_j < 0$. В приближении хаотических фаз волн можно записать уравнения для интенсивностей (считаем $\sigma_{1,2} = -\sigma_3$; $\nabla = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{N}_{1,2} &= \sigma^2 N_1 N_2 N_3 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_3} \right) - \nu_{1,2} N_{1,2}, \\ \dot{N}_3 &= -\sigma^2 N_1 N_2 N_3 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_3} \right) - \nu_3 N_3. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Из (II.1) и (II.5) в данном случае непосредственно следует, что если нарастает одна из волн ($\nu_i < 0$), то ограничение неустойчивости возможно, только когда процесс распадный — стабилизация одноволновой неустойчивости на частоте $\omega_{1,2} < \omega_3$ невозможна, поскольку при $t \rightarrow \infty$ исчезают квазичастицы $\omega_{2,1}$ и процесс преобразования энергии вверх по спектру прекращается. Столь же очевидно, что при нарастании обеих низкочастотных волн с динамическими фазами стабилизация неустойчивости за счет затухающей волны ω_3 возможна только при равных фактических инкрементах этих волн — в единицу времени должно рождаться одинаковое число квантов ω_1 и ω_2 — в противном случае тем квантам, которых в единицу времени рождается больше, будет не с чем сливаться.

При взаимодействии волн с динамическими или со случайными фазами характер ограничения неустойчивости оказывается различным. Когда фазы случайны, то, если стабилизация возможна, устанавливается режим с постоянным уровнем энергии в каждой из волн:

$$N_{1,2}^0 = \frac{|\nu_3| |\nu_{2,1}|}{\sigma^2 (\nu_1 + \nu_2 - |\nu_3|)}, \quad N_3^0 = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sigma^2 (\nu_1 + \nu_2 - |\nu_3|)} \quad (\text{II.6})$$

для процесса распада (см. рис. 19 а),

$$N_{1,2}^0 = \frac{\nu_3 | \nu_{2,1} |}{\sigma^2 (\nu_3 - | \nu_1 | - | \nu_2 |)}, \quad N_3^0 = \frac{| \nu_1 \nu_2 |}{\sigma^2 (\nu_3 - | \nu_1 | - | \nu_2 |)} \quad (II.7)$$

для процесса слияния (см. рис. 19 б, $\nu_{1,2} < 0$, $\nu_3 > 0$).

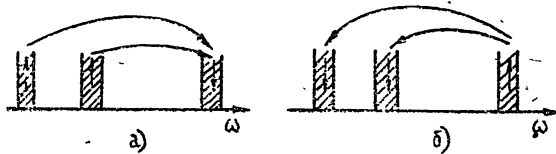


Рис. 19. Стабилизация неустойчивости:
а) при распаде, б) при слиянии.

Стабилизация возможна, когда суммарное затухание превышает суммарный инкремент $\nu_1 + \nu_2 > | \nu_3 |$, либо $\nu_3 > | \nu_1 | + | \nu_2 |$. Эти же условия гарантируют, как легко проверить, и устойчивость режима стабилизации при взаимодействии волн со случайными фазами.

При взаимодействии волн с хорошо определенными фазами установление в результате стабилизации неустойчивости режима с постоянным распределением энергии между волнами невозможно — стационарное состояние в системе (II.1) при $\sigma_{1,2} \sigma_3 < 0$, $\nabla = 0$ и $\nu_{1,2} > 0$, $\nu_3 < 0$ или $\nu_{1,2} < 0$, $\nu_3 > 0$ существует, но всегда неустойчиво. Исключение составляет лишь тривиальный случай генерации второй гармоники. Однако оказывается возможным динамический режим стабилизации — интенсивности взаимодействующих волн ограничены, но меняются во времени. При этом оказывается модулированным поток энергии из области неустойчивости в область стока. На примере распадного взаимодействия рассмотрим этот процесс подробнее*.

4. Распадный триплет. Возникновение стохастичности

Подчеркнем сразу, что если классическая задача о консервативном триплете ($\nu_{1,2,3} = 0$) служит элементарным «блоком» теории волн в равновесных средах, то исследование неконсервативного триплета является одной из основных задач теории волновых взаимодействий в неравновесных средах.

Итак, рассмотрим динамику волнового триплета, в котором высокочастотная (ВЧ) мода обладает линейным инкрементом γ , а низкочастотные (НЧ) — затухают [34]:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{1,2} &= -\sigma A_3 A_{2,1} \sin \Phi - \nu_{1,2} A_{1,2}, \\ \dot{A}_3 &= \sigma A_1 A_2 \sin \Phi + \tilde{\gamma} A_3, \end{aligned} \quad (II.8)$$

$$\dot{\Phi} = \sigma (A_1 A_2 A_3)^{-1} (A_1^2 A_3^2 + A_2^2 A_3^2 - A_1^2 A_2^2) \cos \Phi - \Delta \omega,$$

где $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$ — разность фаз волн.

а) *Усреднение по эллиптическим функциям.* Прежде всего рассмотрим случай достаточно больших начальных энергий, когда нелинейные члены в (II.8) существенно преобладают над линейными**. Тогда решение нашей задачи можно считать близким к решению консервативного триплета,

* Можно показать, что стабилизация двух нарастающих волн с динамическими фазами за счет затухающих высокочастотных возможна только, если число взаимодействующих волн больше трех.

** Эти результаты получены совместно с Е. Н. Пелиновским.

$$\begin{aligned} A_1 &= s \Omega \operatorname{cn}(\Omega t, s), \\ A_2 &= -\Omega \operatorname{dn}(\Omega t, s), \\ A_3 &= s \Omega \operatorname{sn}(\Omega t, s) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

($\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ — эллиптические функции Якоби, s и Ω — произвольные параметры), и с помощью усреднения по эллиптическим функциям определить эволюцию параметров решения — модуля s и частоты Ω . Проще всего это сделать, воспользовавшись энергетическими соотношениями, следующими из (II.8):

$$\frac{d}{dt}(A_1^2 - A_2^2) = 2(\nu_2 A_2^2 - \nu_1 A_1^2); \quad (\text{II.10a})$$

$$\frac{d}{dt}(A_3^2 + A_1^2) = 2(\gamma A_3^2 - \nu_1 A_1^2). \quad (\text{II.10б})$$

Усредняя эти уравнения по периоду эллиптических функций, получаем следующие уравнения для $s(t)$ и $\Omega(t)$:

$$s \frac{ds}{dt} = (\gamma + \nu_1) F(s, q); \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\gamma + \nu_2) G(p, s) \Omega, \quad (\text{II.12})$$

$$F(s, q) = 1 - s^2 - \frac{E(s)}{K(s)} + qs^2 \frac{E(s)}{K(s)},$$

$$G(s, p) = p - \frac{E(s)}{K(s)}, \quad q = \frac{\gamma + \nu_2}{\gamma + \nu_1}, \quad p = \frac{\gamma}{\gamma + \nu_2}.$$

Здесь E и K — полные эллиптические интегралы с модулем s . Эти уравнения справедливы, если $A_1 < A_2$, в обратном случае ν_1 и ν_2 просто меняются местами.

Уравнение (II.11) в общем случае имеет три состояния равновесия, соответствующие обращению в нуль функции $F(q, s)$: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ и $s_3 = s_c(q)$, где s_0 — корень уравнения $F(q, s_0) = 0$ — существует лишь при $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$. Значения $q \geq 1$ соответствуют случаю $\nu_1 \leq \nu_2$, а $q \leq 1/2$ — $\nu_1 \leq \gamma + 2\nu_2$. При $q \leq 1/2$ устойчиво лишь состояние $s = 0$, соответствующее в данном приближении затуханию амплитуд всех волн. В реальной ситуации такое затухание будет продолжаться, конечно, не до нуля, а лишь до такого уровня, когда нелинейные слагаемые в (II.8) станут порядка линейных и метод усреднения будет, очевидно, неприменим. При $q \geq 1$ устойчиво состояние $s = 1$, соответствующее решению (II.9) в виде одиночного импульса (солитона) огибающих НЧ мод и импульса переброса ВЧ моды. Очевидно, что в области малых полей основанный на усреднении подход опять неприменим, и получающиеся в этом важном случае решения необходимо исследовать как-то иначе (см. п. б) и в)). При промежуточных значениях $\frac{1}{2} < q < 1$ устойчивым оказы-

вается состояние $s = s_0(q)$, что соответствует установлению вполне определенной формы периодического изменения огибающих (которая, конечно, зависит от соотношения между $\nu_{1,2}$ и γ). Как следует из (II.12), амплитуда биений при этом может и не стремиться к стационарному состоянию, а медленно нарастать (при этом в рамках рассматриваемых

уравнений (II.8) стабилизация отсутствует), либо затухать (при этом, как уже говорилось, не годится наш «усреднительский» подход). Имеются, однако, специфические соотношения между $\nu_{1,2}$ и γ , когда $G(p, s_0(q))$ в (II.12) обращается в нуль, тогда существуют стационарные периодические режимы изменения огибающих, амплитуда биений которых зависит от начальных условий.

Таким образом, из приведенного анализа следует, что несмотря на наличие малых неконсервативных слагаемых в (II.8) кажущийся здесь естественным метод усреднения годится лишь в отдельных экзотических ситуациях, либо для анализа переходных процессов на конечных временных интервалах.

б) *Качественный анализ. Точный синхронизм.* Откажемся теперь от предположения о близости закона изменения амплитуд и фаз взаимодействующих мод к (II.9) и используем методы качественной теории дифференциальных уравнений. Анализ системы (II.8) существенно упрощается при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, поскольку при этом из (II.10 а) следует

$$(A_1^2 - A_2^2) = \text{const } e^{-\nu t} \rightarrow 0 \quad (\text{II.13})$$

и интенсивности НЧ мод, начиная с некоторого времени, можно считать равными — $A_1^2 = A_2^2 = A^2$. Воспользовавшись далее заменой:

$$X = \frac{\sigma}{\nu} A_3 \sin \Phi, \quad Y = \frac{\sigma}{\nu} A_3 \cos \Phi, \quad Z = \frac{\sigma^2}{\nu^2} A^2, \quad (\text{II.14})$$

$$\tau = \nu t, \quad \delta = \Delta\omega/\nu, \quad \gamma = \tilde{\gamma}/\nu,$$

вместо (II.8) будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Z + \delta Y - 2Y^2 + \gamma X, \\ \dot{Y} &= -\delta X + 2XY + \delta Y, \\ \dot{Z} &= -2Z(X + 1). \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Для анализа этой системы используем метод фазового пространства. Видно, что его структура определяется в данном случае двумя параметрами — инкрементом ВЧ волны γ и расстройкой от точного синхронизма δ . Стабилизация ВЧ моды затухающими низкочастотными, очевидно, возможна лишь при достаточно малом γ^* . Полагая далее $\gamma \ll 1$, будем рассматривать его в качестве малого параметра. При этом фазовое пространство разделяется на области быстрых и медленных движений. Последние расположены вблизи прямой $Y = \delta/2$, $Z = 0$ и определяются неравенствами

$$|Z| \leq \gamma |X|, \quad |2Y^2 - \delta Y| \leq \gamma |X|. \quad (\text{II.16})$$

Система (II.11) имеет лишь два состояния равновесия, оба они неустойчивы — типа «седло—фокус». Одно расположено в начале координат (при $\delta = 0$ оно переходит в «седло—узел»), другое, с координатами $X = -1$, $Y = \delta/(2 - \gamma)$, $Z = \gamma [1 + \delta^2/(2 - \gamma)^2]$, — на границе быстрых и медленных движений.

В консервативном случае трехмодовое взаимодействие представляет собой периодическое чередование процессов слияния и распада (см. рис. 20). Что изменяется, когда для сливающихся НЧ мод существ-

* Если воспользоваться аналогией с квазичастицами, то должно быть $\gamma < 2$, в численном эксперименте ограничение неустойчивости наблюдалось при $\gamma < 1/6$ (см. ниже).

венны потери? Очевидно возрастает время между окончанием процесса слияния и началом распада — диссипация слабых НЧ мод тормозит проявление распадного инкремента при малых амплитудах НЧ мод. При наличии небольшого инкремента ВЧ мода в это время будет экспоненциально расти. Таким образом, при малом γ осциллограммы амплитуд НЧ мод превратятся в последовательность удаленных друг от друга пиков (солитонов), а ВЧ моды — в пилу с экспериментальными зубчиками (см. рис. 21).

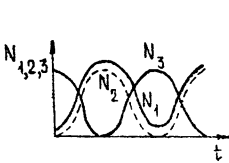


Рис. 20.

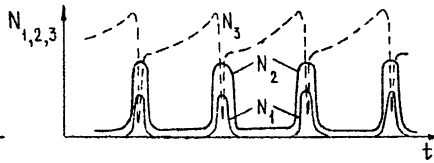


Рис. 21.

Рис. 20. Обмен энергией между модами при трехволновом взаимодействии в равновесной среде.

Рис. 21. Предполагаемые осциллограммы интенсивностей затухающих (НЧ) и усиливаемой (ВЧ) мод при резонансном взаимодействии.

