

УДК 534.222.2

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ

(избранные вопросы)

*Л. А. Островский***СОДЕРЖАНИЕ**

- I. Введение
- II. О стационарных волнах.
- III. «Геометрическая оптика» ударных волн и солитонов
 - 1. Приближенные уравнения
 - 2. Слабые ударные волны (акустика)
 - 3. Солитоны малой амплитуды (волны на воде).
 - 4. Затухание солитонов
- IV. Неустойчивость и саморефракция солитонов
- V. Усиление и взаимодействие солитонов
 - 1. Параметрическое усиление импульсов
 - 2. Взаимодействие солитонов
- VI. Эксперименты с электромагнитными солитонами

I. ВВЕДЕНИЕ

Термины, стоящие в заглавии этих лекций, имеют весьма солидный возраст (правда, солитон раньше называли уединенной или одиночной волной). Тем не менее, обозначаемые ими процессы привлекают сейчас исключительно большое внимание физиков и математиков. Причины этого, вероятно, станут понятны после следующего краткого пояснения. Речь идет, по существу, о «крайнем проявлении» нелинейности в виде наиболее коротких образований, в которых нелинейные эффекты уже компенсируются влиянием дисперсии или потерь; мы будем называть такие образования предельными волнами. За различными возможными вариантами таких процессов удобно проследить, рассматривая эволюцию достаточно крупномасштабной нелинейной волны, которая значаще испытывает накапливающиеся искажения с увеличением крутизны фронта (простая волна). Если среда обладает потерями, растущими с частотой, то эти потери остановят рост крутизны, и в результате образуется стабильный перепад поля — ударная волна (рис. 1а). Именно так обстоит дело в классической газодинамике, где толщина ударного фронта определяется вязкостью или теплопроводностью газа, или в магнитной гидродинамике, где аналогичную роль может играть электропроводность среды.

Если же в среде преобладает «реактивная дисперсия», связанная с какими-то колебательными степенями свободы, то на крутом участке появляются осцилляции, и при достаточно малых потерях возможен распад на отдельные локализованные импульсы — солитоны (рис. 1б), впервые обнаруженные и изученные для волн на воде. Много лет ударные волны и солитоны изучались независимо различными исследователями и для разных объектов. Изменение этой ситуации (один из симптомов зарождения общего подхода в теории волн) произошло на рубеже 60-х годов, когда стали интенсивно изучаться нелинейные волны в плаз-

ме и были открыты и изучены ударные электромагнитные волны в нелинейных диэлектриках и магнетиках. В этих объектах нелинейность, реактивная дисперсия и потери различных типов оказывают сравнимое действие, поэтому совершенно ясно стало то обстоятельство, что аperiodические ударные волны и солитоны могут рассматриваться как различные предельные ситуации для одного и того же нелинейного процесса*.

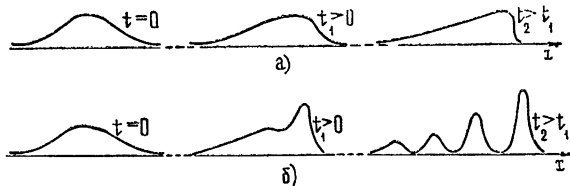


Рис. 1. Эволюция длинной волны в нелинейной среде: а) с высокочастотной диссипацией; б) с реактивной дисперсией.

Современный интерес к перечисленным «наиболее нелинейным» волнам связан не только с расширением области их приложения в различных областях физики (вплоть до биофизики) и возможностью их единого описания. Другая причина заключается, по-видимому, в том, что ударные волны и солитоны, рассматривавшиеся раньше как одиночные процессы, приобрели интерес как элементарные акты различных процессов коллективного, в том числе турбулентного типа. Так, процесс эволюции (вырождения) акустической турбулентности может быть на определенной стадии связан с образованием разрывов (ударных волн), что, очевидно, существенно изменяет спектр турбулентности.

Большой интерес вызывает также возможность существования «газа солитонов», т. е. статистического ансамбля солитонов, рассматриваемых как частицы. Предполагаемые свойства такого газа вызвали определенную теоретическую дискуссию; недавно удалось реализовать «газ солитонов» экспериментально (см. разд. VI).

В этих лекциях не содержится полного и систематического изложения теории ударных волн и солитонов, да это вряд ли было бы необходимо даже при отсутствии «объемных» ограничений. Конечно, здесь отсутствует классическая теория ударных волн газодинамического типа, давно вошедшая во все учебники по механике сплошных сред [1–3]. Широко известны также результаты теории солитонов, полученные в последнее время для ряда недиссипативных «модельных» уравнений: Кортевега—де Вриза, Клейна—Гордона и т. д., в первую очередь с помощью таких точных методов, как преобразование Бэклунда, метод обратной задачи теории рассеяния и другие (см., например, лекции В. Е. Захарова и Е. Н. Пелиновского на этой школе, а также [4, 7]).

Здесь нам хотелось бы в первую очередь отразить те подходы, которые являются общими для ударных волн (УВ) и солитонов (С) с «теоретико-волновой» точки зрения. Эта общность проявляется уже при анализе структуры стационарных волн. Далее, поскольку изучаются наиболее короткие образования, возможные в данной среде, то не удивительно, что для них весьма эффективными оказываются приближенные «коротковолновые» методы, позволяющие учесть влияние самых различных малых факторов — неоднородности среды, диссипации, расходи-

* Любопытно напомнить, что если ударные (разрывные) волны начали исследоваться, в сущности, «на бумаге» в результате теоретических работ (Стокс, Рэнкин, Гюнион и другие), то солитон был впервые обнаружен непосредственно на воде (в канале) Скоттом Расселом, который скакал за ним по берегу на лошади.

мости и сходимости волн и т. д., т. е. построить «геометрическую оптику» ударных волн и солитонов. Кроме обсуждения теоретических вопросов, здесь даются результаты наглядных модельных экспериментов, позволяющих наблюдать многие процессы, связанные с солитонами.

II. О СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ

Сначала — некоторые общие замечания. Фундаментальное свойство рассматриваемых предельных волн заключается в следующем. Поскольку они представляют собой резкие образования (перепады, импульсы), на фоне относительно плавных изменений поля, то по отношению к их внутренним масштабам изменение формы этих волн происходит медленно. Поэтому их можно считать локально стационарными, т. е. зависящими от одной переменной $\xi = t - x/V$, где V — постоянная скорость. Это обращает исходную систему нелинейных уравнений с частными производными в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. По определению, в фазовом пространстве этой системы предельная волна отвечает траектории, соединяющей две точки равновесия (либо, в частном случае, возвращающейся в ту же точку). Будем считать, что такая траектория (сепаратриса) для данной пары точек единственна (или их конечное число). Для ударных волн относительно существования и единственности «сепаратрисных» траекторий могут быть высказаны довольно общие утверждения [5, 6]. Они относятся прежде всего к классическим (дивергентным) системам уравнений, которые обычно могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial B_i}{\partial x} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (1a)$$

$$A_i = \tilde{A}_i(u) + \frac{\partial \alpha_i(u)}{\partial x} + \frac{\partial \beta_i(u)}{\partial t} + \dots, \quad (1b)$$

$$B_i = \tilde{B}_i(u) + \frac{\partial \gamma_i(u)}{\partial x} + \frac{\partial \delta_i(u)}{\partial t} + \dots$$

Здесь $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ — совокупность искоемых функций, \tilde{A} , \tilde{B} , α , β и т. д. — функции от u , а многоточия отвечают членам с высшими производными. Уравнения (1 б) (им можно было бы придать более общий вид почти без ущерба для дальнейших выводов) назовем уравнениями связи; члены с высшими производными ответственны либо за диссипацию, либо за дисперсию (в первом случае они содержат нечетные, а во втором — четные производные).

К решению систем типа (1) сводятся многочисленные задачи газодинамики (где члены с γ отвечают вязкости и теплопроводности), магнитной гидродинамики, физики плазмы, электродинамики нелинейных сред и т. д.

Для стационарных волн, зависящих от одной переменной ξ , уравнения (1 а) дают алгебраическую связь

$$V(A_i - A_i^{(1)}) = B_i - B_i^{(1)} \quad (2)$$

($A_i^{(1)}$, $B_i^{(1)}$ — равновесные значения при $\xi \rightarrow -\infty$), а (1 б) переходят в обыкновенные дифференциальные уравнения. Будем считать, что суммарный порядок системы (1 б) равен m (тогда вся система (1) — порядка $N = n + m$). Если существует решение, приходящее при $\xi \rightarrow \infty$ в но-

вое равновесное состояние $u_i^{(2)}$, то из (2) и (1б) получаются граничные условия:

$$V(A_i^{(2)} - A_i^{(1)}) = B_i^{(2)} - B_i^{(1)}; \quad (3a)$$

$$A_i^{(1,2)} = \tilde{A}_i^{(1,2)}(u_i^{(1,2)}), \quad B_i^{(1,2)} = \tilde{B}_i^{(1,2)}(u_i^{(1,2)}). \quad (3б)$$

Для ударных волн обычная идеализация состоит в том, что УВ рассматривается как движущийся разрыв непрерывности, в непосредственной близости от которого поле удовлетворяет граничным условиям (3), а вне разрыва поле изменяется настолько медленно, что оно описывается уравнениями (1а) и «идеальными» квазистатическими уравнениями связи $A = \tilde{A}(u)$, $B = \tilde{B}(u)$. Впрочем, это справедливо и для солитонов, но отличие проявляется в поведении энергетических величин. Из газодинамики и других физических примеров хорошо известно, что на ударном фронте происходит диссипация энергии (рост энтропии среды). Важно, однако, что величина энергии ΔW , поглощаемая в единицу времени, может быть найдена уже в «разрывном» приближении из уравнений (3) и, следовательно, зависит только от равновесных значений $u^{(1,2)}$, но не зависит от конкретного механизма диссипации, определяемого уравнениями (1б). Отсюда легко заключить, что если в этих уравнениях устранить члены, связанные с потерями, и оставить лишь дисперсию, то фазовые траектории, соединявшие точки равновесия в диссипативном случае, исчезают. В прозрачной (консервативной) нелинейной среде сепаратрисная траектория может либо возвращаться в исходную точку, либо соединять такие точки равновесия (если они имеются), в которых полная энергия системы одинакова (оба эти случая, в свою очередь, невозможны в диссипативной системе). Именно такие «консервативные» стационарные волны естественно называть солитонами, в отличие от ударных волн.

Другой важный вопрос связан с условиями существования, единственности и, наконец, устойчивости предельных волн. Для ударных волн эти вопросы были в основном выяснены в начале 60-х гг. Правда, простейший критерий устойчивости ударных волн был известен гораздо раньше. Он относится к «идеальным» гиперболическим системам уравнений (1а), для которых связи (1б) квазистатичны, а УВ рассматривается как разрыв непрерывности, удовлетворяющий условиям (3).

Если линеаризовать функции \tilde{A} и \tilde{B} около постоянных значений $u^{(1,2)}$, то решение получившейся линейной гиперболической системы n уравнений (1а) в каждой области является суперпозицией n волн, бегущих с различными скоростями u_k ; каждая из этих волн характеризуется одной скалярной величиной. Хорошо известное условие того, что с ударной волной «все в порядке», состоит в том, что полное число m «убегающих» от разрыва волн равно $n - 1$ — в этом случае при малых возмущениях разрыва (вызванных, например, падающей волной) n граничных условий однозначно определяют $n - 1$ убегающих волн плюс возмущение скорости самого разрыва δV . Такой разрыв принято называть эволюционным. Если $m > n - 1$, то некоторые из волн могут быть произвольными, в том числе неограниченно растущими, и такой разрыв неустойчив (например, ударная волна разрежения в газодинамике). Если же $m < n - 1$, то задача о малых возмущениях вообще не имеет решения, и эти возмущения должны быть конечными — такой неэволюционный разрыв мгновенно распадается на какие-то другие образования. Так ведет себя вообще любой разрыв, не удовлетворяющий всем n граничным условиям (3). Соответствующие примеры давно рассмотрены

для газодинамики, магнитной гидродинамики, теории электромагнитных ударных волн и т. д.

