

СОДЕРЖАНИЕ

Абрамович Б. С. Пространственная неустойчивость плоской волны при нелокальном нагреве магнитоактивной плазмы	329
Анютин А. П., Орлов Ю. И. Равномерная асимптотика поля прямоугольных радиоимпульсов в магнитоактивной плазме	335
Резцов А. В. Электромагнитное поле полуограниченной плазмы со сторонними источниками. I	343
Листвин В. Н., Колесов Ю. И., Гуляев Ю. В. О селективной модуляции в спектрометрах субмиллиметрового диапазона	350
Ларионцев Е. Г., Серкин В. Н. Влияние самофокусировки на структуру ультракоротких импульсов света в лазере с просветляющимся фильтром	357
Новиков М. А., Тертышник А. Д. Оптические резонаторы с анизотропными элементами	364
Пелиновский Е. Н. Спектральный анализ простых волн	373
Якушкин И. Г. Сильные флуктуации интенсивности поля светового пучка в турбулентной атмосфере	384
Гурвич А. С., Кан В., Потапов Б. П. Измерения четырехточечной функции коherентности поля лазерного излучения в турбулентной среде.	393
Фрейлихер В. Д., Фукс И. М. Отражение волн от импедансной шероховатой поверхности	401
Пономарев Г. А., Якубов В. П. О геометрооптическом приближении в задаче рассеяния волн на неровной поверхности	407
Саичев А. И. О статистике интенсивности волн за случайным фазовым экраном в приближении геометрической оптики	418
Базарова М. П. Применение теории представлений групп к задаче о нахождении собственных колебаний симметричных резонаторов	426
Бичуцкая Т. И. О структуре поля в плоском импедансном волноводе	430
Петрищев В. А. О резонансной неустойчивости волновых пучков в нелинейных линзовых волноводах	438
Ергаков В. С., Моисеев М. А., Эрм Р. Э. К вопросу об устойчивости синхронизированных внешним сигналом одномодовых колебаний в многомодовом МЦР-монотроне	453
Данилов В. Н., Сыровой В. А. К расчету электродов в прикатодной области электростатической пушки, формирующей осесимметричный электронный пучок при неоднородных условиях на поверхности криволинейного катода	460
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Демченко В. В., Омельченко А. Я. К вопросу о параметрическом резонансе в холодной неоднородной изотропной плазме	471
Газазян Э. Д., Лазиев Э. М., Тер-Погосян А. Д. Излучение заряженной частицы, пересекающей движущуюся закорачивающую стенку волновода	473

УДК 621.371.25

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ НЕЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Б. С. Абрамович

Рассматривается неустойчивость самофокусировочного типа высокочастотной плоской волны, распространяющейся в однородной сильно замагниченной плазме в условиях, когда существенны теплопроводность и диффузия плазмы вдоль силовой линии магнитного поля. В диффузионном приближении получены выражения для инкрементов неустойчивости и характерных размеров образующихся «нитей». Показано, что при целокальном анизотропном нагреве область неустойчивости существенно меньше, чем при нелокальном изотропном нагреве. Приведены оценки параметров неустойчивости для F_2 -слоя ионосферы.

В работе [1] было показано, что интенсивная однородная плоская волна (или широкий пучок), распространяющаяся в слабонелинейной кубичной изотропной среде, неустойчива по отношению к малым амплитудно-фазовым возмущениям. Эта неустойчивость, имеющая место для возмущений с пространственными частотами, лежащими в определенном интервале, приводит к распаду плоской волны на систему узких пучков типа уединенных («нитей»). В [2] на примере частично ионизованной изотропной плазмы рассматривалась пространственная неустойчивость плоской волны при наличии пространственной дисперсии нелинейности (нелокальность нелинейного механизма). Возможность самофокусировки электромагнитных волн в нижней ионосфере обсуждалась в [3] в предположении $L_E \gg l/V\delta$ (L_E — характерный размер неоднородности поля, l — длина свободного пробега электропов, $\delta = \delta_i + \delta_m$ — средняя доля энергии, теряемая электроном при одном соударении с ионом и молекулой). При этом тепловые нелинейные эффекты сильнее стрикционных, а нагрев локален.

При распространении мощного излучения в верхней ионосфере (область слоя F_2) существенны теплопроводность и диффузия плазмы вдоль силовых линий магнитного поля. В настоящей работе исследуется влияние анизотропии процессов переноса на неустойчивость самофокусировочного типа высокочастотной плоской волны. Предполагается, что отражения волны и возбуждения параметрической неустойчивости не происходит*.

Рассмотрим стационарный волновой пучок, распространяющийся в слабонелинейной однородной плазме, помещенной в слабое ($\omega > \omega_{pe} > \omega_{He}$) постоянное магнитное поле H_0 (ω — частота распространяющейся волны, ω_{pe} и ω_{He} — плазменная частота и гирочастота электронов вне области локализации поля пучка). Если характерные масштабы изменения комплексной амплитуды поля в продольном и поперечном сечениях пучка, A_z и $A_{x,y}$ велики по сравнению с длиной волны

* Тепловой самофокусировке обыкновенной радиоволны в области отражения от F_2 -слоя ионосферы посвящены работы [4, 5].

$(k\Lambda_{x,y,z} \gg 1)$, где $k = k_0 n$, $k_0 = \omega/c$, $n = (1 - \omega_{pe}^2/\omega^2)^{1/2}$ — показатель преломления линейной среды), то продольная составляющая электрического поля мала по сравнению с поперечными и независимо от типа волн медленно меняющаяся амплитуда $E(r_\perp, z)$ поперечной компоненты электрического поля описывается в данном диапазоне частот параболическим уравнением в изотропном приближении:

$$\Delta_\perp E - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} + k_0^2 \epsilon^{NL}(|E|^2) E = 0. \quad (1)$$

Здесь ось z — направление распространения волны, $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\epsilon^{NL}(|E|^2)$ — малая нелинейная часть диэлектрической проницаемости среды.

Анизотропию плазмы при $\omega \gg \omega_{He}$ следует учитывать лишь при рассмотрении медленных процессов установления неравновесной плотности заряженных частиц под действием высокочастотного поля. При нагревном механизме нелинейности, приводящем к увеличению кинетического давления плазмы и, следовательно, к уменьшению ее концентрации, в случае $\omega \gg \omega_{He}$ легко получить

$$\epsilon^{NL} = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2} (\theta_e + \theta_i), \quad (2)$$

где $\theta_{e,i}$ — нелинейные возмущения температуры электронов и ионов* ($T_{e,i} = T(1 + \theta_{e,i})$).

Считая плазму сильно замагниченной и сильно ионизированной, т. е. $\omega_{He} \gg \nu_{ei} \gg \nu_{em}$ и $\Omega_{HI} \gg \nu_{im} \gg \nu_{ii}$ (ν_{em} , ν_{im} — частоты столкновений заряженных частиц с нейтралами, ν_{ei} , ν_{ii} — частоты электрон-ионных и ион-ионных соударений, Ω_{HI} — гирочастота ионов), нетрудно получить уравнения, описывающие распределение температуры электронов и ионов в слабо нагретой области [6] ($\theta_{e,i} \ll 1$):

$$\theta_e - L_\parallel^2 \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial x_\parallel^2} - L_\perp^2 \tilde{\Delta}_\perp \theta_e = A \frac{|E|^2}{E_p^2}, \quad \theta_i = a \theta_e. \quad (3)$$

Здесь x_\parallel — координата вдоль H_0 , $\tilde{\Delta}_\perp$ — лапласиан по поперечным к H_0 координатам, $L_\parallel = 1,45 \left\{ \frac{T(\nu_{im} + \delta_i \nu_{ei})}{m \nu_{ei} [\nu_{im}(\delta_i \nu_{ei} + \delta_m \nu_{em}) + \delta_i \delta_m \nu_{ei} \nu_{em}]} \right\}^{1/2}$ и $L_\perp = \frac{\nu_{ei}}{\omega_{He}} L_\parallel$ суть коэффициенты диффузии температуры вдоль и поперек магнитного поля, $A = \frac{\delta \nu_{ei} (\nu_{im} + \delta_i \nu_{ei})}{\nu_{im}(\delta_i \nu_{ei} + \delta_m \nu_{em}) + \delta_i \delta_m \nu_{ei} \nu_{em}}$,

$$E_p = \left(\frac{3m \delta \omega^2 T}{e^2} \right)^{1/2}, \quad a = \frac{\delta_i \nu_{ei}}{\nu_{im} + \delta_i \nu_{ei}}.$$

Предполагая, что поле H_0 лежит в плоскости x, z и составляет угол ϑ с вертикалью z , уравнение (3) с учетом соотношения $L_\parallel \gg L_\perp$ можно переписать в системе координат, связанной с волной:

* Здесь принято, что $N_m \gg N_0$, где N_m — концентрация нейтральных молекул, N_0 — концентрация электронов и ионов в невозмущенной плазме. Кроме того, предполагается, что при отсутствии поля $T_e = T_i = T$.

$$\theta_e - L_1^2 \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial z^2} - L_2^2 \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial x^2} - L_{\perp}^2 \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial y^2} - L_3^2 \frac{\partial^2 \theta_e}{\partial x \partial z} = A \frac{|E|^2}{E_p^2}, \quad (4)$$

где

$$L_1^2 = L_{\parallel}^2 \cos^2 \vartheta + L_{\perp}^2 \sin^2 \vartheta, \quad L_2^2 = L_{\parallel}^2 \sin^2 \vartheta + L_{\perp}^2 \cos^2 \vartheta, \quad L_3^2 = L_{\parallel}^2 \sin 2\vartheta.$$

Для исследования пространственной неустойчивости плоской волны в среде, описываемой соотношениями (2) и (4), представим решение диффузационного уравнения (1) в виде $E = (\bar{E} + e)e^{-iz}, |e| \ll \bar{E}$, где

$$\bar{E} = \text{const}, \quad \gamma = \omega_T^2 / 2k, \quad \omega_T^2 = k_0^2 \frac{A(a+1)}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\bar{E}^2}{E_p^2},$$

$$e = e_1 + ie_2, \quad e_{1,2} = \operatorname{Re} e_{1,2}^0 \exp(-i\omega_{\perp} r_{\perp} - ih_x z), \quad \omega_{\perp} = [\omega_x, \omega_y].$$

Линеаризуя уравнения (1) и (4), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$h_x^2 = \frac{\omega_{\perp}^2}{4k^2} \left(\omega_{\perp}^2 - \frac{2\omega_T^2}{1 - L_1^2 h_x^2 + L_2^2 \omega_x^2 + L_{\perp}^2 \omega_y^2} \right), \quad (5)$$

в котором пренебрежено членами, имеющими порядок малости $h_x/\omega_{\perp} \ll \ll 1$. Неустойчивость возникает, если $h_x^2 < 0$, откуда следует, что неустойчивы те возмущения, в спектре которых имеются пространственные частоты ω_{\perp} , удовлетворяющие условию $0 < \omega_{\perp}^2 < \omega_{rp}^2$. При этом максимальный инкремент неустойчивости Γ_{\max} достигается при некоторой оптимальной частоте ω^* . Из (5) следует, что характер неустойчивости определяется величиной

$$\beta(\vartheta) = \frac{L_1^2}{L_2^2} = \frac{1 + \alpha^2 \tan^2 \vartheta}{\alpha^2 + \tan^2 \vartheta}, \quad (6)$$

где $\alpha = L_{\perp}/L_{\parallel}$. График функции $\beta(\vartheta)$ качественно изображен на рис. 1. Из (6) следует, что в широком диапазоне углов $\frac{\pi}{2} \geq \vartheta \geq \frac{\pi}{12}$ $\beta \leq 10$ и, следовательно, неустой-

вость практически развивается, как при поперечном распространении ($\vartheta = \pi/2$). При $\vartheta \leq \alpha$ параметр $\beta \sim \alpha^{-2} \gg 1$ и неустойчивость по характеру близка к неустойчивости при продольном распространении ($\vartheta = 0$). В связи с этим исследуем дисперсионное уравнение (5) в обоих предельных случаях.

1. *Продольное распространение.* При продольном распространении $L_1 = L_{\parallel} \gg \gg L_2 = L_{\perp}$ и можно пренебречь в (5) членами с L_{\perp} . В результате дисперсионное уравнение в безразмерных переменных $\xi = L_{\parallel}^2 h_x^2, \eta = \omega_{\perp}^2 L_{\parallel}^2 / 2k, N = \omega_T^2 L_{\parallel} / k$ запишется в виде

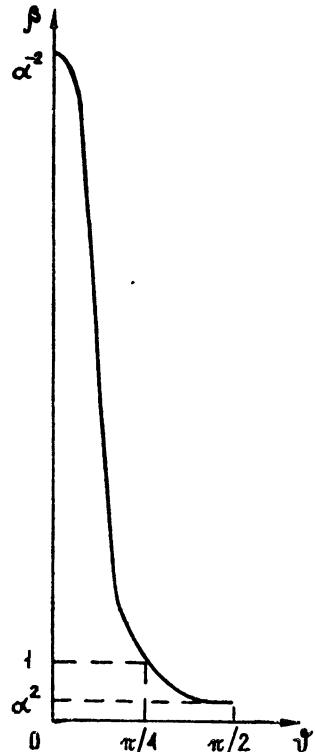


Рис. 1.

$$\xi = \frac{\eta^2 - 1 + \sqrt{f(\eta)}}{2}, \quad f(\eta) = (\eta^2 + 1)^2 - 4N\eta. \quad (7)$$

Параметры неустойчивости x_{rp} , x^* и Γ_{max} определяются характером изменения $f(\eta)$ в зависимости от величины N . Если нагрев локален ($N \ll 1$), то $f(\eta) > 0$ при всех η и в размерных переменных из (7) получаем $x_{rp} = \sqrt{2}x_T$, $x^* = x_T$, $\Gamma_{max} = x_T^2/2k$, что соответствует результатам работы [1] для кубической изотропной среды с локальной нелинейностью. При существенно нелокальном нагреве ($N \gg 1$) функция $f(\eta)$ знакопеременна ($f < 0$ при $(4N)^{1/3} > \eta > 1/3N$), что приводит к следующим соотношениям:

$$x_{rp} = 2 \left(\frac{k x_T}{L_{\perp}} \right)^{1/3}, \quad x^* = \left(\frac{k x_T}{L_{\perp}} \right)^{1/3}, \quad \Gamma_{max} = \frac{1}{4} \left(\frac{x_T}{\sqrt{k} L_{\perp}} \right)^{2/3}. \quad (8)$$

Таким образом, характерный поперечный размер «нитей» $\Lambda_{\perp} \sim \pi/x^*$ и масштаб развития неустойчивости $\Lambda_{\perp} \sim \Gamma_{max}^{-1}$ в случае нелокального нагрева магнитоактивной плазмы (Λ_{\perp}^m , Λ_{\parallel}^m) значительно меньше размеров «нитей», образующихся при нелокальном изотропном нагреве (Λ_{\perp}^n , Λ_{\parallel}^n) [2]:

$$\frac{\Lambda_{\perp}^n}{\Lambda_{\perp}^m} \sim (kL_{\perp})^{1/3}, \quad \frac{\Lambda_{\parallel}^n}{\Lambda_{\parallel}^m} \sim \left(\frac{kL_{\perp}}{\sqrt{\gamma/k}} \right)^{1/3}, \quad kL_{\perp} \gg 1, \quad k \gg \gamma.$$

При выводе дисперсионного уравнения (7) мы пренебрегли членами с поперечным коэффициентом диффузии L_{\perp} . Следовательно, область применимости полученных выше результатов (7) определяется условием $\Gamma_{max}/x^* \gg \sigma$, приводящим к неравенству

$$\frac{E}{E_p} \gg p k L_{\perp} \frac{\omega n}{\omega_{pe}} \frac{v_{ei}^3}{\omega_{He}^3}, \quad p = \left(\frac{v_{im} + \delta v_{em}}{v_{im} + 2\delta v_{ei}} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Оценим характерные размеры неоднородностей, возникающих при продольном нагреве F_2 -слоя ионосферы с параметрами [7]: $v_{ei} = 3 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$, $\omega_{pe} = 7 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{He} = 4 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $L_{\perp} = 3 \cdot 10^6 \text{ см}$, $\delta = 10^{-1}$, $E_p = 2 \text{ В/м}$. При этом уже при небольших мощностях высокочастотной возмущающей волны $E = 0,2 \text{ В/м}$ ($\omega = 2 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$) существенны процессы переноса, и из (7) следует

$$\Lambda_{\perp} = \frac{\lambda}{2} \left(k L_{\perp} \frac{\omega n}{\omega_{pe}} \frac{E_p}{E} \right)^{1/3} \approx 300 \text{ (м)}$$

и

$$\Lambda_{\parallel} = \frac{\lambda}{2\pi} \left(k L_{\perp} \frac{\omega n}{\omega_{pe}} \frac{E_p}{E} \right)^{2/3} \approx 10 \text{ (км)}.$$

Условие (9) здесь приводит к легко выполнимому неравенству $E/E_p \gg 10^{-4}$.

2. Поперечное распространение. При поперечном распространении $L_{\perp} = L_{\perp} \ll L_{\parallel} = L_{\parallel}$, и из (5) следует, что границей области неустойчивости является гипербола $u^2 + \alpha^2 v^2 + uv + u + v - 2M_{\parallel} = 0$, где $u = x_x^2 L_{\perp}^2$, $v = x_y^2 L_{\perp}^2$, $M_{\parallel} = x_T^2 L_{\perp}^2$. Необходимость учета в данном случае поперечной теплопроводности ($\alpha \neq 0$) связана с тем, что даже при не очень сильных полях параметр $M_{\perp} = x_T^2 L_{\perp}^2$ может быть сравним с единицей и отбрасывание при этом членов с M_{\perp} приводит к ошибке.

Область неустойчивости на плоскости (x_x^2, x_y^2) при $M_{\perp} \gg 1$ в двух предельных случаях $M_{\perp} \ll 1$ и $M_{\perp} \gg 1$ качественно изображена на рис. 2 и рис. 3 (одинарная штриховка). Видно, что при нелокальном нагреве магнитоактивной плазмы область неустойчивости возмущений существенно превосходит область неустойчивости при нелокальном изотропном нагреве (двойная штриховка на рис. 2, 3). Параметры неустойчивости при $M_{\perp} \ll 1$ следующие:

$$x_{x \text{ gp}} \approx (x_T / L_{\parallel})^{1/2}, \quad x_{y \text{ gp}} \approx \sqrt{2} x_T, \quad (10)$$

$$x^* \leq (0, x_T), \quad \Gamma_{\max} = x_T^2 / 2k.$$

При $M_{\perp} \gg 1$ имеем соответственно

$$x_{x \text{ gp}} \approx (x_T / L_{\perp})^{1/2}, \quad x_{y \text{ gp}} \approx (x_T / L_{\perp})^{1/2}, \quad (11)$$

$$x^* = \left(0, \frac{x_T^{1/3}}{L_{\perp}^{2/3}} \right), \quad \Gamma_{\max} = \frac{x_T}{\sqrt{2} k L_{\perp}}.$$

Таким образом, из (10) и (11) следует, что при поперечном распространении наиболее быстро самофокусирующаяся неоднородность сильно вытянута вдоль H_0 : $\Lambda_x = \infty$, $\Lambda_y \sim \pi/x_T$ при $M_{\perp} \ll 1$ и $\Lambda_x = \infty$, $\Lambda_y \sim \sim \pi (L_{\perp}^2 / x_T)^{1/3}$ при $M_{\perp} \gg 1$. Для «нитей», образующихся при поперечном нагреве F_2 -слоя ионосферы полем $E = 0,2 B/m$, $M_{\perp} \ll 1$, и из (10) следует

$$\Lambda_y = \frac{\lambda}{2} \frac{\omega n}{\omega_{pe}} \frac{E_p}{E} \approx 100 \text{ (м)} \quad \text{и} \quad \Lambda_{\parallel} = \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{\omega n}{\omega_{pe}} \frac{E_p}{E} \right)^2 \approx 2 \text{ (км)},$$

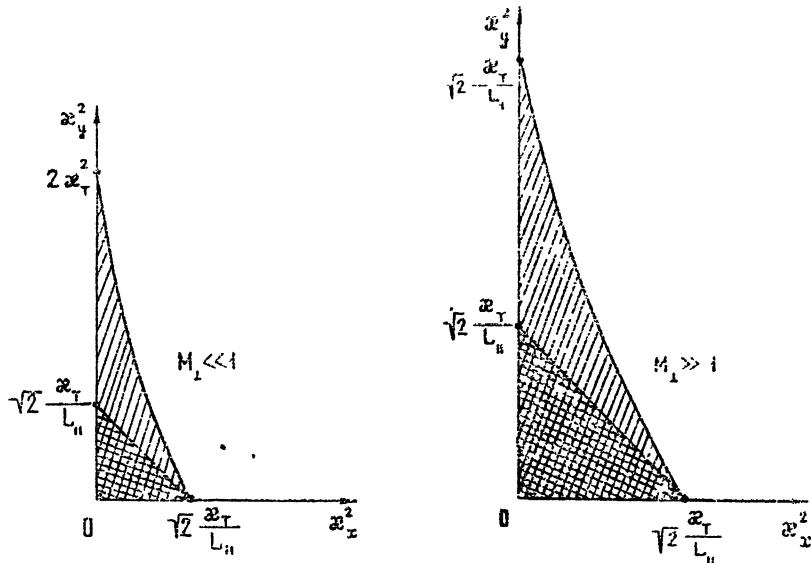


Рис. 2.

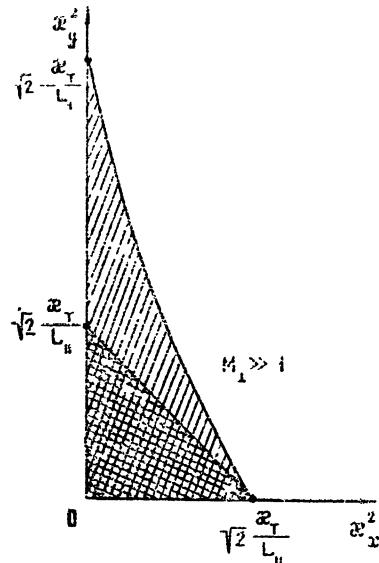


Рис. 3.

В заключение отметим, что выше использовалось соотношение локальной связи между возмущениями температуры и концентрации электронов и ионов (2), что допустимо при условии $\sqrt{D_a \tau_N} = L_N > L_{\parallel}$ (D_a — коэффициент амбиополярной диффузии плазмы,

τ_N — время жизни электрона, определяемое процессами рекомбинации) [7]. Не представляет труда обобщить проведенное рассмотрение в обратном случае ($L_N \leq L_{\parallel}$), когда следует одновременно учитывать теплопроводность и диффузию носителей. При этом аналогично изложенному можно проанализировать влияние анизотропного нелокального нагрева и на временную неустойчивость плоской волны.

Автор признателен Н. Г. Денисову и А. Г. Литваку за полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, изд. Наука, М., 1968, стр 428
2. A. G. Litvak, Proc. of the Eight Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Contributed Papers, Vienna, Austria, 1967, p. 409.
3. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 9, 1433 (1968).
4. В. В. Васьков, А. В. Гуревич, Письма в ЖЭТФ, 20, 529 (1974).
5. F. W. Perkins, E. J. Valeo, Phys. Rev. Lett., 32, 1234 (1974).
6. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрономия, 7, 291 (1967)
7. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
25 марта 1975 г.

Spatial Instability of a Plane Wave at Nonlocal Heating of a Magnetoactive Plasma

B. S. Abramovich

We consider the instability of a self-focused HF plane wave propagating in a homogeneous strongly-magnetized plasma under the conditions when the plasma heat conductivity and diffusion along the magnetic field line are essential. In the diffusion approximation the expressions are derived for the instability increments and characteristic dimensions of formed "filaments". It is shown that in nonlocal anisotropic heating the instability region is essentially smaller than in nonlocal isotropic heating. The instability parameters for the ionospheric F2-region are estimated.

УДК 621.371.255

РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА ПОЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАДИОИМПУЛЬСОВ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А. П. Анютин, Ю. И. Орлов

Рассматривается асимптотическое решение задачи о поперечном распространении прямоугольных радиоимпульсов в однородной магнитоактивной плазме. Получена и исследована равномерная асимптотика поля импульса в случае, когда несущая частота радиоимпульса расположена в окрестности частоты, соответствующей максимуму локальной групповой скорости распространения необыкновенной волны. Решение выражается через обобщенную функцию Эйри и ее две первые частные производные. Амплитудные коэффициенты и аргументы соответствующих функций алгебраически определяются через амплитуды и фазы пространственно-временных лучей, проходящих через точку наблюдения. Показано, что в разных областях решение асимптотически переходит в формулы лучевого метода и его известных модификаций—«полутеневой» и «каустической» асимптотик. Приводятся формулы равномерной асимптотики для интеграла с двумя стационарными точками, расположенными в окрестности простого полюса амплитудной функции.

Исследование искажений радиосигналов, распространяющихся в магнитоактивной плазме, представляет значительный практический и теоретический интерес в связи с тем, что дисперсионные свойства магнитоактивной плазмы достаточно сложны и разнообразны [1]. Искажения радиосигналов в однородной магнитоактивной плазме анализировались в ряде работ [2–5].