Точный синхронизм ($\delta = 0$). В фазовом пространстве системы (II.11) при $\delta = 0$ имеются две интегральные поверхности (траектории их не пересекают) — $Z = 0$ и $Y = 0$, на пересечение которых насажены конусы медленных движений (см. рис. 22). Фазовые портреты этих поверхностей приведены на рис. 23 а и 23 б. На плоскости $Z = 0$ область медленных движений ограничена параболой $\gamma |X| = 2 Y^2$, при $X > 0$ она является изоклиной горизонтальных касательных. Вне этой области влияние малого инкремента несущественно и траектории почти не отличаются от окружностей $X^2 + Y^2 = \text{const}$, на которых сохраняется энергия. Движения на этой плоскости асимптотически устойчивы по отношению к возмущениям Z в области $X > -1$.

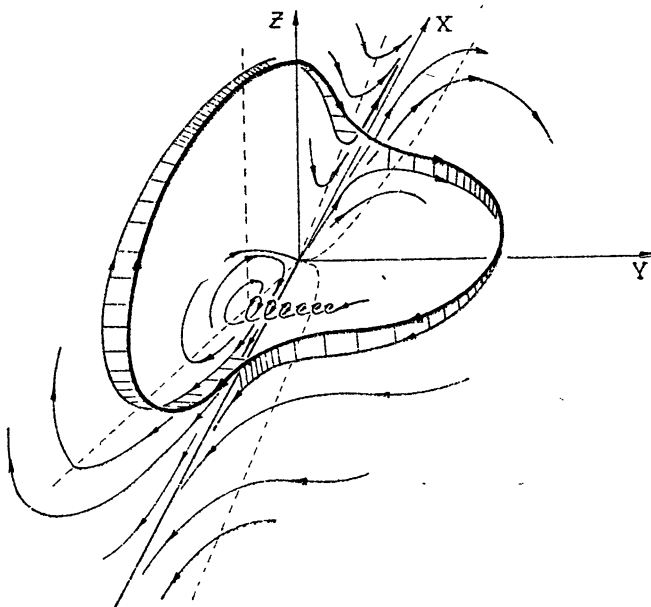


Рис. 22. Фазовое пространство системы (II.11).

Движения на интегральной плоскости $Y = 0$ асимптотически устойчивы по отношению к возмущениям Y в области $X < -\gamma/2$. На этой плоскости область медленных движений ограничена прямыми $Z = \pm \gamma X$, при $X < 0$ — это изоклина вертикальных касательных (см. рис. 23 б). На этих интегральных поверхностях $Y = 0$ и $Z = 0$ траектории ведут себя очень похоже — при $t \rightarrow \infty$ они асимптотически прижимаются к оси X .

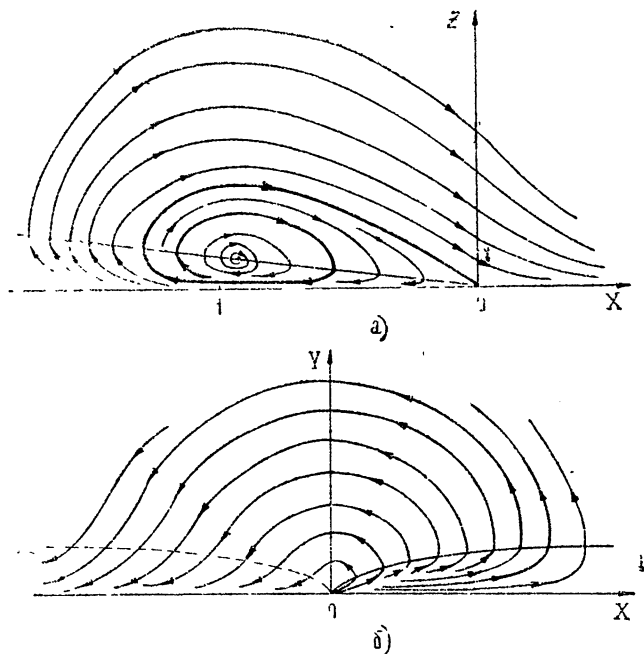


Рис. 23. Фазовые портреты интегральных плоскостей при $\delta = 0$: а) $Z = 0$, б) $Y = 0$.

Представим теперь полностью характер движений, которым соответствуют траектории, не слишком удаляющиеся от плоскости $Z = 0$ и $Y = 0$. Прижимаясь к плоскости $Z = 0$ в области $X > -1$, изображающая точка движется по окружности, пока не попадет в область медленных движений (см. рис. 23 а), где амплитуда ВЧ моды экспоненциально растет. После выхода из области медленных движений она, оставаясь вблизи плоскости $Y = 0$, поднимается вверх и уходит в сторону увеличения X — стадия распада, после чего пересекает плоскость $X = 0$ и опускается к плоскости $Z = 0$ — слияние. Попадая здесь в область медленных движений, точка снова движется вблизи $Z = 0$ (X растет), затем переходит на окружность $X^2 + Y^2 = \text{const}$ и т. д.*

Для определения характера рассматриваемых движений выясним, каким образом точки узкой вертикальной полосы $0 < Y_1 < Y < Y_2 \ll 1$ на плоскости $X = 0$ отображаются фазовыми траекториями при $X > 0$ в точки горизонтальной полосы $0 < Z_1 < Z < Z_2 \ll 1$ этой же плоскости, а затем — как траекториями при $X < 0$ они снова отображаются в точки

* При больших начальных энергиях возможны и такие процессы, когда точка обходит области медленных движений и, отрываясь от окружности при $X < -1$, попадает сразу в область $Z > \gamma |X|$ при $X < 0$ и малых Y . Однако при малых Y эти движения должны быть неустойчивы — потери энергии ВЧ моды на этапе слияния и распада не компенсируются усилением ВЧ моды.

вертикальной полосы. Это даст зависимость параметров движения в конце периода от их значений в начале. Используя далее итерационную процедуру, можно будет установить такие качественные особенности процесса, как существование периодических режимов и возникновение стохастичности.

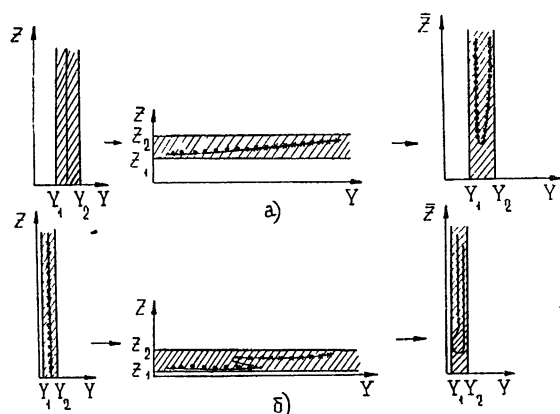


Рис. 24. Качественный вид отображения точек вертикальной полосы плоскости $X = 0$ в горизонтальную и горизонтальной в вертикальную.

Качественный вид отображения вертикальной полосы в горизонтальную, а затем снова в вертикальную приведен на рис. 24. Здесь изображены последовательные преобразования некоторой линии в вертикальной полосе для двух разных случаев — в зависимости от близости вертикальной полосы к оси Z .

Поясним картину отображения для более сложного случая, изображенного на рис. 24б. Из (II.11) следует, что чем выше по Z траектория пересекает вертикальную полосу, тем дальше от оси X опускается она на плоскость $Z = 0$. Траектория, которая начинается на плоскости $X \doteq 0$ при достаточно больших Z , опустившись на плоскость $Z = 0$, не попадает в область медленных движений, а движется сразу по окружности $X^2 + Y^2 = R^2$. Ясно, что в окрестности этой же окружности приходит и другая траектория, которая, пройдя сквозь вертикальную полосу при малых Z , опускается на плоскость $Z = 0$ в области медленных движений и выходит оттуда (пересекаясь с параболой (см. рис. 23а)) при $X^2 \approx R^2$. Таким образом, траектории, пересекающие вертикальную полосу вдалеке друг от друга, при пересечении горизонтальной полосы оказываются рядом, и наоборот. Эти факты и объясняют возникновение «подков» в картине отображения.

Аналогичное проведенному рассмотрению применимо и по отношению к траекториям в области $X < 0$, уходящим от плоскости $Z = 0$ и прижимающимся к плоскости $Y = 0$, только здесь роль параболы играет прямая $Z = -\gamma X$, т. е. характер отображения горизонтальной полосы в вертикальную подобен предыдущему. Из этого следует, что в полной картине отображения может возникнуть двойная подкова. При многократном прохождении через плоскость $X = 0$, что соответствует многократному применению отображения, картина движения может стать очень сложной и запутанной.

Полагая, что рассматриваемые движения устойчивы, исследуем их структуру более детально. Для этого опробуем модель, отождествив точки с одинаковым Z в вертикальной полосе и точки с одинаковым Y — в горизонтальной. При этом вместо отображения полосы в полосу получится отображение прямой Z в себя, т. е. зависимость последующих точек \bar{Z} от начальных Z : $\bar{Z}(Z)$ (см. рис. 25). При различном положении кривой $\bar{Z}(Z)$ относительно биссектрисы $\bar{Z} = Z$, существуют либо единственный устойчивый однопериодический режим (см. рис. 25а),

либо множество режимов с модуляцией — многопериодических, которым на плоскости \bar{Z} , Z соответствуют замкнутые циклы (см. рис. 25 б)*.

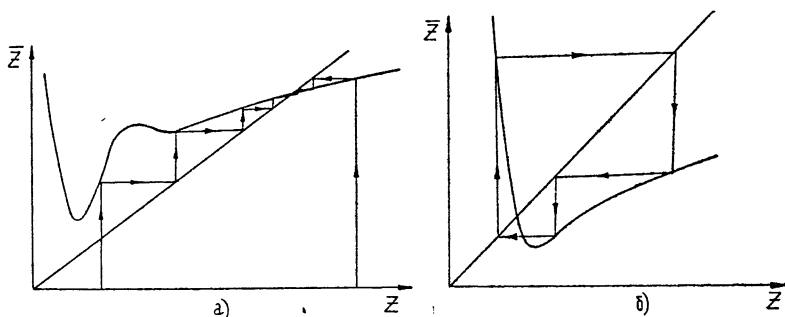


Рис. 25. Точечные отображения прямой Z в себя:
 а) начальные условия на плоскости $X = 0$ лежат в полосе $0 < Y < Y_1$,
 б) в полосе $Y_1 < Y < Y_2 \ll 1$.

Далее, воспользовавшись известными результатами формальной теории точечных отображений [35, 36], можно утверждать, что если существует периодическое движение с нечетным числом периодов (как, например, изображенное на рис. 25 б трехпериодическое движение), то независимо от его устойчивости в системе существует еще бесконечное (счетное) множество неустойчивых многопериодических движений и конечное, или счетное число устойчивых. Таким образом, действительно, структура рассматриваемых движений может оказаться чрезвычайно сложной.

в) *Влияние расстройки от точного синхронизма.*** В консервативном приплете расстройка, как известно, уменьшает степень обмена энергией между модами (при тех же начальных условиях). В нашем — неконсервативном — случае происходит то же самое, т. е. уменьшаются максимально достижимые значения Z при $X = -1$. Последнее обстоятельство означает, что возможны ситуации, когда линия, переносимая в процессе отображения траекториями с плоскости $X = 0$ в окрестность плоскости $Y = 0$ при $X < 0$ «ложится» на эту плоскость вблизи состояния равновесия $X = -1$, $Z = \gamma$. Это значит, что рассматриваемое отображение разделится сепаратрисой, входящей в нулевое состояние

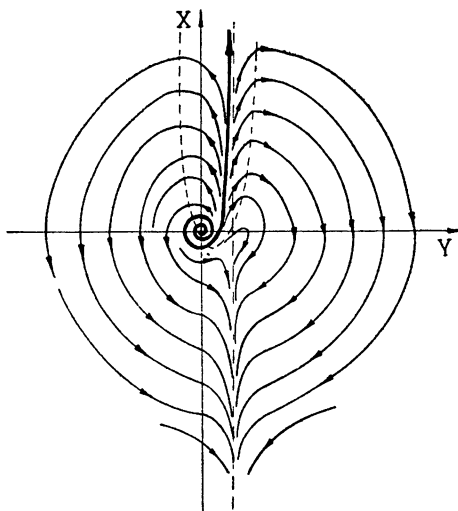


Рис. 26. Фазовый портрет интегральной плоскости $Z = 0$ при $\delta > 0$.

* Кривая $\bar{Z}(Z)$ деформируется, опускается или поднимается в зависимости от близости сжатой в линию вертикальной полосы к плоскости $Y = 0$ (или горизонтальной к $Z = 0$), т. е. вид этого «огрубленного» отображения зависит от начальных условий на плоскости $X = 0$. Это есть «плата» за сокращение размерности отображения.

** При введении расстройки фазовое пространство системы (II.15) становится грубым — интегральная поверхность $Y = 0$ разрушается, а состояние равновесия в начале координат из седла — узел превращается в седло — фокус (см. рис. 26).

