

СОДЕРЖАНИЕ

Злотник Е. Я. О пелипейном взаимодействии мод Бернштейна с ленгмюровскими волнами в солнечной короне	481
Анютин А. П., Орлов Ю. И. Об особенностях искажений радиосигналов в неоднородном линейном слое плазмы	495
Гетманцев Г. Г., Ерухимов Л. М., Митякова Э. Е., Митяков Н. А., Прятков Н. М., Рапопорт В. О., Череповицкий В. А. Некоторые результаты исследования индуцированных мощным радиоизлучением ионосферных неоднородностей с помощью наземного приема сигналов ИСЗ	505
Нургожин Б. И., Постоев Ю. К., Троицкий Б. В. Влияние волновых ионосферных возмущений на сигналы от ИСЗ	510
Жевакин С. А., Каневский М. Б. Метод расчета влияния сферически-слоистых неоднородностей на тропосферную рефракцию и вклад в радиорефракцию тумана, облачности и дождя	514
Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. Распространение электромагнитных волн в приводном тропосферном волноводе	520
<u>Поваров А. В., Рядов В. Я., Свердлов Б. А., Фурашов Н. И.</u> Экспериментальное исследование окон прозрачности атмосферы в диапазоне 300—700 мк	529
Пелиновский Е. Н., Соколов В. В. К нелинейной теории распространения электромагнитных волн в размерно-квантованных пленках	536
Куликов В. А., Лихарев К. К. СВЧ приемник с джозефсоновским детектором в режиме самоселекции	543
Колачевская В. В. Корреляция скачков Баркгаузена и спектр магнитного шума в ферромагнитных образцах с прямоугольной петлей гистерезиса	557
Раксина Ф. П. Влияние шумов входной цепи на амплитудные флуктуации автогенератора	562
Болотовский Б. М., Плис А. И., Столяров С. Н. Распространение импульсов излучения в нестационарных средах	567
Мартынов А. М. Дифракция света в среде, показатель преломления которой содержит две кратные пространственные гармоники	574
Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г. Дифракция высокочастотных электромагнитных волн на металлических объектах, окруженных плазменной оболочкой	583
Маненков А. Б. Потери несимметричных волн в неоднородных открытых волноводах малого поперечного сечения	595
Барсуков К. А., Григорян Г. А. Волновод с подвижной границей	603
Лозяной В. И., Онуфrienko В. М., Прохода И. Г. Решение задачи о волноводном трансформаторе методом интегральных уравнений второго рода	611
Классен В. И. Оценка некоторых типичных тригонометрических сумм, встречающихся в радиофизике	615

Краткие сообщения и письма в редакцию

Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г. К вопросу о дифракции высокочастотных электромагнитных волн на неоднородных диэлектрических объектах	622
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

УДК 538.573 : 523 72

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МОД БЕРНШТЕЙНА С ЛЕНГМЮРОВСКИМИ ВОЛНАМИ В СОЛНЕЧНОЙ КОРОНЕ**

Е. Я. Злотник

Рассмотрена нелинейная конверсия (слияние) мод Бернштейна и плазменных волн на гибридной частоте в электромагнитное излучение. В предельных случаях слабо и сильно анизотропной плазмы вычислена вероятность слияния продольных волн, а также излучательная способность на суммарной частоте и связанный с обратным процессом распада коэффициент поглощения. Полученные результаты используются для интерпретации явлений типа «зебра» в солнечных радиовсплесках и оценки возможной роли мод Бернштейна в происхождении δ -компоненты.

Магнитотормозное излучение и поглощение на гармониках гиро-частоты играют важную роль в генерации радиоизлучения солнечной короны и хромосферы. В последнее время происхождение всплесков с гармонической структурой в событиях IV типа («зебра»-структура) связывается с неустойчивостью продольных циклотронных волн (мод Бернштейна) в корональной плазме [1, 2]. При этом принимаемое на Земле радиоизлучение с частотой ω рассматривается как результат комбинационного рассеяния (слияния) продольных волн, возбужденных вблизи гармоник пирочастоты $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ (e — заряд и масса электрона, c — скорость света, H — магнитное поле), с плазменными волнами на частоте верхнего гибридного резонанса $\omega_r = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_H^2}$ ($\omega_L = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$, N — концентрация электронов):

$$\omega = \omega_r + s \omega_H. \quad (1)$$

В настоящей работе мы рассмотрим нелинейную конверсию мод Бернштейна и плазменных волн на гибридной частоте и обсудим значение этого процесса в происхождении двух видов событий в солнечном радиоизлучении: всплесков с тонкой структурой типа «зебра» и медленно меняющейся компоненты.

1. При взаимодействии волн со случайными фазами генерация поперечной электромагнитной волны в процессе слияний и распадов продольных волн описывается уравнением (см., например, [3–6])

$$\frac{dW_k}{dt} = \int \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left(W_{k_1} W_{k_2} - \frac{\omega_2}{\omega} W_{k_1} W_k - \frac{\omega_1}{\omega} W_{k_2} W_k \right) \times \\ \times \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2, \quad (2)$$

* Работа доложена на VII Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Горький, 1972.

где $\omega_{1,2}$ и $\mathbf{k}_{1,2}$ — частоты и волновые векторы взаимодействующих продольных волн, ω и \mathbf{k} — частота и волновой вектор поперечной волны, $W_{\mathbf{k}}$, $W_{\mathbf{k}_1}$, $W_{\mathbf{k}_2}$ — плотности энергии волн в пространстве соответствующих волновых векторов. Величина $\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ характеризует вероятность комбинационного рассеяния и имеет вид:

$$\Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{8(2\pi)^4 \omega \omega_1 \omega_2 |S|^2}{\left| \frac{\partial(\omega^2 \epsilon)}{\partial \omega} \right| \left| \frac{\partial(\omega_1^2 \epsilon_1)}{\partial \omega_1} \right| \left| \frac{\partial(\omega_2^2 \epsilon_2)}{\partial \omega_2} \right|}, \quad (3)$$

$$\epsilon = a_i^*(\mathbf{k}) \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) a_j(\mathbf{k}), \quad \epsilon_{1,2} = a_i^*(\mathbf{k}_{1,2}) \epsilon_{ij}(\omega_{1,2}; \mathbf{k}_{1,2}) a_j(\mathbf{k}_{1,2}),$$

ϵ_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости, $a(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k}_1)$, $a(\mathbf{k}_2)$ — векторы поляризации нормальных волн, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} & \left[k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right] a_j(\mathbf{k}) = 0, \\ & \left[k_{1,2}^2 \delta_{ij} - k_{1,2i} k_{1,2j} - \frac{\omega_{1,2}^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega_{1,2}; \mathbf{k}_{1,2}) \right] a_j(\mathbf{k}_{1,2}) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Величина S определяется тензором нелинейной проводимости, $S_{inm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, характеризующим квадратичный по полю E ток:

$$\begin{aligned} S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2} [S_{inm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + S_{lmn}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)] \times \\ & \times a_i^*(\mathbf{k}) a_n(\mathbf{k}_1) a_m(\mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Тензор $S_{inm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ в анизотропной плазме в гидродинамическом приближении* приведен, например, в [4]:

$$\begin{aligned} S_{inm}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{eN} \left\{ \frac{k_{2e}}{\omega_2} \sigma_{ln}(k_1) \sigma_{em}(k_2) - \frac{4\pi i}{\omega_L^2} \sigma_{ij}(k) \times \right. \\ \left. \times \sigma_{en}(k_1) \sigma_{jm}(k_2) k_{2e} + \frac{k_{2j}}{\omega_2} [\sigma_{ij}(k) \sigma_{mn}(k_1) - \sigma_{lm}(k) \sigma_{jn}(k_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\sigma_{ij} = \frac{\omega}{4\pi i} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}). \quad (7)$$

Из уравнения баланса (2) следует, что в процессе комбинационного рассеяния плотность энергии $W_{\mathbf{k}}$ не может нарастти больше определенной величины из-за влияния распадов:

$$W_{\mathbf{k}} \leq \frac{\omega W_{\mathbf{k}_1} W_{\mathbf{k}_2}}{\omega_2 W_{\mathbf{k}_1} + \omega_1 W_{\mathbf{k}_2}}. \quad (8)$$

Знак равенства здесь соответствует «оптически толстому» источнику.

2. Мы рассмотрим сначала случай слабо анизотропной плазмы, считая выполненным неравенство

$$\omega_H \ll \omega_L. \quad (9)$$

* Мы будем рассматривать волны, фазовые скорости которых велики по сравнению со скоростью теплового движения частиц в плазме. Слияния и распады таких волн достаточно хорошо описываются в рамках гидродинамического приближения.

При этом частота верхнего гибридного резонанса

$$\omega_r = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_H^2} \quad (10)$$

мало отличается от ленгмюровской частоты ω_L . Поэтому плазменные волны на верхнем гибридном резонансе (которым ниже соответствует индекс «1») мы будем называть ленгмюровскими волнами.

Рассматривая моды Бернштейна (к которым ниже будет относиться индекс «2») с небольшими номерами s , мы будем также считать справедливым условие*

$$\omega_2 = s \omega_H \ll \omega_L. \quad (11)$$

Учитывая, что моды Бернштейна не испытывают сильного затухания только при попечном (или почти попечном) распространении относительно магнитного поля ($\mathbf{k}_2 \perp \mathbf{H}$), выберем систему координат следующим образом: ось z направим вдоль магнитного поля, ось x — вдоль волнового вектора \mathbf{k}_2 . Угол между вектором $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и магнитным полем (т. е. осью z) будем обозначать через θ , а угол между попечной магнитному полю компонентой вектора \mathbf{k} и осью y — через φ .

Легко убедиться, что при условии (9) для электромагнитной волны в широких пределах выполняется квазипродольное приближение [7]:

$$\frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \ll 16 s^2. \quad (12)$$

При этом обыкновенная и необыкновенная волны поляризованы по кругу. В выбранной системе координат коэффициенты поляризации имеют вид

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \varphi \pm i \cos \theta \sin \varphi), \\ a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \varphi \pm i \cos \theta \cos \varphi), \\ a_z &= \mp \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta; \end{aligned} \quad (13)$$

здесь верхний знак соответствует необыкновенной волне, нижний — обычновенной.

Отметим также, что величина волнового вектора \mathbf{k} существенно меньше модулей волновых векторов продольных волн \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . В самом деле, показатель преломления электромагнитных волн на частоте $\omega = \omega_L + s \omega_H$ в квазипродольном приближении [7]

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_L^2 / \omega^2}{1 \mp (\omega_H / \omega) \cos \theta} \approx \frac{(2s \pm \cos \theta) \omega_H}{\omega_L} \ll 1. \quad (14)$$

Отсюда:

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} n \approx \frac{[(2s \pm \cos \theta) \omega_H \omega_L]^{1/2}}{c}. \quad (15)$$

* По-видимому, именно такое соотношение имеет место в источнике генерации всплесков типа «зебра» (см. ниже).

Если ленгмюровские волны возбуждаются электронами с характерной скоростью V_e , то

$$|\mathbf{k}_1| \approx \frac{\omega_L}{V_e}. \quad (16)$$

Сравнивая (13) и (14), получаем

$$\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}_1|} = \frac{V_e}{c} \sqrt{\frac{(2s \pm \cos \theta) \omega_H}{\omega_L}} \ll 1. \quad (17)$$

Последнее неравенство следует из условия (11).

Как и в изотропной плазме, закон сохранения

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (18)$$

при условии (17) может быть выполнен только для волновых векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , близких по величине и почти антипараллельных по направлению. Это означает, что эффективно взаимодействовать с модами Бернштейна могут ленгмюровские волны, распространяющиеся почти перпендикулярно магнитному полю (параллельно оси x); следовательно, компоненты \mathbf{k}_1 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} k_{1x} &\gg k_{1y} = k \sin \theta \cos \varphi, \\ k_{1x} &\gg k_{1z} = k \cos \theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя соотношение

$$\tau_{ij} a_j = \frac{e^2}{4\pi i \omega} \left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) a_i - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) k_i \right], \quad (20)$$

вытекающее из (4), и пренебрегая членами порядка $|\mathbf{k}|/|\mathbf{k}_{1,2}|$, из (6) и (7) можно получить приближенное выражение для S :

$$\begin{aligned} S \approx & - \frac{1}{2eN(4\pi)^2 k_1 k_2} \left\{ k_2^2 \omega_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{a}^*) + k_1^2 \omega_2 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{a}^*) - \right. \\ & - \omega_1 k_1 (n_1^2 - 1) (\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a}_\perp(\mathbf{k}_1)) \left[k_2^2 - \frac{\omega \omega_2}{\omega_L^2} (n^2 - 1) (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \right] - \\ & \left. - \omega_2 k_2 (n_2^2 - 1) (\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a}_\perp(\mathbf{k}_2)) \left[k_1^2 - \frac{\omega \omega_1}{\omega_L^2} (n^2 - 1) (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

В (21) векторы $\mathbf{a}_\perp(\mathbf{k}_1)$ и $\mathbf{a}_\perp(\mathbf{k}_2)$ — компоненты векторов поляризации плазменных волн, перпендикулярные \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . Для строго продольных плазменных волн $\mathbf{a}_\parallel(\mathbf{k}_{1,2}) = \mathbf{k}_{1,2}/k_{1,2}$, $\mathbf{a}_\perp(\mathbf{k}_{1,2}) = 0$, так что в (21) отличны от нуля только два первых слагаемых. При этом (21) совпадает с соответствующим выражением для изотропной плазмы [8]:

$$S = - \frac{1}{2eN(4\pi)^2 k_1 k_2} [k_1^2 \omega_2 (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{a}^*) + k_2^2 \omega_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{a}^*)]. \quad (22)$$

Если частоты взаимодействующих волн не близки одна к другой (например, $\omega_1 \gg \omega_2$), то первым слагаемым в (22) можно пренебречь. Тогда

$$S \approx - \frac{k_2 \omega_1}{2eN(4\pi)^2 k_1} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{a}^*). \quad (23)$$

Для волн с близкими частотами ($\omega_1 \approx \omega_2$) имеет место компенсация в нелинейном токе: величина S оказывается пропорциональной сумме $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, т. е. уменьшается по сравнению с (23) в $|\mathbf{k}_1|/|\mathbf{k}|$ раз.

Следует, однако, подчеркнуть, что в анизотропной плазме поперечной компонентой поляризации плазменных волн при вычислении нелинейного тока пренебрегать нельзя, несмотря на то, что $|\alpha_{\perp}(\mathbf{k}_{1,2})| \ll |\alpha_{\parallel}(\mathbf{k}_{1,2})| \approx 1$. Из (20) легко показать, что при условии $n_{1,2}^2 \gg 1$ (которое выполняется для плазменных волн)

$$\begin{aligned}\alpha_z(\mathbf{k}_{1,2}) &\approx 0, \\ \alpha_y(\mathbf{k}_{1,2}) &\approx \frac{\epsilon_{yx}(\mathbf{k}_{1,2})}{n_{1,2}^2}.\end{aligned}\quad (24)$$

Для плазменной волны на частоте, близкой к ω_L [9],

$$\epsilon_{yx}(\mathbf{k}_1) = i \frac{\omega_H}{\omega_L}. \quad (25)$$

Тензор диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} для магнитоактивной плазмы с температурой, отличной от нуля, приведен, например, в [10], откуда следует, что для мод Бернштейна

$$\epsilon_{yx}(\mathbf{k}_2) = -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_L^2}{\omega_2(\omega_2 - m\omega_H)} e^{-\lambda m} I_m (I_m - I'_m), \quad (26)$$

где I_m — модифицированная функция Бесселя порядка m от аргумента $\lambda = \frac{k_{2\perp}^2 v_T^2}{\omega_H^2}$ (v_T — тепловая скорость электронов). Ограничиваюсь случаем $\lambda \ll 1$, преобразуем сумму (26) к виду

$$\epsilon_{yx}(\mathbf{k}_2) \approx i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_L^2 \omega_H}{\omega_2(\omega_2^2 - m^2 \omega_H^2)} \frac{m^2}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m-1}. \quad (27)$$

Решая задачу в гидродинамическом приближении, мы должны в качестве $\epsilon_{yx}(\mathbf{k}_2)$ взять предел правой части выражения (27) при $\beta_T \rightarrow 0$. В (27) частота мод Бернштейна определяется из дисперсионного уравнения*

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(\mathbf{k}_2) &= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - m^2 \omega_H^2} \frac{2m^2 e^{-\lambda} I_m(\lambda)}{\lambda} \approx \\ &\approx 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_H^2(s^2 - 1)} - \frac{\omega_L^2}{(\omega^2 - s^2 \omega_H^2)} \frac{s}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{s-1} = 0,\end{aligned}\quad (28)$$

* Моды Бернштейна в настоящей статье рассматриваются без учета релятивистских эффектов зависимости массы электронов от скорости, что справедливо вне узких частотных интервалов $s \omega_H - \omega_2 \lesssim s \omega_H \beta_T^2$. Заметим также, что дисперсионное уравнение (28) записано для волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. Для косых волн (с $k_2 \neq 0$) в дисперсионном уравнении появятся дополнительные множители типа $[1 + k_{2\parallel}^2 v_T^2 / (\omega_2 - s \omega_H)^2]$. Однако для слабозатухающих волн добавка $k_{2\parallel}^2 v_T^2 / (\omega_2 - s \omega_H)^2$ преубежденно мала по сравнению с единицей, поэтому волны, распространяющиеся почти поперек магнитного поля, приближенно могут быть описаны уравнением (28).

которое на частоте, близкой к $s\omega_H$, и при $\omega_L^2 \gg s^2\omega_H^2$ имеет приближенное решение:

$$\omega_L^2 \approx s^2\omega_H^2 - \omega_H^2 \frac{s(s+1)}{(s-2)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{s-1}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27) и устремляя $\beta_T \rightarrow 0$, получим*

$$\varepsilon_{yx}(k_2) \approx -i \frac{\omega_L^2}{\omega_H^2 s(s+1)}. \quad (30)$$

Подстановка в (21) частот $\omega_1 \approx \omega_L$ и $\omega_2 \approx s\omega_H \ll \omega_L$, а также соотношений (24) с учетом (25) и (30) показывает, что наибольший вклад в S дают первый и четвертый члены (два других содержат малый множитель ω_H/ω_L). При этом

$$S \approx \frac{k_1 \omega_L}{2eN(4\pi)^2} \left[a_x^* - ia_y^* \frac{s \mp \cos \theta}{s+1} \right]. \quad (31)$$

Первое слагаемое здесь совпадает с выражением (23) для изотропного случая, второе появляется из-за учета непродольности плазменных волн. Заметим, что по порядку величины оба слагаемых одинаковы. Подставляя в (31) выражения (13) для a_x и a_y , получим

$$S \approx \frac{k_1 e (1 \mp \cos \theta)}{8\pi \sqrt{2m\omega_L}} \left[\cos \varphi \left(1 \pm \frac{\cos \theta}{s+1} \right) \mp i \sin \varphi \frac{s}{s+1} \right]. \quad (32)$$

Пренебрегая величиной $1/(s+1)$ по сравнению с единицей, заменим выражение в квадратной скобке приближенным значением $(\cos \varphi \mp i \sin \varphi)$. Тогда

$$|S|^2 \approx \frac{e^2 (1 \mp \cos \theta)^2}{32(2\pi)^2 m^2 V_e^2}. \quad (33)$$

Вычисление S для рассматриваемого процесса слияний мод Бернштейна с лентмюровскими волнами было также выполнено в работе [11]. При этом авторы исходили из тензора нелинейной проводимости S_{inm} , приведенного в обзоре [12]. Однако этот тензор при условии $\omega_H \ll \omega_L$, которое используется в [11], совпадает с тензором S_{inm} для изотропной плазмы. Сказанное означает, что в [11] не было учтено слагаемое, связанное с непродольностью мод Бернштейна**. Кроме того, некорректное преобразование тензора S_{inm} в [11] привело к появлению эффекта компенсации в нелинейном токе. В результате найденная в [11] вероятность рассеяния оказалась заниженной в k_1^2/k^2 раз.

Перейдем теперь непосредственно к вычислению $\Pi(k, k_1, k_2)$. Учитывая, что с точностью до членов порядка ω_H/ω_L

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega_1^2},$$

В отличие от плазменных волн на гибридной частоте, где компонента $\varepsilon_{yx}(k_1)$ при $\beta_T \rightarrow 0$ определяется только первыми членами ($m = \pm 1$) суммы (26), для мод Бернштейна резонансное слагаемое ($m = s$), пропорциональное $(\lambda/2)^{s-1}/(\omega_2^2 - s^2\omega_H^2)$, оказывается сравнимым с первым членом суммы.

* Отсутствие в (31), (32) члена, пропорционального a_y^* , не влияет на оценку по порядку величины.

получим

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} (\omega_1^2 \epsilon_1) \approx 2 \omega_L, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon) \approx 2 \omega_L. \quad (34)$$

Для мод Бернштейна из (28) и (29) следует*

$$\frac{\partial (\omega_2^2 \epsilon_2)}{\partial \omega_2} \approx \frac{s^2}{s^2 - 1} \frac{\omega_L^2}{|s\omega_H - \omega_2|} \approx \frac{2ss!}{(s^2 - 1)^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{s-1} \omega_H} \frac{\omega_L^2}{\omega_H}. \quad (35)$$

Подставляя (33) — (35) в (3), получим вероятность ислинейного взаимодействия ленгмюровских волн с модами Бернштейна:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &\approx \frac{\pi^2}{4} \frac{s^2 - 1}{s} \frac{|s\omega_H - \omega_2| \omega_H e^2}{m^2 V_e^2 \omega_L^2} (1 \mp \cos \theta)^2 \approx \\ &\approx \frac{\pi^2}{8} \frac{(s^2 - 1)^2}{s!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{s-1} \frac{\omega_H^2 e^2}{m^2 V_e^2 \omega_L^2} (1 \mp \cos \theta)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

3. Используя соотношение

$$I_\omega = k^2 W_k, \quad (37)$$

определенное связь между интенсивностью I_ω и плотностью энергии W_k электромагнитного излучения, перепишем уравнение (2) в виде обычного уравнения переноса:

$$\frac{dI_\omega}{dl} = \alpha_\omega - \mu I_\omega. \quad (38)$$

Здесь

$$\alpha_\omega = \frac{k^2}{v_{rp}} \int \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) W_{k_1} W_{k_2} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (39)$$

представляет собой излучательную способность, связанную со слиянием волн 1 и 2. Коэффициент поглощения

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{v_{rp}} \int \Pi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &\left(\frac{\omega_2}{\omega} W_{k_1} + \frac{\omega_1}{\omega} W_{k_2} \right) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (40)$$

характеризует обратный слиянию процесс распада поперечной волны на продольные волны 1 и 2. Величина v_{rp} есть групповая скорость поперечных волн:

$$v_{rp} \approx cn \approx c \sqrt{2s\omega_H/\omega_L}. \quad (41)$$

Интегралы (39) и (40) по $d\mathbf{k}_1$ вычислим, используя свойства функции $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$. Интегрирование по $d\mathbf{k}_2 = k_{2\perp} dk_{2\perp} dk_{2\parallel} d\phi$ проведем, пренебрегая слабой зависимостью подынтегральных функций от угла ϕ и малым изменением их в пределах $k_{2\parallel}$ (поскольку $k_{2\parallel}$ мало). Тогда

* Первое из равенств (35) справедливо не только при $\lambda \ll 1$, но и в области $\lambda \geq 1$ (с точностью до множителя 2). При этом в качестве $|s\omega_H - \omega_2|$ надо подставлять строгое решение уравнения (28).

$$a_{\omega} \approx \frac{k^2}{v_{rp}} \frac{2\pi 2k_{2\parallel} W_{k_1} W_{k_2} k_{2\perp} \Pi}{\frac{\partial(\omega_1 + \omega_2)}{\partial k_{2\perp}}} \quad (42)$$

Оценки показывают, что для интересующих нас параметров $\frac{\partial \omega_1}{\partial k_{2\perp}} \approx \frac{3v_T^2}{V_e} \gg \frac{\partial \omega_2}{\partial k_{2\perp}}$. Границы $k_{2\parallel}$ определяются из условия оптимальной генерации мод Бернштейна [2]:

$$k_{2\parallel} \approx \frac{|s\omega_H - \omega_2|}{V_e} \quad (43)$$

Окончательно для излучательной способности получим формулу

$$a_{\omega} \approx \frac{\pi^3}{3} \frac{s^2 - 1}{s} \frac{e^2 \omega_L \omega_H}{m^2 c^3 v_T^2} \frac{(s\omega_H - \omega_2)^2}{V_e^3} \sqrt{\frac{2s\omega_H}{\omega_L}} (1 \mp \cos \theta)^2 W_{k_1} W_{k_2} \quad (44)$$

Аналогично для коэффициента поглощения

$$\mu \approx \frac{\pi^3}{3} \frac{s^2 - 1}{s} \frac{e^2}{m^2 c v_T^2} \frac{(s\omega_H - \omega_2)^2}{V_e^3} \sqrt{\frac{\omega_H}{2s\omega_L}} \times \\ \times (1 \mp \cos \theta)^2 \left(\frac{s\omega_H}{\omega_L} W_{k_1} + W_{k_2} \right) \quad (45)$$

Интенсивность излучения из области с размерами l равна

$$I_{\omega} = \frac{a_{\omega}}{\mu} (1 - e^{-\mu l}) \quad (46)$$

и составляет $a_{\omega} l$ в случае «оптически тонкого» источника ($\mu l \ll 1$) и a_{ω}/μ в случае «оптически толстого» источника ($\mu l \gg 1$).

Заметим, что в работе [11] при вычислении интенсивности излучения, возникающего в результате слияния мод Бернштейна с ленгмюровскими волнами, также был допущен ряд неточностей. Прежде всего, величина I_{ω} , определяемая формулами (2.3) и (A.15) статьи [11], представляет собой не интенсивность излучения, а излучательную способность a_{ω} (ср. с формулой (39) настоящей статьи). Некорректное интегрирование по фазовому объему, а также неточности в вычислении вероятности рассеяния (см. об этом п. 2) привели к тому, что соответствующие формулы и численные оценки для «зебра»-структуры, полученные в [11], отличаются от приведенных в настоящей статье.

4. Произведем теперь конкретные оценки эффективности конверсии в условиях, характерных для генерации «зебра»-структуры. При этом мы будем иметь в виду конкретное событие 2.III.1970, зарегистрированное Слотье [13]. «Зебра»-структура наблюдалась на частотах 240—320 МГц с расстоянием между полосами 15 МГц. Плотность потока излучения составляла $f \sim 4 \cdot 10^{-20} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1} = 4 \cdot 10^{-17} \text{ (эрд/c)} \times \text{см}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$.

Согласно [2], наиболее вероятная схема генерации «зебра»-структуры в указанном событии состоит в следующем. В источнике малых

размеров (с однородным магнитным полем H) система энергичных электронов с неравновесным распределением по поперечным (относительно H) скоростям, возбуждает плазменные волны на частоте, близкой к ω , и моды Бернштейна на низких гармониках гирочастоты. Концентрация корональной плазмы в области генерации составляет $5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$, магнитное поле $\sim 5 \text{ Э}$ (соответственно, $\omega_L = 2\pi \cdot 200 \text{ МГц}$, $\omega_L/\omega_H = 15$). Скорость энергичных электронов $V_e \approx 6 \cdot 10^9 \text{ см/с}$, тепловая скорость корональных электронов $v_T \approx 3 \cdot 10^8 \text{ см/с}$.

Если дисперсия энергичных электронов по скоростям по порядку величины совпадает со средней скоростью, то неустойчивость имеет место при $k_1 > \frac{\omega_L}{V_e}$ для лэнгмюровской волны и при $k_2 > \frac{s\omega_H}{V_e}$ для мод Бернштейна [2]. Электромагнитное излучение на частоте $\omega = \omega_L + s\omega_H$ возникает в результате комбинационного рассеяния (слияния) этих волн с волновыми числами $k_1 \approx k_2 \gtrsim \omega_L/V_e$. Учитывая, что при $k_2 \gtrsim \omega_L/V_e$ для второй гармоники ($s=2$) величина $|s\omega_H - \omega_2| \gtrsim 0,2\omega_H$, и подставляя в (44) и (45) численные значения, приведенные выше, получим

$$a_\omega \approx 10^{-10} W_{k_1} W_{k_2}; \quad (47)$$

$$\mu = 2,5 \cdot 10^{-7} (0,13 W_{k_1} + W_{k_2}). \quad (48)$$

С помощью a_ω (47) и μ (48) интенсивность радиоизлучения (46) можно выразить через спектральные плотности энергии W_{k_1} и W_{k_2} . Полагая $\mu l \ll 1$ (такое предположение оправдывается результатом; см. ниже), получим

$$I_\omega \approx a_\omega l \approx 10^{-2} W_{k_1} W_{k_2}. \quad (49)$$

При переходе к последнему соотношению размеры источника l были приняты $\sim 10^8 \text{ см}$. С другой стороны, интенсивность излучения I_ω можно определить по наблюдавшемуся в событии 2.III.1970 потоку радиоизлучения $f_\nu \sim 4 \cdot 10^{-17} (\text{эрд/с}) \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$. Учитывая соотношение

$$f_\nu = 2\pi I_\omega \frac{l^2}{R^2} \quad (50)$$

(где $R = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ — расстояние от Солнца до Земли) и полагая размер источника* $l \sim 10^8 \text{ см}$, получим $I_\omega \approx 1,5 \cdot 10^{-7} (\text{эрд/с}) \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$. Подстановка этого значения в (49) налагает следующее ограничение на плотности энергии W_{k_1} и W_{k_2} :

$$W_{k_1} W_{k_2} \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ эрд}^2. \quad (51)$$

Без детального расчета нелинейного режима возбуждения мод Бернштейна и плазменных волн в гибридной полосе трудно сделать более определенные заключения о величинах W_{k_1} и W_{k_2} . Если же положить $W_{k_1} \sim W_{k_2}$, то из (51) следует, что для обеспечения наблюдаемого потока радиоизлучения в «зебра»-структуре спектральная плотность энергии продольных волн должна составлять:

$$W_{k_1} \sim W_{k_2} \sim 4 \cdot 10^{-3} \text{ эрд}. \quad (52)$$

При этом, как и предполагалось, $\mu l \approx 0,1 \ll 1$.

* Все оценки, приведенные ниже, выполнены для однородного источника.

Согласно [2], усиленная генерация ленгмюровских волн электротормозами, захваченными в магнитную ловушку, происходит в условиях двойного резонанса, когда частота $\omega_r \approx \omega_L$ оказывается близкой к одной из гармоник гироочастоты $n\omega_H$. При этом инкремент принимает наибольшие значения в интервале волновых чисел $\Delta k_{1\perp} \sim k_{1\perp} \sim \omega_L/V_e$,

$$\Delta k_{1\parallel} \sim 2 \frac{|\omega_1 - n\omega_H|}{V_e} \sim 0,4 \omega_H/V_e. \text{ Для приближенных оценок можно считать, что фазовый объем, занимаемый ленгмюровскими волнами, в данном случае составляет } (\Delta k_1)^3 \sim 2\pi k_{1\perp} \Delta k_{1\perp} \Delta k_{1\parallel} \approx 0,8 \pi \frac{\omega_L^2 \omega_H}{V_e^3}.$$

Подставляя значения $V_e \sim 6 \cdot 10^9 \text{ см}/c$, $\omega_H \approx 2\pi \cdot 15 \text{ МГц}$ и $\omega_L \approx 15 \omega_H$, характерные для «зебра»-структурь в области 2.III.1970 [2], получим оценку полной плотности энергии ленгмюровских волн:

$$W_{l_1} \approx W_{k_1} (\Delta k_1)^3 \sim 7 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}/\text{см}^3. \quad (53)$$

Фазовый объем, занимаемый модой Бернштейна с номером s , в $\omega_L^2/s^2 \omega_H^2$ меньше величины $(\Delta k_1)^3$. Поэтому при $W_{k_1} \sim W_{k_2}$ полная плотность энергии W_{l_2} составляет малую долю W_{l_1} .

Сравним полученное значение W_{l_1} с плотностью энергии частиц, ответственных за возбуждение ленгмюровских волн.

$$N_e E_e = N_e \frac{m V_e^2}{2} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ эрг}/\text{см}^3; \quad (54)$$

здесь в качестве плотности электронов подставлена $N_e \sim 10^4 \text{ см}^{-3}$ — поровая концентрация, необходимая для того, чтобы инкремент был больше декремента из-за соударений (см. [2]). Из (53) и (54) видно, что для обеспечения наблюдаемого потока радиоизлучения достаточна энергия возбужденных плазменных волн, составляющая несколько процентов полной плотности энергии неравновесных электронов.

Еще менее жесткие требования к плотности энергии продольных волн предъявляются в случае, если «зебра»-структура генерируется в распределенном источнике. Согласно [2], значительная часть «зебра»-структурь обязана своим появлением неравновесным частицам, заполняющим магнитную силовую трубку. При этом подъем интенсивности происходит в областях двойного резонанса, где $\omega_r \approx n\omega_H$. Вследствие слияния двух волн с частотами $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_r \approx \omega_L$ возникает радиоизлучение с частотой $\omega \approx 2\omega_L$.

Используя выражение (22) для нелинейной проводимости S и дисперсионные соотношения $\omega_{1,2}^2 = \omega_i^2 + 3k_{\perp,1,2}^2 v_T^2$, справедливые при $k_{\perp,1,2}^2 v_T^2 \ll \omega_{1,2}^2$ (см. подробнее [2]), вычислим излучательную способность a_ω и коэффициент поглощения μ для процесса слияния и распадов ленгмюровских волн. Интерпривование по фазовому объему в (39) и (40) проведем аналогично тому, как это было сделано при получении излучательной способности a_ω (42). Тогда с точностью до малых членов $\sim |\omega_1 - n\omega_H|/\omega_1$ формулы (39) и (40) преобразуются к виду

$$a_\omega = 4\pi^3 \sqrt{3} \frac{e^2 \omega_L^3 |\omega_1 - n\omega_H|}{m^2 c^5 V_e v_T^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta W_{k_1}^2; \quad (55)$$

$$\mu = \frac{4\pi^3}{\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L |\omega_1 - n\omega_H|}{m^2 c^3 V_e v_T^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta W_{k_1}. \quad (56)$$

Эти соотношения отличаются от соответствующих выражений для изотропной плазмы (приведенных, например, в [14]) малым множителем $\sim \left| \frac{\omega_1 - n\omega_H}{\omega_1} \right| \sin^2 \theta \cos^2 \theta$, который связан с ограниченностью

фазового объема, занимаемого плазменными волнами в области двойного резонанса (см. п. 2 и [2]). В то же время, несмотря на компенсацию в нелинейном токе для волн с близкими частотами ($\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_L$), эффективность конверсии ленгмюровских волн существенно выше соответствующей величины для слияния мод Бернштейна с ленгмюровскими волнами. Это обстоятельство связано с тем, что для мод Бернштейна

множитель $\omega_2 \left[\frac{\partial(\omega_2^2 \epsilon_2)}{\partial \omega_2} \right]^{-1}$, входящий в вероятность Π (3), мал по сравнению с такой же величиной для ленгмюровских волн (ср. (34) и (35)). Отношение соответствующих вероятностей составляет $|s\omega_H - \omega_L| s \omega_H \omega_L^{-2} c^2 / V_e^2$ и при $\omega_L \approx 2\pi \cdot 200 \text{ MГц}$, $\omega_L/\omega_H = 15$, $V_e = 6 \cdot 10^9 \text{ см}/c$, $s = 2$, $|s\omega_H - \omega_L| \sim 0,2 \omega_H$ не превышает $2 \cdot 10^{-2}$.

Оценки показывают*, что в модели распределенного источника при значениях параметров, указанных выше, интенсивность радиоизлучения, по порядку величины, совпадающая с наблюдавшейся в событии 2.III.1970 ($I_{\nu} \sim 10^{-7} (\text{эрд}/c) \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$), реализуется в оптически тонком источнике ($\mu l \approx 0,3$). При этом спектральная плотность энергии ленгмюровских волн

$$W_{k_i} \sim 10^{-4} \text{ эрг}. \quad (57)$$

Эта величина на порядок меньше соответствующей спектральной плотности энергии ленгмюровских волн, которая необходима для обеспечения наблюдаемой интенсивности радиоизлучения при слиянии их с модами Бернштейна.

Сравнение плотности энергии электронов, генерирующих ленгмюровские волны в области двойного резонанса,

$$N_e E_e = N_e \frac{mV_e^2}{2} \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}/\text{см}^3, \quad (58)$$

где пороговая концентрация N_e составляет $2 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$ (см. [2]) с полной плотностью энергии этих волн

$$W_{l_1} \sim W_{k_i} (\Delta k)^3 \sim 2 \cdot 10^{-7} \text{ эрг}/\text{см}^3, \quad (59)$$

показывает, что и в этом случае достаточно передать плазменным волнам малую долю энергии неравновесных частиц.

5. Обсудим теперь возможную роль мод Бернштейна в происхождении s -компоненты. Как известно, эффективная температура излучения локальных источников, связанных с пятнами, не превышает T_k — кинетической температуры короны. Это обстоятельство дало Железнякову [8] основание заключить, что s -компонента представляет собой теплое (магнитотормозное и тормозное) излучение. Это же обстоятельство служило причиной, по которой нетепловые механизмы в применении к s -компоненте серьезно не рассматривались.

В то же время, как следует из уравнения баланса при взаимодействии продольных волн (2), верхняя граница для эффективной

* При оценках предполагается, что в модели распределенного источника разчер области, из которой выходит радиоизлучение на фиксированной частоте, совпадает с размером $l \sim 10^8 \text{ см}$ в модели «точечного» источника.

температуры $T^{\text{эфф}}$ электромагнитного излучения существует благодаря обратной конверсии поперечных волн в продольные. При определенных условиях это ограничение приводит к выполнению неравенства $T^{\text{эфф}} \leq T_k$.

В самом деле, допустим, что в области над пятном возбуждены волны на верхнем гибридном резонансе ($\omega_1 = \omega_r$), которые рассеиваются на модах Бернштейна ($\omega_2 = s\omega_H$) в электромагнитное излучение с частотой $\omega = s\omega_H \pm \omega_r$. Допустим, что плотность энергии в модах Бернштейна соответствует тепловому уровню, т. е. $T^{\text{эфф}}_2 = T_k$. Поскольку в локальных источниках, по-видимому,

$$\omega_H \gg \omega_L, \quad (60)$$

то $\omega_1 \approx \omega_r \approx \omega_H$ и $\omega \approx (s \pm 1)\omega_H$. Из (8) или равенства

$$T^{\text{эфф}} = \frac{\omega T^{\text{эфф}}_1 T^{\text{эфф}}_2}{\omega_2 T^{\text{эфф}}_1 + \omega_1 T^{\text{эфф}}_2}, \quad (61)$$

справедливого для оптически толстого источника ($\mu l \gg 1$), следует, что при $T^{\text{эфф}}_2 < T^{\text{эфф}}_1$ величина $T^{\text{эфф}} = \frac{s \pm 1}{s} T^{\text{эфф}}_2$. Значение $\frac{s \pm 1}{s} T^{\text{эфф}}_2$ при $T^{\text{эфф}}_2 \approx T_k$ примерно соответствует кинетической температуре короны*.

Предложенная схема генерации обсуждается здесь по следующей причине. В некоторых случаях при объяснении наблюдаемых характеристик локальных источников построение моделей таких источников, генерирующих тепловое магнитотормозное излучение на второй-третьей гармониках гирочастоты, встречается с определенными трудностями. Здесь мы имеем в виду те случаи, когда над пятнами со слабым магнитным полем наблюдается s -компоненты с заметным максимумом на сантиметровых волнах. В этом случае тепловой магнитотормозной механизм, обеспечивающий формирование частотного спектра с максимумом, требует сильных магнитных полей в области генерации. Однако в модели с магнитным полем в области генерации, полученным экстраполяцией слабого магнитного поля в основании пятна, над пятном располагаются лишь гармонические уровни $s \geq 5$. Их тепловое магнитотормозное излучение неэффективно, поскольку оптическая толщина этих уровней много меньше единицы. В этих условиях рассмотренная выше схема генерации электромагнитного излучения (за счет рассеяния нетепловых плазменных волн на тепловых модах Бернштейна) могла бы представить интерес с точки зрения интерпретации s -компоненты в том случае, если указанный процесс рассеяния поднимает эффективную температуру радиоизлучения $T^{\text{эфф}}$ до уровня кинетической температуры короны T_k . Для этого необходимо, чтобы эффективное поглощение поперечных волн, связанное с распадами на плазменные волны с частотой $\omega_r \approx \omega_H$ и моды Бернштейна с номерами $s \geq 5$, было достаточно велико ($\mu l \gg 1$).

Опуская выкладки (которые в целом аналогичны рассмотренным в п. 2 для обратного случая $\omega_H \ll \omega_L$), приведем окончательное выражение для коэффициента поглощения, обусловленного процессом распада:

* На существование верхней границы $T^{\text{эфф}} \approx T_k$ при рассеянии на тепловых модах Бернштейна обратил наше внимание В. В. Зайцев.

$$\mu \approx \frac{\pi^3}{12(s+1)[(s-2)!]^2} \frac{\omega_L^2 e^2}{m^2 v_T^3 V_e^2 c} \left(\frac{v_T}{2V_e} \right)^{2s-2} (1 \mp \cos \theta)^2 W_{k_1}. \quad (62)$$

Если в качестве размера источника взять верхнюю границу* — размер пятца $L_H \sim 10^9 \text{ см}$, то при $N = 10^9 \text{ см}^{-3}$, $V_e = 3 v_T \approx 10^9 \text{ см/с}$, $s = 5$ получим на волне $\lambda = 5 \text{ см}$

$$\mu l \approx 8 W_{k_1}. \quad (63)$$

Согласно (63), источник будет оптически толстым и $T_{\text{эфф}}$ определяется формулой (61), если спектральная плотность плазменных волн W_{k_1} достигает значений выше 10^{-1} эрг .

Чтобы судить о возможности поддерживать энергию возбужденных волн на указанном уровне, заметим следующее. Вследствие соударений в единицу времени и объема переходит в тепло $W_{k_1} (\Delta k_1)^3 \gamma_{\text{эфф}}$ часть энергии плазменных волн. Для компенсации этих потерь необходимо, чтобы энергия частиц, поступающих в единичный объем области генерации в единицу времени, была не меньше

$$E_e \frac{dN_e}{dt} \approx W_{k_1} (\Delta k_1)^3 \gamma_{\text{эфф}}. \quad (64)$$

Полагая $(\Delta k_1)^3 \sim 4\pi k_1^3 \approx 4\pi (\omega_{II}/V_e)^3$, $\gamma_{\text{эфф}} \approx 30 \text{ с}^{-1}$, $E_e = mV_e^2/2 \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ эрг}$ и $W_{k_1} > 10^{-1}$, получим, что

$$\frac{dN_e}{dt} > 2 \cdot 10^{13} \text{ эл} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}. \quad (65)$$

Таким образом, для того, чтобы источник был непрозрачным для процесса рассеяния ($\mu l > 1$) и соответственно эффективная температура достигла уровня корональной температуры ($T_{\text{эфф}} \approx T_K$), необходима инъекция в единицу объема в области генерации более $10^{13} \text{ эл} \cdot \text{с}^{-1}$ (при плотности корональной плазмы $\sim 10^9 \text{ см}^{-3}$). Поскольку такая инъекция в солнечных условиях не представляется возможной, мало вероятно, что неустойчивость продольных волн на гибридной частоте (с последующей конверсией их на тепловых модах Бернштейна в электромагнитное излучение) играет заметную роль в происхождении сантиметрового излучения локальных источников.

Автор выражает глубокую признательность В. В. Железнякову, В. В. Зайцеву, В. Ю. Трахтенбергу и Д. С. Котику за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Rosenberg, Solar Phys., 25, 188 (1972).
2. В. В. Железняков, Е. Я. Злотник, Solar Phys., 43, 431 (1975); 44, 461 (1975).
3. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1971.
4. Ю. В. Трахтенберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 884 (1970).
5. D. B. Meirose, Austral. J. Phys., 23, 871 (1970).
6. D. F. Smith, P. A. Sturrock, Astrophys. Space Sci., 12, 411 (1971).
7. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
8. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
9. В. Д. Шафранов, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.
10. А. Б. Михайловский, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.

* Все оценки для δ -компоненты здесь проведены с большим запасом.

11. C. Chiuderi, R. Giachetti, H. Rosenberg, Solar. Phys., 33, 225 (1973).
12. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, УФН, 97, 77 (1969).
13. C. Slottje, Solar. Phys., 25, 210 (1972).
14. В. В. Железняков, Е. Я. Злотник, Solar. Phys., 40, 39 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 августа 1974 г.

ON NONLINEAR INTERACTION OF BERNSTEIN MODES WITH LANGMUIR WAVES IN THE SOLAR CORONA

E. Ya. Zlotnik

A nonlinear conversion (coalescence) of Bernstein modes and plasma waves at the hybrid frequency into electromagnetic radiation is considered. In the limit cases of weakly and strongly anisotropic plasma, the probability of coalescence of longitudinal waves is calculated, as well as the emissivity at the sum frequency and the absorption coefficient related with the inverse decay process. The results obtained are used for interpreting "zebra" type phenomena in solar radio bursts and for estimating a possible role of Bernstein modes in the *s*-component origin.

УДК 533.951

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИСКАЖЕНИЙ РАДИОСИГНАЛОВ В НЕОДНОРОДНОМ ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ ПЛАЗМЫ

А. П. Анютин, Ю. И. Орлов

Анализируются дисперсионные искажения АМ и ЧМ радионимпульсов в неоднородном линейном слое плазмы. Строгое решение задачи используется для асимптотического и численного исследования. Исследованы особенности пространственно-временной фокусировки поля ЧМ радионимпульсов, связанные с образованием особых пространственно-временных каустик. На основе быстрого преобразования Фурье проведены численные расчеты строгого решения, их результаты сравниваются с численными результатами, полученными на основе асимптотических методов, метода пространственно-временной геометрической оптики и «временного» интегрального представления. Показано хорошее совпадение численных результатов по строгой и асимптотическим теориям. На основе полученных результатов дается наглядная физическая интерпретация искажений радиосигналов в неоднородной плазме.

Исследование дисперсионных искажений амплитудно-модулированных (АМ) и частотно-модулированных (ЧМ) радиосигналов в неоднородной плазме проводилось в ряде работ (см., например, [1-5]). Однако многие важные вопросы, связанные с исследованием структуры АМ и ЧМ радиосигналов внутри неоднородной плазмы, оказались недостаточно изученными.

В данной работе исследуются особенности искажений плоских ТЕ-поляризованных АМ и ЧМ радиосигналов в неоднородном плазменном слое, квадрат плазменной частоты в котором изменяется по линейному закону:

$$\omega_p^2(z) = \begin{cases} \alpha^2 z & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}. \quad (1)$$

Рассматриваемая задача допускает точное решение, которое в данной работе используется как для численных расчетов, так и для асимптотического исследования. Проведенные асимптотические исследования позволили установить ряд интересных особенностей пространственно-временной рефракции и фокусировки ЧМ радиосигналов, которые не отмечались в литературе [2, 3, 5]. На основе метода быстрого преобразования Фурье получены численные результаты расчетов точного решения, которые сравниваются с результатами асимптотических методов: метода пространственно-временной геометрической оптики [2, 7, 8] и его обобщения — пространственно-временного интегрального представления [9]. Показано хорошее совпадение численных расчетов по строгой и асимптотическим теориям. Проведенные численные расчеты позволяют исследовать особенности искажений АМ и ЧМ радиосигналов в линейном слое плазмы в зависимости от параметров сигнала и плазмы.

1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть поле падающего радиосигнала конечной длительности определяется при $z < 0$ выражением

$$E_x^{\text{пад}}(z, y, t) = F(t_{\text{пад}}) \exp \{-i\omega_0 [t_{\text{пад}} + f(t_{\text{пад}})]\}, \quad (2)$$

где $t_{\text{пад}} = t - \frac{y}{c} \sin \theta - \frac{z}{c} \cos \theta$, c — скорость света, θ — угол падения,

$F(t) = 0$ при t , не принадлежащем $[0, T]$, и $F(t) \neq 0$ при t , принадлежащем $[0, T]$, T , ω_0 — длительность и несущая частота радиосигнала, $F(t)$ и $f(t)$ — функции, определяющие амплитудную и частотную модуляции радиосигнала. Тогда точное решение для поля радиосигнала (2) внутри плазмы (1) (при $z \geq 0$) имеет вид

$$E_x(z, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_1} d\eta F(\eta) \exp \{-i\omega_0 [\eta + f(\eta)]\} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2v(\xi) e^{-i\omega(\tau-\eta)}}{v(\xi_0) - iv'(\xi_0)(-\xi_0)^{-1/2}}, \quad (3)$$

где $\xi = \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{2/3} \left(z - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \cos^2 \theta\right)$, $\xi_0 = -\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} \frac{\omega^2}{\alpha^2} \cos^2 \theta$, $\tau = t - \frac{y}{c} \sin \theta$ — приведенное время, $v(x)$ и $v'(x)$ — функция Эйри и ее производная в обозначениях Фока [11], $\tau_1 = \min(T, \tau - \frac{z}{c} \cos \theta)$.

Для асимптотического исследования точного решения (3) будем считать, что всюду в области, существенной для интегрирования,

$$-\xi \equiv \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{2/3} \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} \cos^2 \theta - z\right) \gg 1, -\xi_0 \equiv \left(\frac{\alpha}{c}\right)^{2/3} \frac{\omega^2}{\alpha^2} \cos^2 \theta \gg 1. \quad (4)$$

Подставляя ВКБ асимптотику функции Эйри в (3) и вычисляя внутренний интеграл по частоте ω с помощью метода стационарной фазы, из (3) получим

$$E_x(z, y, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha c}{2\pi\omega_0}} \int_0^{\tau_1} \frac{F(\eta) c^{1/2} (\tau - \eta)^{1/2} \exp \left[i\omega_0 \varphi(\tau, z, \eta) + i\frac{\pi}{4} \right]}{\{\cos \theta [c(\tau - \eta) - z \cos \theta]\}^{3/4}} d\eta, \quad (5)$$

где

$$-\varphi(\tau, z, \eta) = \eta + f(\eta) + \frac{\alpha [c(\tau - \eta) + 2z \cos \theta] \sqrt{c(\tau - \eta) - z \cos \theta}}{3\omega_0 c \cos^{3/4} \theta}; \quad (6)$$

при этом стационарная частота $\omega_s = \omega_s(\tau - \eta, z)$ равна

$$\omega_s = \frac{\alpha c (\tau - \eta)}{2\omega_0 \cos^{3/2} \theta \sqrt{c(\tau - \eta) - z \cos \theta}}. \quad (7)$$

Формула (5) совпадает с асимптотическим пространственно-временным интегральным представлением, предложенным в случае произвольной неоднородной плазмы в работе [9]. При этом нетрудно убедиться, что амплитудная и фазовая функции в выражении (5) удовлетворяют пространственно-временным уравнениям переноса и эйконала.

Вычисление интеграла (5) методом стационарной фазы с учетом вкладов концевых точек интервала интегрирования приводит к формуле пространственно-временной «геометрической теории дифракции»

$$E_x(z, y, t) = \sum_{j=1}^m U_{\text{осн} j} e^{i\omega_0 \varphi_{\text{осн} j}} + \sum_{j=1}^2 U_{\text{кр} j} e^{i\omega_0 \varphi_{\text{кр} j}}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{осн} j} &= \exp \left[-i \frac{\pi}{4} \mp i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \varphi''_{\eta^2}(\eta_j) \right] \times \\ &\times \left[\frac{c(t - \eta_j)}{\dot{f}(\eta_j)(4 \cos^{3/2} \theta / \sigma c)[c(t - \eta_j) - z \cos \theta] + c(t - \eta_j) - 2z \cos \theta} \right]^{1/2}, \\ \varphi_{\text{осн} j} &= \varphi(\tau, z, \eta_j); \\ U_{\text{кр} j} &= \exp \left(-i \frac{\pi}{4} \mp i \frac{\pi}{4} \right) \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\omega_0^2}} \times \\ &\times \left. \frac{c(\tau - \eta)^{1/2} [c(\tau - \eta) - z \cos \theta]^{-1/4}}{\{2 \cos^{3/2} \theta \sqrt{c(\tau - \eta) - z \cos \theta} [1 + \dot{f}(\eta)] - (\alpha c / \omega_0)(\tau - \eta)\}} \right|_{\eta=0, T}, \quad (86) \\ \varphi_{\text{кр} j} &= \varphi(\tau, z, \eta) \Big|_{\eta=0, T}. \end{aligned}$$

Здесь η_j определяется из уравнения

$$z = \frac{c(\tau - \eta_j)}{\cos \theta} - \frac{\sigma^2 c^2 (\tau - \eta_j)^2}{4\omega_0^2 [1 + \dot{f}(\eta_j)]^2 \cos^4 \theta}, \quad (9)$$

$\dot{f}(\eta) = \frac{d}{d\eta} f(\eta)$, m — число корней η_j уравнения (9), которое описывает семейство основных пространственно-временных лучей $z = z(\tau, \eta)$ в линейном слое (1).

Первый член в лучевой формуле (8) определяет вклад основных пространственно-временных лучей, а второй — вклад краевых (дифракционных) пространственно-временных лучей [8]. Результирующее поле согласно (8) в общем случае определяется интерференцией m основных и двух краевых лучей, приходящих в точку наблюдения $\{z, y, t\}$.

Лучевая асимптотика (8) неприменима вблизи мировых линий, а также вблизи фронтов сигнала и вблизи пространственно-временной каустики — огибающей семейства лучей (9). Для расчета формы сигнала в этих областях следует использовать формулы работ [7–10], когда каустика имеет простой вид, или интегральное представление (5) в случае каустики произвольной формы. В частности, решение, справедливое вблизи фронтов сигнала и вблизи неособой каустики, следует из (5) с помощью обобщения метода стационарной фазы [10] и имеет вид

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(z, y, t) - E_x(z, y, t - T), \\ E_x(z, y, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp \left(i\omega_0 \theta - i \frac{\pi}{4} \right) \left[AI(\xi, \eta) + iB \frac{\partial I}{\partial \xi}(\xi, \eta) + iC \frac{\partial I}{\partial \eta} \right], \\ A &= (-\xi)^{1/4} (iU_{\text{осн} 1} + U_{\text{осн} 2}), \quad B = (-\xi)^{-1/4} (iU_{\text{осн} 1} - U_{\text{осн} 2}), \\ C &= \frac{1}{\eta^2 + \xi} (A - \eta B) - 2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} U_{\text{кр}}, \\ \xi &= - \left[\frac{3}{4} \omega_0 (\varphi_{\text{осн} 1} - \varphi_{\text{осн} 2}) \right]^{2/3}, \quad \theta = \frac{1}{2} (\varphi_{\text{осн} 1} + \varphi_{\text{осн} 2}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{1}{3} \eta^3 + \xi\eta = \omega_0 (\varphi_{kp1} - \theta).$$

Здесь $I(\xi, \eta)$ — неполная функция Эйри [10], а $E_x(z, y, t - T)$ определяется формулами (10), в которых φ_{kp1} , U_{kp1} следует заменить на φ_{kp2} , U_{kp2} .