Возвращаясь к непрерывным стационарным ударным перепадам, существующим в рамках полной системы (1), можно высказать важное утверждение, справедливое для диссипативных сред [8]: указанное выше условие эволюционности скачка, получаемое подсчетом уходящих волн, является необходимым условием существования и единственности соответствующего «сепаратрисного» решения системы (1) (чаще всего эти условия оказываются и достаточными; строго говоря, для достаточности требуется наложить некоторые дополнительные ограничения [5, 6]). Таким образом, о возможности существования стационарных ударных волн в диссипативных средах можно судить по поведению длинноволновых возмущений, для которых диссипацией можно пренебречь.

Одно из недавно рассмотренных исключений из этого правила связано с возможностью возникновения возмущений, распространяющихся с той же скоростью, что и сам разрыв [9]. Для такого возмущения, в результате доплеровского сдвига, частота и волновое число на границе стремятся к бесконечности, т. е. это возмущение принципиально коротковолновое. Для него ударную волну уже нельзя считать разрывом, и необходимо учитывать конкретные диссипативные свойства системы. Такая ситуация может возникнуть, например, для магнито-гидродинамических ударных волн.

В реальных случаях интересно не только выяснить вопрос о существовании разрыва, но и как-то судить о структуре ударного фронта или хотя бы о его характерной длительности. При этом, конечно, нельзя обойтись без учета конкретных диссипативных и дисперсионных членов в уравнениях (1б). Все же нередко удается получить общее представление о структуре ударной волны, рассматривая снова малые возмущения в районе ее «подножия» и «вершины», но уже учитывая все волны, бегущие со скоростью V . Эти волны можно представить в виде $\exp[i(\omega t - kx)]$, где ω и k , вообще говоря, комплексны и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\omega = f(k), \quad \omega = Vk. \quad (4)$$

Первое из них — дисперсионное уравнение среды в линейном приближении, а второе — условие стационарности волны (фазовая скорость возмущений равна V). Отсюда находятся ω и k . Ясно, что у подножия ударной волны имеют смысл лишь решения с $\text{Im } \omega < 0$, а у вершины — с $\text{Im } \omega > 0$, поскольку все возмущения должны исчезать при удалении от ударного фронта. Выделив среди них волну с наименьшей по модулю частотой Ω , можно, вообще говоря, утверждать [5, 6], что длительность ударного фронта T_s должна быть порядка Ω^{-1} . Действительно, если Ω значительно меньше частот остальных волн, удовлетворяющих (4), а $T_s \ll \Omega^{-1}$, то по отношению к волнам с частотами, близкими к Ω , ударную волну можно считать разрывом, а такой разрыв вовсе не удовлетворяет указанным выше условиям эволюционности. Поэтому масштаб Ω^{-1} необходимо включить в структуру эволюционной ударной волны.

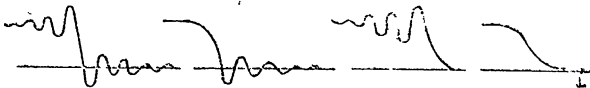


Рис. 2. Возможные структуры ударных волн.

В общем случае структура фронта ударных волн может быть аperiодической, но может и содержать осцилляции (рис. 2). Об этом

тоже удается судить по поведению волн с наименьшими по модулю Ω [5]. Если Ω близка к действительной, то, наряду с фазовой скоростью V , имеет смысл говорить о групповой скорости таких волн v_g . Если в области перед ударным фронтом $v_g > V$, то ударная волна начинается с осцилляций (возмущение убегает вперед), а при $v_g < V$ начало волны апериодично. Наоборот, позади ударной волны осцилляции возможны только при условии $v_g < V$. Чаще всего осцилляции возникают только впереди или только позади ударного фронта, однако возможно, что те и другие существуют одновременно. Примером могут служить ударные электромагнитные волны в коаксиально-спиральном волноводе с ферритом [5, 6].

Выделение с каждой стороны по одной волне с существенно более низкой, чем остальные, частотой, вовсе не является чем-то искусственным. Так, если величина самого ударного перехода достаточно мала, то и скорость его V близка к скоростям низкочастотных волн, описываемых идеализированными уравнениями (1 а) при $A = \tilde{A}^{(1)}$, $B = \tilde{B}^{(1)}$. Если такая волна с каждой стороны одна, то ее частота будет много меньше частот остальных волн, существующих при учете дисперсии и диссипации.

Следует также упомянуть ситуацию типа «разрыв в разрыве», когда на протяжении ударного фронта имеется еще более резкий перепад. Это возможно, если среда обладает двумя или более существенно различными по порядку величины временами релаксации (замедленное возбуждение внутренних степеней свободы). Самый известный пример — изотермический скачок в газодинамике, когда на фоне основной структуры, определяемой теплопроводностью среды, существует резкий скачок давления, структура которого определяется вязкостью. Подобные ситуации нередки для ударных волн в плазме, где электронная и ионная компоненты обладают существенно различными свойствами; они также легко реализуются в электродинамике. Любопытно, что о наличии таких скачков также можно судить на основании уравнений (4). Именно, при одном из значений поля, лежащем в пределах ударного перепада, это уравнение должно иметь решение $\omega \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ в рамках линеаризованной системы (1) (теперь уже с учетом диссипации). В окрестности такой точки бесконечных частот необходимо поместить разрыв, величина и положение которого могут быть определены из граничных условий, а структура описывается уравнением более высокого порядка [5].

Таким образом, относительно структуры ударных волн могут быть сделаны довольно общие высказывания. Для консервативных волн — солитонов — подобные вопросы почти не рассматривались, однако ряд полезных утверждений сделать нетрудно, пользуясь аналогичным подходом. Как уже говорилось, солитону отвечает сепаратриса, возвращающаяся в исходную точку или соединяющая точки с одинаковой энергией, причем ударная волна не может связывать такие точки. Будем иметь в виду первый, наиболее типичный случай, т. е. импульс, возвращающий систему в исходное состояние. Исследование линейных возмущений вблизи «пьедестала» (равновесного значения), на котором распространяется солитон, снова дает определенную информацию о структуре стационарных волн. Уравнения (4) для ω и k справедливы и здесь, однако в консервативном случае они имеют либо чисто действительные, либо попарно сопряженные корни, т. е. число нарастающих волн равно числу затухающих. Ясно, что мы опять должны учитывать только нарастающие волны впереди и затухающие позади солитона (что в данном случае, по существу, одно и то же ввиду обратимости процесса), т. е. ω должно быть либо чисто мнимым, либо комплексным.

В последнем случае «хвосты» солитона содержат осцилляции. Если, однако, для ударных волн мы могли судить о появлении осцилляций по соотношению между групповой и фазовой скоростями возмущений ($v_g > V$ — осцилляции впереди, $v_g < V$ — позади), то здесь эти соотношения непосредственно не годятся уже потому, что осцилляции должны возникать одновременно с обеих сторон. Поэтому слабозатухающие «хвосты» с $\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$ (то же для k), для которых и имеет смысл групповая скорость, здесь невозможны, за исключением случая очень слабой дисперсии, когда v_g и V практически не различаются (этот случай, впрочем, особый во многих отношениях). Чтобы показать это формально, в уравнении $Vk = f(k)$ с действительным f , следуя из (4), положим $k = k_1 + ik_2$, где $k_2 \ll k_1$. Тогда получаем два уравнения: $k_1 V = f(k_1)$ и $V = f'_k(k_1)$, которые совместны только при $f(k) = Vk$, т. е. в отсутствие дисперсии; в противном случае для осциллирующих «хвостов» $k_2 \sim k_1$. Для ударных волн это рассуждение, конечно, неприемлемо, поскольку $f(k)$ имеет мнимую часть, связанную с диссипацией.

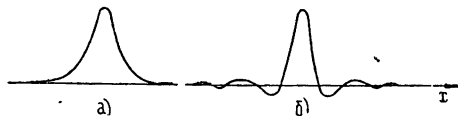
В качестве примера рассмотрим два хорошо известных уравнения — уравнение Кортевега — де Вриза (КДВ) и одну из его модификаций:

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0; \quad (5a)$$

$$u_t + auu_x + bu_{xxxx} = 0. \quad (5b)$$

Будем рассматривать солитоны, бегущие по нулевому pedestalу ($u(\pm\infty) = 0$). Отыскивая «хвосты» в виде $\exp[i(\omega t - kx)]$, мы получим в случае (5), что $\omega + bk^3 = 0$. Это уравнение совместно с $\omega = kV$ при $bk^2 = -V$. Ясно, что в солитоне k не может быть действительным, поэтому $V/b > 0$, т. е. в зависимости от знака b возможен либо «быстрый» ($V > 0$), либо «медленный» ($V < 0$) солитон. Поскольку k чисто мнимое, то «хвосты» солитона аperiодичны (рис. 3а). Это, конечно, согласуется с хорошо известным точным решением.

Рис. 3. а) Солитоны в уравнении (5а);
б) в уравнении (5б).



Для уравнения (5б) соответственно $\omega - bk^5 = 0$, т. е. $bk^4 = V$. При $V/b > 0$ это уравнение имеет «подходящую» пару корней: $k = \pm i(V/b)^{1/4}$, и «хвосты» такого солитона аperiодичны. Если же $V/b < 0$, то появляются четыре комплексных корня: $k = \pm(1 \pm i) \times (V/4b)^{1/4}$. Поскольку $\text{Re } k \neq 0$, то хвосты солитона осциллируют (рис. 3б). Таким образом, при данном знаке b в принципе возможны как быстрые, так и медленные солитоны, но они качественно различны (это различие скажется при анализе взаимодействия солитонов). Все это в основном согласуется с результатами численного исследования солитонов в уравнении (5б) [10].

Отметим, что солитоны могут обладать весьма своеобразными энергетическими свойствами. Вообще солитон — единственный тип стационарных консервативных волн, обладающих конечной энергией. В обычных случаях энергия W монотонно растет с ростом амплитуды солитона A . Однако даже при малой нелинейности это не всегда так. Рассмотрим, например, модифицированное уравнение КДВ в виде

$$u_t + qu^p u_x + \beta^2 u_{xxx} = 0, \quad (6)$$

где q — положительно. Солитоны в таком уравнении имеют вид [11]

$$u = A (\text{sch } \xi/\Lambda)^{2/p},$$

где

$$\Lambda = 2\beta/qV^{1/2} = \beta \left[\frac{2(p+1)(p+2)}{Aq\rho^2} \right]^{1/2}.$$

Если, как обычно, уравнение (6) описывает бегущую волну в слабонелинейной системе, то плотность энергии пропорциональна u^2 , а полная энергия солитона $W \sim A^2 \Lambda$, т. е. $W \sim A^2 q^{1/2}$. Следовательно, при $q = 4$ энергия лишь слабо (в следующем порядке по нелинейности) зависит от A , а при $q > 4$ энергия солитона растет с уменьшением амплитуды, вследствие резкого увеличения его ширины. Эта возможность вовсе не так экзотична, как может показаться на первый взгляд. Правда, в механике сплошной среды для слабых волн чаще всего достаточно ограничиться квадратичной ($q = 1$) или кубической ($q = 2$) нелинейностью, но для электромагнитных волн нелинейная среда (феррит, сегнетоэлектрик) часто характеризуется весьма резкими нелинейными функциями.

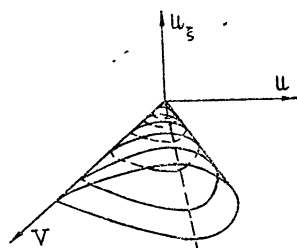


Рис. 4. «Поверхность солитонов» в фазовом пространстве переменных (u , u_x , V).

В заключение отметим одну очевидную, но важную для дальнейшего особенность, относящуюся к любым стационарным волнам. При переходе к уравнениям в обыкновенных производных все же сохраняется «след» от волнового характера системы, ибо эти уравнения содержат дополнительный произвольный параметр — скорость волны V . Поэтому фазовое пространство всех стационарных решений исходной системы N -го порядка должно, строго говоря, иметь дополнительное, $N + 1$ -е измерение, отвечающее параметру V (хотя все траектории перпендикулярны оси V). Например, в рамках уравнения КДВ (5а) все солитоны, находящиеся на нулевом «пьедестале», заполняют поверхность в пространстве u , u_x и V (см. рис. 4).