равновесия на два класса движений. Траектории, входящие в окрестность плоскости $Y=0$, вне раскручивающейся сепаратрисы (см. рис. 22) пересекают плоскость $X=0$ и двигаются дальше в сторону роста X . Те же траектории, которые попадают внутрь сепаратрисы, поворачивают в сторону уменьшения X , прежде чем они пересекутся с плоскостью $X=0$. Они пересекут эту плоскость, но лишь после одного или нескольких оборотов в области $X < 0$ и уже при больших Z . Соответствующая описанной ситуации картина «огрубленного» отображения прямой в прямую приведена на рис. 27. Разрывы на кривой $\bar{Z}(Z)$ в области малых Z как раз соответствуют разделению движений сепаратрисой. Для динамических систем, описываемых подобным

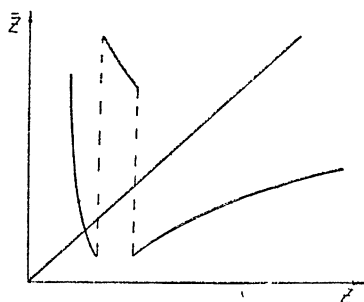


Рис. 27. Разрывное отображение прямой Z в себя.

кусочно-гладким преобразованием, при некоторых ограничениях [37] можно доказать очень сильное утверждение — о существовании в системе перемешивания.

Таким образом, проведенное рассмотрение показывает, что если режим стабилизации неустойчивой моды за счет распада на затухающие возможен, то при наличии расстройки он может быть стохастическим (это в чисто динамической системе!).

5. Распадный триплет. Машинные эксперименты

Проведенный в [34, 38] детальный численный эксперимент с системой (II.8) подтвердил все основные результаты качественного анализа. Сразу оговоримся, что динамические процессы наблюдались только при отсутствии расстройки — $\delta = 0$, а стохастические, наоборот, — только при $\delta \neq 0$. Было получено порядка 100 реализаций (из них 2/3 при $\delta \neq 0$) при типичных значениях параметров — $\gamma = 0,15; 0,1; 0,01$, $\delta = 0; 0,001; 0,01; 0,1$ и начальных условиях $A_{1,2,3} = 5 \div 10$, $\Phi(0) = 0 \div 2\pi$.

а) В резонансном случае — $\delta = 0$ в зависимости от начальных энергий наблюдались два вида движений — однопериодические (см. рис. 28 а, б), для них максимальные значения A_3 были $\sim 13 \div 18$, и многопериодические (см. рис. 28 в). Причем устойчиво наблюдались лишь 3- и 4-периодические движения, а другие, например, 5- и 6-периодические, имели малую область устойчивости и время от времени переходили друг в друга. Амплитуда многопериодических движений была заметно меньше — $A_{3 \max} \sim 5 \div 8$, а период в 1,5—3 раза больше, чем однопериодических. Стабилизация неустойчивой моды $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ была возможна лишь при достаточно большом относительном затухании и малом инкременте, а именно, при $\gamma < 1/6$. При $\gamma \sim 1/6$ форма колебаний приближенно описывалась эллиптическими функциями (см. рис. 28 а), а при уменьшении γ становилась все более релаксационной — уже при $\gamma = 0,1$ движения имели вид разрывных экспонент для A_3 и узких солитонов для A_1 и A_2 (см. рис. 28 б), т. е. наблюдались ярко выраженные быстрые и медленные движения. Период колебаний был $\sim 1 \div 1,5$, а время быстрых движений $< 0,1$ (за исключением таких интервалов времени фаза Φ оставалась равной приблизительно $\pm \pi/2$, независимо от значений $\Phi(0)$).

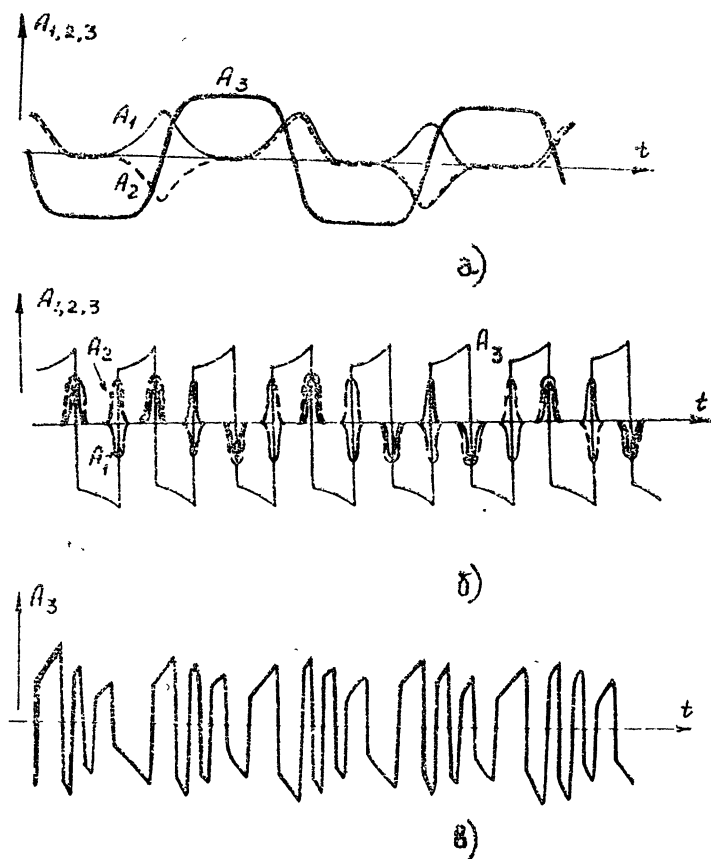


Рис. 28. Обмен энергией между модами в резонансном случае:

- а) однопериодический режим при $\gamma = 0,15$,
- б) однопериодический режим при $\gamma = 0,1$,
- в) трехпериодический режим при $\gamma = 0,1$.

б) В нерезонансном случае, когда условия синхронизма между модами были выполнены неточно ($\delta \neq 0$), все наблюдавшиеся движения были стохастическими. Их свойства, в отличие от динамических процессов, существенно зависели от начальных условий по Φ . При $\delta > 0$, $A_{1,2,3} \sim 5 \div 10$ и $\Phi = 0 \div 2\pi$ были обнаружены три качественно различные группы стохастических режимов — их автокорреляционные функции приведены на рис. 29 а, 30 а и 31 а. На тех же рисунках даны соответствующие этим режимам функции распределения интервалов между скачками по их обратной длительности — $f(1/T)$ и осциллограммы разности фаз — $\Phi = \Phi(t)$. Амплитудные реализации, соответствующие различным стохастическим режимам, качественно были подобны, изменялись лишь максимальные значения амплитуд. Одна из типичных реализаций — зависимость амплитуды неустойчивой моды от времени — приведена на рис. 32. Области начальных значений $\Phi(0)$, при которых наблюдались эти разные режимы (назовем их условно «полная стохастичность» — рис. 29, «частичная стохастичность» — рис. 30 и «переходная стохастичность» — рис. 31), изображены на плоскости X, Y — см. рис. 33. Добавим, что средний период — время медленных движений всех стохастических процессов — был на порядок больше времени медленных процессов в динамическом случае.

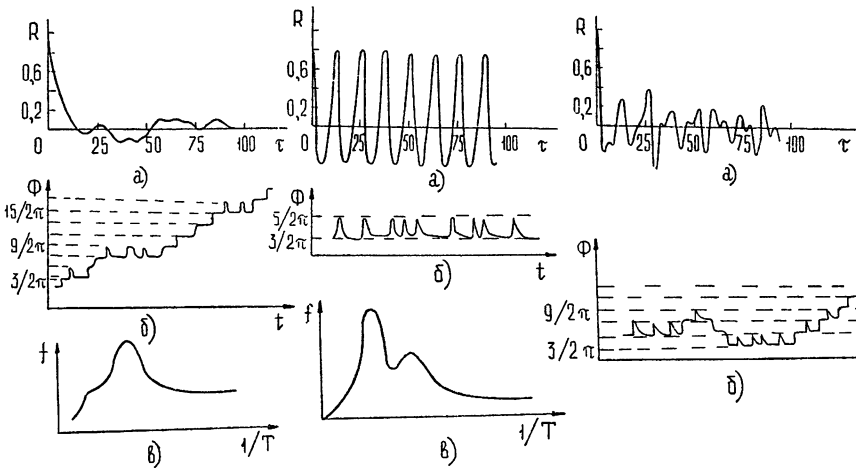


Рис. 29.

Рис. 30.

Рис. 31.

Рис. 29. Характеристики режима полной стохастичности:
 а) автокорреляционная функция реализации $A_3(t)$,
 б) зависимость $\Phi(t)$ — видно накопление Φ ,
 в) функция распределения интервалов между скачками по их обратной длительности — $f(1/T)$.

Рис. 30. Характеристики режима частичной стохастичности:

а) автокорреляционная функция,
 б) осциллограмма $\Phi(t)$ — накопления Φ нет,
 в) функция распределения.

Рис. 31. Переходная стохастичность:

а) автокорреляционная функция,
 б) осциллограмма $\Phi(t)$.

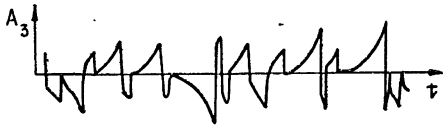


Рис. 32. Осциллограмма амплитуды неустойчивой моды в режиме стабилизации при $\delta = 0,01$.

Обсудим теперь результаты эксперимента с точки зрения изложенной выше теории. Напомним, что стохастические режимы наблюдались лишь при введении расстройки δ , причем даже при малом δ интенсивность этих движений — Z_{\max} , или $(X^2 + Y^2)_{\max}$ была примерно на порядок меньше, чем при $\delta = 0$. Таким образом, использованное при качественном анализе утверждение о том, что расстройка снижает уровень максимально достижимых Z , на основании которого было получено разрывное отображение $\bar{Z}(Z)$, подтвердилось.

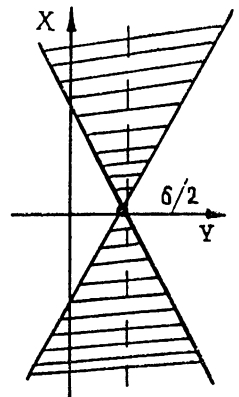


Рис. 33. Области начальных условий на плоскости $Z = 0$, которым соответствуют различные стохастические режимы.

Как следует из качественного анализа, в системе (3) при $\delta > 0$ возможны неупорядоченные движения двух видов. Одному из них

соответствуют траектории в правом полупространстве — для них Y всегда больше $\delta/2$, и накопление разности фаз Φ при периодическом или квазипериодическом движении невозможно. Другому виду движений соответствуют траектории в левом полупространстве $-Y < \delta/2$, для этих движений накопление разности фаз уже невозможно, поскольку траектории могут заходить из области $Y < 0$ в слой $0 < Y < \delta/2$ и, следовательно, охватывать ось Z .

Нетрудно убедиться, что наблюдавшийся в эксперименте режим «частичной» стохастичности как раз и отвечает «правым» неупорядоченным движениям и тем «левым», траектории которых не заходят в слой $0 < Y < \delta/2$. Действительно, на медленном этапе «правого» движения разность фаз Φ близка к $\pm\pi/2$ либо $\pm(3/2)\pi$, затем быстро меняется на π — движение вблизи плоскости $Y = \delta/2 + 0$, после чего вновь принимает прежнее значение — движение вблизи плоскости $Z = 0$ вне области медленных движений. Аналогично и для «левых» движений, лежащих в полупространстве $Y < 0$. Именно такая картина изменения во времени и наблюдалась экспериментально в режиме «частичной» стохастичности — см. рис. 30 б.

В процессе же «левого» движения, при котором изображающая точка из полупространства $Y < 0$ входит в слой $0 < Y < \delta/2$, накопление уже невозможно — Φ в процессе быстрого движения в этом слое меняется на π , затем траектория вновь выходит в левое полупространство и движется вблизи окружности, и Φ увеличивается еще на π . Этим и объясняется наблюдавшееся в режиме «полной» стохастичности накопление Φ — см. рис. 29 б.

Подчеркнем, что свойства режимов «полной» и «частичной» стохастичности, например вид автокорреляционной функции, не зависели в широких пределах от точности счета. Это доказывает динамическое происхождение такой стохастичности в машинном эксперименте. От точности счета, т. е. фактически от уровня флуктуаций, в небольших пределах зависела лишь «толщина» границы, разделяющей области осуществления этих режимов (см. рис. 33). На самой границе наблюдался режим стохастичности, представленный на рис. 31. Его свойства зависели от точности счета, и он, очевидно, не характеризует собственную стохастичность динамической системы.

Проведенные в [34] эксперименты по вырожденному взаимодействию устойчивой ω и неустойчивой ($2\omega + \Delta\omega$) мод (такое взаимодействие также описывается системой (II.11)) при неточном синхронизме ($\omega \gg \Delta\omega > 0$) полностью совпадают с изложенными результатами и тем самым подтверждают правильность выбранной модели, т. е. справедливость замены системы (II.8) системой (II.11) при качественном анализе.