В данной работе рассматривается асимптотическое решение задачи распространения прямоугольных радиоимпульсов в однородной магнитоактивной плазме поперек постоянного магнитного поля. На основе анализа строгого решения получены асимптотические формулы, позволяющие рассчитать искажения радиоимпульса в различных областях пространства—времени. Подробно рассмотрена область, в которой несущая частота радиоимпульса ω_0 расположена в окрестности частоты, соответствующей максимуму локальной групповой скорости v_{gr} распространения необыкновенной волны. В этой области получены формулы равномерной асимптотики, которые обобщают результаты работы [5, 9] и имеют более широкую область применимости. Полученное решение выражается через обобщенную функцию Эйри [9, 11] и ее две первые частные производные. При этом аналогично [6, 11] амплитудные функции и аргументы соответствующих функций полученной асимптотики алгебраически выражаются через амплитуды и фазы пространственно-временных лучей [7–10], проходящих через точку наблюдения. Таким образом, найденное решение дает модификацию лучевого метода в рассматриваемой области.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу распространения плоского «необыкновенного» радиоимпульса в магнитоактивной однородной плазме без потерь, квадрат показателя преломления $n^2(\omega)$ которой равен [1]

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_H^2)} \equiv \frac{(\omega^2 - \tilde{\omega}_1^2)(\omega^2 - \tilde{\omega}_3^2)}{\omega^2(\omega^2 - \tilde{\omega}_2^2)}, \quad (1)$$

$$2\tilde{\omega}_{1,3} = \mp\omega_H + \sqrt{\omega_H^2 + 4\omega_p^2}, \quad \tilde{\omega}_2 = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_p^2},$$

где $\omega_p^2 = \frac{e^2 N_e}{m \epsilon_0}$ — квадрат плазменной частоты, $\omega_H = \frac{|e| \mu_0}{m} H^0$ — гиро-частота плазмы, e , m — заряд и масса электронов плазмы, ϵ_0 , μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума, H^0 — величина внешнего постоянного магнитного поля. Формула (1) соответствует необыкновенной волне, которая распространяется поперек постоянного магнитного поля H^0 и имеет компоненты H_y , E_x , E_z . Предполагается, что вектор H^0 направлен вдоль оси y .

Для простоты рассмотрим сначала случай полубесконечного сигнала (сигнал конечной длительности легко получить суперпозицией двух полубесконечных сигналов). Будем считать, что поле E_x при $z = 0$ определяется выражением

$$E_x(t) = h(t) \exp(-i\omega_0 t), \quad (2)$$

где $h(t)$ — функция Хэвисайда, ω_0 — несущая частота радиосигнала. Тогда решение волнового уравнения для поля E_x внутри плазмы (1) (при $z > 0$) определяется интегралом Фурье

$$E_x(z, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - \omega_0} \exp\left\{i \frac{\omega}{c} [zn(\omega) - ct]\right\} d\omega. \quad (3)$$

Аналогично (3) для компонентов E_z и H_y имеем

$$\begin{aligned} E_z(z, t) \\ H_y(z, t) \end{aligned} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^{E, H}(\omega)}{\omega - \omega_0} \exp\left\{i \frac{\omega}{c} [zn(\omega) - ct]\right\} d\omega, \quad (4)$$

$$F^E(\omega) = -i \frac{\omega_H \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_H^2)}, \quad F^H(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n(\omega).$$

Найдем асимптотику решения (3). Как известно, результат применения метода стационарной фазы к интегралу (3) адекватен методу пространственно-временной геометрической оптики [7-10]. При этом стационарные точки интеграла (3) определяют вклады «краевых» пространственно-временных лучей, испускаемых началом (краем) радиосигнала, а полюс — вклад «основного» луча, описывающего распространение основного тела сигнала.

Стационарные точки $\omega_j = \omega_j(z, t)$ интеграла (3) находятся из условия, совпадающего с уравнениями лучей [5, 9]:

$$t = \frac{z}{c} \frac{d}{d\omega} [\omega n(\omega)] \equiv \frac{z}{v_{rp}(\omega)}, \quad (5)$$

где $v_{rp}(\omega) = c \left[\frac{d}{d\omega} (\omega n) \right]^{-1}$ — локальная групповая скорость волны (на текущей частоте ω). Графики функций $n(\omega)$ и $v_{rp}(\omega)$ представлены на рис. 1. Как следует из рис. 1, максимальное число стационарных точек $\omega_j(z, t)$ равно трем, что физически соответствует трем «краевым» лучам (5), приходящим в точку наблюдения $\{z, t\}$ (рис. 2).

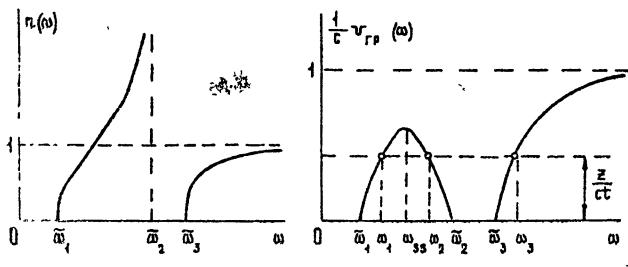
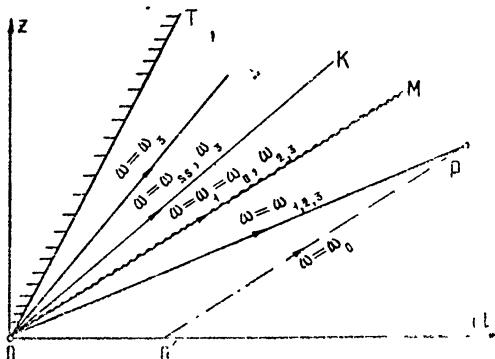


Рис. 1. Дисперсионные кривые $n(\omega)$ и $\frac{1}{c} v_{\text{gr}}(\omega)$.

Рис. 2. Пространственно-временная лучевая картина: $O'P$ —основной луч $\omega = \omega_0$, OP —краевые лучи $\omega = \omega_1, 2, 3$, OT —мировая линия $z = ct$, OK —„предельный“ краевой луч $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \omega_{ss}$, OM —„предельный“ основной луч.



В результате применения метода стационарной фазы к (3) с учетом вклада полюса $\omega = \omega_0$ получим следующую лучевую формулу:

$$E_r(z, t) = U_{\text{осн}} \exp(i \varphi_{\text{осн}}) + \sum_{j=1}^3 U_{\text{кр}, j} \exp(i \varphi_{\text{кр}, j}),$$

$$U_{\text{осн}} = 1, \quad \varphi_{\text{осн}} \equiv \varphi(\omega_0), \quad \varphi_{\text{кр}, j} \equiv \varphi(\omega_j), \quad \varphi(\omega) \equiv \frac{\omega}{c} z n(\omega) - \omega t, \quad (6)$$

$$U_{\text{кр}, j} = \frac{[2\pi z \sigma(\omega_j)]^{-1/2}}{\omega_j - \omega_0} \exp\left(i \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{4} \Delta_j\right), \quad \sigma(\omega) \equiv \frac{1}{c} \left| \frac{d^2}{d\omega^2} (n(\omega)) \right| = \\ = \frac{1}{v_{\text{гр}}^2(\omega)} \left| \frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega} \right|,$$

где ω_j — корни уравнения (5), причем $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ (рис. 1); $\Delta_{1,3} = 1$, $\Delta_2 = -1$. Лучевая картина, соответствующая выражению (6), представлена на рис. 2. Отметим, что (6) соответствует области, в которой через точку наблюдения проходят четыре луча (рис. 2). Лучевые формулы для других областей имеют аналогичный вид и описывают вклады соответствующего числа пространственно-временных лучей.

Как следует из (6), лучевая формула становится неприменимой вблизи предельного основного луча (рис. 2), когда $\omega_j \rightarrow \omega_0$, а также в окрестности максимума локальной групповой скорости $v_{\text{гр}}(\omega)$ (вблизи «предельного» краевого луча), когда совпадают два краевых луча $\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_{ss}$ (рис. 2), где ω_{ss} определяется из уравнения $\frac{dv_{\text{гр}}}{d\omega}(\omega_{ss}) = 0$

(рис. 1). Ситуация еще более усложняется, когда несущая частота ω_0 располагается вблизи частоты ω_{ss} , соответствующей максимуму групповой скорости $v_{rp}(\omega)$, так как в этом случае обе области неприменимости формулы (6) перекрываются.

Получим равномерное асимптотическое решение задачи, справедливое в случае произвольного (в том числе и близкого) расположения частоты ω_0 относительно частоты ω_{ss} , соответствующей максимуму функции $v_{rp}(\omega)$. Это решение должно быть справедливо во всех указанных выше областях неприменимости лучевой формулы (6).

Для получения формул равномерной асимптотики из точного решения (3) необходимо провести асимптотическое вычисление интеграла (3) с помощью рассмотренного в Приложении обобщения метода стационарной фазы, которое справедливо в случае произвольного взаимного расположения стационарных точек $\omega_{1,2}$ и полюса $\omega = \omega_0$. Формула Приложения (П.7) дает следующий главный член равномерной асимптотики интеграла (3) для поля радиосигнала:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{x \text{ мод}}(z, t) + U_{\text{кр } 3} \exp(i\varphi_{\text{кр } 3}), \\ E_{x \text{ мод}}(z, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(i\theta - i\frac{\pi}{4}\right) \left[AV(\xi, \eta) + iB \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \right. \\ &\quad \left. + iC \frac{\partial}{\partial \eta} V(\xi, \eta) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A &= (-\xi)^{1/4} [iU_{\text{кр } 1}(-\eta - \sqrt{-\xi}) + U_{\text{кр } 2}(-\eta + \sqrt{-\xi})], \\ B &= (-\xi)^{-1/4} [iU_{\text{кр } 2}(-\eta - \sqrt{-\xi}) - U_{\text{кр } 2}(-\eta + \sqrt{-\xi})], \\ C &= (-\xi)^{-1/4} (iU_{\text{кр } 1} - U_{\text{кр } 2}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta^2 + \xi} U_{\text{осн}}, \\ \theta &= \frac{1}{2} (\varphi_{\text{кр } 1} + \varphi_{\text{кр } 2}), \quad \xi = -\left[\frac{3}{4}(\varphi_{\text{кр } 1} - \varphi_{\text{кр } 2})\right]^{2/3}, \quad \frac{1}{3}\eta^3 + \eta\xi = \varphi_{\text{осн}} - \theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $V(\xi, \eta)$ — обобщенная функция Эйри [9, 11], определяемая интегралом

$$V(\xi, \eta) = \int_{-\infty + i\alpha^2}^{\infty + i\alpha^2} \frac{1}{\tau - \eta} \exp\left[i\left(\frac{1}{3}\tau^3 + \tau\xi\right)\right] d\tau, \quad (9)$$

а $U_{\text{кр } j}$, $U_{\text{осн}}$, $\varphi_{\text{кр } j}$, $\varphi_{\text{осн}}$ даются лучевыми формулами (6).

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Анализируя (7), нетрудно показать, что все коэффициенты решения (7) регулярны при $\omega_0 \sim \omega_{1,2} \sim \omega_{ss}$. В случае близких частот ω_0 и ω_{ss} первый член решения (7) является главным, при этом

$$E_{x \text{ мод}}(z, t) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} AV(\xi, \eta) \exp\left(i\theta - i\frac{\pi}{4}\right), \quad (10)$$

что соответствует результату работы [9].

Если частота ω_0 располагается вдали от произвольно (в том числе и близко) расположенных стационарных частот $\omega_{1,2}$, то $|\eta| = -\sqrt{-\xi} \gg 1$, а ξ — произвольная величина. Для функции $V(\xi, \eta)$

в этом случае справедлива асимптотика, которая может быть получена из (9) с помощью метода работы [12]:

$$V(\xi, \eta) \sim \sqrt{\pi} \left[\left(\frac{1}{-\eta + \sqrt{-\xi}} - \frac{1}{\eta + \sqrt{-\xi}} \right) v(\xi) - i(-\xi)^{-1/2} \left(\frac{1}{\eta + \sqrt{-\xi}} + \frac{1}{-\eta + \sqrt{-\xi}} \right) v'(\xi) \right], \quad (11)$$

где $v(\xi)$ — функция Эйри в обозначении Фока, $v'(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} v(\xi)$. С учетом выражения (11) решение (7) переходит в «каустическую» асимптотику [8]:

$$E_{x \text{ мод}}(z, t) = \exp \left(i\theta - i\frac{\pi}{4} \right) [(-\xi)^{1/4} (iU_{kp1} + U_{kp2}) v(\xi) + i(-\xi)^{1/4} \times \\ \times (iU_{kp1} - U_{kp2}) v'(\xi)]. \quad (12)$$

В случае, когда частота ω_0 близка к частоте ω_1 , удовлетворяющей условию $\omega_2 \gg \omega_1$, имеем $-\xi \gg 1$, $\eta + \sqrt{-\xi}$ — произвольная величина, при этом согласно [13]

$$V(\xi, \eta) \sim -2\pi i \exp \left[i \left(\frac{1}{3} \eta^3 + \eta \xi \right) \right] \Phi(x_1) + \\ + \sqrt{\pi} (-\xi)^{-1/4} \left\{ \frac{1}{-\eta - \sqrt{-\xi}} \exp \left[i \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} - i \frac{\pi}{4} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{-\eta + \sqrt{-\xi}} \exp \left[-i \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} + i \frac{\pi}{4} \right] \right\}, \quad (13)$$

где

$$\Phi(x_1) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{x_1}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau + \frac{\exp(ix_1^2)}{2ix_1} \right), \quad x_1 = \left[\frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} - \frac{1}{3} \eta^3 - \eta \xi \right] \times \\ \times \operatorname{sgn}(-\eta - \sqrt{-\xi}).$$

С учетом асимптотики (13) из решения (7) получим «полутеневую» асимптотику [7]:

$$E_{x \text{ мод}}(z, t) = U_{kp1} \exp(i\varphi_{kp1}) + U_{kp2} \exp(i\varphi_{kp2}) + \\ + U_{\text{осн}} \exp(i\varphi_{\text{осн}}) \Phi(\pm \sqrt{\varphi_{kp1} - \varphi_{\text{осн}}}). \quad (14)$$

Аналогичным образом из (7) следует «полутеневая» асимптотика в случае, когда частота ω_0 близка к стационарной частоте ω_2 ($\omega_2 \gg \omega_1$).

Если все частоты $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_{ss}$ достаточно удалены друг от друга, то $-\xi \gg 1, \sqrt{-\xi} - |\eta| \gg 1$ и для $V(\xi, \eta)$ справедлива асимптотика, которая получается из (13) при $|x_1| \gg 1$. С учетом этого решение (7) асимптотически переходит в формулу лучевого приближения (6).

Таким образом, решение (7), (8) дает обобщение метода пространственно-временной геометрической оптики [7–10] и его известных модификаций [7, 8] и переходит в них в областях их применимости. Заметим, что решение (7), (8), как и приближение геометрической оптики (6), несправедливо вблизи частот «среза» $\tilde{\omega}_{1,2,3}$ (рис. 1), где оно должно быть уточнено специальным образом [9].

Асимптотические формулы для компонентов полей $E_x(z, t)$, $H_y(z, t)$, определяемых интегралами (4), имеют вид, аналогичный (6) — (10), (12), (14), если в последних величины $U_{\text{кр}1,2}$, $U_{\text{осн}}$ заменить соответственно на $U_{\text{кр}1,2}^E$, $U_{\text{осн}}^E$ (для E_z) и на $U_{\text{кр}1,2}^H$, $U_{\text{осн}}^H$ (для H_y), где

$$U_{\text{кр}1,2}^{E,H} = F^{E,H}(\omega_1, \omega_2) U_{\text{кр}1,2}, \quad U_{\text{осн}}^{E,H} = F^{E,H}(\omega_0) U_{\text{осн}}, \quad (15)$$

$F_{\text{кр}1,2}^{E,H}(\omega)$ даются выражениями (4), а $U_{\text{кр}1,2}$, $U_{\text{осн}}$ — (6). При этом компоненты полей E_x, z , H_y в случае прямоугольного радиоимпульса длительностью T определяются по формулам

$$E_{x,z}^T(z, t) = E_{x,z}(z, t) - E_{x,z}(z, t-T), \quad H_y^T(z, t) = H_y(z, t) H_y(z, t-T),$$

в которых для слагаемых $E_{x,z}(z, t)$, $H_y(z, t)$ справедливы полученные выше выражения (7), (8), (15).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Равномерная асимптотика интеграла с двумя стационарными точками в окрестности простого полюса

Рассмотрим асимптотику при $k \rightarrow \infty$ интеграла

$$I(\alpha, \beta, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, \alpha)}{x - \beta} \exp[ik\varphi(x, \alpha)] dx, \quad (\text{П.1})$$

который имеет две стационарные точки $x_1(\alpha)$ и $x_2(\alpha)$, произвольно расположенные относительно полюса $x = \beta$, при этом $|f(\beta, \alpha)| < c^2$, $c \neq 0$.

Выберем нумерацию точек $x_{1,2}(\alpha)$ из условий $\varphi'_{x_1}(x_1(\alpha), \alpha) < 0$, $\varphi''_{x_2}(x_2(\alpha), \alpha) > 0$. Аналогично [6, 13] сделаем замену переменной в (П.1) по формуле

$$\varphi(x, \alpha) = \psi(\alpha) + \left[\frac{1}{3} \tau^3 + \tau \xi_0(\alpha) \right] \operatorname{sgn}(x_2 - x_1). \quad (\text{П.2})$$

Функции $\psi(\alpha)$ и $\xi_0(\alpha)$ в (П.2) выберем из условия согласованного расположения стационарных точек $x_{1,2}(\alpha)$ и $\tau_{1,2} = \mp \operatorname{sgn}(x_2 - x_1) \times \sqrt{-\xi_0(\alpha)}$:

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{2} [\varphi(x_1, \alpha) + \varphi(x_2, \alpha)], \quad \xi_0(\alpha) = - \left\{ \frac{3}{4} [\varphi(x_1, \alpha) - \varphi(x_2, \alpha)] \right\}^{2/3}. \quad (\text{П.3})$$

В результате замены переменной (П.2) амплитудная функция интеграла (П.1) принимает вид

$$\frac{f(x, \alpha)}{x - \beta} \frac{dx}{d\tau} = \frac{F(\tau)}{\tau - \eta_0}, \quad (\text{П.4})$$

где η_0 определяется из кубического уравнения

$$\frac{1}{3} \eta_0^3 + \eta_0 \xi_0 = [\varphi(\beta, \alpha) - \psi(\alpha)] \operatorname{sgn}(x_2 - x_1), \quad (\text{П.5})$$

ветвь корня которого выбирается из условия согласованного расположения полюса $x = \beta$, $\tau = \eta_0$ и стационарных точек $x_{1,2}(\alpha)$, $\tau_{1,2}$. Разлагая далее функцию $F(\tau)$ в обобщенный степенной ряд

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m - B_m \tau) (\tau^2 + \xi_0) = A_0 - B_0 \tau + (\tau^2 + \xi_0) g(\tau) \quad (\text{П.6})$$

и интегрируя член с $g(\tau)$ по частям, получим следующий главный член* асимптотики интеграла (П.1) при $x_2 > x_1$:

$$\begin{aligned} I \sim & e^{ik\psi(a)} \left[A_0 V(\xi, \eta) + \frac{i}{k^{1/3}} B_0 \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{i}{k^{2/3}} C_0 \frac{\partial V}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right], \\ \left\{ \begin{array}{l} A_0 \\ B_0 \end{array} \right\} = & \frac{1}{\sqrt{2}} (-\xi_0)^{\pm 1/4} \left[\frac{f(x_1)}{\sqrt{-\varphi''_{x^2}(x_1)}} \frac{-\eta_0 - V - \xi_0}{x_1 - \beta} \pm \right. \\ & \left. \pm \frac{f(x_2)}{\sqrt{\varphi''_{x^2}(x_2)}} \frac{-\eta_0 + V - \xi_0}{x_2 - \beta} \right], \\ C_0 = & \frac{1}{\eta_0^2 + \xi_0} [A_0 - B_0 \eta_0 - f(\beta, \alpha)]. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Здесь $\xi = k^{2/3} \xi_0$, $\eta = k^{1/3} \eta_0$, $V(\xi, \eta)$ — обобщенная функция Эйри (9), а ξ_0 и η_0 определяются выражениями (П.3), (П.5).

Аналогично (П.7) при $x_1 > x_2$ находим

$$\begin{aligned} I \sim & e^{ik\psi(a)} \left[\tilde{A}_0 V^*(\xi, \eta) + \frac{i}{k^{1/3}} \tilde{B}_0 \frac{\partial V^*}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{i}{k^{2/3}} \tilde{C}_0 \frac{\partial}{\partial \eta} V^*(\xi, \eta) \right], \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_0 \\ \tilde{B}_0 \end{array} \right\} = & \frac{1}{\sqrt{2}} (-\xi_0)^{\pm 1/4} \left[\frac{f(x_1)}{\sqrt{-\varphi''_{x^2}(x_1)}} \frac{-\eta_0 + V - \xi_0}{x_1 - \beta} \pm \right. \\ & \left. \pm \frac{f(x_2)}{\sqrt{\varphi''_{x^2}(x_2)}} \frac{-\eta_0 - V - \xi_0}{x_2 - \beta} \right], \\ \tilde{C}_0 = & \frac{1}{\eta_0^2 + \xi_0} [f(\beta, \alpha) - \tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 \eta_0], \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где $V^*(\xi, \eta)$ — функция, комплексно-сопряженная обобщенной функции Эйри (9).

Отметим, что в случае близости точек x_1 , x_2 и β друг к другу формулы равномерной асимптотики (П.7), (П.8) можно упростить и получить из них формулы локальной асимптотики, совпадающие с [9].

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. B. O. Ronnäng, IEEE Trans. Anten. Propag., AP-16, № 1, 146 (1968).
3. C. E. Seyler, J. S. Bloch, R. W. Flynn, J. Geophys. Res., 77, № 22, 4237 (1972).
4. C. T. Casy, R. E. Haskell, IEEE Trans. Anten. Propag., AP-17, № 5, 674 (1969).
5. C. M. Whitman, L. B. Felsen, IEEE Trans. Anten. Propag., AP-17, № 2, 200 (1969).
6. Ю. И. Орлов, А. П. Анютин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 9, 1369 (1974).
7. R. M. Lewis, Electromagnetic Wave Theory (Proceedings of a Symposium held at Delft, The Netherland, Sept. 1965), part II, Pergamon Press, 1967, p. 845.
8. Ю. А. Кравцов, Метод геометрической оптики и его обобщения, Диссертация, ГГУ, Горький, 1968.

* Аналогичным образом из (П.6) могут быть найдены высшие члены равномерной асимптотики интеграла (П.1).

9. L. B. Felsen, IEEE Trans. Anten. Propag., AP-17, № 2, 191 (1969).
10. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 389 (1971).
11. Ю. И. Орлов, Радиотехника и электроника, 21, № 1, 62 (1976).
12. М. В. Федорюк, ЖВММФ, 4, 671 (1964).
13. N. Bleistein, Comm. Pure Appl. Math., 19, № 4, 353 (1966).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
14 марта 1975 г.

UNIFORM ASYMPTOTIC OF THE FIELD OF RECTANGULAR RADIO PULSES IN A MAGNETOACTIVE PLASMA

A. P. Anyutin, Yu. I. Orlov

An asymptotic solution of the problem of transverse propagation of rectangular radio pulses in a uniform magnetoactive plasma is considered. A uniform asymptotics of the pulse field is obtained and investigated in the case when the carrier frequency of a radio pulse is situated in the vicinity of the frequency corresponding to the maximum of the local group velocity of propagation of an extra-ordinary wave. The solution is expressed through the generalized Airy function and its two first partial derivatives. The amplitude coefficients and the arguments of the corresponding functions are algebraically defined through the amplitudes and phases of space-time rays passing through the observation point. In different regions the solution is shown to reduce asymptotically to the formulas of the ray method and its known modifications—"half-shadow" and "caustic" asymptotics. The formulas of the uniform asymptotics are given for the integral with two stationary points situated in the vicinity of a simple pole of the amplitude function.

УДК 533.901

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ СО СТОРОННИМИ ИСТОЧНИКАМИ. I

A. B. Резов

Для случаев полуограниченной однородной изотропной плазмы с чисто зеркальным и с чисто диффузным рассеянием частиц на поверхности найдено решение совместной линеаризованной системы уравнений Максвелла—Больцмана с произвольными сторонними источниками, удовлетворяющее граничному и начальному условиям. Полученные соотношения позволяют провести анализ электромагнитного поля, возбуждаемого заданной системой сторонних источников, выявляют структуру спектра собственных электромагнитных возбуждений плазменного полупространства и зависимость этого спектра от модели взаимодействия частиц плазмы с ограничивающей поверхностью.