При использовании лучевой формулы (8) и ее модификации (10) представляется важным знать форму и положение каустики, ибо она, с одной стороны, разграничивает различные области пространственно-временной интерференции (многолучевости), а с другой стороны, определяет положение зоны фокусировки поля радиосигнала.

2. ОСОБЕННОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ФОКУСИРОВКИ ЧМ СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

Исследуем особенности пространственно-временной фокусировки ЧМ сигналов в линейном слое (1)*. Пространственно-временная каустика основных лучей (9) образуется только внутри плазменного слоя (при $z \geq 0$) и определяется системой параметрических уравнений

$$\begin{aligned} z &= \frac{c}{2t_0 \cos \theta f} \left(1 \pm \sqrt{\frac{dt_b}{d\eta}} \right) \left[t_0(1 + \dot{f}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\ddot{f}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{dt_b}{d\eta}} \right) \right] \equiv z_k(\eta), \\ \tau &= \eta + \frac{1 + \dot{f}}{2\ddot{f}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{dt_b}{d\eta}} \right) \equiv t_k(\eta), \end{aligned} \quad (11)$$

где $t_0 = \frac{4\omega_0^2}{\sigma^2} \cos^3 \theta$, $\dot{f} = \frac{d^2}{d\eta^2} f(\eta)$, а $t_b(\eta)$ — функция, определяющая временные координаты точек выхода лучей (9) из слоя плазмы:

$$t_b(\eta) = \eta + t_0(1 + \dot{f})^2. \quad (12)$$

Как известно [2, 10], при $f \equiv 0$, когда частотная модуляция отсутствует, каустика (11) имеет вид отрезка прямой $z_k = \frac{\omega_0^2}{\sigma^2} \cos^2 \theta$, совпадающего с геометрическим местом точек поворота основных лучей (рис. 1 б, 2 б).

Из (10) видно, что каустика (11) образуется только при условии $\frac{dt_b}{d\eta} \geq 0$. При этом, аналогично [12], условие $\frac{dt_b}{d\eta} = 0$ определяет лучевые координаты η точек пересечения каустики (11) с границей плазмы $z = 0$, а условие $\frac{dt_k}{d\eta} = 0$ — лучевые координаты η возврата точек возврата (заострения) каустики (11).

Рассмотрим подробнее случай линейной частотной модуляции (ЛЧМ) падающего радиосигнала, когда

$$\omega(0, \tau) = \omega_0(1 + 2\beta\tau), \quad f(\eta) = \beta\eta^2, \quad (13)$$

где $\omega(0, \tau)$ — мгновенная частота радиосигнала при $z = 0$, β — величина, определяющая девиацию частоты $\Delta = 2\beta T$. В этом случае из

* Ряд интересных результатов ранее был получен в работе [2].

(11) — (13) и условий $\frac{dt_b}{d\eta} = 0$, $\frac{dt_k}{d\eta} = 0$ находим

$$\eta_{\text{вых}} = -\frac{1 + 4\beta t_0}{8\beta^2 t_0}, \quad \eta_{\text{возвр}} = -\frac{2 + 9\beta t_0}{18\beta^2 t_0}; \quad (14)$$

при этом всюду ниже предполагается, что $0 \leq \eta_{\text{вых}}, \eta_{\text{возвр}} \leq T$.

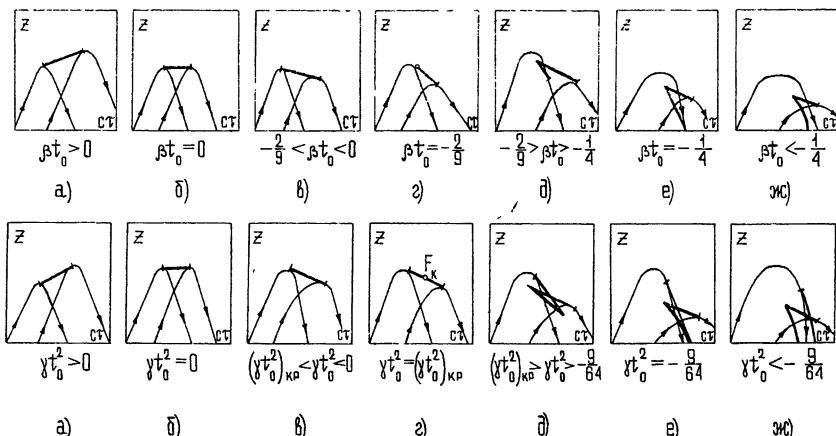


Рис. 1. Пространственно-временные каустики радиосигналов с линейной частотной модуляцией.

Рис. 2. Пространственно-временные каустики радиосигналов с квадратичной частотной модуляцией.

Согласно (14) вид каустики (11) существенно зависит от величины параметра βt_0 (рис. 1). При $\beta t_0 > 0$ каустика (11) представляет собой монотонно возрастающий отрезок кривой (рис. 1 а). Ее точка возникновения и прекращения связаны с предельными основными лучами, выходящими из «краевых» точек $\eta = 0$, $\eta = T$.

В случае $\beta t_0 < 0$ вид каустики зависит от величины βt_0 и может иметь вид немонотонной кривой с одной точкой возврата. При $\beta t_0 > -\frac{2}{9}$ каустика представляет собой отрезок монотонно убывающей

кривой $z = z_k(\tau)$ (рис. 1 в) без точек возврата. При $-\frac{1}{4} < \beta t_0 < -\frac{2}{9}$ образуется особая каустика с одной точкой возврата, целиком расположенная внутри неоднородной плазмы ($z > 0$) (рис. 1 д). Причем в случае $\beta t_0 = -\frac{2}{9}$ точка возврата каустики (11) совпадает с начальной точкой каустики: $\eta_{\text{возвр}} = 0$ (рис. 1 г). При $\beta t_0 \leq -\frac{1}{4}$ также обра-

зуется особая каустика с одной точкой возврата (рис. 1 ж), которая пересекает границу неоднородной плазмы $z = 0$. Отметим, что в случае $\beta t_0 = -\frac{1}{4}$ начальная точка каустики (11) располагается на границе плазмы $z = 0$ (рис. 1 е) при $\tau = t_0$, а в случае $\beta t_0 < -\frac{1}{4}$ оказывается уже несвязанной с первым предельным основным лучом, который выходит из точки $\eta = 0$ (рис. 1 ж).

Аналогично (13) может быть рассмотрен случай квадратичной частотной модуляции падающего радиосигнала (2), когда

$$\omega(0, \tau) = \omega_0(1 + 3\gamma\tau^2), \quad f(\eta) = \gamma\eta^3. \quad (15)$$

Проведенный анализ показал, что при условии (15) форма пространственно-временной каустики (11) внутри слоя ($z > 0$) аналогична пространственной каустике монохроматической волны в линейном слое [12]. Характерные «каустические картины» изображены на рис. 2 и позволяют проследить за эволюцией каустики и лучевой картины при изменении параметра γt_0^2 .

Полученные результаты (рис. 1, 2) показывают, что наличие частотной модуляции радиосигнала может приводить к образованию сложных областей пространственно-временной интерференции и фокусировки поля радиосигнала. В результате этого огибающая радиосигнала может иметь сложный осциллирующий характер.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ОГИБАЮЩИХ РАДИОСИГНАЛОВ

В данном разделе приводятся результаты численных расчетов огибающих радиосигналов в линейном слое плазмы, полученные на основе точного и асимптотического решений (3), (5), (8).

Следует отметить, что использование обычных методов численного интегрирования точного решения (3) в случае произвольной амплитудной и частотной модуляции радиосигнала (2) вызывает вычислительные трудности, связанные с необходимостью двукратного интегрирования сложных осциллирующих функций. Поэтому при численных расчетах точного решения (3) использовался метод быстрого преобразования Фурье [6], позволяющий существенно сократить время расчетов. При расчетах интегрального представления (5) использовалась стандартная программа численного интегрирования по методу Симпсона.

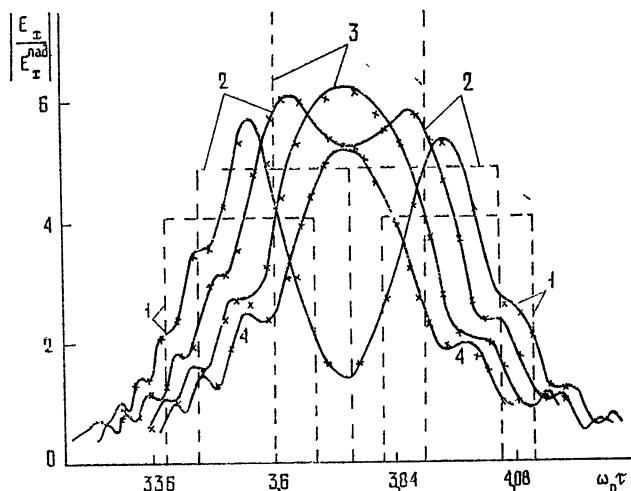


Рис. 3. Искажения огибающей прямоугольного радионимпульса вдоль распространения;
значения параметров: $\omega_0 T = 3 \cdot 10^3$, $z_k/cT = 6$, 1 — $z/z_k = 0,9968$, 2 — $z/z_k = 0,9982$, 3 — $z/z_k = 1$, 4 — $z/z_k = 1,001$; сплошная линия — точное решение (3), крестики — асимптотическое решение (5), пунктир — лучевое приближение (8a).

На рис. 3 изображены огибающие прямоугольного радиоимпульса с гармоническим заполнением внутри плазмы в зависимости от расстояния z до границы $z = 0$ слоя (1). При этом наиболее подробно рассматривалась окрестность пространственно-временной каустики $z = z_k$ (рис. 1 б). Из рисунка видно, что при приближении к каустике «падающий» и «отраженный» импульсы приближаются друг к другу, причем их амплитуды возрастают. Огибающие радиосигнала носят несимметричный и осциллирующий характер. Это обусловлено интерференцией соответствующих лучей, поля которых различны на различных участках огибающих.

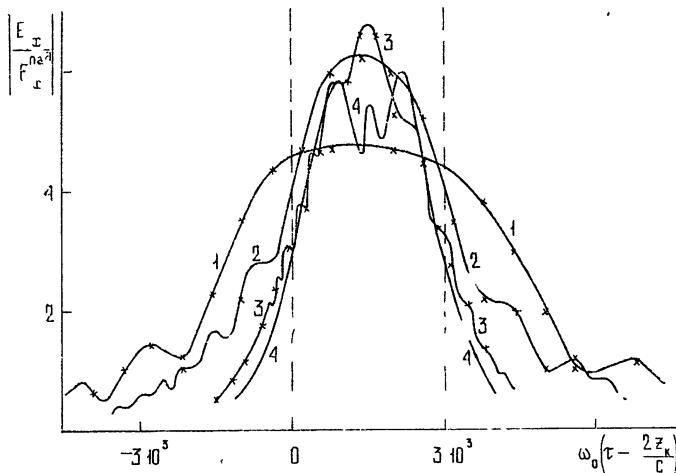


Рис. 4. Искажения огибающей прямоугольного радиоимпульса на каустике; $\omega_0 T = 3 \cdot 10^3$,

$1 - z_k/cT = 10,66, 2 - z_k/cT = 6, 3 - z_k/cT = 2,66, 4 - z_k/cT = 1,5$, сплошная линия—точное решение (3), крестики—асимптотическое решение (5), пунктир—лучевое приближение (8а).

На рис. 4 представлены результаты расчетов, характеризующие искажения сфокусированного на каустике $z = z_k = \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} \cos^2 \theta$ прямоугольного радиоимпульса с гармоническим заполнением в зависимости от величины градиента плазменной частоты α . При этом для удобства сравнения на рис. 4 используется обобщенное время, отсчитываемое от момента прихода фронта сигнала $t = 2z_k/c$. Из рисунка следует, что при заданной длительности сигнала $T = \text{const}$ с увеличением α (с уменьшением z_k/cT) происходит изменение характера искажений огибающей: осцилляции с фронтами сигнала перемещаются на его вершину. В результате при достаточно больших значениях α фронты сигнала становятся монотонными, а на вершине сигнала появляются осцилляции. Такая тенденция обусловлена тем, что сначала (при меньших α) наблюдается интенсивная интерференция краевых лучей на фронтах сигнала, а затем (при больших α) фронты определяются вкладом только одного краевого луча, интерференция которого с основным лучом и объясняет осцилляции на вершине сигнала.

Результаты расчета искажений прямоугольного радиосигнала с линейной частотной модуляцией (13) представлены на рис. 5 и 6. Эти рисунки соответствуют значениям девиации частоты $\Delta = 2\beta T$, при которых $\beta t_0 > -\frac{2}{9}$ и образуется простая каустика (рис. 1 а, б, в). При увеличении параметра β передний край каустики (11) удаляется от

точки пересечения каустики и сечения наблюдения z . Рис. 5 соответствует меньшим значениям параметра α — градиента плазменной частоты, чем в случае рис. 6. Как видно из рис. 5, увеличение девиации частоты Δ приводит сначала к некоторому расширению сигнала, связанному с влиянием наклона пространственно-временной каустики и близостью ее края. При дальнейшем увеличении Δ формируется резкий максимум огибающей, обусловленный ярко выраженной пространственно-временной фокусировкой сигнала на каустике. С ростом девиации частоты выброс сужается и смещается в сторону меньших значений времени.

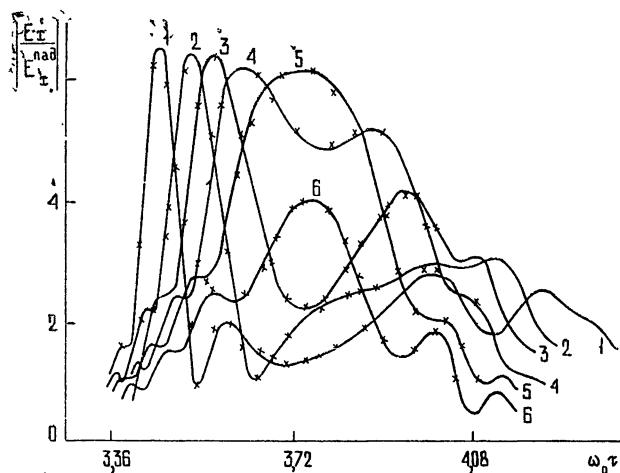


Рис. 5. Огибающие ЛЧМ радиоимпульса (случай $\beta t_0 > -2/9$); $\omega_0 T = 3 \cdot 10^3$, $z/cT = 6$;

1 — $\Delta = 2\beta T = 0,83 \cdot 10^{-2}$, 2 — $\Delta = 0,66 \cdot 10^{-2}$, 3 — $\Delta = 0,5 \cdot 10^{-2}$,
4 — $\Delta = 0,33 \cdot 10^{-2}$, 5 — $\Delta = 0$, 6 — $\Delta = -0,33 \cdot 10^{-2}$; сплошная линия — точное решение (3), крестики — асимптотическое решение (5), пунктир — лучевое приближение (8а).

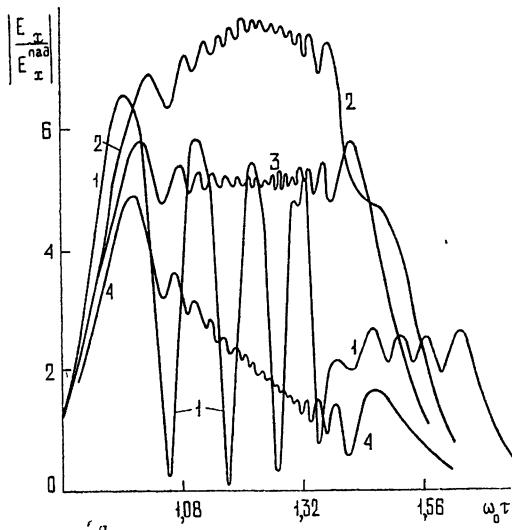


Рис. 6. Огибающие ЛЧМ радиоимпульса (случай $\beta t_0 > -2/9$); $\omega_0 T = 6 \cdot 10^3$, $z/cT = 0,75$;

1 — $\Delta = 2\beta T = 1,66 \cdot 10^{-2}$, 2 — $\Delta = 0,33 \cdot 10^{-2}$, 3 — $\Delta = 0$, 4 — $\Delta = -0,33 \cdot 10^{-2}$; сплошная линия — точное решение (3).

Как следует из рис. 6 и рис. 5, при больших значениях градиента плазменной частоты α характер искажений огибающей радиосигнала

может существенно изменяться, особенно при увеличении девиации частоты Δ (кривая 1 на рис. 6). В этом случае (кривая 1 на рис. 6) наблюдаются сильно развитые осцилляции огибающей сигнала, обусловленные интенсивной интерференцией двух основных пространственно-временных лучей в окрестности каустики. При этом на кривой 1 рис. 6 видно также образование отраженного радиосигнала с существенно меньшей амплитудой и менее выраженным интерференционным осцилляциями огибающей радиосигнала на его вершине. Отметим также значительное увеличение амплитуды радиосигнала по сравнению с падающим в окрестности каустики (кривая 2, рис. 6). Как и выше, осцилляции на вершине огибающей радиосигнала обусловлены интерференцией основных и краевых лучей.

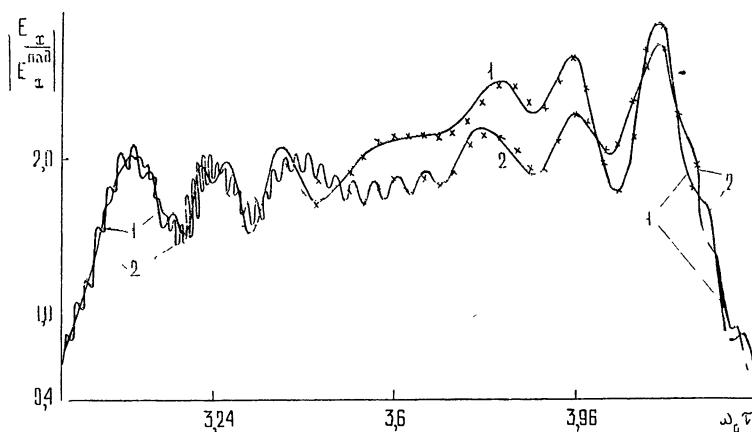


Рис. 7. Пример огибающих ЛЧМ радионпульсов в случае $\beta t_0 = -1/4$, $z/c T_1 = 2,9$;

1 — $\omega_0 T_1 = 3 \cdot 10^3$, 2 — $\omega_0 T_2 = 6 \cdot 10^3$; сплошная линия — точное решение (3), крестики — асимптотическое решение (5).

На рис. 7 представлены результаты расчетов для ЛЧМ радиосигнала различной длительности в случае $\beta t_0 = -1/4$, когда сечение наблюдения z пересекает две ветви особой каустики с одной точкой заострения (рис. 1 е). Как видно из рис. 7, эффективная длительность радиосигнала и общий характер фокусировки в точке наблюдения практически не зависят от длительности T падающего импульса и полностью определяются расстоянием между двумя точками пересечения каустики с сечением наблюдения $z = \text{const}$ (рис. 1 е).

Проведенный анализ показывает, что осциллирующий характер изменения огибающей на всех рис. 3—7 в области фронтов радиосигнала определяется интерференцией полей краевых лучей (8 б), а в пределах основного тела — интерференцией основных (8 а) и краевых лучей (8 б). В случае многолучевости (рис. 1 д, 2 д) характер осцилляций более сложный и наблюдается несколько периодов колебаний осцилляций огибающей. Резкое увеличение амплитуды радиосигнала связано с пространственно-временной фокусировкой.

Важно подчеркнуть, что, как следует из рис. 3—5, 7, результаты расчетов асимптотического интегрального представления (5) хорошо совпадают с результатами строгого решения (8). Это позволяет использовать асимптотическое интегральное представление для эффективных расчетов искажений ЧМ сигналов в неоднородной плазме.

Полученные результаты позволяют оценить пределы применимости асимптотических методов и с их помощью дать наглядную физическую и правильную количественную интерпретацию искажений радиосигналов при их распространении в неоднородной плазме.

В заключение авторы выражают глубокую признательность М. А. Миллеру, обратившему внимание одного из авторов на аналогию явлений пространственной фокусировки сферической волны в неоднородной среде [12] и пространственно-временной фокусировки ЧМ радиосигналов в неоднородной плазме.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
- 2 Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 9, 1335 (1969); Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн (Иркутск, 1972), секция 1, изд. Наука, М., 1972, стр. 334.
- 3 L. B. Felsen, IEEE Trans. on Anten. and Propag., AP-17, № 2, 191 (1969).
- 4 K. F. Casey, C. T. Case, IEEE Trans. on Anten. and Propag., AP-17, № 1, 86 (1969).
- 5 Л. А. Вайнштейн, Лекции по электронике СВЧ, книга V, изд. Сарат. ун-та, 1974, стр. 3.
- 6 J. W. Cooley, J. W. Tukey, Math. of Comput., 19, 297 (1965).
- 7 Ю. А. Кравцов, Метод геометрической оптики и его обобщения, Диссертация ГГУ, Горький, 1968
- 8 R. M. Lewis, Electromagnetic Wave Theory (Proceedings of a Symposium held at Delft, The Netherlands, Sept., 1965), part II, Pergamon Press, 1967, p. 845.
- 9 Ю. И. Орлов, А. П. Анютин, в сб. Теория дифракции и распространения волн, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, изд. АН СССР, 1973, т. 1, стр. 384
- 10 Ю. И. Орлов, А. П. Анютин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1369 (1974)
- 11 В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970.
- 12 Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 497 (1966).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
18 апреля 1975 г.

PECULIARITIES OF DISTORTIONS OF RADIO SIGNALS IN AN INHOMOGENEOUS LINEAR PLASMA LAYER

A. P. Anyutin, Yu. I. Orlov

Dispersion distortions of AM and FM radio pulses in an inhomogeneous linear plasma layer are analysed. A strict solution of the problem are used for asymptotic and numerical investigation. The peculiarities of space-time FM radio pulse field focusing connected with formation of specific space-time caustics. Numerical calculations of a strict solution are made on the basis of a fast Fourier transformation. Their results are compared with numerical ones obtained by asymptotic methods: space-time geometrical optics method and "time" integral representation. A good agreement of numerical results of strict and asymptotic theories is shown. Based on the results obtained, a visual physical interpretation of radio pulses distortions in the inhomogeneous plasma is given.

УДК 551.510.535

**НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ИНДУЦИРОВАННЫХ МОЩНЫМ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕМ
ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ
НАЗЕМНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ ИСЗ**

*Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков,
Н. М. Прятков, В. О. Рапопорт, В. А. Череповицкий*

Приведены предварительные результаты измерений спектра флюктуаций концентрации электронов в возмущенной области с помощью наземного приема сигналов ИСЗ.

Как известно, при воздействии на F -слой ионосферы мощным КВ радиоизлучением в области, ограниченной (на высоте F -слоя) размерами диаграммы направленности мощного радиопередатчика, возникают неоднородности электронной концентрации [1–4]. В настоящей работе приведены предварительные результаты измерений спектра флюктуаций концентрации электронов в возмущенной области с помощью наземного приема сигналов искусственных спутников Земли. Эксперимент проводился в декабре 1974—январе 1975 г. на полигоне НИРФИ Зименки. Облучение ионосферы проводилось на частоте 5,75 МГц с помощью радиопередатчика мощностью $P = 130$ кВт, имеющего антенну с коэффициентом усиления $G \approx 150$. Регистрировалась амплитуда сигналов нескольких американских ИСЗ (Нимбус-5, NOAA-2) на частотах 136—137 МГц. Мощный радиопередатчик включался за 15—150 минут до просвечивания излучением ИСЗ центра возмущаемой области; в некоторых случаях с целью изучения процессов релаксации проводилось выключение КВ радиопередатчика за 10—30 секунд до указанного момента. Изучались величина и спектр флюктуаций амплитуды сигналов, прошедших через возмущающую область.

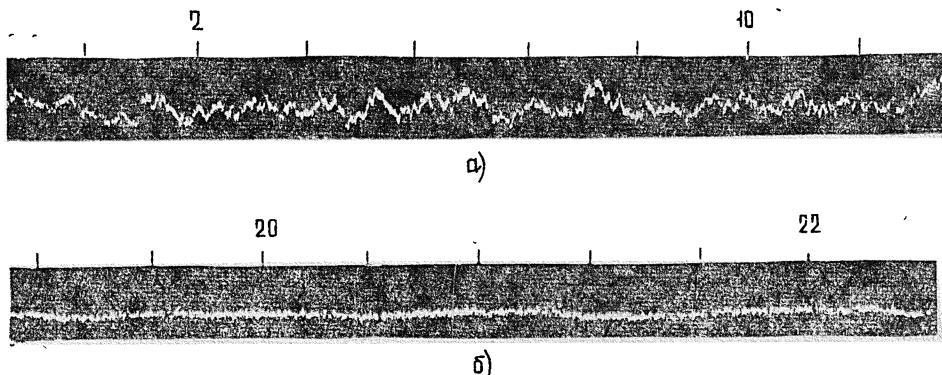


Рис. 1.

На рис. 1 показаны примеры записи сигналов ИСЗ, прошедших через возмущенную область (рис. 1а) и вне этой области, или в слу-

чае, когда эффекты нагрева отсутствовали (рис. 1 б). Всего в период эксперимента было получено 29 записей сигналов спутников. Измерения показали, что флуктуации сигналов типа показанных на рис. 1 а наблюдались только в случае, когда зенитный угол ИСЗ на параметре не превышал $12 - 14^\circ$, а критические частоты слоя F_2 были больше частоты возмущающего радиопередатчика.

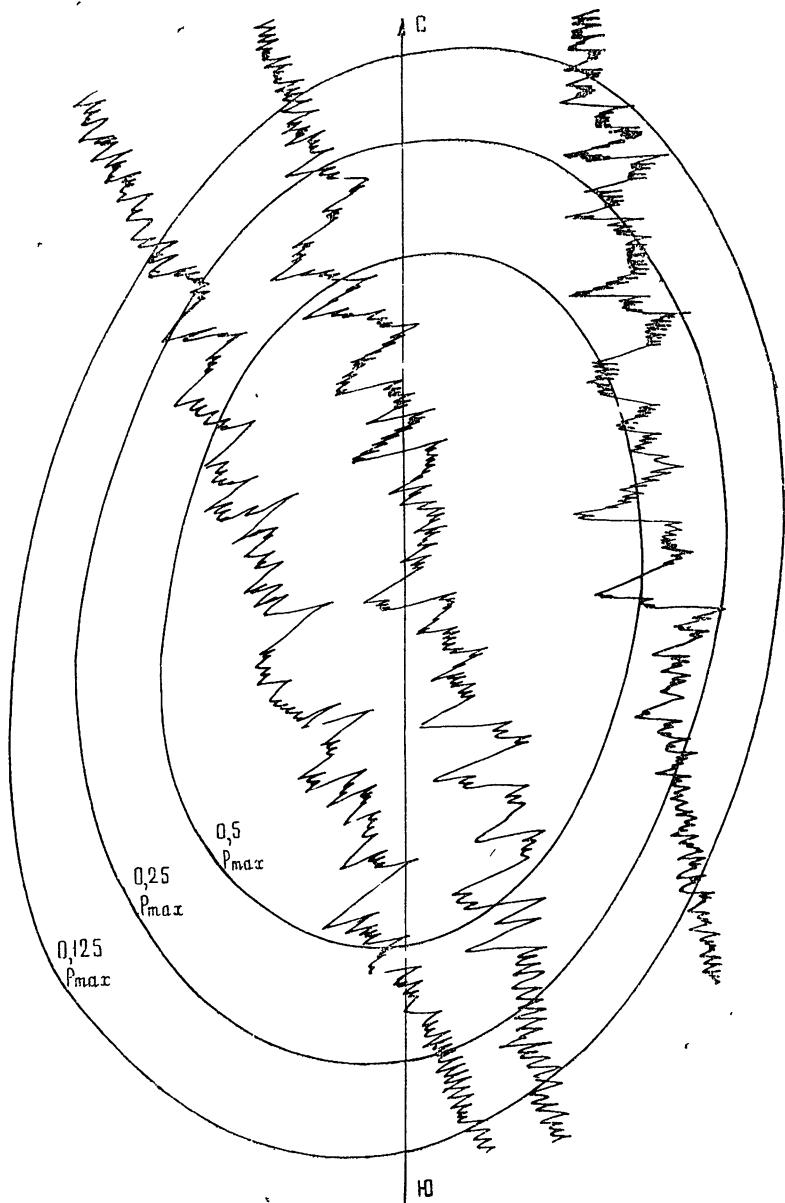


Рис. 2.

Эти данные хорошо согласуются с результатами радиоастрономических наблюдений [2], согласно которым искусственная турбулентность возникает только в областях ионосферы, освещенных мощным

излучением (в нашем случае угловые размеры этой области примерно составляют $12 - 15^\circ$), и лишь в случае, когда происходит отражение радиоволн мощного радиопередатчика от ионосферного F_2 -слоя.

Пространственные характеристики напретой области можно видеть из рис. 2, на котором иллюстрируются изменения флюктуаций сигнала в течение пролета ИСЗ для трех сеансов наблюдений за спутниками; овал изображает расчетную область нагрева на высоте 300 км.

На рис. 3 а, б, в приведены данные о спектре флюктуаций амплитуды принимаемого сигнала* для трех участков записи одного из пролетов (13 декабря 1974) ИСЗ через возмущенную область. Обращают на себя внимание два основных факта: 1) существенное отличие спектров при прохождении через различные участки возмущенной области и 2) степенной в среднем характер убывания спектральной плотности с ростом частоты ν . Особенно четко степенной характер спектра виден на рис. 3 а. Колебания спектра на рис. 3 а вряд ли являются френелевскими, поскольку, как легко убедиться, их период в среднем почти не изменяется (в нелинейном масштабе) с частотой, в то время как период френелевских осцилляций должен быть пропорционален ν . Возможно, что такие колебания говорят о наличии в возмущенной области в ограниченном интервале волновых чисел неоднородностей квазипериодических флюктуаций концентрации. Частично, конечно, такие колебания (рис. 3 б, в) могут носить френелевский характер [5].

Можно показать, что при $z = \frac{2\pi\nu}{v_x} > \sqrt{\frac{k_0}{z}}$ ** и в случае слабых флюктуаций амплитуды $\left(\frac{\langle (\Delta A)^2 \rangle}{\langle A^2 \rangle} \ll 1 \right)$ их спектр

$$F_A(\nu) \sim \nu^{-p+1},$$

если трехмерный спектр флюктуаций электронной концентрации в тонком рассеивающем слое

$$\Phi_N(x_x, x_y, x_z = 0) \sim (x_x^2 + x_y^2)^{-p/2} \exp\left(-\frac{x_x^2 + x_y^2}{x_m^2}\right)$$

$$(x^2 \ll x_m^2).$$

Используя данные рис. 3 а, б, можно получить, что p изменяется в пределах от 2,2 до 3,8. Конечно, переход от спектра флюктуаций амплитуды к спектру неоднородностей должен проводиться более тщательно, чем это делалось, и такой анализ будет проведен в дальнейшем***. Тем не менее, полученные данные в области $x \gg \sqrt{k_0/z}$ вряд ли существенно могут измениться.

Если предположить, что неоднородности возмущенной области

* Вычисления спектров проведены на ЭВМ В. Пахомовым, являющимся автором программы вычисления спектров

** Здесь $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ — длина радиоволны, $z = \frac{z_H(z_c - z_H)}{z_c} \approx z_H$, z_c — высота спутника, z_H — высота рассеивающего слоя, v_x — горизонтальная скорость перемещения луча зрения на спутник на высоте $z_H \approx 300$ км, равная в нашем случае 1,85 км/с.

*** $F_A(z_1) \sim \text{Re} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} dz \int d x_y \Phi_N(x_x, x_y) \left[1 - \exp \left(-i \frac{(x_x^2 + x_y^2) z}{k} \right) \right] \right\},$

где z_1 и z_2 — соответственно высота верхней и нижней границ возмущенной области ($z_2 - z_1 < 50 \div 100$ км).

сильно вытянуты вдоль направления магнитного поля (примерно совпадающего с вертикальной осью z) и описываются спектральной плотностью следующего вида:

$$\Phi_N(x_x, x_y, x_z) = (x_x^2 + x_y^2)^{-p/2} \exp\left(-\frac{x_z^2 l_n^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{(x_x^2 + x_y^2)^2}{x_m^2}\right)$$

(l_n — характерный масштаб неоднородности вдоль H), то относительные флюктуации электронной концентрации в области масштабов l_{\perp}

$$\delta N^2(l_{\perp}) \approx \int_{l/l}^{\infty} \Phi_N(x_{\perp}, x_z) x_{\perp} d x_{\perp} d x_z \sim l_{\perp}^{p-2}.$$

Отсюда следует, что $\delta N(l_{\perp}) \sim l_{\perp}^{p'/2}$ ($0.2 \leq p' \leq 1$), т. е. величина δN может сравнительно слабо убывать с уменьшением масштаба неоднородностей. Заметим, что для изотропных неоднородностей подобная интерпретация полученных спектров приводила бы к зависимости $\delta N(l) \sim l^{(p-3)/2}$, т. е. к уменьшению δN с ростом масштаба, что, вообще говоря, находится в противоречии с данными радиоастрономических измерений. Степенной характер спектра флюктуаций N следует из того факта, что характерный излом спектра на примерах рис. 3 происходит вблизи масштаба, примерно равного размеру зоны Френеля $\sqrt{z \lambda} \sim 0.8 \text{ км}$.

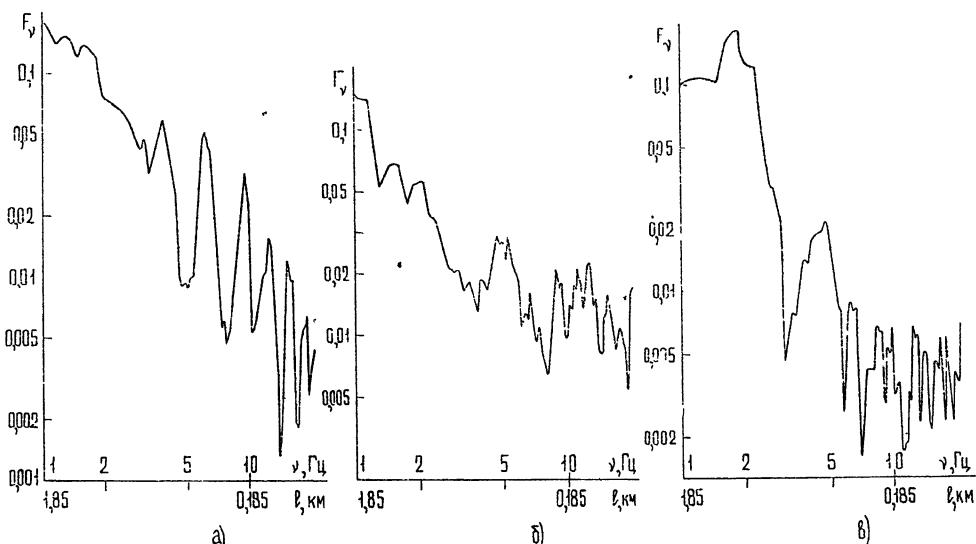


Рис. 3.

Полученные данные о величине флюктуаций амплитуды сигнала позволяют оценить значения δN в области масштабов $l_{\perp} \sim \sqrt{z \lambda} \sim 1 \text{ км}$. Можно показать, что для использованного вида степенного спектра с $p > 2$ средний квадрат флюктуаций амплитуды

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 \right\rangle &\approx \frac{\pi^{5/2}}{2} \Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right) \sin \frac{p \pi}{4} \frac{f_p^4}{f^2 c^2} (\delta N)^2 l_z \Delta z \approx \\ &\approx 0.97 \cdot 10^2 \Gamma\left(\frac{4-p}{2}\right) \sin \frac{p \pi}{4} \frac{f_p^4 (M \Gamma u)}{f^2 (M \Gamma u)} (\delta N)^2 l_z (\text{км}) \Delta z (\text{км}). \end{aligned}$$

Приимая для определенности $p = 3$, $f_p = 6 \text{ МГц}$, $f = 1,36 \cdot 10^2 \text{ МГц}$, $l_z = 1 \div 3 \text{ км}$, $\Delta z \sim 50 \text{ км}$ и используя полученные в эксперименте значения $\left[\left\langle \left(\frac{\Delta A}{A} \right)^2 \right\rangle \right]^{1/2} \sim 9 \cdot 10^{-2}$, получаем

$$\delta N = \left[\frac{\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle}{N^2} \right]^{1/2} \sim (2,5 \div 5) \cdot 10^{-3}.$$

Приведенные значения δN примерно соответствуют значениям δN , полученным (радиоастрономическим методом диагностики возмущенной области) во время весеннего эксперимента 1974 г. (см. [2]).

Учитывая полученную выше зависимость $\Delta N(l_{\perp}) \propto l_{\perp}^{(p-2)/2}$, не-трудно показать, что при $p = 3,5$ в области масштабов $l_{\perp} \sim 30 \text{ м}$, величина относительных флуктуаций концентрации $\delta N(30 \text{ м})$ примерно составляет $(2 \div 5) \cdot 10^{-4}$, а при $p = 2,5$ $\delta N(30 \text{ м}) \approx (1 \div 2) \cdot 10^{-3}$. Последняя цифра хорошо согласуется с данными о $\delta N(l_{\perp} = 30 \text{ м})$, полученными радиоастрономическим методом [2]. Следует заметить, однако, что в области $l_{\perp} \sim 30 \text{ м}$ спектр флуктуаций концентрации может иметь другой наклон, поэтому приведенные здесь оценки $\delta N(l_{\perp} = 30 \text{ м})$ носят ориентировочный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Ютло, Р. Коэн, УФН, 109, 371 (1973).
2. В. В. Беликович, Е А Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, Н. А. Зуйков, Г. П. Комраков, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, В. Л. Фролов, УФН, 113, 732 (1974), Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 4, 516 (1975).
3. C. L. Rufenach, J. Geophys. Res., 78, 5611 (1973).
4. J. H. Pope, R. B. Fritz, J. Geophys. Res., 79, 1065 (1974).
5. В. И. Татарский, Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 февраля 1975 г.

SOME RESULTS OF INVESTIGATION OF IONOSPHERIC IRREGULARITIES INDUCED BY POWERFUL RADIO EMISSION USING BASEGROUND SATELLITE SIGNAL RECEPTION

G. G. Gelmantsev, L. M. Erakhimov, E. E. Mityakova, N. A. Mityakov,
N. M. Prytkov, V. O. Rapoport, V. A. Cherepovitskii

Preliminary results of measurements of the electron density fluctuation spectrum in a perturbed region using baseground satellite signal reception are given.

УДК 551.510.535

ВЛИЯНИЕ ВОЛНОВЫХ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СИГНАЛЫ ОТ ИСЗ

Б. И. Нургожин, Ю. К. Постоев, Б. В. Троицкий

С помощью траекторных расчетов исследованы условия, при которых крупномасштабные волновые перемещающиеся возмущения (ПВ) электронной концентрации в ионосфере могут вызывать мерцания сигналов от ИСЗ. Показано, что область ионосферы, вызывающая мерцания, имеет резкие границы, а ее положение и размеры зависят от параметров ПВ, орбиты ИСЗ и рабочей частоты передатчика.

При распространении радиоволн от ИСЗ через ионосферу влияние крупномасштабных неоднородностей проявляется через явление фокусировки, отмечается при измерениях полного электронного содержания с помощью эффектов Фарадея и Допплера [1-3]. Однако быстрые ($f \sim 10 \div 100 \text{ Гц}$) изменения амплитуды сигнала или мерцания всегда ассоциировались с наличием в ионосфере мелкомасштабных ($l \sim 0,5 \div 5 \text{ км}$) неоднородностей электронной плотности [4, 5]. Ниже будет показано, при каких условиях мерцания сигналов от ИСЗ могут быть обусловлены крупномасштабным (десятки и сотни километров) волновым возмущением в ионосфере.

Пусть электронная концентрация в ионосфере имеет следующую зависимость от координат:

$$N(x, z) = N_0 \exp \left[-\left(\frac{z_0 - z}{z_m} \right)^2 \right] \left\{ 1 + \delta \cos \left[\frac{2\pi}{\Lambda_x} x + \frac{2\pi}{\Lambda_z} (z_0 - z) - \Psi \right] \right\},$$

где N_0 — концентрация в максимуме слоя, z_0 и z_m — соответственно высота максимума и полутолщина слоя, Λ_x и Λ_z — горизонтальная и вертикальная длины волн возмущения, Ψ — фаза, δ — амплитуда возмущения. Численные значения приняты следующие: $z_0 = 300 \text{ км}$, $z_m = 100 \text{ км}$ при $z < z_0$ и $z_m = 200 \text{ км}$ при $z > z_0$, критическая частота обыкновенной компоненты электромагнитной волны $f_0 = 10 \text{ МГц}$, $\delta = 5\%$, $\Psi = \pi$. Выбором величин Λ_x и Λ_z определяется направление перемещающихся возмущений (ПВ) в пространстве, и они будут указываться в тексте по мере надобности. Расчеты проводились для двух значений рабочей частоты: 40 и 20 МГц.

Отказ от зависимости N от времени означает, что ИСЗ движется на орбите с $z \leq 1000 \text{ км}$. Кроме того, использование плоской геометрии с прямоугольной системой координат ограничивает в выборе возможных зенитных углов ИСЗ ($\phi < 70^\circ$), чтобы заметно не оказывались кривизна орбиты и атмосферы. Рабочие частоты, используемые при исследованиях с таких спутников, обычно составляют указанные выше значения, что позволяет в нашем случае пренебречь анизотропными свойствами среды.

Рассчитывались траектории лучей, выходящих из точки $x = z = 0$ под разными углами падения, и определялись координаты пересечения

их с орбитой ИСЗ (принято, что орбита лежит в плоскости падения). Рис. 1 демонстрирует зависимость координаты x прихода луча на высоту $z = 1000 \text{ км}$ от угла падения φ для различных параметров возмущения δ , Λ_x , Λ_z и рабочих частот. Кривые 1, 2, 3 получены соответственно для значений:

$$\Lambda_x = \Lambda_z = 50 \text{ км}, \quad f = 40 \text{ МГц}, \quad \delta = 5\%,$$

$$\Lambda_x = \Lambda_z = 70 \text{ км}, \quad f = 40 \text{ МГц}, \quad \delta = 5\%,$$

$$\Lambda_x = \Lambda_z = 50 \text{ км}, \quad f = 20 \text{ МГц}, \quad \delta = 5\%,$$

а кривые 4, 5 получены для значений $f = 40 \text{ МГц}$, $\Lambda_x = 100 \text{ км}$, $\Lambda_z = 60 \text{ км}$, но $\delta = 5\%$ (кривая 4) и $\delta = 10\%$ (кривая 5).

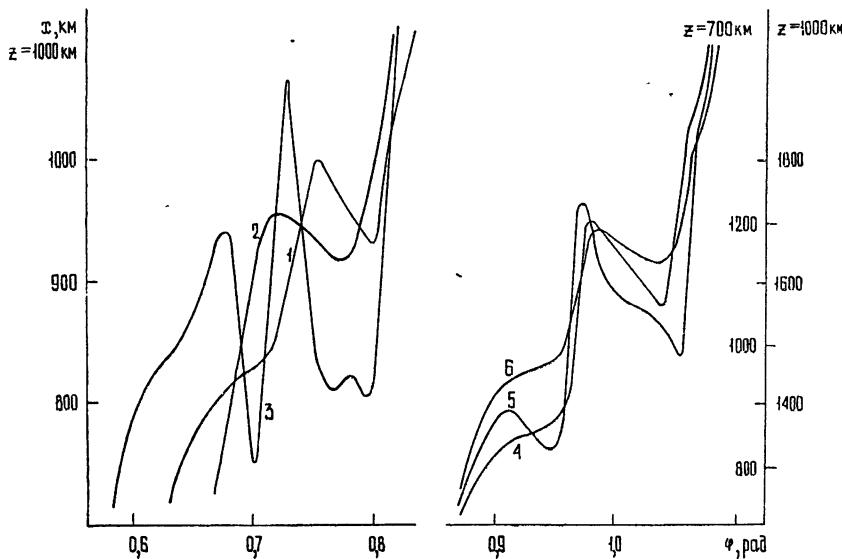


Рис. 1.

Из расчетов следуют выводы:

1) наличие в ионосфере ПВ вызывает характерные перепибы кривых $x(\varphi)$, свидетельствующие о перераспределении лучей в пространстве, причем могут существовать области углов $\Delta\varphi$, которым соответствуют малые отрезки Δx , что означает фокусировку, а также область $\Delta\varphi$, в которой возможна многолучевость (на определенные участки Δx приходят дискретные пучки лучей);

2) область многолучевости существует при заданном виде возмущения только тогда, когда радиоволны распространяются в конусе, ось которого перпендикулярна волновому вектору возмущения k (при других углах кривые $x(\varphi)$ ведут себя монотонно);

3) размер области многолучевости увеличивается с уменьшением рабочей частоты и длины волны возмущения, а также с ростом зенитного угла и амплитуды возмущения;

4) в зависимости от величины параметров задачи область многолучевости не только изменяется по величине, но и может расщепляться (кривая 5);

5) с ростом высоты ИСЗ растет область многолучевости, что видно из сравнения кривых 4 ($z = 1000 \text{ км}$) и 6 ($z = 700 \text{ км}$);

6) число лучей, приходящих в одну точку, также зависит от пара-

метров возмущения и рабочей частоты (при одинаковых Λ_x , Λ_z и δ кривые 1, 3 существенно отличаются друг от друга).

Физически полученные результаты объясняются тем, что для типичных рабочих частот 20—40 МГц отклоняющие свойства крупномасштабных неоднородностей слабы. К тому же, попадая на разных высотах на различные фазы возмущения, отклонения могут компенсироваться. И лишь когда сигнал распространяется вблизи направления перпендикулярного волновому вектору возмущения, отклонения накапливаются за время распространения, приобретая заметную величину на высоте орбиты ИСЗ.

Если передатчик расположен на спутнике, а приемник на Земле, то при движении ИСЗ или возмущения через область многолучевости будем иметь интерференцию волн или мерцаний. Нетрудно перефразировать выводы расчетов применительно к мерцаниям, которые должны быть более хаотичными на меньшей частоте, иметь резкие границы так называемых «patches» и т. п.

Расчеты амплитуды поля в точке приема не входили в нашу задачу. Однако характер изменения амплитуды огибающей можно проследить из анализа кривых рис. 1 и определения допплеровских сдвигов частот интерферирующих лучей. Из выше сказанного ясно, что вид кривых $\varphi(x)$ зависит от многих параметров, характеризующих и возмущение, и технические средства связи, и геометрию распространения. Одному и тому же ПВ могут соответствовать случаи отсутствия изменений сигнала, явления фокусировки с периодом, зависящим от пространственных масштабов ПВ и наличия быстрых флуктуаций сигнала. Частоту мерцаний можно оценить, вычислив разности допплеровских частот (δf) интерферирующих лучей. На рис. 2 показана зависимость δf от x для случая, описанного кривой 4 (рис. 1), в предположении, что скорость ИСЗ $v = 7 \text{ км/с}$. Видно, что частоты компонент, в сумме определяющих амплитуду огибающей, будут изменяться во времени вследствие движения ИСЗ.

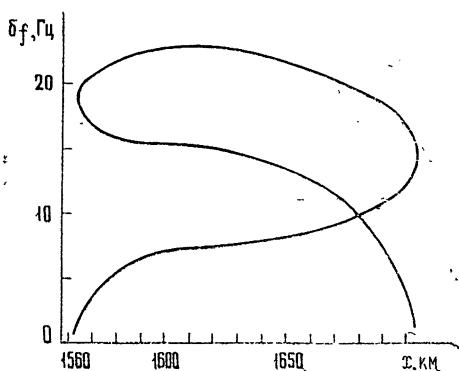


Рис. 2.

Ясно, что представленные результаты вычислений дают лишь качественный ответ на вопрос о влиянии ПВ на сигналы от ИСЗ. Реальная картина существенно усложняется более сложной геометрией распространения и формой возмущения, сферичностью иносферы, кривизной орбиты ИСЗ, присутствием неоднородностей мелких масштабов и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, Геомагнетизм и аэрономия, 5, 693 (1965).
- J. Jones, G. F. Lyon, J. Atm. Terr. Phys., 36, 461 (1974).
- J. E. Titheridge, J. Atm. Terr. Phys., 33, 47 (1971).
- Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 5, 839 (1962).
- B. H. Briggs, I. A. Parkin, J. Atm. Terr. Phys., 25, 339 (1963).

EFFECT OF WAVE IONOSPHERIC DISTURBANCES ON SATELLITES
SIGNALS

B. I. Nurgozhin, Yu. K. Postoev, B. V. Troitskii

Using path calculations, the conditions are investigated under which large-scale wave (travelling) disturbances (TD) of the electron density in the ionosphere may be responsible for satellite signal scintillations. It is shown that the ionospheric region producing scintillation has sharp boundaries and its position and dimensions depend on TD parameters, satellite orbit and transmitter operating frequency.

УДК 621.371.242

**МЕТОД РАСЧЕТА ВЛИЯНИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СЛОИСТЫХ
НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА ТРОПОСФЕРНУЮ РЕФРАКЦИЮ
И ВКЛАД В РАДИОРЕФРАКЦИЮ ТУМАНА,
ОБЛАЧНОСТИ И ДОЖДЯ***

C. A. Жевакин, M. B. Каневский

Предлагается простой метод расчета влияния сферически-слоистых неоднородностей на тропосферную рефракцию с использованием вариационных производных по n и по $\frac{dn}{dh}$ от интеграла рефракции. В основе метода лежит слабая зависимость этих производных от принятой модели среднего профиля изменения коэффициента преломления тропосферы n с высотой h , в частности от сезонных изменений модели. Метод иллюстрируется применением его к расчету вклада тумана, облачности и дождя в радиофефракцию.

Так как водность облаков, тумана и дождя в 5—50 раз меньше абсолютной влажности воздуха и, кроме того, вклад влажности в коэффициент преломления при переходе водяного пара атмосферы в капельно-жидкую фазу уменьшается примерно в 4,5 раза, то вклад облачности, тумана и дождя в радиофефракцию обычно мал. Лишь при особых условиях (ливни с водностью $q \approx 5 \text{ г}/\text{м}^3$, видимые зенитные углы $\theta \approx 90^\circ$) он может достигать нескольких угловых минут.

**1. МЕТОД РАСЧЕТА ВЛИЯНИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СЛОИСТЫХ
НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА ТРОПОСФЕРНУЮ РЕФРАКЦИЮ**

В сферически-слоистой атмосфере угол рефракции $R(\theta)$ определяется выражением [1]

$$R(\theta) = \int_{H_0}^H F[\theta, h, n(h), n'(h)] dh, \quad (1)$$

где

$$F = - \frac{an_0 \sin \theta n'(h)}{n(h) [n^2(h)(a+h)^2 - a^2 n_0^2 \sin^2 \theta]^{1/2}}, \quad n'(h) = \frac{dn}{dh}.$$

Здесь h — высота над земной поверхностью, $n(h)$ — коэффициент преломления, H_0 и H — высота приемника и излучателя над поверхностью Земли, n_0 — коэффициент преломления воздуха в точке приема, a — радиус Земли, θ — зенитный угол, под которым виден излучатель из точки приема.

Применимельно к средним условиям тропосферы интеграл (1) вычисляется аналитически [1, 2]; в более общем случае сферически-слоистой среды выражение для $R(\theta)$ может быть представлено в виде ряда по степенным функционалам от $n(h) - 1$ [3].

В тропосфере, однако, всегда присутствуют слои с показателем

* Работа частично докладывалась на I Всесоюзной конференции по радиометеорологии, г. Фрунзе, 19—21 июня 1972 г.

Таблица 1

Значения функции — $\Phi(h, 0)$, км $^{-1}$. Символ ($-m$) означает, что стоящее перед ним число следует умножить на 10^{-m} .