III. «ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА» УДАРНЫХ ВОЛН И СОЛИТОНОВ

1. Приближенные уравнения

Изучение нестационарных процессов, связанных с УВ и С, доставило физикам много хлопот, поскольку оно связано с большими математическими трудностями, преодоление которых возможно только в рамках тех или иных приближений. Один из наиболее плодотворных подходов к описанию поведения УВ и С связан с использованием «коротковолнового» приближения, основанного на гипотезе о плавности изменения параметров волны. Эта гипотеза позволяет учесть влияние самых различных возмущающих факторов — таких, как неоднородность и нестационарность среды, потери, искривление фронта и т. д., которые делают практически невозможным получение точных решений. В результате можно построить своего рода «геометрическую оптику» или «геометрическую акустику» для УВ и С. Последние остаются близкими к стационарным, но могут изменяться по величине и длительности в пределах поверхности (или гиперповерхности) стационарных решений типа изображенной выше на рис. 4. Заметим, что уже само по себе разрывное описание ударных волн содержит элементы коротковолнового подхода, однако область его применения можно существенно расширить.

Преимущества коротковолнового описания для УВ были поняты уже довольно давно. Первой на этом пути была, по-видимому, работа Ландау [12], где рассматривались цилиндрические и сферические волны на большом расстоянии от точки их образования (места взрыва); подобные задачи впоследствии рассматривались неоднократно [42]. Позже была сформулирована «нелинейная геометрическая акустика», (НГА) для неоднородных [13] и нестационарных [14] сред в механике; аналогичные исследования проводились для электромагнитных волн [15]. Для солитонов аналогичный подход был развит позже [16, 32] на основе в общем тех же соображений, что и для периодических стационарных волн [17]. Итак, ударная волна или солитон рассматривается как движущийся фронт, скорость, которого в каждый момент определяется амплитудой волны, а также в общем случае медленно меняющимся «пьедесталом». В результате могут быть написаны связанные уравнения для лучей (нормалей к фронту) и для изменения амплитуды вдоль лучевых трубок. Впервые такие уравнения написал Уизем [18] применительно к ударным волнам; аналогичный подход оказывается весьма эффективным и для солитонов.

Воспользуемся ортогональной системой координат α, β , образованной последовательными положениями ударного фронта ($\alpha = \text{const}$) и лучами ($\beta = \text{const}$), см. рис. 5. Для простоты мы рассматриваем двумерный случай. Будем считать, что α пропорционально времени t , т. е. пройденный фронтом путь равен $V(\alpha, \beta)\delta\alpha$, где V — локальная скорость волны. Ширина лучевой трубки равна $\Delta(\alpha, \beta)\delta\beta$, где Δ — ширина единичной (по β) трубки. Тогда, рассматривая криволинейный четырехугольник PSRQ на рис. 5, легко определить изменение $\delta\theta$ угла наклона луча в пространстве с изменением α и β . В результате получаем два кинематических уравнения для лучей:

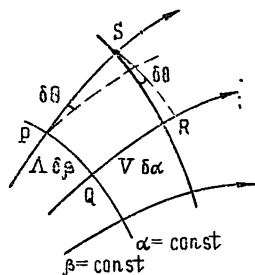


Рис. 5. Криволинейная система координат «лучи—фронты» для солитонов.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{V} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial V}{\partial \beta}. \quad (7)$$

Чтобы замкнуть эту систему, необходимо знать связь между скоростью фронта V и сечением трубки Δ . Для ударных волн это вопрос не простой, поскольку все определяется волновыми движениями вне ударного фронта. Уизем [18] использовал для этого связь Δ с V , взятую из решения задачи о канале переменного сечения; это, однако, требует дополнительных допущений. Мы заметим, что для солитонов ситуация в этом смысле гораздо проще, поскольку при нулевом «пьедестале» и в отсутствие потерь выполняется закон сохранения энергии:

$$W\Delta = \text{const}, \quad (8)$$

где W — полная энергия на единицу длины фронта солитона. Поскольку V и W связаны с амплитудой солитона A , то и Δ связана с A , и система (7) сводится к двум уравнениям для θ и A . Правда, в общем случае эти уравнения остаются весьма сложными. Поэтому сначала мы рассмотрим упрощенный, но зато универсальный подход к подобным задачам, справедливый для УВ и С небольшой амплитуды.

Чтобы пояснить, о чем идет речь, заметим, что если нелинейность сравнительно мала (порядка $\varepsilon \ll 1$), то продольные искажения волны проявляются на расстояниях $l_{\text{нел}}$ порядка λ/M , где λ — характерная длина волны. Будем считать, что все возмущающие эффекты — неоднородность среды, диссипация и т. д. — сказываются на таких же расстояниях. Это же примем для эффектов рефракции лучей, которые проявляются на интервалах порядка Λ/θ , где Λ — характерная ширина фронта, а θ — угол его искривления на масштабе Λ . Вместе с тем, как показывают простые оценки, нелинейная саморефракция лучей существенна, в лучшем случае, на интервалах порядка Λ/\sqrt{M} (см. также разд. V), и во многих случаях ею можно пренебречь на рассматриваемых расстояниях $l_{\text{нел}}$. Это позволяет, в свою очередь, считать, что вся геометрия задачи, т. е. картина лучей в пространстве, оказывается такой же, как в линейной среде, и может быть построена в рамках линейной геометрической оптики (или акустики). Нелинейность же оказывается существенной в процессе пространственно-временных искажений волны, распространяющейся вдоль луча.

Соответствующие приближенные уравнения могут быть получены последовательным применением асимптотических методов, обсуждавшихся на прошлой школе [19] для уравнений, близких к линейным гиперболическим. Впрочем, здесь для нас достаточно следующих простых соображений. В линейном приближении для лучевой трубки должен выполняться закон сохранения в виде $\Pi\Delta = \text{const}$, где Π — плотность потока энергии; в отсутствие дисперсии это справедливо для каждой точки профиля волны, т. е. $(\Pi\Delta)_t + v(\Pi\Delta)_l = 0$, где l — координата вдоль луча, $v(l)$ — скорость распространения волны. Поскольку $\Pi = \chi(l)u^2$, где u — искомая переменная, а коэффициент χ в неоднородной среде зависит от l , то, переходя к переменным $\tau = t - \int \frac{dl}{v}$ и $l' = l$, получим: $u_t + u(\chi\Delta)_l / 2\chi\Delta = 0$. Добавляя теперь малые нелинейности и дисперсию, следует иметь в виду, что благодаря малости соответствующих членов, они будут такими же, как в плоской волне, поскольку все «геометрические» поправки к ним уже следующего порядка малости. По этой же причине в этих членах все производные по χ и l заменяются производными по τ , поскольку зависимость от τ «коротковолновая» (с масштабами длины и периода волны) и $v \frac{\partial}{\partial l'} \ll \frac{\partial}{\partial \tau}$. В результате получаем уравнение вида

$$u_t = -u \frac{(\chi\Delta)_l}{2\chi\Delta} + \hat{L}_\tau(u), \quad (9)$$

где \hat{L}_τ — нелинейный оператор, содержащий производные по τ . Первый член в правой части (9) легко устранить, переходя к переменной $u/\sqrt{\chi\Delta}$.

Физические приложения этой простой теории весьма обширны. Рассмотрим некоторые из них.

2. Слабые ударные волны (акустика)

а) Начнем со случая, когда среда не обладает дисперсией. Типичный пример — акустические волны конечной амплитуды. Уравнение (9) для акустического давления p в такой волне имеет (для неподвижной среды) вид

$$\frac{\partial p}{\partial l'} - \frac{\gamma + 1}{2\rho c^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{c\rho}{2\Delta} \frac{d}{dl} \left(\frac{\Delta}{c\rho} \right) p = 0, \quad (10)$$

где $\rho(l')$, $c(l')$ — невозмущенные плотность и скорость звука, $\tau = t - \tau_0(l)$, τ_0 — эйконал линейной задачи, определяемый уравнением $c^2(r) (\Delta\tau)^2 = 1$ и связанный с Δ уравнением $\nabla^2\tau = \Delta^{-1} \frac{\partial(\Delta/c)}{\partial l}$; γ — показатель адиабаты, который также может зависеть от координат (см. также [16, 20]); далее полагаем $\gamma = \text{const}$.

Уравнение первого порядка (10) может быть без труда проинтегрировано: Делая в нем замену переменных

$$P = p \sqrt{\frac{\Delta}{c\rho}} = p/q(l'), \quad X = \int_0^{l'} \frac{dl'}{c^2 \sqrt{c\rho\Delta}}, \quad (11)$$

мы получим для P уравнение $P_{l'} + PP_{\tau} = 0$, откуда

$$\tau - PX = \Phi(P), \quad (12)$$

где Φ — произвольная функция. Это хорошо известная простая волна. Любопытно, что влияние неоднородности среды и искривления лучей сводится в этом приближении только к особенностям перехода от X и P к реальным переменным, т. е. к изменению амплитуды волны и длины реального пути, на котором происходят искажения. Впрочем, как мы увидим ниже, эти особенности могут быть весьма значительными.

Что касается ударных волн, то при достаточно малых потерях они остаются квазистационарными и рассматриваются как разрывы, обычным образом «вписываемые» в простую волну так, чтобы скорость разрыва всегда равнялась полусумме скоростей простой волны на его концах. Пользуясь (12), можно получить следующие уравнения, описывающие изменение значений P_2 и P_1 на разрыве с расстоянием:

$$\frac{1}{2} \frac{dX}{dP_2} (P_2 - P_1) + X = \frac{d\Phi}{dP_2}; \quad (13a)$$

$$\Phi(P_2) - \Phi(P_1) = X(P_2 - P_1). \quad (13b)$$

Для симметричного разрыва, когда $P_2 = -P_1 = P$, отсюда сразу следует алгебраическое уравнение $\Phi(P) = XP$, которое хорошо известно для синусоидального граничного условия $\Phi(P) = \omega^{-1} \arcsin(P/P_{\max})$. Хорошо изучен также случай импульсного возмущения, когда перед разрывом $P_1 = 0$, и (13a) может быть проинтегрировано. Рассматривая уравнение (12), легко видеть, что образуется разрыв всегда в точке профиля с максимальной начальной крутизной, а координата его образования $X_* = (\Phi'_P)_{\min} = \{\max [P'_\tau(x=0)]\}^{-1}$. Периодическая волна при больших X становится пилообразной и затухает как X^{-1} , а импульс превращается в треугольный, затухая как $X^{-1/2}$. Однако уже для этих хорошо известных случаев существенно сказывается неоднородность среды. В частности, при пересчете к реальным переменным может оказаться, что при $l \rightarrow \infty$ величина X остается конечной, а тогда линейный профиль не достигается, и возможно даже, что разрыв не возникает вовсе.

б) В качестве приложения теории рассмотрим вкратце одну проблему, которая не является очень уж новой, но в последнее время интенсивно изучается. Она связана с распространением разрывных

волн в стратифицированной среде — атмосфере, океане. Первые задачи такого рода ставились одномерным образом — рассматривалась плоская волна, бегущая вдоль градиента стратификации (вверх или вниз), тогда в формуле пересчета (11) $\Delta = \text{const}$, $l' = x$.

Имея в виду, например, изотермическую (экспоненциальную) атмосферу, т. е. $c = \text{const}$, $\rho = \rho_0 e^{-x/H}$, где H — действующая высота атмосферы, мы получим, что в заданном возмущении разрыв образуется на расстоянии [14]

$$x_* = 2H |\ln(1 \pm x_{0*}/2H)|, \quad (14)$$

где x_{0*} — расстояние образования разрыва в однородном газе, знак «+» отвечает движению вверх, а «-» — вниз. Очевидно, x_* всегда меньше x_{0*} , т. е. при распространении вверх нелинейные искажения происходят быстрее (ввиду уменьшения плотности относительная нелинейность растет). Напротив, при распространении вниз $x_* > x_{0*}$; более того, если $x_{0*} > 2H$ (т. е. исходные градиенты поля в волне малы), то разрыв не образуется вовсе; это как раз тот случай, когда X остается конечным при $l = x \rightarrow \infty$.