Последовательное описание электромагнитных явлений в плазме достигается использованием совместной системы уравнений Максвелла и какого-либо из кинетических уравнений (например, уравнения Больцмана). Решение начальной задачи для такой системы с заданными сторонними источниками, удовлетворяющее определенным граничным условиям, описывает внутреннее состояние плазмы и распределение электромагнитного поля во все моменты времени $t > 0$ и дает полную информацию об интересующих нас электромагнитных свойствах.

В настоящей работе изложены результаты решения данной электродинамической задачи для самой простой конфигурации с границей—полуограниченной плазмы. Полученные с помощью уравнений Максвелла—Больцмана формулы являются обобщением известного [1] решения подобной задачи в неограниченной системе. В качестве феноменологической модели взаимодействия частиц плазмы с поверхностью используется математически наиболее простое граничное условие Максвелла

$$f_1(v_z > 0) = p_1 f_1(-v_z) \mid_{z=0} \quad (0 \leq p_1 \leq 1) \quad (1)$$

на поверхности плазмы $z = 0$ для неравновесной части функции распределения $f_1(t, r, \vartheta)$.

Решение исходной системы уравнений с граничным условием (1) представлено для крайних значений $p_1 = 0$ и $p_1 = 1$ точными, а в промежуточном интервале $0 < p_1 < 1$ — приближенными, с известной степенью точности, соотношениями.

В настоящей статье рассмотрены случаи чисто зеркального ($p_1 = 1$) и чисто диффузного рассеяния ($p_1 = 0$), допускающие вычисление точных соотношений.

1. ФУРЬЕ-ЛАПЛАСОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Для конфигурации плазмы, занимающей полупространство $z > 0$, граничащее с областью, характеризуемой диэлектрической проницаемостью ϵ_0 , исходная система уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}_{\text{cr}} + e \int \mathbf{v} f_1 d\mathbf{v} \right) + \frac{\tilde{\epsilon}}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$f_1 = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ f_1(t, r, v) & (z > 0) \end{cases}, \quad \tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon_0 & (z < 0) \\ \epsilon_i & (z > 0) \end{cases}$$

после перехода к фурье-лапласовскому представлению (переменные k и p) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon^l(k, p) \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^l = -\frac{4\pi k}{p} \left\{ j^l + \frac{ch_{\tau 0}}{4\pi} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ev_z f_{\tau 0} v dv}{p + ikv} \right\}, \\ \left(\epsilon^l(k, p) + \frac{c^2 k^2}{p^2} \right) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^l] = -\frac{4\pi}{p} \left\{ \mathbf{k} \times \left[j^l + \frac{ch_{\tau 0}}{4\pi p} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{ic^2 [ke_{\tau 0}]}{4\pi p^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ev_z f_{\tau 0} v dv}{p + ikv} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3^{(l)})$$

внутри плазмы ($z > 0$) и

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^e = -\frac{4\pi k}{p} \left\{ j^e + \frac{ch_{\tau 0}}{4\pi p} \right\}, \\ \left(\epsilon_0 + \frac{c^2 k^2}{p^2} \right) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^e] = -\frac{4\pi}{p} \left\{ \mathbf{k} \times \left[j^e - \frac{c}{4\pi p} \left(h_{\tau 0} - \frac{ic}{p} [ke_{\tau 0}] \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3^{(e)})$$

во внешней области $z < 0$. Как обычно, здесь $\epsilon^l(k, p)$ и $\epsilon^e(k, p)$ — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости однородной изотропной плазмы,

$$\epsilon^l = \epsilon_i - \frac{4\pi e^2}{pk^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(kv)^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \right) dv}{p + ikv},$$

$$\epsilon^e = \epsilon_i - \frac{2\pi e^2}{pk^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[kv]^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \right) dv}{p + ikv}.$$

Функции переменных k и p , входящие в уравнения (3), имеют следующий смысл: Для случая чисто зеркального отражения частиц от границы ($p_1 = 1$) верхний индекс « i » обозначает фурье-образы величин, заданных в области $z > 0$ и зеркально продолженных в область $z < 0$:

$$E_z(-z) = -E_z(z), \quad E_{\tau}(-z) = E_{\tau}(z),$$

$$H_z(-z) = H_z(z), \quad H_{\tau}(-z) = -H_{\tau}(z), \quad f_1(-z, v_z) = f_1(z, -v_z), \quad (4)$$

$$j_z^{\text{cr}}(-z) = -j_z^{\text{cr}}(z), \quad j_{\tau}^{\text{cr}}(-z) = j_{\tau}^{\text{cr}}(z).$$

Верхний индекс «*e*» относится к величинам, заданным в области $z < 0$ и зеркально продолженным на положительный интервал $z > 0$.

При таком способе продолжения

$$\begin{aligned} f_{\tau 0} &= 0, \quad e_{\tau 0} = 0, \quad h_{\tau 0} = 2 \{-H_{20}, H_{10}, 0\}, \\ j^i &\equiv j_{ct}^i - \frac{\varepsilon_i E^i(t=0)}{4\pi}, \quad j^e \equiv j_{ct}^e - \frac{\varepsilon_0 E^e(t=0)}{4\pi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Индексы 10, 20, $\tau 0$ относятся к x -, y -компонентам соответствующих векторов на границе $z = 0$.

Если коэффициент зеркальности $p_1 \neq 1$, зеркальное продолжение (4) не может быть использовано при решении исходной системы уравнений ввиду несовместности его с граничным условием (1). В этом случае индекс «*i*» обозначает фурье-образы величин, заданных в области $z > 0$ и продолженных нулем на интервал $z < 0$; индекс «*e*» обозначает соответственно фурье-образы функций, продолженных нулем на полуось $z > 0$. При нулевом продолжении

$$f_{\tau 0} = f_1^i(z \rightarrow +0), \quad e_{\tau 0} = \{-E_{20}, E_{10}, 0\}, \quad h_{\tau 0} = \{-H_{20}, H_{10}, 0\}. \quad (6)$$

Для простоты мы взяли начальное условие, при котором магнитное поле $\mathbf{H}(t=0) = 0$.

Как видно из равенств (5), (6), только в случае плазмы с чисто зеркальным отражением частиц от границы система уравнений (3) является алгебраической. Если же $p_1 \neq 1$, то и в фурье-лапласовском представлении мы получаем интегральные уравнения, которые могут быть точно решены лишь при $p_1 = 0$.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ СИСТЕМЫ С ЧИСТО ЗЕРКАЛЬНЫМ ОТРАЖЕНИЕМ ЧАСТИЦ НА ГРАНИЦЕ

Используя при $p_1 = 1$ зеркальное продолжение искомых функций и источников, находим из алгебраических в этом случае соотношений (3⁽ⁱ⁾), (3^(e)) следующее фурье-лапласовское представление электромагнитного поля системы:

$$\begin{aligned} E^i &= -\frac{c}{p} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}h_{\tau 0})}{k^2 \varepsilon^i} + \frac{1}{k^2} \left\{ \mathbf{k} \times \left[\frac{c}{p} \frac{[\mathbf{k}h_{\tau 0}]}{D_i^t} + \frac{4\pi}{p} \frac{[\mathbf{k}j^i]}{D_i^t} \right] \right\} - \\ &- \frac{4\pi k}{pk^2} \frac{(\mathbf{k}j^i)}{\varepsilon^i}, \quad H^i = -\frac{ic}{p} [\mathbf{k} E^i], \\ D_i^t &= \varepsilon^i(\mathbf{k}, p) + \frac{c^2 k^2}{p^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E^e &= \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0} \left(\frac{c}{p} \mathbf{k}h_{\tau 0} - \frac{4\pi}{p} \mathbf{k}j^e \right) - \frac{1}{D_e^t} \left[\mathbf{k} \times \left(\frac{c}{p} [\mathbf{k}h_{\tau 0}] - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{4\pi}{p} [\mathbf{k}j^e] \right) \right] \right\}, \quad H^e = -\frac{ic}{p} [\mathbf{k} E^e], \quad D_e^t = \varepsilon_0 + \frac{c^2 k^2}{p^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В этих соотношениях значения тангенциальных компонент магнитного поля, определенные из условий непрерывности на границе $z = 0$, равны

$$\begin{aligned} H_{10} &= \frac{1}{k_\tau^2} \left(\frac{h_s k_1}{D_s} + \frac{h_p k_2}{D_p} \right), \quad H_{20} = \frac{1}{k_\tau^2} \left(\frac{-h_p k_1}{D_p} + \frac{h_s k_2}{D_s} \right), \\ k_\tau^2 &= k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции $D_{s,p}(p, k_z)$ здесь есть не что иное, как разность поверхностных импедансов плаэменного полупространства и граничной среды ϵ_0 для собственных волн s - и p -поляризаций:

$$D_s = \zeta_s^e - \zeta_s^i, \quad D_p = \zeta_p^e - \zeta_p^i. \quad (10)$$

Импедансы $\zeta_{s,p}^e$ хорошо известны [2]:

$$\zeta_s^e \equiv \zeta_{s0} = \frac{ip}{c} \left(-k_z^2 - \epsilon_0 \frac{p^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad \zeta_p^e \equiv \zeta_{p0} = \frac{ic}{p\epsilon_0} \left(-k_z^2 - \frac{\epsilon_0 p^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

величины $\zeta_{s,p}^i$ выражаются формулами, найденными в работе [3]:

$$\begin{aligned} \zeta_s^i \equiv \zeta_{s3} &= -\frac{c}{\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{D_i'(k, p)}, \\ \zeta_p^i \equiv \zeta_{p3} &= \frac{c}{\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k_z^2 + k_3^2} \left[\frac{k_z^2}{\epsilon^i(k, p)} + \frac{k_3^2}{D_i'(k, p)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Функции сторонних источников и начальные условия входят в выражения для электромагнитного поля через комбинации

$$\begin{aligned} h_{s3} &= -\frac{2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \mathbf{x}_z \left(\frac{\mathbf{j}^i}{D_i'} - \frac{\mathbf{j}^e}{D_e'} \right), \quad \mathbf{x}_z = \{-k_2, k_1, 0\}, \\ h_{p3} &= \frac{2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{k^2} \left[\mathbf{k j}^i \left(\frac{k_z^2}{\epsilon^i} + \frac{k_3^2}{D_i'} \right) - \mathbf{k j}^e \left(\frac{k_z^2}{\epsilon_0} + \frac{k_3^2}{D_e'} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^2}{c^2} \left(\frac{k_3 j_3^i}{D_i'} + \frac{k_3 j_3^e}{D_e'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношения (7) — (13) дают нам решение поставленной выше электродинамической задачи для полуограниченной плаэмы с зеркальным отражением частиц на поверхности. Для частного случая задачи о переходном излучении частицы, налетающей на плаэму, выражения, аналогичные (7) — (13), вычислены в работе [4].

3. ПЛАЗМЕННОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С ДИФФУЗНО РАССЕИВАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

При нулевом продолжении функций, искомых в области, занятой плаэмой, и равенстве нулю феноменологического коэффициента r_1 соотношения (3⁽ⁱ⁾) могут быть переписаны в форме задачи Винера — Хопфа [5] для аналитических в нижней полуплоскости k_3 компонент электрического поля [7]:

$$\eta^-(\mathbf{k E}')^- + R_t^- = -\frac{ckh_{t0}}{p\eta^+} + \frac{\Phi^+(k_3)}{\eta^+} - R_t^+,$$

$$(k_3 - i\delta)\tau^- [\mathbf{k E}']^- + R_t^+ = \frac{1}{(k_3 + i\delta)\tau^+} \left\{ -\frac{p}{c} [\mathbf{k h}_{t0}] + i[\mathbf{k} [\mathbf{k e}_{t0}]] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{p^2}{c^2} \Psi^+ (\mathbf{k}_3) \Big\} - R_t^+, \\
 \Phi^+ = & - \frac{4\pi e}{p} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau} \int_{-\infty}^0 \frac{f_{\tau 0} v_3 k v dv_3}{p + ikv}, \\
 \Psi^+ = & - \frac{4\pi e}{p} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\tau} \int_{-\infty}^0 \frac{f_{\tau 0} v_3 [\mathbf{k}v] dv_3}{p + ikv}, \\
 R_t^{\pm} = & \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{p} \frac{\mathbf{k}' j^i dk'_3}{(k'_3 - k_3) \eta^{\pm}(k'_3)}, \\
 R_t^{\mp} = & \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi p}{c^2} \frac{[\mathbf{k}' j^i] dk'_3}{(k'_3 + i\delta) \tau^{\pm}(k'_3) (k'_3 - k_3)}, \\
 \eta^+(k_3) \eta^-(k_3) = & \epsilon^i(k, p), \quad \tau^+(k_3) \tau^-(k_3) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{k^2 + \epsilon^i p^2/c^2}{k_3^2 + \delta^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Аналитичность функций $(\mathbf{k}E^i)^-$ и $[\mathbf{k}E^i]^+$ в полуплоскости $k'_3 < 0$ является следствием обращения в нуль поля \mathbf{E}^i ($z < 0$); аналитичность величин Φ^+ и Ψ^+ при $k'_3 > 0$ следует непосредственно из их определения (14) [7]. Стандартный метод решения уравнений (14) [5, 6] приводит к следующим выражениям для фурье-лапласовских компонент электромагнитного поля внутри плазмы:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^i = & \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\eta^-} \left(-\frac{A}{H} - R_t^- \right) - \frac{1}{(k_3 - i\delta) \tau^-} [\mathbf{k} \times (\beta + (k_3 - \lambda) \gamma - R_t^-)] \right\}, \\
 H^i = & -\frac{ic}{p} [\mathbf{k}E^i] + \frac{c}{p} \mathbf{e}_{\tau 0}, \\
 \beta = & \frac{p}{c} H_{\tau 0} + ie_3(\mathbf{k}\mathbf{e}_{\tau 0}), \quad \gamma = -ie_{\tau 0}, \quad \mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1\},
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{ckh_{\tau 0} - 4\pi ij_{30}^-}{p}, \quad j_{30}^- = e \int_{-\infty}^0 dv_3 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z \rightarrow +0) v_3 dv_{\tau}, \\
 H = & \lim_{k_3 \rightarrow \infty} \eta^+(k_3), \quad \lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{k^2 + \epsilon^i p^2/c^2}{k_3^2 + \delta^2} \right) dk_3.
 \end{aligned}$$

Электромагнитное поле в среде ϵ_0 может быть представлено в аналогичной форме:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^e = & \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{\epsilon_0}} \left(\frac{c}{p} \frac{kh_{\tau 0}}{\sqrt{\epsilon_0}} - \tilde{R}_t^+ \right) + \frac{1}{k_3 + t_{0e}} [\mathbf{k} \times (\beta + (k_3 + t_{0e}) \gamma + \tilde{R}_t^+)] \right\}, \\
 \mathbf{H}^e = & -\frac{ic}{p} [\mathbf{k}E^e] - \frac{c}{p} \mathbf{e}_{\tau 0},
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\tilde{R}_t^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{p} \frac{\mathbf{k}' \mathbf{j}^e dk'_3}{\sqrt{\epsilon_0} (k'_3 - k_3)}, \quad \tilde{R}_t^- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{p} \frac{[\mathbf{k}' \mathbf{j}^e] dk'_3}{(k'_3 + t_{0e}) (k'_3 - k_3)},$$

$$k^2 + \epsilon_0 p^2/c^2 \equiv (k_3 + t_{0e}) (k_3 - t_{0e}), \quad \text{Im } t_{0e} > 0.$$

Для вычисления векторов $\mathbf{e}_{\tau 0}$, $\mathbf{h}_{\tau 0}$ и неизвестной z -компоненты тока j_{30}^- проще всего использовать независимые следствия условий аналитичности выражений электрического поля (15), (16) в точках $k_3 = \pm ik_\tau$ [8, 10]. Можно показать, что этих условий достаточно для исключения величины j_{30}^- и получения четырех соотношений, связывающих тангенциальные компоненты полей $\mathbf{E}_{\tau 0}$ и $\mathbf{H}_{\tau 0}$ на границе $z = 0$:

$$\begin{aligned} k_\tau (\mathbf{e}_{\tau 0} + \zeta_{s0} \mathbf{H}_{\tau 0}) &= -\zeta_{s0} a_s^i, \quad k_\tau (\mathbf{e}_{\tau 0} + \zeta_{s0} \mathbf{H}_{\tau 0}) = \zeta_{s0} a_s^e, \\ k_\tau (\mathbf{E}_{\tau 0} + \zeta_{p0} \mathbf{h}_{\tau 0}) &= -\zeta_{p0} a_p^i, \quad k_\tau (\mathbf{E}_{\tau 0} + \zeta_{p0} \mathbf{h}_{\tau 0}) = \zeta_{p0} a_p^e. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение системы уравнений (17) удобно записать в форме, аналогичной (9):

$$\begin{aligned} H_{10} &= \frac{1}{k_\tau^2} \left(\frac{h_s k_1}{D_s} + \frac{h_p k_2}{D_p} \right), \quad H_{20} = \frac{1}{k_\tau^2} \left(-\frac{h_p k_1}{D_p} + \frac{h_s k_2}{D_s} \right), \\ E_{10} &= \frac{1}{k_\tau^2} \left(\frac{e_p k_1}{D_p} + \frac{e_s k_2}{D_s} \right), \quad E_{20} = \frac{1}{k_\tau^2} \left(-\frac{e_s k_1}{D_s} + \frac{e_p k_2}{D_p} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Так же, как и ранее, функции $D_{s, p}$, стоящие здесь в знаменателях, являются разностями поверхностных импедансов s - и p -типа среды ϵ_0 и плазмы с диффузным рассеянием частиц поверхностью:

$$D_{p\lambda} = \zeta_{p0} - \zeta_{p\lambda}, \quad D_{s\lambda} = \zeta_{s0} - \zeta_{s\lambda}; \quad (19)$$

$$\zeta_{p\lambda} = \frac{p}{c} \frac{\eta^2 + \tau^2 c^2 k_\tau^2 / p^2}{(k_1 - i\lambda) \eta^2 - (k_1 + i\lambda) \tau^2 c^2 k_\tau^2 / p^2}, \quad (20)$$

$$(\eta \equiv \eta^-(-ik_\tau), \quad \tau \equiv \tau^-(-ik_\tau)),$$

$$\zeta_{s\lambda} = -\frac{ip}{c\lambda}.$$

Функции (20) получены ранее в работах [9, 10] для значений $p = -i\omega$.

Числители величин (18) определяются источниками и начальными условиями

$$e_{p\lambda} = -\zeta_{p0} \zeta_{p\lambda} (a_p^e + a_p^i), \quad e_{s\lambda} = -\zeta_{s0} \zeta_{s\lambda} (a_s^e + a_s^i), \quad (21)$$

$$h_{p\lambda} = \zeta_{p0} a_p^e + \zeta_{p\lambda} a_p^i, \quad h_{s\lambda} = \zeta_{s0} a_s^e + \zeta_{s\lambda} a_s^i;$$

$$\begin{aligned} a_p^i &= \frac{c}{p} \frac{\tau \eta^2 k_\tau^2}{\eta^2 + c^2 \tau^2 k_\tau^2 / p^2} \left\{ \frac{1}{\eta} [R_l^-(-ik_\tau) - R_l^+(ik_\tau)] - \frac{ic\tau}{2pk_\tau} \times \right. \\ &\quad \left. \times (k_\tau [kR_l^-]_\tau(-ik_\tau) - k_\tau [kR_l^+]_\tau(ik_\tau)) \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$a_p^e = \frac{ip\sqrt{\epsilon_0} k_\tau}{2ct_{0e}} \{ R_l^+(ik_\tau) - R_l^-(-ik_\tau) \} + \frac{ick_\tau}{pk_\tau} \times$$

$$\times [\tilde{kR}_t^+]_{\tau} (ik_{\tau}),$$

$$a_s^i = - \frac{ic}{pk_{\tau}} \chi_{\tau} [\tilde{kR}_t^-]_{\tau} |_{k_{\tau} = -ik_{\tau}},$$

$$a_s^e = - \frac{ic}{pk_{\tau}} \chi_{\tau} [\tilde{kR}_t^+]_{\tau} |_{k_{\tau} = ik_{\tau}}.$$

Соотношения (15) — (22) представляют фурье-лапласовские компоненты электромагнитного поля, возбуждаемого сторонними источниками в рассматриваемой нами системе с диффузным рассеянием частиц на поверхности плазмы.

Вместе с формулами (7) — (12) указанные соотношения являются теми решениями исходной системы уравнений (2) с граничными условиями (1), которые могут быть найдены точно.

К сожалению, эта задача не может быть решена так же строго для значений феноменологического коэффициента в открытом интервале $0 < p_1 < 1$. Метод приближенного решения будет изложен во II части данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Zelazny, Physica, **30**, 1771 (1964); Annals Phys., **19**, 171 (1962); **20**, 261 (1962).
2. Б А Введенский, Основы теории распространения радиоволн, Государственное технико-теоретическое издательство, М — Л, 1934.
3. В П Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, **41**, 159 (1961)
4. Э А. Канер, В М Яковенко, ЖЭТФ, **42**, № 2, 471 (1962).
5. Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М, 1962.
6. Ф. Д Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М, 1958
7. В П Силин, А А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961
8. K. Imre, E. Ozizmir, Phys. Fluids, **13**, 1080 (1970).
9. Ю А Романов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 10, 1533 (1968).
10. В И Миросниченко, ЖТФ, **36**, 1008 (1966).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 октября 1974 г.

THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF A SEMI-BOUNDED PLASMA WITH EXTERNAL SOURCES. I

A. V. Rezov

The solution of the joint linearized of Maxwell—Boltzman equation with the external sources satisfying the boundary and initial conditions is found for the cases of a semi-bounded homogeneous isotropic plasma with purely mirror and diffuse particle scattering on the surface. The relations derived permit to analyse the electromagnetic field excited by the given system of external sources. They indentify as well the structure of the spectrum of natural electromagnetic excitations of a plasma semi-space and the dependence of this spectra on the model of interaction between plasma particles and bounded surface.

УДК 535.853.4

О СЕЛЕКТИВНОЙ МОДУЛЯЦИИ В СПЕКТРОМЕТРАХ СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

B. N. Листвин, Ю. И. Колесов, Ю. В. Гуляев

Рассмотрены особенности метода «внутренней» интерференционной модуляции излучения в двухлучевых интерферометрах с дисперсионными элементами. Показана возможность создания на основе этого метода селективного спектрометра субмиллиметрового диапазона, отличающегося большой светосилой, высоким разрешением и наличием синхронного детектирования.

Увеличение отношения сигнала к шуму в радиоспектроскопических исследованиях субмиллиметрового диапазона возможно как за счет улучшения чувствительности приемников, так и за счет повышения светосилы спектральных приборов. Поэтому в интервале длин волн 2—0,2 мм целесообразно использовать светосильные приемники с охлаждаемыми иммерсионными детекторами из $n\text{-InSb}$ в сочетании с селективными спектральными приборами типа фурье-спектрометров, оптетрометров с интерференционной селективной амплитудной модуляцией (сисамов) или растровых спектрометров, светосила которых значительно превосходит светосилу широко используемых в этом диапазоне эшелетных монохроматоров [1].

В сисамах и растровых спектрометрах спектральные элементы кодируются пространственными частотами интерференционных полос или полос муара. Подавление спектров низкого разрешения в растровых спектрометрах осуществляется различными способами, основанными на коммутации растром [2]. В сисамах для этой цели естественно использовать интерференционную модуляцию, основанную на изменении разности хода интерферирующих лучей. В традиционных схемах сисамов разность хода интерферирующих лучей изменяется в квазинепрерывном режиме [3, 4], причем необходимая амплитуда изменения разности хода лучей значительно превышает длину волны модулируемого излучения. Поэтому в субмиллиметровом диапазоне его реализация представляет сложную техническую задачу.

В то же время в фурье-спектрометрии известен другой вид интерференционной модуляции, называемый «внутренней» [5] или «фазовой» [6] модуляцией, в котором амплитуда изменения разности хода лучей составляет доли длины волны. В настоящей работе показано, что метод внутренней модуляции позволяет создать в субмиллиметровом диапазоне прибор, аналогичный сисаму.

1. Рассмотрим особенности метода внутренней интерференционной модуляции применительно к интерферограмме, регистрируемой с помощью интерферометра Майкельсона (в модификации Тваймана—Грина) с зеркалами, образующими оптический клин с углом $\theta/2$ при вершине. В таком интерферометре фронты плоских волн, распространяющихся первоначально вдоль оси интерферометра, после отражения от

зеркал пересекаются под углом θ и образуют интерференционную картину полос равной толщины. Распределение интенсивности $\Phi(x)$ в пространственной интерферограмме можно представить в виде [7]

$$\Phi(x) = \int_0^\infty B(v) [1 + \cos(2\pi x v \theta)] dv, \quad (1)$$

где $v = 1/\lambda \text{ см}^{-1}$, $B(v)$ — спектральная плотность излучения, x — координата вдоль оси, перпендикулярной ребру клина. Множитель $f = v\theta$ в аргументе косинуса соответствует пространственной частоте интерференционных полос, образованных излучением с длиной волны λ .