$h, \text{град}$	50	70	80	83	85	86	87	87,5	88	88,5	89	89,3	89,5	89,7	89,8	89,9	90
$h, \text{км}$																	
0	4,53(-4)	3,69(-3)	2,95(-2)	8,61(-2)	2,36(-1)	4,61(-1)	1,09	1,89	3,69	8,75	29,5	86,1	236	1093	3690	20517	∞
0,25	4,52(-4)	3,68(-3)	2,94(-2)	8,56(-2)	2,33(-1)	4,53(-1)	1,06	1,81	3,44	7,75	22,8	52,8	102	201	270	333	360
0,5	4,52(-4)	3,68(-3)	2,93(-2)	8,51(-2)	2,31(-1)	4,45(-1)	1,03	1,73	3,22	6,92	18,2	36,4	59,1	91,7	109	121	126
0,75	4,52(-4)	3,68(-3)	2,92(-2)	8,46(-2)	2,28(-1)	4,38(-1)	9,97(-1)	1,66	3,02	6,22	15,0	26,9	39,6	54,7	61,6	66,4	68,1
1	4,52(-4)	3,68(-3)	2,92(-2)	8,41(-2)	2,26(-1)	4,30(-1)	9,67(-1)	1,59	2,84	5,63	12,6	20,9	28,8	37,2	40,7	43,1	43,9
1,5	4,52(-4)	3,67(-3)	2,90(-2)	8,31(-2)	2,21(-1)	4,15(-1)	9,11(-1)	1,46	2,52	4,68	9,28	13,9	17,6	21,0	22,4	23,2	23,5
2	4,52(-4)	3,66(-3)	2,89(-2)	8,21(-2)	2,16(-1)	4,01(-1)	8,59(-1)	1,35	2,25	3,96	7,18	10,0	12,1	13,8	14,5	14,9	15,1
3	4,51(-4)	3,65(-3)	2,85(-2)	8,01(-2)	2,06(-1)	3,74(-1)	7,68(-1)	1,16	1,83	2,95	4,72	6,03	6,87	7,54	7,78	7,92	7,97
4	4,51(-4)	3,64(-3)	2,81(-2)	7,82(-2)	1,97(-1)	3,50(-1)	6,89(-1)	1,01	1,51	2,29	3,38	4,09	4,52	4,85	4,96	5,03	5,05
5	4,51(-4)	3,63(-3)	2,78(-2)	7,62(-2)	1,88(-1)	3,27(-1)	6,21(-1)	1,28	1,84	2,55	2,99	3,23	3,42	3,48	3,52	3,53	
6	4,51(-4)	3,62(-3)	2,74(-2)	7,44(-2)	1,80(-1)	3,07(-1)	5,63(-1)	7,81(-1)	1,09	1,51	2,00	2,29	2,45	2,56	2,60	2,63	2,63
7	4,50(-4)	3,61(-3)	2,71(-2)	7,25(-2)	1,72(-1)	2,88(-1)	5,12(-1)	6,96(-1)	9,45(-1)	1,26	1,62	1,82	1,93	2,01	2,03	2,05	
8	4,50(-4)	3,59(-3)	2,67(-2)	7,07(-2)	1,64(-1)	2,70(-1)	4,68(-1)	6,23(-1)	8,27(-1)	1,08	1,34	1,49	1,56	1,62	1,64	1,65	
9	4,49(-4)	3,58(-3)	2,64(-2)	6,90(-2)	1,57(-1)	2,55(-1)	4,30(-1)	5,62(-1)	7,31(-1)	9,30(-1)	1,14	1,24	1,30	1,34	1,35	1,36	
10	4,49(-4)	3,57(-3)	2,60(-2)	6,73(-2)	1,51(-1)	2,40(-1)	3,96(-1)	5,10(-1)	6,51(-1)	8,12(-1)	9,74(-1)	1,06	1,10	1,13	1,14	1,14	1,15

Таблица 2

Значения функции — $\Gamma_h(n, 0)$

$n, \text{град}$	50	70	80	83	85	86	87	87,5	88	88,5	89	89,3	89,5	89,7	89,8	89,9	90
$n, \text{км}$																	
0	1,1914	2,7466	5,669	8,142	11,43	14,30	19,07	22,90	28,63	38,18	57,27	81,82	114,6	190,9	286,4	572,8	∞
0,25	1,1913	2,7459	5,664	8,126	11,38	14,21	18,88	22,56	27,97	36,67	52,53	69,52	86,47	108,5	119,8	128,5	131,8
0,5	1,1912	2,7453	5,658	8,110	11,34	14,13	18,68	22,23	27,36	35,31	48,76	61,42	72,18	83,18	88,42	91,77	92,97
0,75	1,1911	2,7446	5,653	8,094	11,30	14,05	18,49	21,91	26,77	34,08	45,67	55,56	63,15	70,37	73,18	75,04	75,70
1	1,1910	2,7439	5,648	8,079	11,25	13,96	18,31	21,61	26,22	32,97	43,08	51,07	56,78	61,85	63,74	64,90	65,38
1,5	1,1909	2,7426	5,637	8,047	11,17	13,80	17,95	21,02	25,20	30,99	38,94	44,54	48,18	51,16	52,21	52,88	53,10
2	1,1908*	2,7412	5,625	8,014	11,08	13,64	17,60	20,47	24,27	29,31	35,75	39,94	42,50	44,50	45,19	45,62	45,76
3	1,1904	2,7383	5,603	7,950	10,92	13,33	16,95	19,47	22,64	26,57	31,09	33,73	35,23	36,35	36,72	36,95	37,02
4	1,1901	2,7354	5,579	7,885	10,75	13,03	16,35	18,58	21,27	24,43	27,80	29,64	30,64	31,37	31,60	31,75	31,80
5	1,1897	2,7324	5,556	7,819	10,59	12,75	15,80	17,78	20,09	22,69	25,32	26,68	27,41	27,92	28,09	28,19	28,30
6	1,1894	2,7293	5,532	7,754	10,43	12,48	15,29	17,66	19,07	21,25	23,36	24,42	24,98	25,36	25,49	26,57	26,80
7	1,1890	2,7262	5,508	7,690	10,27	12,21	14,81	16,41	18,18	20,04	21,77	22,62	23,06	23,37	23,47	23,63	23,76
8	1,1886	2,7230	5,484	7,626	10,12	11,96	14,36	15,82	17,39	18,99	20,45	21,15	21,51	21,76	21,84	21,88	21,90
9	1,1882	2,7198	5,460	7,562	9,978	11,73	13,97	15,28	16,68	18,08	19,33	19,92	20,22	20,42	20,49	20,53	20,54
10	1,1878	2,7165	5,436	7,500	9,836	11,00	13,59	14,79	16,05	17,29	18,37	18,87	19,19	19,29	19,35	19,38	19,39

преломления, отличающимся от среднего. Мы изложим сейчас простой метод, позволяющий, не прибегая к сложным вычислениям, находить вклад сферически-слоистых неоднородностей произвольного профиля в тропосферную рефракцию*.

Представим показатель преломления и его производную по высоте в виде сумм:

$$n(h) = \bar{n}(h) + \delta n(h), \quad n'(h) = \bar{n}'(h) + \delta n'(h),$$

где \bar{n} и \bar{n}' — средние величины, а δn и $\delta n'$ — малые отклонения от средних. Для соответствующего отклонения δR запишем

$$\begin{aligned} \delta R &= \int_{H_0}^H F_n \delta n dh + \int_{H_0}^H F_{n'} \delta n' dh, \\ F_n &= \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{n=\bar{n}, n'=\bar{n}'}, \quad F_{n'} = \frac{\partial F}{\partial n'} \Big|_{n=\bar{n}, n'=\bar{n}'}. \end{aligned} \quad (2)$$

Выражение для δR можно записать и в несколько иной форме:

$$\begin{aligned} \delta R &= F_{n'} \delta n \Big|_{H_0}^H + \int_{H_0}^H \Phi \delta n dh, \\ \Phi &= F_n - \frac{dF_{n'}}{dh} = -\frac{\partial F_{n'}}{\partial h}; \end{aligned} \quad (3)$$

последнее равенство написано с учетом конкретного вида функции $F(h, n, n')$.

Производные $\Phi(h, \theta)$ и $F_{n'}(h, \theta)$ вычислены и представлены в табл. 1 и 2. При вычислениях была принята «средняя» модель тропосферы $\bar{n}(h)$, характерная для средних широт в летнее время [1]:

$$\begin{aligned} \bar{n}(h) &= 1 + 10^{-6} \bar{N}_0 e^{-\beta h}, \quad \beta = -0,1 \ln(93/\bar{N}_0) \text{ км}^{-1}, \\ \bar{N}_0 &= 334. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичные вычисления были проделаны также для «зимней» ($\bar{N}_0 = 293$) модели. Результаты практически совпали, лишь при $\theta > 89^\circ,5$ разница в значениях Φ составила 5—10%, а в значениях $F_{n'}$ — 2—5%. Значения Φ и $F_{n'}$, вычисленные для среднеширотной «летней» модели [4], при $\theta > 89^\circ,5$ отличаются от приведенных в табл. 1 и 2 соответственно на 15—30%** и 2—5%.

Таким образом, слабая зависимость результатов от выбора «средней» модели в области зенитных углов $\theta \leqslant 89^\circ,5$ обеспечивает довольно высокую точность расчетов вариаций угла рефракции по данным табл. 1, 2.

Предложенный метод, как и исходная формула (1), неприменим, если на какой-либо высоте $H_0 < h < H$ знаменатель функции F обращается в нуль (условие образования волновода). При $H_0 = 0$ это накладывает на рассматриваемый профиль $n(h)$ ограничение $\delta[n_0 - n(h)] < \varphi^2/2 + 10^{-4} h$ (км), где $\varphi = \pi/2 - \theta$ — малый угол места.

* Формулы, пригодные для тонкого слоя с ломано-линейным профилем $\delta n(h)$, получены в работе [2].

** Эта разница зависит от высоты h , и здесь приведены ее максимальные (при фиксированном θ) значения. Поскольку Φ входит под интеграл по h , разница в значениях δR будет меньше.

Известно, что основной вклад в вариации коэффициента преломления атмосферы вносят изменения ее влажности и температуры, приводящие к возникновению слоистости атмосферы. Влияние возникающих таким образом слоев на тропосферную рефракцию легко может быть оценено по изложенной методике. Мы, однако, для иллюстрации метода ограничимся в дальнейшем применением его к оценке влияния тумана, облачности и дождя на тропосферную радиорефракцию. Но прежде разберем вопрос о диэлектрической проницаемости гетерогенной системы «воздух плюс водные капли», т. е. атмосферы с туманом (в частности, с облачностью), либо с дождем.

2. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ АТМОСФЕРЫ С ДОЖДЕМ ИЛИ ТУМАНОМ В РАДИОДИПАЗОНЕ

Вопрос о диэлектрической проницаемости гетерогенной системы рассматривался неоднократно (см., например, [5-7]). Для удобства читателя мы изложим его применительно к интересующей нас задаче о диэлектрической постоянной атмосферы с туманом (облаком) или дождем.

Учитывая, что капли дождя или тумана обладают лишь упругой поляризацией и эффективное поле равно поэтому $E_{\text{эфф}} = E + \frac{4\pi}{3}P$

(E — поле падающей волны, P — поляризация, вносимая каплями), достаточно для определения вклада $\Delta\epsilon$ тумана или дождя в диэлектрическую проницаемость воздуха использовать формулу Клаузинуса — Мюсси:

$$\frac{\Delta\epsilon - 1}{\Delta\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N_k \alpha, \quad (5)$$

где α — поляризуемость капли, N_k — число капель в см^3 . Формула предполагает, как известно, что длина волны λ много больше расстояния между каплями: $\lambda \gg l$. Кроме того, при написании (5) было использовано то обстоятельство, что диэлектрическая постоянная воздуха весьма близка к единице, отличаясь от нее лишь в пятом знаке, тогда как диэлектрическая постоянная капли воды существенно отличается от единицы и больше ее.

С учетом того, что для значений водности, представляющих интерес для метеорологии, $\Delta\epsilon$ отличается от единицы в пятом знаке (см. ниже), формула (5) переходит в

$$\Delta\epsilon - 1 = 4\pi N_k \alpha. \quad (6)$$

Будем предполагать, что длина волны электромагнитного поля много больше радиуса капли r . В таком случае коэффициент поляризуемости капли равен

$$\alpha_r = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} r^3,$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость жидкой воды (см., например, [8]).

Для вклада тумана или дождя в диэлектрическую проницаемость атмосферы имеем теперь из (6)

$$\Delta\epsilon - 1 = 4\pi \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \sum_r r^3 N_{k,r} = \frac{3(\epsilon - 1)}{\epsilon + 2} \sum_r \frac{4\pi}{3} r^3 N_{k,r} = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} q,$$

где $q = \sum_r \frac{4\pi}{3} r^3 N_{k,r}$ — водность тумана или дождя, г/с.м^3 .

Таким образом, при $\lambda \gg r, \lambda \gg l$ диэлектрическая проницаемость атмосферы с туманом или дождем не зависит от размеров капель и определяется только водностью тумана (облака) или дождя.

При $\lambda > 10 \text{ см}$ диэлектрическая проницаемость воды может считаться постоянной и равной $\epsilon = 80$; при $\lambda < 10 \text{ см}$ она уменьшается с уменьшением длины волны (см. рис. 1, заимствованный из [9], на котором изображен в зависимости от длины волны коэффициент преломления воды $n_w = \sqrt{\epsilon}$ при температуре 20°C (кривая Дебая); точки, крестики и г. д. изображают экспериментальные значения, полученные различными авторами).

При $\lambda > 10 \text{ см}$ диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon = 80$ и

$$\Delta\epsilon - 1 = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} q = 2,890 q,$$

откуда вклад тумана или дождя с водностью q ($\text{г}/\text{см}^3$) в коэффициент преломления воздуха получается равным

$$\Delta n = \frac{1}{2} \Delta\epsilon = 1,445 q \quad (7)$$

(мы учли, что $1,445 q \ll 1$).

Принимая во внимание известную формулу для коэффициента преломления влажного воздуха (см., например, [10]),

$$(n - 1) \cdot 10^6 = \frac{77,6}{T} \left(P + \frac{4810 e}{T} \right)$$

и переходя от парциального давления водяного пара e (в миллибарах) к абсолютной влажности q ($\text{г}/\text{см}^3$) ($1 \text{ мб} \approx 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ г}/\text{см}^3$), находим, что вклад водяного пара в коэффициент преломления воздуха составляет

$$(\Delta n)_{v.p.} = 10^{-6} \frac{77,6}{T} \frac{4810}{T} e = \frac{4,973 \cdot 10^5}{T^2} q.$$

Сравнивая это с формулой (7), видим, что при температурах $0 - 20^\circ\text{C}$ на волнах $\lambda \geq 10 \text{ см}$ при переходе водяного пара в жидкую фазу (туман) вклад воды воздуха в величину коэффициента преломления воздуха уменьшается в $4,973 \cdot 10^5 / T^2 \cdot 1,445 \approx 4,5$ раза, а не увеличивается в 7 раз, как это утверждают Пиддингтон [11] и вслед за ним Насилов [12].

В частности, отсюда следует, что образование приземного тумана затрудняет возникновение приземных волноводов, а не способствует ему (как то получилось бы, если бы образование тумана сопровождалось увеличением вклада водности воздуха в величину $\epsilon_w - 1$ в 7 раз).

3. ВКЛАД ОБЛАКОВ, ТУМАНА И ДОЖДЯ В РАДИОРЕФЛКЦИЮ

Если влиянию туманов, облачности и дождей на поглощение и рассеяние радиоволн посвящено много работ, то рассмотрение их воз-

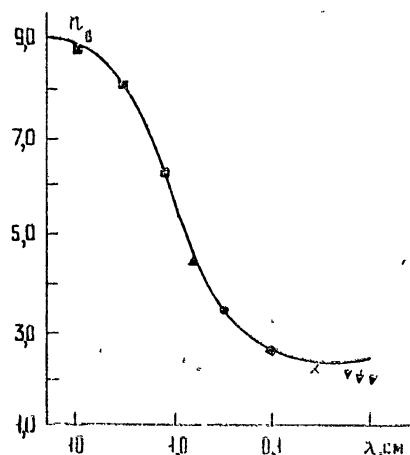


Рис. 1.

действия на рефракцию радиоволн в атмосфере нам удалось обнаружить лишь в монографии Насилова [12], где, как уже нами отмечалось, этот вопрос изложен неправильно. Отметим, что влияние облачности на фазовое запаздывание радиоволн рассмотрено в работе [13].

Мы увидим, что вклад туманов, дождей и облачности в радиорефракцию мал в сравнении с влиянием на нее изменений влажности и температуры атмосферы. Это обусловлено двумя обстоятельствами: 1) вклад влажности в коэффициент преломления при переходе водяного пара атмосферы в капельно-жидкую фазу уменьшается в $\sim 4,5$ раза (см. разд. 2); 2) водность облаков, туманов и дождя обычно в пять и более раз меньше абсолютной влажности воздуха.

Известно, что максимальная водность облаков $q = 1 \div 1,2 \text{ г}/\text{м}^3$ (кучево-дождевые *Cb* и мощные кучевые *Cu cong*), обычно же $q = 0,1 \div 0,2 \text{ г}/\text{м}^3$ [14, 15]. Таким образом, даже при максимальной водности облака $q \approx 1 \text{ г}/\text{м}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ г}/\text{см}^3$ изменение коэффициента преломления составляет согласно формуле (7) $\Delta n = 1,44 q = 1,44 \cdot 10^{-6} = 1,44 N$ -единиц, тогда как изменение Δn из-за колебаний влажности и температуры воздуха гораздо больше $-2 \div 60 N$ -единиц ($N = (n - 1) \cdot 10^6$).

Имея в виду оценку верхней границы величины влияния облаков на радиорефракцию, возьмем водность облаков $q = 1 \text{ г}/\text{м}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ г}/\text{см}^3$, высоту нижней границы области $0,5 \text{ км}$, толщину облачности $6,5 \text{ км}$. Изменение рефракции из-за влияния такой облачности при прохождении через нее радиоволны под зенитным углом $\theta = 89^\circ$ может быть оценено по формуле (3) с помощью табл. 1:

$$\delta R = \delta n \sum_i (h_{i+1} - h_i) \Phi \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2} \right) = -1,44 \cdot 10^{-6} \cdot 34,2 \text{ рад} = -10'',1,$$

значения $\Phi \left(\frac{h_i + h_{i+1}}{2} \right)$ находились путем линейной интерполяции.

Мы видим, что влияние облаков на радиорефракцию невелико, при обычных условиях облака могут изменить направление нормали к фронту волны примерно на одну угловую секунду. Лишь для особых условий (мощные кучевые и кучево-дождевые облака, зенитные углы $\theta \approx 90^\circ$) это влияние может достигнуть нескольких десятков угловых секунд.

Случай тумана и дождя уместно рассмотреть совместно, поскольку для них «геометрия» одинакова — наблюдатель расположен в слое.

При видимости 50 м водность «густого» тумана может достигать $1 \text{ г}/\text{м}^3 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ г}/\text{см}^3$ [16]. Полагая высоту слоя тумана или дождя 1 км , водность их $q = 1 \cdot 10^{-6} \text{ г}/\text{см}^3$, по формулам (3) и (7) получаем при помощи табл. 1, 2 при угле $\theta = 98^\circ$

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta n \left[-F_n(0) + \sum_i (h_{i+1} - h_i) \Phi \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \right] = \\ &= 1,44 \cdot 10^{-6} (57,27 - 19,26) \text{ рад} = 11'',3. \end{aligned}$$

Обычные туманы и дожди, водность которых не превышает $0,1 \text{ г}/\text{м}^3$, при видимом зенитном угле $\theta = 89^\circ$ увеличат угол рефракции не более чем на одну угловую секунду. Для дождей и особенно ливней, у которых водность может достигать $q = 5,5 \text{ г}/\text{м}^3$ [17], получим при тех же условиях $\delta R \approx 1'$.

Таким образом, при малых углах места $\leq 1^\circ$ ливень может изменить угол рефракции на несколько угловых минут. «Сильный дождь», для которого водность в 2—3 раза меньше водности ливня, может при

малых углах места вызвать изменение угла рефракции до $1'$. Умеренный дождь на углах места $\sim 1^\circ$ может дать изменение угла рефракции $\sim 5''$.

Мы видим, что влияние дождя на угол рефракции является заметным и должно учитываться, например, при работе больших антенн.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. А. Колосов, Н. А. Арманд, О. И. Яковлев, Распространение радио-волн при космической связи, изд. Связь, М., 1969
- 2 А. В. Шабельников, Радиотехника и электроника, 13, № 12, 2115 (1968)
- 3 В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, № 5, 923 (1962)
- 4 U. S. Standard Atmosphere, 1966.
- 5 В. И. Оделевский, ЖТФ, 21, 667 (1951).
- 6 Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, 1954, стр. 177
- 7 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957, стр. 67
- 8 Дж. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, М—Л, 1948, стр. 187
- 9 J. E. Chamberlain, G. W. Chantry, H. A. Gebbie, N. W. Stone T. B. Taylor, G. Wyllie, Nature, 210, 790 (1966).
- 10 E. K. Smith, S. Weintraub, Proc. IRE, 41, 1035 (1953).
- 11 J. H. Piddington, Proc. Phys. Soc., 51, 129 (1939); Proc. Inst. Rad. Eng., 27, 12, 753 (1939).
- 12 Д. Н. Насилов, Радиометеорология, Гостехиздат, М.—Л, 1956, стр. 142, издание второе, изд. Наука, М., 1966, стр. 170
- 13 Б. Г. Кутузов, Радиотехника и электроника, 19, 665 (1974).
- 14 А. М. Боровиков, И. И. Гайворонский и др., Физика облаков, Гидрометеоиздат, 1961
- 15 В. Е. Зуев, Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере, изд. Сов. радио, М., 1970.
- 16 А. Х. Хргиан, Физика атмосферы, Физматгиз, М., 1958, стр. 293
- 17 Г. Гертнер, Прозрачность замутненной атмосферы для инфракрасных волн, М—Л, 1949.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
20 ноября 1974 г.

A CALCULATION METHOD OF SPHERICALLY-STRATIFIED INHOMOGENEITY EFFECT ON TROPOSPHERIC REFRACTION AND CONTRIBUTION TO RADIO REFRACTION OF FOG, CLOUDS AND RAIN

S. A. Zhevakin, M. B. Kanevskii

A simple method is suggested of calculating a spherically-stratified inhomogeneity effect on the tropospheric refraction using the variation derivatives over n and $\frac{dn}{dh}$ of the refraction integral. The basis of the method is a weak dependence of these derivatives on the accepted model of the mean profile of the tropospheric refraction coefficient variation n with the height h , in particular, on seasonal variations of this model. The method is illustrated by its application to calculation of the contribution of fog, cloudiness and rain to radio refraction.

Since the water content of clouds, fog and rain is 5–50 times less than the absolute moisture of air and the contribution of moisture to the refraction coefficient when the water vapour of the atmosphere transforms into drop-liquid phase decreases approximately 4.5 times, their contribution to the radio refraction is usually small. Only under specific conditions (heavy showers with the water content $q \approx 5 \text{ gr/m}^3$, visible zenith angles $\theta \approx 90^\circ$) it may reach some angular minutes.

УДК 621.371.24

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРИВОДНОМ ТРОПОСФЕРНОМ ВОЛНОВОДЕ

В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс

Изучено влияние морского волнения на параметры сигнала, распространяющегося в приводном тропосферном волноводе. Рассчитан декремент затухания в таком волноводе. Показано, что при некотором соотношении параметров наличие неровностей приводит к уменьшению затухания по сравнению с гладким волноводом. Изучены корреляционные характеристики флуктуаций амплитуды и фазы при наличии двух частотно-разнесенных источников.

Одним из механизмов сверхдальнего загоризонтного проникновения сигналов является распространение радиоволн по волноводу, существующему благодаря инверсионной зависимости диэлектрической проницаемости воздуха от высоты.

В приводном тропосферном волноводе роль нижней стенки играет поверхность моря, рассеяние на неровностях которой может приводить к изменению интенсивности, флуктуациям амплитуды и фазы и деполяризации принимаемого сигнала.

1. Обозначим через r , θ и φ сферические координаты с началом в центре земного шара и с полярной осью, проходящей через источник, который является вертикальный электрический диполь, расположенный на высоте z_0 над поверхностью Земли. Диэлектрическую постоянную тропосфера ϵ будем считать функцией высоты $z = r - a$ (a — радиус Земли):

$$\epsilon = \begin{cases} 1 - b(z - z_1) & (z < z_1) \\ 1 & (z > z_1) \end{cases} . \quad (1)$$

Воспользовавшись такой аппроксимацией реальной зависимости ϵ от z , мы, фактически, предполагаем, что сверхдальнее распространение определяется только высотой точки инверсии и приращением $\epsilon(0) - \epsilon(z_1)$. В действительности существует по крайней мере еще один параметр, влияющий на характер волноводного распространения — кривизна $\epsilon(z)$ в точке z_1 . Однако, как указано в [1], эта величина влияет лишь на просачивание электромагнитного поля из слоя инверсии, т. е. на затухание волноводных модов. Нас в дальнейшем будет интересовать «одномодовый» волновод или, пользуясь языком квантовой механики, одноуровневая потенциальная яма. Если уровень находится достаточно далеко от края ямы, затухание мало, и влиянием кривизны можно пренебречь.

Относительно нижней границы волновода (поверхность моря) будем предполагать, что на ней выполняется граничное условие Леонтьевича:

$$[NE] = \eta_0 [N [NH]], \quad (2)$$

где N — нормаль к поверхности, $\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{моря}}}}$ — ее импеданс.

В этих условиях для функции Герца вертикального электрического диполя в приближении параболического уравнения можно написать [1]:

$$U(R, R_0) = e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2k\pi}{L} \frac{\mu}{m}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{ix_{0n}L} \times \\ \times \frac{v(\xi_n + \mu z \sqrt[3]{2k^2/a}) v(\xi_n + \mu z_0 \sqrt[3]{2k^2/a})}{v'^2(\xi_n) - \xi_n v^2(\xi_n)}. \quad (3)$$

Здесь R, R_0 — радиус-векторы точки наблюдения и источника, $L = a(\theta - \theta_0)$ — расстояние между ними, отсчитываемое вдоль замкой поверхности, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, $\mu = \sqrt[3]{\frac{ab}{2}} - 1$, $m = \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3}$,

$v(\zeta)$ — функция Эйри, ξ_n — корни дисперсионного уравнения

$$\mu v'(\xi_n) + im\eta_0 v(\xi_n) = 0, \quad (4)$$

$$x_{0n} = k \left(1 + z_1 \frac{b}{2} + \frac{\mu^2 \xi_n}{\sqrt[3]{2a^2 k^2}} \right).$$

Расчеты, проведенные в [1], показывают, что с некоторого номера $n = N$ ряд (3) начинает быстро сходиться, так как у x_{0n} появляются большие мнимые части, обусловленные интенсивным уходом поля в верхние слои атмосферы. Таким образом, можно считать, что в рассматриваемом случае в тропосфере существует волновод с конечным числом N распространяющихся (слабозатухающих) модов. В дальнейшем мы ограничимся ситуацией, когда соотношение параметров b и z_1 таково, что $N = 1$. Заметим, что эта единственная слабозатухающая волна распространяется под очень малым углом к поверхности — угол ее скольжения $\psi \sim (ka)^{-1/3}$.

2. Пусть теперь ограничивающей волновод поверхностью является взволнованная поверхность моря, которую будем описывать случайной функцией координат и времени $z = \zeta(x, y, t)$ (здесь введена локальная декартова система координат с осями x, y , направленными по касательным к поверхности, и осью z — вдоль радиуса Земли). Для дальнейшего предположим, что $\langle \zeta \rangle = 0$, $\langle \zeta(x_1, y_1, t_1) \zeta(x_2, y_2, t_2) \rangle = W(x_1 - x_2, y_1 - y_2, t_1 - t_2)$; $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций случайной функции ζ .

Экспериментально достаточно подробно изучен временной спектр ветрового волнения на море:

$$\bar{W}(f) = \int \langle \zeta(r, t) \zeta(r, t + \tau) \rangle e^{-if\tau} d\tau.$$

Большинство известных данных хорошо описывается формулой [2]

$$\bar{W}(f) = \frac{c}{f^n} \exp \left[-\beta \left(\frac{2\pi}{T_{\text{ср}} f} \right)^m \right], \quad (5)$$

где $5 \leq n \leq 6$, $2 \leq m \leq 4$, β — число порядка единицы, $T_{\text{ср}}$ — средний

наблюдаемый период волн, зависящий от скорости ветра и стадии развития волнения, с определяется из условий нормировки спектра.

Чтобы от (5) перейти к пространственному спектру

$$\widetilde{W}(x) = \int \langle \zeta(r, t) \zeta(r + \rho, t) \rangle e^{ix\rho} d\rho, \quad (6)$$

будем считать поверхность изотропной $(\widetilde{W}(q) = \widetilde{W}(q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2})$, что не позволяет учесть ряда особенностей, связанных с угловым распределением энергии, однако существенно упрощает выкладки. Закон дисперсии поверхностных волн зададим в виде

$$f = \sqrt{gq} \quad (g = 9,8 \text{ м/с}^2). \quad (7)$$

С учетом сделанных предположений при $n = 5, m = 4$ для $\widetilde{W}(q)$ нетрудно получить

$$\widetilde{W}(q) = \frac{q_m^2 b^2}{2\pi q^4} \exp(-q_m^2/q^2), \quad (8)$$

где $b^2 = \langle \zeta^2 \rangle$ — среднеквадратичная высота неровностей, q_m — волновое число энергонесущих составляющих морского волнения. Максимум спектра (8) достигается при $q_0 = q_m/\sqrt{2}$.

Из-за рассеяния на неровностях поверхности поля E и H в волноводе также являются случайными функциями координат и времени, которые удобно представить в виде

$$\begin{aligned} E &= \mathcal{E} + e, \\ H &= H + h, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathcal{E} = \langle E \rangle$, $H = \langle H \rangle$ — средние, когерентные поля, а e и h — флуктуационная часть принимаемого сигнала. Зависимость средней интенсивности $I \sim \langle E_z^2 \rangle$, принимаемой вертикальным электрическим диполем, от расстояния между источником и приемником можно описывать с помощью уравнения переноса излучения [4]. Однако в изучаемой ситуации нет необходимости в решении этого уравнения, так как достаточно ограничиться лишь вычислением среднего поля и считать, что $I \sim |\langle \mathcal{E}_z \rangle|^2$.

Действительно, если в закрытом одномодовом волноводе среднее поле затухает за счет рассеяния из когерентной составляющей во флуктуационную в том же моде (происходит перераспределение энергии между когерентной и флуктуационной частями), то в нашем случае \mathcal{E} и e убывают в основном по одной и той же причине, за счет преобразования в затухающие моды. Рассеянная энергия не остается в волноводе, а уходит в верхние слои атмосферы. Соотношение $|\mathcal{E}| \gg |e|$, таким образом, сохраняется на достаточно больших расстояниях, и можно считать, что $I \sim |\mathcal{E}_z|^2$.

3. Перейдем к вычислению среднего поля. Как показано в [3], дополнительное затухание собственной волны, вызванное рассеянием на неровностях границ, описывается множителем $e^{-Im\alpha_n L}$, где δx — комплексная добавка к собственному числу гладкого волновода x_0 . В природном тропосфере волноводе ширина индикаторы рассеяния $\Delta\phi \sim \sqrt{2}q_m/k$ велика по сравнению с характерным углом захвата $\psi \sim (ka)^{-1/3}$. Благодаря этому можно считать, что рассеяние на неров-

ностях в условиях волноводного распространения происходит так же, как от шероховатой границы раздела двух однородных полупространств. Поэтому нахождение новой константы распространения $\kappa = \kappa_0 + \delta\kappa$ сводится к решению дисперсионного уравнения (4), в котором η_0 нужно заменить эффективным импедансом $\eta_{\text{эфф}}$. Согласно [5], в нашем случае ($k/q_m \gg 1$, $\psi^2 \ll q_m/k \ll |\eta_0|^2$) для $\eta_{\text{эфф}}$ справедливо выражение

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + k\eta_0^2 \int d^2 p \widetilde{W}(p) \sqrt{2k_1 p}. \quad (10)$$

Решая дисперсионное уравнение (4) методом последовательных приближений ($m |\eta_{\text{эфф}}| \gg 1$), для $\delta\kappa$ можно получить

$$\delta\kappa = i \frac{\mu^3}{a\eta_{\text{эфф}}}. \quad (11)$$

Декремент затухания $\gamma = \text{Im } \kappa$ при этом оказывается равным

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{2\mu^3}{a} k^{3/2} \sigma^2 q_m^{1/2}, \quad (12)$$

где $\gamma_0 = \frac{\mu^3}{a} \frac{\eta'_0}{|\eta_0|^2}$ — декремент затухания в гладком волноводе, обусловленный оттоком энергии в нижнее полупространство, $\eta_0 = \eta'_0 + i\eta''_0$.

Численные оценки показывают, что, например, в дециметровом диапазоне радиоволн рассеяние на взволнованной поверхности моря ($\sigma \sim 0,5 \text{ м}$; $q_m \sim \frac{1}{10} \text{ рад/м}$) не приводит к существенному увеличению погонного коэффициента затухания в тропосферном волноводе.

Более того, если соотношение параметров таково, что $\psi \ll \eta_0 \ll \sqrt{q/k}$,

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + (1-i)\delta, \quad \delta = \frac{\sigma^2 \sqrt{k} q_m^{3/2}}{2 \sqrt{\pi}} \quad \text{и для } \gamma_{\text{эфф}} \text{ несложно получить}$$

$$\gamma_{\text{эфф}} = \gamma_0 \left(\frac{1 + \frac{\delta}{\eta_0}}{1 + 2\delta(\eta'_0 + \eta''_0) |\eta_0|^2} \right) < \gamma_0. \quad (13)$$

Таким образом, в этом предельном случае наличие неровностей приводит к уменьшению затухания когерентной составляющей по сравнению с гладким волноводом, очевидно, за счет уменьшения доли энергии, прошедшей в нижнее полупространство.

4. Обратимся к изучению флюктуационного поля. Разлагая граничное условие (2), заданное на взволнованной поверхности $\zeta(x, y)$ по степеням ζ , и подставляя E и H в виде (9), можно выразить e и h на поверхности $z=0$ через величины \mathbf{E} и \mathbf{H} (этот процедура подробно описана, например, в [6]). От средних полей удобно перейти к средней функции Герца $\langle U \rangle$, которая, как показано выше, отличается от U заменой в (3) ζ_{0n} на $\zeta_n = \zeta_{0n} + \delta\zeta_n$ (в нашем случае в сумме (3) достаточно удерживать только первый член). Затем, воспользовавшись теоремой Грина, можно получить

$$e_z(R, R_0) = \frac{1}{4\pi} \nabla_r^2 \int \langle U(R, r') \rangle \zeta(r') \nabla_{r'}^2 \langle U(r', R_0) \rangle dr' +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{k^2}{4\pi} \nabla_r \int \langle U(R, r') \rangle \zeta(r') \nabla_{r'} \langle U(r', R_0) \rangle dr' + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \nabla_r \int \frac{\partial}{\partial z'} \langle U(R, r') \rangle \zeta(r') \nabla_{r'} \frac{\partial}{\partial z'} \times \\
 & \quad \times \langle U(r', R_0) \rangle dr'; \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$h_z(R, R_0) = \frac{1}{4\pi} (\eta_0 + \eta_0^{-1}) \int \left[\nabla_{r'} \frac{\partial \langle \bar{U}(R, r') \rangle}{\partial z'} \nabla_{r'} \frac{\partial \langle U(r', R_0) \rangle}{\partial z'} \right] dr'. \tag{15}$$

Здесь $\nabla_r = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$, [...] — z -компоненты векторного произведения, функция \bar{U} отличается от U тем, что в граничном условии η_0 заменяется на η_0^{-1} .

Заметим, что, так как источником является вертикальный электрический диполь, в отсутствие шероховатостей $H_z = 0$. То обстоятельство, что во флуктуационном поле $h_z \neq 0$, означает, что рассеяние на неровностях границы раздела приводит к деполяризации распространяющегося в волноводе сигнала.

Для практических приложений, однако, интерес представляют не столько сами поля e и h , сколько флуктуации амплитуды и фазы принимаемого сигнала, а также корреляция этих флуктуаций при частотном разнесении.

Если в точке z_0 находятся два монохроматических точечных источника с частотами ω_1 и ω_2 , то корреляторы флуктуаций уровня $\chi = \ln \frac{A}{A_0} \sim \frac{\delta A}{A_0}$ и фазы S сигналов, принимаемых на вертикальный электрический диполь, выражаются через две комплексные корреляционные функции:

$$\begin{aligned}
 R_1(\omega_1, \omega_2) &= \langle \Phi(\omega_1) \Phi^*(\omega_2) \rangle, \\
 R_2(\omega_1, \omega_2) &= \langle \Phi(\omega_1) \Phi(\omega_2) \rangle, \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{e_z(\omega)}{\mathcal{E}_z(\omega)};$$

$$\begin{aligned}
 R_s &= \langle \chi(\omega_1) \chi(\omega_2) \rangle \\
 R_s &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \operatorname{Re} [R_1 \pm R_2], \\ \langle S(\omega_1) S(\omega_2) \rangle \end{array} \right\} \tag{17}
 \end{aligned}$$

Подставляя (14) в (16) и затем в (17), после усреднения по ансамблю реализаций случайного процесса $\zeta(x, y)$ получаем

$$\langle \chi_1 \chi_2 \rangle_{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = c \operatorname{Re} \{J(DV\bar{\Omega}) \mp J(D)\},$$

$$c = \frac{\sigma^2 \sqrt{\pi} \mu^2 (k_1 k_2)^{5/2} |\eta_0|^4 v^4(\xi) L}{8 q_m m_1 m_2 \sqrt{x_1 x_2} [v'^2(\xi) - \xi v^2(\xi)]^2}, \tag{18}$$

* A_0 — амплитуда невозмущенного поля; δA — флуктуации амплитуды принимаемого сигнала

$$J(x) = \int_0^1 dt [1 + x\sqrt{it(1-t)}] e^{-x\sqrt{it(1-t)}}.$$

Здесь $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1)^{-1}$ — относительный частотный разнос, $x_{1,2} = x(\omega_{1,2})$, $m_{1,2} = (k_{1,2}a)^{-1/3}$, $D = 2q_m\sqrt{L/x}$ — волновой параметр, представляющий собой отношение зоны Френеля ($\sqrt{L/x}$) к характерному размеру неоднородностей, $\tilde{x} = 2x_1x_2/(x_1 + x_2)$.

В частном случае $\Omega = 0$, $x = x_1 = x_2$ из (18) следуют формулы для дисперсий флуктуаций уровня $\langle \chi^2 \rangle$ и фазы $\langle S^2 \rangle$ на фиксированной частоте. Вычисляя асимптотику входящего в (18) интеграла в двух предельных случаях $D \ll 1$ и $D \gg 1$, получаем

$$\begin{aligned} D \ll 1: \langle \chi^2 \rangle &= 0,017 c D^3, \quad \langle S^2 \rangle = 2c, \\ D \gg 1: \langle \chi^2 \rangle &= \langle S^2 \rangle = c. \end{aligned} \tag{19}$$

Эти результаты допускают простую физическую интерпретацию. Действительно, при $D \ll 1$, когда зона Френеля мала по сравнению с максимальными размерами неровностей, амплитуда не чувствительна к виду крупномасштабной части спектра, так как при переходе от реализации к реализации влияние ее сводится лишь к изменению высоты отражающего участка при неизменном угле падения. Флуктуации амплитуды при этом обусловлены многопутевостью за счет рассеяния в азимутальной плоскости $\{x, y\}$. Угловая ширина диаграммы рассеяния в этой плоскости $\Delta\phi \sim q_m/\tilde{x}$, а максимальная разность хода между рассеянными волнами имеет порядок $\Delta L = L\Delta\phi^2$. Соответствующая этому разность фаз (которая и приводит к флуктуациям амплитуды принимаемого сигнала) $\Delta S = k\Delta L = \frac{L}{\tilde{x}}q_m^2 = D^2 \ll 1$. Флуктуации фазы при $D \ll 1$ связаны с изменением геометрической длины пути, определяются только крупномасштабными неровностями с размерами порядка $1/q_m$ и не зависят от мелкомасштабной части спектра.

Если $D \gg 1$, дисперсии флуктуаций уровня и фазы совпадают, так как поле образуется в результате интерференции волн, отраженных от различных неровностей, число которых на отражающем участке (зоне Френеля) велико.

5. При исследовании корреляции флуктуаций амплитуды и фазы на разных частотах удобно перейти от величин R_γ и R_s к коэффициентам корреляции, которые связаны с R_γ и R_s соотношениями

$$K_\gamma = \frac{R_\gamma}{\sqrt{\langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2^2 \rangle}} = \left\{ \frac{J(D\sqrt{\Omega}) \mp J(D)}{\sqrt{[1 \mp J(D\sqrt{1+\Omega})][1 \mp J(D\sqrt{1-\Omega})]}} \right\}, \quad (20)$$

$$K_s = \frac{R_s}{\sqrt{\langle S_1^2 \rangle \langle S_2^2 \rangle}} =$$

Вычисляя асимптотику входящих в (20) интегралов при $D \gg 1$, получаем

$$\text{a}) \quad D\sqrt{\Omega} \ll 1: \quad K_\gamma = K_s \approx 1 - 0,017 D^3 \Omega^{3/2}; \tag{21}$$

$$\text{б}) \quad D\sqrt{\Omega} \gg 1: \quad K_\gamma = K_s \ll 1.$$

Из (21) видно, что при стремлении частотного разноса к нулю коэффициенты корреляции отличаются от единицы на величины порядка $\Omega^{3/2}$, а существенное убывание происходит лишь при $\Omega > 1/D^2$. При $D \gg 1$ интервалы частотной корреляции амплитуды и фазы совпадают и имеют порядок $\delta\omega/\omega = \Omega_k \sim 1/D^2$. Физический смысл этого результата довольно очевиден. Как показано выше, характерные разности хода между рассеянными в плоскости $\{x, y\}$ волнами на частоте ω_i ($i = 1, 2$) имеют порядок $\Delta L_i = L \Delta\varphi_i^2$. Декорреляция флюктуаций рассеянных волн с разнесенными частотами наступает, когда разность фаз между ними $\delta S = \chi_2 \Delta L_2 - \chi_1 \Delta L_1$ становится порядка $\pi/2$, т.е.

$$L q_m^2 \left(\frac{1}{\chi_1} - \frac{1}{\chi_2} \right) \approx 1.$$

Отсюда и следует приведенная выше оценка $\Omega_k \sim 1/D^2$.

При $D \ll 1$ коэффициент корреляции уровня K_ζ вообще не зависит от q_m : $K_\zeta = \frac{1 - \Omega^{3/2}}{(1 - \Omega^2)^{3/4}}$, а K_S отличается от единицы на малую величину порядка D^3 .

Для изучения временных флюктуаций амплитуды и фазы, возникающих вследствие изменения во времени формы морской поверхности, удобно ввести взаимные спектры флюктуаций:

$$w_{\zeta, S}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\zeta, S}(\tau) e^{i\nu\tau} d\tau. \quad (22)$$

Величины $R_{\zeta, S}(\tau)$ вычисляются так же, как $R_{\zeta, S}$, с тем лишь отличием, что вместо $W(0, q)$ входит

$$\widetilde{W}(q, \tau) = \widetilde{W}(0, q) e^{i\omega(q)\tau \operatorname{sgn} q} \quad (23)$$

$$(\omega(q) = (q g)^{1/2}).$$

Такая временная зависимость означает, что в направлении поперек трассы распространения (вдоль оси y) отсутствуют стоячие волны.

С учетом (8) и (23) выражение (22) можно преобразовать к виду

$$w_{\zeta, S}(\nu) = \frac{2c}{g} \nu \widetilde{W}(q_0) [Y(\varphi^4 \Omega) \mp Y(\varphi^4)],$$

где

$$Y(x) = 4 \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \left[C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \cos \frac{x}{4} + S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \sin \frac{x}{4} \right], \quad (24)$$

$$q_0 = \frac{\nu^2}{g}, \quad \widetilde{W}(q_0) =$$

$$= \frac{q_m^2 \sigma^2}{2\pi q_0^4} \exp(-q_m^2/q_0^2) = \frac{q_m^2 \sigma^2 g^4}{2\pi \nu^8} \exp\left(-\frac{q_m^2 g^2}{\nu^4}\right),$$

$$\varphi = \nu/\nu_0, \quad \nu_0^2 = g \sqrt{\frac{x}{L}},$$

$S(x)$, $C(x)$ — синусные и косинусные интегралы Френеля.

При отсутствии частотного разноса ($\Omega = 0$) из (24) вытекают

формулы для спектра флуктуаций амплитуды w_χ^0 и фазы w_s^0 , которые в предельных случаях медленных ($\varphi \ll 1$) и быстрых ($\varphi \gg 1$) флуктуаций дают следующие зависимости от частоты флуктуаций:

$$\begin{aligned} \varphi \ll 1: \quad w_\chi^0 &= \frac{c}{60g} \nu \widetilde{W}(q_0) \varphi^2, \quad w_s^0 = \frac{2c}{g} \nu \widetilde{W}(q_0) [2 + O(\varphi^8)], \\ \varphi \gg 1: \quad w_\chi^0 = w_s^0 &= \frac{2c}{g} \widetilde{W}(q_0) \nu \left[1 \mp \sqrt{\frac{\pi}{\varphi^4}} \cos \left(\frac{\varphi^4 - \pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что, если флуктуации амплитуды и фазы вызваны флуктуациями диэлектрической проницаемости воздуха, спектры $w_{\chi, s}^0$ ведут себя, как $\nu^{-8/3}$ [7]. То обстоятельство, что в рассмотренном нами случае $w_{\chi, s}^0 \sim \nu^{-7}$, позволяет по измеренной частотной зависимости спектров определить, какой механизм рассеяния — на турбулентностях тропосферы или на неровностях морской поверхности — является основной причиной флуктуаций принимаемого сигнала.

Введем функцию когерентности флуктуаций уровня и фазы частотно-разнесенных сигналов с помощью соотношений

$$\Gamma_\chi = \frac{|w_\chi|}{\sqrt{w_\chi^0(\omega_1) w_\chi^0(\omega_2)}}, \quad \Gamma_s = \frac{|w_s|}{\sqrt{w_s^0(\omega_1) w_s^0(\omega_2)}}. \quad (26)$$

Для медленных и быстрых флуктуаций получаем соответственно

$$\begin{aligned} \varphi^4 \Omega \ll 1: \quad \Gamma_\chi = \Gamma_s &= 1, \\ \varphi^4 \Omega \gg 1: \quad \Gamma_\chi = \Gamma_s &= \sqrt{\frac{\pi}{\varphi^2}} \left[\frac{\cos \frac{\varphi^4 \Omega - \pi}{4}}{\sqrt{\frac{\Omega}{\varphi}}} \mp \cos \frac{\frac{\varphi^4 - \pi}{4}}{\sqrt{\frac{\Omega}{\varphi}}} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) видно, что в области высокочастотных флуктуаций $\varphi^4 \Omega \gg 1$ функции когерентности спадают до нуля пропорционально φ^{-2} . Таким образом, при фиксированной разности частот Ω флуктуации уровня и фазы декоррелируют при $\varphi \geqslant 1/\sqrt[4]{\Omega}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970
2. Сб. Ветровые волны, пер. с англ. под ред. Ю. М. Крылова, ИЛ, М., 1962.
3. F. G. Bass, V. D. Freulicher, I. M. Fuks, IEEE Trans. on AP, AP-22, № 2, 278 (1974).
4. F. G. Bass, V. D. Freulicher, I. M. Fuks, IEEE Trans. on AP, AP-22, № 2, 288 (1974).
5. В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
6. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Распространение волн над статистически неровной поверхностью, изд. Наука, М., 1972
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

**PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A SEA-TROPOSPHERE
WAVEGUIDE***V. D. Freilitkher, I. M. Fuks*

The influence of the sea roughness on the parameters of a signal propagating in a sea-troposphere waveguide is studied. The decrement of attenuation in such a waveguide is calculated. It is shown that for a certain parameter relation the presence of roughnesses leads to a decrease in attenuation as compared with a smooth waveguide. Correlation characteristics of amplitude and phase fluctuations in the presence of two frequency-spaced sources are studied.

УДК 551.550.5

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОКОН ПРОЗРАЧНОСТИ АТМОСФЕРЫ В ДИАПАЗОНЕ 300—700 мк

[А. В. Поваров, В. Я. Рядов, Б. А. Свердлов, Н. И. Фурашов]

С помощью перестраиваемого по частоте электронного генератора (ЛОВ) выполнены измерения коэффициента поглощения водяного пара в пяти окнах прозрачности атмосферы. Измерения проводились в полевых условиях методом изменяющейся влажности при базовом расстоянии 220 м. Полученные результаты сопоставлены с теоретическими расчетами и данными других измерений. Обсуждается вопрос о возможной причине наблюдаемого для некоторых окон превышения измеренных коэффициентов поглощения над расчетными.

В средневолновой части субмиллиметрового диапазона атмосфера имеет окна относительной прозрачности, центрированные к $\lambda = 322, 350, 450, 492$ и 647 мк . Качественно картина спектра водяного пара, который определяет здесь молекулярное поглощение, была многократно получена спектроскопическими методами сравнительно давно (см., например, [1, 2]). Первые количественные измерения поглощения в субмиллиметровых окнах прозрачности были выполнены в [3], однако точность их оказалась неудовлетворительной. В последующем с использованием, как и в [3], вакуумного эшелеттного спектрометра были выполнены измерения [4]. Несмотря на их более высокую в сравнении с [3] точность данные для окон $\lambda = 350, 450$ и 647 мк , как отмечалось в [4], недостаточно надежны, что связано с трудностью измерения небольшого поглощения на малом оптическом пути спектрометра ($R = 5,5 \text{ м}$). На значительно большем базовом расстоянии ($R \leq 250 \text{ м}$) проводились полевые измерения [5], в которых, в частности, были получены более точные данные о поглощении в окнах $\lambda = 350$ и 450 мк . В этих же двух окнах были затем проведены исследования [6, 7] на установке с многоходовой кюветой и эшелеттным спектрометром. Наконец, с помощью интерференционных спектрометров коэффициенты поглощения в окнах прозрачности измерялись в [8], а также в [9*].

Особенностью перечисленных выше измерений является использование маломощных тепловых источников, что существенно ограничивает возможности эксперимента из-за небольшой величины отношения сигнал/шум и недостаточно высокого (обычно $\sim 0,5 - 1 \text{ см}^{-1}$) спектрального разрешения. Когерентный источник был применен лишь в работе [12], в которой измерено поглощение на склоне окна $\lambda = 350 \text{ мк}$ при помощи лазера.

В настоящей работе приводится описание измерений с электронным генератором типа ЛОВ [13], широкий диапазон частотной перестройки которого позволил получить сведения о спектральном распределении коэффициента поглощения. Предварительные результаты для окон прозрачности диапазона 300—500 мк сообщались ранее в [14].

* Результаты своих первых измерений авторы [9] приводили в работах [10, 11], однако в них не указаны значения абсолютной влажности и температуры, которым соответствуют полученные данные.

АППАРАТУРА, МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения выполнялись в 1970 и 1972 гг. в полевых условиях на загородном полигоне НИРФИ «Зименки» методом изменяющейся влажности. Расстояние между передатчиком и приемником $R = 220$ м.

Оптическая схема передающего устройства приведена на рис. 1. Антенной служила тефлоновая линза (3) диаметром 200 мм, которая облучалась из прямоугольного волновода ЛОВ (1). Модуляция сигнала осуществлялась обтюратором (2), представлявшим собой стеклянный полуцилиндр с металлизированной поверхностью.

Отраженное от нее в каждый полупериод излучение использовалось для контроля уровня излучаемого сигнала. Часть установки, включающая в себя элементы схемы (2), (4) — (8) (4 — плоское зеркало, 5 — тефлоновая линза, 6 — приемник ОАП-4, 7 — эталонный источник, 8 — модулятор), а также усилительно-регистрирующую аппаратуру приемника (6), является измерителем относительного уровня излучаемой мощности.

Калибровка чувствительности измерителя мощности проводилась по эталонному сигналу, которым служило ИК излучение лампы накаливания (7).

Для приема сигналов использовался радиометр с пневматическим индикатором ОАП-4, установленным в фокусе приемной параболической антенны диаметром 900 мм. Опорное напряжение для синхронного детектора радиометра поступало с модулятора (2). Калибровка чувствительности приемного устройства проводилась тем же способом, что и калибровка измерителя мощности передатчика.

Длина волны измерялась интерферометром Фабри—Перо с отражателями в виде проволочных решеток. Точность измерений — около 0,03%.

Измерения абсолютной влажности воздуха проводились одновременно несколькими аспирационными психрометрами вблизи трассы сигнала.

В процессе измерений запись сигналов осуществлялась при непрерывном автоматическом изменении частоты генератора. В дальнейшем при обработке экспериментального материала зависимость принимаемого сигнала I от влажности воздуха ρ определялась на выбранных фиксированных волнах (соответствующих пикам генерации ЛОВ).

Обработка измерений проводилась методом наименьших квадратов с использованием для аппроксимации экспериментальной зависимости $\ln I(\rho)$ линейной функции вида $\ln I = A - B\rho$. Как показывает рассмотрение [15], при таком способе обработки могут быть получены данные о суммарном коэффициенте поглощения мономеров и димеров водяного пара для влажности $\rho = \rho^*$:

$$\Gamma_{\text{в.п.}}(\rho^*) = \Gamma_m(\rho^*) + \Gamma_d(\rho^*) = 4,34 \frac{B}{R} \rho^* \left[\frac{\partial B}{\partial \rho} \right], \quad (1)$$

где $\rho^* = 2\rho_{\text{ср}}$, $\rho_{\text{ср}}$ — среднее значение влажности при измерениях. То, что найденное значение $\Gamma_{\text{в.п.}}$ относится к определенной влажности ρ^* , связано с учетом нелинейности в зависимости $\Gamma_{\text{в.п.}}$ от ρ , обусловленной самошиирением линий мономеров H_2O и поглощением димерами $(\text{H}_2\text{O})_2$. В [15] была рассмотрена возможность использования для

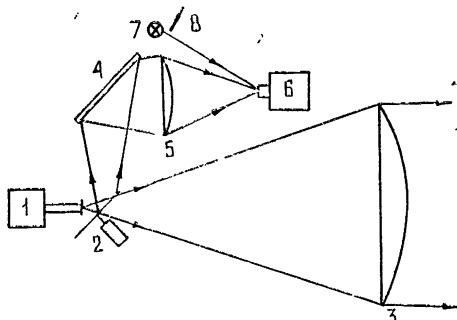


Рис. 1.

обработки данных нелинейной аппроксимирующей функции, что позволяет, в принципе, получить сведения о поглощении мономерами и димерами раздельно. Однако в данном случае применение такого более общего способа для раздельного определения коэффициентов Γ_m и Γ_d не представляется целесообразным. Действительно, поскольку во всех окнах диапазона 300—700 мкм вклад димеров в суммарный коэффициент $\Gamma_{v,p}$ мал (согласно расчетам [16] он не превышает 7%), то величина Γ_d вследствие погрешности измерений не может быть определена с удовлетворительной точностью.

В связи с тем, что на результаты измерений сигнала оказывают влияние изменения температуры T и давления сухого воздуха P , сопутствующие изменениям влажности, то для учета этого влияния при обработке данных в аппроксимирующую функцию должны быть введены соответствующие зависимости от T и P . Так как относительные изменения T и P невелики, и поскольку линейно зависящая от ρ часть коэффициента поглощения $\Gamma_{v,p}$ в рассматриваемом диапазоне много больше нелинейной, то достаточно воспользоваться зависимостями от T и P лишь линейной части Γ_m . Таким образом, в качестве аппроксимирующей функции имеем выражение

$$\ln I = A - B \left(\frac{T}{T_{cp}} \right)^{-N} \frac{P}{P_{cp}} \rho, \quad (2)$$

где T_{cp} и P_{cp} — средние при измерениях температура и давление.

Температурный показатель N для различных длин волн определялся на основании расчетов мономерного поглощения для двух температур ($T=263$ и 293 К). При-

мер зависимости $N(\lambda)$ для одного из окон ($\lambda=647$ мкм) показан на рис. 2 (сплошная линия).

Определенный с помощью (2) параметр B дает коэффициент поглощения $\Gamma_{v,p}$, относящийся к ρ^* , T_{cp} , P_{cp} .

Для сравнения результатов, полученных в различных сериях измерений, между собой, а также с теоретическими данными экспериментальные коэффициенты поглощения $\Gamma_{v,p}(\rho^*, T_{cp}, P_{cp})$ были пересчитаны к одним и тем же, стандартным условиям: $\rho_0 = 7,5$ г/м³, $T_0 = 293$ К, $P_0 = 752$ мм. рт. ст. (атмосферное давление $P_{atm} = 760$ мм рт. ст.). Некоторая трудность пересчета связана с неопределенностью величины димерного поглощения. Поэтому он выполнялся двумя способами.

При первом вкладом димерной компоненты пренебрегалось, т. е. все измеренное поглощение полагалось равным мономерному. Пересчет выполнялся по формуле

$$\Gamma_m(\rho_0, T_0, P_0) = \Gamma_m(\rho^*, T_{cp}, P_{cp}) \frac{\rho_0}{\rho^*} \frac{P_0}{P_{cp}} \left(\frac{T_0}{T_{cp}} \right)^{-N} \frac{1 + \alpha \sigma_{eff} \frac{T_0}{P_0} \rho_0}{1 + \alpha \sigma_{eff} \frac{T_{cp}}{P_{cp}} \rho^*}, \quad (3)$$

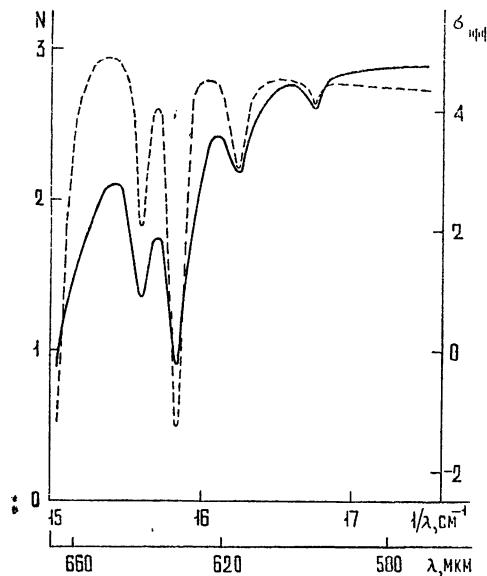


Рис. 2.