Заключая данный раздел, еще раз обратим внимание на то, что возникновение стохастического поведения в нелинейной неравновесной среде не обязательно связано с большим числом взаимодействий. Неупорядоченное поведение, требующее для своего описания статистических методов*, может возникнуть уже в системе трех и даже двух связанных волн (мод).

6. Резонансное взаимодействие ненарастающих мод с «автоколебательной»

В связи с анализом трехволновых процессов в неравновесной среде с «равновесной» ($\sigma_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3}^*$, $\sigma_{1,2}\sigma_3 < 0$) нелинейностью стоит

* Для консервативных систем возникновение стохастичности при числе степеней свободы $n = 1,5$ хорошо известно [39].

упомянуть и о взаимодействии усиливаемой и ненарастающей волн в тех случаях, когда стабилизация неустойчивости осуществляется за счет нелинейной вязкости, которая вступает в игру при больших амплитудах линейно усиливаемой волны*. Такая вязкость, в частности, может быть следствием нелинейного искажения растущей синусоидальной волны за счет порождения ею затухающих гармоник. В приближении «комбинационного рассеяния» — амплитуды высших гармоник следят за амплитудой первой, для нее получается уравнение — $\dot{a} + \nu a' = \gamma a - \alpha a |a|^2$. Взаимодействие такой «автоколебательной» моды с двумя другими в среде с квадратичной нелинейностью описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + \nu_1 a_1' &= -\alpha_3 a_2^* + \gamma a_1 - \alpha a_1 |a_1|^2, \\ \dot{a}_2 + \nu_2 a_2' &= -\alpha_3 a_1^*, \quad \dot{a}_3 + \nu_3 a_3' = \alpha_1 a_2. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Как показано в [40], поток энергии из неустойчивой моды a_1 в a_2 и a_3 оказывается модулированным (во времени — для пространственно однородных полей и в пространстве — для $e^{i\omega t}$ полей при взаимодействии вдоль x). При этом амплитуды мод осциллируют, а разность фаз скачет. Здесь ситуация подобна наблюдаемой в резонансном триплете для неустойчивой и затухающих мод при полном синхронизме (см. пп. 4 и 5).

Заметим, что подобный процесс реализуется в параметрических генераторах с внутренней накачкой [41], когда волна накачки генерируется непосредственно в резонаторе, где происходит параметрическое преобразование.

III. ВЗРЫВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

Мы уже говорили, что в неравновесной среде резонансное взаимодействие волн может привести к более быстрой, чем линейная, взрывной неустойчивости, когда амплитуды всех волн одновременно растут и, при обычно используемых идеализациях, обращаются в бесконечность за конечное время (см. п. 1 разд. II). Формально «взрыв» гарантируется completeness коэффициентов нелинейного взаимодействия α , если $\max\{\theta_i\} - \min\{\theta_i\} < \pi$ (см. (II.2)). Физические же механизмы взрыва могут быть довольно разнообразны и зависят от природы волн и характера неравновесности среды.

1. Взаимодействие волн разных знаков энергий. Пучок в плазме

Прежде всего обратим внимание на кажущуюся очевидной несимметрию условий резонанса частот и волновых чисел — условий синхронизма. Известно, что в равновесных средах передача энергии возможна лишь от высокочастотной волны низкочастотной, но не наоборот, в то же время никаких подобных ограничений на квазиимпульсы волн нет. Например, распадаться может волна и с очень малым и даже нулевым (пространственное однородное поле) импульсом, образуя при этом волны с как угодно большими, но противоположно направленными импульсами. Ясно, что эта несимметрия связана с физической реальностью отрицательных волновых чисел (им соответствуют встречные волны) и кажущейся нереальностью отрицательных частот. Если бы в какой-либо среде волны с отрицательными частотами имели физический смысл и реально существовали, то в такой среде справедливые

* Подобная стабилизация неустойчивой моды наблюдается, например, для волн Толлмина—Шлихтинга в некоторых гидродинамических течениях. Нарастающая волна изменяет профиль основного течения, вследствие чего инкремент уменьшается.

для равновесных сред ограничения на характер нелинейных взаимодействий, оказались бы нарушенными.

Поскольку частота соответствует энергии квазичастиц, можно в дальнейшем считать все частоты положительными, а волнам отрицательной частоты приписать отрицательный знак энергии. По физическому смыслу волны отрицательной энергии—это такие волны, с ростом амплитуды которых суммарная энергия системы «среда—волна» уменьшается. Такие волны могут существовать в неоднородных средах [42], среде из инверсно заселенных частиц [43]. Отрицательной энергией обладают также продольные электростатические волны, спектр которых расположен в области аномальной дисперсии среды $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} < 0$, для них энер-

$$\text{гия } W = \frac{\omega}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \langle E^2 \rangle < 0.$$

Поясним смысл понятия «отрицательная энергия» на примерс волн пространственного заряда в движущемся электронном пучке, который описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + V_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{e}{m} E &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + N \frac{\partial u}{\partial x} + V_0 \frac{\partial n}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} - 4\pi e(n - N) &= 0, \\ \omega_0^2 &= \frac{4\pi N e^2}{m}. \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Дисперсионное уравнение такой среды

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega - kV_0)^2}. \quad (\text{III.2})$$

Видно, что на ветви $\omega = kV_0 - \omega_0$, которая соответствует медленной волне, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = \frac{2\omega_0^2}{(\omega - kV_0)^3} = -2/\omega_0 < 0$, т. е. энергия медленной волны отрицательна.

Это связано вот с чем. Согласно (III.1) в быстрой волне ($\omega = kV_0 + \omega_0$) возмущения скорости находятся в фазе с возмущениями плотности, а в медленной волне—в противофазе [44]. Следовательно, для быстрой волны участки уплотнения имеют скорость, большую V_0 , а участки разрежения—меньшую. Поэтому, когда в пучке возбуждена быстрая волна, результирующая кинетическая энергия, переносимая им, превышает энергию, переносимую невозмущенным пучком. Если же возбуждена медленная волна, то, наоборот, сгустки бегут медленнее V_0 , а разрежения быстрее. В результате кинетическая энергия, переносимая таким пучком, меньше, чем энергия пучка без волны.

Для поперечных электромагнитных волн энергия может быть отрицательна, например, в среде из двухуровневых частиц. Действительно, в этом случае [43]

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2 N_{12}}{\omega^2 - \omega_{12}^2 + 2i\gamma\omega_{12}}, \quad (\text{III.3})$$

где ω_{12} — частота перехода, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} d$ (d — характеризует связь частицы с полем), $N_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_2}$, $n_{1,2}$ — заселенности нижнего и верхнего уровней. Энергия волны на частоте ω , где $\omega - \omega_{12} \gg \gamma$, приближенно равна

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon) = 2 \omega \left[1 + \frac{\omega_{12}^2 N_{12} \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] \quad (III.4)$$

и может быть отрицательной, если среда инвертирована — верхний уровень заселен больше, чем нижний. Согласно (III.4), отрицательной будет энергия волн с частотой

$$\omega - \omega_{12} < \frac{\omega_0}{2} \sqrt{n_2 - n_1}. \quad (III.5)$$

Ясно, что взаимодействие волн отрицательной энергии с поглощающей средой или с волнами положительной энергии должно сопровождаться неустойчивостью — отдавая энергию, такая волна будет расти по амплитуде.

Уравнения, описывающие взаимодействие волн разных знаков энергий в среде с консервативной нелинейностью, квадратичной по полю, записываются в виде ($\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$)

$$s_{1,2} \left(\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + v_{1,2} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} \right) = -\sigma_{1,2} a_3 a_{2,1}^* \quad (\sigma_i = \sigma_i^*), \quad (III.6)$$

$$s_3 \left(\frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) = \sigma_3 a_1 a_2$$

где s_i — знаки энергий волн. Если отрицательной энергией обладает одна из низкочастотных волн, например ω_1 , то волны ω_3 и ω_2 меняются ролями, и распадаться теперь может лишь низкочастотная волна ω_2 . Взрывной неустойчивости соответствует случай, когда отрицательной энергией обладает высокочастотная (ω_3) волна — при этом (III.6) сводится к (II.2), где $\theta_{1,2,3} = 0$. Именно такая ситуация реализуется в системе плазма — пучок при взаимодействии медленной пучковой волны с двумя плазменными [4] (см. рис. 34). Экспериментально взрывная неустойчивость в плазме с пучком наблюдалась в работах [45].

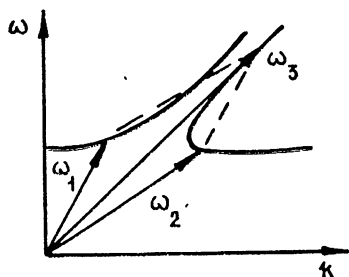


Рис. 34. Условия синхронизма, иллюстрирующие возможность взрыва в системе пучок—плазма.

2. Взаимодействие волн Толлмина—Шлихтинга в пограничном слое

Взрывная неустойчивость может возникнуть и при резонансном взаимодействии волн положительной энергии, например, в среде, нелинейность которой определяется мнимой частью диэлектрической проницаемости (см. ниже), или в гидродинамических течениях с неоднородным профилем скорости, примером которых служит пограничный слой,

При числах Рейнольдса $R = \frac{U\delta}{\nu} > R_{кр}$ в пограничном слое воз-

буждаются слабо неустойчивые волны Толлмина—Шлихтинга (ТШ-волны) [46], инкремент и структура которых поперек течения определяются из решения линейной краевой задачи* [47].

При $R > R_{кр}$ — это поверхностные волны, бегущие вдоль потока (см. рис. 35). С ростом R появляются нарастающие или слаботухающие волны, бегущие и под углом к потоку. Они наблюдаются экспериментально [48] при достаточно большой «накачке» — амплитуде двумерной ТШ-волны, т. е. двумерные волны оказываются неустойчивыми по отношению к трехмерным возмущениям.

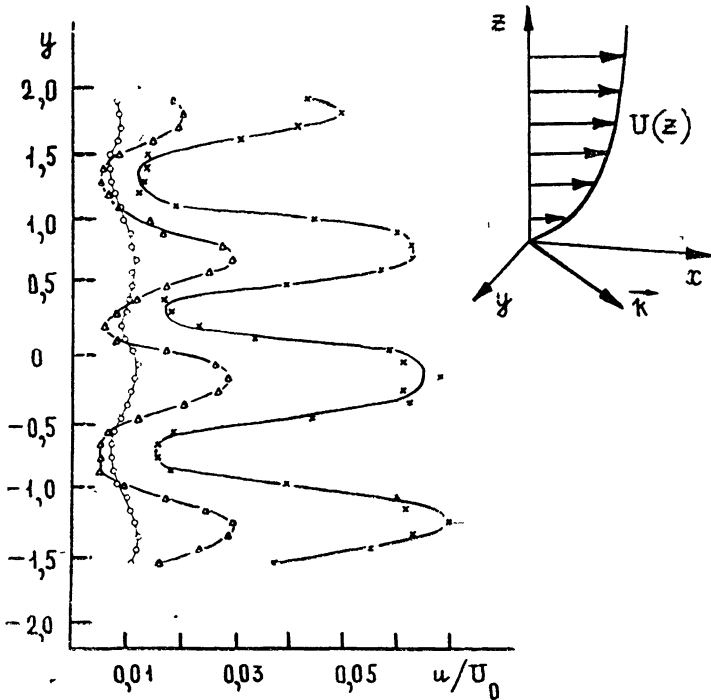
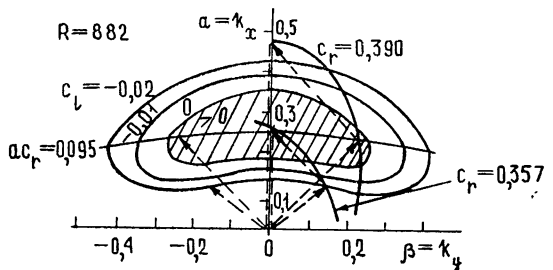


Рис. 35. Волны Толлмина—Шлихтинга в пограничном слое.

Рис. 36. Условия синхронизма двумерной и двух трехмерных ТШ-волн.



Из анализа дисперсионного уравнения для трехмерных ТШ-волн следует [49], что двумерная волна частоты ω может находиться в синхронизме с двумя трехмерными волнами частоты $\omega/2$, распространяю-

* Обычно ее называют задачей Орра—Зоммерфельда.

щимися под равными, но противоположными углами к основному течению (см. рис. 36). Все эти три волны имеют одинаковую фазовую скорость $v = \omega/k_x$ вдоль потока, а следовательно, и общий критический слой вблизи y_0 — слой, где фазовая скорость волн совпадает со скоростью потока $U(y_0)$. Именно в окрестности критического слоя наиболее сильно нелинейное взаимодействие волн, образующих триплет.