Замена зеркал интерферометра дифракционными решетками, имеющими шаг штрихов d и работающими в k -м порядке, приводит к смещению частот интерференционных полос пространственной интерферограммы. Если дифракционные решетки установлены таким образом, что их плоскости повернуты на одинаковый угол β_0 по отношению к осям интерферометра, то фронты дифрагированных плоских волн с $\lambda \neq \lambda_0$, где λ_0 — длина волны, для которой выполняется условие автоколлимации $k\lambda_0 = 2d \sin \beta_0$, пересекаются под углом, равным

$$\theta_0 = 4 \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \operatorname{tg} \beta_0,$$

и образуют интерференционные полосы, частота которых равна

$$f_0 = 4(v_0 - v) \operatorname{tg} \beta_0. \quad (2)$$

Это следует из основного уравнения дифракционной решетки. В интерферометре с решетками пространственная интерферограмма определяется выражением, получающимся из (1) в результате замены пространственных частот $f = v\theta$ частотами f_0 .

При записи формулы (1) предполагалось, что оптические пути осевых лучей в обоих плечах интерферометра одинаковы. Введение в одно плечо дополнительной разности хода Δ позволяет путем задания определенного закона изменения Δ во времени исключить из пространственной интерферограммы ее постоянную составляющую. При этом приемник, находящийся в фокусе выходной коллиматорной линзы, на выходе интерферометра с решетками регистрирует интерферограмму

$$F(\Delta) = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(v) D(x) \cos[2\pi(f_0 x + v\Delta)] dv dx, \quad (3)$$

где Ω — телесный угол потока, падающего на выходную коллиматорную линзу (Ω считается достаточно малым, чтобы можно было пренебречь влиянием расходности потока на вид пространственной интерферограммы), $D(x)$ — функция диафрагмирования, зависящая от формы апертур, ограничивающих сечение потока, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x) dx = A,$$

где A — площадь сечения потока.

В случае симметричной функции $D(x)$ выражение (3) упрощается и сигнал, регистрируемый приемником, представляется в виде

$$P(\Delta) = q_1 A \Omega \int_0^{\infty} B(v) R(v_0 - v) \cos 2\pi v \Delta dv, \quad (4)$$

где q_1 — коэффициент преобразования приемника, $R(\nu_0 - \nu)$ — нормированная косинус-трансформанта Фурье функции диафрагмирования:

$$R(\nu_0 - \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x) \cos 2\pi f_0 x dx / \int_{-\infty}^{\infty} D(x) dx. \quad (5)$$

Предположим, что изменение Δ осуществляется около значения Δ_0 в пределах от $\Delta_0 + \delta$ до $\Delta_0 - \delta$ по закону

$$\Delta(t) = \Delta_0 + \delta z(t), \quad (6)$$

где $z(t)$ — периодическая функция с периодом T . Подставим $\Delta(t)$ из (6) в (4) и разложим $P(\Delta)$ в ряд Фурье по временным гармоникам частоты модуляции $\omega = 2\pi/T$. В общем случае разложение имеет вид

$$\begin{aligned} P(\Delta) = q_1 A \Omega \int_0^{\infty} B(\nu) R(\nu_0 - \nu) & \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\nu\delta) \cos(n\omega t + \varphi_n) \right] \times \\ & \times \cos 2\pi\nu\Delta_0 d\nu - q_1 A \Omega \int_0^{\infty} B(\nu) R(\nu_0 - \nu) & \left[\sum_{n=0}^{\infty} S_n(\nu\delta) \times \right. \\ & \left. \times \cos(n\omega t + \psi_n) \right] \sin 2\pi\nu\Delta_0 d\nu, \end{aligned} \quad (7)$$

где $C_n(\nu\delta)$ и $S_n(\nu\delta)$ — коэффициенты фурье-разложения функций $C(t) = \cos 2\pi\nu\delta z(t)$ и $S(t) = \sin 2\pi\nu\delta z(t)$, φ_n и ψ_n — сдвиги фаз временных гармоник.

Некоторые дополнительные условия, налагаемые на функцию $z(t)$, позволяют существенно упростить это выражение. В частности, условие четности $z(-t) = z(t)$ (симметрия I-го рода) дает $\varphi_n = \psi_n = 0$. Если, кроме того, функция $z(t)$ обладает свойством нечетной симметрии III-го рода, т. е. $z(t + T/2) = -z(t)$, то в первом интеграле формулы (7) остаются только четные гармоники, во втором — только нечетные. В этом случае после синхронного детектирования на частоте одной из нечетных гармоник регистрируется сигнал

$$P_{2n+1}(\nu_0, \Delta_0) = q_2 A \Omega \int_0^{\infty} B(\nu) S_{2n+1}(\nu\delta) R(\nu_0 - \nu) \sin 2\pi\nu\Delta_0 d\nu. \quad (8)$$

Если синхронное детектирование осуществляется на частоте одной из четных гармоник, то регистрируемый сигнал имеет вид

$$P_{2n}(\nu_0, \Delta_0) = q_3 A \Omega \int_0^{\infty} B(\nu) C_{2n}(\nu\delta) R(\nu_0 - \nu) \cos 2\pi\nu\Delta_0 d\nu. \quad (9)$$

Так как в этом выражении максимальное значение множителя $\cos 2\pi\nu\Delta_0$ можно получить для всех регистрируемых длин волн при одном и том же значении Δ_0 , а именно при $\Delta_0 = 0$, то при детектировании на четных гармониках исключается необходимость согласования Δ_0 с длиной волны настройки интерферометра λ_0 . При $\Delta_0 = 0$ детектирование на четной гармонике дает

$$P_{2n}(\nu_0) = q_3 A \Omega \int_0^{\infty} B(\nu) C_{2n}(\nu\delta) R(\nu_0 - \nu) d\nu. \quad (10)$$

В этом случае сигнал приемника представляет собой свертку спектральной плотности излучения $B(\nu)$, умноженной на коэффициент

$C_{2n}(\nu\delta)$, характеризующий эффективность модуляции, и функции $R(\nu_0 - \nu)$, являющейся аппаратной функцией прибора.

Таким образом, внутренняя модуляция излучения в интерферометре Майкельсона с дифракционными решетками позволяет осуществить регистрацию спектра при согласованном повороте дифракционных решеток, приводящем к изменению длины волны настройки интерферометра.

2. С целью выяснения практических возможностей создания субмиллиметрового спектрометра с селективной модуляцией был разработан экспериментальный макет прибора, схема которого приведена на рис. 1. Прибор собран по асимметричной схеме с диспергирующим элементом в одном плече интерферометра Майкельсона. Второй эшелет работает в нулевом порядке и обеспечивает фильтрацию коротковолнового излучения. Сканирование спектра осуществляется поворотом диспергирующего эшелета вокруг оси, лежащей в плоскости эшелета и параллельной его штрихам. Наличие только одного диспергирующего эшелета приводит к уменьшению вдвое частот пространственных гармоник и, соответственно, в два раза уменьшает расчетную разрешающую силу прибора.

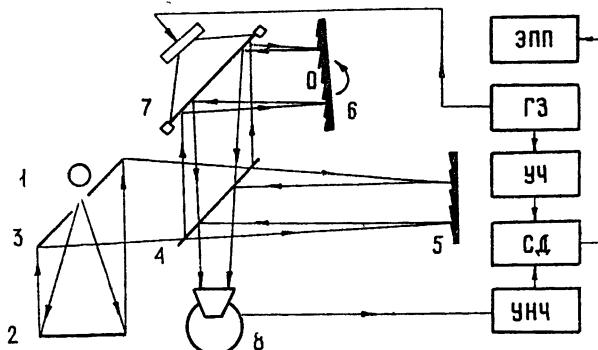


Рис. 1. Схема макета селективного спектрометра с „внутренней“ модуляцией:

1—источник; 2, 3—зеркала; 4—делитель потока излучения; 5—фильтрующий эшелет; 6—дисперсионный эшелет; 7—модулятор разности хода лучей; 8—приемник; О—ось поворота дисперсионного эшелета; ГЗ—звуковой генератор; УЧ—удвоитель частоты; УПЧ—усилитель; СД—синхронный детектор; ЭПП—самописец.

Функция диафрагмирования и, следовательно, вид аппаратной функции прибора в использованной схеме определяются входной апертурой приемника, имеющей форму круга. В данном случае

$$D(x) = \begin{cases} L^2[1 - (2x/L)^2]^{1/2} & \text{при } |x| < L \\ 0 & \text{при } |x| > L \end{cases},$$

где L — диаметр апертуры приемника.

Теоретическая аппаратная функция имеет вид

$$R(\nu_0 - \nu) = \frac{I_1[2\pi(\nu_0 - \nu)L \operatorname{tg} \beta_0]}{\pi(\nu_0 - \nu)L \operatorname{tg} \beta_0}, \quad (11)$$

где I_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка. Теоретиче-

сская разрешающая сила прибора $Q = \nu_0/\Delta\nu$ ($\Delta\nu$ — ширина аппаратной функции по половинному уровню) определяется выражением

$$Q \approx \pi\nu_0 \operatorname{tg} \beta_0 L/2 \quad (12)$$

и, в частности, на длине волн $\lambda_0 = 600 \text{ мк}$ ($\nu_0 = 16,6 \text{ см}^{-1}$) составляет ~ 25 (при угле поворота эшелета $\beta_0 = 12^\circ$ и диаметре входной апертуры приемника $L = 45 \text{ мм}$).

Основной трудностью, встречающейся на пути реализации селективного метода регистрации спектров в субмиллиметровом диапазоне, является отсутствие систем, обеспечивающих изменение разности хода интерферирующих лучей по определенному закону $z(t)$ с необходимой амплитудой и частотой. Задача усложняется тем обстоятельством, что у приемников с охлаждаемыми до гелиевых температур детекторами из $n\text{-InSb}$ спектральная плотность шумов с уменьшением частоты модуляции уменьшается пропорционально $\omega^{-\gamma}$ ($\gamma \approx 0,8 \div 1,4$) до частот порядка 200 Гц .

Дальнейшая зависимость имеет еще более резкий характер [8]. Поэтому усиительные схемы таких приемников рассчитаны на частоту модуляции $\sim 1000 \text{ Гц}$, уменьшение которой нежелательно, поскольку приводит к ухудшению флюктуационной чувствительности приемника. В силу этих причин более перспективным законом изменения разности хода лучей является гармонический,

$$z(t) = \cos \omega t, \quad (13)$$

удовлетворяющий поставленным выше условиям и реализуемый на практике с помощью электромеханических колебательных систем. Эффективность модуляции по гармоническому закону характеризуется функциями Бесселя первого рода, порядок которых совпадает с номером регистрируемой гармоники:

$$\begin{aligned} S_1(\nu\delta) &= 2I_1(2\pi\nu\delta), \\ C_2(\nu\delta) &= 2I_2(2\pi\nu\delta). \end{aligned} \quad (14)$$

На второй гармонике эффективность модуляции достигает максимума, равного 0,97, при $2\pi\nu\delta \approx 3,05$. Соответствующая амплитуда изменения разности хода δ_m связана с λ_0 соотношением $\delta_m \approx 0,48\lambda_0$. Необходимо отметить, что эффективность модуляции высших порядков излучения решетки не равна нулю и составляет для второго порядка $\sim 0,5$ и для третьего $\sim 0,3$.

В описываемом макете спектрометра внутренняя модуляция осуществляется с помощью мембранныго модулятора разности хода лучей [10], расположенного между делителем потока излучения и диспергирующим эшелетом. Частота модуляции составляет 490 Гц , и, так как детектирование сигнала производится на второй гармонике, в цепь опорного сигнала введен удвоитель частоты. Амплитуда колебаний регулируется изменением величины напряжения задающего генератора и контролируется по уровню сигнала на длине волн, соответствующей «блеску» эшелета. Так как функция Бесселя, характеризующая эффективность модуляции, по уровню 0,7 перекрывает диапазон, превосходящий рабочий диапазон эшелета, дополнительная подстройка амплитуды при сканировании спектра не требуется.

Экспериментальное измерение разрешающей силы прибора проводилось с помощью интерферометра Майкельсона по огибающей интерферограммы излучения на выходе исследуемого прибора, записываемой при смещении подвижного зеркала интерферометра, методом, аналогич-

ным разработанному для измерения ширины аппаратной функции эшелетного монохроматора [9]. Пример интерферограммы приведен на рис. 2. Полученные значения разрешающей силы близки к теоретическим, рассчитанным по формуле (12), т. е. в данном приборе, как и в обычных спектрометрах с интерференционной селективной амплитудной модуляцией, реализуется разрешение, близкое к предельному разрешению используемых дисперсионных эшелетов. В частности, с дисперсионным эшелетом, имеющим шаг штрихов $d = 1,5 \text{ мм}$ и угол блеска 12° , в диапазоне длин волн $400—700 \text{ мк}$ разрешающая сила, по экспериментальным измерениям, равна $22 \pm 1,2$.

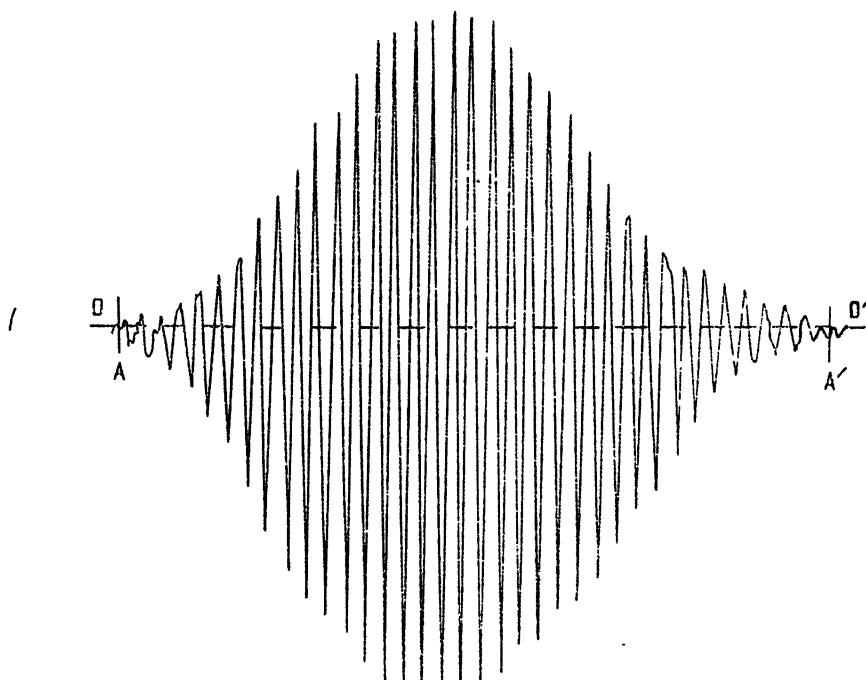


Рис. 2. Интерферограмма аппаратной функции селективного спектрометра (длина волны настройки спектрометра $\lambda_0 = 600 \text{ мк}$, расстоянию между точками AA' соответствует разность хода интерферирующих лучей $\Delta = 20 \text{ мм}$, OO' — уровень нулевого сигнала).

Для проверки возможностей предлагаемого метода к измерению конкретных спектров была проведена в диапазоне $400—700 \text{ мк}$ запись спектров поглощения атмосферных паров воды. Качество спектрограмм сравнивалось с аналогичными записями, полученными с помощью эшелетного монохроматора (размер дисперсионных эшелетов $220 \times 220 \text{ мм}^2$, фокусное расстояние коллимирующих зеркал $F = 650 \text{ мм}$). При равном разрешении обоих приборов вид спектрограмм и их основные особенности (форма и расположение линий поглощения) практически совпадали, при этом отношение сигнала к шуму в спектрограммах селективного спектрометра было примерно на порядок выше, хотя площадь дисперсионных эшелетов в селективном спектрометре была примерно в 20 раз меньше. Пример спектрограммы, записанной с помощью селективного спектрометра, представлен на рис. 3. Аналогичные спектрограммы, полученные с эшелетным монохроматором, приведены в работе [11].

Следует отметить, что светосила данного варианта селективного спектрометра была равна $\sim 0,6 \text{ см}^2 \cdot \text{стераид}$, что при $L = 45^\circ \text{ мм}$ соот-

ветствует телесному углу потока $\Omega \approx 3 \cdot 10^{-2}$ стерад. Эта величина значительно меньше допустимого значения $\Omega_d = 2\pi/Q \approx 0,3$ стерад, поэтому влиянием расходимости потока на вид аппаратной функции можно было пренебречь и пользоваться для оценки разрешающей силы соотношением (12), выведенным в предложении малости телесного угла.

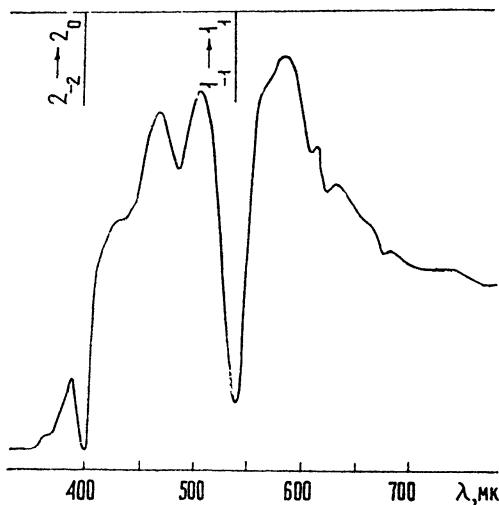


Рис. 3. Спектрограмма поглощения субмиллиметрового излучения атмосферными парами воды, записанная с помощью селективного спектрометра (шаг штрихов дисперсионного эшелета—1,5 мм, угол блеска— 12°).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 П. Жакино, УФН, 78, 123 (1962).
- 2 А. Жирар, сб. Инфракрасная спектроскопия высокого разрешения, изд. Мир, М., 1972, стр. 306.
- 3 Р. Соппес, Rev. d'Opt., 38, 157, 416 (1959); 39, 402 (1960).
- 4 В. М. Архипов, П. Ф. Паршин, Журнал прикл. спектр., 6, 446 (1967).
- 5 Ж.-П. Майар, сб. Инфракрасная спектроскопия высокого разрешения, изд. Мир, М., 1972, стр. 128.
- 6 J. Chamberlain, Infrared Phys., 11, 25 (1971).
- 7 Дж. Строук, Введение в когерентную оптику и голограммию, изд. Мир, М., 1967.
- 8 A. N. Vystavkin, V. N. Gubankov, V. N. Listvin, V. V. Migulin, Proc. of the Symposium on Submillimeter Waves, Brooklyn, 1970, p. 321.
- 9 Ю. И. Колесов, В. Н. Листвин, А. Я. Смирнов, Опт. и спектр., 33, 1169 (1972).
- 10 Ю. И. Колесов, В. Н. Листвин, ПТЭ, № 5, 112 (1974).
- 11 К. А. Аганбекян, А. Н. Выставкин, В. Н. Листвин, В. Д. Штыков, Радиотехника и электроники, 11, 1252 (1966).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
8 июля 1974 г.

SELECTIVE MODULATION IN SUBMILLIMETER SPECTROMETERS

V. N. Listvin, Yu. I. Kolesov, Yu. V. Gulyaev

The peculiarities of the method of „internal“ interference modulation in two-beam interferometers with dispersion elements are considered. The possibility is shown to develop a selective submillimeter spectrometer which is characterized by large throughput high resolution and presence of synchronous detection.

УДК 621.373.826 . 53

ВЛИЯНИЕ САМОФОКУСИРОВКИ НА СТРУКТУРУ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ СВЕТА В ЛАЗЕРЕ С ПРОСВЕТЛЯЮЩИМСЯ ФИЛЬТРОМ

Е. Г. Ларионцев, В. Н. Серкин

Рассматривается влияние самофокусировки излучения в активной среде неодимового лазера на временные и пространственные характеристики цуга ультракоротких импульсов света (УКИ). Получены простые аналитические выражения, описывающие искажение временной структуры УКИ по мере развития цуга. Определено критическое значение пиковой интенсивности в максимуме цуга УКИ, начиная с которого возникают существенные искажения временной и пространственной структуры УКИ. Показано, что в ОКГ с большой длиной резонатора можно значительно ослабить искажения формы УКИ, обусловленные самофокусировкой.

В последнее время уделяется большое внимание исследованию явлений самофокусировки и фазовой самомодуляции излучения в режиме генерации ультракоротких импульсов света (УКИ) в лазерах с просветляющимся фильтром [1-9]. В работах [1, 2, 4-7] эти явления наблюдались экспериментально при генерации УКИ в лазере на неодимовом стекле. Было показано [2, 4], что фазовая самомодуляция приводит к существенному увеличению ширины спектра излучения и изменению его формы. Вследствие самофокусировки изменяется поперечная структура поля излучения [2, 7] и возникают дополнительные потери, зависящие от мощности излучения. Такие потери оказывают существенное влияние на динамику развития и временную структуру УКИ [8, 9].

Влияние самофокусировки излучения на работу ОКГ исследовалось теоретически в ряде работ [7, 10-14]. В работах [10-13] рассматривались вопросы устойчивости резонатора [10, 11] и устойчивости стационарной генерации [12, 13] при наличии в резонаторе нелинейной фокусирующей среды.

В работах [7, 14] был выполнен ряд численных расчетов, касающихся самофокусировки УКИ в активной среде неодимового лазера. Проведенные расчеты показали, что в неодимовом ОКГ с просветляющимся фильтром самофокусировка излучения может оказывать существенное влияние на динамику генерации УКИ. В процессе самофокусировки происходит значительное изменение поперечного распределения поля и возрастание дифракционных потерь, что приводит даже в отсутствие насыщения усиления к ограничению пиковых интенсивностей на уровне нескольких $G\text{Bt}/\text{cm}^2$ [7]. Дифракционные потери при наличии самофокусировки зависят от интенсивности излучения. Вследствие этого искажается форма УКИ: происходит разбиение УКИ на ряд компонент [6, 14].

В настоящей работе, так же как и в [7, 14], исследуется влияние самофокусировки на динамику генерации УКИ в лазере на стекле с неодимом, причем, в отличие от [7, 14], учитывается насыщение усиления активной среды. Получены формулы, описывающие изменение временной структуры УКИ по мере развития цуга. Проведено исследование

зависимости искажений формы УКИ, обусловленных самофокусировкой, от величины пиковой интенсивности в максимуме цуга УКИ, а также от длительности цуга. Показано, что в ОКГ с большой длиной резонатора можно существенно ослабить нелинейные искажения формы УКИ, вызванные самофокусировкой излучения в активной среде.

1. ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ ИМПУЛЬСА СВЕТА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНУЮ СРЕДУ

Распространение УКИ в нелинейной среде будем описывать на основе параболического уравнения для комплексной амплитуды поля \tilde{E} [15]:

$$2ik \left(\frac{1}{v} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} \right) + \Delta_{\perp} \tilde{E} + \frac{n_2}{n_0} k^2 |\tilde{E}|^2 \tilde{E} = 0. \quad (1)$$

В уравнении (1) нелинейность предполагается безынерционной ($n = n_0 + n_2 |\tilde{E}|^2$), а дисперсия среды учитывается лишь в первом приближении ($v = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ — групповая скорость волнового пакета).

Поле на входе в среду ($z = 0$) запишем в виде гауссова пучка

$$\tilde{E}(0, t) = E_0(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_0^2(t)} + i \frac{k}{R(t)} \right] r^2 + i \varphi(t) \right\}, \quad (2)$$

$E_0(t)$ — амплитуда, $r_0(t)$ — радиус пучка, $R(t)$ — радиус волнового фронта.

В приближении безаберрационной самофокусировки решение уравнения (1) с граничным условием (2) имеет вид [16]

$$|\tilde{E}(r, z, t)|^2 = f^{-2} E_0^2(\tau) \exp \left[- \left(\frac{r}{r_0(\tau)f} \right)^2 \right], \quad (3)$$

$$f^2 = \left[\frac{1}{R^2(\tau)} - \left(\frac{n_2 E_0^2(\tau)}{n_0 r_0^2(\tau)} - \frac{1}{k^2 r_0^4(\tau)} \right) \right] z^2 + \frac{2}{R(\tau)} z + 1.$$

Здесь f — относительная ширина пучка, $\tau = t - z/v$. Выражения (3) определяют изменение интенсивности излучения в процессе самофокусировки. В рассматриваемом приближении по дисперсии амплитудная модуляция оказывается не зависящей от фазовой, и последняя не будет рассматриваться.

Из (3) следует, что вследствие самофокусировки излучения изменяется форма импульса поля на оси пучка ($r = 0$):

$$E^2(0, z, t) = f^{-2} E_0^2(\tau). \quad (4)$$

Полный поток энергии в пучке

$$P(z, t) = \frac{c}{8\pi} \int_0^\infty E^2(r, z, t) 2\pi r dr$$

при распространении пучка в нелинейной среде сохраняется:

$$P(z, t) = P_0(\tau) = \frac{c}{8\pi} E_0^2(\tau) r_0^2(\tau) \pi. \quad (5)$$

В дальнейшем под формой импульса будем подразумевать зависимость от времени полной мощности пучка $P(z, t)$. В соответствии с (5) форма импульса не изменяется в процессе самофокусировки излучения.