где a — постоянный коэффициент, равный $3,46 \cdot 10^{-3} \text{ tor} \cdot \text{м}^3/\text{г} \cdot \text{К}$. Значения $\sigma_{\text{эфф}}$ — эффективного параметра самошиирения линий H_2O — определялись для различных длин волн на основании (3) и данных теоретического расчета мономерного поглощения при двух значениях влажности ($\rho = 7,5$ и $15 \text{ г}/\text{м}^3$) и одинаковых температуре T_0 и давлении P_0 . В качестве примера на рис. 2 пунктиром показана зависимость $\sigma_{\text{эфф}}(\lambda)$ для окна $\lambda = 647 \mu\text{мк}$.

При другом пересчете коэффициент поглощения димеров в соответствии с экспериментальными результатами [15, 17] принимался в 2,5 раза меньшим рассчитанного в [16]. Как оказалось, пересчет обоими способами приводит к очень близким результатам. Даже для центров окон, где относительный вклад димеров в $\Gamma_{\text{в.п.}}$ максимален, их отличие не превышает 3%.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Экспериментальные значения коэффициента поглощения для окон прозрачности диапазона 300—700 $\mu\text{мк}$ показаны на рис. 3 а, б, в. Разными знаками на них отмечены результаты различных серий измерений. Сплошными линиями на рисунках приведены теоретические коэффициенты поглощения мономеров, найденные с помощью расчетной формулы работы [18]. Полуширины линий H_2O в воздухе находились с помощью выражения

$$\Delta v_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{возд.}} = \Delta v_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{сух. возд.}} P \left(\frac{T}{300} \right)^{-n_{ij}} + \Delta v_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}} P_{\text{H}_2\text{O}} \left(\frac{T}{300} \right)^{-m_{ij}}. \quad (4)$$

В качестве $\Delta v_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{сух. возд.}}$ были приняты табличные данные [10]. Хотя в [19] они и указаны как полуширины $\Delta v_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}$, однако, согласно ревизии в [20], в действительности их следует рассматривать как значения $\Delta v_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{сух. возд.}}$. Полуширины $\Delta v_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}$ брались из работы [20]. Из тех же работ [19, 20] взяты значения температурных показателей n_{ij} и m_{ij} . Дипольный момент молекулы H_2O в расчетах был принят равным $1,8546 \cdot 10^{-18} \text{ CGSE}$ [21, 22]. Остальные параметры, входящие в расчетную формулу, взяты теми же, что и в [18].

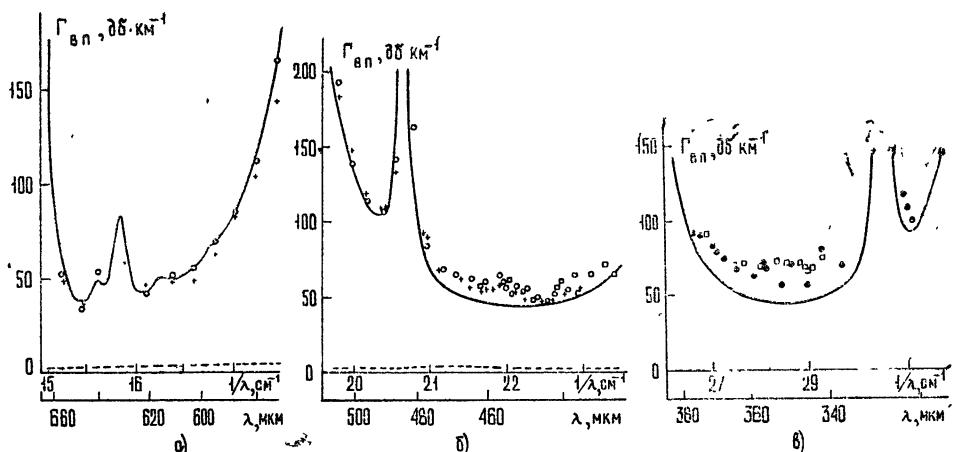


Рис. 3.

Пунктирными кривыми на рис. 3 а, б даны расчетные коэффициенты поглощения димеров согласно [16] (на рис. 3 в такая кривая отсутствует, поскольку коэффициент Γ_d в этом участке составляет всего $\sim 1 \text{ dB/km}$).

Сопоставление результатов измерений с расчетными данными для Γ_m ($\rho = 7,5 \text{ g/cm}^3$, $T = 293 \text{ K}$, $P_{\text{атм}} = 760 \text{ mm rt. st.}$), проведенное на рис. 3 а, б, в, показывает, что для окон $\lambda = 647$ и 492 мк они в пределах экспериментального разброса совпадают. В остальных трех окнах измеренное поглощение превышает расчетное. Особенно это относится к окну $\lambda = 350 \text{ мк}$: если в окнах $\lambda = 322$ и 450 мк превышение составляет соответственно $10 - 15\%$ и $15 - 20\%$, то здесь оно возрастает до $\sim 40\%$. Заметим, что если сопоставление эксперимента с теорией проводить с учетом димерного поглощения, приняв его в 2,5 раза меньшим рассчитанного в [16] (см. выше), то и в этом случае ситуация по окнам прозрачности сохраняется.

Этот несколько неожиданный результат эксперимента может получить простое объяснение, если предположить, что используемая в теоретических расчетах форма спектральной линии в своих далеких крыльях отлична от истинной. Действительно, как показали проведенные расчеты, вклад далеких крыльев в поглощение в окнах прозрачности неодинаков. Если в окнах $\lambda = 647$ и 492 мк поглощение в основном определяется соседними близко расположенным линиями ($|\nu - \nu_i| \leq 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$) и вклад крыльев далеких линий в них не превышает 10% , то в окнах $\lambda = 450$ и 322 мк он составляет $20 - 25\%$, а в окне $\lambda = 350 \text{ мк}$ уже достигает $\sim 60\%$.

Остановимся еще на картине полученного в эксперименте спектрального распределения коэффициента поглощения в окне $\lambda = 450 \text{ мк}$ (рис. 3 б). Обращает на себя внимание то, что ход экспериментальных точек дает намек на существование некоторой особенности в поглощении вблизи $1/\lambda = 21,95 \text{ см}^{-1}$. Эта особенность в той или иной мере проявляется во всех трех сериях измерений. Поскольку измерения выполнялись методом вариации влажности, то она, очевидно, обусловлена поглощением в парах воды. Согласно теоретическим представлениям, такая особенность в спектре поглощения водяного пара может принадлежать либо спектру димеров [16], либо вращательному спектру мономеров в возбужденном колебательном состоянии [23]. Некоторое предпочтение можно отдать второму, поскольку характеристики наблюдаемой особенности — полуширина $\Delta\nu \sim 0,1 \text{ см}^{-1}$ и интенсивность $\Gamma \sim 10 \text{ dB/km}$ — ближе к параметрам мономерной линии вращательного перехода $1_1 - 1_1$ с возбужденным колебательным состоянием (для нее $\Delta\nu \approx 0,1 \text{ см}^{-1}$ и $\Gamma \approx 10 \text{ dB/km}$ [23], а для пулька Q-ветви димеров $\Delta\nu \geq 0,4 \text{ см}^{-1}$ и $\Gamma \leq 4 \text{ dB/km}$ [16]).

В заключение сравним полученные данные с результатами других измерений. Для центров окон сопоставление производится в таблице. При составлении ее данные работы [8], относящиеся к сухому воздуху и $T = 296 \text{ K}$, были пересчитаны с учетом самоуширения к $\rho_0 = 7,5 \text{ g/cm}^3$ и $T_0 = 293 \text{ K}$. Результаты измерений [4, 5], при обработке которых ранее не учитывалось самоуширение и изменения T и P в процессе эксперимента, были пересмотрены в соответствии с методикой, изложенной в [15]. Однако результатирующие поправки оказались несущественными.

Таблица 1

Коэффициенты поглощения водяного пара в атмосферных окнах прозрачности
($\rho = 7,5 \text{ г/м}^3$, $T = 293 \text{ К}$, $P_{\text{атм}} = 760 \text{ мм рт. ст.}$)

$\lambda, \mu\text{к}$	322	350	450	492	647	Источник
$\Gamma_{\text{в.п.}}^{\text{эксп}}, \frac{\partial B}{\text{км}}$	106 ± 7	75 ± 8	84 ± 10		79 ± 10	[4]
	108 ± 10	63 ± 4	65 ± 5		35 ± 4	[5]
	102 ± 16	57 ± 7	63 ± 5	94 ± 16	46	[8]
	103 ± 6	77 ± 16	66 ± 15	106 ± 4	35 ± 4	[6]
$\Gamma_{\text{теор.}}^{\text{в.п.}}, \frac{\partial B}{\text{км}}$	92	44,7	42,6	104	38,4	настоящая работа
	~ 1	1,2	2,7	3,0	2,3	[16]

Как видно из таблицы, результаты настоящей работы в основном хорошо согласуются с данными других измерений (кроме данных работы [4], о недостаточной точности которых для окон $\lambda > 350 \mu\text{к}$ уже говорилось выше). Исключение составляет окно $\lambda = 450 \mu\text{к}$, для которого нами получено значение $\Gamma_{\text{в.п.}}^{\text{эксп}}$ заметно меньшее, чем в других работах. Возможно, это объясняется сравнительно невысоким разрешением спектроскопической аппаратуры, использовавшейся в других измерениях, при которой, в частности, некоторый вклад в измеренное поглощение могла дать линия, наблюдаемая вблизи $1/\lambda = 21,95 \text{ см}^{-1}$. Из рис. 3 б видно, что если усреднение проводить по всем экспериментальным точкам, не выделяя особенность $1/\lambda = 21,95 \text{ см}^{-1}$, то это даст значение $\Gamma_{\text{в.п.}}^{\text{эксп}}$, примерно на 5 $\text{dB}/\text{км}$ большее указанного нами в таблице.

Кроме содержащихся в таблице данных для центров окон прозрачности имеются еще данные измерений поглощения на волнах $\lambda = 337 \mu\text{к}$ [12] и $\lambda = 500 \mu\text{к}$ [8, 24], приходящихся на склоны окон. Результаты наших измерений неплохо согласуются с данными [8, 12]. Измерения же [24] дали примерно в 1,6 раза больший коэффициент поглощения, который следует считать завышенным.

Авторы выражают благодарность Ю. Н. Тихомирову и Н. И. Шашкину за помощь при измерениях, М. Б. Зиничевой, выполнившей расчеты на ЭВМ, и С. А. Жевакину за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Genzel, W. Eckhardt, Zs. Physik, 139, 578 (1954).
2. H. A. Gebbie, Phys. Rev., 107, № 4, 1194 (1957).
3. Н. Г. Ярославский, А. Е. Станевич, Оптика и спектроскопия, 6, 799 (1959); 7, 626 (1959).
4. Н. И. Фуршов, Оптика и спектроскопия, 20, № 3, 427 (1966).
5. В. Я. Рядов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электронника, 11, № 6, 1037 (1966).
6. К. А. Аганбекян, А. Ю. Зражевский, М. А. Колосов, А. В. Соколов, в сб. IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, ч. 2, Харьков, 1969, стр. 126.
7. К. А. Аганбекян, А. Ю. Зражевский, М. А. Колосов, А. В. Соколов, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1564 (1971).
8. D. E. Burge, JOSA, 58, № 10, 1383 (1968).

9. A. P. Sheppard, K. H. Breeden, A. McSweeney, Proc. of the symposium on submillimeter waves, 20, N. Y., 1970, p. 445.
10. K. H. Breeden, W. K. Rivers, A. P. Sheppard, Electronics Letters, 2, № 3, 88 (1966).
11. K. H. Breeden, A. P. Sheppard, Conference on tropospheric wave propagation, 30-th September—2-nd October 1968; IEE Conference publication, № 48, p. 159.
12. J. R. Birch, W. J. Burroughs, R. J. Emery, Infrared Phys., 9, № 2, 75 (1969).
13. М. Б. Голант, З. Т. Алексеенко, З. С. Короткова, Л. А. Лупкина, А. А. Негирев, О. П. Петрова, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 3, 231 (1969).
14. В. Я. Рядов, И. И. Фурашов, в сб. Х Всесоюзной конференции по распространению радиоволны, секция IV, стр. 48, изд. Наука, М., 1972.
15. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 10, 1475 (1972).
16. Л. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, 194, № 3, 540 (1970).
17. Л. М. Кукин, Ю. Н. Ноздрин, В. Я. Рядов, Л. И. Федосеев, Н. И. Фурашов, Радиотехника и электроника, 20, № 10, 2017 (1975).
18. С. Л. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
19. W. S. Benedict, L. D. Kaplan, J. Chem. Phys., 30, № 2, 388 (1959).
20. W. S. Benedict, L. D. Kaplan, JQSRT, 4, № 3, 453 (1964).
21. S. A. Clough, Y. Beers, G. P. Klein, L. S. Rothman, J. Chem. Phys., 59, № 5, 2254 (1973).
22. T. R. Dyke, J. S. Muentter, J. Chem. Phys., 59, № 6, 3125 (1973).
23. А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 8, 1015 (1967).
24. S. Y. Chang, J. D. Lester, Proc. IEEE, 54, № 4, 459 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
21 ноября 1974 г.

AN EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF ATMOSPHERIC TRANSPARENT WINDOWS OVER THE RANGE 300—700 mkm

| *A. V. Povarov*, *V. Ya. Ryadov*, *B. A. Sverdlov*, *N. I. Furashov*

The absorption coefficient of water vapour in five atmospheric transparent windows is measured using the frequency-retunable electron oscillator (TWT). Measurements are made under the field conditions by the changing-humidity method at the base distance 220 m. The results obtained are compared with theoretical calculations and other measurement data. The problem of a possible reason for an increase in the measured absorption coefficients compared with the calculations which is observed for some windows is discussed.

УДК 538.574

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РАЗМЕРНО-КВАНТОВАННЫХ ПЛЕНКАХ

Е. Н. Пелиновский, В. В. Соколов

Выведено приближенное уравнение для поля в системе, содержащей размерно-квантованные пленки. Дан анализ его решений, соответствующих различным режимам возбуждения системы. Показано, что в такой системе возможна генерация волн с широким когерентным спектром, в частности, стационарных видеоимпульсов—солитонов.

В настоящей работе изучаются возможности систем, содержащих размерно-квантованные пленки, для генерации электромагнитных волн с широким когерентным спектром. Очевидно, что процесс нелинейного взаимодействия, приводящий к существенному расширению спектра, будет эффективным только при малой дисперсии. Можно показать, что в волноводе, содержащем размерно-квантованную пленку, дисперсия мала на частотах сигнала, меньших ω_0 , где $\omega_0 = 3\hbar^2/2md^2$ — частота перехода между основным и ближайшим к нему уровнями размерного квантования, d — толщина пленки и m — эффективная масса свободных носителей заряда [1]. По порядку величины для пленки из InSb ω_0 не может превышать 10^{15} c^{-1} (считая $d \sim 10^{-6} \text{ см}$ и $m = 10^{-2} m_0$, где m_0 — масса электрона). Таким образом, имеется широкий диапазон частот (вплоть до субмиллиметрового), в котором дисперсия мала. Нелинейность, обусловленная квантованием энергетического спектра носителей тока, становится существенной при напряженностях электрического поля волны порядка нескольких единиц CGSE [2]: Такие поля легко достижимы, поэтому представляет интерес выяснить возможности использования размерно-квантованных пленок для целей генерации широкополосных, в том числе и видеоимпульсных, сигналов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов и определить форму сигнала конечной амплитуды, распространяющегося в пленке.

Пусть пленка помещена в плоскости симметрии полосовой линии, сечение которой существенно превышает сечение пленки (рис. 1, 1 — полосовая линия, 2 — диэлектрическое заполнение, 3 — размерно-квантованная пленка). В этом случае в пленке распространяется волна только типа ТЕМ. Вообще говоря, внесение пленки искажает структуру поля за счет токов, возникающих

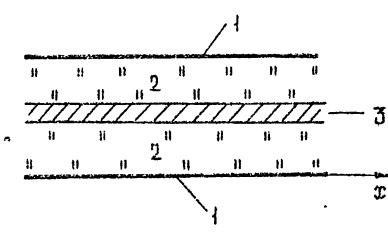


Рис. 1.

в ней. Кроме того, из-за квантования движения носителей электрическое поле в пленке неоднородно. Все же вклад неоднородности поля в дисперсионные характеристики системы, как следует из [3] мал, что позволяет в первом приближении при анализе ряда нелинейных явле-

ний считать поле однородным. Для нормальной к плоскости пленки компоненты электрического поля из уравнений Максвелла легко получить уравнение^{*}

$$\varepsilon_p \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P\{E\}}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial J\{E\}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где ε_p — диэлектрическая проницаемость решетки, P и J — поляризация и ток, функционально связанные с электрическим полем E . Спектральные выражения для P и J в линейном приближении для малых частот даны в [2, 4]:

$$P(\omega) = \chi_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) E(\omega), \quad J(\omega) = 2\gamma_0 \frac{\nu |\omega|}{\omega_0} E(\omega), \quad (2)$$

где χ_0 — статическая восприимчивость пленки и ν — частота столкновений электронов; предполагается, что $\nu \ll \omega_0$. Нелинейная часть поляризации вычислена в [2]:

$$P_{NL} = - \frac{\gamma_0 E^3(\omega)}{E_*^2} \quad (3)$$

(E_* — критическое поле). Из-за малости ν мы ограничиваемся линейным приближением для функционала тока. Применяя обратное преобразование Фурье к (2) с учетом (3), получаем выражения для $P\{E\}$ и $J\{E\}$, пригодные при малых, но конечных амплитудах в области низких частот:

$$P\{E\} = \chi_0 E - \frac{\chi_0}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \chi_0 \frac{E^3}{E_*^2}, \quad (4)$$

$$J\{E\} = \frac{2\nu \chi_0}{\pi \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{dt'}{t - t'},$$

Подставляя (4) в (1), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{4\pi \chi_0}{\omega_0^2} \frac{\partial^4 E}{\partial t^4} + \frac{4\pi \chi_0}{E_*^2} \frac{\partial^2 E^3}{\partial t^2} - \\ &- \frac{8\nu \chi_0}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E}{\partial t'} \frac{dt'}{t - t'}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_p + 4\pi \chi_0$. Члены, стоящие в правой части (5), ответственны соответственно за дисперсию, нелинейность и диссипацию. Считая их малыми, для волны, распространяющейся в одном направлении, из (5) можно получить приближенное уравнение (ср. [5]):

$$v \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}^3}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial \tau^3} + \frac{2\nu}{\pi \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{\tau - \tau'} = 0. \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{E} = E/E_*$, $\tau = x\sqrt{\varepsilon}/c - t$, $v = \sqrt{\varepsilon}c/2\pi\gamma_0$. Это уравнение описывает волну малой, но конечной амплитуды низкой частоты в раз-

* Поле в пленке предполагается пространственно-однородным в направлении нормали к ней.

мерно-квантованной пленке. Отметим, что (6) отличается от модифицированного уравнения Кортевега—де Бриза [6, 7] последним слагаемым, ответственным за диссипацию, причем мы предполагаем, что диссипация мала по сравнению с нелинейностью, т. е.

$$\frac{v}{\omega_0} \ll \mathcal{E}_0^2; \quad (7)$$

в противном случае нелинейные эффекты выражены слабо. Величина v/ω_0 является постоянной для пленки и определяется технологией ее изготовления. В частности, для пленки из InSb толщиной 10^{-6} см имеем $\omega_0 \sim 10^{15}$ с⁻¹ и $v \sim 10^{13}$ с⁻¹, так что (7) выполняется при $\mathcal{E}_0 > 0,1$.

Решение уравнения (6) определяется двумя независимыми параметрами: амплитудой \mathcal{E}_0 и частотой ω на входе полосковой линии. Мы рассмотрим сначала распространение низкочастотных сигналов, когда

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll \mathcal{E}_0^2, \quad (8)$$

т. е. на частотах ниже 10^{14} с⁻¹, если $\mathcal{E}_0 \sim 0,1$. В этом случае в (6) можно пренебречь двумя последними слагаемыми, и получаем уравнение

$$v \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + 3\mathcal{E}^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} = 0. \quad (9)$$

Будем считать, что из области $x < 0$ на полосковую линию с пленкой падает плоская волна, распространяющаяся вдоль x , так что при $x = 0$ поле имеет вид

$$\mathcal{E}(0, \tau) = \mathcal{E}_0 \sin \omega \tau. \quad (10)$$

Тогда при $x = 0$ решение (9) определяет простую волну:

$$\mathcal{E}(x, \tau) = \mathcal{E}_0 \sin \omega \left(\tau - \frac{3\mathcal{E}^2 x}{v} \right). \quad (11)$$

По мере распространения амплитуда волны остается постоянной, а ее профиль деформируется (рис. 2) вплоть до точки L_{NL} , в которой реше-

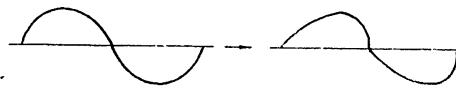


Рис. 2.

ние становится неоднозначным; возникает «ударная» электромагнитная волна (структура процесса при $x \sim L_{NL}$ обсуждается ниже). Расстояние L_{NL} , на котором образуется ударная волна, является важной характеристикой нелинейного процесса и находится из (11):

$$L_{NL} = \frac{v}{3\omega \mathcal{E}_0^2} = \frac{\sqrt{\epsilon} \lambda}{12\pi^2 \chi_0 \mathcal{E}_0^2}, \quad (12)$$

где λ — длина волны в вакууме. Как видно из (12), L_{NL} зависит как от параметров пленки, так и от амплитуды волны и ее частоты. Для пленки с указанными выше параметрами $L_{NL} \sim \lambda/\mathcal{E}_0^2$ и при $\mathcal{E}_0 \sim 0,3$ имеем $L_{NL} \approx 10 \lambda$. Заметим, что «удар» в точке $x = L_{NL}$ образуется

при значении поля $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 / \sqrt{2}$, а форма волны близка к синусоидальной. Это подтверждается спектральным представлением простой волны [8]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, \tau) = \mathcal{E}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} & \left\{ I_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{L_{NL}} \right] \times \right. \\ & \times \sin \left[(2n+1)\omega \left(\tau - \frac{x}{L_{NL}} \right) \right] + I_{n+1} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{L_{NL}} \right] \times \\ & \left. \times \cos \left[(2n+1)\omega \left(\tau - \frac{x}{L_{NL}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $I_n(z)$ — функция Бесселя. По мере распространения меняется как амплитудный, так и фазовый спектр. Величины высших гармоник, генерируемых из-за нелинейности, остаются малыми на расстояниях $x \leq L_{NL}$. Так, интенсивность третьей гармоники не превышает 4% от основной при $x = L_{NL}$, а пятой — 1% и т. д.

Вблизи $x = L_{NL}$ решение (11) несправедливо, что связано с неучетом отброшенных дисперсионных и диссипативных членов. Если частота достаточно мала ($\omega^2/\omega_0^2 \ll \nu/\omega_0$, или $\omega \ll 10^{13} \text{ c}^{-1}$), то в первую очередь необходимо учесть потери. В этом случае из (6) имеем уравнение

$$v \frac{d\mathcal{E}}{dx} + 3\mathcal{E}^2 \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} + \frac{2\nu}{\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau'} \frac{dx'}{\tau - \tau'} = 0. \quad (14)$$

Можно показать, что диссипация такого вида* не обеспечивает существования стационарной ударной волны, так что генерация высших гармоник происходит неограниченно. Влияние диссипации сводится к увеличению L_{NL}^{**} . К сожалению, расчеты величины L_{NL} здесь затруднены из-за сложного выражения для диссипативного члена. Ограничимся поэтому оценкой снизу, считая, что поглощение на всех частотах одинаково и таково же, как на основной частоте. Это позволяет аппроксимировать (14) следующим уравнением:

$$v \frac{d\mathcal{E}}{dx} + \frac{d\mathcal{E}^3}{d\tau} + \frac{2\nu\omega}{\omega_0} \mathcal{E} = 0. \quad (15)$$

Решение этого уравнения при граничном условии (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, \tau) = \mathcal{E}_0 \exp \left(-\frac{x}{L_n} \right) \sin \omega \left[\tau - \frac{3\omega_0}{4\omega} \mathcal{E}^2 \times \right. \\ \left. \times \left(\exp \left(\frac{2x}{L_n} \right) - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $L_n = \omega_0 v / 2\nu\omega$ — длина затухания монохроматической волны на частоте ω в линейной теории. С помощью (16) находим, что длина опрокидывания с учетом поглощения $L_{NL}^{(1)}$ зависит от соотношения между L_{NL} и L_n :

* Аналогичный диссипативный член описывает затухание Ландау в плазме [9].

** Если ν велико ($\nu/\omega_0 \sim \mathcal{E}_0^2$), то ударная волна вообще не образуется (ср. [10]). При этом нелинейные эффекты малы.

$$L_{NL}^{(1)} = -\frac{1}{2} L_n \ln \left(1 - 2 \frac{L_{NL}}{L_n} \right). \quad (17)$$

Формула (17) дает заниженную оценку для L_{NL} . Отсюда, кстати, получаем оценку для величины \mathcal{E}_{kp} , при которой диссипация не препятствует образованию ударной волны:

$$\mathcal{E}_{kp} = \sqrt{\frac{4v}{3\omega_0}}. \quad (18)$$

Для приведенных выше параметров пленки имеем $\mathcal{E}_{kp} \sim 0,14$. Подчеркнем, что оценка (18) занижена, так как на самом деле потери растут с увеличением номера генерируемых гармоник.

Таким образом, учет потерь не приводит к ограничению ширины фронта волны (или передачу энергии вверх по спектру), а только замедляет процесс нелинейного взаимодействия, так что необходимо учитывать дисперсию* и анализ процесса проводить по основе (6). Чтобы представить возможный ход процесса, исследуем вначале волны с достаточно большой частотой ($\omega \gg \sqrt{\omega_0}$), для которых диссипация мала по сравнению с дисперсией. Тогда (6) сводится к модифицированному уравнению Кортевега—де Вриза (ср. [6, 7]):

$$v \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}^3}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial \tau^3} = 0. \quad (19)$$

Совместное действие нелинейности и дисперсии обуславливает существование стационарных импульсов конечной энергии—солитонов, описываемых решением вида**

$$\mathcal{E}(x, \tau) = \pm \mathcal{E}_0 \operatorname{sech} \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0}{\sqrt{2}} \left(\tau - \frac{\mathcal{E}_0^2 x}{2v} \right), \quad (20)$$

где \mathcal{E}_0 —произвольная амплитуда импульса (рис. 3). Характерная длительность солитона на уровне 0,5 составляет

$$T_c \approx \frac{3,72}{\omega_0 \mathcal{E}_0}. \quad (21)$$

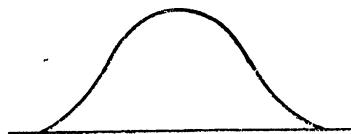


Рис. 3.

Величина $T_c \mathcal{E}_0$ определяется только параметрами пленки. Например, для пленки $d \sim 10^{-6} \text{ см}$ имеем $T_c \mathcal{E}_0 \sim 0,5 \cdot 10^{14} \text{ с}$. Нелинейность оказывается также на изменении скорости волны

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \left(1 + \frac{\pi \lambda_0 \mathcal{E}_0^2}{\epsilon} \right). \quad (22)$$

Наконец, приведем выражение для плотности энергии на единицу площади поперечного сечения, заключенной в солитоне,

* Можно показать, что следующий член в разложении $J\{E\}$, дающий дисперсию поглощения и обеспечивающий конечность ширины фронта волны, имеет порядок $v \omega^2 / \omega_0^3$ и мал по сравнению с дисперсионным в $P\{E\}$.

** Наряду с уединенными волнами имеются также стационарные решения в виде периодических волн несинусоидальной формы, описываемых эллиптическими функциями Якоби

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{6\pi} \frac{\mathcal{E}_0 E_*^2 c V \varepsilon}{\omega_0}. \quad (23)$$

Как видим, энергиярастет линейно с амплитудой волны, причем для выбранных ранее параметров пленки $W/\mathcal{E}_0 \approx 10 \text{ эрг/см}^2$.

Наряду с (20) могут быть получены N -солитонные решения, описывающие взаимодействия N видеоимпульсов [6]. Эти решения играют важную роль в теории нестационарных процессов. Так, если на вход подается видеоимпульс с длительностью, значительно превышающей T_c (но меньшей, чем $(\omega_0)^{-1}$, чтобы можно было пренебречь потерями), то на первом этапе он деформируется как простая волна (см. (11)), а затем вблизи L_{NL} на фронте импульса развиваются осцилляции и в дальнейшем волна стремится к N -солитонному решению, причем солитоны расходятся между собой. Если на вход подается периодический сигнал, то на первом этапе эволюция периодической волны аналогична эволюции импульса (вплоть до образования солитонов), а затем волна принимает свою первоначальную форму; далее процесс периодически повторяется*.

В случаях, когда дисперсия и поглощение существенны, анализ процесса связан с решением уравнения (6). Очевидно, что диссипация приводит не только к замедлению процесса трансформации волны в последовательность солитонов, но и к перестройке структуры волны: асимметрии формы импульса, его уширению и т. д. (ср. [13]). Если, однако, диссипация мала (по сравнению с нелинейностью и дисперсией), то она не оказывается на структуре волны, а приводит лишь к медленному изменению параметров квазистационарной волны. В частности, используя результаты аналогичной задачи для уравнения Кортевега—де Вриза [14], получаем формулу для амплитуды солитона:

$$\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}_0(0) \left[1 + \frac{\nu q \mathcal{E}_0(0) x}{v} \right]^{-1}, \quad (24)$$

где

$$q = -\frac{3}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_2 \frac{\operatorname{sech} \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} \frac{d \operatorname{sech} \zeta_2}{d\zeta_2} \approx 4.$$

Как следует из (24), затухание существенно не экспоненциально. Характерная длина затухания равна $L_c \sim v/\nu q \mathcal{E}_0$. Заметим, что на больших расстояниях солитон «забывает» начальную амплитуду

$$\mathcal{E}_0(x) \approx \frac{v}{\nu q x}, \quad (25)$$

и, следовательно, существует предел для передачи мощности через длинные пленки.

В заключение подчеркнем, что для реализации существенно нелинейных волн в пленке нужна достаточная малость величины ν/ω_0 . Частоту ω_0 увеличить не удается, так как толщина пленки должна быть много больше межатомных расстояний. Можно уменьшить ν за счет

* Отметим, что исследование эволюции периодической волны в рамках (19) не проводилось. Такой анализ был проделан только для уравнения Кортевега—де Вриза [11, 12]. Поскольку эволюция импульсных возмущений в обоих случаях качественно одинакова, можно надеяться, что эта аналогия имеет место и для периодической волны.

улучшения технологии изготовления плёнок до величины порядка 10^{11} c^{-1} . Тогда в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах можно получить генерацию когерентных волн с широким спектром, используя монохроматический источник на низкой частоте ($\omega \gg \nu$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Тавгер, В. Я. Демиховский, УФН, **96**, 61 (1968).
2. В. Н. Генкин, Ю. А. Романов, В. В. Соколов, ФТТ, **13**, № 8, 2502 (1971).
3. В. Н. Генкин, В. В. Соколов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **17**, № 5, 770 (1974).
4. А. Я. Шик, ЖЭТФ, **56**, 1737 (1969).
5. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ПММ, **38**, № 1, 122 (1974).
6. M. Wadati, J. Phys. Soc. Japan, **34**, № 5, 1289 (1973).
7. Т. Л. Перельман, А. Х. Фридман, М. М. Ельяшевич, ЖЭТФ, **66**, № 4, 1316 (1974); Письма в ЖЭТФ, **19**, № 6, 342 (1974).
8. Е. Н. Пелиновский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **19**, № 3, 373 (1976).
9. E. Ott, R. N. Sudan, Phys. Fluids, **12**, № 11, 2388 (1969).
10. D. Pfirsch, R. N. Sudan, Phys. Fluids, **14**, № 5, 1033 (1971).
11. N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett., **15**, № 6, 240 (1965).
12. F. D. Tappert, C. N. Judice, Phys. Rev. Lett., **29**, № 19, 1308 (1972).
13. Л. А. Островский, В. В. Панко, Е. Н. Пелиновский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 4, 580 (1972).
14. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, **2**, 68 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 августа 1974 г.

NONLINEAR THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN DIMENSIONAL-QUANTUM FILMS

E. N. Pelinovskii, V. V. Sokolov

An approximate equation is deduced for the field in the system containing dimensional-quantum films. The analysis of its solutions corresponding to different regimes of the system excitation is given. It is shown that in such a system the wave generation with a wide coherent spectrum may be, in particular, stationary video pulses—solitons.

УДК 621.383.45

СВЧ ПРИЕМНИК С ДЖОЗЕФСОНОВСКИМ ДЕТЕКТОРОМ В РЕЖИМЕ САМОСЕЛЕКЦИИ

В. А. Куликов, К. К. Лихарев

Развита теория СВЧ приемника, в котором отклик джозефсоновского детектора, работающего в режиме самоселекции, снимается на промежуточной частоте (ПЧ). Вычислённая форма отклика на монохроматический сигнал близка к полученной экспериментально в [3], а также в наших экспериментах. Эти эксперименты проводились с приемником 8-миллиметрового диапазона с промежуточной частотой 25 GHz , в котором были использованы точечные контакты Nb — Nb, работающие при температуре 4,2 K.

Как показывают расчеты и эксперимент, схема приемника с ПЧ позволяет при правильном выборе его параметров практически не вносить дополнительный шум при обработке сигнала и достичь значения пороговой мощности (NEP) лишь на два порядка хуже предельного, вычисленного Лихаревым и Семеновым ($\sim 10^{-17}\text{ Bm/GHz}^{1/2}$). Экспериментально получено значение $NEP \sim 10^{-13}\text{ Bm/GHz}^{1/2}$ при входной полосе $\sim 1\text{ GHz}$. Это значение можно сравнительно легко улучшить на два порядка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее интересных свойств детекторов на джозефсоновых контактах сверхпроводников является их способность работать в режиме самоселекции. В этом режиме используется специфическая зависимость отклика контакта, т. е. изменение $\delta \bar{V}$ среднего напряжения \bar{V} на нем* при СВЧ облучении, от величины \bar{V} (рис. 1 а). Именно, если флуктуации в контакте не слишком велики, то ширина $2\Gamma_V$ области напряжений, в которой проявляется отклик на монохроматический входной сигнал частоты ω_h , мала ($\Gamma_V \ll \bar{V}$). Эта область локализована вокруг джозефсоновского значения $\bar{V} = V_\omega$:

$$V_\omega = \Phi_0 \omega_h / 2\pi, \quad (1)$$

где $\Phi_0 = \pi h/e$ — квант потока.

Если, кроме того, мощность P внешнего излучения меньше мощности насыщения P_s , то отклик детектора является квадратичным:

$$\delta \bar{V}(P) = \eta(\bar{V}, \omega_h) P, \quad (2)$$

и аддитивным:

$$\delta \bar{V} \left(\int S_P(\omega_h) d\omega_h \right) = \int \eta(\bar{V}, \omega_h) S_P(\omega_h) d\omega_h. \quad (3)$$

Поэтому если входные СВЧ цепи приемника на таком детекторе достаточно широкополосны, то положение центра узкой полосы принимаемых приемником частот (ее ширина совпадает с шириной линии собственной джозефсоновской генерации контакта)

* Имеется в виду усреднение по СВЧ джозефсоновским колебаниям.

$$H_h = 2\Gamma_V(2\pi/\Phi_0) \quad (H_h \ll \omega_h) \quad (4)$$

можно перестраивать просто изменением смещения на контакте.

Режим самоселекции может быть с успехом использован для спектрального анализа слабых СВЧ сигналов [1-5]. Как показывают расчеты, пороговая мощность (NEP) такого простого приемника может быть сделана примерно столь же малой, как и других, более сложных приемников на джозефсоновских контактах.

Невыясненными, однако, оставались требования к параметрам применяемых контактов и следующих каскадов приемника, выполнение которых позволило бы реализовать такие значения NEP. Эти требования существенно зависят от схемы обработки сигнала отклика в приемнике. Известны две таких схемы.

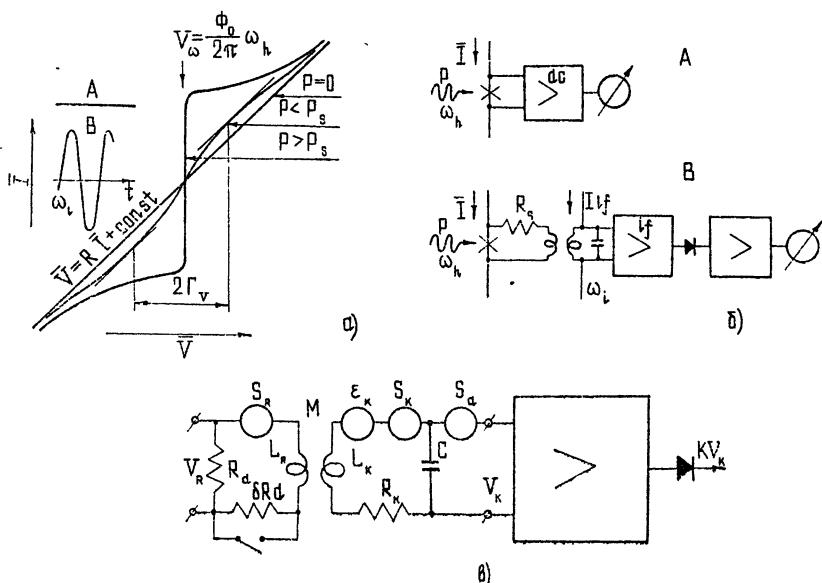


Рис. 1. а) Вид участка вольт-амперной характеристики V_ω при разных значениях мощности монохроматического СВЧ сигнала ($P = 0$, $P < P_s$, $P > P_s$). Показаны два возможных способа измерения отклика: на постоянном токе (A) и на промежуточной частоте (B); б) блок-схемы приемников, осуществляющих эти способы измерения отклика; в) эквивалентная схема приемника по промежуточной частоте.

В первой из них (рис. 1 а) ток смещения через контакт постоянен, а отклик измеряется низкочастотной схемой [4]. При второй схеме (рис. 1 в) на постоянный ток смещения через контакт накладывается ток промежуточной частоты (ПЧ) $\omega_i \ll \omega_h$. При этом с контакта снижается напряжение ПЧ, которое детектируется после усиления обычным детектором [1-3, 5].

Принципиальным достоинством схемы с ПЧ (схемы с кросс-модуляцией) является то, что NEP обусловливается компонентами шума контакта с частотами вблизи ω_i . Выбирая частоту ω_i достаточно высокой,

$$\omega_i \gg \omega_f \quad (5)$$

(где ω_f — частота среза избыточных шумов типа $1/f$, которая может доходить до величины $\sim 10^5$ Гц), можно избежать ухудшения NEP из-за этих шумов.

Кроме этого, первичная обмотка трансформатора ПЧ (рис. 1 в) при достаточно малой ее индуктивности L_R шунтирует низкочастотные внешние наводки на контакт, предотвращая тем самым паразитное увеличение $\Gamma_V(H_h)$ и NEP из-за этих шумов.

Чувствительные приемники миллиметрового диапазона, использовавшие ПЧ схему, были описаны в работах [3, 5]. В этих работах приведен значительный экспериментальный материал, однако зависимость свойств приемника от его параметров осталась в основном неясной.

В настоящей работе приведен расчет приемника с ПЧ на джозефсоновском контакте и выясняются условия реализации в нем минимального значения NEP. Выводы теории проверены на макете приемника 8-миллиметрового диапазона с промежуточной частотой около 25 МГц.

2. СООТНОШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЧАСТОТ

Основные свойства приемника определяются соотношением частот H_h , ω_i и характерной частоты цепи включения контакта R_d/L_R , где R_d — дифференциальное сопротивление контакта в рабочей точке ($\bar{V} \approx V_\omega$)*. Полосу приемника в реальных условиях нужно считать заданной величиной. Для определения ω_i отметим, что установление стационарного значения \bar{V} при резком изменении ΔI тока через контакт происходит за время $\tau \approx \Phi_0/R_d \Delta I$ [7], что при нужных нам значениях $\Delta I \approx \Gamma_V/R_d$ дает $\tau \approx H_h^{-1}$. Поэтому для того, чтобы сигнал ПЧ полностью передавал информацию об изменении вольт-амперной характеристики контакта под действием СВЧ излучения, нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$\omega_i \ll H_h. \quad (6)$$

Величина R_d/L_R определяет, будет ли цепь включения контакта (рис. 1 в) шунтировать низкочастотные компоненты собственного шума контакта, а также напряжения разностной комбинационной частоты СВЧ сигнала и джозефсоновой генерации [7]. В настоящей работе изучен лишь наиболее реальный случай, когда

$$R_d/L_R \ll H_h, \quad (7)$$

т. е. шунтирования не происходит. Отметим, что в рамках резистивной модели [6, 7]

$$H_h = \frac{8\pi^2}{\Phi_0^2} R k T_R \left(1 + \frac{3}{2\Omega^2} \right); \quad (8a)$$

$$R_d = R \left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \right)^{1/2}, \quad (8b)$$

где $\Omega = \omega/\omega_0$, R — нормальное сопротивление контакта, а шумовая температура контакта T_R может, вообще говоря, быть несколько выше температуры криостата T . Согласно (8), условие (7) есть фактически условие не на сопротивление контакта, а лишь на индуктивность:

$$L_R \gg L_f \frac{\left(1 + \frac{1}{\Omega^2} \right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{3}{2\Omega^2} \right)^{1/2}}, \quad L_f \approx \frac{3.9 \cdot 10^{-9} [\Gamma_h \cdot K]}{T_R [K]}. \quad (9)$$

* Сопротивление шунта R_s необходимо лишь для задания смещения на контакт в случае, если катушка L_R выполнена из сверхпроводника. Обычно $R_s \ll R_d$, и при анализе его можно не учитывать.

Таким образом, например при $\Omega = 1$ и $T_R = 4,2$ К, для выполнения (7) достаточно, чтобы L_R была не меньше $5 \cdot 10^{-10}$ Гн, что выполнялось в наших экспериментах.

При соотношении, обратном (7), можно, в принципе, сузить СВЧ полосу при фиксированном сопротивлении контакта, однако минимальное значение NEP при фиксированной СВЧ полосе при этом возрастает [7].

Таким образом, будет анализироваться приемник, в котором выполняются соотношения (6) и (7). Соотношение между R_d/L_R и ω_i будем считать произвольным, т. е. параметр

$$l = \omega_i L_R / R_d \quad (10)$$

в общем случае сравним с единицей. Именно этот параметр в нашем случае ($\bar{V}\Phi_0 \gg \omega_i$) характеризует цепь контакта, в отличие от применяемых в джозефсоновских магнитометрах аналогичных систем с нулевым или малым смещением ($\bar{V}\Phi_0 \sim \omega_i$), где импеданс контакта порядка $\omega_i L_J = \omega_i \Phi_0 / 2\pi I_0$ и роль l играет параметр $2\pi L_R I_0 / \Phi_0$.

3. ОТКЛИК КОНТАКТА НА ПЧ

Соотношение (7) дает возможность непосредственно применить к контакту теорию джозефсоновских детекторов, развитую в [6, 7]. Для чувствительности контакта $\eta(\bar{V}, \omega)$ имеем

$$\eta = \eta_0 f \left(\frac{\bar{V} - V_\omega}{\Gamma_V} \right), \quad \eta_0 = \frac{(\alpha/4)}{I_f \Omega^2}, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad (11)$$

где I_f есть характерный размах тока флюктуаций:

$$I_f = 4\pi k T_R / \Phi_0 = (2\Gamma_V / R)_{\omega \rightarrow \infty} \approx 0,084 [\mu\text{A} \cdot \text{K}^{-1}] T_R [\text{K}]. \quad (12)$$

Коэффициент связи α контакта с СВЧ трактом в нашем случае трудно сделать близким к единице. Действительно, для получения малых значений входной полосы приемника ($H_h/\omega_h \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$) должны согласно формуле (8 а) применяться достаточно низкоомные контакты. Так, для $H_h/2\pi \leqslant 10^8$ Гн, $T_R = 4,2$ К и $\Omega = 1$ имеем $R \leqslant 2\Gamma_V / I_f \approx 0,6$ Ом. Поскольку выходные СВЧ цепи должны быть достаточно широкополосными, чтобы обеспечить достаточный диапазон перестройки приемника $\Delta\omega_h$, применение высокодобротных устройств в СВЧ тракте исключается, импеданс Z_e входных цепей относительно контакта трудно сделать достаточно малым. Поэтому можно считать

$$\alpha/4 \approx R / |Z_e| \ll 1. \quad (13)$$

Просмотр выкладок работы [7], приводящих к выражению (11), показывает, что при таких α оно пригодно для любых значений Ω .

В приемнике с ПЧ x есть сумма двух компонент:

$$x = x_0 + x_i \cos \theta, \quad \theta = \omega_i t + \varphi_i, \quad x_0 = (\bar{V} - V_\omega) / \Gamma_V, \quad (14)$$

$$x_i = V_R / \Gamma_V.$$

Подача СВЧ сигнала вызывает отклик на ПЧ, т. е. изменение эффективного ПЧ сопротивления контакта на величину

$$\delta R_d = \frac{R_d}{V_R} \eta_0 P \Phi(x_0, x_i). \quad (15)$$

Функция

$$\Phi(x_0, x_1) = 2f(x) \cos \theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{2(x_0 + x_1 \cos \theta) \cos \theta d\theta}{1 + (x_0 + x_1 \cos \theta)^2} \quad (16)$$

описывает зависимость отклика на ПЧ (а следовательно, и выходного сигнала приемника) от напряжения смещения \bar{V} (а следовательно, и частоты сигнала) и амплитуды ПЧ. Эти функции показаны на рис. 2 а. Легко получить следующие формулы*:

$$\Phi(0, x_1) = \frac{4}{x_1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} \right), \quad \lim_{x_1 \rightarrow 0} \Phi(x_0, x_1) = 2x_1 \frac{1-x_0^2}{(1+x_0^2)^2}. \quad (17)$$

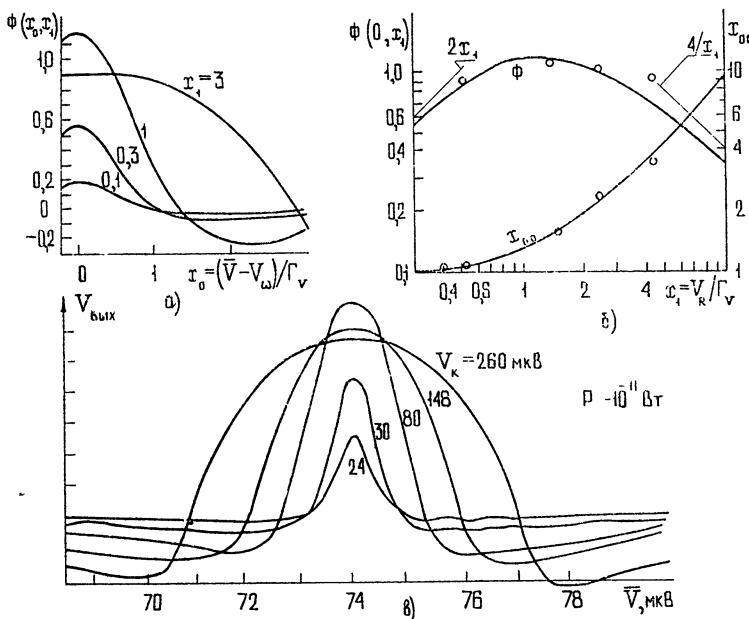


Рис. 2. Зависимость выходного сигнала приемника от напряжения смещения и амплитуды напряжения ПЧ: а) теория, б) теория и эксперимент, точками показаны экспериментальные значения ($\Gamma_V = 0,85 \text{ мкВ}$), в) эксперимент.

Как видно из этих формул и рис. 2б, при увеличении V_R отклик сигнала растет пропорционально V_R , причем СВЧ полоса равна H_h^{**} . При превышении величиной V_R уровня

$$V_R = \Gamma_V x_{10}, \quad x_{10} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)/2} \approx 1,272, \quad (18)$$

$$\Phi_{\max} = \Phi(0, x_{10}) \approx 1,201$$

* Отметим также, что $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi dx_0 = 0$. Это обеспечивает равенство нулю отклика приемника на сигнал с равномерным спектром $S_p = \text{const}$ (например, на широкополосный шум).

** Принятое нами определение СВЧ полосы как удвоенной расстройки, при которой отклик равен нулю, является условным. Легко убедиться, что разрешающая способность по критерию Рэлея равна $2(\omega_h/H_h) = V_\omega/\Gamma_V$.

максимум отклика начинает уменьшаться, а СВЧ полоса растя. Из рис. 2 можно заключить, что оптимальные значения V_R (различные при различных требованиях к приемнику) заключены в интервале $\sim [0,7 \Gamma_V, 1,3 \Gamma_V]$.

Для нахождения мощности насыщения P_s имеем из рис. 1 формальное равенство $\eta P_s = \bar{V} - V_\omega$, и из (11) для $V \rightarrow V_\omega$ получаем

$$P_s = \Gamma_V / 2\eta_0. \quad (19)$$

4. ШУМ КОНТАКТА

Другим необходимым для дальнейшего результатом теории джозефсоновских детекторов является спектральная плотность шумового напряжения на контакте $S_R(\omega_i)$.

В рамках резистивной модели [6, 7]

$$S_R = \frac{2}{\pi} k T_R R \left(1 + \frac{3}{2\Omega^2} \right) = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^3} k H_h, \quad (20)$$

так что шумовое напряжение на контакте в полосе шириной H_l есть

$$(S_R H_l)^{1/2} = \frac{\Phi_0}{\pi} \left(\frac{H_h}{2\pi} \frac{H_l}{2\pi} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Соотношение S_R и η_0 определяет минимально возможную НЕР приемников на контакте:

$$\text{НЕР}_0 = (S_R H_l)^{1/2} / \eta_0 = \frac{2\Omega^2}{\sqrt{\pi}} \frac{|Z_e|}{R} T_R (H_h H_l)^{1/2}. \quad (22)$$

5. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛА ПЧ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНСНЫЙ ТРАНСФОРМАТОР

Поскольку контакт является низкоомным источником ПЧ сигнала, для согласования его с высокоомным усилителем ПЧ напряжение естественно использование повышающего резонансного трансформатора [3, 5] (см. рис. 1 в). При этом обычно питание по ПЧ удобнее вводить в сам колебательный контур, а не непосредственно в контакт. Из сказанного выше следует эквивалентная схема приемника по ПЧ, показанная на рис. 1 в. На этом рисунке R_k описывает собственные потери в контуре с учетом связи с генератором и усилителем ПЧ,

$$Q_K = \omega_i L_K / R_K, \quad (23)$$

\mathcal{E}_k — генератор ПЧ, S_K — собственный шум контура,

$$S_K = \frac{2}{\pi} R_K k T_K, \quad (24)$$

S_a — шумы усилителя, так что сам усилитель на эквивалентной схеме идеальный. Замыкание ключа, шунтирующего δR_d , описываетключение СВЧ источника.

Пользуясь тем, что схема по ПЧ линейна, применяем метод гармонического баланса и после элементарных выкладок получаем, что напряжение на выходе усилителя, проведенное ко входу, состоит из трех компонент:

фоновых колебаний ПЧ с амплитудой

$$V_K = \mathcal{E}_K Q / \sqrt{1 + \xi^2}, \quad V_R / V_K = n_r / \sqrt{1 + l^2}, \quad (25)$$

изменения амплитуды $\delta V_K = \eta_K P$, где

$$\eta_K = \eta_0 \Phi \frac{n_r Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} \frac{l}{\sqrt{1 + l^2}} \cos \left[\arctg \frac{2l}{l^2 - 1} - \arctg \xi \right], \quad (26)$$

и шума со спектральной плотностью S_Σ :

$$S_\Sigma (\omega_i) = S_{a1} + S_{KK} + S_{RK}, \quad S_{KK} = S_K \frac{Q^2}{1 + \xi^2}, \quad (27)$$

$$S_{RK} = S_R \frac{n_r^2 Q^2}{1 + \xi^2} \frac{l^2}{1 + l^2}.$$

В формулах (25) — (27) использованы обычные обозначения:

$$n_r = K \sqrt{\frac{L_K}{L_R}}, \quad n_r = K \sqrt{\frac{L_R}{L_K}}, \quad K = \frac{M}{\sqrt{L_R L_K}}, \quad \omega_{i0} = \frac{1}{\sqrt{L_K C}}. \quad (28)$$

Величины Q и ξ есть добротность и расстройка контура с учетом импеданса пепи контакта:

$$Q^{-1} = Q_K^{-1} + K^2 \frac{l}{1 + l^2}; \quad (29a)$$

$$\xi Q = \frac{2(\omega_i - \omega_{i0})}{\omega_{i0}} - K^2 \frac{l^2}{1 + l^2}. \quad (29b)$$

6. НЕР ПРИЕМНИКА

После усилителя ПЧ с полосой $H_i \ll \omega_i$ сигнал подается на амплитудный детектор. Считая выполненным обычное условие малости шума на входе детектора $V_K \gg (S_\Sigma H_i)^{1/2}$, на его выходе имеем отношение сигнала к шуму:

$$s/n = \delta V_K / (2 S_\Sigma H_i)^{1/2}, \quad (30)$$

где H_i — полоса после детектора. Поэтому суммарный НЕР запишется в виде

$$\text{НЕР} = \sqrt{2} (S_\Sigma H_i)^{1/2} / \eta_K. \quad (31)$$

Найденная нами величина есть НЕР «компенсационного» приемника, различные схемы которого показаны на рис. 1 б. На эксперименте обычно применяется модуляционная схема приемника с модуляцией СВЧ на частоте $\omega_m \ll H_i$ и выделением сигнала на синхронном детекторе с постоянной временнr $\tau \gg \omega_m^{-1}$. Как известно, отношение сигнала к шуму на выходе такого приемника есть $(\sqrt{2}/\pi) (P/\text{НЕР})$, причем $H_i = \pi/2\tau$. Таким образом, на эксперименте с модуляционной схемой легко установить «истинное» значение НЕР (31), которое мы и будем иметь в виду ниже.

¹ Мы не учитываем другие возможные источники шума, поскольку, как показывают эксперименты, учтенные источники являются главными.

7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ

При нахождении оптимальных параметров приемника, которые обеспечивают минимальное значение NEP, отметим прежде всего, что величины ω_h , $\Delta\omega_h$ и H_h (а следовательно, и Γ_V) должны считаться заданными с самого начала.