На больших расстояниях скачки различных физических величин изменяются по-разному. Так, скачок скорости частиц v_p при движении вверх для периодической волны асимптотически стремится к постоянному значению [21], а для импульса — растет как $\exp(x/4H)$. Конечно, энергия волны всегда убывает за счет более сильного уменьшения ρ .

в) Аналогичным образом может быть решена задача о распространении нелинейных магнитозвуковых волн в проводящем газе (плазме) в присутствии магнитного поля [22]. Такая задача небезынтересна в связи с изучением движений в хромосфере и короне Солнца, а также магнитосфере Земли. Упомянем здесь лишь случай сильного магнитного поля, когда $c^2 \ll H^2/4\pi\rho$, т. е. магнитное давление больше теплового. Тогда для медленной волны решение оказывается таким же, как и для обычного звука, но с заменой c на $c \cos \varphi$, где φ — угол наклона магнитного поля к вертикали.

Для быстрых волн в формуле (10) следует положить

$$P = ue^{x/4H}, \quad X = \frac{3H}{2\sigma_0^2} (1 - e^{-x/4H}),$$

где u — продольная скорость частиц, $\sigma = H/\sqrt{4\pi\rho}$ — скорость быстрой волны, $\sigma_0 = \sigma(x=0)$. Ударная волна возникает в точке

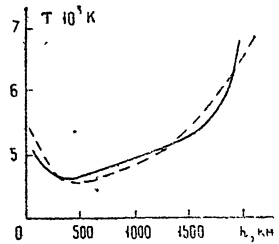
$$x_* = \frac{4}{3} \left| H \ln \left(1 - \frac{3}{4} \frac{x_{0*}}{H} \right)^{-1} \right|. \quad (15)$$

При движении вверх $x_* > x_{0*}$ — из-за увеличения скорости волны она искажается на больших расстояниях. Если $H < 3/4 x_{0*}$, то разрыв не образуется вовсе.

г) Возможное развитие данного подхода состоит в попытках учета влияния волны на усредненное состояние среды. В связи с этим целесообразно упомянуть возможность описания следующего процесса в хромосфере Солнца, хорошо известного астрофизикам: акустические волны, возникающие из-за конвективных движений, превращаются в ударные и, диссипируя, нагревают газ, поддерживая этим рост температуры в хромосфере. Для описания этого процесса нужно решить самосогласованную задачу, т. е. определить закон эволюции разрывов в неоднородной среде и одновременно найти вид этой неоднородности, на который влияют волны. Для решения используются приведенные выше фор-

мулы НГА для разрывов и усредненное за период волны уравнение баланса тепла (с учетом излучения) [23]. Полное решение, правда, требует применения ЭВМ, но это неизмеримо проще, чем решать сразу исходные уравнения газодинамики. Найденный таким образом температурный профиль хромосферы хорошо согласуется с данными наблюдений (рис. 6).

Рис. 6. Ход температуры в хромосфере Солнца (высота h отсчитывается от фотосферы). Сплошная линия — теория, штриховая — данные наблюдений.



д) Сложнее обстоит дело в случае наклонного распространения волн [24], поскольку аналитический расчет хода лучей и изменение сечения лучевых трубок даже в линейном приближении чаще всего довольно сложен. Для плоскостройной среды в двумерной задаче удобно перейти от τ, l к переменным x и $t' = t - y \cos \theta / c$, где x, y — вертикальная и горизонтальная координаты, а θ — угол наклона луча при $x = 0$. Тогда на фиксированном луче как Δ , так и приведенный путь X зависят только от x .

Найти явные выражения для формы лучей или для зависимости приведенного пути X от x удается, например, в случае $\rho = \text{const}$ при некоторых степенных зависимостях $c(x)$, что иногда близко соответствует условиям океана [25]. Самой простой была бы здесь линейная аппроксимация: $c = c_0(1 + x/H)$, но тогда вычисление интегралов приходится проводить численными методами; впрочем, одно из достоинств метода НГА состоит в том, что ЭВМ только и нужна для вычисления этих несложных интегралов. Один из результатов расчета показан на рис. 7; где изображена зависимость высоты образования разрыва x_* от угла θ падения плоской гармонической волны на слой (в сторону увеличения c).

е) Здесь мы сталкиваемся с обычной для всех геометрических методов проблемой: при наклонном распространении в сторону роста c возникает каустика, на которой «коротковолновые» формулы приводят к бесконечному полю, и необходимо учитывать дифракцию. Можно, однако, показать, что, несмотря на рост амплитуды волны, общий нелинейный набег фазы PX в формуле (12) остается конечным вплоть до самой каустики. Вместе с тем, дифракция в окрестности каустики влияет очень сильно, и при не слишком большой амплитуде можно пренебречь нелинейностью в прикаустической области, рассматривая линейную трансформацию приходящей в эту область волны [24]. Обратите внимание на кажущуюся парадоксальность ситуации — нелинейностью можно пренебречь там, где амплитуда волны максимальна! Форма волны существенно несинусоидальна и определяется нелинейными искажениями вдоль луча по формулам НГА. Линейная трансформация импульсных волн на каустике довольно хорошо изучена [26]. Результат ее сводится к тому, что в спектре волны все синусы заменяются на косинусы и наоборот; ясно, что форма волны при этом существенно изменяется. В области ударного фронта вместо разрыва в волне возникает логарифмическая особенность (рис. 8). Поэтому для получения ограниченного всюду решения нужно, строго говоря, учесть конечность длительности фронта. Впрочем, практически образовавшийся пик сам очень быстро «затупляется» ввиду диссипации разрыва, немедленно возникающего у его вершины.

После каустики волна снова искажается вдоль лучевой трубки по формулам НГА. Заметим, что трансформация на каустике приводит к тому, что асимптотическое (на пилообразном этапе) значение амплитуды может дополнительно уменьшаться почти вдвое.

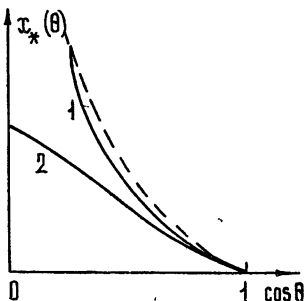


Рис. 7.

Рис. 7. Зависимость высоты образования разрыва в плоской волне от угла падения на неоднородный слой с $c(x) = c_0(1 + x/H)$. Кривая 1 отвечает меньшей начальной амплитуде, чем кривая 2. Штриховая линия — высота каустики.

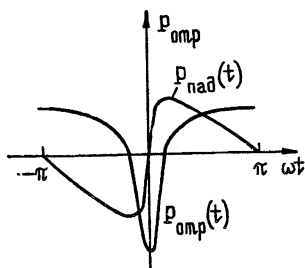


Рис. 8.

Рис. 8. Линейная трансформация простой волны на каустике.

ж) Отметим, что такой «поэтапный» подход к учету дифракции и нелинейности оказывается эффективным и для ряда других задач, в частности, для задач об излучении, дифракции и фокусировке разрывных акустических волн [27, 28]. Так, при излучении пилообразной волны через отверстие в экране в области, прилежащей к экрану, нелинейность при определенных условиях не успевает сказываться, дифракция же существенно изменяет форму колебаний (рис. 9). В осевом («проекторном») цилиндре форма волны становится прямоугольной, а вне этого цилиндра разрывов нет вообще (это и понятно — на бесконечных частотах направленность бесконечно узкая). На этом этапе общая направленность излучения гораздо уже, чем для основной гармоники волны.

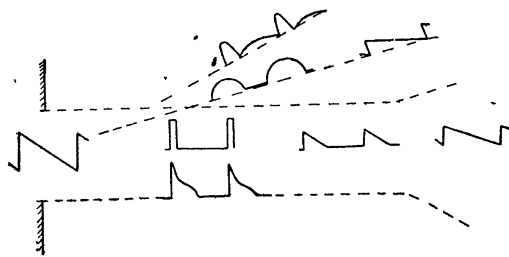


Рис. 9. Схема дифракции пилообразной волны конечной амплитуды на отверстии.

На больших расстояниях сказывается нелинейность, волна превращается в последовательность треугольных импульсов, а затем становится пилообразной и, как известно, для сферических волн «забывает» о своей начальной амплитуде. В результате диаграмма направленности становится практически изотропной. Это последний вывод справедлив для любого достаточно

мощного излучателя, поле которого проходит разрывную стадию [29, 60].

з) В заключение этого раздела отметим возможность обобщения метода НГА на нестационарные среды [14] (пример — волны в неоднородно движущемся или остывающем газе). Например, в одномерном случае решение снова удастся привести к виду (12), где теперь τ — решение характеристического уравнения $\frac{D\tau}{Dt} = 0$ ($\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}$, а $v_0 =$

$= c + u_0$, $u_0(x, t)$ — скорость движения среды в отсутствие волны).
Функции q и X в (9) определяются соотношениями

$$q = (c^3 \rho_0 / v_0^2)^{1/2} \varphi, \quad \frac{D\varphi}{Dt} = \varphi \left(\frac{\partial \ln v_0}{\partial t} \right), \quad (16)$$

$$\frac{DX}{Dt} = \frac{\gamma + 1}{2} q \frac{\partial \tau}{\partial t}.$$

В этом случае энергия волны может изменяться в любую сторону даже в отсутствие всяких диссипативных процессов, поскольку нестационарная среда может совершать над полем работу любого знака. На этапе простой волны (12), т. е. в отсутствие разрывов, справедливы соотношения (хорошо известные для линейных сред [30]):

$$I_1 = WT = \text{const}, \quad I_2 = P\Lambda = \text{const}, \quad (17)$$

где T и Λ — временная и пространственная протяженности волнового импульса (или любого участка волны между двумя нулями), а W и P — энергия и количество движения в этом импульсе. Величины I_1 и I_2 являются адиабатическими инвариантами, имеющими смысл числа квантов (квазичастиц) поля. После образования разрывов соотношения (12), конечно, нарушаются из-за диссипации, однако энергия волны не обязательно монотонно убывает вдоль луча — на некотором интервале затухание на разрыве может компенсироваться ростом энергии за счет параметрического эффекта.

3. Солитоны малой амплитуды (волны на воде)

а) Один из наиболее ярких примеров нелинейной диспергирующей среды, в которой возможны солитоны, — это океан. Мы будем интересоваться волнами, длина которых превышает глубину океана (это условие особенно типично для сравнительно мелководной прибрежной области — континентального шельфа). Общие характеристики таких волн уже обсуждались на первой школе [31]. При достаточно малых уклонах дна можно воспользоваться коротковолновым приближением, причем сначала мы снова рассмотрим его в упрощенной форме, когда лучи в горизонтальной плоскости находятся из линейной теории, а вдоль луча справедливо уравнение типа (9). В данном случае это уравнение имеет вид [32]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{3}{2hv} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \frac{h^2}{6v^3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \tau^3} + \frac{1}{4h\Delta^2} \frac{\partial (h\Delta^2)}{\partial t} \eta = 0. \quad (18)$$

Здесь η — возвышение водной поверхности, $h(x, y)$ — глубина океана, $u(x, y) = \sqrt{gh}$ — скорость длинной волны без учета дисперсии и нелинейности, g — ускорение силы тяжести, Δ — сечение двумерной лучевой трубки. Согласно общему рецепту, вид оператора \hat{L}_τ , т. е. нелинейного и дисперсионного членов в (18), тот же, что и в хорошо известном уравнении Кортевега—де Вриза для плоской бегущей волны на постоянной глубине.

Для уравнения (18) какие-либо точные решения вообще неизвестны. Поэтому приходится использовать различные дополнительные упрощающие предположения. Например, если волна достаточно длинная, то дисперсионным членом можно пренебречь, и решение имеет вид

квазипростой волны (12), где теперь $P = \eta v$, $X = \int_0^l (h_0/h)^{7/4} (\Delta_0/\Delta)^{1/2} dl'$,

$\gamma = 2$ (известный факт: уравнения длинных волн эквивалентны уравнениям газодинамики с $\gamma = 2$). Аналогично тому, как это было сделано выше, можно определить точку l «обрушения» длинной волны, приближающейся к берегу — важную для приложений характеристику. Вообще говоря, с приближением к берегу (т. е. с уменьшением h) волна опрокидывается быстрее из-за увеличения ее высоты, однако эффект зависит и от угла рефракции θ . При распространении в сторону роста глубины возможно образование каустики. Как и для акустических волн, передно показать, что после отражения от каустики волны с крутым передним склоном в ней возникает резкая впадина, которая затем расширяется.