Изменение формы импульса возникает только при наличии дополнительных потерь при самофокусировке (например, при ограничении светового пучка диафрагмой). Для удобства расчета дифракционных потерь будем считать диафрагму гауссовой [11]. Нетрудно показать, что после прохождения сфокусированного пучка через гауссову диафрагму с радиусом a форма импульса определяется выражением

$$P(z, t) = \frac{c}{8\pi} \int_0^{\infty} E^2(r, z, t) \exp(-r^2/a^2) 2\pi r dr = \frac{P_0(\tau)}{1 + (r_0(\tau)f/a)^2}. \quad (6)$$

2. ВЛИЯНИЕ САМОФОКУСИРОВКИ НА ФОРМУ ИМПУЛЬСОВ В ЦУГЕ УКИ

В лазере с просветляющимся фильтром внутри резонатора формируется ультракороткий импульс света, который многократно проходит по резонатору. Нами было рассчитано изменение формы УКИ вследствие самофокусировки при последовательных обходах резонатора. При однократном прохождении через нелинейную среду форма импульса и относительная ширина пучка f определялись по формулам (6), (3), а радиус волнового фронта R — по формуле $R = \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-1}$. При расчетах учитывалось дифракционное расплывание пучка при распространении вне среды [17]. Искажения формы импульса вследствие самофокусировки возникают при достаточно больших интенсивностях УКИ (вблизи максимума цуга УКИ), когда фильтр оказывается полностью просветленным. Поэтому влиянием фильтра на форму УКИ можно пренебречь. Изменение формы импульса вследствие насыщения усиления оказывается незначительным [18, 19], и при расчетах оно также не учитывалось.

Расчеты проводились для ОКГ на неодимовом стекле. Нелинейная часть показателя преломления для стекла равна [3] $n_2 = 10^{-13}$ CGSE. Нелинейностью n_2 для фильтра пренебрегалось, поскольку более существенной оказывается нелинейность в стекле [2, 3]. Для простоты рассматривалась модель лазера бегущей волны с одним сферическим зеркалом (радиус кривизны $R = 10$ м, остальные зеркала плоские). Длина резонатора L равнялась 1,5 м, длина нелинейной среды — $z = 20$ см. На входе в среду пучок ограничивался гауссовой диафрагмой с радиусом $a = 0,4$ см.

Насыщение коэффициента усиления активной среды при расчетах учитывалось приближенно следующим образом. Предполагалось, что в отсутствие самофокусировки ($n_2 = 0$) огибающая цуга УКИ имеет гауссову форму

$$P_k = P_{\max} \exp \left[- \left(\frac{k - N}{N} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Здесь P_{\max} — пиковая мощность УКИ в максимуме огибающей, P_k — пиковая мощность k -го импульса в цуге, $2N + 1$ — число импульсов в цуге (по уровню $1/e$) ($k = 0, 1, 2, \dots, 2N + 1$).

Было рассчитано изменение формы УКИ при последовательных прохождениях через нелинейную среду. Начальная форма УКИ (при $k = 0$) предполагалась гауссовой:

$$P_k(t) \Big|_{k=0} = \frac{P_{\max}}{e} \exp \left[- \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Начальный радиус пучка r_0 и радиус волнового фронта на входе в среду определялись на основе теории гауссовых пучков в сферическом резонаторе [17].

Проведенные расчеты показали, что вследствие самофокусировки излучения и потерь на диафрагме происходит постепенное искажение формы импульсов в цуге УКИ. Заметные искажения возникают при пиковых значениях мощности в максимуме цуга $P_{\max} \geq 17 \text{ МВт}$ (соответственно при $n_2 E_{\max}^2 \geq 8 \cdot 10^{-7}$). Вследствие нелинейных искажений к концу цуга происходит разбиение одиночного импульса на несколько более коротких компонент (рис. 1). Провалы возникают в тех частях импульса, для которых радиус пучка на диафрагме и, следовательно, дифракционные потери оказываются наибольшими. Напротив, в моменты времени, соответствующие наименьшему размеру светового пятна на диафрагме, возникают пики. Заметим, что размер пятна на диафрагме сложным образом зависит от параметров пучка на входе в среду и от конфигурации резонатора. Это затрудняет детальное качественное описание структуры УКИ.

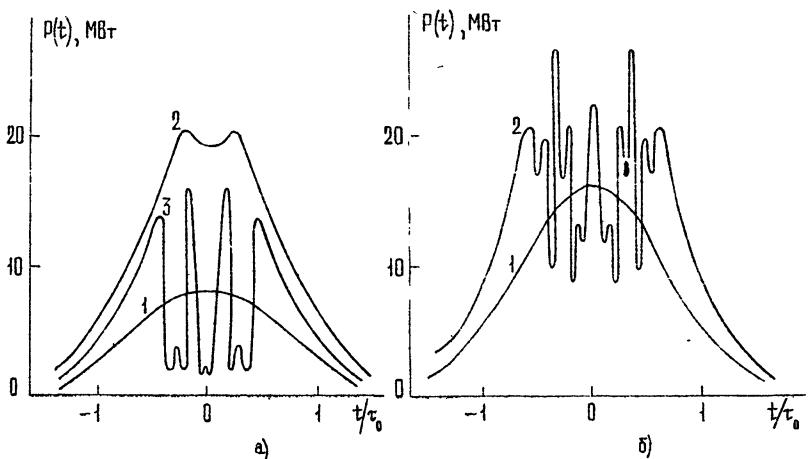


Рис. 1. Изменение формы УКИ в цуге из 60 импульсов ($2N + 1 = 60$);
 а) $n_2 E_{\max}^2 = 8 \cdot 10^{-7}$; 1, 2, 3—соответственно форма 5-го, 30-го и 45-го импульсов в цуге;
 б) $n_2 E_{\max}^2 = 16 \cdot 10^{-7}$; 1, 2—соответственно форма 5-го и 20-го импульсов в цуге.

При расчетах варьировались пиковые интенсивности излучения в максимуме цуга, а также число импульсов в цуге УКИ. На рис. 1 иллюстрируются изменения формы УКИ при числе импульсов в цуге $2N + 1 = 60$ (примерно такое число импульсов в цуге наблюдается экспериментально при длине резонатора $L \sim 1 \text{ м}$ [4, 7]). Как видно из рис. 1 а, б, искажения формы УКИ сильно зависят от величины пиковой мощности. Так, при $P_{\max} = 17 \text{ МВт}$ (рис. 1 а) заметные искажения формы УКИ возникают лишь в конце цуга. А при $P_{\max} = 34 \text{ МВт}$ более сильные искажения имеют место уже в начале цуга (рис. 1 б).

Отметим, что безаберрационное приближение, использовавшееся нами при расчете изменения формы импульсов, справедливо при условии, что точка фокуса ($f = 0$) находится вне среды (т. е. в среде не

происходит схлопывания луча). Для результатов, приведенных на рис. 1 а, б, это условие выполнялось. Однако при $P_{\max} = 34 \text{ МВт}$ к концу цуга УКИ (см. рис. 2 а) происходит схлопывание пучка в среде. (На рис. 2 а соответствующие части импульса заштрихованы.) В этом случае безаберрационное приближение может дать только качественное описание нелинейных искажений формы УКИ.

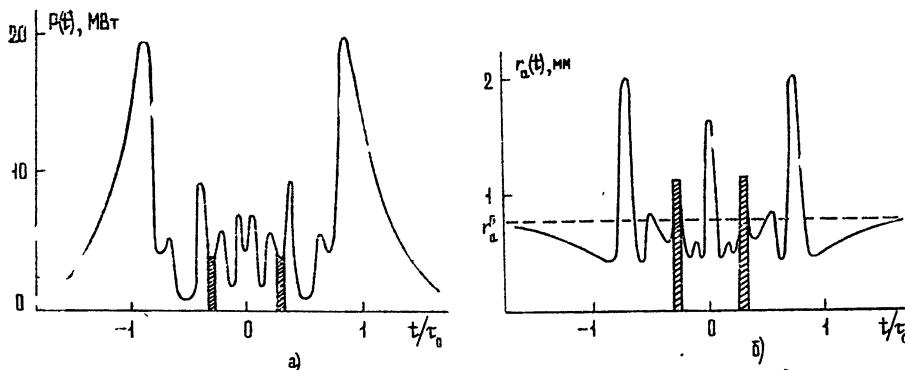


Рис. 2. Форма УКИ и радиус пучка на дифрагме для 30-го импульса в цуге при $n_2 E_{\max}^2 = 16 \cdot 10^{-7}$; $2N+1=60$.

На рис. 2 б показано изменение поперечной структуры поля в процессе самофокусировки УКИ на одном из проходов по резонатору. Здесь r_a — радиус пучка в месте расположения диафрагмы, r_a^0 — радиус пучка в отсутствие самофокусировки. Из рис. 2 б видно, что радиус пучка пульсирует во времени. Как уже отмечалось, искажения формы УКИ коррелируют с изменением r_a (см. рис. 2 а и 2 б).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе проведенных расчетов нам удалось определить критическое значение пиковой интенсивности в максимуме цуга УКИ, начиная с которого возникают существенные искажения временной и пространственной структуры УКИ. Это значение при числе импульсов в цуге $2N+1=60$ оказывается равным $n_2 E_{\max}^2 = 8 \cdot 10^{-7}$. Соответственно пиковая мощность в максимуме цуга равна $P_{\max} = 17 \text{ МВт}$. Если принять, что длительность УКИ равна 5 нкс, получим, что энергия в импульсе $\approx 0,1 \text{ мДж}$.

Приведенные результаты были получены при значении радиуса диафрагмы $a = 0,4 \text{ см}$. Уменьшение радиуса диафрагмы до $0,2 \text{ см}$ приводит лишь к незначительным изменениям полученных зависимостей.

В работах [4–6] экспериментально исследовалась зависимость формы УКИ от их положения в цуге и было обнаружено, что к концу цуга происходит дробление отдельных УКИ на ряд более коротких компонент. Эти результаты, как уже отмечалось в [6, 14], можно объяснить влиянием самофокусировки излучения при генерации цуга УКИ. Проведенные нами расчеты также подтверждают эту возможность. Действительно, в экспериментах [4–6] достигались пиковые значения мощности УКИ, при которых вследствие самофокусировки и потерь на диафрагме должно происходить заметное искажение формы УКИ к концу цуга.

В работе [20] было экспериментально показано, что в генераторе УКИ с оптической линией задержки происходит значительное сокраще-

ние числа импульсов в цуге с увеличением длины резонатора. В этой связи нами была исследована зависимость нелинейных искажений формы УКИ от длины цуга. На рис. 1 б, 2 а, 3 показана форма УКИ при одинаковых пиковых интенсивностях в максимуме цуга, но при существенно различающихся длинах цугов. Из рис. 3 видно, что для цуга, состоящего из 5 импульсов ($2N + 1 = 5$), искажения формы УКИ к концу цуга оказываются незначительными, тогда как для более длинного цуга ($2N + 1 = 60$, рис. 1 б, 2 а) форма УКИ сильно искажается уже в начале цуга. Таким образом, на основе проведенных расчетов следует ожидать, что в генераторе УКИ с большой длиной резонатора можно существенно ослабить искажения формы УКИ, обусловленные самофокусировкой.

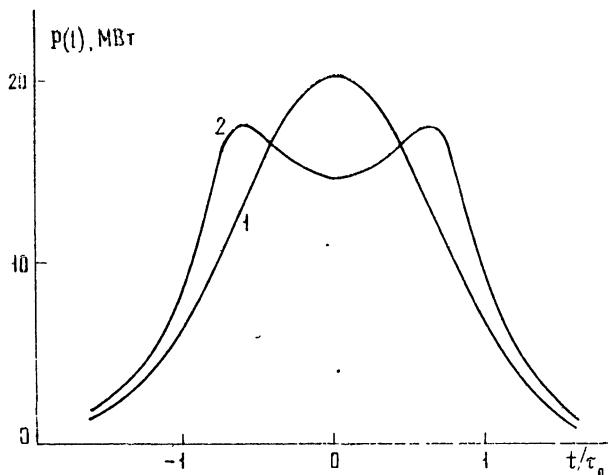


Рис. 3. Изменение формы УКИ в цуге из 5 импульсов ($2N + 1 = 5$); $n_2 E_{\max}^2 = 16 \cdot 10^{-7}$; 1, 2—соответственно форма 1-го и 3-го импульсов цуга.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Коробкин, А. А. Малютин, М. Я. Щелев, Письма в ЖЭТФ, 11, 168 (1970).
2. В. В. Коробкин, А. А. Малютин, А. М. Прохоров, Письма в ЖЭТФ, 12, 216 (1970).
3. M. A. Duguay, J. W. Hansen, S. L. Shapiro, IEEE J. Quant. Electron., QE-6, 725 (1970).
4. D. Vonder Linde, IEEE J. Quant. Electron., QE-8, 328 (1972).
5. Н. Г. Басов, М. М. Бут слов, П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, Е. А. Смирнова, Б. М. Степанов, С. Д. Фанченко, С. В. Чекалин, Р. В. Чикин, ЖЭТФ, 65, 907 (1973).
6. А. Н. Жерихин, П. Г. Крюков, Е. В. Курганова, Ю. А. Матвеев, С. В. Чекалин, С. А. Чурилова, О. В. Шатберашвили, ЖЭТФ, 66, 116 (1974).
7. R. C. Esckardt, IEEE J. Quant. Electron., QE-10, 48 (1974).
8. Н. Г. Басов, И. Кертес, П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, Ю. В. Сенатский, С. В. Чекалин, ЖЭТФ, 60, 532 (1971).
9. Н. Е. Быковский, В. Кан, П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, Н. Л. Ни, Ю. В. Сенатский, С. В. Чекалин, Квантовая электроника, № 7, 68 (1972).
10. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Радиофизика—Изв. высш. уч. зав., 13, № 6, 908 (1970).
11. А. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, ЖТФ, 36, 497 (1966).
12. Г. Л. Гуревич, Л. Х. Ингель, Я. И. Ханин, Квантовая электроника, № 3, 45 (1972).
13. С. Н. Власов, А. И. Макаров, А. И. Хижняк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 2, 217 (1973).

- 14 А. Н. Жерихин, П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, С. В. Чекалин, Квантовая электроника, 1, № 4, 956 (1974).
- 15 А. А. Абрамов, В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, Письма в ЖЭТФ, 9, 675 (1969).
- 16 С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967).
17. Н. Kogelnik, T. Li, Proc. IEEE, 54, 1312 (1966).
- 18 Б. Я. Зельдович, Т. И. Кузнецова, УФН, 106, 47 (1972).
- 19 Е. Г. Ларионцев, И. П. Скуйбина, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 3, 354 (1974).
- 20 Е. Л. Ключан, Л. С. Корниенко, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, Н. И. Наумкин, Квантовая электроника, № 5, 47 (1973).

Научно-исследовательский институт ядерной физики
при Московском университете

Поступила в редакцию
24 марта 1975 г.

SELF-FOCUSING EFFECT ON THE STRUCTURE OF ULTRA-SHORT PULSES OF LIGHT IN A LASER WITH AN ABSORBING FILTER

E. G. Lariontsev, V. N. Serkin

The self-focusing effect of radiation in an active medium of neodymium laser on time and space characteristics of ultrashort pulses (USP) of light is considered. Simple analytical expressions describing the distortion of a time structure of USP as a train develops are obtained. A critical value of the peak intensity in USP maximum beginning from which there occur essential distortions of the time and space USP structure is determined. It is shown that in a laser with a large resonator length one may essentially relax the USP form distortions due self-focusing.

УДК 621.375.8

ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ С АНИЗОТРОПНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

М. А. Новиков, А. Д. Тертышник

Рассматриваются некоторые свойства оптических резонаторов, содержащих анизотропные элементы. Проведен подробный анализ селективных и поляризационных характеристик резонаторов, содержащих волновую пластицкую и частичную поляризатор. Показано, что применение частичного поляризатора в резонаторе ОКГ с хроматической волновой пластинкой позволяет получить эффективный метод селекции частоты ОКГ. Теоретические результаты подтверждаются экспериментально с использованием ОКГ на основе органических красителей. В процессе эксперимента замечено, что в растворе органического красителя при поляризации пакачки отличной от циркулярной возникает наведенная амплитудная и фазовая анизотропия.

1. Как было показано в ряде работ [1, 2], анизотропные элементы оказывают существенное влияние на характеристики оптических резонаторов. Наиболее сильное изменение при этом испытывают добротность и поляризация мод резонатора. Эта особенность была использована в поляризационных селекторах частоты ОКГ [3]. Однако в таких селекторах, как правило, применяются только полные поляризаторы типа призмы Глана. В настоящей работе показывается, что в некоторых случаях использование частичных поляризаторов в поляризационных селекторах частоты ОКГ имеет ряд преимуществ, позволяющих значительно улучшить селектирующие свойства оптических резонаторов. Ниже обсуждаются также и другие особенности резонаторов с анизотропными элементами.

2. Для случая плоских резонаторов влиянием анизотропных элементов на поперечную структуру мод в большинстве случаев можно пренебречь. Это значительно упрощает анализ, так как появляется возможность использовать весьма удобный для расчета матричный метод Джонса [4]. При таком подходе задача сводится к определению собственных значений и собственных векторов некоторой двумерной матрицы:

$$\hat{M} E = \rho E, \quad (1)$$

где \hat{M} — последовательное произведение матриц Джонса отдельных элементов, которые встречаются при полном обходе пути резонатора. Собственные значения $P_{1,2}$ позволяют найти собственные частоты и потери продольных мод резонатора из уравнений

$$\arg P_{1,2} = 2\pi q \quad (q = 1, 2, 3, \dots); \quad (2)$$

$$Q = 1 - |P_{1,2}|^2. \quad (3)$$

Если для описания состояния поляризации поля ввести параметр $\chi = E_y/E_x$, где E_x, E_y — комплексные амплитуды в декартовой системе

координат, то собственную поляризацию мод можно найти из выражения

$$\chi_{1,2} = \frac{1}{2M_{1,2}} [(M_{22} - M_{11}) \pm \sqrt{(M_{22} - M_{11})^2 + 4M_{12}M_{21}}], \quad (4)$$

где M_{ij} — элементы матрицы, отвечающей той точке и направлению в резонаторе, где мы ищем собственную поляризацию. Азимут эллипса поляризации θ и параметр эллиптичности ϵ выражаются через χ следующим образом:

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2\operatorname{Re} \chi (1 - |\chi|^2)^{-1}; \quad (5)$$

$$\sin 2\epsilon = 2\operatorname{Im} \chi (1 + |\chi|^2)^{-1}. \quad (6)$$

Принято считать, что условие $0 \leq \arg \chi \leq \pi$ соответствует правополяризованной волне, а условие $\pi \leq \arg \chi \leq 2\pi$ — левополяризованной.

3. Вид матриц Джонса отдельных элементов определяется как типом анизотропии материала, из которого они сделаны, так и ориентацией главных направлений этой анизотропии относительно осей выбранной системы координат.

Для линейных волновых пластинок (ЛВП)* и линейных поляризаторов (ЛП) в декартовой системе координат, совпадающей с главными плоскостями этих элементов, соответствующие матрицы Джонса имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\text{ЛВП}} &= A_1 e^{i\varphi_1} \begin{vmatrix} e^{i(\Delta\varphi/2)} & 0 \\ 0 & e^{-[i(\Delta\varphi/2)]} \end{vmatrix}, \\ \hat{M}_{\text{ЛП}} &= A_2 e^{i\varphi_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

где φ_1 и φ_2 — изотропные набеги фаз, а A_1, A_2 — коэффициенты, учитывающие изотропные потери в этих анизотропных элементах. В дальнейшем при расчетах эти коэффициенты не будем принимать во внимание, отбросив их к потерям в зеркалах и общей длине резонатора.

Переход от декартового к эллиптически поляризованному базису для матриц Джонса осуществляется по формулам

$$M' = \hat{D} M \hat{D}^{-1}, \quad \hat{D} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \begin{pmatrix} 1 & i\rho \\ i\rho & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \begin{pmatrix} 1 & -i\rho \\ -i\rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где ρ — степень эллиптичности базисных векторов, равная отношению главных осей эллипса поляризации. Частный случай $\rho=0$ соответствует декартову базису, а $\rho=1$ — циркулярному**. В более общем случае, когда оси эллиптического базиса относительно декартового ориентированы под углом θ , преобразование осуществляется с помощью матриц

$$\hat{T} = \hat{D}(\rho) \hat{S}(\theta), \quad \hat{T}^{-1} = \hat{S}(-\theta) \hat{D}^{-1}(\rho), \quad (9)$$

которые подставляются в (8) вместо \hat{D} . Здесь $\hat{S}(\theta)$ — матрица поворота системы координат на угол θ .

* Принятое в некоторых работах название таких пластинок фазовыми является неудобным, так как этот термин уже давно применяется для названия специальных изотропных пластинок, употребляемых в фазово-контрастных микроскопах.

** При таком определении матрица перехода к циркулярному базису несколько отличается от традиционной — поворотом направления отсчета на угол $\pi/2$. Однако при этом достигается общность записи поляризации.

Используя матрицы (9), можно записать в общем виде матрицы Джонса эллиптических волновых пластинок (ЭВП) и поляризаторов (ЭП) в декартовом базисе:

$$\hat{M}_{\text{ЭВП}} = \hat{T}^{-1}(\rho, 0) \begin{vmatrix} e^{i(\Delta\varphi/2)} & 0 \\ 0 & e^{-[i(\Delta\varphi/2)]} \end{vmatrix} \hat{T}(\rho, 0), \quad (10)$$

$$\hat{M}_{\text{ЭП}} = \hat{T}^{-1}(\rho, 0) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{vmatrix} \hat{T}(\rho, 0).$$

ЭВП и ЭП можно изготовить, например, из оптически активных кристаллов, обладающих также и линейным двупреломлением. Однако более целесообразно смоделировать их на основе ЛВП, помещенной между двумя скрещенными ЛВП в четверть волны. Можно показать, что ЛВП (ЛП), помещенные между двумя скрещенными ЛВП в четверть волны, эквивалентны ЭВП (ЭП) с параметром $\rho = \tan \alpha$, где α — угол между главными плоскостями ЛВП (ЛП) и оптическими осями пластинок в четверть волны. Аналогичным образом ЭВП (ЭП) можно превратить в (ЛВП) (ЛП).

4. В общем случае матрица \hat{M} в (1) имеет неортогональные собственные векторы. Условие ортогональности выполняется только для матриц, удовлетворяющих условию

$$MM^+ = M^+M, \quad (11)$$

где значок «+» означает эрмитово сопряжение. Такие матрицы называются нормальными. Кроме симметричных и эрмитовых матриц к разряду нормальных матриц относятся кососимметричные ($\hat{M} = -\hat{M}^T$) и унитарные ($\hat{M} = \hat{M}^{-1}$). К числу последних принадлежат, в частности, матрицы Джонса совокупности анизотропных элементов, обладающих только фазовой анизотропией. Можно показать, что это матрицы следующего вида:

$$\hat{M} = \begin{vmatrix} A & B \\ -B^* & A^* \end{vmatrix}, \quad AA^* + BB^* = 1, \quad (12)$$

причем последнее соотношение следует непосредственно из закона сохранения энергии.

Если все анизотропные элементы, помещенные в резонатор, описываются унитарными матрицами, то и общая матрица резонатора \hat{M} является также унитарной. Последнее обстоятельство позволяет записать собственные значения как

$$P_{1,2} = \exp \pm i\psi, \quad \text{где } \psi = \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{1}{\operatorname{Re} A} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad (13)$$

а соответствующее расщепление собственных частот мод резонатора равно

$$\delta\sigma = \frac{2}{2\pi L_{\text{эфф}}} \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{1}{\operatorname{Re} A} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad (14)$$

где $L_{\text{эфф}}$ — общая длина резонатора.

При помещении внутрь резонатора анизотропных пластинок, обладающих как фазовой, так и амплитудной анизотропией, расчет в общем

случае становится очень громоздким. В некоторых случаях анализ упрощается, если некоторые из элементов имеют малую анизотропию, так как при этом удается применить при определении собственных значений и собственных векторов

матричный метод возмущений, аналогичный методу возмущений, применяемому в квантовой механике. Однако нужно иметь в виду,

что матрица \hat{M} в (1) не обязательно будет эрмитовой. Методы возмущений для этого случая хорошо разработаны в математике [5].

В ряде случаев, когда в резонаторе расположено несколько элементов, общая матрица может быть представлена в виде некоторой функции от матрицы $F(\hat{M})$ (например, \hat{M}^n), а собственные значения общей матрицы в виде $P_{1,2}^{\text{общ}} = F(P_{1,2})$, где $P_{1,2}$ — собственные значения матрицы \hat{M} . Собственные векторы матриц $F(M)$ и \hat{M} совпадают между собой.