1. Параметр Ω при фиксированной частоте сигнала зависит лишь от характерной частоты контакта $\omega_0 = (2\pi/\Phi_0) I_0 R$. Как следует из (11), величину ω_0 нужно всячески увеличивать. Однако обычно ω_0 определяется лишь материалом контакта и температурой, поэтому возможности ее увеличения ограничены [8].

2. NEP приемника пропорциональна импедансу входных цепей $|Z_e|$, так что его желательно всячески снижать (вплоть до R), оставляя в то же время ширину полосы СВЧ цепей $\Delta\omega_h$ не менее заданной.

3. При фиксированных Ω и T_K сопротивление контакта однозначно определяется заданной СВЧ полосой по равенству (8 а). Поскольку обычно T_K заранее не известна точно, R подбирают в процессе настройки контакта, непосредственно измеряя ширину отклика по напряжению $2\Gamma_V$ на монохроматический сигнал, так, чтобы соотношение Джозефсона (4) давало нужную полосу H_h .

При анализе зависимости NEP от остальных параметров приемника следует производить оптимизацию в определенном порядке, который диктуется относительной легкостью изменения данного параметра. В реальном случае этот порядок таков: расстройка ξ , коэффициент связи K , вторичная катушка и частота ПЧ (Q_K , L_K , ω_i), первичная катушка (L_R).

1 а. Лучшим случаем является тот, когда шумы, вносимые контуром и усилителем, малы по сравнению с трансформированным шумом контакта. В этом случае для NEP имеем

$$\text{NEP} = (\text{NEP})_0 \left(\sqrt{2}/\Phi \right) \cos^{-1} \left(\arctg \frac{2l}{l^2 - 1} - \arctg \xi \right) \quad (32)$$

при оптимальных значениях смещения ($\bar{V} = V_\omega$), амплитуды ПЧ ($V_R = \Gamma_V x_{10}$) и расстройки ПЧ ($\xi_{\text{opt}} = 2l/(l^2 - 1)$):

$$(\text{NEP})_{\min} \approx 1,20 \cdot \text{NEP}_0. \quad (33)$$

Таким образом, ухудшение NEP в приемнике с ПЧ происходит всего на 20 %. NEP при этом не зависит от параметров ПЧ схемы, в частности от $l \sim L_R$, с условием, что расстройка ПЧ для каждого значения l выбиралась оптимальным образом. При $R_d \gg \omega_i L_R$ и $R_d \ll \omega_i L_R$ рабочая точка должна находиться вблизи максимума резонансной кривой, а при $R_d \approx \omega_i L_R$ — на одном из ее склонов.

2 а. Если в системе преобладает шум контура, то при оптимальной расстройке (такой же, как в предыдущем случае)

$$\text{NEP} \propto \left(T_K \frac{1 + l^2}{l} \frac{1}{k^2 Q_K} \right)^{1/2}, \quad (34)$$

т. е. у L_R есть оптимальное значение $L_R = R_d/\omega_i$, а у контура нужно увеличивать фактор $K^2 Q/T_K$. Отсюда ясно следует желательность размещения всего контура в криостате.

3 а. Наконец, если преобладает шум усилителя ПЧ,

$$\text{NEP} \propto (S_a)^{1/2} \frac{\sqrt{1 + \xi^2}(1 + l^2)\sqrt{L_R}}{\cos \left[\arctg \frac{2l}{l^2 - 1} - \arctg \xi \right] \sqrt{L_K}} \left(\frac{1}{KQ_K} + K \frac{l}{1 + l^2} \right), \quad (35)$$

откуда следует, что для фиксированных значений Q_K , L_K и L_R существует оптимальное значение коэффициента связи и расстройки:

$$K_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1 + l^2}{lQ}}, \quad \xi_{\text{opt}} \approx 0, \quad (36)$$

при котором NEP максимально и пропорционально $1/\sqrt{L_K Q_K \omega_i}$. Значение L_R при этом должно быть либо малым, либо большим по сравнению с R_d/ω_i .

8. КОНСТРУКЦИЯ ПРИЕМНИКА 8-МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

Нами был сконструирован и изготовлен макет приемника 8-миллиметрового диапазона при средней частоте входного сигнала $\omega_h/2\pi \approx 35 \text{ ГГц}$ (т. е. $V_o \approx 70 \text{ мкВ}$), работающего при температуре 4,2 К с использованием точечных сверхпроводящих контактов Nb—Nb. Поскольку даже для $\Omega \gg 1$ нормальное сопротивление R контактов, обеспечивающих заданную полосу при $T = 4,2 \text{ К}$, согласно (8 а), не может быть больше нескольких Ом, то использовались обычные прижимные контакты, достаточно стабильные при небольших сопротивлениях. Подстройка контактов производилась в криостате с помощью винта с упругой шайбой, шестерни и червячной передачи (рис. 3).

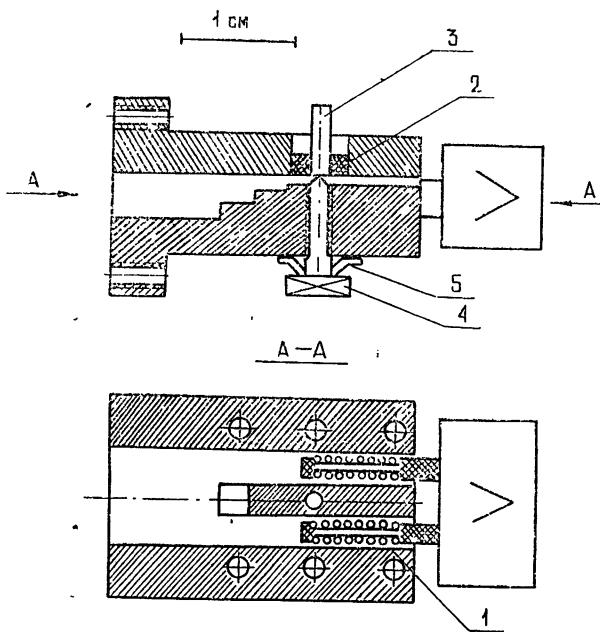


Рис. 3. Конструкция детекторного блока.

1—вторичная катушка, 2—стальная втулка (шунт), 3—запрессованный электрод прижимного контакта, 4—регулируемый электрод—винт с шестерней, врачающийся червячной передачей (на рисунке не показана), 5—упругая шайба.

Как следует из результатов развитой выше теории, для предотвращения дополнительных шумов индуктивность L_R цепи контакта должна быть достаточно мала ($\sim R/\omega_i$). Для снижения L_R , увеличения диапазона $\Delta\omega_h$ и фактора $R/|Z_e|$ контакт образовывался в последней секции трехсекционного четвертьвольнового СВЧ трансформатора П-типа (рис. 3), который, согласно расчетам, должен был обеспечивать значение $|Z_e| \approx 60 \text{ Ом}$. Цель контакта (первичный виток ПЧ трансформатора) образовывалась стенками волновода, а вторичная катушка (примерно 20 витков проволоки из Nb диаметром 0,1 мм на двухстержневом тefлоновом каркасе) размещалась непосредственно в широких частях волноводного СВЧ трансформатора. Отметим сразу, что такое расположение вторичной катушки оказалось явно неудачным, поскольку она сильно ухудшала СВЧ свойства тракта.

На держателе каркаса размещался транзисторный предусилитель ПЧ, аналогичный описанному в работе [9]. Коэффициент связи K мог изменяться заглублением каркаса с катушкой в волновод. Частота ПЧ была выбрана в районе 25 МГц, чтобы удовлетворить условиям (5) и (6).

Вся последняя секция волновода с СВЧ трансформатором и контактом выполнялась из сверхпроводника (Nb). Поэтому для задания напряжения смещения на контакт один из его электродов был запрессован в стальную втулку, в свою очередь запрессованную в стенку волновода. Сопротивление получившегося таким образом шунта ($R_s \approx 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}$) было достаточно для получения необходимого смещения при пропускании постоянного тока около 1 А. Вообще говоря, для уменьшения рассеиваемой на шунте мощности желательны большие значения R_s (порядка 10^{-2} Ом).

Показанный на рис. 3 детекторный блок приемника закреплялся на конце 8-миллиметрового волновода и опускался в стандартный металлический транспортный гелиевый дьюар. Остальная часть приемника (генератор, усилитель и детектор ПЧ, источник тока смещения, модулятор СВЧ с частотой 1 кГц, синхронный детектор), а также контрольная и записывающая аппаратура работали при комнатной температуре и были составлены из серийных приборов.

9. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРИЕМНИКА

Для проверки основных выводов теории необходимо было с достаточной точностью знать для каждого эксперимента значения входящих в теорию параметров. Измерение их производилось следующим образом.

1) По измерению резонансной кривой контура ПЧ при разомкнутом контакте находятся ω_{i0} и Q_K .

2) Изменяя C на известную величину и измеряя вызванное этим изменение ω_{i0} , находим величину L_K .

3) Замыкая контакт и работая на сверхпроводящем участке ($I = 0$), имеем $R_d = 0$. Измеряя относительное изменение резонансной частоты, которое согласно (29 б) равно $K^2/2$, определяем K .

4) Для конкретного контакта снимаем серию резонансных кривых при различных напряжениях смещения \bar{V} . Для каждого значения \bar{V} по добротности и резонансной частоте имеем по формулам (29) два независимых определения параметра l .

5) Измеряя величину и ширину ($2\Gamma_V$) выходного сигнала приемника при монохроматическом входном сигнале при различных значениях напряжения на контуре V_K и сравнивая полученные зависимости с теоретическими (рис. 2 б), определяем отношение V_K/V_R . Затем по формуле (25) определяется величина n_+ и из нее L_R .

6) Поскольку величины $\omega_i L_R$ и $l = \omega_i L_R / R_d$ дают значения R_d , теперь можно построить зависимость $R_d(\bar{V})$ и сравнить ее с теоретической (8 б). Если контакт хорошо подчиняется резистивной модели, то из этого сравнения находится параметр Ω .

7) Сравнивая измеренное значение $\Gamma_V(H_h)$ со следующим из формул (4) и (8 а), находим эффективную температуру шумов контакта.

Этих данных достаточно, чтобы вычислить из теории значения η_K и компонент шума, а следовательно, и NEP, а также P_s и сравнить их с экспериментальными значениями.

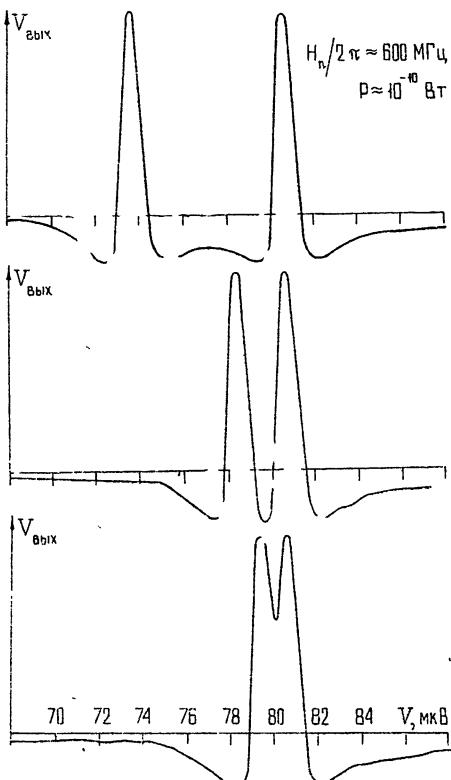
10. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Был проделан ряд экспериментов с контактами, изготовленными из различных марок Nb. Изменяя омичность контакта, удается получить СВЧ отклик в селективном режиме для широкого диапазона СВЧ полосы.

При значениях $(H_h/2\pi)$ примерно от 50 МГц до 5 ГГц зависимость выходного сигнала от входной мощности и амплитуды напряжения смещения хорошо соответствует теоретической. В качестве примера на рис. 2 приведены экспериментальные зависимости выходного сигнала от \bar{V} при монохроматическом входном сигнале на частоте 35,780 ГГц от кластистрона, при различных значениях амплитуды ПЧ сигнала на контакте. Подобная форма сигнала наблюдалась для некоторых контактов и в работе [3]. Как и в этой работе, мы наблюдали слабый выходной сигнал и при выключенном генераторе ПЧ. Этот сигнал вызывается просачиванием в контур ПЧ малой части ($\sim \omega_i/H_h Q$) напряжения комбинационной частоты (разностной между частотой джозефсонской генерации и частотой входного сигнала), как и следует из условия (6).

На рис. 4 показаны изменения отклика приемника на бигармонический входной сигнал от двух кластистронов при уменьшении разности частот между ними. Эти зависимости демонстрируют аддитивность приемника и связь его СВЧ полосы с разрешающей способностью (см. формулы (3), (4) и примечание на стр. 547).

Рис. 4. Отклик приемника на бигармонический сигнал.



При $(H_h/2\pi) \leq 50$ МГц нарушается условие (6) и, как и в работе [3], наблюдаются более сложные зависимости отклика на монохроматический сигнал от \bar{V} . При $(H_h/2\pi) \geq 5$ ГГц отклик обычно также не

соответствует теории; в частности, почти всегда отсутствуют отрицательные «крылья» линии (рис. 2 в). Мы связываем это с заметным шунтированием на частотах $\geq 5 \text{ Гц}$ разностной комбинационной частоты емкостью последней секции СВЧ трансформатора.

Были проведены подробные исследования параметров и характеристик приемника с рядом контактов, имеющих полосу, близкую к заданной; результаты измерений для одного из таких контактов представлены в таблице. Полученное в данном случае значение NEP ($\sim 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ Вт/Гц}^{1/2}$) является типичным. Мы получили близкие значения для большого числа контактов.

Таблица

Параметр	Значение	Ошибка %	Характеристика	Теория	Эксперимент
R	$3,1 \text{ Ом}$	30	$\sqrt{S_{RK} H_l}$ **	$(5 \pm 1) \cdot 10^{-10} \text{ В}$	—
R_d	$> 3,4 \text{ Ом}$	30	$\sqrt{S_{KK} H_l}$	$(2,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-11} \text{ В}$	—
Ω	$< 2^*$	—	$\sqrt{S_x H_l}$	—	$(5 \pm 1) \cdot 10^{-9} \text{ В}$
L_R	$4,3 \cdot 10^{-9} \text{ Гн}$	30	η_K	$> 6 \cdot 10^5 \text{ В/Вт}$	$(4 \pm 1) \cdot 10^4 \text{ В/Вт}$
L_K	$1,9 \cdot 10^{-7} \text{ Гн}$	10	NEP_0	$> 10^{-15} \text{ Вт/Гц}^{1/2}$	—
K	0,13	5	NEP	—	$(1,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-13} \text{ Вт/Гц}^{1/2}$
$\omega_i 0$	$25,5 \text{ мГц}$	1	P_s	$< 2 \cdot 10^{-11} \text{ Вт}$	$> 5 \cdot 10^{-11} \text{ Вт}$
Q_K	130	3			
l	0,20	8			
T_V	$0,85 \text{ мкВ}$	3			
T_R	5,7 К	—			
ξ	0	10			

* Большая ошибка в определении параметра Ω и, следовательно, теоретических значений величин T_R , NEP_0 , P_s связана с тем, что из-за малого значения R_s мы не могли задавать на контакт смещение больше 100 мкВ, что необходимо для определения зависимости $R_d(\bar{V})$ (п. 6, разд. 9).

** Полоса НЧ $H_l/2\pi = 1 \text{ Гц}$.

Анализируя приведенные в таблице данные, легко увидеть, что наибольшее расхождение с теорией (примерно на порядок) наблюдается для значений чувствительности. Эксперименты показали, что это связано, в основном, с сильным поглощением СВЧ во вторичной катушке ПЧ трансформатора, из-за чего не удалось достичь расчетного значения величины $|Z_e|$. Соответственно уменьшился до $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ коэффициент СВЧ согласования α и ухудшилось значение NEP. Второй причиной уменьшения NEP, по сравнению с расчетным, явились относительно большие шумы предусилителя, которые примерно на порядок превышают шумы контакта и ПЧ контура даже после проведения оптимизации, описанной в п. 3, разд. 7.

Для ликвидации влияния шумов предусилителя необходимо, как показывают формулы (20) и (27), повысить фактор $(n_a Q_K / S_a)^{1/2}$ примерно на порядок. Это вполне возможно, если использовать контур и предусилитель ПЧ с уже достигнутыми значениями $Q \approx 1,7 \cdot 10^3$ [10] и $S_a \approx 1,2 \cdot 10^{-18} \text{ В}^2/\text{Гц}$ [11].

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование простой схемы с промежуточной частотой (кросс-модуляцией) показало, что она, в принципе, позволяет полностью использовать потенциал джозефсоновских детекторов, работающих в режиме самоселекции. Подобный приемник, в силу особых свойств его функции отклика (разд. 3), может быть удобен для таких применений, где требуется выделить сигнал, состоящий из суммы узкополосных компонент, из широкополосного фона и произвести его спектральный анализ. Например, в радиоастрономии такой приемник можно применить для выделения особенностей в спектре источника.

В работе [3] был сделан вывод о том, что основным недостатком такого приемника является наличие паразитных откликов при смещениях $\bar{V} \approx \left(\frac{n}{m}\right) V_\omega$; где n и m — натуральные числа. Однако при мощностях меньше мощности насыщения P_s отклики с $n > 1$ пренебрежимо малы. Субгармонические же отклики ($n = 1$) при реальных значениях ширины диапазона перестройки ($\Delta\omega_h/\omega_h < 1/2$) лежат вне его.

Экспериментально реализованное нами в миллиметровом диапазоне значение $NEP \approx 10^{-13} \text{ Вт}/\text{Гц}^{1/2}$ при полосе $\approx 1 \text{ ГГц}$ может быть относительно легко улучшено на порядок за счет расположения ПЧ контура вне СВЧ тракта [5] и на столько же снижением влияния шумов усилителя ПЧ (разд. 10). Улучшение полученного таким образом значения $NEP \approx 10^{-15} \text{ Вт}/\text{Гц}^{1/2}$ до предельного теоретического ($\sim 10^{-17} \text{ Вт}/\text{Гц}^{1/2}$) возможно лишь за счет улучшения СВЧ согласования ($\alpha \rightarrow 1$), для чего необходимо применять в СВЧ тракте трансформаторы импеданса до уровня в несколько Ом в нужном диапазоне перестройки.

Авторы благодарны В. В. Мигулину за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. G. Blaney, Phys. Lett., A37, 19 (1971).
2. T. G. Blaney, C. C. Bradley, J. Phys. D., 180 (1972).
3. A. A. Fife, S. Gygax, J. Appl. Phys., 43, 2391 (1972).
4. H. Kanter, F. L. Verpon, J. Appl. Phys., 43, 3174 (1972).
5. S. Gygax, W. Zingg, Rev. Phys. Appl., 9, 269 (1974).
6. К. К. Лихарев, В. К. Семенов, Радиотехника и электроника, 18, 2390, 2595 (1973).
7. A. N. Vystavkin, V. N. Gubankov, L. S. Kuzmin, K. K. Likharev, V. V. Migulin, V. K. Semenov, Rev. Phys. Appl., 9, 79 (1974).
8. J. E. Zimmetman, Proc. of 1972 Appl. Supercond Conf., 1972, p. 544.
9. Б. В. Васильев, В. Г. Гребенник, В. Г. Симкин, Сообщения ОИЯИ, Р13-6942, Дубна, 1973.
10. Б. В. Васильев, А. И. Иваненко, В. И. Трофимов, Сообщения ОИЯИ, Р13-7489, Дубна, 1973.
11. D. S. Miyohi, R. M. Cotts, Rev. Sci. Instr., 39, № 12, 1881 (1968).

MICROWAVE RECEIVER WITH JOSEPHSON DETECTOR IN SELF-SELECTION REGIME*V. A. Kulikov, K. K. Likharev*

The theory is developed for a microwave receiver in which the response of the Josephson detector operating in a self-selection regime is measured at the intermediate frequency (IF). The calculated form of the response to a monochromatic signal is close to that experimentally obtained in [3], as well as in our experiments. They are conducted using 8 mm receiver with the intermediate frequency of about 25 MHz with point contacts Nb—Nb operating at the temperature 4.2 K. As calculations and the experiment show, the circuit of the receiver with IF when its parameters are correctly chosen does not produce additional noise. The threshold power (NEP) is achieved to be only two order less than the limit value calculated by Likharev and Semenov ($\sim 10^{-17}$ W/Hz $^{1/2}$). The value NEP $\sim 10^{-18}$ W/Hz $^{1/2}$ is obtained experimentally in the output band ~ 1 GHz. This value may be easily improved by two orders.

УДК 538.116

КОРРЕЛЯЦИЯ СКАЧКОВ БАРКГАУЗЕНА И СПЕКТР МАГНИТНОГО ШУМА В ФЕРРОМАГНИТНЫХ ОБРАЗЦАХ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

B. B. Колачевская

Экспериментально показано, что осциллирующий характер спектрального распределения магнитного шума в ферромагнитных образцах с прямоугольной петлей гистерезиса является результатом корреляции скачков Баркгаузена в последовательных полуциклах перемагничивания. Экспериментально исследован спектр магнитного шума в пармаллоевых пленках и тонких лентах.

Исследования статистических характеристик флуктуаций элементарных процессов перемагничивания, в частности, скачков Баркгаузена, показали, что эти процессы не являются статистически независимыми, а определенным образом коррелированы (см., например, [1, 2]). Коррелированность флуктуаций скачков приводит к ряду характерных особенностей спектрального распределения мощности магнитного шума $g(f)$. Одной из интересных особенностей спектра является осциллирующий характер функции $g(f)$ с провалами на частотах, совпадающих с четными гармониками частоты синусоидального поля перемагничивания f_0 , который был обнаружен в одноосных пермаллоевых пленках с петлей гистерезиса, близкой к прямоугольной в режиме перемагничивания образца по частному циклу [3]. В настоящей работе проведена оценка числа последовательных полупериодов перемагничивания, в которых флуктуации амплитуд скачков Баркгаузена являются коррелированными.

ТЕОРИЯ

Предположим, что в образце в каждом полупериоде возникает один скачок Баркгаузена, момент возникновения которого строго фиксирован, а амплитуда случайна. При этих предположениях ЭДС индукции, возникающая в индикаторной катушке, намотанной на образец, может быть представлена в виде

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k a_k v\left(t - \frac{kT_0}{2}\right), \quad (1)$$

где a_k — случайная амплитуда, $v(t)$ — функция, описывающая форму импульса, T_0 — период внешнего синусоидального поля. Бункин [4] получил общее выражение для спектральной плотности шума $g(\omega)$ в случае, когда амплитуды a_k коррелированы:

$$g(\omega) = 2\omega_0 \sigma^2 |S(\omega)|^2 F\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \left(\omega = 2\pi f, \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right), \quad (2)$$

где

$$F\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R(k) \cos \frac{\pi \omega}{\omega_0} k \quad (3)$$

и

$$R(k) = \overline{(a_i - \bar{a})(a_{i+k} - \bar{a})}/\sigma^2$$

$$(\bar{a}_k = \bar{a}), \quad (\bar{a}^2 - \bar{a}^2 = \sigma^2),$$

$S(\omega)$ — преобразование Фурье функции $v(t)$,

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4)$$

Кроме того, обязательное условие $g(0) = 0$ требует выполнения следующего равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R(k) = -0,5. \quad (5)$$

Зададим $R(k)$ в виде линейных функций номеров импульсов k , так что значения коэффициентов корреляции $R(i+1), R(i+2), \dots, R(i+k_m)$ (i — фиксировано) задаются лежащими на прямой, причем $R(0) = 1$, а все $R(i+j)$, где $j > k_m$, равны нулю. Такой способ задания позволяет с хорошей точностью удовлетворить условию (5). Значения функции $F\left(\frac{\omega}{\omega_0}, k_m\right)$ были рассчитаны на ЭВМ в интервале от $\omega = 2\omega_0$ до $\omega = 3\omega_0$ при различных цепях корреляции. На рис. 1 представлены кривые $F\left(\frac{\omega}{\omega_0}, k_m\right)$, начиная со случая корреляции импульсов в соседних полупериодах ($k_m = 1$) и ограничиваясь коррелированной цепью из 13 импульсов ($k_m = 12$). Из анализа кривых видно, что по мере увеличения числа полупериодов k_m , в которых амплитуды скачков являются коррелированными, функция $F\left(\frac{\omega}{\omega_0}, k_m\right)$ становится все более острой, сосредоточиваясь вблизи нечетных гармоник (в рассчитанном случае — третьей).

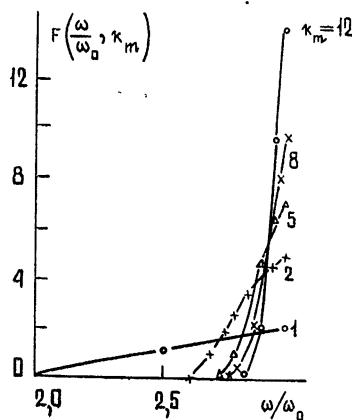


Рис. 1. График функции $F(\omega/\omega_0)$ при различном числе коррелированных импульсов.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И ОБРАЗЦЫ

Аппаратура, предназначенная для измерения спектральной плотности мощности ЭДС индукции, представляла собой высокоселективную систему, которая позволяла выделить слабую сплошную компоненту спектра на фоне сильных дискретных линий. Два гетеродинных анализатора спектра имели эффективные полосы пропускания фильтров 0,3 и 32 Гц и давали возможность производить измерения в диапазонах

соответственно от 0,8 Гц до 0,5 кГц и от 0,3 кГц до 200 кГц, отстраиваясь соответственно от гармоник на 0,8 Гц и 150 Гц. Точность измерения $g(f)$ составляла 20 %. Ранее нами отмечалось, что упомянутый выше осциллирующий характер спектрального распределения можно ожидать у ферромагнитных образцов, обладающих петлей гистерезиса, близкой к прямоугольной [3], поэтому в качестве образцов были выбраны тонкие магнитные пленки (ТМП) и сверхтонкие пермаллоевые ленты толщиной от 1 до 100 мк. Способ изготовления магнитных пленок и метод измерений описаны в работе [3].

При использовании сверхтонких лент с высокой проницаемостью образец представлял собой два идентичных витых сердечника с общей обмоткой возбуждения и соединенными дифференциально измерительными обмотками.

Все витые сердечники имели межслойное электроизоляционное покрытие и были термообработаны по стандартной технологии для получения прямоугольной петли гистерезиса. Измеренные значения $g(f)$ были приведены к единице массы материала (1 г). Перед началом каждого эксперимента образцы тщательно размагничивались в поле частоты 700 Гц и убывающей амплитуды.

В работе [3] была приведена экспериментальная кривая осциллирующей функции $g(f)$ с провалами на четных гармониках и подъемами на нечетных. Исходя из рассмотренной выше теоретической модели, эти осцилляции могут быть обусловлены лишь частотным ходом функции $F\left(\frac{\omega}{\omega_0}, k_m\right)$, поскольку рассмотренный частотный участок уже, чем величина, обратная длительности импульса, и изменение $|S(\omega)|^2$ на выбранном интервале незначительно. Кроме того, эксперименты показывают, что интенсивность флуктуаций амплитуд скачков Баркгаузена σ^2 в ТМП при фиксированном значении амплитуды поля возбуждения является медленно меняющейся функцией f_0 , если соблюдаются условия перемагничивания, близкие к квазистатическим. В нашем опыте эти условия соблюдаются, так как величина, обратная средней длительности скачков в ТМП, порядка 10^6 , что существенно выше использованных частот возбуждения.

На рис. 2 приведены экспериментальные кривые спектральных распределений магнитного шума, снятые между второй и третьей гармониками частоты возбуждения f_0 при $f_0 = 0,5; 1; 20$ и 50 кГц для ТМП толщиной 950 Å. На рис. 3 приведено спектральное распределение магнитного шума между второй и третьей гармониками при $f_0 = 700$ Гц для железо-никелевой ленты (87,5 % никеля, 2,6 % молибдена) толщиной 20 мк. Поскольку в этом опыте использовался анализатор спектра, позволяющий приблизиться к гармонике не ближе 150 Гц, в масштабе f/f_0 кривые занимают различные спектральные участки для различных f_0 .

Опираясь на вышесказанное, можно сравнивать экспериментальные кривые $g(f)$ с функцией $F\left(\frac{\omega}{\omega_0}, k_m\right)$.

Поскольку экспериментальные значения $g(f)$ при малых отстройках от гармоник в данном эксперименте не определялись (в этой области спектральное распределение шума имеет фликкерный характер), то остается единственная возможность сравнивать теорию с экспериментом по некоторой условно принятой ширине (точнее, полуширине) кривых спектральной плотности. С этой целью можно экстраполировать экспериментальные кривые до пересечения их с осью абсцисс (кривые $g(f)$ никогда не спадают строго до нуля, в том числе и в точке $f/f_0 = 2$, что

может быть объяснено существованием некоррелированных составляющих магнитного потока).

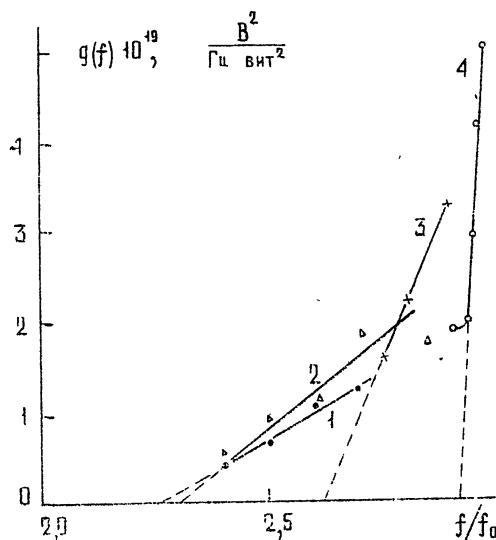


Рис. 2.

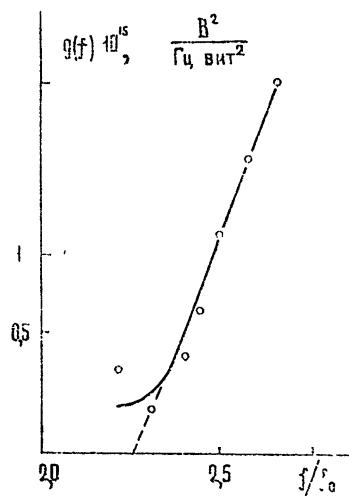


Рис. 3.

Рис. 2. Спектральное распределение магнитного шума ТМП; для кривой 1— $f_0 = 0,5 \text{ кГц}$, для 2— $f_0 = 1 \text{ кГц}$, для 3— $f_0 = 20 \text{ кГц}$, для 4— $f_0 = 50 \text{ кГц}$.

Рис. 3. Спектральное распределение магнитного шума пермаллоевой ленты толщиной 20 мкм состава 87НМ, $f_0 = 700 \text{ Гц}$, $H_0 = 0,3 \text{ Э}$.

Что касается теоретических кривых (рис. 1), то нетрудно видеть, что функция $F\left(\frac{\omega}{\omega_0}, k_m\right)$ практически равна нулю при некоторых характерных значениях ω/ω_0 (например, с точностью менее 5% от максимального значения на третьей гармонике). Эти характерные значения образуют монотонную последовательность полуширин теоретических кривых.

Сравнение теоретических и экспериментальных кривых по их полуширине является естественным, так как значения (f/f_0) не зависят от линейных изменений масштаба по оси ординат и определяются только числом коррелированных импульсов.

Таким образом, можно сделать заключение, что с ростом частоты возбуждения f_0 от 0,5 кГц до 50 кГц обнаружена корреляция импульсов на протяжении около десяти полупериодов перемагничивания.

В случае перемагничивания пермаллоевой ленты с $f_0 = 700 \text{ Гц}$ (сравним рис. 1 и 3) импульсы в большинстве своем коррелированы попарно ($k_m = 1$). Это значение k_m мало зависит от толщины ленты при выбранных условиях перемагничивания.

В тех случаях, когда наблюдается только попарная корреляция скачков, можно решить задачу следующим образом: пусть при перемагничивании образца по частному циклу осциллографма флюктуационной составляющей изменения потока магнитной индукции представляет собой примыкающие друг к другу почти прямоугольные импульсы длительностью $T_0/2$ и случайной амплитуды. Импульсы ЭДС $\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ имеют в этом случае вид очень коротких знакочередую-

ящихся попарноравных импульсов, возникающих близко к точке смены знаков внешнего поля. Каждую такую пару можно считать отдельным импульсом. Если пары не коррелируют друг с другом (случай

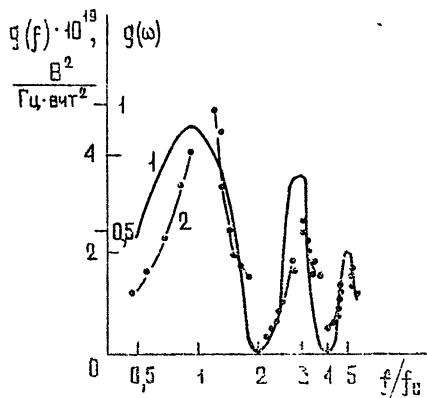
$F\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1$), то спектр мощности ЭДС индукции выразится формулой

$$g(\omega) = \frac{4\omega_0\sigma^2\tau^2}{\pi^2} \left(\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi\omega}{2\omega_0} \quad (\omega > 0), \quad (6)$$

где τ — длительность импульса.

График функции $g(\omega)$ (6) представлен на рис. 4, который хорошо согласуется с экспериментальной кривой, снятой на ТМП, представленной на том же рис. 4.

Рис. 4. Кривая 1—спектр ЭДС в случае $k_m = 1$ (импульсы попарно коррелированы); кривая 2—спектральное распределение магнитного шума ТМП с прямоугольной петлей гистерезиса, $f_0 = 1 \text{ кГц}$, $H_0 = 1,65 \text{ Э}$.



На всех приведенных выше экспериментальных кривых спектральных распределений магнитного шума исключены узкие интервалы частот, примыкающие непосредственно к дискретным линиям. В этих интервалах наблюдается резкий подъем $g(f)$ по закону, близкому к A/f^γ ($\gamma \sim 1$). Обсуждение этих закономерностей выходит за рамки настоящей статьи (по этому вопросу см., например, работы [5, 6]).

Автор благодарит А. М. Леликова за помощь в проведении опыта.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bittel, I. Westerboeg, Ann. der Phys., 4, № 1—5, 7 folge, 203 (1959).
2. L. Sturm, Ch. Heiden, Zs. fur angew. Phys., 17, № 3, 161 (1964).
3. В. В. Колачевская, Н. Н. Колачевский, Радиотехника и электроника, 17, № 1, 194 (1972).
4. Ф. В. Бункин, Радиотехника и электроника, 4, № 11, 1913 (1959).
5. В. В. Колачевская, А. М. Леликов, Физика магнитных материалов, Межвузовский сборник научных трудов № 2, г. Калинин, 1974.
6. В. В. Колачевская, Н. Н. Колачевский, В. В. Рождественский, Л. В. Стрыгин, Радиотехника и электроника, 16, № 7, 1211 (1971).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
24 февраля 1975 г.

CORRELATION OF BARKHAUSEN JUMPS AND THE SPECTRUM OF MAGNETIC NOISE IN FERROMAGNETIC SPECIMENS WITH A RECTANGULAR HYSTERESIS LOOP
V. V. Kolachevskaya

It is experimentally shown that the oscillation character of the spectral distribution of the magnetic noise in ferromagnetic specimens with a rectangular hysteresis loop is the result of correlation of Barkhausen jumps in successive re-magnetization semi-cycles. The magnetic noise spectrum in permalloy films and thin tapes is experimentally investigated.

УДК 621.385.6

ВЛИЯНИЕ ШУМОВ ВХОДНОЙ ЦЕПИ НА АМПЛИТУДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ АВТОГЕНЕРАТОРА

Ф. П. Раксина

Рассмотрено влияние входных шумов активного элемента на флюктуации колебания автогенератора. Учитено нелинейное преобразование шумов активным элементом. На примере транзисторного генератора показано, что учет нелинейного преобразования приводит к существенному возрастанию флюктуационных составляющих, обусловленных входным шумом схемы. Приводится численная оценка.

В ряде работ [1, 2] анализ флюктуаций колебания автогенератора проведен при учете линейного преобразования входных шумов схемы. Очевидно, что приближение оправдывается для слабонелинейных режимов работы при малом содержании гармоник в спектре выходного тока активного элемента. В общем случае при нелинейном преобразовании входного сигнала и шума в выходном токе активного элемента появляются комбинационные составляющие шумовых токов, попадающие в полосу частот генератора. Интенсивность и число комбинационных компонент шумового тока определяются характером нелинейности автогенератора и амплитудой действующего на входе сигнала. Ясно, что при использовании характеристики с высокой степенью нелинейности учет нелинейного преобразования может дать заметный эффект. Настоящая работа посвящена рассмотрению этого вопроса.

Автогенератор, находящийся под действием случайных сил, описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -\frac{\omega}{Q} \dot{x} + F_1(z, \dot{z}) + \omega_1^2 E(t), \quad (1)$$

где Q — добротность контура, $F_1(z, \dot{z})$ — функция, характеризующая воздействие активного элемента на контур, $z = x + \varepsilon(t)$, x — детерминированный сигнал на входе, $\varepsilon(t)$ — случайный сигнал во входной цепи, $E(t)$ — функция, характеризующая воздействие шумов в выходной цепи генератора.

Считая $\varepsilon(t)$ достаточно малым и ограничиваясь первым приближением, получим

$$F_1(z, \dot{z}) = F_1(x, \dot{x}) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \right)_{x, \dot{x}} \varepsilon + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{z}} \right)_{x, \dot{x}} \dot{\varepsilon}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), заменим уравнение генератора в стационарной форме [3]:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 G(t, x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t), \quad (3)$$

где

$$F(x, \dot{x}) = -\frac{\omega}{Q} \dot{x} + F_1(x, \dot{x}),$$

$$\omega_1^2 G(t, x, \dot{x}) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{x, \dot{x}} \varepsilon + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \right)_{x, \dot{x}} \dot{\varepsilon}. \quad (4)$$

Функция $G(t, x, \dot{x})$ характеризует случайное воздействие входных шумов схемы на автогенератор.

Развитые в [3] методы решения уравнений вида (3) позволяют найти статистические характеристики генерируемого сигнала при произвольной ширине спектра действующих флюктуаций. Согласно [3] спектральные плотности амплитудных S_a и частотных S_v флюктуаций колебания в установившемся режиме определяются следующими выражениями:

$$S_a = \frac{1}{\Omega^2 + P^2} \frac{\omega_1^2}{4} [S_{\perp}(\Omega) + S_s(\Omega)], \quad (5)$$

$$S_v = \frac{1}{R_0^2} \frac{\omega_1^2}{4} [S_{\parallel}(\Omega) + S_c(\Omega)].$$

Здесь P — прочность предельного цикла генератора (см. [3], стр. 214), R_0 — амплитуда установившегося режима, $S_{s,c}$ — спектральные плотности медленных случайных процессов $g_{s,c}(t)$, определяемых соотношением

$$g_{s,c}(t) = \mp \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t G(t, x, \dot{x}) \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} dt. \quad (6)$$

Спектральная плотность $S_{\perp, \parallel}$ определяется аналогично через случайную функцию $E(t)$.

В качестве конкретного примера рассмотрим схему транзисторного генератора с автосмещением (рис. 1) при воздействии на него случайных сил, связанных с дробовыми флюктуациями коллекторного тока $i_{dp}(t)$ и тепловым шумом сопротивления базы, действующим во входной цепи. Процессы в схеме генератора описываются уравнениями:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = - \frac{\omega_1}{Q} \dot{x} + \frac{1}{C_1} \frac{dJ_k}{dt} + \frac{1}{C_1} \frac{di_{dp}}{dt}, \quad (7)$$

$$\dot{y}_1 + \tau_2 y_1 = \frac{1}{C_1} (J_k - J_{k0}),$$

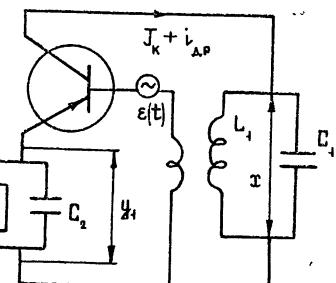


Рис. 1.

где x — напряжение на контуре генератора, y_1 — напряжение в цепи смещения, связанное с переменной составляющей коллекторного тока, $\tau_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$ — постоянная времени цепи смещения, J_{k0} — ток в рабочей точке коллекторно-базовой характеристики, Q — добротность контура генератора.

Выражение для коллекторного тока с учетом всех сил, действующих во входной цепи генератора, имеет вид

$$J_k = J_{k0} \exp [-ay_1 + a(k_1 x + \varepsilon)], \quad (8)$$

где k_1 — коэффициент обратной связи,

$$a = \frac{q}{kT} = 40 \text{ v}^{-1}.$$

Полагая $x = R \cos \psi$, $\psi = \omega_1 t + \Theta$, запишем разложение тока J_k в ряд Фурье:

$$J_k = J_{k0} e^{-\gamma} [I_0(\gamma) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{(0)} \cos n \psi] (1 + a \varepsilon(t)), \quad (9)$$

где $\gamma = ak_1 R$ — безразмерная амплитуда, $y = ay_1$ — безразмерное смещение, $I_n(\gamma)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка.

Согласно [4], при достаточно большом сопротивлении смещения R_2 , можно положить $\tilde{J}_k = J_{k0}$, где \tilde{J}_k — усредненная за период детерминированная часть функции J_k . При этом из (9) имеем

$$\tilde{e^y} = I_0(\gamma). \quad (10)$$

Сравнивая (1) и (7), для рассматриваемого случая получим

$$F_i(z, \dot{z}) = \frac{1}{C_1} \frac{d J_k}{dt}.$$

Полагая в (9) $y = \tilde{y}$, из (4) с учетом (8), (9) и (10) найдем выражение для функции случайного воздействия входных шумов:

$$G = \frac{2}{C_1 \omega_1^2} \frac{J_{k0} a}{I_0} \left[\left(\frac{I_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos n \psi \right) \dot{\varepsilon} - \omega_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n I_n \sin n \psi \right) \ddot{\varepsilon} \right]. \quad (11)$$

Используя (6) и (11), после несложных, но промоздких преобразований получим следующее выражение для спектральных плотностей медленных случайных процессов $g_{sc}(t)$:

$$S_s = \left(\frac{a J_{k0}}{C_1 \omega_1} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 S_{\varepsilon}(n \omega_1), \quad (12)$$

$$S_c = \left(\frac{a J_{k0}}{C_1 \omega_1} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 S_{\varepsilon}(n \omega_1),$$

где $S_{\varepsilon}(n \omega_1)$ — спектральная плотность случайного сигнала на частоте $n \omega_1$,

$$C_0^2 = D_0^2 = \frac{I_1^2}{I_0^2},$$

$$C_n^2 = \frac{4}{I_0^2} \left[\left(\frac{n^2 I_n}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{n(1-n)}{\gamma} I_n + 2I_{n+1} \right)^2 \right],$$

$$C_n^2 = \frac{4}{I_0^2} \left[\left(I_{n+1} + \frac{2n}{\gamma} I_n \right)^2 + n^2 \left(n I_{n+1} + \frac{2n(n-1)}{\gamma} I_n \right)^2 \right] \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Из (12) видно, что при нелинейном преобразовании входного сигнала и шума вклад в амплитудные и частотные флуктуации сигнала дают все компоненты шума, лежащие вблизи частот $n \omega_1$. Степень влияния различных спектральных компонент на флуктуации зависит от режима работы генератора. На рис. 2 приведена зависимость коэффициентов C_i ($i = 0, 1, 2$) от амплитуды γ , из которой видно, что в некоторых

режимах преобладает влияние спектральных компонент шума вблизи частоты $2\omega_1$. Это связано, в частности, с тем, что в разложении (9) амплитуды гармоник тока $I_n(\gamma)$ медленно убывают с номером n , и, следовательно, взаимодействие шума с гармониками высокого порядка оказывает существенное влияние на флюктуации колебания генератора.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением амплитудных флюктуаций и сравним влияние тепловых шумов сопротивления базы и дробовых шумов выходного тока на амплитудные флюктуации рассмотреваемого генератора при типичных значениях входящих в (5) параметров.

Ограничим число членов суммы в (12) значениями $n \leq 2$. Тогда, используя известное выражение для спектральной плотности теплового шума сопротивления r_b , получим

$$S_s = \left(\frac{a J_{k0}}{C_1 \omega_1} \right)^2 \frac{k T r_b}{\pi} \sum_{n=0}^2 C_n^2, \quad (13)$$

где r_b — сопротивление базы транзистора.

Согласно [3], спектральные плотности $S_{\parallel, \perp}$ при воздействии на контур генератора дробовых шумов выходного тока активного элемента равны

$$S_{\parallel, \perp} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(C_1 \omega_1)^2} e J_0, \quad (14)$$

где J_0 — постоянная составляющая тока.

Определяя из (5) интенсивность относительных амплитудных флюктуаций с учетом (13) и (14), получаем

$$\overline{\rho^2} = \overline{\rho_T^2} + \overline{\rho_{dp}^2} = \frac{\omega^2}{p} \frac{1}{\pi (C_1 \omega_1)^2 R_0^2} \left[e J_0 + (a J_{k0})^2 k T r_b \sum_{n=0}^2 C_n^2 \right]. \quad (15)$$

Здесь $\overline{\rho_T^2}$, $\overline{\rho_{dp}^2}$ — составляющие интенсивности, обусловленные тепловым и дробовым шумом схемы, R_0 — амплитуда колебания на контуре.

Пусть $\omega_1 = 2\pi \cdot 10^7 \text{ Гц}$, $\frac{\omega}{p} = 10^{-2}$, $R_0 = 3V$, $k_1 = 5 \cdot 10^{-2}$, $C_1 \omega_1 = 10^{-2} \Omega^{-1}$, $J_0 \approx J_{k0} = 10^{-3} A$, $r_b = 10^2 \Omega$.

Подставляя численные значения в (15), получим $\overline{\rho_T^2} = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ Гц}^{-1}$, $\overline{\rho_{dp}^2} = 0,8 \cdot 10^{-14} \text{ Гц}^{-1}$. Для линейного приближения составляющая $\overline{\rho_T^2}$ при заданных параметрах схемы равна: $\overline{\rho_T^2} = 1,7 \cdot 10^{-14} \text{ Гц}^{-1}$. Следовательно, учет нелинейного преобразования приводит к заметному увеличению флюктуационных составляющих колебания, связанных с действием входных шумов.

Автор выражает благодарность А. В. Якимову за полезные критические замечания и внимание к работе.

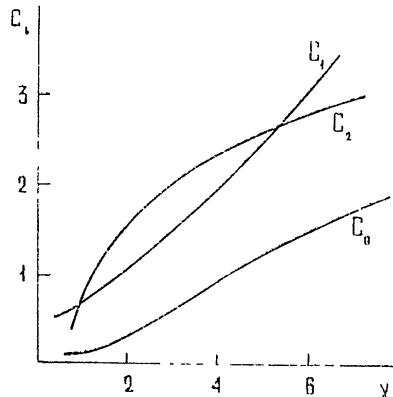


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 8, 1461 (1968).
2. В. И. Волошин, Изв. АН СССР, серия физико-энергетических наук, 1, 119 (1968).
3. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
4. А. С. Майдановский, Радиотехника и электроника, 6, 1554 (1961).

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
21 января 1975 г.

THE EFFECT OF THE INPUT CIRCUIT NOISES ON AMPLITUDE
FLUCTUATIONS OF A SELF-GENERATOR

F. P. Rakina

The effect of the input noises of an active element on fluctuations of the self-generator oscillation is considered. The nonlinear noise transformation by the active element is regarded. By the example of a transistor oscillator it is shown that the account of nonlinear transformation leads to an essential increase in fluctuation components caused by the input noises of the circuit. A numerical estimation is given.

УДК 538.573

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕДАХ

Б. М. Болотовский, А. И. Плис, С. Н. Столяров

Показано, что при резком изменении диэлектрической проницаемости среды во времени распространяющийся в ней импульс излучения произвольной формы превращается в два новых импульса прежней формы, распространяющихся в противоположных направлениях с новой скоростью. Вычислены коэффициенты трансформации и исследовано влияние поглощения и дисперсии в среде на трансформацию этих импульсов излучения при таком резком изменении диэлектрической проницаемости среды во времени

1. Исследования по распространению и излучению волн в нестационарных средах начались более пятнадцати лет тому назад (см. обзор [1] и приведенную там литературу). Были рассмотрены задачи о трансформации плоских монохроматических волн при резком изменении во времени диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей безграничной среды [2], в волноводах [3] с постоянным ϵ и с $\mu(t) = (a + bt)^2$, в средах с линейным [4] и экспоненциальным [5] изменением диэлектрической проницаемости во времени [14], а также в системах с распределенными медленно меняющимися в пространстве и во времени параметрами (в частности, по закону бегущей волны) [1]. Кроме того были решены задачи об излучении заряженных частиц и осцилляторов в нестационарных средах с бегущими периодически меняющимися параметрами (см. работу [6] и приведенную в ней литературу), а в работе [7] найдена функция Грина мгновенного точечного источника в безграничной среде при резком скачке ϵ во времени. Недавно появилась работа Гинзбурга [8], в которой рассмотрены особенности излучения равномерно движущейся заряженной частицы при резком скачке $\epsilon(t)$ в безграничной среде. В предлагаемой статье, стимулированной этой работой, рассмотрено распространение произвольных волновых пакетов (сигналов) в такой среде с учетом потерь и дисперсии.

2. Рассмотрим однородную, изотропную и безграничную среду, диэлектрическая проницаемость которой скачкообразно меняется во времени во всем пространстве одновременно:

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon_1 = \text{const} & (t < 0) \\ \epsilon_2 = \text{const} & (t > 0) \end{cases}. \quad (1)$$

Пусть в этой среде при $t < 0$ распространяется импульс электромагнитного* излучения произвольной формы $\phi(r, t)$, вектор электрической индукции $D_1(r, t)$ которого имеет вид $D_1(r, t) = e\phi(r, t)$,

* Тем же методом может быть рассмотрено звуковое, гравитационное или любое другое излучение при резком изменении во времени скорости распространения соответствующих волн.

где \mathbf{e} — единичный вектор поляризации. В данном разделе мы будем рассматривать среды без дисперсии и потерь, так что все импульсы сохраняют свою форму неизменной, а скорости их перемещений совпадают с фазовыми скоростями света $v_{1,2} = c/n_{1,2}$ ($n_{1,2}^2 = \epsilon_{1,2}$). Здесь и далее индексами 1 и 2 обозначаются соответствующие величины до (при $t < 0$) и после (при $t > 0$) скачка (1).

Направим ось x по направлению распространения импульса излучения $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Тогда из уравнений Максвелла [9] следует, что функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет при $t < 0$ одномерному волновому уравнению Даламбера:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Пусть импульс излучения до скачка (при $t < 0$) имеет вид

$$\varphi(x, t) = \varphi(x - v_1 t), \quad (3)$$

т. е. является одним из двух частных решений уравнения (2). Формула (3) описывает импульс, форма которого определяется заданной функцией $\varphi(x)$. Этот импульс распространяется в положительном направлении оси x со скоростью $v_1 = c/n_1$. После скачка (1) при $t > 0$ индукция $\mathbf{D}_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению (2) с заменой v_1 на $v_2 = c/n_2$.

Из уравнений Максвелла следует [2, 8], что при резком изменении во времени диэлектрической и магнитной проницаемостей векторы электрической и магнитной индукции непрерывны в момент скачка. В немагнитных средах эти условия приводят к соотношениям:

$$\mathbf{D}_1(x, 0) = \mathbf{D}_2(x, 0), \quad \left. \frac{\partial \mathbf{D}_1(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{D}_2(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (4)$$

Отсюда сразу следует, что направление поляризации вектора \mathbf{D}_2 после скачка (1) совпадает с направлением поляризации вектора \mathbf{D}_1 до скачка (1), т. е. $\mathbf{D}_2(x, t) = \mathbf{e} u(x, t)$. Искомая функция $u(x, t)$ определяется как решение одномерного волнового уравнения вида (2), в котором скорость v_1 нужно заменить на скорость $v_2 = c/n_2$. Она удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$u(x, t=0) = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv \psi(x); \quad (5)$$

найти ее можно с помощью формулы Даламбера [10]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ [\varphi(x + v_2 t) + \varphi(x - v_2 t)] + \frac{1}{v_2} \int_{x-v_2 t}^{x+v_2 t} \psi(y) dy \right\}. \quad (6)$$

Подставляя в эту формулу правые части равенств (5), для $u(x, t)$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_1}{v_2} \right) \varphi(x - v_2 t) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_1}{v_2} \right) \varphi(x + v_2 t) = \\ &= u^{(+)}(x, t) + u^{(-)}(x, t), \end{aligned} \quad (7a)$$

где

$$u^{(\pm)}(x, t) = C^{(\pm)} \varphi(x \mp v_2 t), \quad \text{а} \quad C^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{v_1}{v_2} \right). \quad (7b)$$

Таким образом, если до скачка (1) при $t < 0$ в среде в положительном направлении оси x распространялся с постоянной скоростью v_1 импульс излучения произвольной формы $\varphi(x)$ вида (3) с характерным пространственным масштабом L и соответствующей длительностью $T_1 = 2L/v_1$, то после скачка (1) при $t > 0$ вместо этого импульса появляются два новых импульса той же самой формы $\varphi(x)$, имеющие тот же самый пространственный масштаб L . Один из них, $u^{(+)}(x, t) = C^{(+)}\varphi(x - v_2 t)$, распространяется с новой скоростью v_2 в том же направлении, что и первоначальный импульс $\varphi(x - v_1 t)$ и имеет амплитуду $C^{(+)}$ из (7 б). Другой импульс, $u^{(-)}(x, t) = C^{(-)}\varphi(x + v_2 t)$, имея амплитуду $C^{(-)}$ из (7 б), перемещается со скоростью v_2 в направлении, противоположном направлению распространения первоначального (при $t < 0$) импульса $\varphi(x - v_1 t)$, т. е. начинает как бы «пятиться назад». Оба эти импульса имеют длительность $T_2 = 2L/v_2 = T_1 \frac{v_1}{v_2}$, отличную от длительности $T_1 = 2L/v_1$ первоначального импульса (3), так что при скачке из оптически более плотной среды в менее плотную, т. е. при $v_2 > v_1$, происходит уменьшение длительности импульсов, а при $v_2 < v_1$ — увеличение их длительности. Эти два новых импульса имеют после скачка эффективное пространственное перекрытие в течение интервала времени $\tau = L/v_2$.

В частном случае, когда функция $\varphi(x)$, описывающая поле до скачка, имеет вид

$$\varphi = A \exp \{i(kx - \omega_1 t)\}, \quad (8a)$$

полученные выше формулы приводят к результату Моргенталера [2]

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \left(1 + \frac{v_1}{v_2} \right) \exp \{i(kx - \omega_2 t)\} + \frac{A}{2} \left(1 - \frac{v_1}{v_2} \right) \exp \{i(kx + \omega_2 t)\}, \quad (8b)$$

где $\omega_2 = \omega_1 v_2 / v_1$.