Процесс резонансного взаимодействия ТШ-волн также описывается системой (II.1), где σ_i комплексны и зависят от невозмущенного профиля скорости в пограничном слое. Из соображений симметрии очевидно $\sigma_1 = \sigma_2$. Конкретный вид σ_i для модельного профиля скорости

$$U(y) = \begin{cases} y & (0 < y < 1) \\ 1 & (y > 1) \end{cases}$$

найден в [49], а для реального пограничного слоя на плоской пластине (профиль Блазиуса) — в [50]. Ввиду $\sigma_1 = \sigma_2$ здесь получается несколько более простое, чем (II.2), уравнение для комплексных амплитуд —

$$\dot{a}_{1,2} = a_3 a_{2,1}^*, \quad \dot{a}_3 = e^{i\theta} a_1 a_2. \quad (\text{III.7})$$

При изменении профиля скорости в пограничном слое меняется величина θ , а следовательно, и характер взаимодействия ТШ-волн. При $\theta = \pi$ имеем обычное «обменное» взаимодействие, а при $\theta \neq \pi$ возможен взрывной рост амплитуд —

$$|a_2| = |\dot{a}_2| = \left[\frac{\cos \Phi_0}{\cos(\theta - \Phi_0)} \right]^{1/2} \frac{A_0}{1 - t A_0 \cos \Phi_0}, \quad (\text{III.8})$$

$$|a_3| = \frac{A_0}{1 - t A_0 \cos \Phi_0},$$

где установившаяся разность фаз волн $\Phi_0 = \arg a_3 - \arg a_2 - \arg a_1$ есть корень уравнения $\text{tg } \Phi_0 = \frac{1}{2} \text{tg}(\theta - \Phi_0)$. Подобный процесс одно-

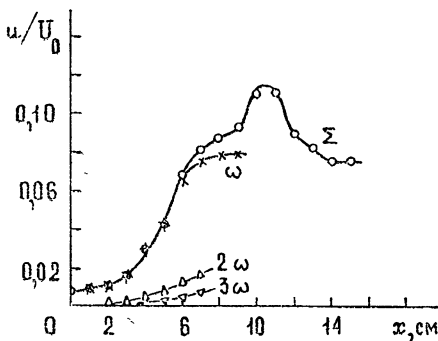


Рис. 37. Одновременный рост гармоник ТШ-волн в пограничном слое на плоской пластине.

временного нарастания гармоник наблюдался в экспериментах с неустойчивым пограничным слоем на плоской пластине — см. рис. 37 [48].

Этот процесс, однако, не может зйти достаточно далеко, поскольку для пограничного слоя без отсасывания число Рейнольдса растет вниз по потоку и развиваются вторичные неустойчивости — рассматриваемые волны возбуждают более высокочастотные возмущения. В результате устанавливается развитая турбулентность пограничного слоя.

Добавим, что согласно линейному анализу условия резонансной связи могут быть выполнены сразу для нескольких троек волн (см. рис. 36), т. е. турбулентность может возникнуть еще до развития вторичных ВЧ неустойчивостей (см. п. 3, разд. IV).

3. Взрывная неустойчивость в активной среде

Одновременный рост амплитуд резонансно связанных волн положительной энергии возможен и в активных средах, в частности, таких, где нелинейная проводимость имеет падающий участок (см. рис. 38) — распределенные туннельные переходы [5, 51], ганновские полупроводники [52] и т. д. Такую среду можно считать квадратичной (мнимая часть диэлектрической проницаемости пропорциональна полю), если поместить рабочую точку на верхушку характеристики. В возникнове-

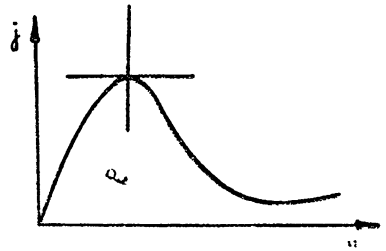


Рис. 38. Зависимость проводимости от поля для туннельных переходов и ганновских полупроводников.

следующим образом. В равновесной квадратичной среде, когда пропорциональна полю действительная часть ϵ ($\epsilon = \epsilon_H u$), уравнение относительно амплитуд связанных волн можно записать так, что все коэффициенты нелинейного взаимодействия будут чисто мнимыми и одного знака $1, 2, 3 \sim i \epsilon_H$. Считая теперь нелинейность мнимой, очевидно, приходим к уравнениям (II.2), при $\theta_{1,2,3} = 0$ описывающим взрыв — коэффициенты действительны и одного знака.

Физическую причину «взрыва» удобно пояснить для случая вырожденного взаимодействия — $\omega_1 + \omega_1 = \omega_3$ ($a_1 \equiv a_2$ в (II.2)). Для гармонической волны усиление в среде с плотностью тока $j(u) = -\sigma u^2$ в среднем за период отсутствует — один полупериод среда имеет положительную проводимость, другой — отрицательную. Для несимметричных на периоде колебаний, каким и является сумма двух гармоник, это не так — нелинейное усиление может превышать поглощение и амплитуды обеих гармоник будут одновременно расти.

Такой рост наблюдался экспериментально [51] в двухпроводной линии передачи с нелинейной утечкой, зависимость тока от напряжения которой имела вид рис. 38. В качестве элементов утечки использовались туннельные диоды, рабочая точка которых выводилась на макушку характеристики. На рис. 39 видно, что амплитуды взаимодействующих волн одновременно растут вдоль линии (кривые 2, 3). Если же условия синхронизма между ними нарушались, то амплитуды волн не менялись, либо, при введении в линию затухания, спадали вдоль x (см. кривую 1). Аналогичный процесс наблюдается и при невырожденном взаимодействии, когда в присутствии двух волн возникала третья волна комбинационной частоты, генерация которой сопровождалась ростом (!) всех трех волн.

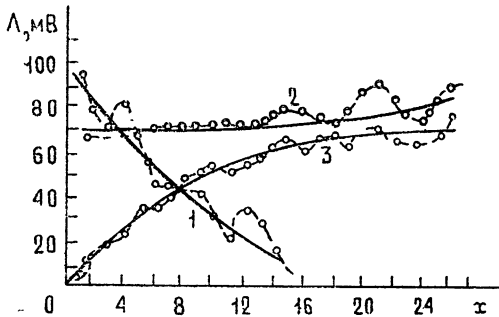


Рис. 39. Взрывная неустойчивость в пространстве при взаимодействии волны и ее второй гармоники в LC-линии с туннельными диодами.

4. Взаимодействие импульсов и пучков при взрывной неустойчивости

Если ширина пучков или длительность импульсов меньше или порядка характерных длительности или длины их взаимодействия, то

их уже нельзя считать пространственно-однородными и необходимо учитывать конечность скорости их распространения. Возникающий в общем случае групповой рассинхронизм может привести, например, к тому, что прежде чем импульсы или волновые пучки провзаимодействуют, они успеют разбежаться в пространстве. Однако даже при большом различии скоростей этого может не произойти.

Аналитические трудности, возникающие при решении подобных задач, удается преодолеть лишь в отдельных случаях, в частности, при рассмотрении вырожденного взаимодействия — волны и второй гармоники [53] или при специфических начальных условиях [54].

Исходными здесь служат уравнения

$$\dot{a}_{1,2} + V \nabla a_{1,2} = a_{2,1}^* a_3, \quad \dot{a}_3 + V_3 \nabla a_3 = a_1 a_2 \quad (\text{III.9})$$

с начальными условиями

$$a_j(x, y, z, 0) = a_{j0}(x, y, z). \quad (\text{III.10})$$

Уже непосредственно из вида уравнений следует, что их решения обладают некоторыми свойствами подобия. Так, если $a_j(\mathbf{r}, t)$ — решение (III.9), (III.10), то $\bar{a}_j = \beta a_j(\beta \mathbf{r}, \beta t)$ — решение той же системы, но с другими начальными условиями: $\bar{a}_j(\mathbf{r}, 0) = \beta a_{j0}(\beta \mathbf{r})$, где $\beta = \text{const}$. Отсюда следует, в частности, очень полезный результат — взаимодействие коротких импульсов большой амплитуды аналогично взаимодействию длинных импульсов малой амплитуды. Подобными оказываются и задачи о взаимодействии быстрых импульсов большой амплитуды и медленных — малой, если $a_j = a_j(\mathbf{r}, t)$ — решение (III.9), (III.10), то $\bar{a}_j = \beta a_j(\mathbf{r}, \beta t)$ — решение (III.9), где $V_j \rightarrow \beta V_j$, с начальными условиями $\bar{a}_j(\mathbf{r}, 0) = \beta a_{j0}(\mathbf{r})$. Для локализованных полей из (III.9), кроме того, следуют интегралы

$$N_1 - N_2 = l_1, \quad N_1 - N_3 = l_2, \quad N_2 - N_3 = l_3, \quad (\text{III.11})$$

$$N_j = \int |a_j|^2 d\mathbf{r},$$

означающие, что числа квантов в отдельных импульсах или пучках увеличиваются или убывают одновременно, т. е., как и для пространственно-однородных полей*, при взаимодействии импульсов или пучков возможен «взрыв».

В результате взрыва импульсы не успевают разбежаться и их нарастающие поля сосредоточиваются в узкой иглообразной области — происходит слияние импульсов резонансно связанных волн в один. При взаимодействии пучков, распространяющихся под углом друг к другу, эффект слияния заключается в локализации полей связанных волн вдоль одного луча. Слияние импульсов при трехволновом взаимодействии показано на рис. 40. Эти численные результаты [53] получены для столкновения встречных импульсов, начальная форма которых была колоколообразной. Удивителен здесь тот факт, что время взрыва (его зависимость от начальных амплитуд дана на рис. 41) может сколь угодно превысить время линейного «проскакивания» импульсов друг сквозь друга (это противоречит нашей интуиции, которая подсказывает что при $\Delta V_{\text{гр}}/l_{\text{имп}} = \tau_{\text{разб}} \ll t_{\text{взр}}$ каждый из импульсов не должен замечать других).

* Помимо случая, когда взаимодействуют широкие пучки или длинные импульсы, пространственно-однородные решения годятся и в случае полного группового синхронизма — $V_j = V$.

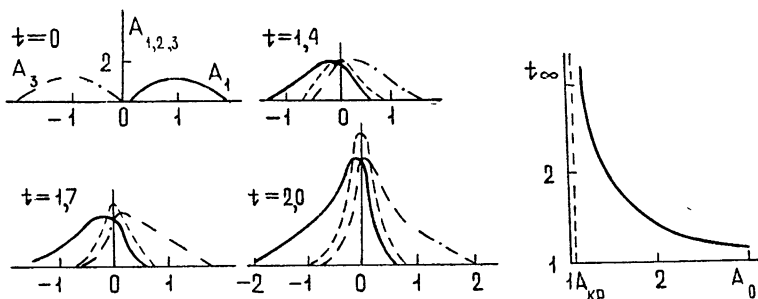


Рис. 40.

Рис. 41.

Рис. 40. Слияние импульсов при взрывной неустойчивости.
Рис. 41. Зависимость времени взрыва от начальных амплитуд сталкивающихся импульсов.

Слияние импульсов происходит лишь при превышении некоторого порога по начальным амплитудам. При слабых начальных полях «взрыв» отсутствует и импульсы разбегаются. Оценить порог легко в приближении заданного поля одного из импульсов. Тогда вместо (III.9) будем иметь

$$\dot{A}_3 + V_3 A'_3 = A_2(x) A_3, \quad \dot{A}_1 + V_3 A'_1 = A_2(x) A_1. \quad (\text{III.12})$$

При $t \gg T = l/u$, где $u = V_3 = -V_1$, $A_2(x) = a \operatorname{ch}^{-2}(x/l)$, эта система имеет асимптотическое решение:

$$A_{1,3} = \frac{C}{\operatorname{ch}^n(x/l)} \exp \left[\mp \frac{x}{2l} + \left(a - \frac{1}{2T} \right) t \right], \quad (\text{III.13})$$

$n = aT$, c — постоянная, определяемая из начальных условий. Видно, что при $\frac{2la}{u} > 1$ происходит нарастание полей $A_{1,3}$, приводящее затем к взрыву, а при $\frac{2la}{u} < 1$ — импульсы $A_{1,3}(x, 0) \ll A_2(x, 0)$ разбегаются.

В заключение обратим внимание на одно обстоятельство, следующее из приведенных результатов. Скорость фронтов взаимодействующих импульсов при взрывной неустойчивости практически никак не связана с линейной групповой скоростью волн. Она, например, может быть и существенно больше скорости света. Этот эффект объясняется интенсивной генерацией всех волн в области перекрытия импульсов. Другими словами, скорость фронта импульса в неравновесной среде определяется не столько переносом квазичастиц из одной области пространства в другую, сколько рождением новых квазичастиц, в том числе и там, где их не было. «Сверхсветовое» распространение импульсов возможно и при самовоздействии волн, в частности, при распространении импульса в лазерной среде [55].