5. В качестве примера рассмотрим резонатор, представленный на рис. 1а. Он состоит из ча-

стичного поляризатора M_2 и волновой пластинки M_1 , главная оптическая плоскость которой ориентирована относительно плоскости поляризатора под углом θ . Используя выражения (1) и (7), будем иметь

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \left[A + iB \pm \sqrt{(A + iB)^2 - 4s^2} \right], \quad (15)$$

где

$$A = (1 + s^2) \cos \Delta\varphi, \quad B = (1 - s^2) \cos 2\theta \sin \Delta\varphi.$$

Для случая $\theta = \pi/4$

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + s^2) \cos \Delta\varphi \pm [(1 + s^2)^2 \cos^2 \Delta\varphi - 4s^2]^{1/2} \right\}; \quad (16)$$

$$\chi_{A1,2} = \frac{(s^2 - 1) \cos \Delta\varphi \pm [(1 + s^2)^2 \cos^2 \Delta\varphi - 4s^2]^{1/2}}{2is \sin \Delta\varphi}; \quad (17)$$

$$\delta\sigma = \frac{1}{4\pi L_{\text{эфф}}} \operatorname{arctg} \frac{[4s^2 - (1 + s^2)^2 \cos^2 \Delta\varphi]^{1/2}}{(1 + s^2) \cos \Delta\varphi}. \quad (18)$$

На рис. 2 приведены графики функций $|P_{1,2}|^2$, степени эллиптичности и (18) в зависимости от $\Delta\varphi$ при различных параметрах поляризатора s^2 . Видно, что для неидеального поляризатора, когда $s^2 \neq 0$, зависимость параметров моды от $\Delta\varphi$ имеет некоторые особенности. Так, в области малых задержек $\Delta\varphi$ по мере ухудшения поляризатора (параметр s^2 увеличивается) наблюдается более резкая зависимость как добротности, так и параметров поляризации от $\Delta\varphi$.

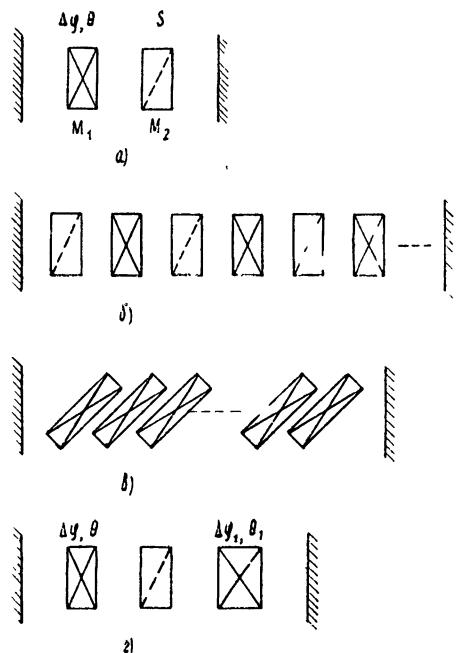


Рис. 1.

Последнее обстоятельство может быть использовано при создании весьма эффективных селекторов частоты, если в качестве волновой пластиинки взять пластинку из двоякопреломляющего материала соответствующей толщины. В этом случае $\Delta\varphi$ есть функция частоты и имеет вид $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n d$, где Δn — величина двупреломления. Кривая селекции

здесь носит периодический характер с периодом $\Delta\sigma (см^{-1}) = \frac{1}{\Delta n d}$ (без учета дисперсии Δn). Для увеличения остроты и глубины селекции можно использовать несколько одинаковых волновых пластиинок и поляризаторов (рис. 1 б). В этом случае общая матрица имеет вид M^N , где N — число пластиинок. Селективная кривая находится из рис. 2 а возведением соответствующих ординат в степень N . Конструктивно такой селектор удобно выполнить в виде одинаковых волновых пластиинок, накопленных под углом Брюстера (рис. 1 в).

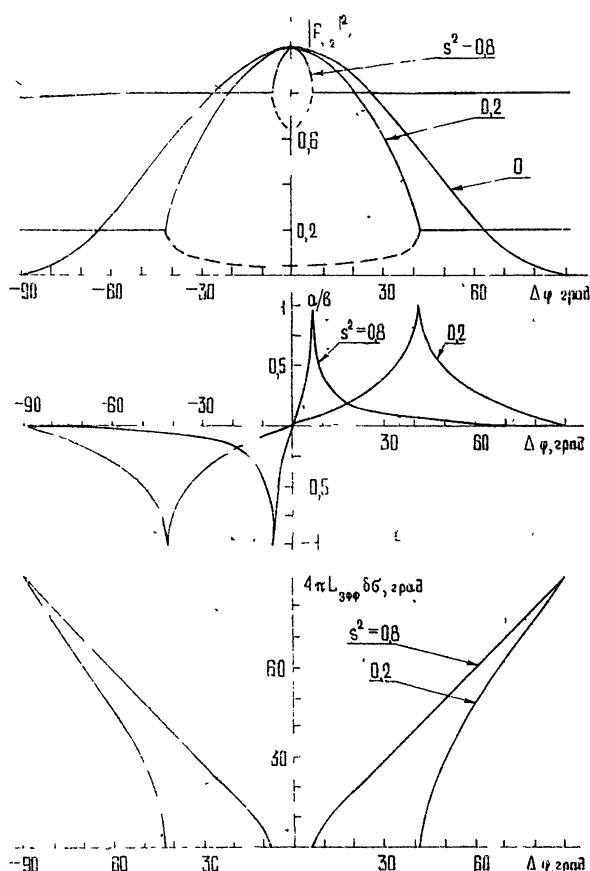


Рис. 2.

При $\theta \neq \pi/4$ вид зависимости $|P_{1,2}|^2$ от $\Delta\varphi$ несколько меняется. В этом случае полностью снимается вырождение по всем параметрам мод во всей области изменения $\Delta\varphi$. Кроме того, по мере удаления θ от $\pi/4$ понижается глубина модуляции функции $|P_{1,2}|^2(\Delta\varphi)$, а зависимость параметров эллипса поляризации принимает более плавный характер.

При $\Delta\varphi \ll 1$ из (15) можно найти

$$|P_1|^2 = 1 - \frac{1+s^2}{1-s^2} (\sin^2 2\theta) \Delta\varphi^2, \quad |P_2|^2 = s^4 \left(1 + \frac{1+s^2}{1-s^2} (\sin^2 2\theta) \Delta\varphi^2 \right); \quad (19)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{s} = i \frac{s}{1-s^2} (\sin 2\theta) \Delta\varphi + \frac{s(1+s^2)}{2(1-s^2)^2} (\sin 4\theta) \Delta\varphi^2; \quad (20)$$

$$\delta\vartheta = \frac{1}{2L_{\text{эфф}}} (\cos 2\theta) \Delta\varphi. \quad (21)$$

Выражение (20) показывает, что в первом приближении по $\Delta\varphi$ меняется только эллиптичность поляризации, а соответствующий азимут эллипса поляризации изменяется во втором приближении. Характерно, что чувствительность параметров мод к $\Delta\varphi$ повышается по мере ухудшения свойств поляризатора.

6. Представляет интерес случай, когда в резонатор помещается дополнительная волновая пластиинка (рис. 1 г) с параметрами $\Delta\varphi_1$ и θ_1 . При $\theta_1=0$ $P_{1,2}$ имеет вид (15), если считать, что s заменяется на $s \exp(i\Delta\varphi_1)$. Если $\theta=\pi/4$ и $\Delta\varphi \ll 1$,

$$|P_1|^2 = 1 - \frac{1-s^4}{1-2s^2 \cos \Delta\varphi_1 + s^4} \Delta\varphi^2. \quad (22)$$

Это выражение показывает, что при наличии дополнительной волновой пластиинки зависимость $|P_1|^2$ от $\Delta\varphi$ становится более гладкой. Это обстоятельство нужно учитывать при создании поляризационных селекторов, так как присутствие фазовой анизотропии в частичных поляризаторах приводит к ухудшению селективных свойств. Однако эти особенности могут оказаться весьма ценными, если появляется необходимость менять селективные свойства поляризационных селекторов. Конструктивно это легко достигается введением, например, электрооптической ячейки. Такие селекторы весьма перспективны в ОКГ с синхронизацией мод, где с помощью селектора можно изменять длительность импульсов света [6].

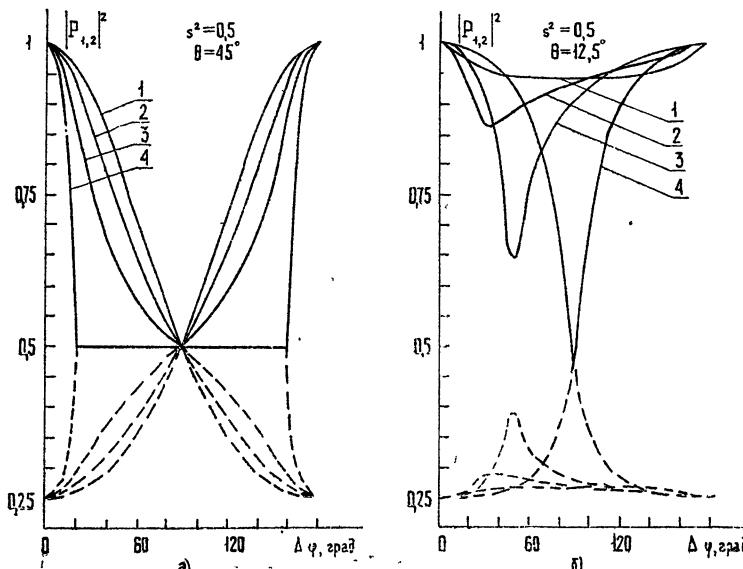


Рис. 3.

На рис. 3 приведена полная зависимость $|P_{1,2}|^2$ от $\Delta\varphi$ для различных параметров θ и $\Delta\varphi_1$, при $\theta_1 = 0$ (а) 1 — $\Delta\varphi_1 = 90^\circ$; 2 — $\Delta\varphi_1 = 45^\circ$, 135° ; 3 — $\Delta\varphi_1 = 22^\circ, 5, 157^\circ, 5$; 4 — $\Delta\varphi_1 = 0$; б) 1 — $\Delta\varphi_1 = 0$; 2 — $\Delta\varphi_1 = 22^\circ, 5$; 3 — $\Delta\varphi_1 = 45^\circ$; 4 — $\Delta\varphi_1 = 90^\circ$). Интересно отметить, что при $\theta \neq \pi/4$ наличие $\Delta\varphi_1 \neq 0$ приводит к асимметрии функции $|P_{1,2}|^2$ в зависимости от $\Delta\varphi$. Если $\theta = \theta_1 = \pi/4$ зависимость $|P_{1,2}|^2$ имеет вид

$$P_{1,2} = \frac{1}{2} \{ \cos \Delta\varphi \cos \Delta\varphi_1 (1+s^2) \pm [\cos^2 \Delta\varphi \cos^2 \Delta\varphi_1 (1+s^2) - 4s^2]^{1/2} \}. \quad (23)$$

Для фиксированных значений $\Delta\varphi_1$ функция $|P_{1,2}|^2$ в зависимости от $\Delta\varphi$ имеет вид, сходный с рис. 2 а, с той лишь разницей, что в максимуме вместо единицы функция имеет значение $\cos^2 \Delta\varphi_1$, а ширина пика равна

$$\Delta\psi = 2\arccos \left(\frac{2s}{(1+s^2)\cos \Delta\varphi_1} \right). \quad (24)$$

При $|\cos \Delta\varphi_1| < \frac{2s}{1+s^2}$ $|P_{1,2}|^2$ не зависит от $\Delta\varphi$. В этом случае изменение $\Delta\varphi$ влияет лишь на поляризацию и собственные частоты мод. Если $\Delta\varphi \ll 1$, то из (23) будем иметь

$$|P_1|^2 = |P_1(\Delta\varphi = 0)|^2 - \left\{ \cos \Delta\varphi_1 + \frac{\cos \Delta\varphi_1 (1+s^2)^2}{[\cos^2 \Delta\varphi_1 (1+s^2)^2 - 4s^2]^{1/2}} \right\} \Delta\varphi^2. \quad (25)$$

Это выражение показывает, что, меняя $\Delta\varphi_1$, можно в широких пределах изменять чувствительность добротности (а следовательно, и собственную поляризацию мод) к изменению $\Delta\varphi$. Эти свойства анизотропных поляризаторов позволяют предложить целый ряд чувствительных устройств для измерения весьма малых величин двупреломления [7].

Аналогичные результаты можно получить, если в качестве дополнительной волновой пластинки использовать ячейку Фарадея. В этом случае имеют смысл те же формулы, что и выше, но с заменой $\Delta\varphi_1$ на 2γ , где γ — угол вращения плоскости поляризации в ячейке Фарадея.

7. С целью проверки особенностей обсуждаемых выше анизотропных резонаторов был поставлен эксперимент с использованием ОКГ на основе органических красителей. Такие ОКГ имеют большой коэффициент усиления в широком спектральном интервале частот. Поэтому можно ожидать, что вид спектра излучения ОКГ на органическом красителе будет отражать частотную зависимость добротности резонатора.

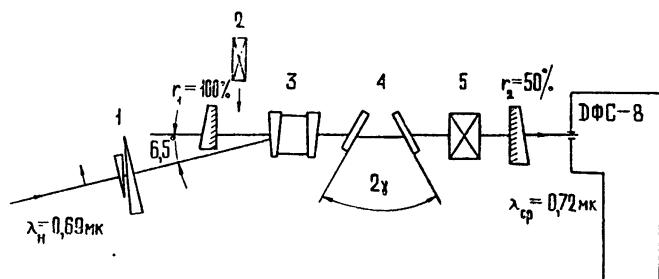


Рис. 4.

Схема установки представлена на рис. 4. В качестве рабочего вещества (куветы (3)) использовался один из красителей полиметиленового ряда, спектр генерации которого находился вблизи 7200 Å,

Накачка осуществлялась излучением рубинового ОКГ. С целью исключения влияния наведенной анизотропии в самом красителе за счет накачки поляризация последней выбиралась циркулярной с помощью компенсатора Солейля (1). В качестве переменного частичного поляризатора (4) применялись две стеклянные пластинки, угол наклона γ которых можно изменять в широких пределах. Параметр такого поляризатора можно легко вычислить из формул Френеля. Волновая пластина (5) была выполнена из кристаллического кварца x -среза. Ее толщина составляла 14 м.м.

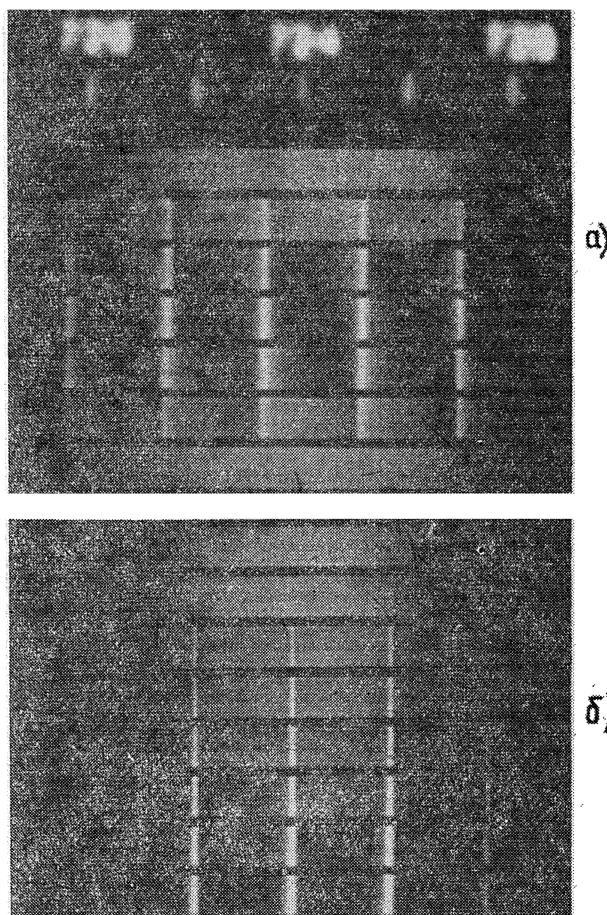


Рис. 5.

Вначале исследовалась зависимость кривой селекции резонатора с волновой пластинкой и поляризатором от параметра s^2 при $\theta = \pi/4$. На рис. 5 б приведены спектры генерации для различных параметров s^2 частичного поляризатора. На этом рисунке параметр s^2 сверху вниз изменяется от $s^2 = 1$ (пластинки перпендикулярны оси резонатора) до $s^2 = 0,5$. Хорошо видно, что спектр генерации достаточно хорошо совпадает с зависимостью, представленной на рис. 2 а. Как и следует из приведенных выше расчетов, ширина пика кривой селекции увеличивается по мере уменьшения параметра s^2 . Более того, ширина пика, измеренная по этим спектрам, достаточно хорошо согласуется с соответствующей теоретической величиной. Качественное согласие между

экспериментальными и теоретическими результатами для рассматриваемого случая наблюдается также и при $\theta \neq \pi/4$.

Далее исследовалось влияние дополнительной волновой пластинки 2 на вид спектра генерации. Роль этой пластинки выполнял компенсатор Никитина, изготовленный из пластиинки исландского шпата z -среза. При условии $\theta_1 = 0$ и $\Delta\varphi_1 = \pi/6$ для различных углов θ спектры генерации в этом случае представлены на рис. 5 а. Как и следует из вышеуказанного анализа (рис. 3), спектры генерации имеют асимметричный вид относительно частот, удовлетворяющих условию $\cos\Delta\varphi = 1$. В частности, при $\theta = \pi/4$ эта асимметрия исчезает, а по разные стороны от этого угла вид асимметрии изменяет знак. При тех же условиях, но при отсутствии компенсатора спектры генерации носят симметричный характер.

С целью исследования поляризационных особенностей спектра излучения ОКГ на красителе перед спектрографом ставился поляроид при различных ориентациях относительно частичного поляризатора. Вид спектров излучения качественно также соответствует зависимости, представленной на рис. 2 б.

В процессе эксперимента было замечено, что при поляризации накачки, отличной от циркулярной, в красителе возникает как амплитудная, так и фазовая анизотропия. Она оказывает существенное влияния на вид спектра генерации ОКГ на красителе. Последнее обстоятельство позволило разработать методику измерения наведенной анизотропии как амплитудной, так и фазовой [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Иванов, М. П. Чайка, сб. Физика газовых лазеров, изд. ЛГУ, Л., 1969.
2. М. А. Новиков, ЖПС, 13, 1006 (1970).
3. Ю. Н. Беляев, А. М. Киселев, М. А. Новиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 9, 1405 (1970).
4. В. Я. Молчанов, Г. В. Скроцкий, Квантовая электроника, № 4, 3 (1971).
5. К. Фадеев, В. Н. Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1963.
6. Ю. К. Веревкин, Э. Я. Дауме, М. А. Новиков, Тезисы докладов Все-союзного симпозиума «Физические основы управления частотой вынужденного излучения», Киев, 1972.
7. М. А. Новиков, Диссертация, ГГУ, Горький, 1974.
8. М. А. Новиков, А. Д. Тертышник, Тезисы докладов VII Конференции по нелинейной оптике, Ташкент, 1974.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 августа 1974 г.

OPTICAL RESONATOR WITH ANISOTROPIC ELEMENTS

M. A. Novikov, A. D. Tertyshnik

Some features of optical resonators containing anisotropic elements are considered. A detailed analysis of selective and polarization characteristics of resonators containing a wave plate and a partial polarizer is made. It is shown that the application of the partial polarizer in the laser resonator with a chromatic wave plate allows to obtain the effective method of the laser frequency selection. Theoretical results are experimentally confirmed by using an organic dye laser. It is pointed out in the experiment that the induced amplitude and phase anisotropy occur in the organic dye solution at the pump polarization differing from the circular one.

УДК 538.574 31

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТОХ ВОЛН

E. N. Пелиновский

Получены выражения для спектра простой волны в среде с произвольной нелинейностью. Для случая степенной пелинейности рассмотрено изменение спектра монохроматической волны, гауссова импульса и узкополосного шума.

Эволюция бегущих волн в нелинейной среде без дисперсии описывается, как известно, уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь u — переменная поля, $V(u)$ — нелинейная характеристика среды, определяющая локальную скорость распространения возмущений поля*. Наиболее подробно изучена квадратичная нелинейность ($V \sim u$). Хотя решение уравнения (1) — волна Римана — может быть записано в неявной форме для сравнительно произвольных граничных условий, однако в большинстве случаев необходимо иметь явную форму записи простой волны, в частности ее разложение в ряд или интеграл Фурье. Этот вопрос обсуждался в акустике применительно к регулярным сигналам [1–3], а позднее и к статистическим [4–6].

Во многих приложениях (электромагнитные волны в изотропном диэлектрике [7], упругие поперечные волны в твердом теле [8], волны в плазме [9] и т. д.) нелинейность является более сложной. Хотя заменой переменной $V = V(u)$ уравнение (1) сводится к уже изученному $\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \right)$, но из-за неоднозначности обратной функции $u(V)$ не удается связать в общем случае характеристики u и V .

В данной работе рассматриваются свойства простых волн, в основном их спектр, в нелинейной среде при $V = \alpha u^n$ (α и n — положительные константы). Сначала кратко обсуждается пространственно-временная эволюция волны, приводящая к ее опрокидыванию (неоднозначности функции u). Затем исследуется изменение спектра монохроматической волны и гауссова импульса. Анализируется также распространение узкополосных шумов с амплитудной и фазовой модуляцией.

ЭВОЛЮЦИЯ ПРОСТОЙ ВОЛНЫ

Прежде чем рассматривать спектры, приведем некоторые простые, но ранее не обсуждавшиеся результаты, относящиеся к скорости нелинейных искажений волны при различных $V(u)$. Будем исходить из решения уравнения (1), определяющего простую волну,

* Уравнение (1) можно записать в системе координат, движущейся со скоростью линейных возмущений, так что $V(u)$ есть поправка к скорости, обусловленная нелинейностью.

$$u(x, t) = U[x - V(u)t], \quad (2)$$

где функция $U(z)$ находится из начального условия $u(x, 0) = U(x)$. Профиль волны с течением времени деформируется: участки с большей скоростью обгоняют участки с меньшей.

Решение (2) справедливо на конечном интервале времени $t \leq t_*$, после чего в волне возникают разрывы (ударные фронты). Величина t_* является важной характеристикой нелинейного процесса. Время t_* вместе со значением поля в момент опрокидывания u_* находится из системы

$$t_* = \frac{\frac{dU^{-1}}{du}}{\frac{dV}{du}} \Bigg|_{u=u_*}, \quad \frac{\frac{d^2V}{du^2}}{\frac{dU^{-1}}{du}} = \frac{\frac{d^2U^{-1}}{du^2}}{\frac{dU^{-1}}{du}} \Bigg|_{u=u_*}, \quad (3)$$

где U^{-1} — функция, обратная U . В частности, для степенной нелинейности $V = \alpha u^n$ при начальном условии в виде положительного синусоидального импульса ($U = U_0 \sin k_0 x$, $0 \leq k_0 x \leq \pi$)^{*} получаем следующие значения u_* , V_* , t_* :

$$\frac{u_*}{U_0} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}, \quad \frac{V_*}{V_0} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n/2}, \quad \frac{t_*}{T_*} = n^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}. \quad (4)$$

Здесь $V_0 = \alpha U_0^n$, $T_* = (k_0 V_0)^{-1}$. При $n = 1$ отсюда следуют известные результаты [1]. Зависимости u_* , V_* и t_* от n приведены на рис. 1.

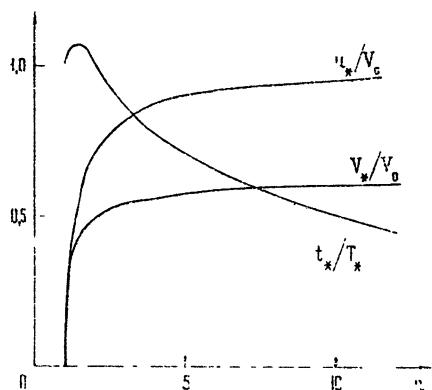


Рис. 1. Зависимость времени опрокидывания t_* , величины поля в точке с бесконечной производной u_* и скорости в данной точке V_* от показателя нелинейности.

Форма волны мало отличается от начальной даже при $t \sim t_*$, так как искажается, по существу, лишь одна вершина.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОСТЫХ ВОЛН

Пространственный спектр поля $u(x, t)$ определяется интегралом Фурье:

* Заметим, что при некоторых n нельзя задать функцию $U(x)$ в виде непрерывной синусоиды, иначе $V(u)$ на огибающих участках в волне не будет определена.

$$S(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} U[x - V(u)t] e^{-ikx} dx. \quad (5)$$

Функция $u(x)$ неявная, поэтому перейдем в (5) к интегрированию по характеристике $z = x - V(u)t$ при постоянном t . Используя (2), после некоторых преобразований приведем (5) к виду (ср. [4, 5])

$$S(k, t) = \frac{1}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{dU}{dz} \exp [-ik[z + tV(U(z))]]. \quad (6)$$

Формула (6) уже пригодна для нахождения спектра простых волн, так как подынтегральная функция записана в явном виде. Удобно, однако, привести выражение (6) к более наглядной форме.

Рассматривая S как «спектр» произведения функций $\frac{dU}{dz}$ и $\exp(-iktV)$, по известной теореме о спектрах можно написать

$$S(k, t) = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} hG(k-h, kt) S(h, 0) dh, \quad (7)$$

где

$$G(h, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp [-i[hz + \xi V(U)]]. \quad (8)$$

В формуле (7) hG имеет смысл функции Грина, которая из-за нелинейности зависит от входного сигнала. В такой форме (7) удобна, например, для анализа спектра волны, генерируемой монохроматическим источником.