Таким образом, результат Моргенталера для преобразования плоской волны мы получили как следствие, решая задачу Коши по методу Даламбера. Обратно, зная результат Моргенталера (8 б), мы можем определить закон трансформации импульсов произвольной формы. Действительно, пусть нам задан произвольный импульс $\varphi(x - vt)$. Разложим его в интервал Фурье по плоским волнам:

$$\varphi(x - vt) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A_k \exp \{ik(x - vt)\}. \quad (9)$$

Каждая из плоских волн, по которым разлагается импульс φ , имеет волновой вектор k , частоту $\omega = kv$ и амплитуду A_k . После скачка каждая такая волна преобразуется по закону (8 б). Совершая обратное преобразование Фурье над двумя слагаемыми в (8 б), где вместо A следует подставить A_k из (9), получаем два импульса (7 а). Как будет видно из дальнейшего, этот способ удобен в том отношении, что допускает естественное обобщение на случай дисперсии.

Общие формулы (7) можно проиллюстрировать конкретными примерами «развала» начального возмущения $\varphi(x)$. Мы, однако, не будем этого делать, так как соответствующие примеры для $\varphi(x)$ в виде полу бесконечной или ограниченной «ступеньки», а также для синусоидальных ограниченных или полуограниченных импульсов приведены в учебниках по математической физике.

3. Полученные в предыдущем разделе результаты справедливы только для сред в отсутствие дисперсии и потерь. Поскольку в диспер-

гирующих или поглощающих средах разные монохроматические компоненты импульса (9) распространяются с разными скоростями, то это естественно будет приводить к их расплыванию и деформации. Изучим оба эти эффекта.

Для этого рассмотрим сначала трансформацию произвольных импульсов при резком скачке типа (1) из прозрачной среды с вещественным показателем преломления $n_1 = \varepsilon_1^{1/2}$ в поглощающую среду с комплексным показателем преломления $\tilde{n}_2 = (\tilde{\varepsilon}_2)^{1/2}$, где $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon'_2 + i\varepsilon''_2$ — комплексная диэлектрическая проницаемость изотропной среды после скачка. Обычно поглощение мало, т. е. $\varepsilon''_2 \ll \varepsilon'_2$ и среду можно охарактеризовать вещественным показателем преломления $n_2 = (\varepsilon'_2)^{1/2}$ и коэффициентом поглощения $a_2 = 4\pi\sigma_2/cn_2$, где $\sigma_2 = \omega\varepsilon''_2/4\pi$ — проводимость среды после скачка.

В этом случае из уравнений Максвелла при $t > 0$ для функции $u(x, t)$ вместо уравнения вида (2) будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2b_2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (10)$$

с теми же начальными условиями (5). Здесь $v_2 = c/n_2$ и $b_2 = 2\pi\sigma_2/c^2$. Это уравнение с помощью замены

$$u(x, t) = \exp(-bt) \chi(x, t) \quad (11)$$

можно привести к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v_2^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + b^2 \chi, \quad (12)$$

имеющему согласно (5) и (11) начальные условия

$$\chi(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial \chi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) + b \varphi(x) = b \varphi(x) - v_2 \varphi'(x) \equiv F(x), \quad (13)$$

где

$$b = b_2 v_2^2 = 2\pi\sigma_2/\varepsilon'_2 \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = \frac{d \varphi(x)}{dx}.$$

Точное решение уравнения (12) с начальными условиями (13), найденное по методу Римана, приведено в [11] и имеет вид*

$$\chi(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ [\varphi(x + v_2 t) + \varphi(x - v_2 t)] + \int_{x-v_2 t}^{x+v_2 t} dz \Phi(z, x, t) \right\}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) = & \frac{F(z)}{v_2} J_0 \left(\frac{b}{v_2} \sqrt{(z-x)^2 - v_2^2 t^2} \right) + \\ & + b t \varphi(z) \frac{J_1 \left(\frac{b}{v_2} \sqrt{(z-x)^2 - v_2^2 t^2} \right)}{\sqrt{(z-x)^2 - v_2^2 t^2}}, \end{aligned} \quad (14a)$$

* Здесь по сравнению с [11] исправлен знак перед вторым слагаемым в выражении для $\Phi(x, z, t)$.

а $J_0(\xi)$ и $J_1(\xi) = -\frac{dJ_0(\xi)}{d\xi}$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка. Отсюда после интегрирования по частям и замены переменных для функции $u(x, t)$ в (11) получим следующее выражение:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (15a)$$

где

$$u_1(x, t) = \exp(-bt) \{u_1^{(+)}(x, t) + u_1^{(-)}(x, t)\},$$

$$u_2(x, t) = \frac{bt}{2} \{u_2^{(+)}(x, t) + u_2^{(-)}(x, t)\}, \quad (15b)$$

$$u_1^{(\pm)}(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{v_1}{v_2} \right) \varphi(x \mp v_2 t), \quad u_2^{(\pm)}(x, t) = \int_0^1 d\lambda u_2^{(\pm)}(\lambda, t) \varphi[x \mp v_2(\lambda)t]$$

при

$$u_2^{(\pm)}(\lambda, t) = p(\lambda, t) \mp q(\lambda, t), \quad q(\lambda, t) = v_2 I_1(bt\lambda) \frac{\exp(-bt)}{v_2},$$

$$p(\lambda, t) = \exp(-bt) [\lambda I_0(bt\lambda) - I_1(bt\lambda)] (1 - \lambda^2)^{-1/2}, \quad (15b)$$

$$v_2(\lambda) = v_2(1 - \lambda^2)^{1/2}, \quad v_{1,2} = c/n_{1,2}, \quad b = 2\pi\sigma_2/\epsilon_2'.$$

Здесь $I_{0,1}(z)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого и первого порядка, а λ — переменная интегрирования. Задавая конкретный вид импульса $\varphi(x - v_1 t)$ до скачка (при $t < 0$), можно получить вид решения при $t > 0$.

Из выражений (15) видно, что при скачке вида (1) из прозрачной в поглощающую среду решение после скачка состоит из импульсов двух типов. Первый тип решения, $u_1(x, t)$, представляет из себя обычные импульсы вида (7), перемещающиеся со скоростью $v_2 = c/n_2$ в противоположных направлениях, амплитуды которых при $t > 0$ экспоненциально уменьшаются со временем из-за наличия потерь в среде. Второй тип решения, $u_2(x, t)$, состоит из бегущих в противоположные стороны импульсов $u_2^{(\pm)}(x, t)$, каждый из которых является суперпозицией импульсов $\varphi(x \mp v_2(\lambda)t)$ прежней формы (3) с весами $u_2^{(\pm)}(\lambda, t)$, распространяющихся с различными скоростями $v_2(\lambda) = v_2(1 - \lambda^2)^{1/2}$. Последнее качественно можно рассматривать как проявление дисперсии, возникающей в поглощающей среде. Поскольку при $\lambda = 0$ $v_2(0) = v_2$, а при $\lambda = 1$ $v_2(1) = 0$, то эта дисперсия является довольно сильной. Разлагая функции $I_{0,1}(bt\lambda)$ при $bt\lambda \ll 1$ в ряд или используя при $bt\lambda \gg 1$ их асимптотические разложения, можно из выражений для $u_2^{(\pm)}(\lambda, t)$ (15в) показать, что компоненты с малой скоростью $v_2(\lambda) \approx 0$ при $\lambda \approx 1$ «набирают» единичную амплитуду к моменту времени $\tau_1 \sim \frac{1}{b}$ после скачка, а компоненты со скоростью $v_2(\lambda) \approx v_2$ при $\lambda \ll 1$ «набирают» единичную амплитуду к моменту $\tau_2 \approx \frac{1}{b\lambda} \approx \frac{\tau_1}{\lambda}$ после скачка, т. е. намного медленнее, чем компоненты с малой скоростью.

Таким образом, учет поглощения при резком скачке диэлектрической проницаемости во времени, кроме обычного затухания во времени амплитуды двух импульсов (7) прежней формы, приводит, как это видно в (15), к появлению двух дополнительных импульсов, распространяющихся с заметным искажением своей формы. Амплитуды этих

импульсов сначала растут линейно со временем от момента скачка, а затем, достигая максимума, уменьшаются экспоненциально со временем. В отсутствие поглощения ($b = 0$) эти импульсы исчезают, а решение (15) переходит в (7). Вычисление интегралов в (15 б) затруднено из-за сложного вида функций $p(\lambda, t)$ и $q(\lambda, t)$ даже при очень простом виде функции $\varphi(x - v_1 t)$, например, в виде «ступеньки».

4. Деформация импульсов будет происходить и в отсутствие поглощения, если в среде после скачка существенна частотная и пространственная дисперсия. Частным случаем такой среды может быть изотропная плазма, в которой показатель преломления n_2 зависит от величины волнового вектора \mathbf{k} и не зависит от его направления, т. е. $n_2 = n_2(\omega, k^2)$. В этом случае решение $u(x, t)$ после скачка в отличие от (9) нужно раскладывать по плоским монохроматическим незатухающим волнам:

$$u(x, t) = \int dk \int d\omega u(\omega, k) \delta \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega, k^2) \right] \exp \{i(kx - \omega t)\}. \quad (16)$$

Здесь направление оси x совпадает с направлением распространения импульса (3) до скачка. Дельта-функция в (16) отбирает свободные волны в такой среде, удовлетворяющие дисперсионному уравнению

$$L(\omega, k) = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega, k^2) = 0 \quad (17a)$$

или

$$k = \pm \frac{\omega}{c} n(\omega, k^2).$$

В общем случае эти уравнения имеют M решений вида

$$\omega_j^{(\pm)} = \omega_j^{(\pm)}(k) \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (17b)$$

Поэтому функцию $u(x, t)$ в (16) можно представить в виде

$$u(x, t) = u^{(+)}(x, t) + u^{(-)}(x, t), \quad (18a)$$

где

$$u^{(\pm)}(x, t) = \sum_{j=1}^M \int dk A_j^{(\pm)}(k) \exp \{ik[x \mp v_j^{(\pm)}(k)t]\} \quad (18b)$$

при

$$A_j^{(\pm)}(k) = u(\omega_j^{(\pm)}(k), k) \left/ \left| \frac{\partial L(\omega, k^2)}{\partial \omega} \right| \right|_{\omega=\omega_j^{(\pm)}(k)},$$

а $v_j^{(\pm)}(k) = \frac{\omega_j^{(\pm)}(k)}{k}$ — фазовая скорость j -й свободной волны в рассматриваемой среде. Индекс «+» соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси x , а индекс «—» в отрицательном направлении оси x .

Как видно из этих выражений, общее решение (18 а) состоит из двух волновых пакетов, распространяющихся в противоположных направлениях, каждый из которых состоит из M плоских волн, имеющих различные скорости $v_j^{(\pm)}(k)$.

Неизвестные амплитуды $A_j^{(\pm)}(k)$ волн, составляющих эти волновые пакеты, определяются из условий на скачке в момент $t = 0$ с использованием решений (17 б) дисперсионного уравнения (17 а). В простейшем случае немагнитных сред без дисперсии и потерь дис-

персионное уравнение имеет только два решения, а условия на скачке имеют вид (4). Поэтому мы приходим к результату Моргенталера (8 б). Для волн в пиротропной среде без дисперсии дисперсионное уравнение имеет уже четыре решения и при скачке параметра гирации вместо одной линейно-поляризованной волны возникают четыре циркулярно поляризованные волны [15]. Их амплитуды однозначно определяются из тех же условий (4). В более сложных случаях, например, при учете частотной дисперсии в пиротропных средах, для магнитоплазмы и т. п., дисперсионное уравнение (17а) может иметь еще большее число решений. При этом условии (4) может оказаться недостаточно для определения неизвестных амплитуд $A_j^{(\pm)}(k)$. Тогда аналогично тому, как это имеет место в граничных задачах для сред с пространственной дисперсией [13], могут потребоваться дополнительные начальные условия на временном скачке. Все эти вопросы требуют дополнительных исследований, которые выходят за рамки данной работы.

Авторы благодарны В. Л. Гинзбургу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
- F. R. Morgenstaler, IRE Trans., Microwave Theory and Techniques, MTT-6, 167 (1958).
- С. И. Аверков, Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 5, 818 (1960).
- Г. А. Аскарян, В. А. Погосян, ЖЭТФ, 65, вып. 1, (7), 115 (1973).
- С. Н. Столяров, Б. М. Болотовский, А. И. Плис, В. Е. Рок, А. Р. Чигирев, Тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, г. Ереван, 1973, изд. ВНИИРИ, Москва—Ереван, кн. 2, стр. 417.
- К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 2, 242 (1970).
- L. B. Felsen, G. M. Whitman, IEEE Trans. Ant. Prop., AP-18, № 2, 242 (1970).
- В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 512 (1973).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
- А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1972.
- Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, Основные дифференциальные уравнения математической физики, ГИФМЛ, М., 1962.
- В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
- В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука, М., 1965.
- С. Н. Столяров, Краткие сообщения по физике, ФИАН СССР, М., № 1, 46 (1974); № 3, 20 (1974).
- В. Е. Рок, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1728 (1974).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
31 января 1975 г.

PROPAGATION OF RADIATION PULSES IN NONSTATIONARY MEDIA

B. M. Bolotovskii, A. I. Plis, S. N. Stolyarov

It is shown that when the dielectric permittivity of a medium varies sharply in time, the arbitrary radiation pulse propagating in it transforms into two new pulses of the former shape propagating in opposite direction with a new velocity. The transformation coefficients are calculated. The influence of absorption and dispersion in the medium on these radiation pulses transformation in the case of such a sharp change of the medium dielectric permittivity in time is investigated.

УДК 535.42

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА В СРЕДЕ, ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ КОТОРОЙ СОДЕРЖИТ ДВЕ КРАТНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГАРМОНИКИ

A. M. Мартынов

Предложена методика решения волнового уравнения для случая дифракции света в слое среды, показатель преломления которой содержит первую и вторую пространственные гармоники. По этой методике, основанной на суммировании рядов теории возмущений, осуществлены численные расчеты амплитуд и фаз парциальных волн (т. е. волн, дифрагированных в направлении данного спектра при отдельном акте рассеяния) и интенсивностей первых спектров в зависимости от приведенного угла падения световой волны для фиксированных значений волнового параметра и параметров Рамана—Ната. В работе исследованы также зависимости интенсивностей спектров от разности фаз между первой и второй пространственными гармониками.

Дифракция волн в средах с пространственно-периодическим распределением показателя преломления при наличии нескольких гармоник обсуждалась в литературе, в основном, применительно к задаче дифракции света на ультразвуке, когда высшие акустические гармоники возникают вследствие нелинейности среды [1–6]. В работах [1–5] это явление исследовалось экспериментально и теоретически в приближении фазовой модуляции Рамана—Ната, а в работе [6]—для произвольного дифракционного режима, но лишь в приближении двукратного рассеяния.

В данной работе предложена методика решения задачи дифракции света в среде, показатель преломления которой возмущен двумя кратными пространственными гармониками, в приближении многократного рассеяния для произвольного дифракционного режима. Как и в предыдущей нашей работе [7], предлагаемая методика основана на решении волнового уравнения в виде рядов теории возмущений, отличительная черта которой состоит в том, что процедура вычислений многократных интегралов с переменными ядрами сводится путем простых алгебраических преобразований к суммированию многократных интегралов с постоянным ядром. Ряд возмущений по этой методике строится при помощи диаграмм рассеяния, существенно упрощающих формализм математических выкладок и дающих наглядную физическую картину явления. Краткое описание методики дано в первом разделе статьи, а во втором разделе обсуждаются результаты конкретных численных расчетов, выполненных в приближении трехкратного рассеяния.

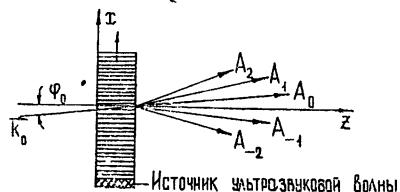
1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть в изотропной среде в области Z показатель преломления в направлении оси x изменяется по закону

$$n(x) = n_0 [1 + \varepsilon_1 \cos(k^*x + \beta_1) + \varepsilon_2 \cos(2k^*x + \beta_2)], \quad \varepsilon_{1,2} = \frac{\Delta n_{1,2}}{n_0}, \quad (1)$$

т. е. кроме первой гармоники ультразвука с волновым числом $k^* = 2\pi/\Lambda$ содержитя еще и вторая пространственная гармоника с волновым числом $2k^*$, а под углом φ_0 к оси z падает плоская световая волна единичной амплитуды (см. рис. 1):

Рис. 1. К расчету дифракции света на двух кратных пространственных гармониках.



$$E_0 = \exp[-ik(x \sin \varphi_0 + z \cos \varphi_0)], \quad (2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число электромагнитной волны. В предположении, что длина волны света значительно короче периода дифракционной решетки ($\lambda \ll \Lambda$), волновое уравнение $\Delta E + k_0^2 n^2(x) E = 0$ можно заменить, сделав подстановку $E = E_0 W$ и отбросив вторую производную по z [8], параболическим уравнением вида

$$\frac{\partial W}{\partial u} + i \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial W}{\partial \xi} = -2i[h_1 \cos(\xi + \beta_1) + h_2 \cos(2\xi + \beta_2)], \quad (3)$$

где $u = \pi\lambda z/\Lambda^2$ — волновой параметр, $\xi = k^*x$, $\gamma = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_{bp}}$ — приведенный угол падения, φ_{bp} — брэгговский угол,

$$\sin \varphi_{bp} = \frac{\lambda}{2\Lambda}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n_0}, \quad h_{1,2} = \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2 \varepsilon_{1,2}.$$

Если пренебречь отражением света на скачках показателя преломления в начале и конце области Z , уравнение (3) следует решать с граничным условием: $W|_{u=0} = 1$. Нормированное таким образом поле световой волны представим в виде суперпозиции плоских волн, $W = \sum_m A_m e^{-im\xi}$, и будем вычислять амплитуды спектров A_m методом возмущений в виде ряда по h_1 и h_2 :

$$A_m = \sum_{n,p} A_m^{(n,p)}, \quad (4)$$

где $A_m^{(n,p)} \sim h_1^n h_2^p$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $h_1^n h_2^p$, найдем, что вопрос об определении амплитуд парциальных волн $A_m^{(n,p)}$ сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений вида

$$A_m^{(n,p)} = \hat{l}_m \sum_{+, -} (h_1 e^{\mp i\beta_1} A_{m\pm 1}^{(n-1,p)} + h_2 e^{\mp i\beta_2} A_{m\pm 2}^{(n,p-1)}), \quad (5)$$

где $\hat{l}_m = \frac{-i}{\hat{D} - ia_m}$, $a_m = m(m+1)$, $\hat{D} = \frac{d}{du}$ — оператор дифференцирования. Амплитуды $A_m^{(n,p)}$ должны удовлетворять следующим начальным условиям при $u = 0$: $A_0^{(0,0)} = 1$ и $A_m^{(n,p)} = 0$ при всех n, p и m , одновременно не равных нулю.

На рис. 2 приведена схема рассеяния света, поясняющая физиче-

ский смысл формулы (4). На этом рисунке по вертикальной оси откладывается порядок спектра m , а по горизонтальной оси — кратность рассеяния $k = n + p$. В первом акте рассеяния на первой гармонике световой луч частично переходит на ± 1 уровни (сплошная линия), а на

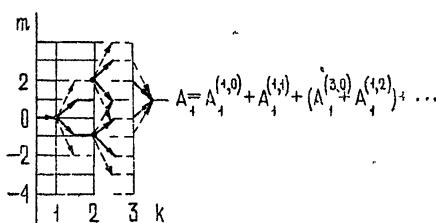


Рис. 2. Схема рассеяния света при дифракции.

второй — на ± 2 уровнях (пунктирная линия) соответственно с парциальными амплитудами $A_{\pm 1}^{(1,0)}$ и $A_{\pm 2}^{(0,1)}$. При вторичном рассеянии на первой и второй гармониках соответственно луч из спектра -1 частично трансформируется в $0, -2$ и в $+1, -3$ спектры, а из $+2$ спектра — в $+3, +1$ и в $0, +4$ спектры (чтобы не загромождать рисунок, схемы рассеяния света из $+1$ и -2 спектров не приводятся). Непосредственно из схемы видно, что в спектре $+1$ при двукратном рассеянии имеется одна парциальная волна с амплитудой $A_{+1}^{(1,1)}$, а амплитуды $A_{+1}^{(2,0)}$ и $A_{+1}^{(0,2)}$ равны нулю.

Пользуясь уравнением (5) как рекуррентным соотношением, можно построить в операторной форме формулу для амплитуд парциальных волн, дифрагированных в любой спектр при заданном числе актов рассеяния. Эту процедуру значительно проще осуществить с помощью диаграмм рассеяния. На рис. 3 эти диаграммы построены для

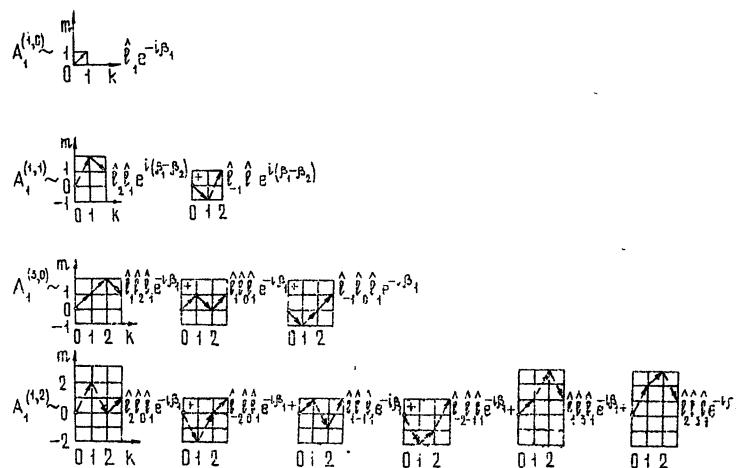


Рис. 3. Диаграммы рассеяния парциальных волн первого порядка дифракции.

спектра $+1$ до третьего акта рассеяния включительно. Амплитуда первой парциальной волны определяется одним спектральным переходом типа $0 \rightarrow +1$ и описывается оператором $\hat{t}_{+1} e^{-i\beta_1}$, а второй — двумя спектральными переходами и двумя комбинациями рассеяния: $0 \rightarrow +2 \rightarrow +1$ и $0 \rightarrow -1 \rightarrow +1$, каждой из которых ставится в соответ-

ствие операторы $\hat{l}_{+2} e^{-i\beta_2}$, $\hat{l}_{+1} e^{i\beta_1}$ и $\hat{l}_{-1} e^{i\beta_1}$, $\hat{l}_{+1} e^{-i\beta_2}$, а полный эффект дается их суммой. Аналогично строятся диаграммы и структурные формулы для парциальных волн более высокого порядка. Эти формулы будут состоять из сумм произведений вида $\hat{l}_1 \hat{l}_2 \dots \hat{l}_k$, представляющих собой правильную несократимую дробь относительно дифференциальных операторов $(\hat{D} - i\alpha_k)^{-1}$. Как и в предыдущей работе [7], представим эту дробь в виде суммы элементарных дробей вида $\sum_{i,k} q_{ik} \hat{l}_i^k$, куда

входят только смешанные степени элементарных операторов \hat{l}_j^k , но не входят смешанные степени операторов вида $\hat{l}_m^k \hat{l}_j^l$. Например, если $\alpha_m \neq \alpha_j$, то

$$\hat{l}_m \hat{l}_j = \frac{-1}{(\hat{D} - i\alpha_m)(\hat{D} - i\alpha_j)} = \mu_{mj} (\hat{l}_m - \hat{l}_j), \quad \mu_{mj} = \frac{-1}{\alpha_m - \alpha_j}.$$

Интегралы же, отвечающие действию оператора \hat{l}_j^k на единицу, как и в работе [7], вычисляются по элементарным формулам:

$$\hat{l}_0^k = \frac{(-iU)^k}{k!}, \quad \hat{l}_m^k = \frac{1}{\alpha_m^k} \left[1 - e^{i\alpha_m U} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-i\alpha_m U)^j}{j!} \right] \left(\alpha_m \neq 0, U = \frac{\pi\lambda Z}{\Lambda^2} \right). \quad (6)$$

Процедура вычислений амплитуд парциальных волн, таким образом, сводится к построению операторных полиномов в виде сумм степеней элементарных операторов. Формулы для коэффициентов при операторах \hat{l}_m^k промоздки, но определяются элементарно и поэтому в работе не приводятся. Заметим, что эту методику решения волнового уравнения легко обобщить для случая дифракции света на произвольном числе пространственных гармоник.

Конкретно вычислялись не величины $A_m^{(n,p)}$, а коэффициенты $a_m^{(n,p)}$, через которые амплитуды волн выражаются соотношениями

$$A_{\pm 1}^{(1,0)} = \nu_1 e^{\mp i\beta_1} a_{\pm 1}^{(1,0)}, \quad A_{\pm 1}^{(1,1)} = \nu_1 \nu_2 e^{\mp i(\beta_1 - \beta_2)} a_{\pm 1}^{(1,1)}; \quad (7)$$

$$A_{\pm 1}^{(3,0)} = \nu_1^3 e^{\mp i\beta_1} a_{\pm 1}^{(3,0)} \text{ и } A_{\pm 1}^{(1,2)} = \nu_1 \nu_2^2 e^{\mp i\beta_1} a_{\pm 1}^{(1,2)}, \quad (8)$$

где $\nu_{1,2} = \varepsilon_{1,2} \frac{2\pi}{\lambda} Z$ — параметры Рамана—Ната. Амплитудные коэффициенты удобны тем, что зависят только от параметров γ и U , но не зависят от параметров Рамана—Ната ν_1 и ν_2 . Графики модулей коэффициентов $a_1^{(1,1)}$ и $a_1^{(1,2)}$ и их фаз, рассчитанные по этой методике, представлены на рис. 4 и 5. Аналогичные кривые для $a_1^{(1,0)}$ и $a_1^{(3,0)}$, отвечающие дифракции света на одной основной гармонике, приведены в работе [7].

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

1. Влияние акустической нелинейности на закон модуляции света при дифракции. Положим, что электрический сигнал $s(t) = b \cos(\omega t + \beta)$ преобразуется в акустический, распространяющийся в нелинейной среде без диссипации [9, 10] со скоростью c . Если ограничиться слабой

нелинейностью, форму ультразвукового сигнала*, в соответствии с принятыми в акустике обозначениями, можно приближенно представить в виде

$$\varepsilon_1 = \eta g, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1^2 \Gamma \xi, \quad \beta_1 = \beta + \pi, \quad \beta_2 = 2\beta + \frac{\pi}{2}, \quad (9)$$

где коэффициент η определяется через показатель преломления и упругооптические постоянные среды, g — продольная деформация, Γ — параметр нелинейности. Например, для кристалла ниобата лития, ориентированного так, что оптическая ось $x_3 = x$, а свет поляризован в направлении оси $x_1 = y$, коэффициент $\eta = \frac{1}{2} n_1^2 p_{13}$, где n_1 — показатель преломления света заданной поляризации, p_{13} — соответствующая компонента упругооптического тензора.

В приближении трехкратного рассеяния амплитуда волн, дифрактированной в направлении первого спектра, с учетом соотношений (7) — (9), равна

$$A_{\pm 1} = - [b v_1 a_{\pm 1}^{(1,0)} \mp i b^3 v_1 v_2(x) a_{\pm 1}^{(1,1)} + b^3 v_1^3 a_{\pm 1}^{(3,0)} + b^5 v_1 v_2^2(x) a_{\pm 1}^{(1,2)}] e^{\mp i \beta}, \quad (10)$$

где $v_2 = v_1^2 \mu \frac{\lambda_0}{\Lambda} \frac{x}{Z}$, $\mu = \frac{\Gamma}{n_0 \eta}$, x — расстояние от акустического излучателя до точки наблюдения.

Когда амплитуда второй гармоники равна нулю, то $v_2 = 0$ и нелинейное искажение A_1 относительно сигнала $s(x)$ обусловлено исключительно дифракционной природой модуляции света. Этот случай подробно исследован в работе [7]. Отношение модулей второго к третьему членов в формуле (10) характеризует степень влияния акустической нелинейности по сравнению с дифракционной на искажение A_1 и равно

$$x = |\mu| \frac{\lambda_0}{\Lambda} \frac{x}{Z} \frac{|a_1^{(1,1)}|}{|a_1^{(3,0)}|}. \quad (11)$$

Это отношение зависит от геометрии, режима дифракции (т. е. от параметров γ и U), физической постоянной среды μ и не зависит от мощности акустической волны. Исследуем зависимость x от толщины акустического столба Z и несущей частоты сигнала $f = \omega/2\pi$ при прочих неизменных условиях.

В формуле (11) положим $Z = \frac{U \cdot \Lambda^2}{\pi \lambda}$ и воспользуемся графическими значениями модулей амплитудных коэффициентов. Расчеты показывают, что для брэгговского угла падения света ($\gamma = -1$) с увеличением U от 1 до 3 (эквивалентное увеличению Z от $L = \Lambda^2/\lambda$ до $3L$) величина x падает на $\sim 80\%$.

С изменением частоты обобщенные параметры меняются по закону

$$U = \pi \frac{f^2}{f_0^2}, \quad |\gamma| = \frac{f^*}{f}, \quad (12)$$

где $f_0 = \frac{c}{\sqrt{\lambda Z}}$, $f^* = \frac{2 |\sin \phi_0| c}{\lambda}$ — брэгговская частота модулятора.

С помощью соотношений (12) на рис. 4 построены кривые A и B ,

* В силу квазистационарного характера задачи будем считать ультразвук застывшим в среде [8].

описывающие характер изменения коэффициентов $|a_1^{(1,1)}|$ и $|a_1^{(1,2)}|$ с частотой для двух значений брэгговской частоты $f^* = f_1$ и f_2 , где $f_1 = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}}$ и $f_2 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}f_0$.

Аналогичные кривые для $|a_1^{(3,0)}|$ приведены в работе [7]. С увеличением частоты от f_1 до f_2 в первом и втором случаях χ увеличивается на 90 и 60 %. Поэтому, когда угол падения света равен брэгговскому углу для высшей из частот, влияние акустической нелинейности минимально.

В литературе известны системы с подстройкой акустического или светового потоков по брэгговскому углу в соответствии с несущей частотой радиосигнала (т. е., когда величина γ не зависит от f и $|\gamma| = 1$), в которых, согласно расчетам в указанном выше частотном диапазоне, χ увеличивается на $\sim 55\%$. Поэтому такие модуляторы выгоднее систем с постоянным значением φ_0 как с точки зрения максимизации интенсивности в спектре, так и в связи с минимизацией влияния акустической нелинейности.

Применимельно к выбранной ранее ориентации кристалла ниобата лития $c = 7,33 \cdot 10^6 \text{ мм/с}$ [6] и при $\lambda_0 = 0,63 \cdot 10^3 \text{ мм}$ величина $\mu = 1,47$. Полагая $Z = 5 \text{ мм}$, на расстоянии $x = 36 \text{ мм}$ от излучателя получаем, что в частотном диапазоне $f = 80 \div 195 \text{ МГц}$ в модуляторе с фиксированным углом φ_0 и брэгговской частотой $f^* = 80 \text{ МГц}$ величина $\chi = 28 \div 52\%$, а в модуляторе с угловой частотной подстройкой — $\chi = 28 \div 43\%$.

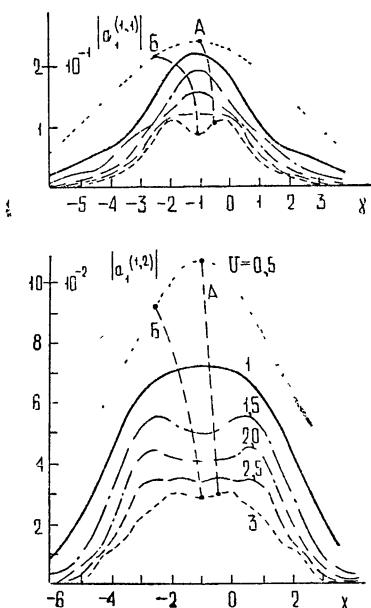


Рис. 4.

Рис. 4. Угловые зависимости модулей амплитудных коэффициентов парциальных волн.

Рис. 5. Угловые зависимости фаз парциальных волн.

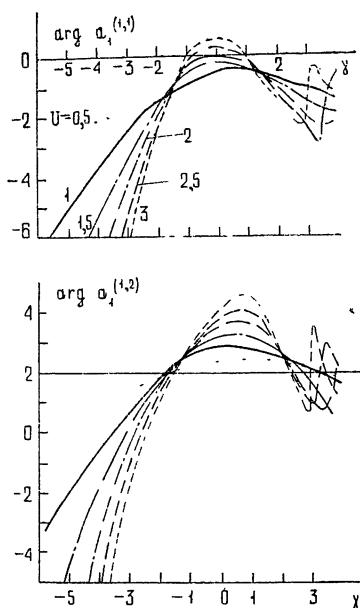


Рис. 5.

Таким образом, в некоторых средах (например, в кристалле ниобата лития) акустическая нелинейность сравнима с дифракционной, и ее необходимо учитывать в расчете нелинейных искажений оптикоакустических

ческих систем. При анализе конкретных устройств требуются значения $|a_{\pm 1}^{(1,2)}|$ и фаз амплитудных коэффициентов, графики которых приведены на рис. 4 и 5.

2. *Интенсивности дифракционных спектров.* В приближении трехкратного рассеяния интенсивности ± 1 спектров с учетом формул (7) и (8) равны

$$I_{\pm 1} = |\rho_{\pm 1}^{(1)}|^2 + |\rho_{\pm 1}^{(2)}|^2 + 2 \operatorname{Re} \rho_{\pm 1}^{(1,2)} \cos \psi \mp \operatorname{Im} \rho_{\pm 1}^{(1,2)} \sin \psi; \quad (13)$$

$$\rho_{\pm 1}^{(1)} = v_1 a_{\pm 1}^{(1,0)} + v_1^3 a_{\pm 1}^{(3,0)} + v_1 v_2 a_{\pm 1}^{(1,2)}, \quad \rho_{\pm 1}^{(2)} = v_1 v_2 a_{\pm 1}^{(1,1)}, \quad (14)$$

$$\rho_{\pm 1}^{(1,2)} = \rho_{\pm 1}^{(1)} \rho_{\pm 1}^{(2)}, \quad \psi = \beta_2 - 2\beta_1.$$

По этим формулам, полагая $\phi = \pm \pi/2$, если $\Gamma > 0$, и $\psi = -\pi/2$, когда $\Gamma < 0$, $v_2 = v_1^2 \frac{x}{x_0} \sqrt{U}$, где $x_0 = \frac{\sqrt{\pi n_0}}{|\Gamma|} \sqrt{\frac{Z}{\lambda}} Z$ и $x = 0,1 x_0$ (применительно к рассмотренному выше примеру дифракции света в кристалле ниобата лития $x = 36 \text{ мм}$), были рассчитаны угловые зависимости интенсивностей (см. рис. 6 а), отвечающие дифракции света на нелинейной акустической волне*. Для сравнения на рис. 6 б приведены

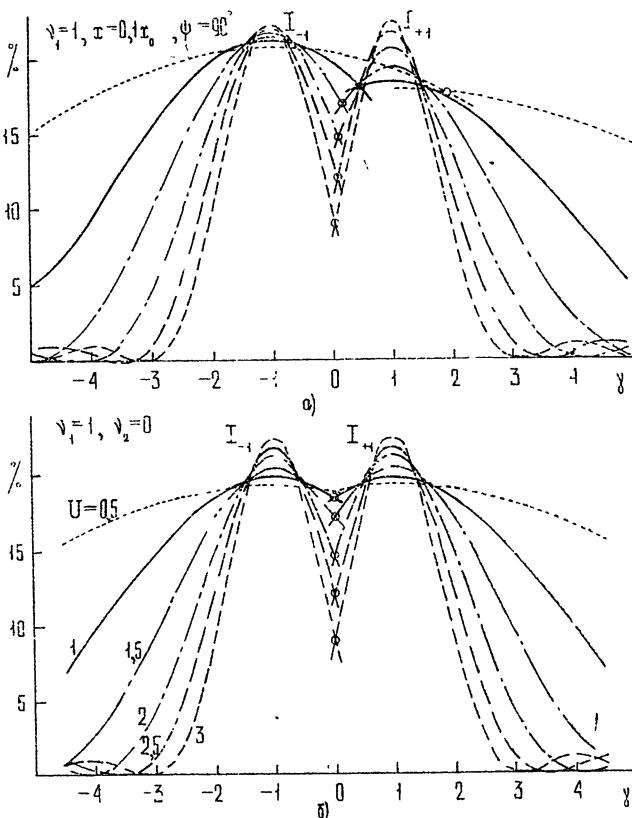


Рис. 6. Зависимости интенсивностей первых спектров от обобщенного угла падения света.

* На рис. 6 а представлен случай $\psi = \pi/2$, т. е., когда $\Gamma > 0$; если $\Gamma < 0$, то, как очевидно из формул (13) и (14), знак у интенсивностей спектров меняется на противоположный: $I_{\pm 1} \rightarrow I_{\mp 1}$.

аналогичные кривые, отвечающие дифракции света на одной основной гармонике. В экспериментах по дифракции обычно считают, что $\gamma = 0$, если $I_{+1} = I_{-1}$. Это вполне оправдано в отсутствие второй гармоники. При нелинейной акустической волне, как видно из графиков, точки γ , где значения интенсивностей равны (см. семейство точек, выделенных кружками), лежат на кривой, которая приближается к прямой $\gamma = 0$ только при больших значениях волнового параметра. Когда $\gamma = 0$ (нормальное падение), спектры асимметричны и $\delta = \frac{I_{-1} - I_{+1}}{I_{-1}} = 14\%$.

Михайлов и Шутилов [1] в приближении фазовой модуляции Рамана—Ната установили, что по огибающей интенсивностей спектров можно судить о форме результирующего ультразвукового возмущения в среде. Более подробные сведения, как показали Занкель и Гидеман [3], можно получить из распределения света по отдельным дифракционным порядкам [11].

С развитием методов голографии стало актуальным решение задачи об определении функции возмущения показателя преломления в среде по интенсивностям спектров для произвольного дифракционного режима. Некоторое представление о форме возмущения в приближении двух фурье-гармоник разложения, как очевидно из формул (13) и (14), можно получить из значений интенсивностей первых спектров.

С изменением разности фаз ψ между гармониками изменяется форма результирующего возмущения в среде (см. рис. 7) и происходит перераспределение интенсивностей в спектрах (см. рис. 8). Причем,

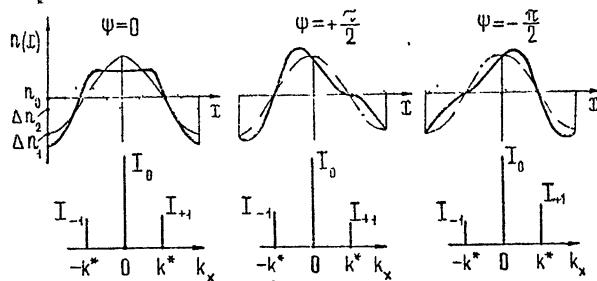


Рис. 7. Конфигурация результирующего возмущения в среде за период и соответствующие значения интенсивностей спектров.

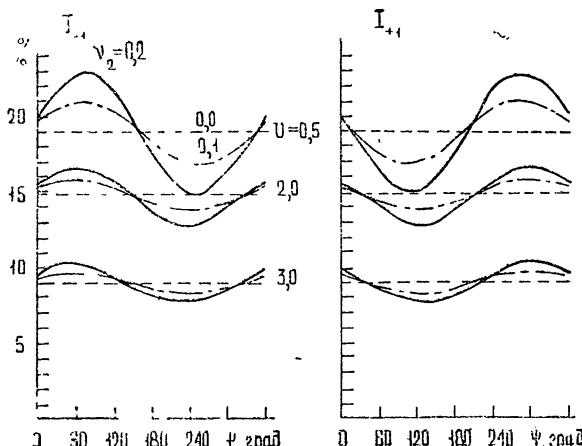


Рис. 8. Зависимости интенсивностей первых спектров от разности фаз между гармониками дифракционной решетки при нормальном падении световой волны.

интенсивности спектров равны, если форма результирующего возмущения симметрична, и различны, если эта форма асимметрична относительно экстремального значения возмущения за период. При этом спектр с большей интенсивностью расположен на стороне экстремума.

В связи с конечным числом парциальных волн, учтенных в формулах (15) и (16), область их применимости относительно значений параметров ν_1 и ν_2 ограничена. Точность расчетных кривых, приведенных на рис. 6—8, относительно точного решения волнового уравнения (3) не превышает 7 %. Описание процедуры по оценке точности и непосредственно границ применимости расчетов по методу возмущений в зависимости от числа учтенных приближений приводится в работе [12].

В пределах указанной точности кривые интенсивностей, представленные на рис. 6 и 8, могут быть использованы для оценок параметра акустической нелинейности Г и описания формы результирующего возмущения в среде.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую признательность Ю. А. Кравцову за постановку задачи и методические советы, С. М. Рытову за полезные беседы и внимание к работе, благодарность И. С. Миреру и Е. И. Макаровой за консультации по отладке программ при вычислениях на ЭВМ и В. Н. Дееву, Р. Г. Дохикину, В. Н. Дмитриеву и П. А. Пятакову за критические замечания и дискуссию по результатам работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Михайлов, В. А. Шутилов, Акустический журнал, 3, № 2, 203 (1957), 4, № 2, 174 (1958), 6, № 3, 340 (1960).
2. В. А. Шутилов, Акустический журнал, 5, № 2, 231 (1959).
3. K. L. Zankel, E. A. Niedemann, J. Acoust. Soc. Amer., 31, № 1, 44 (1959).
4. L. Melgaouis, A. A. Magadudin, A. Seeger, Phys. Rev., 131, № 5, 1972 (1963).
5. J. M. Rouvaen, E. Bridoux, M. Mariamet, R. Torguet, Appl. Phys. Lett., 23, № 9, 499 (1973).
6. Б. Л. Тиман, Б. И. Минков, ФТТ, 13, № 10, 3070 (1971).
7. А. М. Мартынов, И. С. Мирер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 12, 1845 (1975).
8. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, сер. физ., 2, 223 (1937).
9. У. Мэзон, Физическая акустика, 2 Б, изд. Мир, М., 1969.
10. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, Введение в нелинейную акустику, изд. Наука, М., 1966.
11. С. М. Рытов, Груды ФИАН СССР, 2, № 1, 40 (1940).
12. А. М. Мартынов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
31 марта 1975 г.

LIGHT DIFFRACTION IN THE MEDIUM WITH REFRACTIVE INDEX HAVING TWO MULTIPLE SPACE HARMONICS

A. M. Martynov

The method of solving the wave equation is suggested for the case of light diffraction in the medium the refractive index of which has the first and the second space harmonics. Following this method based on summing the series of the perturbation theory, numerical calculations are made of the amplitude and phase partial waves (i. e. waves diffracted in the direction of the given spectrum in a separate case of scattering) and intensities of the first spectra depending on the given angle of incidence of a light wave for the fixed values of the wave and Raman—Natha parameters. The dependences of the spectral intensities on the phase difference between the first and the second space harmonics are investigated.

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ, ОКРУЖЕННЫХ ПЛАЗМЕННОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев

Проанализировано влияние квазиповерхностных (прямых и обратных), комплексных и вытекающих волн на поле излучения заданных источников, расположенных вблизи металлических объектов (цилиндр, сфера) с плазменным покрытием, а также на поле, возникающее в результате рассеяния электромагнитных волн такими образованиями. Коэффициенты возбуждения отмеченных дифракционных мод находятся с помощью метода леммы Лоренца. Показано, в частности, что в определенной области значений параметров возбуждаемая вытекающая волна дает основной (в известном смысле) вклад не только в поле излучения элементарных источников, помещенных па цилиндре и сфере, но и в поле рассеяния падающей плоской волны.

Работа посвящена исследованию влияния квазиповерхностных (прямых и обратных), квазикомплексных и квазивытекающих волн на поле излучения элементарных источников, расположенных вблизи металлических объектов с плазменным покрытием, а также на поле, возникающее в результате рассеяния электромагнитных волн такими образованиями*. Конкретно речь будет идти о простейших структурах: круговом металлическом цилиндре и шаре, окруженных однородными концентрическими плазменными оболочками; однако основные физические результаты, как будет ясно из дальнейшего, носят достаточно общий характер.

Проблеме дифракции электромагнитных волн на комбинированных—металл, окруженный плазмой,—системах посвящено довольно большое число работ (см., например, [4]). В этих работах, как правило, изучается геометрооптическая часть рассеянного поля и практически не затрагивается его собственно дифракционная часть (см. [2]), хотя именно изменение характера спектра дифракционных мод—появление обратных квазиповерхностных волн, волн с комплексными постоянными распространения, вытекающих волн, формирующих эту последнюю, составляет, как отмечалось в [5], одну из главных отличительных (по сравнению с обычным диэлектриком $\epsilon > 1$ — см., например, [6]) особенностей плазмы. Вместе с тем появление этих мод отличает рассматриваемый здесь случай от подробно обсужденного ранее в [2] случая однородных плазменных объектов.

* Термин квазиповерхностная волна можно, по-видимому, считать установленшимся (см. [1], а также [2, 3]). Два других термина—квазикомплексная и квазивытекающая волны—употребляются в аналогичном смысле и обозначают моды, направляемые искривленной границей, которые, в пределе, при кривизне границы, стремящейся к нулю, переходят в волны с комплексными постоянными распространения и вытекающие (leaky) волны на плоской границе. В дальнейшем для простоты приставку квази перед словами комплексная и вытекающая моды мы будем опускать. Не следует только забывать, что на искривленной границе волны всех трех типов являются, вообще говоря, волнами с утечкой и термин «вытекающая» употребляется лишь в указанном выше узком смысле.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

Пусть идеально проводящий круговой цилиндр радиуса a , окруженный однородной концентрической плазменной (диэлектрическая проницаемость плазмы $\epsilon \epsilon_0$, где $\epsilon < 1$) оболочкой толщины d ($a + d = b$), располагается в свободном пространстве (вакууме) с ϵ_0, μ_0 . Пусть в точке с координатами $r_n \geq a$, ϑ_n помещен линейный магнитный ток с плотностью^{*}

$$j^m = -r^{-1} \delta(r - r_n) \delta(\vartheta - \vartheta_n) z^0, \quad (1)$$

где r, ϑ, z — цилиндрические координаты.

Тогда полное дифракционное поле, возбуждаемое этим током, может быть представлено (см. [2]) в виде суперпозиции полей дифракционных мод, направляемых плазменным слоем:

$$H = \sum_l (D_{+l} H_{+l} + D_{-l} H_{-l}), \quad (2)$$

$$E = \sum_l (D_{+l} E_{+l} + D_{-l} E_{-l}),$$

где $D_{\pm l}$ — коэффициенты возбуждения дифракционных мод или дифракционные коэффициенты (знаки «+» и «-» отвечают модам, бегущим в сторону соответственно положительных и отрицательных ϑ). Компоненты поля отдельной дифракционной моды с номером l могут быть записаны следующим образом:

$$H_{\pm l} = z^0 \exp(\mp i \nu_l \vartheta) \begin{cases} H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 r) & (r > b) \\ B_{\nu_l}(kr) \frac{H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 b)}{B_{\nu_l}(kb)} & (a < r < b) \end{cases}; \quad (3)$$

$$E_{\pm l} = \frac{Z_0}{k_0} \left[\frac{r^0}{r} (\mp \nu_l) H_{\pm l} + \mp \nu_l i \frac{\partial}{\partial r} H_{\pm l} \right] \begin{cases} 1 & (r > b) \\ \varepsilon^{-1} & (a < r < b) \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь $B_{\nu_l}(kr) = J_{\nu_l}(kr) Y'_{\nu_l}(ka) - J'_{\nu_l}(ka) Y_{\nu_l}(kr)$; $J_{\nu_l}(\xi)$, $Y_{\nu_l}(\xi)$, $H_{\nu_l}^{(2)}(\xi)$ — соответственно функции Бесселя, Неймана и Ханкеля второго рода; штрих означает дифференцирование по аргументу. Каждая мода обегает цилиндр бесконечное число раз, так что ϑ в (3) предполагается изменяющимся в интервале $-\infty < \vartheta < \infty$.

Дисперсионное уравнение для определения угловой постоянной распространения ν_l дифракционной моды имеет вид

$$\frac{H_{\nu_l}^{(2)'}(kb)}{H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 b)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{B_{\nu_l}'(kb)}{B_{\nu_l}(kb)}. \quad (5)$$

Коэффициенты возбуждения дифракционных мод $D_{\pm l}$ находятся с помощью метода леммы Лоренца [2] и представляются в виде (см. также [7])

$$D_{-l} = D_{+l} \equiv D_l = \begin{cases} \frac{1}{N_l} H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 r_n) & (r_n \geq b) \\ \frac{1}{N_l} \frac{H_{\nu_l}^{(2)}(kb)}{B_{\nu_l}(kb)} B_{\nu_l}(kr_n) & (a \leq r_n \leq b) \end{cases}, \quad (6)$$

* Зависимость от времени принимается в виде $e^{i\omega t}$.

где

$$N_l = -Z_0 b \left\{ \left[H_{v}^{(2)}(u) \frac{\partial^2 H_{v-2}^{(2)}(u)}{\partial v \partial u} - \frac{\partial H_v^{(2)}(u)}{\partial u} \frac{\partial H_{v-2}^{(2)}(u)}{\partial v} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{V\varepsilon} \left[\frac{H_v^{(2)}(u)}{B_v(u)} \right]^2 \left[B_{v-1/2}(\tilde{u}) \frac{\partial^2 B_v(\tilde{u})}{\partial v \partial \tilde{u}} - \frac{\partial B_v(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial B_{v-1/2}(\tilde{u})}{\partial v} \right] \right\}_{\substack{v=l \\ u=k_0 b \\ \tilde{u}=kb}}$$
(7)

— норма соответствующей дифракционной моды. Устремляя в (6) r_n к бесконечности и проводя соответствующую перенормировку, получаем следующее выражение для коэффициента возбуждения \tilde{D}_l однородной плоской волнной единичной амплитуды:

$$\tilde{D}_l = -\frac{1}{N_l} 4Z_0 k_0^{-1} \exp \left\{ i \nu_l \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (8)$$

Следует подчеркнуть, что построенный таким образом ряд (2) дает, вообще говоря (см. [2]), строгое решение поставленной задачи.

Перейдем теперь к случаю шара: пусть идеально проводящая сфера радиуса a , окруженная однородной концентрической плазменной оболочкой толщины d ($a + d = b$), располагается в вакууме; и пусть в точке с координатами $r = r_n \geq a$, $\theta = \pi$, $\Phi = 0$ (r , θ , Φ — сферические координаты) помещен элементарный магнитный ток с плотностью

$$j^m(r, \theta, \Phi) = r^{-2} \sin^{-1} \theta \delta(r - r_n) \delta(\theta - \pi) \delta(\Phi) x^0. \quad (9)$$

Тогда полное дифракционное поле, возбуждаемое этим током, может быть представлено в виде суперпозиции полей меридиональных дифракционных мод E - и H -типов по отношению к радиальному направлению (см. [2]), поддерживаемых слоем плазмы. Компоненты поля этих мод могут быть описаны с помощью потенциалов Дебая (см., например, [8]) стандартным образом (некоторые пояснения см. в [2]). Ввиду громоздкости соответствующих выражений мы их приводить не будем.

Для интересующих нас здесь мод E -типа имеем дисперсионное уравнение

$$\frac{h_{v_l-1/2}'(k_0 b)}{h_{v_l-1/2}^{(2)}(k_0 b)} = -\frac{1}{V\varepsilon} \frac{b_{v_l-1/2}'(kb)}{b_{v_l-1/2}(kb)}; \quad (10)$$

коэффициент возбуждения элементарным источником:

$$D_l^{(E)} = \begin{cases} \frac{i(\nu_l^2 - 1/4)}{2k_0 r_n} \frac{1}{n_l^{(E)}} h_{v_l-1/2}^{(2)}(k_0 r_n) & (r_n \geq b) \\ \frac{i(\nu_l^2 - 1/4)}{2k_0 r_n} \frac{1}{n_l^{(E)}} \frac{h_{v_l-1/2}^{(2)}(k_0 b)}{b_{v_l-1/2}(kb)} b_{v_l-1/2}(kr_n) & (a \leq r_n \leq b) \end{cases}, \quad (11)$$

где

$$n_l^{(E)} = Z_0 \frac{i \nu_l (\nu_l^2 - 1/4)}{2k_0^2} \left\{ \left[h_{v_l-1/2}^{(2)}(u) \frac{\partial^2 h_{v_l-1/2}^{(2)}(u)}{\partial v \partial u} - \frac{\partial h_{v_l-1/2}^{(2)}(u)}{\partial u} \frac{\partial h_{v_l-1/2}^{(2)}(u)}{\partial v} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{V\varepsilon} \left[\frac{h_{v_l-1/2}^{(2)}(u)}{b_{v_l-1/2}(u)} \right]^2 \left[b_{v_l-1/2}(\tilde{u}) \frac{\partial^2 b_{v_l-1/2}(\tilde{u})}{\partial v \partial \tilde{u}} - \frac{\partial b_{v_l-1/2}(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial b_{v_l-1/2}(\tilde{u})}{\partial v} \right] \right\}_{\substack{v=l \\ u=k_0 b \\ \tilde{u}=kb}} \quad (11a)$$

— норма меридиональной дифракционной моды E -типа; коэффициент возбуждения плоской волной единичной амплитуды —

$$\tilde{D}_l^{(E)} = -\frac{i(\nu_l^2 - 1/4)2\pi Z_0}{k_0^2 n_l^{(E)}} \exp \left[i \left(\nu_l \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (12)$$

В этих формулах $b_{\nu_l-1/2}(kr) = j_{\nu_l-1/2}(kr)y'_{\nu_l-1/2}(ka) - j'_{\nu_l-1/2}(ka)y_{\nu_l-1/2}(kr)$; $j_{\nu_l-1/2}(\xi)$, $y_{\nu_l-1/2}(\xi)$, $h_{\nu_l-1/2}^{(2)}(\xi)$ — сферические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля второго рода.

На основе полученных общих выражений будет проводиться все дальнейшее исследование дифракционного поля.

2. ПОСТОЯННЫЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ МОД НА ЦИЛИНДРЕ И ШАРЕ БОЛЬШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ

Предполагая, что размеры цилиндра велики по сравнению, как с длиной падающей волны, так и длиной волны в плазме,

$$k_0 a \gg 1, |k|a \gg 1, \quad (13)$$

и заменяя входящие в (5) цилиндрические функции их асимптотическими представлениями Дебая (см. [2]), после некоторых преобразований приходим к следующему дисперсионному уравнению, описывающему соответствующие моды, направляемые искривленным плазменным слоем на металлической подложке:

$$\epsilon \beta_2 + \beta_1 \operatorname{th} \beta_1 q = \Phi(1/p_0, \rho), \quad (14)$$

где

$$\Phi(1/p_0, \rho) = \frac{\epsilon}{2p_0} \left[\frac{1}{\beta_2^2} - \frac{\operatorname{th}^2 \beta_1 q}{\beta_1^2} - \frac{\alpha^2 q^2}{\epsilon} (1 - \operatorname{th}^2 \beta_1 q) \right] + \rho 2\epsilon \beta_2,$$

$$p_0 = k_0 a, \quad q = k_0 d, \quad \alpha = \nu/p_0, \quad \beta_1^2 = \alpha^2 - \epsilon, \quad (15)$$

$$\beta_2^2 = \alpha^2 - 1, \quad \rho = \rho_0 \exp(-i\pi/6),$$

$$\rho_0 = \exp \{-2(\nu \operatorname{arccch} \alpha - \beta_2 p_0)\}.$$

Решая полученное уравнение (14) методом возмущений для линейной постоянной распространения α квазиповерхностных волн, находим:

$$\alpha = \alpha_0 \left\{ 1 + \frac{\beta_{10} \beta_{20} \Phi_0(1/p_0, \rho)}{\alpha_0^2 [\beta_{10} \epsilon + \beta_{20} (\operatorname{th} \beta_{10} q + \beta_{10} q (1 - \operatorname{th}^2 \beta_{10} q))] } \right\}, \quad (16)$$

где α_0 — постоянная распространения поверхностной волны вдоль плоского слоя, $\beta_{10}^2 = \alpha_0^2 - \epsilon$, $\beta_{20}^2 = \alpha_0^2 - 1$, а Φ_0 получается из Φ путем подстановки $\alpha = \alpha_0$, $\beta_1 = \beta_{10}$, $\beta_2 = \beta_{20}$ и $\nu = \nu_0$.

Как видно непосредственно из (16), поправка к постоянной распространения α_0 , связанная с искривлением границ слоя, мала (и, следовательно, правильно описывается (16)) всюду, кроме области значений параметров ϵ и q , примыкающих к некоторым значениям $\epsilon = \epsilon^*$ и $q = q^*$, определяемым из условия

$$\beta_{10}^* \epsilon^* + \beta_{20}^* \operatorname{th} \beta_{10}^* q^* + \beta_{20}^* \beta_{10}^* q^* (1 - \operatorname{th}^2 \beta_{10}^* q^*) = 0. \quad (17)$$

Значения ϵ^* , q^* отвечают (в отсутствие соударений) точке «стыкования» прямой, обратной и комплексных волн (см. [9–11]); причем в самой этой точке формально групповая скорость прямой и обратной поверхностных волн обращается в нуль, с чем, в конечном счете, и свя-

зано нарушение приближения (16). Для получения корректного результата необходимо (как это указывалось в [1]) в левой части уравнения (14) удерживать — в рамках метода возмущений — члены следующего порядка малости по параметру $1/p_0$; в результате в области значений $\varepsilon \sim \varepsilon^*$, $q \sim q^*$ будем иметь:

$$\alpha = \alpha_0 \left\{ 1 + \frac{\beta_{10}^2 \beta_{20}}{\alpha_0^2} \left[\frac{2\beta_{20}\Phi_0(1/p_0, \rho)}{\varepsilon(\varepsilon-1) \left(3 + \frac{2(\varepsilon-1)}{\beta_{10}^2 - \varepsilon^2 \beta_{20}^2} \right)} \right]^{1/2} \right\}. \quad (18)$$

Поправки, связанные с искривлением слоя, к постоянным распространения комплексных (в частности, вытекающих) волн также могут быть получены с помощью метода возмущений; однако ввиду громоздкости (и потому малой информативности) соответствующих общих выражений мы их не приводим. Мы приведем лишь упрощенные выражения, относящиеся к довольно важному частному случаю достаточно тонкого слоя (см. [10]).

В случае достаточно тонкого слоя $-\beta_{10} q \ll 1$ — формулы (16) — (18) значительно упрощаются и записываются в следующем виде:

$$\alpha = \alpha_0 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon - \beta_{20}^2 q^2 (\varepsilon + \alpha_0^2)}{p_0 2 \alpha_0^2 \beta_{20} (\varepsilon + 2\beta_{20} q)} - i \rho_0^{(0)} \frac{\varepsilon \beta_{20}^2}{\alpha_0^2 (\varepsilon + 2\beta_{20} q)} \right\}, \quad (16a)$$

где, согласно [10], $(\beta_{20} q)_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \mp \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - (1-\varepsilon)q^2}$, причем знак «—» отвечает прямой волне, а знак «+» — обратной, а $\rho_0^{(0)}$ получается из ρ_0 путем замены $\nu \rightarrow \nu_0$, $\alpha \rightarrow \alpha_0$ и $\beta_2 \rightarrow \beta_{20}$;

$$\frac{\varepsilon^{*2}}{4} - (1 - \varepsilon^*) q^{*2} = 0; \quad (17a)$$

$$\sigma_{1,2} \approx \sqrt{2-\varepsilon} \left\{ 1 \mp i \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \frac{\sqrt[4]{1-\varepsilon}}{\sqrt{2-\varepsilon}} \mp \rho_0^{(0)} \sqrt{2p_0} \frac{\sqrt[4]{1-\varepsilon} (1-\varepsilon)^{3/2}}{(2-\varepsilon)^{3/2}} \right\}. \quad (18a)$$

Для комплексных волн при этом — в предположении, что поправки и к действительной, и к мнимой части волновых чисел малы по сравнению с их «нулевыми» значениями, — получаем:

$$\begin{aligned} (\beta_2 q)_{1,2} = & -\frac{\varepsilon}{2} \mp i \sqrt{-\frac{\varepsilon^2}{4} + (1-\varepsilon)q^2} + \frac{1}{4p_0} \left[\varepsilon q + \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)q} \right] + \\ & + \varepsilon \rho_{\Delta(\mp)}^{(0)} \pm \frac{\varepsilon^2 \rho_{M(\mp)}^{(0)}}{2 \sqrt{-\varepsilon^2/4 + (1-\varepsilon)q^2}} \mp \\ & \mp i \frac{1}{4p_0} \frac{q}{2 \sqrt{-\varepsilon^2/4 + (1-\varepsilon)q^2}} \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon q^2 - \frac{\varepsilon[\varepsilon^2 - 2(1-\varepsilon)q^2]}{2(1-\varepsilon)^2 q^2} \right) \mp \\ & \mp i \frac{\varepsilon^2 \rho_{D(\mp)}^{(0)}}{\sqrt{-\varepsilon^2/4 + (1-\varepsilon)q^2}} + i \varepsilon \rho_{M(\mp)}^{(0)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где через $\rho_{\Delta}^{(0)}$ и $\rho_M^{(0)}$ обозначены действительная и мнимая части $\rho^{(0)}$, а знаки «—» и «+» соответствуют прямой и обратной комплексным волнам.

Учет радиационных потерь, связанных с искривлением границ слоя, приводит, согласно (18 а), к тем же физическим результатам, что и учет соударений в плазме в плоском слое (см. [11]), а именно — к снятию вырождения в точке «стыкования» или, другими словами, к «разъединению» прямых и обратных волн.

Постоянные распространения соответствующих меридиональных мод на шаре больших электрических размеров с плазменным покрытием описываются уравнением, отличающимся от (14) дополнительным членом $\frac{1}{2\rho_0}(\varepsilon - \operatorname{th}^2 \beta_{10} q)$ в правой части. Появление этого члена приводит к существенным различиям в характере поведения одной из поверхностных волн на шаре и цилиндре лишь в узкой области значений $\varepsilon \sim 1$; эти различия подробно обсуждены в [2].

3. КОЭФФИЦЕНТЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ МОД НА ЦИЛИНДРЕ И ШАРЕ БОЛЬШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ

Заменяя в общих выражениях (6)–(8) соответствующие цилиндрические функции их асимптотическими представлениями Дебая, после ряда преобразований приходим к следующим выражениям:

$$D_l = -\frac{\pi k_0 \varepsilon p_0}{2Z_0 q} \left\{ \frac{\beta_{20} \operatorname{ch}^2(\beta_{10} q) \rho_0}{z_0 \left[1 + \frac{(\varepsilon - 1) \operatorname{sh} 2\beta_{10} q}{2\beta_{20}^2 \beta_{10} q} \right]} F_l(r_n) \right\}_{\alpha=\alpha_l}, \quad (20)$$

где

$$F_l(r_n) = \begin{cases} i \frac{\sqrt{2} \sqrt[4]{\nu_l^2 - (kb)^2} \operatorname{ch} \beta_{10} k_0 (r_n - a) \rho_0^{-1/2}}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{\nu_l^2 - (k_0 b)^2} \sqrt[4]{\nu_l^2 - (kr_n)^2} \operatorname{ch} \beta_{10} q} & (a \leq r_n \leq b); \\ H_l^{(2)}(k_0 r_n) & (r \geq b); \end{cases} \quad (20a)$$

$$F_l(r_n) = \begin{cases} -\frac{4Z_0}{k_0} \exp \left(i \nu_l \frac{\pi}{2} \right) & (r_n \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (20b)$$

(Формула (20 в) отвечает случаю рассеяния однородной плоской волны единичной амплитуды.)

Формулы (20) нарушаются, как легко видеть, в области значений ε и q , прилегающих к ε^* , q^* . Для получения правильных значений дифракционных коэффициентов здесь необходимо (так же как при вычислении постоянной распространения) выдерживать большую, чем в (20), степень точности; в результате находим:

$$D_l = \frac{\pi k_0 \varepsilon p_0}{2Z_0} \left\{ \frac{\beta_{10}^2 \beta_{20}^3 \rho_0}{(\alpha_0 - \alpha) \alpha_0^2} \frac{F_l(r_n)}{q(1 - \operatorname{th}^2 \beta_{10} q)[\beta_{10}^2 + 2\beta_{20}^2(1 - \beta_{10} q \operatorname{th} \beta_{10} q)]} \right\}_{\alpha=\alpha_l}, \quad (21)$$

причем $F_l(r_n)$ описывается по-прежнему формулами (20 а)–(20 в).

Полагая в (20 а) $r_n = a$ и устремляя затем a к бесконечности таким образом, что толщина слоя q оставалась постоянной, приходим к известным (содержащимся, фактически, в [12]) выражениям для коэффициентов возбуждения соответствующих волн в плоском случае, в частности коэффициента возбуждения вытекающей волны. На это последнее обстоятельство следует обратить особое внимание, поскольку получение такого коэффициента непосредственно в плоском случае связано с определенными трудностями. Предлагаемый здесь способ

выгодно отличается от стандартных приемов, связанных либо с привлечением общего интегрального представления для поля [12], либо с формально математической модификацией формул возбуждения собственных волн [13], своей простотой и четким физическим смыслом. Это обусловлено тем, что несобственным вытекающим волнам в плоском случае отвечают в цилиндрическом случае собственные моды, не отличающиеся по существу от квазиверхностных волн и волн с комплексными постоянными распространения (собственных и в плоском случае).

Коэффициенты возбуждения соответствующих меридиальных мод E -типа на шаре больших электрических размеров могут быть записаны в том же общем виде (20), что и для цилиндра, но с $F_l(r_n)$, равным

$$F_l(r_n) = \begin{cases} -i2k_0^4 \sqrt{\nu_l^2 - (kb)^2} \operatorname{ch}(\beta_{10} k_0(r_n - a)) \rho_0^{-1/2} & (a \leq r_n \leq b); \\ \pi \sqrt{k_0 r_n} \nu_l \sqrt{\nu_l^2 - (k_0 b)^2} \sqrt{\nu_l^2 - (k_0 r_n)^2} \operatorname{ch} \beta_{10} q \\ -\frac{2}{\pi \nu_l r_n} h_{\nu_l}^{(2)}(k_0 r_n) & (r_n \geq b); \\ \frac{8}{k_0 \nu_l} \exp \left[i \left(\nu_l \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] & (r_n \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (22a)$$

Формула (22в) отвечает случаю рассеяния плоской волны единичной амплитуды. Области значений параметров $\epsilon \sim \epsilon^*$, $q \sim q^*$ и $\epsilon \sim -1$ требуют, вообще говоря, уточнения, на котором мы здесь останавливаться не будем.

4. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Формулы (3) и (20) вместе с (16) и (19) описывают поле интересующих нас квазиверхностных, комплексных и вытекающих волн, возбуждаемых линейным магнитным током или падающей плоской волной. В предположении, что точка источника r_n , ϑ_n и точка наблюдения r , ϑ находятся в зоне Фраунгофера по отношению к цилиндуру, выражение для магнитного поля указанных мод приводится к виду

$$\begin{aligned} H_l(r, \vartheta) = & -z^0 \frac{k_0 \epsilon p_0 \beta_{20} \operatorname{ch}^2 \beta_{10} q \exp(i\pi/2)}{Z_0 \alpha_0 q \left[1 + \frac{(\epsilon - 1) \operatorname{sh} 2\beta_{10} q}{2\beta_{20}^2 \beta_{10} q} \right]} \times \\ & \times \frac{\exp \{-i[k_0 R(r_n, \vartheta_n; b, \vartheta_0^{(-)}(\vartheta_n)) + \nu_l(\vartheta_0^{(+)}(\vartheta) - \vartheta_0^{(-)}(\vartheta_n)) + k_0 R(r, \vartheta; b, \vartheta_0^{(+)}(\vartheta))]\}}{[k_0 R(r_n, \vartheta_n; b, \vartheta_0^{(-)}(\vartheta_n)) k_0 R(r, \vartheta; b, \vartheta_0^{(+)}(\vartheta))]^{1/2}} + \\ & + \frac{\exp \{-i[k_0 R(r_n, \vartheta_n; b, \vartheta_0^{(+)}(\vartheta_n)) - \nu_l(\vartheta_0^{(-)}(\vartheta) - \vartheta_0^{(+)}(\vartheta_n)) + k_0 R(r, \vartheta; b, \vartheta_0^{(-)}(\vartheta))]\}}{[k_0 R(r_n, \vartheta_n; b, \vartheta_0^{(+)}(\vartheta_n)) k_0 R(r, \vartheta; b, \vartheta_0^{(-)}(\vartheta))]^{1/2}} \times \\ & \times [1 - \exp(-2i\pi\nu_l)]^{-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $R(r, \vartheta; b, \vartheta_0^{(\mp)}(\vartheta))$ есть формально расстояние (комплексное) между точками с координатами r, ϑ и $b, \vartheta_0^{(\mp)}(\vartheta)$; $R(r, \vartheta; b, \vartheta_0^{(\mp)}(\vartheta)) \approx \approx r - b \cos(\vartheta - \vartheta_0^{(\mp)}(\vartheta))$, причем координата $\vartheta_0^{(\mp)}(\vartheta) = \vartheta \pm \arcsin \alpha_l$ комплекса (знаки «+» и «-» здесь отмечают волны, распространяющиеся (бегущие) в сторону положительных и отрицательных ϑ). Записанное

в таком виде выражение для поля соответствующей моды допускает интерпретацию на языке комплексных лучей и согласуется в этом смысле с результатами геометрической теории поверхностных волн (см. [14], а также [3]). Отвечающая формуле (23) лучевая картина возбуждения, распространения и излучения схематически (не нужно забывать, что углы $\vartheta_0^{(\mp)}$ комплексны) показана на рис. 1 для прямых (а) и обратных (б) квазиволновых волн; отмеченные на рисунке углы входа ϑ_1 и выхода ϑ_2 пространственных комплексных лучей формально удовлетворяют закону Снелля $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2 = a_l$. Аналогичные лучевые картины для сферического случая приведены на рис. 2. Следует обратить внимание на специфику поведения обратных волн — рис. 1 б и 2 б.

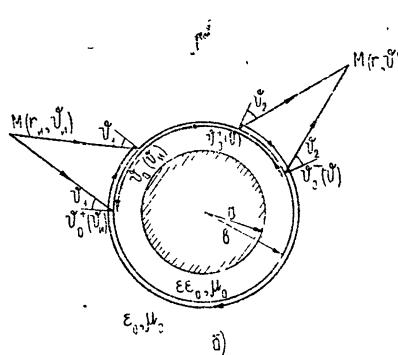
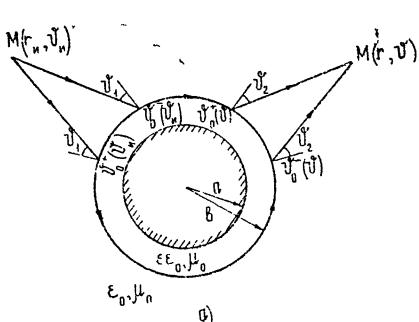


Рис. 1.

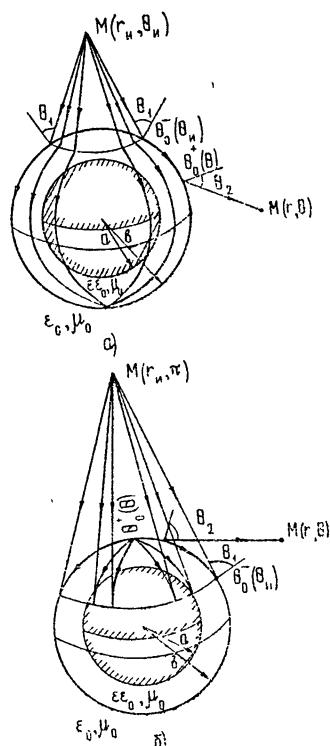


Рис. 2.

Хорошо известно [12], что в плоском случае полное поле, создаваемое заданным источником, расположенным вблизи слоя, представляется в виде суммы локализованного (поверхностного) поля и нелокализованного (пространственного) поля. В цилиндрическом случае такое разбиение теряет, в какой-то степени, свой смысл, поскольку обе части поля описываются в рамках единого ряда (2). Правда, если для получения локализованных волн в пределе при $a \rightarrow \infty$ ($q = \text{const}$) могут, как уже отмечалось, быть использованы непосредственно приведенные выше формулы, то для получения поля пространственной волны необходимо (см. [2]) сперва перейти от ряда (2) к интегралу, а затем вычислить полученный интеграл с помощью метода стационарной фазы. Эта последняя процедура применительно к рассматриваемому цилиндрическому случаю с источником, расположенным непосредственно на металлической поверхности $r_n = a$, $\vartheta_n = 0$, дает

$$H(r, \vartheta) = z^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \exp \left[-ik_0(r - b \cos \vartheta) + i \frac{\pi}{4} \right] \times \quad (24)$$

$$\times \frac{-k_0 \sqrt{(kb)^2 - (k_0 b \sin \vartheta)^2} \varepsilon \sec(\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta} q)}{Z_0 \sqrt{(ka)^2 - (k_0 b \sin \vartheta)^2} \left[\varepsilon + \frac{i \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta}}{\cos \vartheta} \operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta} q) \right]}.$$

При $a \rightarrow \infty$ и сохранении $q = \text{const}$ формула (24) переходит в соответствующую формулу для плоского случая (см. [12]). Такой способ получения непрерывной части спектра (с помощью единого ряда) представляется нам более естественным, чем предложенная ранее [13, 15] процедура «дискретизации» этой части.

Как отмечалось в [12], при определенных условиях — достаточно тонкий слой $|\beta_{10} q| \ll 1$ и достаточно малые значения ε ($\varepsilon \ll q$), так что постоянная распространения $a_0^{(b)}$ вытекающей волны представляется в виде $(a_0^{(b)})_{1,2}^2 = \varepsilon \left(1 \pm \frac{i}{q \sqrt{1 - \varepsilon}} \right)$ — основной вклад в поле излучения дает вытекающая волна (подробности см. в [12]). Аналогичная ситуация имеет место и в рассматриваемом цилиндрическом случае, а именно: если с помощью формул (3), (20) и приведенного выше значения $a_0^{(b)}$ найти поле вытекающих волн, распространяющихся от источника, непосредственно на поверхности $r = b$, а затем по заданному при $r = b$ ближнему полю подсчитать поле излучения*, то придем к выражению, совпадающему с тем, что получается — в указанной области значений параметров — из общего представления (24):

$$H(r, \vartheta) \approx \frac{ik_0 \varepsilon \cos \vartheta}{Z_0 q(a^2 - \sin^2 \vartheta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \exp \left[-ik_0(r - b \cos \vartheta) - i \frac{\pi}{4} \right]. \quad (25)$$

Поле излучения элементарного магнитного источника, расположенного на поверхности сферы $r_{ii} = a$, вычисляется подобно тому, как это делалось для цилиндра; некоторые дополнительные трудности, правда, возникают из-за наличия особенности на оси $\vartheta = \pi$. При таком вычислении необходимо, конечно, принимать во внимание и дифракционные моды H -типа.

Нетрудно убедиться, что для достаточно тонкого слоя с достаточно малым ε определяющий (в указанном выше смысле) вклад в поле излучения, отвечающее модам E -типа, в случае шара также дает вытекающая волна.

5. РАССЕЯННОЕ ПОЛЕ. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ

Собственно дифракционная часть рассеянного поля, связанная с возбуждением соответствующих мод, описывается, как уже отмечалось, непосредственно формулами (3), (16), (19), (20) и (20в). Отвечающее этой части так называемое дифракционное сечение обратного рассеяния (см. [2]) при резонансе совпадает с резонансным значением дифракционного сечения обратного рассеяния однородных плазменных цилиндра и шара (формулы (29) и (37) работы [2]). Разумеется, сами резонансные частоты и постоянные радиационного затухания в том

* При вычислении соответствующего интеграла необходимо учитывать, что (так же как в плоском случае) с удалением от источника вдоль поверхности $r = b$ поле вытекающей волны быстро спадает.

и другом случае отличаются в силу различия в дисперсионных характеристиках квазиволновых волн; в частности, для комбинированных объектов появляются дополнительные резонансные частоты, связанные с появлением обратных волн.

Получение геометрооптической части рассеянного поля (так же как поля пространственной волны в предыдущем разделе) требует перехода от ряда (2) к интегралу и последующего вычисления полученного интеграла методом стационарной фазы. После выполнения указанной процедуры в цилиндрическом случае имеем

$$H^s(r, \vartheta) = z^0 \sqrt{\frac{b \cos \vartheta/2}{2r}} \exp[-ik_0(r - 2b \cos \vartheta/2)] \times \quad (26)$$

$$\frac{-\varepsilon + i[\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta/2}/\cos \vartheta/2] \operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta/2} q)}{\varepsilon + i[\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta/2}/\cos \vartheta/2] \operatorname{tg}(\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \vartheta/2} q)} \left[\frac{(kb)^2 - (k_0 b \sin \vartheta/2)^2}{(ka)^2 - (k_0 b \sin \vartheta/2)^2} \right]^{1/4}$$

(здесь для простоты положено $\vartheta_n = 0$).

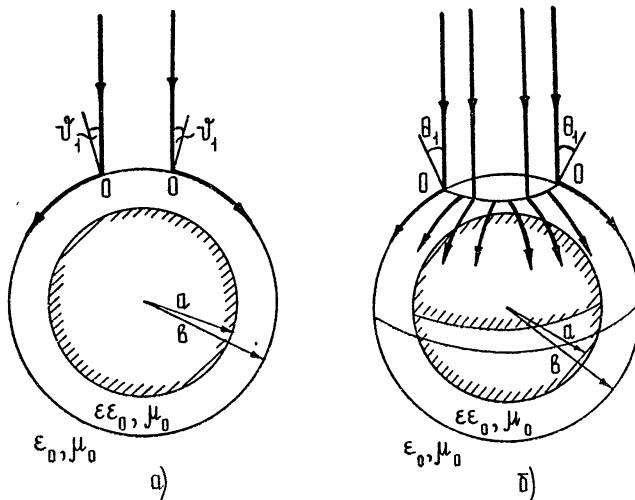


Рис. 3.

Обратим внимание на следующее любопытное обстоятельство. Как показывают непосредственные расчеты, для обсуждавшегося в предыдущем разделе частного случая достаточно тонкого слоя ($|\beta_{10}q| \ll 1$) с достаточно малым ε ($\varepsilon \ll q$), определяющий вклад в поле волны, рассеянной в направлениях, близких к обратному $-\sin \frac{\vartheta}{2} < V^- \varepsilon$ (в сферическом случае $\sin \frac{\pi - \theta}{2} < V^- \varepsilon$), дает возбуждаемая падающей плоской волной вытекающая мода. Под этим, как и раньше, понимается следующее: получающееся из (26) в данном частном случае выражение для рассеянного поля может также быть получено путем задания на поверхности $r=b$ поля возбуждаемой вытекающей волны и вычисления затем по заданному ближнему полю рассеянного поля в волне Фраунгофера. При таком расчете предполагается, что волна возбуждается

в соответствии с законом Снелля — в точках 0 на рис. 3 (*a* — цилиндр, *b* — шар) и учитывается (как обычно), что ее поле довольно быстро затухает в направлении своего распространения (показано стрелками на рис. 3).

Утверждение об определяющем вкладе вытекающих волн в поле излучения и в рассеянное поле в определенной области значений параметров носит, по мнению авторов, все-таки несколько формальный характер и свидетельствует не более чем о возможном способе вычисления этого поля, поскольку, с другой стороны, то же самое поле формируется, (если исходить из общего интегрального представления) в результате суперпозиции полей излучения многих дифракционных мод. Вместе с тем такая двойственность в интерпретации с еще большей очевидностью свидетельствует об условности разделения общего дифракционного поля на отдельные части в рассмотренных здесь цилиндрическом и сферическом случаях.

Таким образом, метод леммы Лоренца применительно к простейшим — цилиндр, сфера — металлическим объектам, окруженным плазменной оболочкой, позволяет включение в рассмотрение наряду с квазиверхностными квазикомплексными и квазивытекающими волнами и проанализировать их вклад в дифракционное поле. В свою очередь, такое (с единых позиций) описание квазивытекающих мод оказывается методически выигрышным даже по отношению к плоским системам (подробно разобраным в литературе), результаты для которых получаются из приведенных в работе общих формул в качестве предельного случая.

Результаты этой работы могут быть обобщены на объекты более сложной конфигурации (см. [3]) и с более сложными электродинамическими характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Миллер, В. И. Таланов, ЖТФ, 26, 2755 (1956).
- 2 Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 12, 1894 (1972).
3. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 9, 1269 (1974).
4. Н. А. Соггнер, В. О. Ругоп, Proc. IEEE, 53, 1025 (1965).
5. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1358 (1967).
6. Р. Кинг и У. Тай-Цзунь, Рассеяние и дифракция электромагнитных волн, ИЛ, М., 1962.
7. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондрат'ев, Electromagnetic Wave Theory (Preprints), изд. Наука, М., 1971, стр. 279.
8. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
9. Т. Таміг, А. А. Олінер, Proc. IEEE, 51, 317 (1963).
10. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 1, 124 (1964).
11. И. Г. Кондратьев, Г. А. Марков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1106 (1970).
12. Т. Таміг, А. А. Олінер, IRE Trans., AP-10, 55 (1962).
13. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 8, 1242 (1971).
14. J. B. Keller, F. C. Kagan, J. Appl. Phys., 31, 1039 (1960).
15. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 110 (1966).

DIFFRACTION OF HF ELECTROMAGNETIC WAVES BY METAL OBJECTS
SURROUNDED BY A PLASMA SHELL*T. M. Zaboronkova, I. G. Kondrat'ev*

The authors has been analysed the influence of quasi-surface (forward and backward) complex and leaky waves on the radiation field of the given sources situated near metal objects (cylinder, sphere) with a plasma covering as well as on the field occurring as a result of scattering of electromagnetic waves by such formations. The excitation coefficients of noted diffraction modes are found by the Lorentz lemma method. It is shown, in particular, that in the definite region of the parameter values the excited leaky wave gives the main contribution not only to the radiation of elementary sources placed on cylinder and sphere but also to the field of scattering of an incident plane wave.

УДК 621.372.09

ПОТЕРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДАХ МАЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

A. B. Маненков

Методом поперечных сечений исследовано прохождение несимметричных медленных волн по нерегулярному диэлектрическому волноводу круглого сечения и по импедансному цилинду.

Появление в последние годы высокочастотных диэлектриков с малым углом потерь открыло широкие перспективы для практического применения в качестве передающих линий диэлектрических волноводов [1, 2]. Существенную роль в процессе передачи волн по таким линиям играют, как известно, потери на излучение, обусловленные рассеянием на различных нерегулярностях. Эти потери, в частности, ограничивают минимальное затухание, которое можно достичь в диэлектрических волноводах [2]. В настоящей работе методом поперечных сечений [3] исследовано распространение поверхностных волн HE_{11} по неоднородным волноводам в виде диэлектрического и импедансного цилиндров. В обоих случаях предполагаем, что радиус цилиндра a мал по сравнению с длиной волны λ ($a \ll \lambda$).

Как известно [5, 6], поля в открытом однородном волноводе можно разложить по ортонормированной системе волн непрерывного и дискретного спектров. Следуя методу поперечных сечений, в каждой поперечной плоскости нерегулярного волновода поля разлагаются по системе волн регулярного волновода сравнения:

$$\mathbf{E} = \sum_{\alpha=1, 2} \left[\sum_s C_s^{(\alpha)}(z) \mathbf{E}_s^{(\alpha)} + \sum_{\tau} \int_0^{\infty} C_{\tau x}^{(\alpha)}(z) \mathbf{E}_{\tau x}^{(\alpha)} d\tau \right], \quad (1)$$

где $\mathbf{E}_s^{(\alpha)}$ и $\mathbf{E}_{\tau x}^{(\alpha)}$ — поля собственных волн, x — поперечное, волновое число волн непрерывного спектра, s — номер волн дискретного спектра и τ — дискретный индекс, нумерующий собственные волны при фиксированном x (например, азимутальное число) [5]. В формуле (1) верхним индексом $\alpha = 1$ отмечены прямые волны, а индексом 2 — обратные. Аналогичное разложение справедливо и для магнитного поля. Коэффициенты этих разложений удовлетворяют системе линейных уравнений (ср. [4]):

$$\frac{dC_s^{(\alpha)}}{dz} = ih_s^{(\alpha)} C_s^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, 2} \left[\sum_p S_{s, p}^{(\alpha\beta)} C_p^{(\beta)} + \sum_{\tau'} \int_0^{\infty} S_{s, \tau' x}^{(\alpha\beta)} C_{\tau' x}^{(\beta)} d\tau' \right], \quad (2)$$

$$\frac{dC_{\tau x}^{(\alpha)}}{dz} = ih_x^{(\alpha)} C_{\tau x}^{(\alpha)} + \sum_{\beta=1, 2} \left[\sum_p S_{\tau x, p}^{(\alpha\beta)} C_p^{(\beta)} + \sum_{\tau'} \int_0^{\infty} S_{\tau x, \tau' x}^{(\alpha\beta)} C_{\tau' x}^{(\beta)} d\tau' \right],$$

где $h_s^{(\alpha)}$, $h_x^{(\alpha)}$ — продольные волновые числа и $S^{(\alpha\beta)}$ — коэффициенты связи. В дальнейшем будем предполагать, что волны дискретного спектра нормированы на единицу, а волны непрерывного спектра нормированы на δ -функцию так, что нормирующий множитель $D_{\tau}(x) = 1$.

[5]. Выражения для коэффициентов связи нетрудно получить из соответствующих формул для закрытых волноводов [3]. При малых неоднородностях или плавном их изменении систему (2) можно решить методом последовательных приближений [4].

Применим приведенные выше соотношения к расчету прохождения несимметричной волны HE_{11} через нерегулярный участок круглого диэлектрического волновода. Будем предполагать, что диэлектрическая проницаемость цилиндра невелика ($\epsilon \sim \epsilon_0 \div 4\epsilon_0$), так что замедление волны HE_{11} мало. Поперечное волновое число этой волны равно [1, 7]

$$x_{11} = ik\vartheta_{11}, \quad \vartheta_{11} = \frac{2}{\gamma ka} \exp \left[\frac{\epsilon + \epsilon_0}{8\epsilon_0} - \frac{\epsilon + \epsilon_0}{(ka)^2(\epsilon - \epsilon_0)} \right] \quad (3)$$

($\gamma = 1.7811\dots$). Поля собственных волн, распространяющихся вдоль однородного цилиндра, можно выразить через электрическую и магнитную функции Герца [5, 7]: $U_{mx}(r, \varphi)$ и $V_{mx}(r, \varphi)$, m — азимутальный индекс. Несимметричные волны ($m \neq 0$) разбиваются на два класса (волны HE_{mx} и EH_{mx}). Для волн HE_{1x} функции Герца вне цилиндра имеют следующий вид:

$$U_{1x} = B_x f_1(xr) \sin \varphi, \quad V_{1x} = -B_x \frac{\omega \epsilon_0}{h_x} f_1(xr) \cos \varphi, \quad (4)$$

$$B_x = \frac{i}{4kV \pi x \epsilon_0 c \Gamma_{1x}}, \quad f_1(xr) = H_1^{(1)}(xr) + \Gamma_{1x} H_1^{(2)}(xr)$$

($H_1^{(1,2)}$ — функции Ханкеля, $k = \omega/c$ — волновое число), где собственное значение Γ_{1x} равно [5]

$$\Gamma_{1x} = \frac{H_0^{(1)}(xa) - v_{1x} H_1^{(1)}(xa)}{v_{1x} H_1^{(2)}(xa) - H_0^{(2)}(xa)} \approx \frac{\ln(x/x_{11})}{\ln(-x/x_{11})}, \quad (5)$$

$$v_{1x} = \frac{(\epsilon + \epsilon_0)x}{\epsilon_0 g^2 a} \left[1 - \frac{(ga)^2}{8} \right], \quad g^2 = k^2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) + x^2.$$

Внутри цилиндра функции Герца равны

$$U_{1x} = A_x J_1(gr) \sin \varphi, \quad V_{1x} = -A_x \frac{\omega \epsilon_0}{h_x} J_1(gr) \cos \varphi, \quad A_x = \frac{x^2 B_x f_1(xa)}{g^2 J_1(ga)}. \quad (6)$$

Соотношения (4) — (6) получены из граничных условий на поверхности диэлектрика и условий на бесконечности, приведенных в [5]. Аналогичные выражения можно получить и для волн других типов.

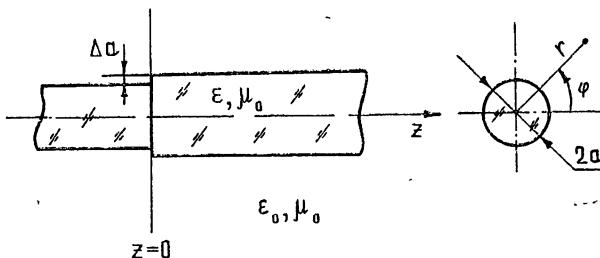


Рис. 1. Скакок радиуса диэлектрического волновода.

Рассмотрим теперь несколько наиболее интересных случаев неоднородностей диэлектрического волновода. Пусть в плоскости $z = 0$ скач-

как меняется радиус волновода: $\frac{da}{dz} = \Delta a \delta(z)$, где $|\Delta a| \ll a$ (рис. 1). На

такой неоднородности происходит преобразование волны HE_{11} в волны с той же симметрией: HE_{1x} и EH_{1z} . В цилиндрической системе координат r , φ , z для коэффициентов связи с прямыми волнами HE_{1x} нетрудно получить следующее равенство:

$$S_{1z, 11}^{(1, 1)} = \frac{\omega a(\epsilon - \epsilon_0)}{h_{11} - h_z} \Delta a \delta(z) \int_0^{2\pi} \left(E_{1z, \varphi}^{(1)} E_{11, \varphi}^{(1)} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_{1z, r}^{(1)} E_{11, r}^{(1)} \right) d\varphi. \quad (7)$$

Подставляя приведенное выражение для коэффициентов связи в (2) и учитывая формулы (4)–(6), в первом приближении для амплитуд волн HE_{1x} получим

$$C_{1z}^{(1)} = \frac{16k^3 a \kappa_{11} c (\epsilon^2 - \epsilon_0^2) B_z B_{11} \Delta a}{i \epsilon_0 (h_z - h_{11}) (ga)^4 \ln(-z/x_{11})} \quad (h_z = \sqrt{k^2 - z^2}), \quad (8)$$

где $B_{11} = \frac{i}{4k} \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon_0 c}}$. Формулу (8) можно получить также методом малых неоднородностей [5]. Вдали от оси волновода поля, рассеянные на нерегулярности, имеют вид сферической волны. Диаграмму направленности этой волны можно найти из разложения (1) методом стационарной фазы [5]. В сферической системе координат R , θ , φ ($z = R \cos \theta$) в рассматриваемом случае диаграмма направленности практически не зависит от φ и при $\theta \ll 1$ имеет вид

$$f(\theta) = \frac{\partial_{11}^2 |\Delta(x_{11}a)/x_{11}a|^2}{\pi (\theta^2 + \theta_{11}^2)^2 (\pi^2 + 1n^2 |\theta/\theta_{11}|^2)}, \quad (9)$$

$$\left| \frac{\Delta(x_{11}a)}{x_{11}a} \right| = \frac{2(\epsilon + \epsilon_0)}{\epsilon_0 (ga)^2} \left| \frac{\Delta a}{a} \right|.$$

Вид функции $f(\theta)$ представлен на рис. 2. Отметим, что мощность излучения максимальна при $\theta \approx 0,4\theta_{11}$ и быстро убывает с ростом θ ; при $\theta \rightarrow 0$ мощность излучения стремится к нулю логарифмически. Интегрируя (9), получаем коэффициент излучения, т. е. отношение мощности потерь на излучение к мощности, переносимой падающей волной HE_{11} :

$$\gamma_{rad} = K_1 \left| \frac{\Delta(x_{11}a)}{x_{11}a} \right|^2, \quad K_1 = \frac{8}{\pi^2} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+1n^2 t/\pi^2)} \approx \frac{1}{3}. \quad (10)$$

Потери на излучение от скачка диаметра волновода определяются только изменением замедления волны HE_{11} . Вычисляя коэффициент связи с обратной волной HE_{11} , нетрудно определить коэффициент отражения от скачка:

$$\gamma_{ref} = \frac{(\epsilon + \epsilon_0)^2 \theta_{11}^2}{(ka)^4 (\epsilon - \epsilon_0)^2} \left| \frac{\Delta a}{a} \right|^2. \quad (11)$$

Отраженная мощность, так же как и излучение назад, при малом замедлении волны HE_{11} значительно меньше полной мощности излучения. Из выражения (9) следует, что при уменьшении замедления поверхности волны (т. е. при увеличении эффективного размера поля

этой волны) диаграмма направленности прижимается к оси z и увеличивается направленность излучения (рис. 2); при этом уменьшается коэффициент отражения, но полная мощность потерь увеличивается.

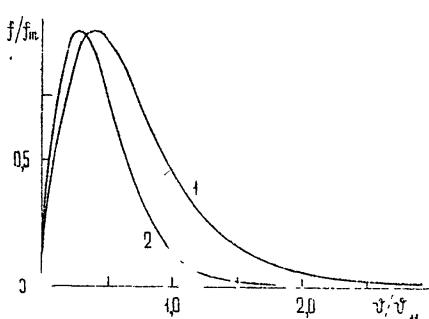


Рис. 2.

Рис. 2. Диаграммы направленности излучения для скачка диаметра волновода (кривая 1) и при линейном изменении радиуса (кривая 2), f_m — максимальное значение $f(0)$.

Рис. 3. Зависимость коэффициентов излучения волн HE_{11} при скачке диаметров волноводов от радиусов диэлектрических цилиндров. Кривая 1 построена для волновода из полиэтилена ($\epsilon = 2,26 \epsilon_0$), а кривая 2 — для кварцевого волновода ($\epsilon = 3,78 \epsilon_0$). Кривые 3 и 4 — зависимости $\vartheta_{11}(a/\lambda)$.

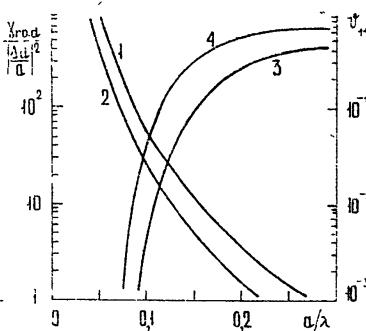


Рис. 3.

На рис. 3 представлены зависимости коэффициента потерь при скачкообразном изменении диаметра цилиндра от отношения a/λ для полиэтиленового (кривая 1) и кварцевого волновода (кривая 2); на том же рисунке даны зависимости ϑ_{11} от a/λ (кривые 3 и 4) для этих волноводов. Как следует из приведенных выше формул, при малом замедлении волн для обеспечения небольших потерь требуется изготавливать волновод с довольно высокой точностью. Например, для полиэтиленового цилиндра ($\epsilon = 2,26 \epsilon_0$) с параметрами $a = 1 \text{ мм}$ и $\lambda = 8 \text{ мм}$ ($\vartheta_{11} = 0,032$) потери на излучение от скачка радиуса $\Delta a = 50 \text{ мк}$ составляют 6 %. Потери на излучение быстро уменьшаются при увеличении замедления волны HE_{11} . Отметим, что приведенные формулы (9) — (11) остаются верны и при $ka \sim 1$, если выполнено неравенство $\vartheta_{11} \ll 1$. Для значений $ka \sim 1$ выражение (10) для коэффициента потерь хорошо согласуется с результатами численных расчетов [8].

Рассмотрим теперь плавный (линейный) переход на участке $0 < z < L$ между волноводами разного диаметра; будем предполагать, что на этом участке $\frac{da}{dz} \ll 1$. Преобразование падающей волны происходит в основном на концах нерегулярного участка [3, 4]. Если длина перехода велика, точнее $kL \vartheta_{11}^2 \gg 1$, то излучение от концов можно считать независимым (в этом случае каждый конец нерегулярного участка находится в дальней зоне по отношению к другому концу). Решая систему уравнений (2), для диаграммы излучения от одного конца при $\vartheta \ll 1$ получим следующее выражение (рис. 2):

$$f(\vartheta, \psi) = \frac{4\vartheta_{11}^2 \left(\frac{d}{dz} \ln |\chi_{11} a| \right)^2}{\pi k^2 (\vartheta^2 + \vartheta_{11}^2)^4 (\pi^2 + \ln^2 |\vartheta/\vartheta_{11}|^2)}. \quad (12)$$

Коэффициент излучения от одного конца неоднородного участка оказывается равным

$$\gamma_{\text{rad}} = \frac{K_2}{k^2 \vartheta_{11}^4} \left(\frac{d}{dz} \ln |\chi_{11} a| \right)^2, \quad (13)$$

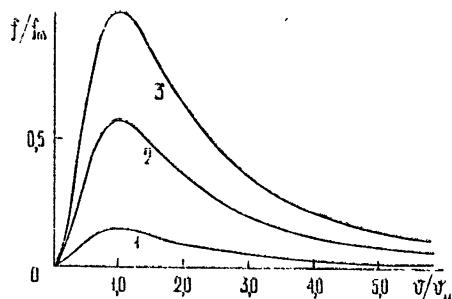
$$K_2 = \frac{32}{\pi^2} \int_0^1 \frac{(1+t^2)dt}{(1+t)^4(1+\ln^2 t/\pi^2)} \approx 0,8444,$$

а коэффициент отражения определяется формулой

$$\gamma_{\text{ref}} = \frac{(\epsilon + \epsilon_0)^2 \vartheta_{11}^4}{4(k a)^4 (\epsilon - \epsilon_0)^2} \left| \frac{da}{dz} \right|^2. \quad (14)$$

Используя полученные выражения, нетрудно определить полный коэффициент излучения (от обоих концов). Как и следовало ожидать, диаграмма направленности излучения в этом случае несколько уже, чем при скачкообразном изменении радиуса волновода.

Рис. 4. Диаграмма направленности излучения при сдвиге оси диэлектрического волновода для углов $\varphi = 0$ (1), $\varphi = \pi/4$ (2) и $\varphi = \pi/2$ (3), f_m — максимальное значение функции $f(\vartheta, \varphi)$.



Аналогичным образом можно рассчитать прохождение волны через неоднородный участок с изломом или сдвигом оси волновода. Не останавливаясь на вычислениях, приведем только окончательные результаты. На нерегулярностях указанного вида в основном происходит связь волны HE_{11} с волнами непрерывного спектра HE_{2z} и E_{0x} . При скачкообразном сдвиге оси в плоскости yz на величину Δy диаграмма направленности излучения при $\vartheta \ll 1$ имеет следующий вид (рис. 4):

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{\vartheta_{11}^2 \vartheta^2 (k \Delta y)^2}{16\pi(\vartheta^2 + \vartheta_{11}^2)^2 \epsilon_0^2} (\epsilon^2 - 2\epsilon\epsilon_0 \cos 2\varphi + \epsilon_0^2), \quad (15)$$

а коэффициент излучения приближенно равен (рис. 5)

$$\gamma_{\text{rad}} = \frac{(\epsilon^2 + \epsilon_0^2)(\epsilon + \epsilon_0)}{2\epsilon_0^2(\epsilon - \epsilon_0)} \vartheta_{11}^2 \left| \frac{\Delta y}{a} \right|^2. \quad (16)$$

Для рассматриваемой неоднородности диаграмма направленности излучения сравнительно медленно спадает при увеличении ϑ . В отличие от случая, когда происходит резкое изменение радиуса волновода, при сдвиге оси коэффициент излучения убывает при уменьшении замедления волны HE_{11} (см. рис. 3 и 5). Сравнение выражений (10) и (16) показывает, что при малом замедлении для одинаковых величин деформаций ($\Delta y = \Delta a$) потери при скачкообразном изменении диаметра существенно превышают потери при сдвиге оси волновода; однако с ростом замедления потери от различных неоднородностей сравниваются.

При изломе волновода на угол α диаграмма направленности становится уже, чем при сдвиге оси:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{\vartheta_{11}^2 \vartheta_{11}^2 \alpha^2}{4\pi\epsilon_0^2 (\vartheta^2 + \vartheta_{11}^2)^4} (\epsilon^2 - 2\epsilon\epsilon_0 \cos 2\varphi + \epsilon_0^2). \quad (17)$$

Коэффициент излучения в этом случае равен

$$\gamma_{rad} = \frac{\epsilon^2 + \epsilon_0^2}{6\epsilon_0^2 \vartheta_{11}^2} \alpha^2. \quad (18)$$

Приведенное выражение для потерь справедливо только для изломов на малый угол $\alpha \ll \vartheta_{11}$, когда $\gamma_{rad} \ll 1$.

Перейдем теперь к исследованию волноводов другого типа: мы рассмотрим прохождение несимметричной волны HE_{11} вдоль нерегулярного гофрированного цилиндра. Волноводы такого типа находят применение в качестве антенных излучателей. Импедансные линии передачи интересны тем, что при $a \ll \lambda$ они могут направлять не одну поверхностную волну, как диэлектрический волновод (мы не учитываем поляризационного вырождения), а две

волны HE_{11} и E_{01} ; поэтому на неоднородностях такой линии может происходить не только излучение сферической волны, но и обмен энергии между волнами дискретного спектра.

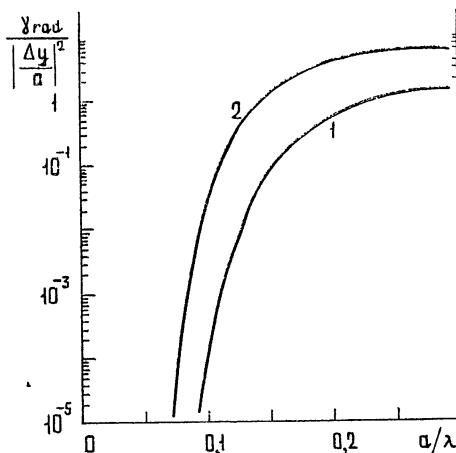


Рис. 5. Зависимость коэффициентов излучения при сдвиге осей диэлектрических волноводов от их радиусов; кривая 1 построена для волновода из полистибена, а кривая 2 — для кварцевого волновода.

На поверхности импедансного цилиндра ($r = a$) выполнены граничные условия

$$E_\varphi = 0, \quad E_z = \zeta H_\varphi, \quad (19)$$

где $\zeta = -ik\delta/(\epsilon_0 c)$ — поверхностный импеданс. Поперечные волновые числа волн дискретного спектра χ_{11} и χ_{01} определяются из соотношений

$$\chi_{11} = ik\vartheta_{11}, \quad \vartheta_{11} = \frac{2}{\gamma ka} \exp \left[-\frac{1+a/\delta}{2(ka)^2} \right], \quad \frac{k^2 \delta}{\chi_{01}^2 a} = \ln \frac{\gamma \chi_{01} a}{2i}. \quad (20)$$

Расчет прохождения волны HE_{11} по нерегулярному участку импедансного цилиндра проводится так же, как и для диэлектрического волновода. Поля собственных волн определяются методом, изложенным в работе [5], с учетом граничных условий (19). При скачкообразном изменении импеданса или диаметра цилиндра потери на излучение зависят только от изменения фазовой скорости волны.

$$\gamma_{\text{rad}} = K_1 \left| \frac{\Delta(x_{11}a)}{x_{11}a} \right|^2, \quad (21)$$

$$\left| \frac{\Delta(x_{11}a)}{x_{11}a} \right| = \left| \frac{2 + a/\delta}{(ka)^2} \frac{\Delta a}{a} + \frac{1}{k^2 a \delta} \frac{\Delta \delta}{\delta} \right|.$$

Потери на излучение в этом случае такие же, как и при изменении диаметра диэлектрического волновода (см. формулу (10)). Для рассматриваемых неоднородностей выражение для диаграммы направленности сферической волны совпадает с формулой (9), приведенной выше. Аналогичные выражения получаются и для плавных переходов.

При прохождении волны HE_{11} через неоднородный участок со сдвигом оси волновода происходит связь падающей волны с волнами E_{01} , HE_{2z} и EH_{2z} , а также с медленной волной E_{01} . При сдвиге оси на величину Δy коэффициент преобразования волны HE_{11} в волну E_{01} равен

$$\gamma_{\text{tr}} = \frac{(k \delta \vartheta_{11})^2 k h_{01}^{-1}}{2\pi^2 \left| 2 \ln \frac{2i}{\gamma x_{01} a} - 1 \right|} \left[\left(\frac{1 + \delta/a}{(k \delta)^2} + \frac{k^2}{x_{01}^2} \right)^2 + \frac{k^2 h_{01}^2}{x_{01}^4} \right] \left| \frac{\Delta y}{a} \right|^2. \quad (22)$$

Для наиболее интересного случая $\delta < a$ коэффициент излучения приближенно равен

$$\gamma_{\text{rad}} = \frac{K_3^2}{16} |x_{11} a|^3 \left(\ln \frac{2k^2}{|x_{11}|^2} \right) \left(\frac{\Delta y}{a} \right)^2, \quad (23)$$

$$K_3 \approx \left(1 + \frac{5a}{4\delta} + \frac{3a^2}{4\delta^2} \right) (1 + 2a/\delta).$$

Для такой неоднородности коэффициент преобразования в волну E_{01} и коэффициент излучения имеют близкий порядок величин. Отметим, что характер зависимости γ_{rad} от замедления волны HE_{11} здесь тот же, что и в случае сдвига оси диэлектрического волновода. Таким образом, при малом замедлении и для импедансного цилиндра наибольшие потери возникают при таких деформациях, когда происходит изменение фазовой скорости волны HE_{11} .

Рассмотренные выше открытые линии малого поперечного сечения представляют значительный интерес для передачи волн на большие расстояния [2]; в таких системах основная доля энергии, переносимая медленной волной, локализована вне диэлектрика, поэтому, уменьшая замедление волны даже при сравнительно невысоком качестве используемого материала, можно достичь малого значения тепловых потерь. Однако, как показано выше, при малом замедлении поверхностные волны HE_{11} становятся весьма неустойчивыми: на неоднородностях эти волны легко трансформируются в сферические волны. Такая неустойчивость ставит предел уменьшению затухания волн в диэлектрических зумером материала, можно достичь малого значения тепловых потерь. оказывают такие нерегулярности, при которых изменяется фазовая скорость. Потери на излучение на нерегулярных участках сравнительно слабо зависят от структуры самих волноводов, а определяются, в основном, симметрией волн и нерегулярностей, а также фазовыми скоростями этих волн.

Автор благодарен П. Л. Капице за интерес к работе, Л. А. Вайнштейну за ее обсуждение и ценные замечания и Б. З. Каценеленбауму за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Маркузе, Оптические волноводы, изд. Мир, М., 1974.
2. В. Ф. Взятышев, Диэлектрические волноводы, изд. Сов. радио, М., 1970
3. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961
4. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд. Наука, М., 1969.
5. А. Б. Маненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 739 (1970).
6. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. D. Marcus, Bell. Syst. Techn. J., 49, № 8, 1665 (1970).

Институт физических проблем
АН СССР

Поступила в редакцию
25 марта 1975 г.

ANGULAR MODE LOSSES IN NONUNIFORM OPEN WAVEGUIDES OF
A SMALL CROSS SECTION

A. B. Manenkov

The transmission of nonuniform slow modes through an irregular dielectric circular-section waveguide and impedance cylinder is investigated by the cross section method.

УДК 621.372.8

ВОЛНОВОД С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян

Теоретически исследуется распространение электромагнитных волн в прямоугольном волноводе, поперечный размер которого меняется во времени. Предлагается общий метод замены переменных в волновом уравнении, позволяющий разделить переменные, и показывается, что это возможно только для трех законов движения стенки волновода:

$$x = a + vt, \quad x = \sqrt{a^2 + 2avt}, \quad x = \sqrt{a^2 + v^2 t^2},$$

где a — положение стенки при $t = 0$, v — характерная скорость движения.

Указываются точные решения волнового уравнения в этих случаях и проводится их исследование.

Исследование волноводов с подвижной границей оказывается важным для многих вопросов радиофизики, таких, как влияние вибраций стенки на характеристики волновода, перестройка полосы пропускания частот, преобразование частот и т. п. Известные к настоящему времени точные решения этой задачи относятся к плоскому волноводу, образованному двумя идеально проводящими параллельными плоскостями для волн типа H_{n0} [1, 2]. В первой из этих работ рассматривается линейный закон движения границы $x = a + vt$, во второй — параболический закон $x = \sqrt{a^2 + 2avt}$.

Ниже мы предлагаем общий метод разделения переменных для прямоугольного волновода с одной движущейся стенкой, который был применен ранее [3] для исследования колебаний в резонаторах с подвижной границей.

1. Пусть $x = 0, y = 0, y = b$ — уравнения трех стенок волновода в некоторой декартовой системе координат, а четвертая движется по произвольному закону $x = x(t)$. Будем считать стенки идеально проводящими, хотя метод позволяет учесть также и конечную проводимость стенок. Граничные условия на неподвижных стенках волновода имеют вид

$$\begin{aligned} E_x &= E_z = 0 \quad (y = 0, y = b), \\ E_z &= E_y = 0 \quad (x = 0) \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$E_z + \beta H_y = 0, \quad E_y - \beta H_z = 0$$

на подвижной стенке [4] ($\beta = \frac{1}{c} \dot{x}(t)$). Поля в волноводе выразим через две скалярные функции $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$ соотношениями

$$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(1)}(x, \tau) \sin \frac{\pi n}{b} y e^{i\omega \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,n}(x, \tau),$$

$$E_{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\perp n}(x, \tau), \quad (2)$$

$$H_x = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(2)}(x, \tau) \cos \frac{\pi n}{b} y e^{i \omega \tau} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{x n}(x, \tau),$$

$$H_{\perp} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{\perp n}(x, \tau),$$

где

$$E_{\perp n} = \Delta_n^{-2} \left\{ \nabla \frac{\partial E_{xn}}{\partial x} - \text{rot} \frac{\partial H_{xn}}{\partial \tau} e_x \right\}, \quad H_{\perp n} = \Delta_n^{-2} \left\{ \nabla \frac{\partial H_{xn}}{\partial x} + \text{rot} \frac{\partial E_{xn}}{\partial \tau} e_x \right\},$$

h — постоянная распространения в волноводе, $\Delta_n = \sqrt{h^2 + (\pi n/b)^2}$, E_{\perp} и H_{\perp} — нормальные к оси $0x$ составляющие полей, e_x — орт оси $0x$, $\tau = ct$.