IV. ВОЛНОВАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

1. Общие замечания

Для возникновения динамического режима в виде нелинейных волн в неравновесной среде, где может возбуждаться большое число мод, нужны, как правило, довольно специфические условия [5] (резонатор, спектрально узкая неустойчивость, сильная дисперсия и т. п.). Гораздо чаще при возбуждении большого числа мод в неравновесной среде

возникает турбулентное состояние — интенсивное волновое движение оказывается неупорядоченным. Обсудим здесь некоторые особенности турбулентных процессов в диссипативных неравновесных средах. Упоминание о неравновесности среды рядом с термином «турбулентность», возможно, кажется излишним — ведь именно с неравновесностью среды связан сам факт возникновения турбулентности*. Однако в большинстве случаев, когда говорится о турбулентности, имеются в виду лишь те физические ситуации, для которых области неустойчивости и диссипации можно столь далеко разнести в k -пространстве, что они будут играть только роль граничных условий, а фактический характер турбулентности будет зависеть от свойств среды в инерционном интервале, (где неустойчивость и диссипация отсутствуют). Мы под турбулентностью в неравновесных средах будем понимать турбулентность во всем спектральном пространстве, в том числе и вне инерционного интервала, причем основное внимание уделим тем случаям, когда инерционный интервал мал, либо вообще отсутствует. Ясно, что свойства подобной турбулентности не определяются потоком энергии по спектру и она не является колмогоровской. К исследованию такого рода турбулентности приводят задачи гидромеханики (турбулентность в пограничном слое, при термоконвекции и т. д.), физики плазмы (например, звуковая или ленгмюровская турбулентность в плазме со столкновениями), радиофизики (волновые автогенераторы шума) и проч.

При анализе турбулентности обычно ограничиваются определением ее спектра. В то же время очевидно, что спектр неполностью характеризует турбулентность. Например, в инерционном интервале колмогоровский спектр $k^{-5/3}$ получается и для сильной вихревой турбулентности и слабой волновой турбулентности в рамках приближения хаотических фаз (например, для гравитационно-капиллярных волн [56]) и для других моделей. Спектр, кроме того, ничего не говорит о механизме возникновения и установления турбулентности и ее структуре, исследование которых представляет очевидный интерес. Именно этим проблемам мы и посвятим заключительную часть лекций.

В волновой, как и в гидродинамической турбулентности наиболее часто встречающийся (потому ставший теперь уже довольно привычным) механизм возникновения турбулентности связан с развитием цепочки последовательных неустойчивостей и эстафетной передачей энергии от одних масштабов другим [16] (чаще от больших к меньшим). Именно этот механизм отвечает колмогоровской турбулентности. Для неравновесных же сред он является скорее исключением. В неравновесных диссипативных средах механизмы возникновения турбулентности оказываются весьма специфическими. Эта специфика вызвана двумя факторами: во-первых, за счет линейных и, в особенности, нелинейных неустойчивостей (например, взрывной) возможен одновременный рост возмущений совершенно различных масштабов, ограничение амплитуды которых может быть вызвано как передачей энергии затухающим модам, так и нелинейной диссипацией энергии внутри области неустойчивости, и, во-вторых, для многомодовых взаимодействий в неравновесных диссипативных средах наиболее характерно отсутствие хаотизации фаз мод, т. е. по существу невозможна слабая турбулентность. Ввиду важности последнего обстоятельства, остановимся на нем подробнее.

* В равновесных средах также возможны неупорядоченные движения, в которых занято большое число степеней свободы, но эти движения отвечают не турбулентности, а термализации — перераспределению энергии между различными модами, приводящему к установлению термодинамического равновесия. Интенсивность этих движений однозначно определяется температурой среды, которая является единственным параметром установившегося распределения Гиббса.

На примере трехволновых процессов мы увидели (см. п. 4, разд. II), что даже в средах с малой нелинейностью фазы при взаимодействии неустойчивых мод друг с другом, или с затухающими модами, либо синхронизуются, либо меняются с теми же характерными временами, что и амплитуды. Как показали физические и машинные эксперименты (см. ниже), так же обстоит дело и при многоволновых процессах. Качественно отличие от «равновесных» сред здесь можно пояснить так — при достаточно большой ширине инерционного интервала фаза, навязанная неустойчивой модой гармоникам, лежащим в области прозрачности, забывается по мере удаления от границы области неустойчивости за счет взаимодействия с большим числом мод внутри инерционного интервала (предполагается, что среда обладает слабой дисперсией). Если же инерционный интервал отсутствует, прогрессирующее с ростом номера моды затухание обрывает эту эстафету и неустойчивые моды эффективно возбуждают лишь несколько затухающих, которые близки к точному резонансу. Подобная картина наблюдается и в средах с нешироким инерционным интервалом, когда число взаимодействий внутри инерционного интервала не слишком велико. Для примера приведем результаты машинного эксперимента [57] по стабилизации неустойчивой ионно-звуковой моды за счет передачи ее энергии вверх по спектру. Исследовалась модель из 10 мод с инкрементом γ_0 на первой и затуханием $\nu = 10\gamma_0$ на десятой (инерционный интервал — 9 гармоник). Оказалось, что и при малой дисперсии и при ее отсутствии каскадной передачи энергии от моды к моде не происходит и стационарное энергетическое распределение $E(\omega)$, соответствующее постоянному потоку энергии по спектру, не устанавливается. Энергия всех мод осциллирует, изменяясь более, чем на два порядка, причем энергетические «вспышки» на разных модах происходят с небольшим разбросом во времени (почти в фазе) — см. рис. 42.

Таким образом, даже при малой нелинейности в неравновесных диссипативных средах обычно несправедливо приближенно хаотических фаз и слабой связи мод (малого энергообмена между ними), и в этом смысле турбулентность в таких средах, как правило, является сильной*. Рассмотрим основные механизмы возникновения и установления подобной турбулентности, связывая их с характером неустойчивостей в среде.

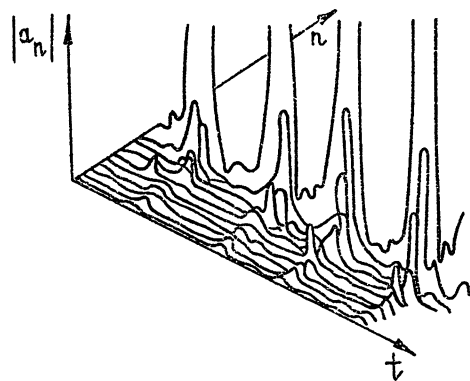


Рис. 42. Осцилляции энергии гармоник при неустойчивости на первой гармонике и затухании на десятой [57].

2. Турбулентность в средах с линейными неустойчивостью и затуханием

Исследуем низкочастотную (звуковую) турбулентность, возбуждаемую, например, за счет параметрических неустойчивостей в нелинейной диссипативной среде с дисперсией. Для определенности будем полагать, что в линейном приближении спектр низкочастотных волн аналогичен спектру ионного звука в неизотермической плазме (подоб-

* Заметим, что сильная волновая турбулентность уже неоднократно обсуждалась как для диссипативных сред (бюргерсовская турбулентность — ансамбль пилообразных волн со случайными фазами [58]), так и для близких к консервативным (например, ленгмюровская турбулентность в виде газа солитонов [59]).

ным же спектром характеризуются геликоны, спиновые волны и т. д.), а мода, нарастающая за счет параметрической неустойчивости волн другого типа, например, ленгмюровских, лежит на границе области сильной дисперсии. При этом передачи энергии вверх по спектру не происходит и можно ограничиться рассмотрением лишь распадных процессов.

а) *Узкий спектр возбуждения.* Исходные уравнения для комплексных амплитуд спектральных составляющих, взаимодействующих в квадратиной среде, запишутся в виде

$$\dot{b} = -\beta\omega_0 \int_{\Delta}^{k_0/2} a_k a_{k_0-k} e^{i\Delta\omega(k)t} dk + \gamma b; \quad (IV.1)$$

$$\dot{a}_k = \beta\omega(k) b a_{k_0-k}^* e^{i\Delta\omega(k)t} - \nu_k a_k. \quad (IV.2)$$

Здесь b — комплексная амплитуда параметрически возбуждаемой с инкрементом γ волны на частоте ω_0 , a_k — комплексная амплитуда k -й компоненты спектра, ν_k — ее декремент, $k = k(\omega)$, $k_0 = k(\omega_0)$. Как следует из (IV.2), стабилизация неустойчивой моды за счет распада и диссипации энергии в более длинноволновых модах возможна лишь при наличии флуктуаций в нижней части спектра. Если уровень начальных флуктуаций не зависит от частоты, то преимущественно будут возбуждаться те симметричные относительно $\omega_0/2$, $k_0/2$ спектральные пары, для которых $k \sim k_0/2$ — для них максимален распадный инкремент, пары же с $\left| \frac{k_0}{2} - k \right| \sim \frac{k_0}{2}$ — далекие от середины спектра — вообще не нарастают, что и учтено в (IV.1) ($2\Delta/k_0 \ll 1$).

Для ответа на вопрос о нелинейной эволюции спектра начальных флуктуаций воспользуемся результатами машинного эксперимента по взаимодействию различных распадных пар [34]. Оказывается, что близкие пары взаимно синхронизируются по фазам, образуя связанные состояния — домены в k -пространстве*. В динамическом случае (дисперсии нет — $\Delta\omega = 0$) спектральная ширина Ω этих k -доменов медленно уменьшается с ростом относительного затухания пар — при $\nu/\gamma = 10$ $\Omega = 0,1$, а при $\nu/\gamma = 30$ $\Omega = 0,06$. При учете дисперсии — стохастические триплеты (см. п. 4, разд. II) — ширина k -доменов в широких пределах не зависит от ν/γ и линейно растет с ростом расстройке $\Delta\omega$ внутри триплета. Например, при $10 < \nu/\gamma < 100$ $\Omega \approx 30 \Delta\omega$.

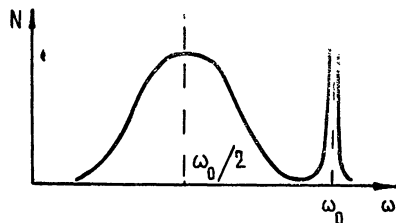
При спектрально узком инкременте неустойчивой моды в каждый момент времени, как показал эксперимент, может существовать лишь одна пара доменов. Это, очевидно, связано с тем, что различные пары питаются из одного спектрально узкого источника и при взаимодействии подавляют друг друга**. Наличие флуктуаций приводит к тому, что время жизни произвольной пары доменов оказывается конечным и система случайным образом переходит из состояния с одной возбужденной парой в состояние с другой возбужденной парой. Физически этот результат кажется довольно очевидным — поскольку распадные пары реально существуют лишь в течение малой доли «периода» триплета τ_0 (их интенсивности имеют вид последовательности узких пич-

* Процесс концентрации энергии распадающейся моды в доменах напоминает возникновение струй в k -пространстве, например, при рассеянии волн на частицах [60]. Отличие этих процессов заключается, в частности, в том, что фазы разных мод внутри струи случайны, а внутри домена фаза спектральных компонент постоянна и от ω (или k) не зависит.

** Этот процесс аналогичен конкуренции мод в лазере с однородно уширенной линией активного вещества [61].

ков, см. рис. 32), случайные всплески интенсивности других спектральных компонент в интервале между пичками индуцируют распад неустойчивой моды на новую пару и т. д. В машинном эксперименте время жизни пары оказывалось равным $\tau_{\text{пары}} \sim 10 \div 50 \tau_0$. Функция распределения пар по частотам имела максимум вблизи $\omega_0/2$ (рис. 43).

Рис. 43. Стационарный спектр турбулентности „булькающего“ триплета.



Таким образом, при узком спектре возбуждения турбулентность, в данном случае, представляет собой ансамбль распадных пар k -доменов, «булькающих» во времени — в каждый момент существует лишь одна пара, сменяющаяся на другую по случайному закону. Ввиду того, что частота появления пар нарастает при их приближении к $\omega_0/2$, спектр стационарной турбулентности в случае $\nu_k = \text{const}$ качественно должен выглядеть, как на рис. 47.

б) *Кинетическое уравнение для распадных триплетов.* Если область неустойчивости распадающихся мод в ω -пространстве широка, по сравнению с шириной доменов, то уже возможно сосуществование различных пар доменов*. Турбулентность в этом случае есть ансамбль распадных триплетов, свойства которых нам уже известны. Спектр этой турбулентности в нулевом приближении («идеальный» газ триплетов) есть просто суперпозиция спектров отдельных триплетов, различающихся частотами ВЧ мод и их инкрементами.

Согласно машинным экспериментам, распадные триплеты оказываются устойчивыми по отношению к конечным внешним возмущениям. Поэтому при учете столкновений в газе триплетов последние можно рассматривать как сложные неделимые квазичастицы. Описывать такой газ следует кинетическим уравнением для этих квазичастиц. В отличие от кинетического уравнения для элементарных квазичастиц (т. е. квазигармонических волн, фазы которых предполагаются случайными), в данном случае кинетическое уравнение получается естественным образом без привлечения дополнительных гипотез типа ПХФ [39]. Это объясняется тем, что фазы волн в каждом триплете скажут за счет внутренних взаимодействий, и при анализе процессов, в которых участвуют волны из разных триплетов, фазы следует считать случайными.