Возможна и другая форма записи $S(k, t)$. Введем новую функцию

$$w(U, \xi) = \int_0^U \exp [-i\xi V(v)] dv. \quad (9)$$

Тогда (6) можно представить в виде

$$S(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w[U(z), kt] e^{-ikz} dz. \quad (10)$$

Отсюда следует, что спектр сигнала совпадает со «спектром» функции w (которая зависит от k), характеризующей нелинейность. Формула (10) может оказаться удобной для анализа шумовых сигналов в нелинейной среде, так как спектр определяется лишь через одну случайную функцию. В табл. 1 приведен вид w для некоторых зависимостей $V(u)$.

Аналогичные формулы могут быть получены для спектра произвольной функции $R(u)$:

$$S_R(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R[u(x, t)] e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} hG(k-h, kt) \times \quad (11)$$

$$\times S_R(h, 0) dh = \int_{-\infty}^{\infty} w_R[U(z), kt] e^{-ikz} dz,$$

где

$$w_R[U, \xi] = \int_0^{R(U)} \exp [-i\xi V(v)] dR(v). \quad (12)$$

Таблица 1

$V(u)$	$w(U, \xi)$
c	$u \exp(-ic\xi)$
αu^n	$n^{-1} (i\xi\alpha)^{-1/n} \gamma [n^{-1}, i\xi V(u)]$
αu	$(-i\xi\alpha)^{-1} \exp(-i\xi V)$
αu^2	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\xi\alpha}} \Phi(\sqrt{i\xi} V)$
$\alpha u + \beta u^2$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\xi\beta}} \exp(i\xi\alpha^2/\beta) \Phi[\sqrt{i\xi\beta}(u+\alpha/2\beta)]$
$\alpha u^{1/m}$	$md^{(m-1)/d} (-i\xi\alpha)^{m-1} [(-i\xi\alpha)^{-1} \exp(-i\xi V)]$
$\alpha \sqrt{u}$	$2 [(i\xi\alpha)^{-2} - (i\xi\alpha)^{-1} \sqrt{u}] \exp(-i\xi V)$
$\alpha \sqrt{u} + \beta u$	$\sqrt{i\pi/\beta\xi^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \{\exp(i\xi\alpha^2/\beta) \Phi[\sqrt{i\xi\beta}(\sqrt{u} + \alpha/2\beta)]\}$

Здесь γ — неполная гамма-функция, Φ — интеграл вероятности, m — целое число

В частности, для спектра скорости $V(u)$, которая, как уже отмечалось, описывается уравнением простой волны с квадратичной нелинейностью, получаем известное выражение [4, 6]:

$$S_V(k, t) = \frac{i}{kt} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-iktV} - 1) dz. \quad (13)$$

Наконец, во многих задачах нужно знать спектр функционалов от простой волны. Легко показать, что спектр $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$ равен $(ik)^m S(k, t)$, спектр $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$ определяется $\frac{\partial^m S}{\partial t^m}$, а спектр m -го интеграла от u (по x) равен $S(k, t)/(ik)^m$.

ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим изменение спектра простой волны в среде со степенной нелинейностью ($V = \alpha u^n$, n — целое число). Предположим, что начальное возмущение имеет вид

$$u(x, 0) = U_0 \sin k_0 x. \quad (14)$$

Тогда из формулы (7) для спектра волны получаем

$$S(k, t) = \frac{U_0 k_0}{2ik} [G(k - k_0, kt) + G(k + k_0, kt)]. \quad (15)$$

Функцию G можно вычислить с помощью известной формулы из теории бесселевых функций [10]:

$$\exp \left\{ ix \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \binom{1}{i^m} J_m(x) e^{im\varphi}, \quad (16)$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя.

Опуская громоздкие выкладки, приведем выражение для спектра волны при нечетной зависимости $V(u)$ ($n = 2m - 1$, $m = 1, 2, \dots$):

$$S(k, t) = -i\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l(t) \delta(k - lk_0), \quad (17)$$

где

$$A_l = 2U_0 \prod_{r=0}^{m-2} \sum_{q_r=-\infty}^{\infty} J_{q_r}(l\tau_r) J_{l-q_r}(l\tau_{m-1}) \frac{l-q}{l^2 \tau_{m-1}},$$

$$q = \sum_{r=0}^{m-2} q_r (n - 2r), \quad \tau = V_0 k_0 t, \quad \tau_r = 2^{1-n} (-1)^{m+r} \tau \binom{n}{r},$$

$\binom{n}{r}$ — биномиальный коэффициент. В частности, при квадратичной нелинейности ($n = 1$) отсюда следует известное выражение для спектра волны Римана [1, 2]:

$$A_l^{(n=1)} = \frac{2U_0}{l\tau} J_l(l\tau) (-1)^{l+1}. \quad (18)$$

Используя (17), получаем ряд Фурье для поля $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l(t) \sin lk_0 x, \quad (19)$$

который является обобщением ряда Бесселя—Фубини, найденного ранее для волн в квадратичной среде, на случай произвольной нечетной степени нелинейности.

Итак, монохроматическая волна генерирует в нелинейной среде гармоники со всеми волновыми числами, кратными k_0 , причем по мере распространения искажается только амплитудный спектр. При $t \ll t$, в спектре существенны гармоники с $l \leq n$, их амплитуда пропорциональна t . Заметим, что величина, например, второй гармоники убывает с увеличением n , как $2^{1-n} \left(\frac{n}{m-1} \right)$, что подтверждает сделанный ранее вывод о слабом изменении формы волны при большом n . На спектральном языке это означает, что генерируется группа гармоник, являющихся разложением $V(u)$ в конечный ряд Фурье, и энергия распределяется между многими гармониками. Амплитуда следующей группы ($n+1 < l < 2n$) растет пропорционально t^2 и т. д.

Аналогично получаем формулу для спектра волны с четной характеристикой $V(u)$ ($n = 2m$, $m = 1, 2, \dots$):

$$S(k, t) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_l(t) \delta[k - (2l+1)k_0], \quad (20)$$

где

$$B_l = \frac{-iU_0}{2l+1} \exp\{i(2l+1)\tau_m\} \prod_{r=0}^{m-2} \sum_{q_r=-\infty}^{\infty} J_{q_r}[(2l+1)\tau_r] \times \\ \times \{J_{l-q}[(2l+1)\tau_{m-1}] + iJ_{l-q+1}[(2l+1)\tau_{m-1}]\}, \\ q = \sum_{r=0}^{m-2} q_r(m-r), \quad \tau_m = -2^{-n} \binom{n}{m} \tau, \\ \tau_r = (-1)^{m-r+1} \binom{n}{r} 2^{1-n} \tau \text{ при } r = 0, 1, \dots, m-1.$$

Аналитикой ряда Бесселя—Фубини для простой волны в этом случае является ряд

$$u(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \{P_l(t) \sin [(2l+1)(k_0 x - \tau_m)] + \\ + R_l(t) \cos [(2l+1)(k_0 x - \tau_m)]\}. \quad (21)$$

Здесь P и R — соответственно действительная и мнимая части функции $iB_l \exp[-i(2l+1)\tau_m]$.

Из (20) и (21) следует, что в среде с четной характеристикой генерируются только нечетные гармоники, пропорциональные $(2l+1)k_0$. В этом случае по мере распространения изменяется как амплитудный, так и фазовый спектр. (Как уже указывалось, если $n = 2m-1$, то фазовый спектр не меняется.) Амплитуды гармоник также уменьшаются с ростом n при малых временах, в частности, амплитуда третьей гармоники при больших n пропорциональна $n^{-1/2}$.

Рассмотрим более подробно простую волну в среде с кубической нелинейностью ($n = 2$). Ряд Бесселя—Фубини в этом случае имеет вид

$$u(x, t) = U_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left\{ J_l \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \tau \right] \sin [(2l+1) \times \right. \\ \times (k_0 x - \tau/2)] + J_{l+1} \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \tau \right] \cos [(2l+1)(k_0 x - \tau/2)] \right\}. \quad (22)$$

Амплитуда $2l+1$ -й гармоники выражается формулой

$$U_{2l+1}(\tau) = \frac{U_0}{2l+1} \sqrt{J_l^2 \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \tau \right] + J_{l+1}^2 \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \tau \right]}. \quad (23)$$

Зависимость U_m от τ представлена на рис. 2. Для $\tau \ll \frac{1}{2l+1}$ справедливы следующие приближенные формулы:

$$U_1/U_0 \approx 1 - \tau^2/8, \\ U_{2l+1}/U_0 \approx \frac{(2l+1)^{l-1}}{2^{2l} \sqrt{l!}} \tau^l \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (24)$$

В частности, $U_3/U_0 \approx \tau/4$, что, разумеется, легко может быть получено непосредственно из (1) в первом порядке теории возмущений. Заметим, что отличие в формулах (23) и (24) для амплитуд первой и третьей гармоник не превышает 25% на интервале $0 < \tau < 1$ ($\tau = 1$ соответ-

ствует образованию ударной волны). Это связано с упоминавшейся уже выше малостью искажения формы волны. Наоборот, для высших гармоник область применимости приближенных формул (24), соответствующих l — порядку теории возмущений, сужается, поскольку именно они дают основной вклад в образование ударной волны — процесса, не описываемого в рамках любого конечного порядка теории возмущений. Относительная величина амплитуд генерируемых гармоник остается малой для всех τ . Так, в момент опрокидывания простой волны $U_3/U_1 \approx 0,21$. Для сравнения приведем известные значения амплитуд высших гармоник в момент опрокидывания простой волны в среде с квадратичной нелинейностью [1] $U_2/U_1 \approx 0,4$, $U_3/U_1 \approx 0,23$.

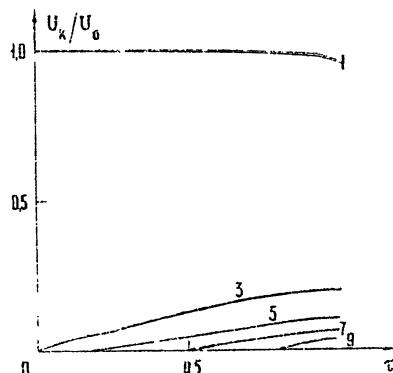


Рис. 2. Амплитудный спектр простой волны в среде с кубической нелинейностью

ИСКАЖЕНИЕ СПЕКТРА ГАУССОВА ИМПУЛЬСА

Для анализа распространения сигналов с широким спектром воспользуемся формулой (10). Разлагая неполную гамма-функцию в ряд, представим функцию ω в виде*

$$\omega(U, kt) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ikt\alpha)^m}{m! (nm+1)} U^{nm+1}. \quad (25)$$

Пусть в начальный момент времени задано возмущение в виде гауссова импульса

$$U(x) = U_0 \exp(-b^2 x^2). \quad (26)$$

Тогда, подставляя (25) и (26) в (10), получаем спектр:

$$S(k, t) = S(k, 0) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iktV_0)^m}{m! (nm+1)^{1/2}} \exp \frac{nmk^2}{(nm+1) 4b^2}. \quad (27)$$

Отсюда следует, что при любом n изменяется как амплитудный, так и фазовый спектр (для монохроматической волны фазовый спектр не менялся, если $n = 2l - 1$).

Для малых t , удерживая первые три слагаемых в (27), получаем амплитудный спектр:

$$|S(k, t)/S(k, 0)| \approx 1 + \frac{k^2 t^2 V_0^2}{(n+1)^3} \exp \frac{nk^2}{2b^2(n+1)} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{(n+1)^3}{(2n+1)^{3/2}} \exp \left[-\frac{n^2 k^3}{2b^2(n+1)(2n+1)} \right] \right\}. \quad (28)$$

При k , меньших k_* , где

$$k_*^2 = b^2 \frac{3(n+1)(2n+1)}{n^2} \ln \frac{(n+1)^2}{2n+1} \quad (29)$$

* В формулах этого пункта n — произвольное положительное число.

(k_* определяет эффективную ширину спектра $V(U)$), выражение, стоящее в фигурных скобках, отрицательно, а при $k > k_*$ — положительно; следовательно, энергия уходит из области малых волновых чисел вверх по спектру для любых n . С точностью до t^4 граница между этими областями остается неподвижной. Типичная картина изменения спектра импульса изображена на рис. 3.

Формула (28) применима лишь при условии, что

$$\frac{k^2 t^2 V_0^2}{(n+1)^3} \exp \frac{n k^2}{2 b^2 (n+1)} \ll 1. \quad (30)$$

Поскольку время образования ударной волны из гауссова импульса, как легко показать, равно

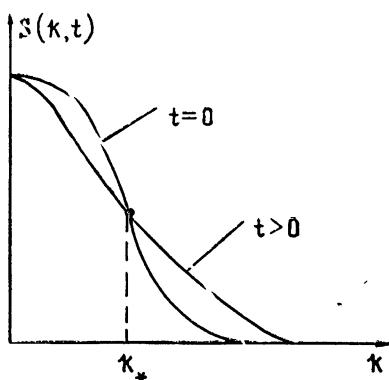


Рис. 3. Изменение спектра гауссова импульса.

то, используя (31), можно найти из (30) область волновых чисел $k \ll k_0$, для которой справедлива приближенная формула (28), описывающая спектр волны при $t \leq t_*$. В частности, если n достаточно велико, то $k_0 \gg k_*$, и, следовательно, как уже отмечалось, с помощью теории возмущений можно правильно описать спектр простой волны. Отметим, что при $n = 1$ удается найти спектр без разложения функции w в ряд [5].

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЗКОПОЛОСНЫХ ШУМОВ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНУЮ СРЕДУ

С помощью формул (7), (10) может быть рассмотрено распространение шумовых сигналов в нелинейной среде. Пусть, например, начальное возмущение задано в виде

$$u(x, 0) = U_0(x) \sin[k_0 x + \varphi(x)], \quad (32)$$

где U_0 и φ — случайные функции, мало меняющиеся на интервале k_0^{-1} . Тогда в любой момент времени поле описывается случайной функцией $u(x, t)$ (считаем, что n — целое число):

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} [A_p(x, t) \sin p [k_0 x + \varphi(x) - \tau_m(t-x)] + B_p(x, t) \cos p [k_0 x + \varphi(x) - \tau_m(t-x)]], \quad (33)$$

причем, если $n = 2m - 1$, то $\tau_m = 0$, $B_p = 0$, $p = l$, а если $n = 2m$, то $p = 2l + 1$, а A , B , τ_m отличны от нуля.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда флюктуирует только фаза волны $\varphi(x)$ и ее распределение является нормальным, причем флюктуации фазы ограничены. Тогда корреляционная функция легко находится и равна [11]

$$K(z, t) = \langle u(x, t) u(x+z, t) \rangle = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^2(t) + B_p^2(t)}{2} \times \times \exp \{-p^2 \langle \varphi^2 \rangle [1 - r(z)]\} \cos p k_0 z, \quad (34)$$

где $r(z) = \langle \varphi(x) \varphi(x+z) \rangle / \langle \varphi^2 \rangle$ — коэффициент корреляции фазы. Флуктуации фазы приводят к уменьшению интенсивностей спектральных амплитуд, пропорциональному $\exp(-p^2 \langle \varphi^2 \rangle)$, и появлению на фоне монохроматических линий «пьедестала», ширина которого (и амплитуда) возрастает с увеличением номера гармоники. Суммарная интенсивность волны, определяемая $K(0, t)$, не меняется из-за фазовых флуктуаций. Отметим, что формула (34) справедлива для нелинейной характеристики $V = a u^n$ при любом целом n .

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда при $t = 0$ имеются только амплитудные флуктуации. Как следует из (33), в случае $n = 2m$ с течением времени в волне возникают фазовые флуктуации за счет $\tau_m \{U_0(x)\}$. (Если $n = 2m - 1$, то $\tau_m = 0$ и фазовые флуктуации отсутствуют.) Корреляционная функция при этом имеет вид

$$K(z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} [K_p^{(1)}(z, t) \cos pk_0 z + K_p^{(2)}(z, t) \sin pk_0 z], \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} K_p^{(1)} &= \frac{1}{2} \langle [A_p(x) A_p(y) + B_p(x) B_p(y)] \cos p \Delta \tau \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \langle [A_p(x) B_p(y) - A_p(y) B_p(x)] \sin p \Delta \tau \rangle, \\ K_p^{(2)} &= \frac{1}{2} \langle [A_p(x) A_p(y) + B_p(x) B_p(y)] \sin p \Delta \tau \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle [A_p(x) B_p(y) - A_p(y) B_p(x)] \cos p \Delta \tau \rangle, \\ y &= x + z, \quad \Delta \tau = \tau_m(x, t) - \tau_m(y, t). \end{aligned}$$

По известной двумерной плотности вероятности амплитуды U_0 можно, в принципе, вычислить функции $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$. Так, при $n = 1$ (квадратичная нелинейность) корреляционная функция рассчитывалась в [5], причем для более общего случая амплитудно-фазовой модуляции. Если $n \neq 1$, то расчеты существенно усложняются. Ограничимся поэтому вычислением только интенсивности шума $K(0, t)^*$.

Для стационарного (по x) распределения $U_0(x)$ имеем

$$K_p^{(1)}(0, t) = \frac{1}{2} [\langle A_p^2 \rangle + \langle B_p^2 \rangle], \quad K_p^{(2)}(0, t) = 0. \quad (36)$$

В частности, для кубической нелинейности интенсивность шума $2l+1$ -й гармоники

$$\begin{aligned} K_{2l+1}^{(1)}(0, t) &= \frac{1}{2(2l+1)^2} \left\{ \left\langle U_0^2 J_l^2 \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \tau \right] \right\rangle + \left\langle U_0^2 J_{l+1}^2 \left[\left(l + \frac{1}{2}\right) \tau \right] \right\rangle \right\}, \quad \tau = \sigma k_0 U_0^2 t. \end{aligned} \quad (37)$$

В случае рэлесского распределения амплитуды входящие сюда средние вычисляются и равны

* Разумеется, полная интенсивность шума сохраняется, однако ее спектральное распределение меняется со временем.

$$\begin{aligned} \left\langle U_0^2 J_m^2 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \tau \right] \right\rangle &= \frac{8 \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(l + \frac{1}{2} \right) \alpha k_0 \sigma^4 t}{\pi (a^2 + 1/2)} \times \\ &\times \{(1 + a^{-2}) Q_{m-1/2}(1 + a^{-2}) - Q_{m+1/2}(1 + a^{-2})\}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $Q_n(x)$ — функция Лежандра второго рода [7], $a = 2\sqrt{2}\alpha\sigma^3 k_0 t$, σ^2 — дисперсия $u(x, 0)$ и $m = l, l+1$.

Полученные формулы достаточно громоздки. Вычислим поэтому интенсивность генерируемых гармоник на малых временах для произвольного целого n . Разлагая A и B в ряд, имеем

$$A, B \sim U_0 \tau^k \sim U_0^{1+nk}. \quad (39)$$

Здесь k одинаково для всех гармоник разложения скорости $V(u)$ в ряд Фурье. Вычисляя $K_p^{(1)}$, например, для релеевского распределения U_0 , получаем, что интенсивность шумовых гармоник возрастает по сравнению с регулярным сигналом в $(1+nk)!(4/\pi)^{1+nk}$ раз. (Интенсивность основного тона, наоборот, уменьшается при наличии флюктуаций.) Ранее этот результат был получен для квадратичной среды [5]. Эффективность генерации шумовых гармоник растет как с номером гармоники, так и с ростом n . Это объясняется тем, что процесс нелинейного взаимодействия происходит гораздо эффективнее в сильных полях, чем в слабых.

Для больших t нужно использовать более точные выражения для амплитуд генерируемых гармоник. Однако здесь необходимо учитывать следующее обстоятельство. Как уже ранее отмечалось, координата образования ударной волны зависит от амплитуды. Поэтому при t , не слишком малых, поле содержит как простые, так и ударные волны и решение (33) уже непригодно. Хотя, как легко показать, $\langle t \rangle = \infty$ для всех $n \geq 2$ (ср. [12]), это не означает, что статистический вес простых волн является превалирующим. Действительно, если найти отрезок времени t_0 , на котором опрокидываются волны с амплитудой, большей $\langle U_0 \rangle$ (т. е. при $t = t_0$ вероятность обнаружения ударных волн равна $1/2$), то можно видеть, что эта величина конечна [$t_0 \sim \sim (2 \ln 2)^{-n/2}$]. Следовательно, формулы типа (38) мало пригодны, если $t \sim t_0$, для описания волнового поля, так как вклад ударных волн становится определяющим*. С этим связана невозможность нахождения высокочастотной части спектра только из решения в виде простой волны (см. также [4-6, 13, 14]). Поэтому корректный анализ распространения шумовых сигналов должен включать в себя ударные волны [15, 16].

Автор благодарен А. В. Гапонову, Л. А. Островскому и В. Е. Фридману за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, Введение в нелинейную акустику, изд. Наука, М., 1966.
- D. T. Blackstock, J. Acoust. Soc. Amer., 39, № 6, 1019 (1966).
- F. H. Fenlon, J. Acoust. Soc. Amer., 58, № 6, 1752 (1973); 54, № 2, 465 (1973).
- В. П. Кузнецов, Акуст. ж., 15, № 4, 554 (1969); 16, № 1, 155 (1970).
- О. В. Руденко, А. С. Чиркин, Докл. АН СССР, 214, № 5, 1045 (1974); Акуст. ж., 20, 2, 297 (1974); Радиотехника и электроника, 19, 10, 2170 (1974); ЖЭТФ, 67, 11, 1903 (1974).

* Исключение составляет узкополосный шум со случайной фазой, для которого t_* не зависит от фазы и, следовательно, простые и ударные волны «разделены» во времени.

6. А. И. Саичев, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 17, № 7, 1025 (1974).
7. П. М. Колесников, Введение в нелинейную электродинамику, изд. Наука, и техника, Минск, 1971.
8. Д. Бленд, Нелинейная динамическая теория упругости, изд. Мир, М., 1972.
9. Н. Schamel, Plasma Phys., 14, 905 (1973); J. Plasma Phys., 9, № 3, 337 (1973).
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.
11. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
12. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Акуст. ж., 18, № 4, 590 (1972).
13. T. Tatsumi, S. Kida, J. Fl. Mech., 55, № 4, 659 (1972); T. Tatsumi, H. Tokunaga, J. Fl. Mech., 65, № 3, 581 (1974).
14. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Докл. АН СССР, 208, № 4, 794 (1973).
15. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, В сб. Акустические методы и средства исследования океана, ч. 1, 35 (1974).
16. О. В. Руденко, А. С. Чиркин, Докл. АН СССР, 225, № 3, 520 (1975).
17. R. Venkataraman, R. S. Rivlin, J. Appl. Math. and Phys., 24, 661 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 июля 1974 г.

A SPECTRAL ANALYSIS OF SIMPLE WAVES

E. N. Pelinovsky

Expressions are derived for the spectrum of a simple harmonic wave in a medium with arbitrary nonlinearity. The change in the spectrum of a monochromatic wave, Gaussian pulse and narrowband noise is considered for the case of power nonlinearity.

Примечание при корректуре. Как стало известно автору после направления данной статьи в печать, вопрос о спектре простой волны, генерируемой монохроматическим излучателем в кубической среде, обсуждался также в [17].

УДК 621.371.24 : 535.2

СИЛЬНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ СВЕТОВОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

И. Г. Якушкин

Получено асимптотическое решение уравнения для четвертого момента поля в турбулентной среде для области сильных флуктуаций интенсивности при учете начального распределения поля в пучке. Исследована зависимость флуктуаций интенсивности от параметров пучка и выведены условия осуществления режимов ближней и дальней зоны при распространении в турбулентной среде. Теоретически объяснена зависимость флуктуаций интенсивности от числа Френеля, наблюдавшаяся в эксперименте.

Флуктуации интенсивности светового поля, распространяющегося в турбулентной атмосфере, описываются уравнением для четвертого момента поля, полученным в марковском приближении [1]. Для характеристик плоской волны и усредненных по пространству характеристик ограниченных пучков можно получить уравнение с сокращенным числом переменных, асимптотическое решение которого в области насыщения флуктуаций интенсивности было дано в [2, 3].

В работах [2, 3] проведены вычисления дисперсии и функции корреляции флуктуаций интенсивности поля плоской волны, допускающие сравнение с результатами эксперимента [4, 5]. Однако не все предсказания теории находят качественное соответствие в данных измерений:

1) характерный масштаб функции корреляции интенсивности, полученный экспериментально, значительно меньше зависит от длины трассы распространения и уровня атмосферных флуктуаций, чем это следует из теории,

2) измерения на более длинных трассах приводят к большим значениям дисперсии флуктуаций интенсивности и к худшему согласию с теорией, несмотря на то, что в этом случае асимптотическое решение уравнения должно давать лучшее приближение к точному.

Как указано в [3], такое расхождение является следствием того, что при измерениях нарушилось соотношение $\frac{kr_0}{L} a \gg 1$, необходимое для осуществления режима плоской волны (здесь a — эффективный радиус пучка, r_0 — масштаб корреляции поля, L — длина трассы распространения). Величину L/kr_0 можно трактовать как среднеквадратичное отклонение луча, определяющее статистическую ширину пучка.