б) В этом разделе нас, однако, больше интересуют сравнительно более короткие волны, когда, благодаря влиянию дисперсии, возможно существование солитонов. Конечно, неоднородность глубины и неоднородность процесса, строго говоря, уже исключают существование стационарных волн. Если, однако, эти факторы действуют достаточно медленно, то можно говорить о квазиплоских солитонах, амплитуда и форма фронта которых плавно изменяются, а профиль волны по-прежнему определяется стационарным решением (т. е. сепаратрисой поверхности на рис. 4). Для этого нужно, чтобы в уравнении (18) члены, ответственные за изменение h и Δ , были малы в сравнении с нелинейным и дисперсионным членами (которые и сами были малы в исходных уравнениях). Это накладывает иногда довольно жесткие ограничения. Так, уклон дна должен быть не просто мал в сравнении с единицей (условие отсутствия отражений и применимости самого уравнения (18)), но и должен быть меньше крутизны водной поверхности, которая, в свою очередь, в данной задаче мала (о случае, когда выполняется обратное неравенство, мы скажем позже). Асимптотический метод, позволяющий описывать такие процессы, обсуждался на прошлой школе [19]. В приближении «линейных лучей» он приводит к следующему наглядному рецепту [33]. Умножая уравнение (18) на η и интегрируя по τ , мы получим закон сохранения энергии солитона вдоль лучевой трубки:

$$v\Delta \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 d\tau = \text{const}, \quad (19)$$

откуда для высоты солитона H и его характерной длины Δ получаем

$$H \sim \Delta^{-2} \sim h^{-1} \Delta^{-2/3}. \quad (20)$$

Заметим, что для слабой (линейной) волны, без учета перестройки ее формы, мы получили бы из (18) известный океанологам закон Грина: $H \sim h^{-1/4} \Delta^{-1/2}$. Следовательно, высота солитона резко зависит от h и Δ ввиду его дополнительного сжатия с ростом и расширения с уменьшением H .

С приближением к берегу (уменьшением глубины h) высота солитона растет; однако если H станет порядка h , то формула (20) неприменима, и в конце концов солитон разрушается. При наклонном распространении волны к берегу возможна «конкуренция» между двумя сомножителями в правой части (20): наряду с падением h растет Δ , поскольку v уменьшается. В результате изменение амплитуды солитона может быть немонотонным (рис. 10). При удалении от берега (рост h) солитон приходит на каустику, на которой по тем же причинам, что

и в предыдущем пункте, он преобразуется по линейным формулам. При этом, как можно показать, возмущение поверхности становится знакопеременным.

Следует заметить, что формула (19) справедлива не только для солитонов, но и для квазипериодических волн, близких к стационарным, только интеграл теперь берется за период волны. Такой подход позволяет, в частности, описать превращение почти синусоидальной периодической волны в волну, близкую к серии одиночных возвышений, в процессе приближения к берегу [16, 32].

Пользуясь (20), можно описать также цилиндрическую расходимость солитона (при этом $H \sim r^{-4/3}$), распространение в узких каналах переменного сечения и т. д. В настоящее время имеется уже довольно много экспериментальных данных (полученных главным образом для одномерных волн в лабораторных условиях), которые подтверждают формулу (20).

в) Если уклон дна больше, чем крутизна (волны) [32, 34], то в уравнении (18) можно, наоборот, пренебречь и дисперсией и нелинейностью по сравнению с влиянием неоднородности. Пусть, например, солитон из области с постоянной глубиной h_1 попадает на участок с достаточно резким (в указанном смысле) уклоном дна. На этом участке происходит линейная трансформация волны по закону $\eta = h^{-1/4} f(t - \int dx/v(x))$, где f отвечает падающему солитону (рассматриваем для простоты нормальное падение); длительность импульса при этом не меняется. Если на некотором расстоянии L дно снова горизонтально, то для новой глубины h_2 прошедшая волна уже не будет стационарным солитоном. Если $h_2 < h_1$, то, как нетрудно видеть, ее длительность будет больше, чем у солитона, и в асимптотике возвышение распадается на несколько солитонов (рис. 11 а). Задачу о распаде на постоянной глубине легко решить известными сейчас методами. Результат решения показан на рис. 11 б, где видны число и амплитуды новых солитонов в зависимости от отношения глубины h_2/h_1 .

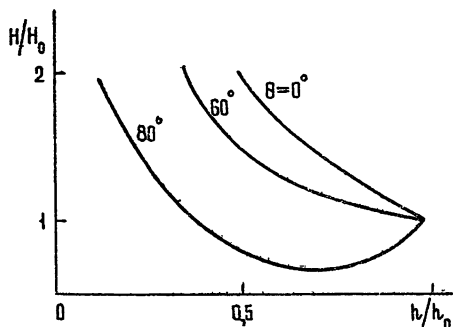


Рис. 10. Зависимость высоты солитона от глубины в неоднородном бассейне при различных углах падения.

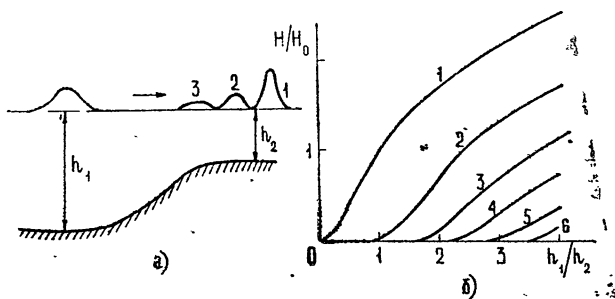


Рис. 11. а) Схема прохождения солитона через неоднородную область; б) зависимость числа и высот образовавшихся солитонов от перепада глубины.

Заметим, что этот подход сродни упоминавшемуся выше в связи с дифракцией ударных волн: на этапе быстрой линейной трансформации

ции волны нелинейность не успеваает сказываться, а на последующем этапе нелинейные искажения, накапливаясь, приводят в данном случае к распаду волны.

Итак, результат прохождения волной неоднородного участка дна зависит (даже в отсутствие отражений) от степени плавности неоднородности. В последнее время аналогичный подход применялся к анализу длинных внутренних волн в стратифицированном океане [35, 36]. Здесь задача усложняется еще из-за многомодового характера движения, и результат существенно зависит от структуры соответствующей моды. Кроме того, наряду с изменением глубины здесь могут сказываться плавные горизонтальные изменения вертикальной стратификации океана (т. е. частоты Брента—Вяйсяля).

Конечно, волны в океане — только один пример применения данной теории. Другой физически интересный пример — ионный и магнитный звук в неоднородной плазме. Оказывается, например, что решение задачи о сферически сходящемся ионно-звуковом солитоне, полученное численным методом [37], может быть с хорошей точностью найдено из формулы, аналогичной (20). Еще один пример — цилиндрические электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике — был недавно рассмотрен в работе [38].

4. Затухание солитонов

К числу факторов, которые могут быть учтены в рамках данного подхода, принадлежат различного рода потери при условии их достаточной малости [39–41]. Для акустических волн эти потери сосредоточены в области ударного фронта. В условиях океана ситуация более разнообразна. Опрокидывание простой волны может привести к установлению относительно стабильного крутого перепада — бора, распространяющегося аналогично ударной волне в акустике. Заметим, что при набегании такой волны на берег рост ее высоты в известной степени компенсируется затуханием бора, так что его высота может остаться конечной уже в рамках данного приближения.

Вместе с тем, формирование бора нельзя считать наиболее типичным процессом. Чаще диссипация морских волн носит более сложный характер, обусловленный несколькими факторами. В общем случае это приводит к добавлению в (18) некоторого интегродифференциального оператора \hat{L}_d , ответственного за диссипацию. Например, учитывая вязкость воды, получим

$$-L_d = \frac{\nu\eta}{8h^2} + \left(\frac{\nu\sqrt{gh}}{8h^2}\right)^{1/2} \int \frac{\partial\eta}{\partial z} \frac{\operatorname{sgn}(x-z)}{\sqrt{|x-z|}} dz, \quad (21)$$

где ν — кинематическая вязкость воды (обычно это некоторая аппроксимация турбулентной вязкости).

Эффект трения о дно часто аппроксимируется эмпирическим законом Шези: $\hat{L}_d \approx -gu^2$, т. е. затухание нелинейно. Наконец, учет рассеяния на мелкомасштабных шероховатостях дна эквивалентен введению «вязких» потерь: $-\hat{L}_d \approx a \langle \xi^2 \rangle \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$, где $\langle \xi^2 \rangle$ — дисперсия флуктуаций глубины, a — характерный размер шероховатостей.

Решение уравнения (18) с оператором \hat{L}_d снова получается умножением его на η и интегрированием по τ . Для солитона на постоянной глубине ($h = \text{const}$) таким образом получается уравнение

$$v \frac{dH}{dx} = -\frac{\bar{v} H}{6 h^2} - \frac{b v^{1/2} H^{5/4}}{h} - \frac{4}{15} a v \langle \xi^2 \rangle \frac{H^2}{h^3} - \frac{4}{3} g H^2, \quad (22)$$

которое учитывает все перечисленные здесь виды потерь (b — числовой коэффициент). Если оставить один (любой) из членов в правой части, считая его преобладающим, то уравнение (22) легко интегрируется, но результат существенно зависит от вида потерь. Первый член в (22) ведет к экспоненциальному затуханию, а второй — к следующему закону убывания H :

$$H = H_0 \left(1 + \frac{b v^{1/2} H_0^{1/4}}{h} \right)^{-4}, \quad (23a)$$

где $H_0 = H(x=0)$. Шероховатость дна приводит к более медленному затуханию*:

$$H = H_{0,1} \left(1 + \frac{4 a v \langle \xi^2 \rangle H_0}{15 h^3} \right)^{-1}, \quad (23б)$$

а закон Шези дает аналогичный результат:

$$H = H_0 (1 + H_0 g x)^{-1}. \quad (23в)$$

Характерно, что во всех трех случаях при $x \rightarrow \infty$ солитон «забывает» о своей начальной амплитуде — H перестает зависеть от H_0 . Неэкспоненциальный характер затухания объясняется просто: уменьшение амплитуды солитона сопровождается ростом его длины, что, в свою очередь, ускоряет уменьшение H . Полная же энергия импульса в случае линейных потерь (т. е. всегда, кроме случая (23в)) затухает экспоненциально.

Затухание солитонов изучалось не только для волн на воде. Закон (23б) получается и для электромагнитных солитонов в системах с высокочастотными потерями [44] (см. ниже). Для ионно-звуковых солитонов в плазме исследовалось влияние затухания Ландау [39, 45], описываемого интегральным оператором, сходным с вторым членом в правой части (21), но с заменой $\sqrt{|x-z|}$ на $(x-z)$. Результат имеет вид $A = A_0 (1 + \text{const } A^2)^{-2}$. Наконец, было изучено затухание упругих солитонов в твердотельных стержнях, существующих за счет геометрической дисперсии в стержне [46]. Оказывается, что реальные потери в стержне влияют так же, как и затухание Ландау для ионного звука.

IV. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И САМОРЕФРАКЦИЯ СОЛИТОНОВ

Рассмотрим теперь некоторые эффекты, связанные с нелинейной саморефракцией солитонов и, следовательно, выходящие за рамки «линейно-лучевого» приближения. Для этого вернемся к лучевым уравнениям (8) и вспомним, что для солитонов V и Δ локально связаны (в отсутствие потерь) законом сохранения энергии $W(V)\Delta = \text{const}$. Тогда система (8) — второго порядка. Линеаризуя ее относительно постоянных значений θ_0 и A_0 , легко видеть, что характеристики имеют вид [47]

* Отметим, что в среде с нестационарными флуктуациями, передающими энергию в волну, коэффициент a может оказаться отрицательным, и тогда уже на конечном расстоянии H расходится (взрывная неустойчивость), ср. [48].