Неизвестные функции $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$ удовлетворяют обычным волновым уравнениям:

$$\frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial \tau^2} - \Delta_n^2 U_n^{(1,2)} = 0. \quad (3)$$

Такое представление полей автоматически обеспечивает выполнение граничных условий при $y = 0$ и $y = b$. Заметим, что (2) описывает «гибридные» волны в волноводе, состоящие из ТМ- и ТЕ-мод, так как только такой тип решения позволяет в общем случае удовлетворить первому из условий (1).

Подстановка полей из (2) в граничные условия (1) приводит, как это нетрудно видеть, к следующим простым соотношениям для функций $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$:

$$\frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U_n^{(2)}}{\partial \tau} = 0 \quad (x = 0); \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial x} + \beta \frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial U_n^{(2)}}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial U_n^{(2)}}{\partial x} = 0 \quad (x = x(t)) \quad (5)$$

Таким образом, в прямоугольном волноводе с движущейся границей возможно существование двух «гибридных» волн, описываемых соответственно функциями $U_n^{(1)}$ или $U_n^{(2)}$ и удовлетворяющих уравнениям (3) и граничным условиям (4) и (5).

2. В уравнениях (3) введем новые переменные, предложенные в [3]. Именно, пусть

$$z = F(w) = \tilde{f}(\xi, \eta) + i\tilde{g}(\xi, \eta) = \tau + ix$$

есть аналитическая функция комплексного переменного $w = \xi + i\eta$ и $F(w^*) = F^*(w)$. Тогда имеют место равенства $f(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, i\eta)$, $ig(\xi, \eta) = \tilde{g}(\xi, i\eta)$, где $f(\xi, \eta)$ и $g(\xi, \eta)$ — действительные функции переменных ξ и η . Если теперь положить $x = ix$, то получим замену переменных

$$x = g(\xi, \eta), \quad \tau = f(\xi, \eta), \quad (6)$$

переводящую уравнения (3) в уравнения вида

$$\frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 U_n^{(1,2)}}{\partial \eta^2} + \Delta_n^2 G(\xi, \eta) U_n^{(1,2)} = 0, \quad (7)$$

где $G(\xi, \eta) = |F'(w)|^2_{\eta=i\eta}$, причем переменные ξ, η и x, τ связаны соотношениями

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (8)$$

Функция $F(w)$ выбирается таким образом, чтобы уравнения границ волновода $x = 0$ и $x = x(t)$ переходили в переменных ξ, η соответственно в уравнения

$$\eta = 0, \quad \eta = \eta_0. \quad (9)$$

Первое из граничных условий (4) в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (x = 0).$$

Но поскольку $\xi(x, \tau)$ есть четная функция x , то $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \eta} = 0$ при $\eta = 0$.

Условия (5) в новых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) &= 0, \\ \frac{\partial U_n^{(2)}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial U_n^{(2)}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что из-за соотношений (8)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Но при $x = x(t)$ $\beta = \frac{dx}{d\tau}$, следовательно,

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\eta}{d\tau},$$

и коэффициенты при $\frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial U_n^{(2)}}{\partial \eta}$ есть полные производные по времени. На движущейся границе значение η постоянно и $\eta = \eta_0$ в любой момент времени, т. е. $\frac{d\eta}{d\tau} = 0$ и граничные условия при $\eta = 0$ и $\eta = \eta_0$ могут быть теперь записаны в виде

$$U_n^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial U_n^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0 \text{ и } \eta = \eta_0). \quad (11)$$

Следовательно, в переменных ξ, η задача нахождения полей в волноводе сведена к решению уравнений (7) с граничными условиями (11).

В уравнении (7) может быть проведено разделение переменных, если

$$G(\xi, \eta) = G_1(\xi) + G_2(\eta). \quad (12)$$

Полагая в этом случае $U_n^{(1,2)} = X_n^{(1,2)}(\xi) Y_n^{(1,2)}(\eta)$, для функций $X_n^{(1,2)}(\xi)$ и $Y_n^{(1,2)}(\eta)$ получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_n^{(1,2)}}{d\xi^2} + [\mu^2 + \Delta_n^2 G_1(\xi)] X_n^{(1,2)} &= 0, \\ \frac{d^2 Y_n^{(1,2)}}{d\eta^2} + [\mu^2 - \Delta_n^2 G_2(\eta)] Y_n^{(1,2)} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где μ^2 — параметр разделения.

Условию (12) удовлетворяют лишь три функции $F(w)$. В самом деле, в основе предлагаемого метода лежит аналогия между уравнением (7) и уравнением Гельмгольца $\Delta U + k^2 U = 0$, в которое переходит (7) формальной заменой $\tilde{\eta} = i\eta$. В последнем уравнении, как это хорошо известно (см., например, [5]), переменные разделяются лишь в трех криволинейных системах координат — полярной, параболической и эллиптической. Для каждой из этих координатных систем можно указать функцию $F(w)$, реализующую определенный закон движения границы волновода и позволяющую провести разделение переменных в (7). Все эти функции указаны в работе [3] при исследовании колебаний в резонаторах с движущейся границей.

3. Преобразованию

$$F(w) = \frac{a}{\beta} (e^w - 1), \quad (14)$$

дающей замену переменных [3]

$$x = \frac{a}{\beta} e^\xi \operatorname{sh} \eta, \quad \tau = \frac{a}{\beta} (e^\xi \operatorname{ch} \eta - 1),$$

в нашей формальной аналогии соответствует переход к полярной системе координат. Если $\eta = 0$, то $x = 0$, а при $\eta = \eta_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$ получается линейный закон движения границы волновода:

$$x = a + \beta \tau = a + vt^*. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что $G(\xi, \eta) = \frac{a^2}{\beta^2} e^{2\xi} = G_1(\xi)$, $G_2(\eta) = 0$ и переменные в уравнении (7) разделяются и переходят в систему (13). Решение второго из этих уравнений тривиально, а решение первого выражается через цилиндрические функции с мнимым индексом. К сожалению, к настоящему времени детальная теория этих функций отсутствует. В работе [1] исследования аналогичного уравнения проводятся с помощью бесконечных рядов и метода ВКБ. Мы воспользуемся здесь вторым методом, проведя, однако, более аккуратную оценку его применимости.

* Распространение волн типа H_{n0} в таком волноводе было исследовано в [1], где использовались переменные x, t , просто выражаемые через ξ, η : $x = t \operatorname{th} \eta / \beta$, $t = a^2 e^{2\xi} / \beta^2$.

Как обычно, в методе ВКБ будем разлагать функцию $X_n^{(1,2)}$ по обратным степеням параметра $\lambda_n = a\Delta_n/\beta$ с выделением общего осциллирующего множителя. Главный член этого разложения оказывается равным

$$X_n^{(1,2)} = \frac{C_n}{\sqrt[4]{e^{2\xi} + \gamma_n^2}} \exp \left\{ \pm i\lambda_n \int_0^\xi \sqrt{e^{2\xi} + \gamma_n^2} d\xi \right\}, \quad (15)$$

где $\gamma_n = \mu\beta/a\Delta_n$.

Решая теперь второе уравнение (13) и используя граничные условия (11), функции $U_n^{(1,2)}(\xi, \eta)$ можно записать в виде

$$U_n^{(1,2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{nm}}{\sqrt[4]{e^{2\xi} + \gamma_{nm}^2}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\pi m}{\eta_0} \eta \\ \sin \frac{\pi m}{\eta_0} \eta \end{Bmatrix} \exp \left\{ \pm i\lambda_n \int_0^\xi \sqrt{e^{2\xi} + \gamma_{nm}^2} d\xi \right\}, \quad (16)$$

где $\gamma_{nm} = \frac{\mu_m}{\lambda_n}$, $\mu_m = \frac{\pi m}{\eta_0}$, верхняя строка в фигурных скобках относится к $U_n^{(1)}$, а нижняя — к $U_n^{(2)}$, C_{nm} — произвольные коэффициенты, определяемые из условий возбуждения данного вида колебаний. Заметим, что $m = 0$ в (16) не входит, так как на этом типе колебания движения стекки не оказывается. Векторы поля в волноводе могут быть найдены по формулам (2).

Условие малости второго приближения в методе ВКБ по сравнению с первым приводит к неравенству

$$\frac{1}{560m} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \ll 1, \quad (17)$$

которое хорошо выполняется почти для всех значений β уже при $m = 1$. Так, например, если потребовать, чтобы второе приближение составляло 1% от первого при $m = 1$, то $\beta \leq 0,993$.

Каждое слагаемое в уравнении (16) может быть представлено в виде прямой и обратной волн, движущихся параллельно оси с фазами

$$\Phi_{nm}^\pm = \frac{\pi m}{\eta_0} \eta \pm \lambda_n \int_0^\xi \sqrt{e^{2\xi} + \gamma_{nm}^2} d\xi.$$

Производные Φ_{nm}^\pm по времени и координате дадут, соответственно, мгновенные значения частоты и поперечного волнового числа. Так, например, отношение частот падающей и отраженной волн на движущейся стенке волновода равно

$$\frac{\omega^+}{\omega^-} = \frac{r - \beta}{r + \beta}, \quad (18)$$

где

$$r = \left\{ 1 + \left(\frac{a\eta_0}{\pi m \beta} \right)^2 \left(1 + \frac{\beta\tau}{a} \right)^2 (1 - \beta^2) \left[\left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 + h^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Для нерелятивистского движения границы, когда $\beta \ll 1$, выражение (18) переходит в соответствующую формулу из [1].

4. Функция $F(w) = \frac{a\beta}{2} \left[\left(w + \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{\beta^2} - 1 \right]$ приводит к замене переменных

$$x = a\beta\eta \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right), \quad \tau = \frac{a\beta}{2} \left[\eta^2 + \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{\beta^2} - 1 \right], \quad (19)$$

и $\eta = 1$ соответствует следующему закону движения границы:

$$x = \sqrt{a^2 + 2a\beta\tau},$$

где $\beta = \frac{dx}{d\tau}$ при $\tau = 0$. При $x = 0$ $\eta = 0$. Функция $G(\xi, \eta)$ теперь выражается соотношением

$$G(\xi, \eta) = -a^2\beta^2\eta^2 + a^2(1 + \beta\xi)^2 \quad (20)$$

и переменные в уравнении (7) разделяются. Решение уравнения (7) может быть представлено через функцию параболического цилиндра

$$\begin{aligned} U_n^{(1,2)} = \sum_{m=1}^{\infty} & \left\{ {}_e U_{z_{nm}}^{(1)} \left[\sqrt{\Delta_n} a \bar{\beta} \eta \right] \right\} \left\{ {}_0 U_{z_{nm}}^{(1,2)} \left[\sqrt{\Delta_n} a \bar{\beta} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \beta_{nm} {}_e U_{z_{nm}}^{(1,2)} \left[\sqrt{\Delta_n} a \bar{\beta} \left(\xi + \frac{1}{\beta} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $z_{nm} = \mu_m / \Delta_n a \beta$, ${}_e U_{z_{nm}}$ и ${}_0 U_{z_{nm}}$ — соответственно четная и нечетная функция параболического цилиндра (см. [2] и указанную там литературу), α_{nm} и β_{nm} — коэффициенты, определяемые из условий возбуждения данного типа колебаний, μ_m — постоянная разделения.

В работе [2] было исследовано распространение волн H_{n0} , которые получаются из (21) при нечетной функции параболического цилиндра и $n = 0$. Здесь мы не будем повторять результаты работы [2] и заметим, что они обобщаются на наш случай, если в [2] заменить h на $\sqrt{h^2 + (\pi n/b)^2}$.

5. Функция $F(w) = \frac{a}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{sh} w$ дает замену переменных:

$$x = \frac{a}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \eta, \quad \tau = \frac{a}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \eta \quad (22)$$

и при $\eta = \eta_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$ приводит к следующему закону движения границы:

$$\bar{x}(t) = \sqrt{a^2 + \beta^2 \tau^2}, \quad (23)$$

где $\beta = \frac{dx}{d\tau}$ при $\tau \rightarrow \infty$. Левой границе волновода $x = 0$ соответствует $\eta = 0$. Формула (23) показывает, что при $\tau = 0$ стенка покоялась и затем монотонно начинает разгоняться до предельной скорости βc при $\tau \rightarrow \infty$.

Функция $G(\xi, \eta)$ в рассматриваемом случае дается соотношением

$$G(\xi, \eta) = \frac{a^2(1 - \beta^2)}{2\beta^2} (\operatorname{ch} 2\xi + \operatorname{ch} 2\eta). \quad (24)$$

К сожалению, решение уравнений (13) при $G(\xi, \eta)$ из (24) выражается через функции Матте в области переменных, где эти функции в настоящее время очень мало исследованы, поэтому ниже мы ограничимся получением приближенных решений уравнений (13) с помощью метода ВКБ. При $\beta \ll 1$ стандартной процедурой метода ВКБ находим, что решение (7) можно представить в виде

$$U_n^{(1,2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\Omega_{mn}^2 + \frac{\beta^2 \tau^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \begin{cases} \cos \frac{\pi mx}{x(t)} \\ \sin \frac{\pi mx}{x(t)} \end{cases} [a_{nm} e^{i\varphi_{nm}(\tau)} + b_{nm} e^{-i\varphi_{nm}(\tau)}], \quad (25)$$

где $\omega_{mn}^0 = c\Delta_n \sqrt{1 + \pi^2 m^2 / a^2 \Delta_n^2}$ — частота волны при $\tau=0$, $\Omega_{mn} = \frac{\omega_{mn}^0}{c\Delta_n}$, а

$$\varphi_{mn} = \frac{a\Delta_n}{\beta} \int_0^{\beta\tau/a} \sqrt{\frac{\Omega_{mn}^2 + \xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}} d\xi$$

и φ_{mn} выражается через эллиптические интегралы первого и второго рода.

Как и выше, в п. 3 область применения приближенного решения (25) определяется требованием малости второго приближения в разложении по обратным степеням параметра $a\Delta_n/\beta$ и сводится в конечном счете к двум неравенствам

$$\frac{\beta^2 \Delta_n^2 a^2}{4\pi^3 m^3} \ll 1, \quad \frac{\beta}{2\sqrt{2} \sqrt{\Delta_n^2 a^2 + 2\pi^2 m^2 + 2\beta\tau x \Delta_n^2}} \ll 1. \quad (26)$$

Решения (25), как и выше, можно представить в виде двух волн, падающих на неподвижную $x=0$ и подвижную границу $x=x(t)$ волновода. Фазы этих волн, как это видно из (25), соответственно равны

$$\Phi_{mn}^{\pm} = \varphi_{mn} \pm \frac{\pi mx}{a} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 \tau^2 / a^2}}. \quad (27)$$

Мгновенные частоты каждой из этих волн могут быть найдены из (27) дифференцированием по τ :

$$\omega_{mn}^{\pm} = c \frac{\partial \Phi_{mn}^{\pm}}{\partial \tau} = \frac{c \Delta_n a}{x} \left(\Omega_{mn}^2 + \frac{\beta^2 \tau^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mp \frac{\pi mc}{x^3} \beta^2 x \tau. \quad (28)$$

Из (28) следует, что при возрастании τ обе частоты меняются от ω_{mn}^0 при $\tau=0$ до $c\Delta_n$ при $\tau \rightarrow \infty$, причем частота ω_{mn}^+ проходит через максимум при $\tau = a \sqrt{1 + a^2 \Delta_n^2 / \pi^2 m^2}$, а ω_{mn}^- — убывает монотонно с ростом τ . При больших τ движение границы становится равномерным и отношение частот из (28) совпадает с соответствующей величиной в (18). Заметим, что движение границы становится равномерным с достаточной степенью точности лишь после того, как граница пройдет расстояние порядка нескольких значений a .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 6, 935 (1969).
2. К. А. Барсуков, Г. А. Григорян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 2, 280 (1976).

3. К. А. Барсуков, Г. А. Григорян, Радиотехника и электроника, 21, № 1, 57 (1976).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1973.
5. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, М., 1958, гл. 5.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
13 марта 1975 г

A WAVEGUIDE WITH MOVABLE BOUNDARY

K. A. Barsukov, G. A. Grigoryan

The propagation of electromagnetic waves in a rectangular waveguide the transverse dimension of which varies in time is theoretically investigated. The general method of changing the variables, which permits to separate the variables in the wave equation, is suggested. This is shown to be possible only for three laws of motion of the waveguide wall.

$$x = a + vt, \quad x = \sqrt{a^2 + 2avt}, \quad x = \sqrt{a^2 + v^2 t^2}$$

where a is the wall position at $t = 0$, v is the characteristic velocity of motion. Exact solutions of the wave equation in these cases are pointed out.

УДК 621.372 81.09

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЛНОВОДНОМ ТРАНСФОРМАТОРЕ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

В. И. Лозяной, В. М. Онуфриенко, И. Г. Прохода

Интегральные уравнения метода частичных пересекающихся областей обобщены на случай расчета волноводных трансформаторов с соединительной полостью сложной формы и частичным анизотропным заполнением. Приведены результаты численного расчета на ЭВМ матриц рассеяния волноводного изгиба и трехплечного волноводного соединения с частичным диэлектрическим заполнением. Численно исследован простейший фильтр на основе полосковой линии.

1. Рассмотрим волноводный трансформатор (ВТ), общий вид которого представлен на рис. 1. Сложная область определения электромагнитного поля ВТ ограничена идеально проводящими поверхностями $\sigma_1 U \sigma_2 \dots U \sigma_i \dots U \sigma_N$ и характеризуется комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1 = \epsilon'_1 - j\epsilon''_1$ во всех точках области, не принадлежащих объему V . Объем V заполнен анизотропным веществом с комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 = \epsilon'_2 - j\epsilon''_2$ и тензором

\leftrightarrow
магнитной проницаемости μ .

Представим область определения поля ВТ в виде пересечения $N - 1$ частичных расширенных областей [1] ($\sigma_i \setminus S^{(i)}$) $U \sigma_i U S_{iN}$ с N -й областью $(\sigma_N \setminus S^{(N)}) U \sigma'_N U S_{N1} \dots U S_{Ni} \dots \dots U S_{NN-1}$, где $S^{(k)} \subset \sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$).

С учетом векторного аналога второго тождества Грина [2] после выделения вторичных источников [3, 4] электрическое поле в i -й и N -й областях можно записать в виде

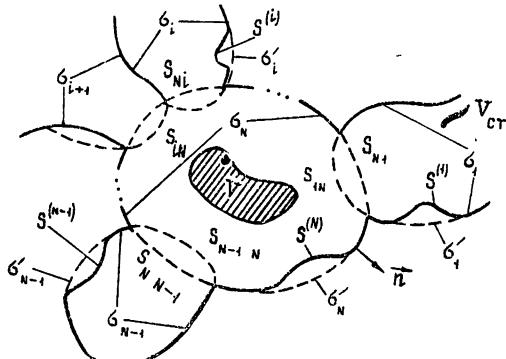


Рис. 1.

$$E_i(\mathbf{r}) = - \int_{S_{iN}} K_{Ni}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'_{iN} + \int_{S^{(i)}} L_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS^{(i)'} + \delta_{ri} E_{ct}(\mathbf{r}),$$

$$E_N(\mathbf{r}) = - \sum_{i=1}^{N-1} \int_{S_{Ni}} K_{iN}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'_{Ni} + \int_{S^{(N)}} L_{NN}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS^{(N)'} + \quad (1)$$

$$+ (k^2 + \nabla \nabla) \int_V M_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - j\omega \mu_0 \nabla \int_V N_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'$$

$$(i = 1, 2, \dots, N-1),$$

где

$$\begin{aligned} K_{pq}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_p(\mathbf{r}')] [\nabla' \times \vec{\tilde{G}}_{(e)q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] - n \vec{\tilde{G}}_{(e)q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \mathbf{E}_p(\mathbf{r}'), \\ L_{pq}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= [\mathbf{n} \times \nabla' \times \mathbf{E}_p(\mathbf{r}')] \vec{\tilde{G}}_{(e)p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + n \mathbf{E}_p(\mathbf{r}') \nabla' \vec{\tilde{G}}_{(e)p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \\ M_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \vec{\tilde{G}}_{(e)N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\epsilon_2 - 1) \mathbf{E}_N(\mathbf{r}'), \\ N_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \vec{\tilde{G}}_{(m)N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\mu - 1) \vec{\tilde{H}}_N(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая перестановочную двойственность, можно записать подобные выражения и для вектора напряженности магнитного поля.

В формулах (1) и (2) обозначено: $\vec{\tilde{G}}_{(e)p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\vec{\tilde{G}}_{(m)p}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — соответственно электрическая и магнитная аффинорные функции Грина незаполненной p -й области, удовлетворяющие тем же граничным условиям, что $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ на границе расширенной области, $\mathbf{E}_{ct}(\mathbf{r})$ — поле сторонних источников, заключенных в объеме V_{ct} , \mathbf{n} — внешняя нормаль к граничной поверхности.

Из полученной системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (1) с учетом выражений для вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ можно определить при $\mathbf{r} \in V$ поле внутри рассеивающего тела через поле падающей волны. При \mathbf{r} , не принадлежащем V , из этих уравнений определяется полное поле ВТ вне рассеивающего тела через поле внутри вещества.

После подстановки в (1) выражений для $\mathbf{E}_N(\mathbf{r})$ и аффинорной функции Грина в виде разложений в ряды по собственным функциям пустой N -й области интегральные уравнения сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Анализируя уравнения (1), на основании известной теоремы Фредгольма (см., например, [5]) можно утверждать, что существует одно и только одно решение системы интегральных уравнений, каковы бы ни были функции $\mathbf{E}_{ct}(\mathbf{r})$, принадлежащие классу $L_2(V)$. Можно также показать, что при замене бесконечной системы линейных алгебраических уравнений редуцированной системой выполняется соотношение

$$\| \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r}) \| \rightarrow 0,$$

т. е. $\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r})$ сходится в среднем к $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (в $\mathbf{E}^{(M)}(\mathbf{r})$ учтено M членов разложения в ряд по собственным функциям).

2. На основе изложенной выше методики нами разработаны алгоритм и программы численного расчета на ЭВМ следующих СВЧ устройств: H -плоскостные ВТ со сложной формой соединительной полости и частичным диэлектрическим заполнением, фильтры на основе полосковых линий. При реализации на ЭВМ алгоритма численного расчета электродинамических характеристик указанных устройств для достижения точности порядка десятых процента оказалось достаточным учесть 9—12 членов в разложениях функций Грина в ряд по собственным функциям соответствующей подобласти.

В таблице представлены некоторые результаты численного расчета на ЭВМ М-222 модулей и фаз элементов матрицы рассеяния (соответственно $|S_{1r}|$ и φ_{1r}) Y -соединения с диэлектрическим цилиндром в центре ($\epsilon_2 = 2,61$, $r_0/R = 0,29$, где r_0 — радиус диэлектрического цилиндра, $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$ a — радиус центральной соединительной полости).

Обозначено: λ — длина волны в свободном пространстве, a — полуширина волноводов. Расчитанные значения модуля коэффициента отражения хорошо согласуются с данными эксперимента $|S_{11}|_{\text{эксп.}}$

Таблица

λ/a	$ S_{11} $	φ_{11}	$ S_{21} = S_{31} $	$\varphi_{21} = \varphi_{31}$	$ S_{11} _{\text{эксп.}}$
2,45	0,4255	-0,9147	0,6399	+1,5071	0,42
2,55	0,5079	-0,5657	0,6091	-1,4936	0,49
2,60	0,5439	-0,4486	0,5933	-1,4426	0,52

Свойства унитарности рассчитанных матриц рассеяния выполняются с высокой степенью точности.

При расчете элементов матрицы рассеяния устройства, изображенного на рис. 2, был учтен комплексный характер диэлектрической проницаемости вещества. Получены следующие результаты для устройства с частичным заполнением в виде цилиндра из плексигласа ($\epsilon'_2 = 2,61$, $\operatorname{tg} \delta = 8,4 \cdot 10^{-3}$, $r_0/R = 0,29$, $\lambda/a = 2,65$, $\psi = 120^\circ$):

$$|S_{11}| = 0,5889, \varphi_{11} = +0,0945, |S_{21}| = 0,8081, \varphi_{21} = -1,4762.$$

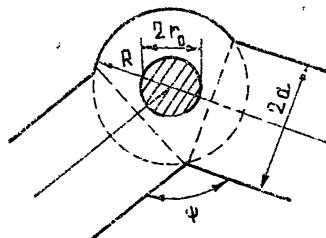


Рис. 2.

3. Приведенная выше методика может быть распространена на случай расчета различных устройств на основе полосковых линий передачи. Предположим, что сложная область (рис. 1) состоит из диэлектрического слоя постоянной толщины b , помещенного между двумя идеально проводящими слоями шириной a_i . Электромагнитное поле в такой структуре при $b \ll a_i$ и $|\epsilon_1| \gg 1$ заключено в основном в диэлектрическом слое. Поведение этого поля может быть полностью описано одной составляющей $E_i(r)$ электрического вектора напряженности поля (см., например, [6]), удовлетворяющей уравнению

$$\Delta E_i(r) + k^2 E_i(r) = -f_{ct}(r) \quad (k^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial E_i(r)}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (3)$$

где $f_{ct}(r)$ — известная функция, описывающая поле стороннего источника. Условие (3), вытекающее из пренебрежения эффектом искажения поля у краев, предполагает, что боковая поверхность плоской структуры действует как магнитная стенка.

Нахождение электромагнитного поля в частичных областях сложной полосковой структуры (рис. 1) сводится к решению системы интег-

ральных уравнений (1) при условии, что искомое поле и функции Грина удовлетворяют граничным условиям (3).

Как показано в [7, 8], от расчета устройств и неоднородностей в рассматриваемых полосковых линиях можно перейти к расчету неоднородностей и устройств как на симметричных, так и на несимметричных полосковых линиях.

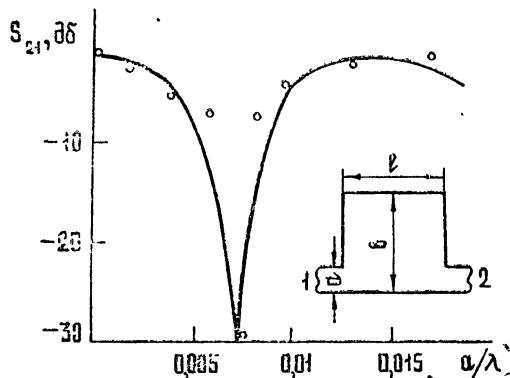


Рис. 3

гут быть применены и для расчета других сложных волноводных трансформаторов и неоднородностей в полосковых линиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Онуфrienко, И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 4, 584 (1975).
2. R. E. Collin, Field theory of guided waves, McGraw-Hill, BC, 1960.
3. Л. К. Гал, Н. А. Хижняк, в республиканском межведомственном сборнике «Радиотехника», вып. 20, 89 (1972).
4. М. Ж. Кислюк, Метод вторичных волн в задачах электродинамики, Л., 1970.
5. П. П. Забрейко и др., Интегральные уравнения, изд. Наука, М., 1968.
6. B. Bianco, S. Ridella, MTT, 20, № 5, 297 (1972).
7. А. А. Олинер, в сб. «Печатные схемы сантиметрового диапазона», ИЛ, М., 1956.
8. Е. И. Нефедов, А. Т. Фиалковский, Полосковые линии передачи, изд. Наука, М., 1974.
9. B. Bianco, M. Granara, S. Ridella, Alta frequenza, 42, № 6, 286 (1973).

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию
24 июня 1975 г.

THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF WAVEGUIDE TRANSFORMER BY THE SECOND KIND INTEGRAL EQUATION METHOD

V. I. Lozyanoy, V. M. Onufrienko, I. G. Prokhoda

The integral equations of the method of partially intersecting regions are generalized for the case of calculation of waveguide transformers with a connecting complex-shaped cavity and partial anisotropic filling. The results of numerical calculation by the electron computer of the scattering matrixes of the waveguide bending and three-arm waveguide connection with a partial dielectric filling are presented. A simplest filter is numerically investigated on the basis of a strip line.

УДК 514 : 538.56

ОЦЕНКА НЕКОТОРЫХ ТИПИЧНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В РАДИОФИЗИКЕ

B. I. Классен

На основе классического метода ван дер Корпута доказаны теоремы, позволяющие оценивать широкий класс тригонометрических сумм и соответствующих им интегралов

ВВЕДЕНИЕ

В радиофизической практике часто встречаются следующие математические объекты:

$$\int_a^b A(x) e^{2\pi i f(x)} dx \quad (1)$$

и

$$\sum_{a < n < b} A(n) e^{2\pi i f(n)}, \quad (2)$$

где $A(x)$ — медленноМеняющаяся функция амплитудного распределения, $0 \leq A(x) \leq M$ ($x \in [a, b]$), а $f(x)$ — фазовая функция системы.

На определенной стадии исследования нет необходимости знать детально характер изменения этих величин, а достаточно иметь представление об *огибающих*. Они могут характеризоваться функциями оценки для (1) и (2).

Замкнутые инженерные оценки как для интегралов (1), так и для сумм (2) при различных условиях, налагаемых на функции $A(x)$ и $f(x)$, могут быть получены, если воспользоваться методом ван дер Корпута [1, 2], основанном, грубо говоря, на замене суммы (2) интегралом, и последующей оценкой этого интеграла. Такой подход был развит ван дер Корпутом и Титчмаршем [3], однако они интересовались порядком роста сумм. Нас же будет интересовать точная оценка, необходимая для инженерной практики.

1. ЗАМЕНА СУММЫ ИНТЕГРАЛОМ

Воспользовавшись формулой Сонина [4], справедливой для дважды дифференцируемых на отрезке функций, получим

$$\sum_{n=1}^N F(n) = \int_0^N F(x) dx + \frac{1}{2} [F(N) - F(0)] - \int_0^N \rho(x) F'(x) dx, \quad (3)$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $\{x\}$ — дробная часть x .

Кроме того, в дальнейшем нам понадобится разложение

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin 2v\pi x}{v}, \quad (4)$$

справедливое для любого нецелого x , причем ряд сходится почти всюду и его частичные суммы ограничены, так что можно умножать (4) на интегрируемую функцию и интегрировать почленно.

Считая, что $F(x) = A(x)e^{2\pi i f(x)}$ — дважды дифференцируемая на отрезке функция, мы оценим интегралы в правой части (3) и получим, таким образом, одновременно оценки (1) и (2).

$$2. \text{ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА } I = \int_0^N A(x) e^{2\pi i f(x)} dx$$

Лемма 1. Если $f(x) \in C_1[0, N]$ удовлетворяет условию $f'(x) \geq r > 0$ и монотонна, то

$$\left| \int_0^N e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi r}. \quad (5)$$

Доказательство:

$$\left| \int_0^N e^{2\pi i f(x)} dx \right| = \left\{ \left[\int_0^N \cos 2\pi f(x) dx \right]^2 + \left[\int_0^N \sin 2\pi f(x) dx \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим $I_1 = \int_0^N \cos 2\pi f(x) dx$. Так как $f'(x)$ монотонно возрастает,

то основной вклад в интеграл вносит первая полуволна; сумма второй с третьей, четвертой с пятой и т. д. даёт только уменьшение интеграла. Но если $f'(x) \geq r > 0$, то минимально возможное изменение функции $f(x)$ на $[0, N]$ есть $[\Delta f(x)]_{\min} = Nr$, а на любом отрезке длины $L - [\Delta f(x)]_{\min} = Lr$. Изменение функции $f(x)$, определяющее первую половину полуволны, есть $\Delta f(x) = 1/2$. Отсюда максимально возможная ширина первой полуволны $L_{\max} = 1/2r$ и, следовательно,

$$|I_1| \leq \left| \int_0^{L_{\max}} \sin \frac{\pi}{L_{\max}} x dx \right| = \frac{1}{\pi r},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 2. (A). Если $f(x) \in C_2[0, N]$, $f''(x) \geq r > 0$ (или $\leq -r < 0$), то

$$\left| \int_0^N e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{r}}, & \text{если } f'(x) \text{ знакопостоянна} \\ \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2}{r}}, & \text{если } f'(x) \text{ не знакопостоянна} \end{cases}. \quad (6)$$

(B). Если $f''(x) = r > 0$ (или $= -r < 0$), то

$$\left| \int_0^N e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2r}}, & \text{если } \operatorname{sgn} f'(0) = \operatorname{sgn} f''(x) \\ \sqrt{\frac{2}{r}}, & \text{если } \operatorname{sgn} f'(0) \neq \operatorname{sgn} f''(x) \end{cases}. \quad (7)$$

(B). Если выполняются условия (A), то

$$\left| \int_0^N e^{2\pi i f(x)} dx \right| \sim \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r}}, & \text{если } f'(x) \text{ знакопостоянна} \\ \frac{1}{\sqrt{r}}, & \text{если } f'(x) \text{ обращается в нуль в} \\ & \text{одной точке} \end{cases}. \quad (8)$$

Доказательство.

(A). Рассуждая аналогично лемме 1, мы придем к необходимости оценивать минимум возможного изменения функции $f(x)$ на любом промежутке длины L :

$$[\Delta f(x)]_{\min} = \begin{cases} \frac{r}{2} L^2, & \text{если } f'(x) \text{ знакопостоянна} \\ \frac{r}{8} L^2, & \text{если } f'(x) \text{ не знакопостоянна} \end{cases}.$$

Из последнего равенства следует неравенство (6).

(Б). Чтобы доказать (7), достаточно оценить интеграл

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_0^N \exp [i(\alpha x^2 + \beta x)] dx \right| = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \left\{ \left[C \left[\sqrt{|\alpha|} \left(N + \frac{\beta}{2\alpha} \right) \right] - C \left[\sqrt{|\alpha|} \frac{\beta}{2\alpha} \right] \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[S \left[\sqrt{|\alpha|} \left(N + \frac{\beta}{2\alpha} \right) \right] - S \left[\sqrt{|\alpha|} \frac{\beta}{2\alpha} \right] \right]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что максимальное значение интегралов Френеля [5] $C_{\max}(x) \approx 0,75$, $S_{\max}(x) \approx 0,7$, получим

$$|I| \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2|\alpha|}}, & \text{если } \operatorname{sgn} \alpha = \operatorname{sgn} \beta \\ \sqrt{\frac{2\pi}{|\alpha|}}, & \text{если } \operatorname{sgn} \alpha = -\operatorname{sgn} \beta \end{cases},$$

откуда следует (7).

(Б). Формула (8) следует из метода стационарной фазы [6].

Оценки, стоящие в правых частях (6), (7) и (8), условимся обозначать функцией $Q(r)$.

На практике может быть полезна и следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $A(x)$ — давжды дифференцируемая на $[0, N]$ функция, $A(0) = A(N) = 0$, $|A'(0)| = |A'(N)| = \eta$ и $|A''(x)| \leq r$. Тогда

$$\left| \int_0^N A(x) e^{i\alpha x} dx \right| \leq \frac{1}{\alpha^2} (2\eta + rN). \quad (9)$$

Доказательство. Интегрируя два раза по частям интеграл в (9) и оценивая получение выражение по модулю, получаем утверждение леммы.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА

Лемма 4. Пусть $f(x)$ — действительная дифференцируемая на $[0, N]$ функция с монотонной производной, $f'(0) = \alpha$, $f'(N) = \beta$. Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)} \right| \leq 1 + \left| \sum_{\beta-1 < k < \alpha+\varepsilon} \int_0^N e^{2\pi i \{f(x)-kx\}} dx \right| + \frac{1 + \ln(\alpha - \beta + 1)}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} [C + \Psi(\alpha - \beta + 2)]. \quad (10)$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой Сонина, получим

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)} \right| \leq 1 + \left| \int_0^N e^{2\pi i f(x)} dx \right| + |I|,$$

где, как нетрудно показать,

$$I = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \int_0^N \frac{f'(x)}{f'(x) - k} de^{2\pi i \{f(x)-kx\}} - \int_0^N \frac{f'(x)}{f'(x) + k} de^{2\pi i \{f(x)+kx\}} \right\}.$$

Предположим, что $f'(x)$ монотонно убывает и, дополнитель но, что $0 < \beta \leq 1$ (потом мы избавимся от этого условия). Функции $\frac{f'(x)}{f'(x) + k}$ ($k = 1, 2, \dots$) положительны и монотонно убывают. Следовательно, можно применить вторую теорему о среднем к действительной и минимальной частям интеграла [5]:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left| \int_0^N \frac{f'(x)}{f'(x) + k} de^{2\pi i \{f(x)+kx\}} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{k(k+\alpha)}.$$

Вторую сумму интегралов разобъем следующим образом:

$$\sum_{1 < k < \alpha+\varepsilon} + \sum_{k > \alpha+\varepsilon},$$

где $1 > \varepsilon > 0$. Функции $\frac{f'(x)}{k-f'(x)}$ при $k \geq \alpha + \varepsilon$ положительны и монотонно убывают; следовательно, можно применить для оценки интегралов вторую теорему о среднем. В итоге для начальной суммы получаем:

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)} \right| \leq 1 + \left| \sum_{\beta-1 < k < \alpha+\varepsilon} \int_0^N e^{2\pi i \{f(x)-kx\}} dx \right| + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{k(k+\alpha)} + \frac{1}{\pi} \sum_{1 < k < \alpha+\varepsilon} \frac{1}{k} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k > \alpha+\varepsilon} \frac{\alpha}{k(k-\alpha)}.$$

Важно по возможности точнее оценить эти суммы. Пользуясь формулой 8.361 (7) из [7], получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{k(k+\alpha)} = \int_0^1 \frac{1-x^\alpha}{1-x} dx = \Psi(\alpha+1) + C,$$

где $\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$ — psi-функция, а $C = 0,577 \dots$ — Эйлерова постоянная;

$$\sum_{1 < k < \alpha+\varepsilon} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln \alpha.$$

Последняя сумма оценивается аналогично первой. Учитывая, что $\alpha \leq \alpha - \beta + 1$, получаем (10).

Начальное предположение, что $0 < \beta \leq 1$, несущественно. Действительно, пусть оно не выполняется. Всегда можно выбрать функцию $\eta(x) = f(x) - \nu x$, такую, что $0 < \beta - \nu \leq 1$. Но оценка остается и для этой функции той же, т. е. добавки типа νx к функции, стоящей в экспоненте, не влияют на оценку.

4. ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Здесь мы приведем две теоремы, охватывающие большое число практических встречающихся в радиофизике типов сумм (2).

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — действительная функция с непрерывной и монотонной производной на отрезке $[0, N]$ и пусть $f'(0) = \alpha$, $f'(N) = \beta$, а также $|f'(x)| \leq \theta < 1$. Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)} \right| \leq \left| \int_0^N e^{2\pi i f(x)} dx \right| + 1 + \sqrt{2} \left\{ \left| \frac{1}{\pi \alpha} - \operatorname{ctg} \pi \alpha \right| + \left| \frac{1}{\pi \beta} - \operatorname{ctg} \pi \beta \right| \right\} \quad (11)$$

(теорема о замене тригонометрической суммы интегралом).

В доказательстве, аналогичном доказательству леммы 4, учтено, что

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - k^2}.$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $0 < r \leq f''(x) \leq hr$ или $0 < r \leq -f''(x) \leq hr$. Тогда имеет место оценка

$$\left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)} \right| \leq 1 + (1 + hrN) Q(r) + \frac{1 + \ln(1 + hrN)}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} [C + \Psi(2 + hrN)], \quad (12)$$

где $Q(r)$ определяется леммой 2.

Теорема следует непосредственно из леммы 4 и леммы 2, если учесть, что $(\alpha - \beta) \leq hrN$.

5. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОК

1) Дадим верхнюю оценку зависимости поля от радиуса сфокусированной в зоне Френеля плоской фазируемой антенной решетки, у которой расстояние между излучателями превышает длину волны. Как показано в [8], эта зависимость в направлении $\theta = \theta_0 = 0$ имеет вид

$$|M_0(R, R_0)| = \frac{1}{(2N+1)^2} \left| \sum_{n=-N}^N \exp \left[ik \frac{n^2 d^2}{2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right] \right|^2.$$

Оценка для $d = 5\lambda$, $R_0 = 400\lambda$, $(2N+1)^2 = 441$, полученная на основе теоремы 1, показана на рис. 1 пунктиром.

2) Известно [9], что оценка диаграмм направленности дуговых антенных решеток (ДАР) с раскрытием $N\alpha < \pi$ затруднена, однако теорема 2 позволяет получить такую оценку.

В обозначениях [9] диаграмма направленности ДАР в вертикаль-

ной плоскости при фазировании в направлении $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = 0$ может быть записана в виде

$$F(z) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} e^{iz \cos n \alpha},$$

где α — угловое расстояние между изотропными излучателями, $z = kR(1 - \sin \theta)$, $k = 2\pi/\lambda$, R — радиус дуги. Пример оценки для $N\alpha = \pi/2$, $N = 100$ приведен на рис. 2.

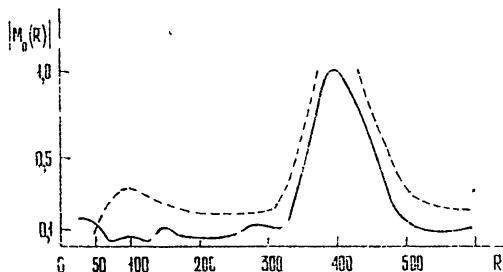


Рис. 1.

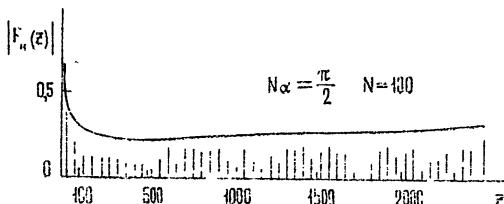


Рис. 2.

Доказанные в статье теоремы дают возможность эффективно оценивать широкий класс тригонометрических сумм и могут быть использованы, по-видимому, в различных областях радиофизики. Аналогичные оценки могут быть получены и для случая, когда $A(n) \not\equiv 1$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. В. Меркулову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. G. van der Corput, Math. Ann., 84, 53 (1921).
2. J. G. van der Corput, Math. Ann., 98, 697 (1928).
3. Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, ИЛ, М., 1953.
4. И. М. Виноградов, Основы теории чисел, изд. Наука, М., 1972.
5. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1972.
6. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, III (2), изд. Наука, М., 1974.
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
8. В. И. Классен, В. В. Меркулов, Радиотехника и электроника, 20, № 2, 312 (1975).
9. В. И. Классен, Тр. МФТИ, сер. Радиотехника и электроника, 7, 124 (1974).

ESTIMATION OF SOME TYPICAL TRIGONOMETRIC SUMS IN
RADIO PHYSICS*V. I. Klassen*

Based upon the classical Van-der-Korput method, the theorems are proved which permit a wide class of trigonometric sums and corresponding integrals to be estimated.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.574.6

**К ВОПРОСУ О ДИФРАКЦИИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН НА НЕОДНОРОДНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ**

Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев

Предложенный в [1] метод расчета коэффициентов возбуждения дифракционных мод, опирающийся на лемму Лоренца, может, как отмечалось там же, быть использован применительно к задачам дифракции на неоднородных диэлектрических объектах. Обсуждению и обоснованию этой возможности посвящена настоящая заметка.

1. Пусть круговой цилиндр радиуса a с радиально неоднородным распределением диэлектрической проницаемости ($\epsilon_0 \epsilon(r)$, μ_0), расположенный в свободном пространстве (вакууме) (ϵ_0 , μ_0), возбуждается линейным электрическим током с плотностью $j^e(r, \varphi, z; t) = r^{-1} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t} z^0$ (r , φ , z — цилиндрические координаты, $r_0 \geq a$). Тогда полное дифракционное поле может быть представлено (так же как в случае однородного цилиндра — см [1]) в виде суперпозиции полей дифракционных мод^{*}

$$\begin{aligned} H &= \sum_s (D_{+s}^{(H)} H_{+s} + D_{-s}^{(H)} H_{-s}), \\ E &= \sum_s (D_{+s}^{(H)} E_{+s} + D_{-s}^{(H)} E_{-s}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $D_{\pm s}^{(H)}$ — коэффициенты возбуждения мод. Компоненты поля отдельной моды с номером s записываются в виде

$$E_{\pm s} = z^0 e^{\mp i\nu_s \varphi} \begin{cases} H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 r) & (r > a) \\ U_{\nu_s}(r) \frac{H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a)}{U_{\nu_s}(a)} & (r < a) \end{cases}, \quad (2)$$

$$H_{\pm s} = r^0 \frac{\pm \nu_s}{Z_0 k_0 r} E_{\pm s} + \varphi^0 \frac{-i}{Z_0 k_0} \frac{\partial}{\partial r} E_{\pm s},$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$, $H_{\nu_s}^{(2)}(\xi)$ — функция Ханкеля второго рода, $U_{\nu_s}(r)$ — функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_{\nu_s}(r)}{dr} \right) + k_0^2 \left[\epsilon(r) - \frac{\nu_s^2}{(k_0 r)^2} \right] U_{\nu_s}(r) = 0. \quad (3)$$

Дисперсионное уравнение для определения угловой постоянной распространения ν_s дифракционной моды имеет вид

$$\Delta^{(H)}(\omega, \nu_s) = \frac{H_{\nu_s}^{(2)'}(k_0 a)}{H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a)} - \frac{U_{\nu_s}'(a)}{k_0 U_{\nu_s}(a)} = 0 \quad (4)$$

(штрих означает дифференцирование по аргументу).

* Утверждение о том, что ряд (1) описывает полное дифракционное поле при произвольной зависимости $\epsilon(r)$, нуждается, вообще говоря, в более строгом математическом обосновании.

Для нахождения коэффициентов возбуждения $D_{\pm s}^{(H)}$ воспользуемся методом леммы Лоренца. Соответствующие выкладки (см. [1]) приводят к тому же общему выражению, что и в случае однородного цилиндра — формула (8) работы [1]. Отличие заключается в конкретном виде интеграла $I_{l, \pm s}$, который здесь записывается следующим образом:

$$I_{l, \pm s} = - \frac{v_l \mp v_s}{Z_0 k_0} \left\{ \frac{H_{v_l}^{(2)}(k_0 a) H_{v_s}^{(2)}(k_0 a)}{U_{v_l}(a) U_{v_s}(a)} \int_0^a \frac{U_{v_l}(r) U_{v_s}(r)}{r} dr + \int_a^\infty \frac{H_{v_l}^{(2)}(k_0 r) H_{v_s}^{(2)}(k_0 r)}{r} dr \right\}. \quad (5)$$

Первый из этих интегралов вычисляется с помощью уравнения (3):

$$\int_0^a \frac{U_{v_l}(r) U_{v_s}(r)}{r} dr = (v_l^2 - v_s^2)^{-1} \int_0^a r \left[U_{v_s}(r) \frac{d}{dr} U_{v_l}(r) - U_{v_l}(r) \frac{d}{dr} U_{v_s}(r) \right], \quad (6)$$

второй — является просто табличным. Используя далее условие конечности поля в нуле ($r = 0$), условие излучения на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) и дисперсионное уравнение (4), нетрудно убедиться, что

$$I_{l, s} = 0 \text{ при } s \neq -l,$$

$$I_{l, -l} = N_l^{(H)} = Z_0^{-1} a [H_{v_l}^{(2)}(k_0 a)]^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \Delta^{(H)}(\omega, v) \right\}_{v = v_l}, \quad (7)$$

т. е. дифракционные моды, направляемые радиально неоднородным диэлектрическим цилиндром, ортогональны в том же смысле, что и направляемые однородным. Учитывая условие ортогональности (7), окончательно получаем

$$D_{-l}^{(H)} = D_{+l}^{(H)} = D_l^{(H)} = \frac{1}{N_l^{(H)}} H_{v_l}^{(2)}(k_0 r_0). \quad (8)$$

2. Случай возбуждения радиально неоднородного диэлектрического цилиндра линейным магнитным током $-j^m(r, \varphi, z; t) = -r^{-1} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{i\omega t} z^0$ — принципиально отличается от предыдущего, если диэлектрическая проницаемость проходит через нулевое значение — $\epsilon(r_1) = 0$ ($r_1 < a$). Отличие связано с неограниченным (в отсутствие диссипации) возрастанием электрического поля соответствующих (E -типа) мод в точке $r = r_1$, что, в свою очередь, приводит к появлению конечных резонансных потерь энергии (см. [2]). Влияние этой особенности выясним на примере (представляющем и самостоятельный интерес) цилиндра с тонким — в масштабе длины падающей волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ — переходным слоем: $\epsilon(r) = \text{const} = \epsilon_b$ при $r < b$ и $\epsilon(r) = (r - r_1)/(a - r_1)$ ($\epsilon(b) = \epsilon_b$) при $b < r < a$ (см. рис. 1). Такая конкретизация зависимости $\epsilon(r)$ не ограничивает общности основных результатов, но способствует простоте, четкости и наглядности их получения.

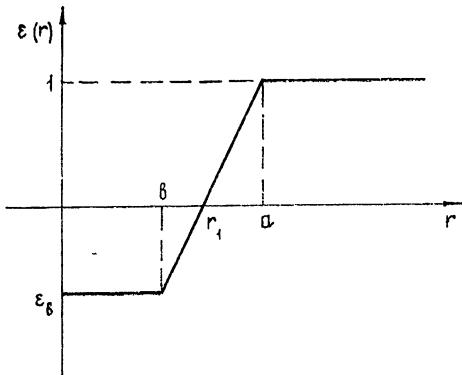


Рис. 1.

Компоненты поля отдельной дифракционной моды E -типа с номером s записываются в виде

$$H_{\pm s} = z^0 e^{\mp i \omega_s t} \begin{cases} H_{v_s}^{(2)}(k_0 r) & (r > a) \\ P_{v_s}(r) \frac{H_{v_s}^{(2)}(k_0 a)}{P_{v_s}(a)} & (b < r < a) \\ J_{v_s}(kr) \frac{H_{v_s}^{(2)}(k_0 a) P_{v_s}(b)}{P_{v_s}(a) (J_{v_s} kb)} & (r < b) \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $k = k_0 \sqrt{\varepsilon_b}$, $J_{\nu_s}(\xi)$ — функция Бесселя, $P_{\nu_s}(r) = \sqrt{\varepsilon_b} P'_{\nu_s}(r, b) \frac{J'_{\nu_s}(kb)}{J_{\nu_s}(kb)} = -\frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial b} P_{\nu_s}(r, b)$; в свою очередь, $P_{\nu_s}(r, b) = V_{\nu_s}^{(1)}(b - r_1) V_{\nu_s}^{(2)}(r - r_1) - V_{\nu_s}^{(1)}(r - r_1) V_{\nu_s}^{(2)}(b - r_1)$, где функции $V_{\nu_s}^{(1)}$ и $V_{\nu_s}^{(2)}$ — два линейно-независимых решения уравнения

$$\frac{\varepsilon(r)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{\varepsilon(r)} \frac{\partial}{\partial r} V_{\nu_s}(r) \right] + k_0^2 \left[\varepsilon(r) - \frac{\nu_s^2}{(k_0 r)^2} \right] V_{\nu_s}(r) = 0 \quad (10)$$

в переходном слое $a < r < b$. Для рассматриваемого тонкого слоя эти решения могут быть представлены в виде рядов по степеням $(r - r_1)$ (см., например, [3]). Применительно к плоскому слою — $a \rightarrow \infty$, $a - b = \text{const}$ — соответствующие ряды приведены в [4], характеристики поверхностных волн, направляемых таким слоем, обсуждаются в [5]. Угловые постоянные распространения ν_s мод E -типа находятся из уравнения

$$\Delta^{(E)}(\omega, \nu_s) = \frac{H_{\nu_s}^{(2)'}(k_0 a)}{H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a)} - \frac{P'_{\nu_s}(a)}{k_0 P_{\nu_s}(a)} = 0. \quad (11)$$

Входящая в (9) и (11) функция $P_{\nu_s}(r, b)$ приводится к виду

$$P_{\nu_s}(r, b) \equiv P_{\nu_s}(r - r_1, b - r_1) = P_{\nu_s}(r - r_1, |b - r_1|) - i\pi \left(\frac{\nu_s}{k_0 a} \right)^2 V_{\nu_s}^{(1)}(r - r_1) V_{\nu_s}^{(1)}(b - r_1) \quad (12)$$

(индекс ⁽¹⁾ отмечает то из решений (10), которое не дает особенности в поле). Появление мнимого члена в (12) обусловлено как раз наличием конечных потерь энергии в области плазменного резонанса

Используя выражение для поля (9), дифференциальное уравнение (10), дисперсионное уравнение (11) и принимая во внимание (при интегрировании) условие конечности поля в нуле ($r = 0$), наличие особенности в точке плазменного резонанса ($r = r_1$) и условие излучения на бесконечности ($r \rightarrow \infty$), можно непосредственно убедиться в ортогональности рассматриваемых дифракционных мод E -типа. Учитывая условие ортогональности, для коэффициента возбуждения $D_l^{(E)}$ получим

$$D_l^{(E)} = \frac{1}{N_l^{(E)}} H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 r_0), \quad (13)$$

где норма моды E -типа $N_l^{(E)} = -Z_0 a [H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 a)]^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{(E)}(\omega, \nu) \right\}_{\nu = \nu_l}$. Вполне очевидно, что формула (13) сохраняется и для цилиндра с произвольной зависимостью $\varepsilon(r)$.

3. Таким образом, для коэффициентов возбуждения $D_l^{(H), (E)}$ дифракционных мод, направляемых радиально неоднородным цилиндром, остаются справедливыми те же общие формулы, что и однородным (см. [1]), все отличие содержится в номере соответствующих мод. Нетрудно понять, что это утверждение распространяется и на радиально неоднородный диэлектрический шар (однородный см в [1]) и на металлические цилиндр и сферу, окруженные неоднородной диэлектрической оболочкой (однородной см в [6]). Более того, как отмечалось еще в [7], метод леммы Лоренца позволяет находить коэффициенты возбуждения дифракционных мод, направляемых произвольными плавно неоднородными гладкими (в масштабе длины волны дифракционной моды) объектами, включая (что продемонстрировано здесь) плазменные образования, в которых ε проходит через нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 12, 1894 (1972).
2. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 9—10, 1358 (1967).
3. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, Гостехиздат, М., 1956, стр. 137.
4. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 6, 885 (1968).
5. К. Н. Степанов, ЖТФ, 35, № 6, 1002 (1965).
6. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 19, № 4, 583 (1976).
7. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 9, 1269 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
20 мая 1975 г.