Уравнения, описывающие «реальный» газ триплетов, нетрудно получить, если учесть следующее. Взаимодействие распадных триплетов осуществляется только за счет долгоживущих неустойчивых мод (см. рис. 21), поскольку затухающие моды из разных триплетов не перекрываются во времени, — они имеют вид коротких импульсов, длительность которых существенно меньше среднего времени их повторения, причем всплески НЧ мод из разных триплетов некоррелированы. Взаимодействие же между неустойчивыми ВЧ модами может быть обусловлено лишь теми звуковыми возмущениями, частоты и волновые числа которых меньше или порядка спектральной ширины области неустой-

* Продолжая аналогию с лазерами, можно заметить, что этот случай подобен одновременной генерации многих мод в среде с неоднородным уширением линии — разные моды высвечивают разные активные частицы.

чивости⁴. Так как в нашем случае ширина области неустойчивости предполагается много меньшей частоты ВЧ мод, искомые уравнения находятся в рамках адиабатического приближения [62], когда ВЧ моды со случайными фазами распространяются в медленно меняющейся (за счет низкочастотного звука) среде. В результате для параметрически возбуждаемых одномерных звуковых волн будем иметь кинетическое уравнение ВЧ мод и гидродинамическое уравнение для НЧ звука:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} - s \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial N_k}{\partial k} &= \gamma_k N_k - \rho_k N_k^2, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -s \frac{\partial}{\partial x} \sum_k N_k + \nu_s \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Здесь N_k — интенсивность k -й ВЧ моды, ξ — переменная, характеризующая низкочастотное звуковое возмущение, s — постоянная, зависящая от нормировки, ν_s — вязкость, γ_k — линейный инкремент ВЧ мод, а $\rho_k N_k^2$ — модельное слагаемое, описывающее стабилизацию ВЧ моды за счет распада на затухающие внутри триплета, причем $\gamma_k/\rho_k = N_k^{(0)}$ — средний уровень ВЧ моды в режиме стационарной стабилизации в автономном триплете.

«Идеальному» газу триплетов соответствует состояние с $\xi = 0$, существующее лишь при однородном распределении энергии ВЧ мод в пространстве. Легко видеть, что такое состояние неустойчиво по отношению к длинноволновым возмущениям. В частности, стационарный режим $N_k(x, t) = N_k^{(0)}$ неустойчив по отношению к возмущениям с характерным масштабом

$$\begin{aligned} \Lambda > 2\pi \left[\frac{v_k v (v_k v_s^2 - \alpha s^2)}{\gamma v_s^2 (v_s^2 - v\gamma)} \right]^{1/2} \left(\sigma < \frac{v_k v_s^2}{s^2} = \alpha_{\text{кр}} \right), \\ \Lambda > 0 \quad (\alpha > \alpha_{\text{кр}}). \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Здесь $\alpha = N_k^{(0)}(k_2) - N_k^{(0)}(k_1)$, k_1, k_2 — границы области в k -пространстве, где инкремент ВЧ мод отличен от нуля.

Таким образом, газ триплетов неустойчив по отношению к разбиению однородного в пространстве распределения на сгустки.

3. Структура турбулентности при взрывной неустойчивости

Резонансное взаимодействие большого числа мод в неравновесной среде при взрывной неустойчивости в достаточно общем случае описывается уравнением вида

$$\dot{a}_k = \gamma_k a_k + \sum_{i,j} \tau_{ijk} a_i a_j - \sum_i \rho_{ik} a_k |a_i|^2. \quad (\text{IV.5})$$

Здесь γ_k — линейный инкремент или декремент, σ — характеризует нелинейный инкремент (все τ_{ijk} действительны и одного знака, что обеспечивает взрывную неустойчивость), последнее слагаемое описывает нелинейное затухание, связанное либо с передачей энергии по спектру быстро затухающим модам (они алгебраически выражаются через a_k), либо с нелинейной вязкостью или проводимостью. Этим уравнением описываются процессы взаимодействия волн Толлмина—Шлихтинга в пограничном слое с отсасыванием, «взрывных» мод при термоконвек-

* Напомним, что рассматриваются волны, спектр которых аналогичен спектру ионного звука — на низких частотах дисперсия отсутствует, а на высоких она сильная, вследствие чего процессы слияния запрещены.

ции в слое подогреваемой снизу жидкости, вязкость которой зависит от температуры [63], волн в активном волноводе [68] и т. д.

Характер турбулентности, возникающей в результате возбуждения большого числа мод, в данном случае определяется соотношением параметров γ , σ и ρ . При $\sigma^2/\rho\gamma \ll 1$ установившаяся интенсивность турбулентных пульсаций имеет порядок $N_0 \sim \gamma/\rho$, и взрывное взаимодействие сказывается лишь на последнем этапе, когда процессы нелинейной стабилизации и линейной неустойчивости примерно уравниваются друг друга. Время взрывной синхронизации фаз здесь оказывается существенно большим времени взаимодействия за счет кубичной нелинейности. Поэтому при $\sigma^2/\rho\gamma \ll 1$ процесс можно описывать обычным кинетическим уравнением, полученным в приближении случайных фаз волн (слабая турбулентность):

$$\dot{N}_k = 2\gamma_k N_k - 2 \sum \rho_{ik} N_i N_k + \sum |\sigma|^2 (N_i N_k + N_j N_k + N_i N_j). \quad (\text{IV.6})$$

Взрывное взаимодействие, описываемое в (IV.6) последним слагаемым, приводит только к перераспределению энергии между модами. Таким образом, в данном случае «взрыв» на структуру турбулентности по существу не влияет.

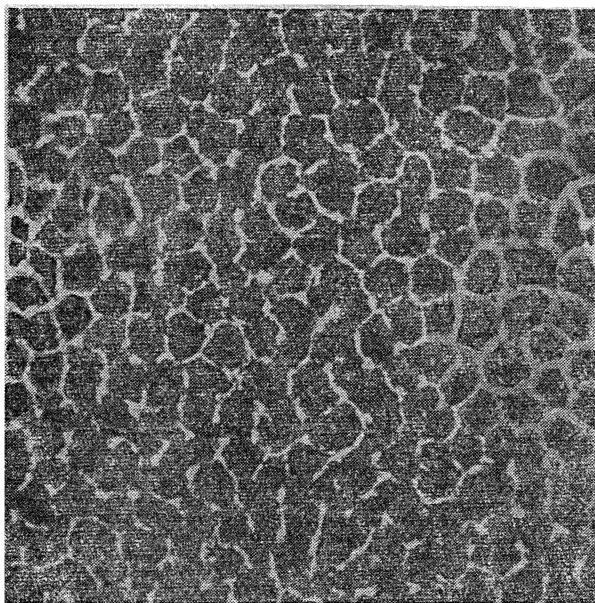


Рис. 41. Сохранение пространственных структур, связанных с взрывным взаимодействием, при турбулентной термоконвекции [69].

Ситуация будет качественно иной, если время «взрывной» синхронизации фаз $t_\infty \sim 1/\sigma A$ окажется меньше, чем $\tau_{\text{нел}} \sim 1/\rho A^2$. В этом случае в результате действия взрывной неустойчивости из флуктуаций вначале возникнут хорошо определенные образования — взрывные триплеты, которые, уже сформировавшись, будут взаимодействовать друг с другом. При этом они останутся внутренне устойчивыми — амплитуды мод внутри триплетов будут однозначно связаны, а фазы — взаимно синхронизованы. Повторяя рассуждения, обычно приводимые в качестве обоснования приближения случайных фаз для простых квазичастиц,

можно рассмотреть взаимодействие взрывных триплетов с несоизмеримыми масштабами (k) в рамках кинетического уравнения для триплетов* [63]

$$\dot{N}_k = 2\gamma_k N_k + \sigma N_k^{3/2} - 2 \sum_i \rho_{ik} N_i N_k + \sum |\sigma|^2 (N_i N_k + N_i N_j + N_j N_k), \quad (IV.7)$$

где N_k — интенсивность триплета, все три моды которого имеют волновое число одного порядка (в большинстве случаев именно для них «взрывной» инкремент σ оказывается максимальным).

Турбулентность в виде ансамбля триплетов, по-видимому, наблюдалась экспериментально в слое подогреваемой жидкости, в которой вязкость зависела от температуры [69] — см. рис. 44.

Таким образом, при $\sigma^2/\rho\gamma \sim 1$ турбулентность в среде с взрывной неустойчивостью уже не является слабой и представляет собой ансамбль взаимодействующих взрывных триплетов. Изменение структуры турбулентности приводит и к существенному изменению ее спектра. В [63] для термоконвекции в слое подогреваемой снизу жидкости найдены спектры турбулентности в случае, когда число Релея порядка нескольких критических. Оказалось, что возникновение триплетов приводит к увеличению энергии турбулентных пульсаций в области больших масштабов — см. рис. 45.

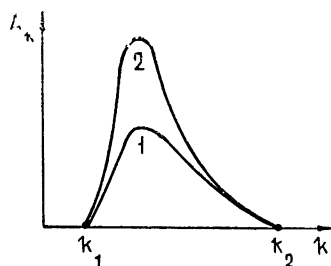


Рис. 45. Зависимость спектра турбулентности при термоконвекции в жидкости с $\nu = \nu(T^\circ)$ от структуры турбулентности:

- 1) спектр слабой турбулентности;
- 2) спектр турбулентности в виде ансамбля взрывных триплетов.

4. Многофазная турбулентность

Исследованная выше турбулентность в виде ансамбля триплетов (взрывных или распадных) представляет собой частный случай сильной волновой турбулентности. К ней следует также отнести бюргеровскую турбулентность в виде ансамбля пилообразных волн со случайными фазами [58] и газ солитонов [70]. На языке квазичастиц сильная турбулентность — это ансамбль сложных квазичастиц, обладающих сильной внутренней устойчивостью и слабо взаимодействующих между собой.

Легко заметить, однако, что турбулентность в виде одинаковых квазичастиц существует лишь при вполне определенных (а иногда и довольно специфических) условиях. Так, чтобы акустическая турбулентность была бюргеровской, необходимо почти полное отсутствие дисперсии, а для того, чтобы она была слабой, наоборот, — дисперсия должна быть велика. В реальной ситуации эти два случая просто соответствуют области малых волновых чисел (бюргеровская турбулентность со спектром энергии $E_k \sim k^2$ [64]) и области больших волновых чисел (слабая турбулентность со спектром $E_k \sim k^{-2/3}$ [67]). Таким образом, уже из этого примера следует, что в общем случае волновая

* В отличие от распадных триплетов, фазы мод внутри взрывного триплета не «прыгают» — взрывной триплет не обладает внутренними степенями свободы. Поэтому вывод кинетического уравнения и основывается на приближении о случайности фаз триплетов.

турбулентность должна быть «многофазной», т. е. она представляет собой смесь газов — фаз из различных квазичастиц. Взаимодействие между этими «фазами» наиболее существенно в области переходных масштабов в k -пространстве. Такие многофазные модели рассматривались применительно к звуковой [65] и ленгмюровской [66] турбулентности*.

Обсудим здесь более подробно многофазную турбулентность, возникающую при взаимодействии низкочастотных и высокочастотных волн, например, ионно-звуковых и ленгмюровских в плазме [66] или внутренних и поверхностных в океане. Взаимодействие одномерных волн описывается системой

$$\begin{aligned} -2ia_t + \beta a_{xx} - \omega_p na &= -2i\nu_1 a_{xx}, \\ n_{tt} - c_s^2 n_{xx} &= \gamma |a|_{tt}^2 + \delta n_{xxx} + \nu_2 n_{xt}, \end{aligned} \quad (IV.8)$$

где β — характеризует дисперсию ВЧ волн, ω_p — их критическая частота (см. дисперсионную характеристику на рис. 46), δ — характеризует дисперсию НЧ волн, c_s — их скорость, ν_1 и ν_2 — вязкость ВЧ и НЧ волн (для плазмы ν_1 моделирует затухание Ландау ленгмюровских волн), γ — характеризует величину связи ВЧ и НЧ волн. Система (IV.8) обычно решается численно. Мы воспользуемся ее решением, полученным в результате физических экспериментов по взаимодействию ВЧ и НЧ волн в одномерной нелинейной среде — линии с нелинейными емкостями (эквивалентная схема звена приведена на рис. 47). Исследовались полубесконечная «среда», на границе которой возбуждались монохроматические ВЧ и НЧ волны. При одинаковой энергии ВЧ волны на границе, в зависимости от ее частоты, возникали четыре качественно различных вида ВЧ турбулентности (см. рис. 48) — солитоны, пилообразные волны, динамическая турбулентность — ансамбль ВЧ волн, квазипериодически обменивающихся энергией друг с другом, и режим периодического обмена энергией между возникающими в результате модуляционной неустойчивости сателлитами и интенсивной на границе волной «заполнения». В проводящихся экспериментах наблюдалось несколько десятков сателлитов, 4—5 первых из них в зависимости от x приведены на рис. 48.