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \pm \sqrt{-\Delta/V \frac{dV}{d\Delta}}. \quad (24)$$

Таким образом, если производная $\frac{dV}{d\Delta}$ отрицательна, то система (8) принадлежит к гиперболическому типу, а если $\frac{dV}{d\Delta}$ положительна,— к эллиптическому. Поскольку $\frac{dV}{d\Delta} = - (W/\Delta) \frac{dV}{dW}$, то условие гиперболичности есть

$$\frac{dV}{dW} > 0. \quad (25)$$

В эллиптическом случае волна оказывается неустойчивой: малые деформации фронта нарастают по мере распространения солитона вдоль лучей. Здесь имеется определенная аналогия с самофокусировкой квазигармонических волновых пучков (однако продольный эффект—самомодуляция—для солитонов, в сущности, не имеет смысла).

Такая поперечная неустойчивость солитона была впервые рассмотрена для двумерной модификации уравнения КДВ Кадомцевым и Петвиашвили [48]*. Существенно, что в критерий (25) входят только параметры стационарной плоской волны, и он не зависит от детального вида исходных двумерных уравнений.

Если энергия W монотонно растет с ростом амплитуды солитона A , то (25) эквивалентно известному для гармонических волн условию отсутствия самофокусировки $\frac{dV}{dA} > 0$. Однако, как уже отмечалось

выше, возможно, что $\frac{dW}{dA} < 0$, как это имеет место для уравнения (6)

при $p > 4$. Легко видеть, что для этого уравнения условие устойчивости солитона имеет вид $p > 4$ при знаке плюс и $p < 4$ —при знаке минус перед вторым членом.

Недавно [47] были решены некоторые нелинейные задачи о двумерной саморефракции солитона в устойчивом случае. Поскольку система (8) гиперболична, для нее можно ввести два семейства характеристик и инварианты Римана на плоскости α, β . Для уравнения КДВ (5а) $\Delta \sim (A/A_0)^{-3/2}$ (A_0 —начальное значение амплитуды), и тогда характеристики—это прямые вида $\beta = \pm g\alpha + \text{const}$, где $g = -(\Delta\Delta_A/VV_A)^{-1/2} \sim (A/A_0)\sqrt{A}$, а инварианты имеют вид $J_{\pm} = \theta \pm \text{const}\sqrt{A}$. Любое малое локальное возмущение амплитуды или фронта солитона распространяется, согласно (24), по двум различным характеристическим направлениям, т. е. «разбегается» по фронту солитона. Для сильных (нелинейных) возмущений различные характеристики могут пересекаться с образованием резких «изломов» фронта, для которых, конечно, несправедлив данный подход, и солитон должен разрушаться уже из-за дифракционных эффектов. Интервал по α , на котором возникает эта особенность, имеет порядок $\alpha_* \sim \Delta/V\sqrt{M}$, где M —относительное изменение скорости солитона (число Маха) ($M \ll 1$), а Δ —характерный пространственный масштаб изменения A

* Некоторые точные решения уравнения, рассмотренного в [48], были получены в [49].

и θ вдоль фронта волны. На интервалах, меньших α_* , можно пренебречь нелинейной саморефракцией и разбеганием характеристик, и тогда справедливо рассмотренное выше приближение линейных лучей.

На основании такого подхода удается решить, например, задачу о солитоне с цилиндрически сходящимися или расходящимися (в некотором интервале углов θ_0) фронтом. Интересен следующий результат: ввиду разбегания возмущений θ из центральной области фронт в этой области становится плоским (рис. 12). При фокусировке число Маха стремится к конечному значению порядка θ_0^2 , и в результате нелинейная дефокусировка может предотвратить неограниченный рост амплитуды солитона в фокусе, даже на том этапе, где дифракционные эффекты еще не сказываются. Аналогичный вывод был ранее сделан для ударных волн [18].

Можно думать, что круг задач, решаемых на основании лучевых уравнений (10) для солитонов, в ближайшее время значительно расширится (см. также работу [50], основанную на сходном подходе).

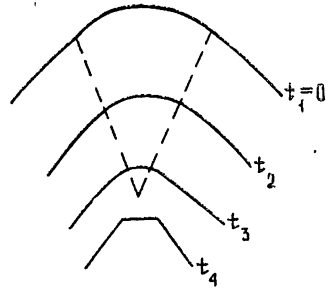


Рис. 12. Эволюция сходящегося фронта солитона.

V. УСИЛЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ

Важный класс составляют задачи о взаимодействии солитона с медленно меняющимся нестационарным полем, создаваемым заданной волной в среде (или, возможно, другим солитоном). В этих случаях нередко можно использовать те же приближенные методы, что и выше для неоднородной среды (ср. конец п. 2 разд. III, где рассматривались слабые ударные волны в нестационарных средах). Наиболее интересен здесь случай синхронизма, когда «волна параметра» движется со скоростью, близкой к скорости солитона; тогда энергия может передаваться к солитону или отниматься от него накапливающимся образом. Если оставить в стороне формальные схемы построения приближенных решений (ср. [19]), то исходные уравнения могут быть получены из следующих простых соображений. Изменение энергии солитона W определяется работой Q волны параметра, которая пропорциональна скорости изменения параметра во времени в месте нахождения солитона в данный момент. Отсюда легко составить уравнение баланса энергии, содержащее в качестве неизвестных W (или амплитуду солитона A) и «фазу» s солитона относительно волны параметра. Второе уравнение для A и s — кинематическое; изменение s определяется скоростью солитона, которая, вообще говоря, зависит от A и s .

1. Параметрическое усиление импульсов

В качестве первого примера обсудим взаимодействие солитона малой амплитуды с бегущей синусоидальной волной параметра, когда «пьедестал», на котором он распространяется, имеет вид $u = u_0 + u_1 \cos k(x/a - t)$, а a близко к невозмущенной скорости v линейной волны в среде. Если, для определенности, невозмущенный солитон удовлетворяет уравнению КДВ (5а), то $W \sim A^{3/2}$. Так как $Q \sim \frac{du}{dt}$, то, учитывая еще возможное линейное затухание ν , получим уравнения [51]

$$\frac{dB}{d\zeta} = -\frac{2}{3} B(m \sin \varphi + \nu); \quad (26a)$$

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{\Delta}{2} - m \cos \varphi - B. \quad (26б)$$

Здесь $B \sim A$, $\zeta = akt$, $\varphi = k(t - x/a)$ — фаза солитона относительно накачки (см. рис. 13 а), $m \sim u_1$, $\Delta = (a/v) - 1$. Ясно, что в правой части уравнения (26а) первый член отвечает работе волны параметра, а второй — затуханию. В правой части уравнения (26 б) первый член обусловлен отличием a от линейной скорости v , второй — зависимостью скорости солитона от «пьедестала», определяемого волной параметра, а третий — ее зависимостью от амплитуды самого солитона.

Таким образом, получается нелинейная система второго порядка для амплитуды и фазы солитона, которую нетрудно исследовать на фазовой плоскости (точнее, фазовом цилиндре, поскольку φ — циклическая переменная с периодом 2π). Развертка этого цилиндра для двух наиболее интересных случаев показана на рис. 13 б, в. Ненулевые положения равновесия отвечают стационарному импульсу, бегущему синхронно с накачкой. Установление этого состояния связано с «расстроечным» механизмом — по мере усиления (затухания) импульс перемещается относительно накачки в область с меньшим (большим) усилением до наступления равновесия. Характерной особенностью процесса установления является его колебательный характер (устойчивая ненулевая точка равновесия — фокус). Нужно заметить также, что, в зависимости от величины параметров Δ , m и ν , возможен либо мягкий режим усиления, когда все достаточно малые импульсы нарастают (рис. 13 б), либо жесткий режим, когда малые импульсы затухают, а достаточно большие растут вплоть до установления ненулевого равновесного состояния (рис. 13 в).

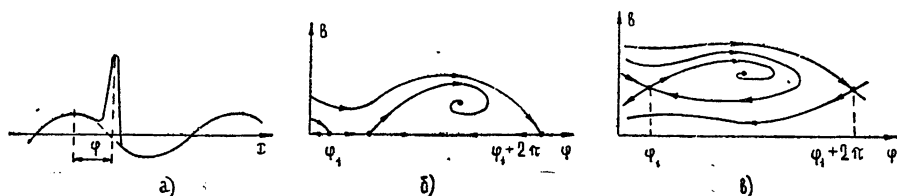


Рис. 13. а) Солитон на синусоидальной «накачке», б) фазовая плоскость уравнения (26) для мягкого режима усиления солитонов, в) то же для жесткого режима.

Интересно, что рассмотренный процесс усиления солитонов имеет определенную аналогию (вплоть до вида уравнений) с разгоном частиц в циклических ускорителях, причем роль частиц здесь играют солитоны.

Естественно, что в ограниченной системе — резонаторе в виде кольца или слоя с отражающими границами, где процесс может неограниченно повторяться, мы получим уже генератор солитонов. Такие параметрические генераторы импульсов (ПГИ) действительно были построены для электромагнитных волн [51] (иллюстрацию см. ниже).

Нечто аналогичное возникает для волн на воде при резонансном возбуждении ограниченного участка моря (бухты) периодической волной. Результаты решения одной такой задачи, полученного численными методами [52], можно наглядно трактовать как (правда, не слишком эффективную) параметрическую генерацию импульсов.

2. Взаимодействие солитонов

О взаимодействии солитонов в последнее время написано очень много. Основные достижения теории в первое время были связаны с решением различных модельных уравнений с помощью точных аналитических методов. Результат, получившийся до последнего времени в большинстве задач, заключается в том, что взаимодействие оказывается «обратимым» процессом, т. е. при $t \rightarrow \infty$ снова остаются такие же, как до взаимодействия, изолированные солитоны. Одно время этот результат казался настолько универсальным, что он даже привлекался в качестве определения солитонов [7]. Однако позже данные машинного счета для некоторых уравнений, не решаемых точными методами, заставили усомниться в универсальности этого результата, поскольку в некоторых случаях оказывалось возможным образование пары связанных солитонов [53, 61].

Приведенный здесь «параметрический» подход позволяет выяснить этот вопрос в довольно общей постановке применительно к случаю «слабых» (в классическом смысле) взаимодействий солитонов, когда в каждый момент общее поле мало отличается от суперпозиции полей отдельных импульсов. Наиболее важный случай таких взаимодействий реализуется, если отличие скоростей солитонов мало и на протяжении всего процесса расстояние между их максимумами остается большим в сравнении с их эффективной шириной. Тогда, даже при взаимодействии нескольких (N) солитонов, каждый данный («пробный») импульс находится в поле затухающих «хвостов» других импульсов (рис. 14). Энергия импульса W изменяется за счет работы A , совершаемой этими «хвостами», которые создают для него волну параметра. Таким образом

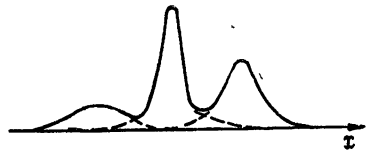


Рис. 14. Схема слабого взаимодействия солитонов.

$$\frac{dW_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} (V_i, V_k) f_{ik} (V_k, s_{ik}) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (27)$$

где V_k — скорости солитонов, s_{ik} — расстояния между их максимумами, α_{ik} — коэффициенты взаимодействия, а функция f определяется полем k -го солитона в месте нахождения i -го. Вследствие консервативности системы, сумма всех правых частей (27) должна равняться нулю.

При слабых взаимодействиях скорости солитонов близки между собой, и поэтому в правых частях (1) все V можно считать постоянными и равными, так что остается только зависимость от s_{ih} . Но так как $\frac{ds_{ik}}{dt} = V_i - V_k$, а W_i связано с V_i , то система (1) легко сводится к $N-1$ уравнению для s_{ih} . В частности, для двух солитонов получается одно уравнение

$$\frac{ds}{dt} = 2 \alpha V'_w f(V, s), \quad (28)$$

где в данном приближении V постоянна.

Согласно уравнению (28), мы пришли, в сущности, к задаче о взаимодействии двух частиц, силовые поля которых соответствуют $f(V, s)$. Эта функция, определяемая экспоненциальными хвостами (которые могут и осциллировать), имеет вид

$$f \sim \exp(-\lambda s) + \text{к. с.}$$

Теперь легко проследить за основными возможностями.

а) При монотонных «хвостах» (λ действительно) взаимодействие отвечает либо только отталкиванию, либо только притяжению солитонов. Почти для всех найденных в настоящее время точных N -солитонных решений реализуется отталкивание. В этом случае первоначально сближавшиеся солитоны замедляются, и начиная с минимального расстояния s_{\min} , где их амплитуды сравниваются, они расходятся, причем при любом N солитон, уходящий вперед, становится больше остальных, поскольку энергия всегда перетекает вперед. Хорошо известно, что именно так происходит взаимодействие близких по амплитуде солитонов в рамках уравнения КДВ.

б) Если при действительном λ имеет место притяжение, то даже если вначале солитоны расходились, то, начиная с некоторого расстояния s_{\max} (где их энергии снова равны), они начнут неограниченно сближаться вплоть до сильного перекрытия их полей. Таким образом, взаимодействие перестает быть слабым, и строгого ответа на вопрос о дальнейшем процессе в рамках данного приближения дать нельзя. Естественно предположить, однако, что на этой стадии солитоны, «проскочив» друг через друга, снова начинают разбегаться вплоть до расстояния, на котором взаимодействие опять становится слабым. Тогда процесс, очевидно, повторяется, и возникает связанное состояние, в котором солитоны совершают осциллирующие движения около общего «центра тяжести». Этому случаю соответствует, в частности, численное решение для пары солитонов в нелинейном уравнении Клейна—Гордона [53].

б) Наконец, λ может быть комплексным, и тогда солитон имеет осциллирующие «хвосты». В этом случае знак правой части (28) может изменяться. Здесь, в принципе, возможны как инфинитные движения, так и образование связанных состояний, причем таких, которые существуют целиком в области слабых взаимодействий.

Такая классификация слабых взаимодействий удобна еще и тем, что она в основном справедлива для произвольного числа одиночных солитонов, поскольку характер «хвостов» остается тем же самым.

Более последовательный путь получения уравнения типа (28) связан с применением метода асимптотического разложения для аperiodических волн с плавно меняющимися параметрами в форме, близкой к той, которая обсуждалась в [19, 38]. Таким путем в работе [54] был рассмотрен обобщенный вариант уравнений КДВ, включающий в себя уравнения (5а), (5б) и (6). В частности, для обычного уравнения КДВ (5а) получаются известные из точного решения характеристики:

$$s_{\min} = \frac{2}{\sqrt{V}} \ln 8 V/(\Delta V)_0, \quad s(t \rightarrow \infty) = (\Delta V)_0 t + \frac{\sqrt{V}}{2} \ln 4 V/(\Delta V)_0, \quad \text{где}$$

$(\Delta V)_0$ — исходная (при $t \rightarrow -\infty$) разность скоростей солитонов. Значение поля в точке симметрии (при $s = s_{\min}$) равно $3(\Delta V)_0$; любопытно, что это значение совпадает с точным.

Для уравнения (6) с $p > 4$ солитоны притягиваются (энергия по-прежнему перетекает вперед, но скорость переднего солитона при этом падает), и можно ожидать образования связанных состояний, включающих этап «перекрытия солитонов».

Более подробно изучалось уравнение (5а). Полного аналитического выражения для солитонов в этом случае получить нельзя, однако нам, по существу, достаточно знать структуру «хвостов». Как было показано в разд. 1, эти хвосты могут быть как аperiodическими, так и осциллирующими, и в последнем случае возможны осциллирующие состояния в виде группы из двух и более солитонов (см. иллюстрации в следующем разделе).

Отметим еще другой возможный случай слабых взаимодействий, в каком-то смысле другую крайность. Речь идет о случае, когда солитоны сильно отличаются по амплитуде и, следовательно, по длительности. В тех случаях, когда малый импульс имеет большую длину, он служит как бы плавным «пьедесталом» для обгоняющего его большого и короткого солитона, а общее решение снова близко к их суперпозиции. В результате нетрудно вычислить, например, взаимную задержку (сдвиг фаз), возникающую после взаимодействия.

В этом разделе мы остановились лишь на взаимодействии солитонов, поскольку этот вопрос, пожалуй, наиболее сложен. Что касается «столкновения» двух ударных волн, то в разрывном приближении этот вопрос, как известно, решается последовательным применением граничных условий на разрывах [1, 2]. Менее ясен вопрос о взаимодействии нестационарных «кусочно-непрерывных» волн, содержащих разрывы. Один из примеров — взаимодействие пилообразных волн или треугольных импульсов в акустике. Здесь существенно, что ударные волны малой амплитуды при встречном распространении взаимодействуют слабо (в следующем порядке малости), а если одна ударная волна догоняет другую, то происходит, в сущности, их слияние в один разрыв (отраженная волна мала). Отсюда вытекает следующий результат, справедливый при квадратичной нелинейности: произвольный ансамбль волн, содержащий разрывы, с течением времени распадается на две встречные системы волн, содержащие, вообще говоря, значительно меньшее число разрывов (рис. 15). Действительно, разрывы, движущиеся с разными скоростями, догоняя друг друга, сливаются, и остаются только симметричные знакопеременные разрывы, поскольку их скорости движения одинаковы (ср. [55]). Любой же участок волны одной полярности превращается в треугольный импульс с разрывным фронтом. Такие процессы могут составить один из этапов вырождения акустической турбулентности при больших акустических числах Рейнольдса.

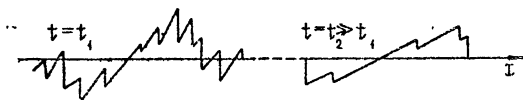


Рис. 15. Вырождение хаотической разрывной волны.

VI. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ СОЛИТОНАМИ

На первой школе уже говорилось [56] о той роли, которую играют электромагнитные системы в исследовании нелинейных волн. В особенности удобны «искусственные» линии в виде последовательности идентичных звеньев, состоящих из дискретных элементов — индуктивностей, емкостей, сопротивлений. Меняя схему звена, можно реализовать очень широкий диапазон нелинейных и дисперсионных свойств (если хотите, «методом детского конструктора»). Получается своего рода аналоговая машина для решения довольно сложных нелинейных уравнений в частных производных. Конечно, соответствующие эксперименты представляют и самостоятельный интерес для радиофизики.

Об электромагнитных ударных волнах в линиях с ферритами или полупроводниковыми диодами довольно подробно говорилось в литературе [5]. Поэтому мы обратимся к солитонам, тем более, что за последнее время для них удалось получить ряд новых экспериментальных результатов. В эксперименте применяются дискретные LC-линии (рис. 16 а), где в качестве нелинейных емкостей используются полупроводниковые (параметрические) диоды; дисперсия создается за счет

дискретности системы. Иногда применяется несколько усложненная схема (рис. 16 б), позволяющая варьировать дисперсию и изучать влияние потерь различного типа. Если развитие процесса требовало большого расстояния, то часто использовались многократные пробоги на данном участке линии с последовательными преобразованиями на его концах (нелинейное взаимодействие встречных волн обычно несущественно). Нелинейность чаще всего (но не всегда) близка к квадратичной, и для бегущей волны в простейшем случае можно пользоваться уравнением КДВ (5 а). Вводя индуктивную связь между звеньями, можно было моделировать уравнения с различным знаком коэффициента при третьей производной, а также обращать его в нуль, и тогда основную роль играла пятая производная (уравнение (5 б)).

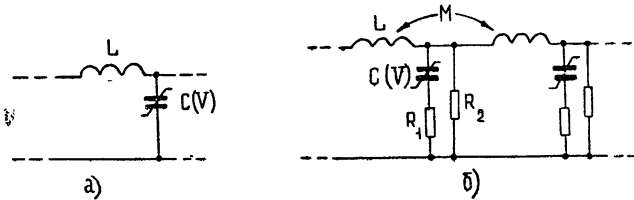


Рис. 16. Схемы нелинейных линий, используемых в модельных экспериментах.

Приведенные ниже осциллограммы иллюстрируют следующие процессы.

1) *Распад длинного импульса на солитоны.* Рис. 17 а отвечает уравнению КДВ, когда (ввиду отмечавшегося уже перетекания энергии вперед) солитоны неограниченно расходятся, располагаясь в порядке убывания их амплитуды. Рис. 17 б соответствует уравнению (5 б) с 5-й производной. Здесь распад более сложен, иногда после «отщепления» солитона остается устойчивая группа связанных импульсов.

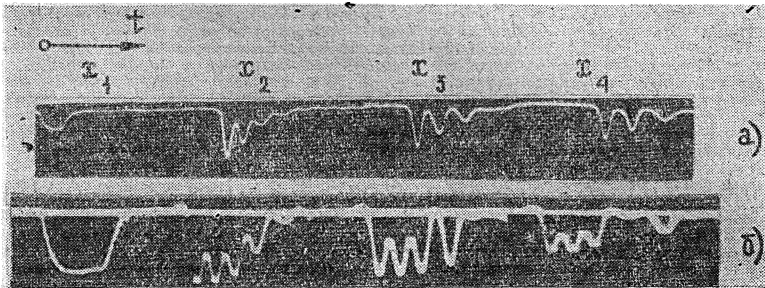


Рис. 17. Распад длинного импульса на солитоны: а) в уравнении (5 а), б) в уравнении (5 б).

2) *Взаимодействие двух солитонов.* На рис. 18 а, б показаны два случая взаимодействий в рамках уравнения КДВ, предсказанные Лэксом [57]: сильно отличающиеся по амплитуде солитоны обгоняют друг друга, а близкие по амплитуде уравниваются, и затем передний импульс уходит вперед («обменное» взаимодействие). Рис. 18 в иллюстрирует возникновение связанного состояния в уравнении (5 б) для двух солитонов. Можно видеть знакопеременные «хвосты», ответственные за образование таких состояний.

3) *Затухание солитона* [44, 58]. На рис. 19 показан процесс затухания солитона в рамках уравнения КДВ с добавлением различных потерь: а) — «низкочастотных» (член типа q_1 в (5 а)), б) — «высокочастотных» (уравнение Бюргерса—КДВ). На первом этапе затухание

носит квазистационарный характер (в случае а) — оно экспоненциально, а для б) — отвечает формуле (23 б)), и импульс локально близок к солитону. Однако асимптотический характер процесса совершенно различен в этих случаях. При низкочастотных потерях нелинейность становится несущественной, а дисперсия и потери приводят к появлению затухающей группы осцилляций, отвечающей в асимптотике функции Эйри. При высокочастотных потерях за импульсом появляется «плато», затем дисперсия перестает сказываться на процессе, а нелинейность и потери ведут к формированию несимметричного импульса с крутым фронтом, соответствующего асимптотике уравнения Бюргерса.

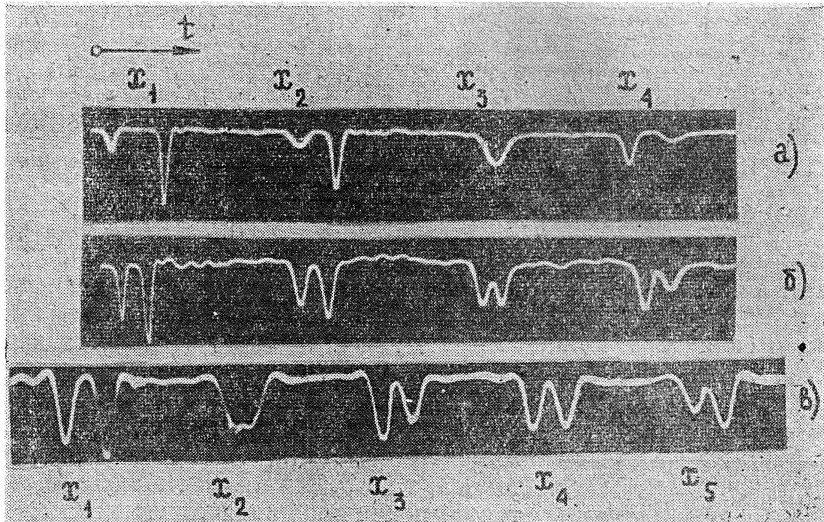


Рис. 18. Взаимодействие солитонов в уравнении (5а) (а) — „обгон“, б) — „обмен“ и (5б) (в) — осциллирующее связанное состояние).