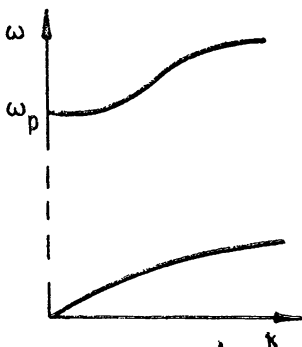


Рис. 46.

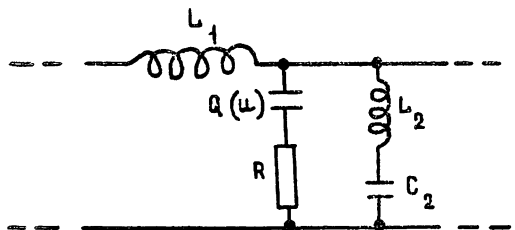


Рис. 47.

Рис. 46. Дисперсионная характеристика ВЧ и НЧ нормальных волн в LC-линии.
Рис. 47. Эквивалентная схема ячейки.

Солитоны огибающих возникали из-за модуляционной неустойчивости в области сильной дисперсии ($\omega \gg \omega_p$) при малой диссипации.

* Предложенная в [65] модель турбулентности в виде смеси газов «пил» и обычных квазичастиц позволилашить спектры бюргерсовской и слабой турбулентности.

На рис. 48 а приведена осциллограмма волн огибающих в виде последовательности солитонов и эволюция их спектра.

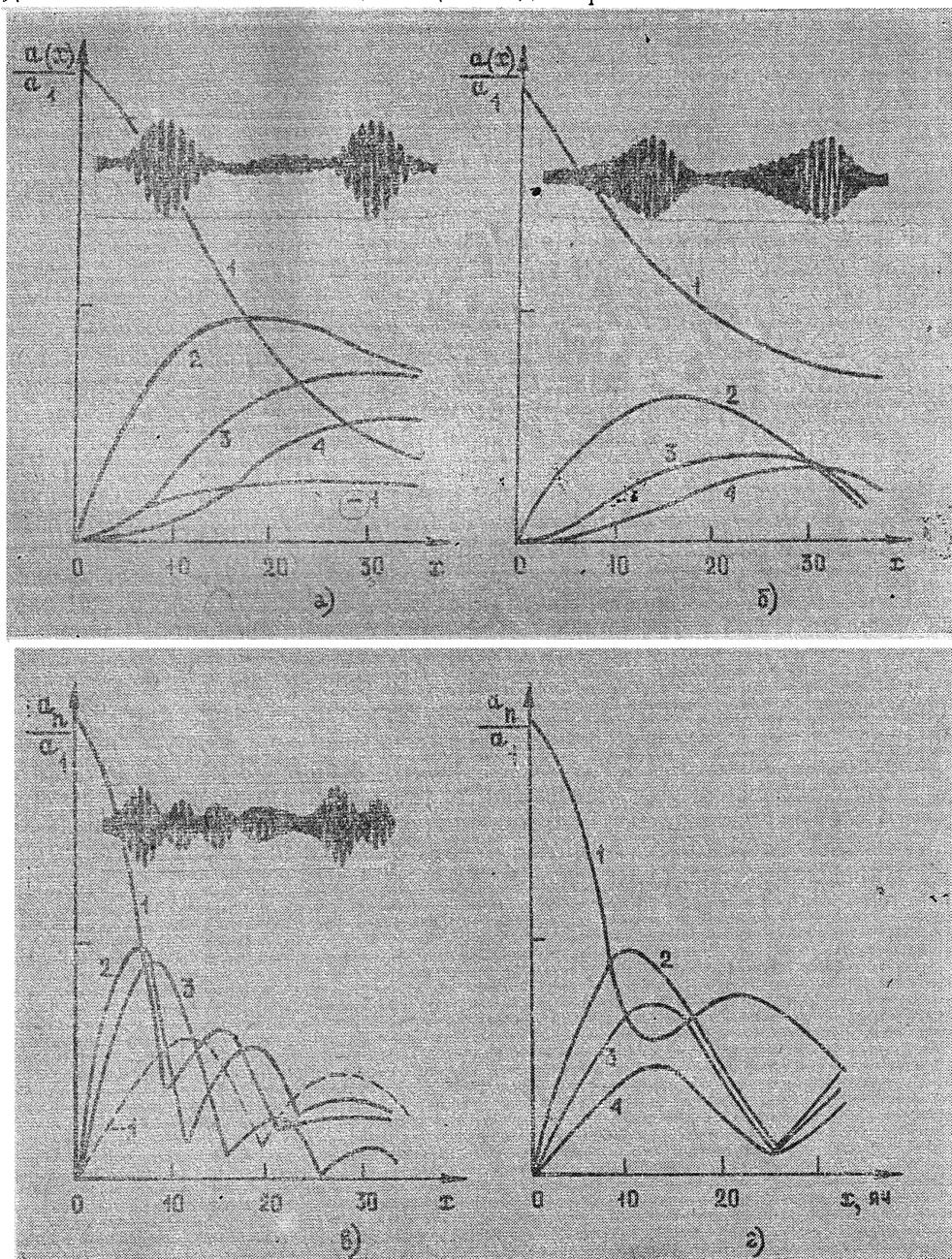


Рис. 48. Осциллограмма и эволюция спектров волн огибающих: а) солитоны ($\omega/\omega_p = 1,08$, $\Delta\omega/\omega_p = 0,05$); б) ударные волны ($\omega/\omega_p = 1,04$, $\Delta\omega/\omega_p = -0,05$), в) динамическая турбулентность ($\omega/\omega_p = 1,36$, $\Delta\omega/\omega_p = 0,05$); г) периодический обмен энергией ($\omega/\omega_p = 1,13$, $\Delta\omega/\omega_p = 0,15$).

При уменьшении частоты падающей на границу ВЧ волны ($\omega \rightarrow \omega_p$) солитоны сменялись волнами пилообразной формы (см. рис. 48 б)*.

* Это объясняется возрастанием роли вязкости при уменьшении скорости квазистационарных волн в дискретной структуре.

Если на границе возбуждались ВЧ волны с частотой, лежащей в той области дисперсионной кривой, где выполняется групповой синхронизм с НЧ волнами, то устанавливался режим динамической турбулентности (рис. 48 б). При отсутствии гармоник НЧ волн этот режим переходил в строго периодический — на рис. 48 г видно, что спутники одновременно возвращают энергию интенсивной вначале волне, а затем всю ее усиливаются ею.

При возбуждении на границе среды ВЧ волн с широким спектром возникал режим многофазной турбулентности, представляющий собой результат взаимодействия рассмотренных выше элементарных «газов». Наличие в такой турбулентности сложных квазичастиц каждого сорта идентифицировалось по спектрам. Анализ парного взаимодействия разных «фаз» показал, что сравнительно быстро устанавливались квазистационарные элементарные режимы, а затем медленно обменивались энергией друг с другом.

В заключение данного раздела заметим, что, к сожалению, практически все результаты по сильной волновой турбулентности получены либо с помощью численных, либо с помощью модельных экспериментов. Это связано как с колоссальными аналитическими трудностями рассматриваемых задач, так и с тем, что их интенсивное исследование по существу только начинается.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
2. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, 193 (1971).
3. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Теоретические основы нелинейной акустики, изд. Наука, М., 1975.
4. М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 6, 815 (1973).
5. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 477 (1974).
6. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 454 (1974).
7. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ, 57, 1240 (1969).
8. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 60, 993 (1971).
9. Г. М. Заславский, УФН, 111, 395 (1973).
10. T. Tatsumi, S. Kida, J. Fluid. Mech., 55, 659 (1972).
11. Дж. В. Стретт, Теория звука, т. 2, Гостехиздат, М., 1955.
12. А. А. Новиков, МЖГ (в печати).
13. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, Атомиздат, М., 1970.
14. E. Ott, W. M. Manheimer, D. L. Book, J. R. Boris, Phys. Fluids, 16, 655 (1973).
15. G. V. Witham, Proc. Roy. Soc., A 283, 238 (1965).
16. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, т. 1, изд. Наука, М., 1967.
17. Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, М., 1958.
18. В. Старр, Физика явлений с отрицательной вязкостью, изд. Мир, М., 1971.
19. С. Л. Машкович, И. Г. Вейль, Метеорология и гидрология, № 8 (1970).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
21. S. P. Lin, J. Fluid Mech., 63, 417 (1974).
22. M. S. Shen, S. M. Shin, Phys. Fluids, 17, 280 (1974).
23. R. S. Johnson, Phys. Fluids, 15, 1693 (1972).
24. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, ПММ, 38, 991 (1974).
25. В. Е. Накоряков, И. Р. Шрейбер, ПМТФ, № 2, 109 (1973).
26. П. Л. Капица, С. П. Капица, ЖЭТФ, 19, 105 (1949).
27. Электродинамика плазмы (под ред. А. И. Ахизера), изд. Наука, М., 1974.
28. E. Ott, R. N. Sudan, Phys. Fluids, 13, 432 (1970).
29. С. М. Криворучко, Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, В. И. Шувченко, ЖЭТФ, 67, 2092 (1974).
30. H. Wilgelmsen, L. Stenflo, F. Engelmann, J. Mathem. Phys., 11, № 5, 1738 (1970).
31. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, ФТП, 5, 126 (1971).

32. Б. Л. Тиман, В. К. Комарь, В. А. Рыжиков, ФТТ, **15**, 413 (1973)
33. Ю. К. Гольцова, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Физика плазмы, **1**, вып. 3 (1975).
34. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, ЖЭТФ, **72**, вып. 8 (1976).
35. А. Н. Шарковский, УМЖ, **16**, № 1, 61 (1964).
36. А. Н. Шарковский, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 2, Киев, 1970, стр. 541
37. А. А. Косякин, Е. А. Сандлер, Изв. высш. уч. зав. — Математика, № 3, 32 (1972)
38. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, Т. М. Тарантович, VI Международный симпозиум по нелинейной акустике, Тезисы докладов, изд. МГУ, М., 1975, стр. 53
39. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, УФН, **105**, 3 (1971)
40. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 10, 1502 (1972).
41. M. K. Osman, S. E. Harris, Proc. IEEE, **QE-4**, № 8, 491 (1968).
42. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ, **47**, 2266 (1964).
43. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967
44. Р. Бриггс, в сб. Достижения физики плазмы, изд. Мир, М., 1974, стр. 132
45. F. Noman, 10-th Intern. Conf. Phenomenon ioniz. gas, Oxford, 1971, p. 323.
46. Р. Бетчов, В. Криминале, Вопросы гидродинамической устойчивости, изд. Мир, М., 1971
47. Г. Шлихтинг, Возникновение турбулентности, ИЛ, М., 1962.
48. P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, L. M. Sargent, J. Fluid Mech., **12**, № 1, 1 (1962).
49. A. D. D. Craik, J. Fluid Mech., **50**, 393 (1971).
50. J. R. Usher, A. D. D. Craik, J. Fluid Mech., **70**, 437 (1975).
51. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Письма в ЖЭТФ, **16** вып. 7, 384 (1972).
52. З. Ф. Красильник, М. И. Рабинович, ФТП, **9**, 113 (1975)
53. М. И. Рабинович, В. П. Реутов, А. А. Цветков, ЖЭТФ, **67**, № 8 (1974).
54. В. Е. Захаров, С. В. Монаков, ЖЭТФ, **69**, вып. 5, 1654 (1975).
55. Б. Г. Крюков, В. С. Летохов, УФН, **59**, № 2, 169 (1969)
56. Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 4, 511 (1974)
57. R. V. Flynn, W. M. Manheimer, Phys. Fluids, **14**, № 9, 2063 (1971).
58. J. A. Burgers, Advances in Appl. Mech., v. 1, 1948 (русский перевод сб. Проблемы механики, ИЛ, М., 1955, стр. 422).
59. Л. М. Дегтярев, В. Г. Маханьков, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ, **67**, вып. 2 (1974)
60. В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец, ЖЭТФ, **59**, вып. 10, 1203 (1970).
61. Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, т. II, изд. Сов. радио, М., 1975.
62. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, Докл. АН СССР, **159**, № 4, 767 (1964)
63. А. Л. Пиковский, М. И. Рабинович, А. С. Сазонтов, Докл. АН СССР, (в печати)
64. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Докл. АН СССР, **208**, 794 (1973).
65. К. А. Наугольных, С. А. Рыбак, ЖЭТФ, **68**, вып. 1, 78 (1975).
66. С. В. Кияшко, В. В. Папко, М. И. Рабинович, Физика плазмы, **1**, вып. 6, (1975).
67. В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, Докл. АН СССР, **192**, 297 (1970).
68. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, ЖЭТФ, **66**, вып. 5 (1974)
69. D. J. Tritton, M. N. Zargaga, J. Fluid Mech., **30**, № 1, 21 (1967).
70. Л. М. Дегтярев, В. Г. Маханьков, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ, **67**, 533 (1974).