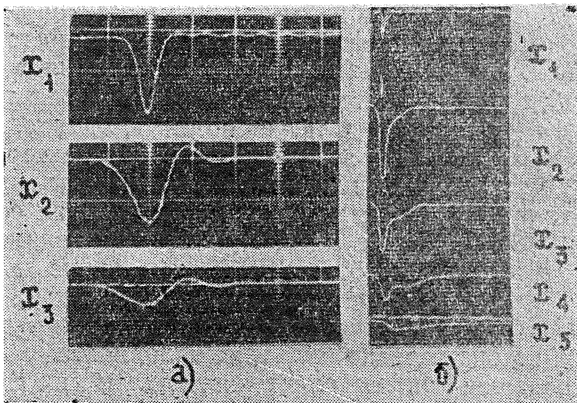


Рис. 19. Затухание солитонов в уравнении (5а) с добавлением:
а) низкочастотных потерь (на верхней осциллограмме масштаб уменьшен в 10 раз), б) высокочастотных потерь.

4) *Параметрическое усиление солитонов.* Для его реализации в линию подавалась гармоническая «накачка» с периодом, существенно большим длительности солитона. Процесс усиления импульса показан

на рис. 20 (где показаны импульсы в одной точке после каждого последовательного пробега туда и обратно по линии). Ясно виден осцилляционный характер процесса установления в полном согласии со сказанным выше (ср. рис. 13). Наблюдался как мягкий режим усиления (рис. 20 а), где нарастает малый солитон, так и жесткий режим (см. рис. 20 б, в, где в первом случае малый солитон в конце концов

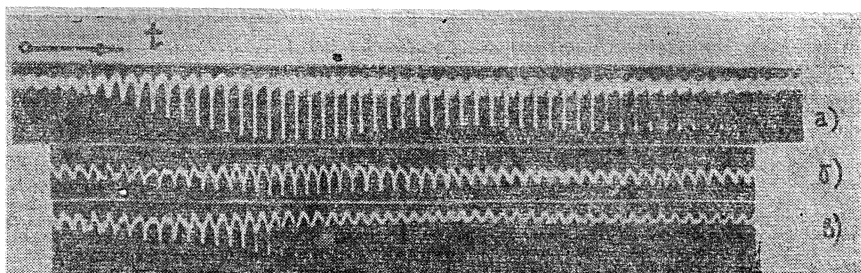


Рис. 20. Параметрическое усиление импульсов (показаны последовательные положения после каждого пробега в резонаторе):

а) — мягкий режим установления, б), в) — жесткий режим.

затухает, а во втором — более сильный импульс приобретает стационарную амплитуду). Установившийся режим отвечает параметрической генерации солитонов, причем генерируемые последовательности импульсов могут быть весьма разнообразными; их примеры показаны на рис. 21.

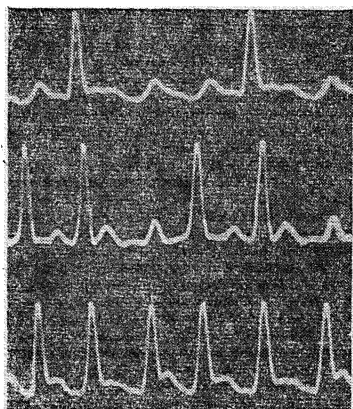


Рис. 21. Формы колебаний в параметрическом генераторе импульсов.

5) *Наблюдения «газа солитонов».* Как мы уже отмечали, в вопросе о «газе солитонов», т. е. статистическом ансамбле солитонов, подчиняющемся определенным законам распределения, существует ряд неясностей. В частности, для КДВ-солитонов, проходящих друг через друга без результирующего изменения, функция распределения по амплитудам (скоростям) не изменяется, и установление чего-то вроде термодинамического равновесия в безграничной системе не должно происходить вообще [59].

Следует помнить, однако, что реальный газ всегда находится в некотором «сосуде», стенки которого также могут перемещивать частицы. В данном случае «сосудом» служит резонатор (отрезок нелинейной линии), возбуждаемый на границе гармоническим напряжением. По существу, эта система представляет собой параметрический генератор импульсов, но она гораздо более длинная, поэтому в ней возбуждается сразу большое число солитонов, причем их взаимодействие теперь небезразлично, поскольку оно изменяет общее время прохождения импульса по линии и, следовательно, фазу его взаимодействия с накачкой на границе. В результате происходит стохастизация процесса. На рис. 22 а показана типичная временная последовательность солитонов в такой системе, а на рис. 22 б — спектр процесса. Отметим, что при использовании линии с индуктивными связями, в которой возможны связанные состояния солитонов, стохастизация происходит значительно эффективнее.

ратор импульсов, но она гораздо более длинная, поэтому в ней возбуждается сразу большое число солитонов, причем их взаимодействие теперь небезразлично, поскольку оно изменяет общее время прохождения импульса по линии и, следовательно, фазу его взаимодействия с накачкой на границе. В результате происходит стохастизация процесса. На рис. 22 а показана типичная временная последовательность солитонов в такой системе, а на рис. 22 б — спектр процесса. Отметим, что при использовании линии с индуктивными связями, в которой возможны связанные состояния солитонов, стохастизация происходит значительно эффективнее.

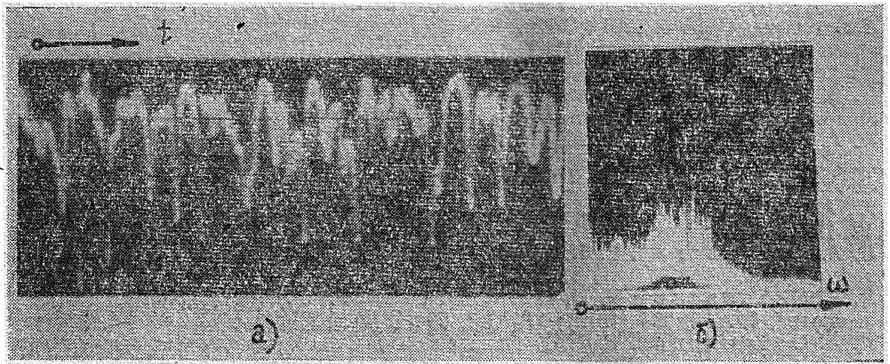


Рис. 22. а) Стохастические импульсные колебания в резонаторе, б) их спектр.

В заключение этих лекций сделаем два замечания. Во-первых, еще раз подчеркнем, что тот приближенный подход, который применялся в разд. III—V для анализа плавно меняющихся УВ и С, опирается на более строгие приближенные методы, которые частично обсуждались на прошлой школе [19]. Во-вторых, этот подход может быть обобщен на другие, специфические классы предельных волн. Упомянем, в частности, ударные волны и солитоны огибающих, которые отвечают сепаратрисным траекториям для усредненных уравнений, описывающим модулированные квазигармонические волны в нелинейной диспергирующей среде, а также стационарные перепады и импульсы в активных средах, включая возбуждаемые биологические системы. Сейчас уже получены некоторые интересные результаты, связанные с применением коротковолнового подхода к таким процессам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
2. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
3. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз, М., 1962.
4. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1974.
5. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 9—10, 1376 (1967).
6. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 6, № 3, 536 (1963).
7. Э. Скотт, Ф. Чу, Д. Маклафлин, ТИИЭР, 61, № 10, 79 (1973).
8. Г. Я. Любарский, ПММ, 25, 1041 (1961).
9. З. Б. Ройхваргер, Письма в ЖЭТФ, 19, № 8, 496 (1974).
10. Т. Kawahara, J. Phys. Soc. Japan, 33, № 1, 260 (1972).
11. N. Zabusky, in Nonlinear partial differential equations, Academic Press INC, N. Y., 1967.
12. Л. Д. Ландау, ПММ, 9, № 4 (1945).
13. К. Е. Губкин, ПММ, 22, № 4, 561 (1958).
14. Л. А. Островский, ПММ, 27, № 5, 924 (1963).
15. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 5, 955 (1961).
16. R. Grimshaw, J. Fluid Mech., 42, 639 (1970).
17. G. V. Whitham, Proc. Roy. Soc., 22, № 2, 273 (1965).
18. G. V. Whitham, J. Fluid Mech., 2, № 2, 145 (1957).
19. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 454 (1974).
20. T. W. Curlton, D. T. Blackstock, JASA, 56, suppl., S42 (1974).
21. Н. Н. Романова, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 6, № 2, 134 (1970).
22. Л. А. Островский, Н. Р. Рубаха, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 9, 1293 (1972).

23. С. А. Каплан, Л. А. Островский, Н. С. Петрухин, В. Б. Фридман
Астрон. ж., 49, № 6, 1267 (1972).
24. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, В. Б. Фридман, Акуст. ж.
(в печати); Препринт НИРФИ, № 74, Горький, 1975.
25. В. Е. Фридман, Акуст. ж. (в печати).
26. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1973.
27. Л. А. Островский, А. М. Сутин, Акуст. ж., 22, № 1, 93 (1976).
28. Л. А. Островский, А. М. Сутин, Докл. АН СССР, 221, № 6, 1300 (1975).
29. Л. А. Островский, В. Е. Фридман, Акуст. ж., 18, № 4, 590 (1972).
30. Ю. А. Кравцов, Л. А. Островский, Н. С. Степанов, ТИИЭР, 62, № 11,
91 (1974).
31. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Препринт НИРФИ, № 33, Горь-
кий, 1973.
32. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы
и океана, 6, № 9, 934 (1970); 11, № 1, 68 (1975).
33. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, в сб. Проблемы дифракции и рас-
пространения волн, ЛГУ, Ленинград, вып. 12, 44 (1973).
34. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, 6, 80 (1971).
35. Е. Н. Пелиновский, М. А. Раевский, С. Х. Шаврацкий, Изв. АН
СССР, Физика атмосферы и океана (в печати).
36. Е. Н. Пелиновский, С. Х. Шаврацкий, Изв. АН СССР, Физика атмос-
феры и океана, 12, № 1, 86 (1976).
37. S. Mahon, J. Viacelli, Phys. Fluids, 17, № 8, 1614 (1974).
38. К. А. Горшков, Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ТИИЭР, 62,
11, 113 (1974).
39. E. Ott, R. Sudan, Phys. Fluids, 12, № 11, 2388 (1969).
40. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, № 2, 68 (1971).
41. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, в сб. Теория дифракции и распро-
странения волн (Труды VI Всесоюзного симпозиума), 1, ВНИИРИ, Ереван, 1973,
стр. 342.
42. К. А. Наугольных, в сб. Мощные ультразвуковые поля, М., 1966.
43. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, ПММ, 38, № 6, 991 (1974).
44. Л. А. Островский, В. В. Папко, Е. Н. Пелиновский, Изв. высш. уч.
зав. — Радиофизика, 15, № 4, 580 (1972).
45. Е. Н. Пелиновский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1281 (1971).
46. Л. А. Островский, А. М. Сутин, ПММ (в печати).
47. Л. А. Островский, В. И. Шрира, ЖЭТФ (в печати).
48. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Докл. АН СССР, 192, 753 (1970)
49. В. Е. Захаров, Письма в ЖЭТФ, 22, № 7, 364 (1975).
50. В. А. Реутов, МЖГ, 4, 79 (1975).
51. К. А. Горшков, Л. А. Островский, В. В. Папко, Изв. высш. уч. зав. —
Радиофизика, 16, № 8, 1195 (1973).
52. W. Chester, J. A. Wones, Proc. Roy. Soc., A306, 1484, 5 (1968).
53. А. Е. Кудрявцев, Письма в ЖЭТФ, 22, № 3, 178 (1975)
54. К. А. Горшков, Л. А. Островский, В. В. Папко, ЖЭТФ (в печати).
55. В. Е. Фридман, Акуст. ж. (в печати); Препринт НИРФИ, № 72, Горький, 1975
56. Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Препринт НИРФИ, № 51, Горький,
1974.
57. П. Д. Лэкс, Сб. переводов «Математика», 13, № 5, 128 (1969)
58. К. А. Горшков, В. В. Папко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
59. К. А. Горшков, Л. А. Островский, В. В. Папко, Докл. АН СССР,
(в печати).
60. J. A. Shooter, T. G. Muir, D. T. Blackstock, JASA, 55, № 1, 54 (1974).
61. R. K. Dodd, R. K. Bullough, S. Duckworth, J. Phys. A. Math. and Gen.,
8, № 7, 164 (1975).

Научно-исследовательский радиофизический институт