Для описания флуктуаций интенсивности при нарушении указанного условия необходимо решение полного уравнения для четвертого момента с учетом начального распределения поля в пучке. Такое решение и проводится ниже. Заметим, однако, что усредненные по пространству характеристики также представляют интерес, ввиду того, что при эксперименте затруднительно точное определение положения оптической оси, на что указывалось в [6].

Будем рассматривать распространение волны в турбулентной среде со спектром флюктуаций диэлектрической проницаемости $\Phi_e(x) = 0,033C_e^2x^{11/3} \exp(-x^3/x_m^2)$. Если $D(r)$ — структурная функция фазы плоской волны, соответствующая длине трассы L , то при $r \gg l = \frac{5,92}{x_m}$ (l — микромасштаб турбулентности) $D \approx 1,2\beta_0^2(kr^2/L)^{5/6}$, а при $r \ll l$ $D \approx 1,2\beta_0^2(kr^2/L)^{5/6}\sqrt[3]{r/0,6l}$. Здесь $\beta_0^2 = 0,31C_e^2k^{7/6}L^{11/6}$ — дисперсия флюктуаций интенсивности плоской волны, вычисленная в приближении МПВ.

Уравнение для четвертого момента поля [1] запишем в нормированных безразмерных координатах $\xi = \frac{x}{L}$, $p = \frac{r}{r_0}$, где масштаб в направлении распространения L равен длине трассы, а поперечный масштаб для векторов в плоскости $x = \text{const}$ определяется условием $D(r_0) = 1$ и имеет смысл радиуса когерентности поля. Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \zeta} = \frac{i}{2q} (\nabla_s \nabla_w + \nabla_{p_1} \nabla_{p_2}) \Gamma_4 - f \Gamma_4, \quad (1)$$

где

$$\Gamma_4 = \overline{U\left(\frac{s+p_1+p_2+w}{2}\right) U\left(\frac{s-p_1-p_2+w}{2}\right) U^*\left(\frac{s+p_1-p_2-w}{2}\right)} \times \\ \times \overline{U^*\left(\frac{s-p_1+p_2-w}{2}\right)},$$

$$q = \frac{kr_0^2}{2L}, \quad f = D(p_1+w) + D(p_1-w) + D(p_2+w) + D(p_2-w) - \\ - D(p_1+p_2) - D(p_1-p_2).$$

Будем искать решение (1), удовлетворяющее условию $\Gamma_4|_{\zeta=0} = \Gamma_4^0$, в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра $q = \frac{kr_0^2}{2L}$ в области, где $q \ll 1$, т. е. $\beta_0 \gg 1$ (при $r_0 = \sqrt{\frac{L}{k}} \frac{0,9}{\beta_0^{6/5}} \gg l$, $q \approx \frac{0,4}{\beta_0^{12/5}}$) и $L \gg L_0$ (L_0 — длина трассы, соответствующая насыщению флюктуаций интенсивности). При решении будем пользоваться методом работы [3] с некоторыми усовершенствованиями процедуры.

В соответствии с [3] решение (1) представим в виде

$$\Gamma_4(P, \zeta) = \int \Gamma_4^0(P') G(P, P', \zeta) dP', \quad (2)$$

где P — совокупность s, p_1, p_2, w , G — функция Грина уравнения (1), удовлетворяющая условию

$$G \rightarrow \frac{q^4}{\zeta - 0} \exp\left(i \frac{2q}{\zeta}\right) [(s-s')(w-w') + (p_1-p'_1)(p_2-p'_2)]. \quad (3)$$

Представление (2) выражает Γ_4 через суперпозицию четвертых моментов четырех сферических волн. Основной вклад в интеграл вносят такие комбинации источников, когда каждому из них соответствует сопряженный, находящийся на расстоянии, не превышающем радиус когерентности поля r_0 . Это означает, что при $p_i = |p_i| > p_j = |p_j|$

область, существенная для интегрирования, определяется значениями $\rho_j \sim w \sim 1$. Тогда, как следует из (1), переменные s, ρ_i характеризуются масштабом $1/q$.

Симметричный вид (2) по ρ_1, ρ_2 не дает возможности непосредственно использовать это различие масштабов, поэтому будем искать G_4 в виде $G_4 = \varphi_1(\rho_1, \rho_2) + \varphi_2(\rho_1, \rho_2)$, где φ удовлетворяет (1), соотношению $\varphi_1(\rho_1, \rho_2) = \varphi_2(\rho_2, \rho_1)$ и начальному условию $\varphi|_{\zeta=0} = \varphi^0$.

Для пучков с $\Omega = \frac{ka^2}{L} \geq 1$ зададим

$$\varphi_i^0 = \begin{cases} \Gamma_4^0 & \text{при } |\rho_i| > |\rho_j| \\ 0 & \text{при } |\rho_i| < |\rho_j| \end{cases},$$

для пучков с $\Omega = \frac{ka^2}{L} \leq 1$, вводя $\tilde{\psi}(p_1, p_2) = \int \psi(\rho_1, \rho_2) \exp [i(p_1 \rho_1 + p_2 \rho_2)] d\rho_1 d\rho_2$,

$$\tilde{\varphi}_i^0 = \begin{cases} \tilde{\Gamma}_4^0 & \text{при } |p_i| < |p_j| \\ 0 & \text{при } |p_i| > |p_j| \end{cases}.$$

Для φ_i также справедливо (2). Отсюда, используя приближенную функцию Грина G_i^0 , удовлетворяющую (3) и дающую после подстановки в (1) невязку FG_i^0 , аналогично [3] получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_i(P, \zeta) = & \int \varphi_i^0(P') G_i^0(P, P', \zeta) dP' - \\ & - \int_0^\zeta \int FG_i^0(P, P', \zeta - \zeta') \varphi_i(P', \zeta') dP' d\zeta'. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве G_i^0 естественно выбрать асимптотическое представление G при $\rho_i/\rho_j \rightarrow \infty$. В этом случае $f \approx D(v_1) + D(v_2)$, где $v_1 = \rho_j + w$, $v_2 = \rho_j - w$ и G_i^0 имеет вид

$$\begin{aligned} G_i^0 = & \frac{q^4}{\pi^4 \zeta^4} \exp \left\{ i \frac{2q}{\zeta} [(s - s')(w - w') + (\rho_1 - \rho'_1)(\rho_2 - \rho'_2)] - \right. \\ & \left. - \zeta [D_s(v_1, v'_1) + D_s(v_2, v'_2)] \right\}, \end{aligned}$$

где $D_s(v, v') = \int_0^1 D(vt + v'(1-t)) dt$ — структурная функция фазы сферической волны. После подстановки G_i^0 в (1) получаем $FG_i^0 = f_i G_i^0$, где $f_i = D(\rho_i + w) + D(\rho_i - w) - D(\rho_i + \rho_j) - D(\rho_i - \rho_j)$.

Подставляя найденные выражения в (4), можно заметить, что комбинация структурных функций f , входящая в (1), распадается на две группы членов. Для первой группы, $D(v_1) + D(v_2)$, существенно поведение при $v_{1,2} \sim 1$ и не столь важен вид зависимости $D(v)$ при сохранении масштаба. Для этой группы примем $D = v^2$, что вполне справедливо при $r_0 \ll l$ и является допустимой удобной аппроксимацией при $r_0 \geq l$. Вторая группа членов, f_i , определяющая величину невязки, характеризуется поведением при $\rho_i \gg 1$ и для нее $D = \sigma^{5/3}$, где $\sigma = 1,28_0^2 \left(\frac{kr_0^2}{L} \right)^{5/6}$ (при $r_0 \gg l$, $\sigma = 1$). Тогда при $\rho_i \gg \rho_j \sim w \sim 1$ имеем

$$f_i \approx f_i^0 = \frac{\sigma}{\rho_i^{1/3}} \left[\frac{5}{3} (\rho_i^2 - w^2) - \frac{5}{9} \frac{(\rho_i \rho_1)^2 - (\rho_i w)^2}{\rho_i^2} \right].$$

Из (4) можно получить разложение решения как при $q \gg 1$, $L \ll L_0$, приводящее к тем же результатам, что и МПВ, так и при $q \ll 1$, $L \gg L_0$. Для последнего случая, делая замену $qs = \eta_1$; $q \rho_i = \eta_2$ и выписывая только главные по q члены, получаем из (4)

$$\begin{aligned} \varphi_i(P_1, \zeta) &= \int \Gamma_4^0(P'_1) G_i^0(P_1, P'_1, \zeta) dP'_1 - q^{1/3} \int_0^\zeta \int f_i^0(P'_1) \times \\ &\quad \times G_i^0(P_1, P'_1, \zeta - \zeta') \varphi_i(P'_1, \zeta') dP'_1 d\zeta' + O(q^{1/3}d), \end{aligned} \quad (5)$$

где $1 \gg d \gg q^{5/11} \sim L_0/L$, P_1 — совокупность векторов ρ_i , w , η_1 , η_2 . (Замена φ_i^0 на Γ_4^0 приводит к отбрасыванию членов $O(q^2)$.)

Решение (5) можно искать в виде $\varphi_i = \varphi_{i0} + q^{1/3}\varphi_{i1} + q^{2/3}\varphi_{i2} + O(q^{1/3}d)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_{i0}(P, \zeta) &= \int \Gamma_4^0(P') G_i^0(P, P', \zeta) dP' = \\ &= \Gamma_2 \left(\frac{s + \rho_i}{2}, \rho_j + w \right) \Gamma_2 \left(\frac{s - \rho_i}{2}, w - \rho_j \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\Gamma_2(s, \rho) = U \left(s + \frac{\rho}{2} \right) U^* \left(s - \frac{\rho}{2} \right)$ — функция когерентности поля, имеющая вид [7]

$$\begin{aligned} \Gamma_2(s, \rho, \zeta) &= \frac{q^2}{\pi^2 \zeta^2} \int \Gamma_2^0(s', \rho') \exp \left[i \frac{2q}{\zeta} (s - s') (\rho - \rho') - \right. \\ &\quad \left. - \zeta D_s(\rho, \rho') \right] ds' d\rho', \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Gamma_2^0 = \Gamma_2|_{\zeta=0}, \quad \Gamma_2^0 \left(\frac{s + \rho_i}{2}, \rho_j + w \right) \Gamma_2^0 \left(\frac{s - \rho_i}{2}, w - \rho_j \right) = \Gamma_4^0(s, \rho_i, \rho_j, w).$$

Из выражения (6) получим для Γ_4 нулевое приближение в виде, который можно вывести и как следствие нормального распределения поля при $\bar{U} = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i0} &= \varphi_{i0} + \varphi_{i20} = \Gamma_2 \left(\frac{s + \rho_1}{2}, \rho_2 + w \right) \Gamma_2 \left(\frac{s - \rho_1}{2}, w - \rho_2 \right) + \\ &\quad + \Gamma_2 \left(\frac{s + \rho_2}{2}, \rho_1 + w \right) \Gamma_2 \left(\frac{s - \rho_2}{2}, w - \rho_1 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Для функции корреляции и дисперсии флуктуаций интенсивности имеем в этом приближении

$$\begin{aligned} b_i(s, \rho) &= \frac{\Gamma_4(s, \rho, 0, 0) - \Gamma_2 \left(\frac{s + \rho}{2}, 0 \right) \Gamma_2 \left(\frac{s - \rho}{2}, 0 \right)}{\cdot \Gamma_4(s, 0, 0, 0) - \Gamma_2^2 \left(\frac{s}{2}, 0 \right)} = \frac{\left| \Gamma_2 \left(\frac{s}{2}, \rho \right) \right|^2}{\Gamma_2^2 \left(\frac{s}{2}, 0 \right)}, \\ &\quad \beta^2 = b_i(s, 0) = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть начальное распределение поля в пучке имеет вид $U_0 = \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2} + i\frac{kr^2}{F_2}\right)$. Тогда $\Gamma_2^0\left(\frac{s}{2}, \rho\right) = \exp\left(-\frac{s^2 + \rho^2}{2a_1^2} + i\frac{q}{F_1}s\rho\right)$,

где $a_1 = \frac{a}{r_0}$, $F_1 = \frac{F}{L}$, и при $D = \rho^2$ получаем из (7)

$$\Gamma_2\left(\frac{s}{2}, \rho, \zeta\right) = \frac{q\Omega}{\alpha_0\zeta^2} \exp\left(-\frac{q^2s^2}{2\alpha_0\zeta^2} - \frac{\alpha_1\rho^2}{2\alpha_0} + i\frac{\alpha_2qs\rho}{\alpha_0\zeta}\right), \quad (10)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{2}{3}\zeta + \frac{q}{\Omega}\left[1 + \left(\frac{\Omega}{\zeta} + \Omega_F\right)^2\right],$$

$$\alpha_1 = \frac{\zeta^2}{3} + \frac{q^2}{\zeta^2} + \frac{2q\zeta}{\Omega}\left(\frac{\Omega^2}{\zeta^2} + \frac{\Omega\Omega_F}{\zeta} + \frac{\Omega_F^2}{3} + \frac{1}{3}\right),$$

$$\alpha_2 = \zeta + \frac{q\zeta}{\Omega}\left(\frac{\Omega\Omega_F}{\zeta} + \Omega_F^2 + \frac{1}{\zeta}\right), \quad \Omega = \frac{ka^2}{L}, \quad \Omega_F = \frac{ka^2}{F}, \quad \frac{\Omega}{2q} = \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 = D(a).$$

Подставляя (10) в (9), при $\zeta = 1$ находим $b_1(\rho) = \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\rho^2\right)$.

Масштаб функции корреляции интенсивности при $q \ll 1$ равен $\tilde{r}_0/\sqrt{2}$, где \tilde{r}_0 — масштаб когерентности поля пучка. Для плоской волны $r_0 = r_0$, а для ограниченного пучка

$$\tilde{r}_0 = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{\alpha_1}} r_0 = \left\{ \frac{2\frac{q}{\Omega}[(\Omega + \Omega_F)^2 + 1] + 4/3}{2\frac{q}{\Omega}\left[(\Omega^2 + \Omega\Omega_F) + \frac{1}{3}(1 + \Omega_F^2)\right] + 1/3} \right\}^{1/2} r_0. \quad (11)$$

Как видно из (11), в области сильных флуктуаций режим плоской волны осуществляется только при $q\Omega \sim \left(\frac{kar_0}{L}\right)^2 \gg 1$, $L/F \ll 1$, и тогда

$\tilde{r}_0 = r_0$. При $\frac{\Omega}{q} \sim D(a) \rightarrow 0$ в режиме сферической волны $\tilde{r}_0 = \sqrt{3}r_0$, а при $q \rightarrow 0$ пучок переходит в режим статистической дальней зоны, где независимо от начальных условий $\tilde{r}_0 = 2r_0$. Таким образом, за счет перехода в другой режим корреляционный масштаб интенсивности ограниченного пучка при $q \rightarrow 0$ убывает значительно медленнее, чем в случае плоской волны, что качественно объясняет его слабую зависимость от условий эксперимента в [4].

Для следующего приближения из (5) и (6) при $\zeta = 1$, $\sigma = 1$ получим

$$\varphi_{ii}(P) = \int_0^1 \int f_i(P') G_i^0(P, P', 1 - \zeta') \Gamma_2\left(\frac{s' + \rho'_i}{2}, \rho'_j + w'; \zeta'\right) \times \times \Gamma_2\left(\frac{s' - \rho'_i}{2}, w' - \rho'_j; \zeta'\right) dP' d\zeta'. \quad (12)$$

При $\rho_1 = \rho_2 = w = 0$, проводя вычисления, имеем

$$\varphi_H(s, 0, 0, 0) = \frac{q^2 \Omega^2}{\alpha_0^2} \exp \left[-\frac{q^2 s^2}{\alpha_0} \frac{5\Gamma(11/6)}{9\alpha_0^{5/6}} \left(\int_0^1 \frac{p_1^2(\zeta)}{p_2^{7/6}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^{1/3}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3s^2 q^2}{\alpha_0} \int_0^1 \frac{\zeta^{5/3}}{p_2^{1/6}(\zeta)} d\zeta \right) \right], \quad (13)$$

где

$$p_1(\zeta) = \frac{2}{3} (1-\zeta)^3 (1+\zeta/2) + \frac{q}{\Omega} [1 - \zeta + \Omega^2 + (2-\zeta) \Omega \Omega_F + (1-\zeta) \Omega_F^2],$$

$$p_2(\zeta) = \frac{1+\zeta}{3} (1-\zeta)^3 + \frac{2q}{\Omega} \left[\frac{(1-\zeta)^2}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\zeta\right) \Omega^2 + \frac{2(1-\zeta)}{3} \Omega \Omega_F + \right. \\ \left. + \frac{(1-\zeta)\Omega_F^2}{3} \right],$$

$$\alpha_0 = \frac{2}{3} + \frac{q}{\Omega} [1 + (\Omega + \Omega_F)^2].$$

С учетом (9) и (13) дисперсия флюктуаций интенсивности равна

$$\beta^2(s) = 1 + q^{1/3} \frac{10\Gamma(11/6)}{9\alpha_0^{5/6}} \left[\int_0^1 \frac{p_1^2(\zeta)}{p_2^{7/6}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^{1/3}} + \frac{3s^2 q^2}{\alpha_0} \int_0^1 \frac{\zeta^{5/3}}{p_2^{1/6}(\zeta)} d\zeta \right] + O(q^{2/3}) \quad (14)$$

$$(s^2 = r^2/r_0^2).$$

Из (14) следует, что β^2 зависит от параметров пучка и от расположения точки наблюдения относительно оптической оси. На рост β^2 при удалении от оси указывалось на основании численного анализа приближенной модели в [6]. Как упоминалось, можно рассматривать и усредненный по пространству четвертый момент поля $\tilde{\Gamma}_4 = \int \Gamma_4(s, \rho_1, \rho_2, 0) ds$, удовлетворяющий сокращенному уравнению. Решение этого уравнения приводит к усредненной по пространству дисперсии флюктуаций интенсивности $\tilde{\beta}^2$, которую можно получить и непосредственно интегрируя по пространству выражения (6) и (13). Величина $\tilde{\beta}^2$ имеет также вид (14), если в этом выражении положить $s^2 = \alpha_0/q^2$:

$$\tilde{\beta}^2 = 1 + q^{1/3} \frac{10\Gamma(11/6)}{9\alpha_0^{5/6}} \int_0^1 \frac{p_1^2(\zeta) + 3p_2(\zeta)\zeta^2}{p_2^{7/6}(\zeta)\zeta^{1/3}} d\zeta. \quad (14a)$$

Как видно из выражений (11) и (14), радиус корреляции и дисперсия флюктуаций интенсивности зависят от параметров $q = \frac{kr_0^2}{2L}$, $\Omega = \frac{ka^2}{L}$, $\Omega_F = \frac{ka^2}{F}$ (или, иначе говоря, от $2q \Omega = \left(\frac{kar_0}{L}\right)^2$, $\frac{\Omega}{2q} = D(a)$, L/F), определяющих характерные режимы распространения пучков: 1) режим статистически ближней зоны при $(\Omega + \Omega_F)^2 + 1 \gg \frac{\Omega}{2q} = D(a)$, при кото-

ром могут реализовываться а) режим плоской волны, если $\Omega^2 \gg 1 + \Omega_F^2$, б) режим сферической волны, если $\Omega^2 \ll 1 + \Omega_F^2$; 2) режим статистически дальней зоны при $(\Omega + \Omega_F)^2 + 1 \ll \Omega/2q$, где уже не сказывается влияние начальных условий.

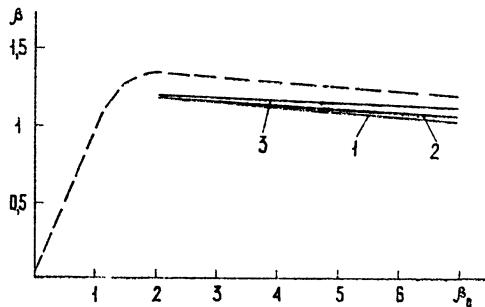


Рис. 1.

Рис. 1. — — — эксперимент, $\Omega = 130$; — — расчет:
1 — $\beta(\beta_0)$, $\Omega \rightarrow \infty$; 2 — $\beta(\beta_0)$, $\Omega = 130$; 3 — $\tilde{\beta}(\beta_0)$, $\Omega = 130$.

Рис. 2. — — — эксперимент, $\Omega = 26$; — — расчет:
1 — $\beta(\beta_0)$, $\Omega \rightarrow \infty$; 2 — $\beta(\beta_0)$, $\Omega = 26$; 3 — $\tilde{\beta}(\beta_0)$, $\Omega = 26$.

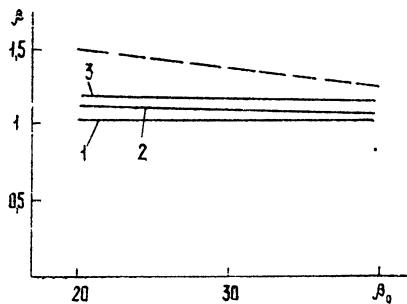


Рис. 2.

На рис. 1, 2 приведены результаты расчета зависимости $\beta(\beta_0)$ (напомним, что при достаточно малом l $q = \frac{0,4}{\beta_0^{12/5}}$) а) для плоской волны ($\Omega \rightarrow \infty$) и б) для коллимированного пучка ($F \rightarrow \infty$) при $\Omega = 130$ (рис. 1) и $\Omega = 26$ (рис. 2) для точки наблюдения на оптической оси, $s = 0$, а также величина $\tilde{\beta}(\beta_0)$, рассчитанная по (14 а) для пучков с теми же параметрами. Там же приведены экспериментальные кривые, описанные в [4] и полученные для коллимированных пучков с теми же значениями $\Omega = 130$; 26. На рис. 3 показана зависимость $\tilde{\beta}(\Omega)$, рассчитанная по (14 а) для коллимированного пучка при $q = 0,05$ в сравнении с экспериментальной кривой из [5], полученной при $\beta_0 > 2$.

Сравнивая теоретические и экспериментальные результаты, можно сделать следующие выводы: 1) расчет дисперсии и масштаба флюктуаций интенсивности с учетом ограниченности светового пучка позволяет качественно объяснить основные экспериментально наблюдаемые зависимости этих характеристик от разных параметров. Рост флюктуаций интенсивности и слабое изменение корреляционного масштаба при увеличении длины трассы связаны с изменением числа Френеля пучка и переходом в режим статистически дальней зоны; 2) количественные рас-

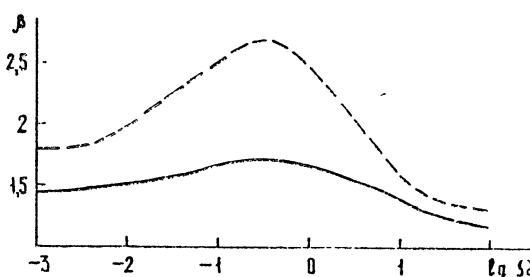


Рис. 3. — — — эксперимент, $\beta_0 > 2$; — — расчет: $\tilde{\beta}(\Omega)$, $q = 0,05$.

хождения эксперимента и теории частично объясняются недостаточностью двух членов асимптотики при данных параметрах; 3) усред-

ненная величина $\tilde{\beta}$ лучше согласуется с измерениями, чем β , вычисленная при $s = 0$, что, возможно, объясняется блужданиями оптической оси при эксперименте.

Остановимся на физической картине, поясняющей полученное решение. Нулевое приближение (8) учитывает влияние малых неоднородностей, приводящих к уменьшению радиуса когерентности поля, т. е. размера статистической зоны Френеля, определяющей одну лучевую трубку. Из-за этого в области сильных флуктуаций при $L \gg L_0$ в точке наблюдения интерферирует много некогерентных лучей и $U = \sum_1^N U_n$. При вычислении G_4 при $N \gg 1$ можно пренебречь произ-

ведениеми вида $\overline{U_n^2 U_n^{*2}}$, а остальная сумма взаимных произведений интенсивностей обладает свойствами выражения (8). Масштаб функции корреляции интенсивности при этом определяется масштабом функции когерентности поля. Это противоречит эвристическому выводу работы [5] о равенстве масштаба интенсивности величине $l_0 = \sqrt{L_0/k}$, что справедливо, видимо, только при $L \sim L_0$. Для ограниченного пучка масштаб сильно зависит от режима ближней или дальней (в статистическом смысле) зоны и числа Френеля. На языке обобщенной геометрической оптики это объясняется тем, что в ближней зоне экстремальные траектории, определяющие размер зоны Френеля, зависят от начальных условий, а в дальней — от статистических свойств среды. Для широких коллимированных пучков граница между зонами определяется равенством исходной a и статистической L/kr_0 ширины пучка.

Величина L/kr_0 определяет также характерный размер больших неоднородностей, фокусирующих пучок в области сильных флуктуаций. Формула первого приближения (12) описывает однократное рассеяние поля на этих неоднородностях. Уровень флуктуаций интенсивности при этом зависит от радиуса когерентности поля (режима распространения), так как этим определяется число фокусируемых лучей.

В заключение отметим, что общее выражение (12) позволяет получить и следующее приближение для функции корреляции интенсивности и ее спектра. Это представляет интерес для сравнения с экспериментальными результатами, однако вычисления и последующий анализ достаточно сложны и должны быть проделаны особо.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1970.
2. К. С. Гочелашивили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, 66, № 4, 1237 (1974).
3. И. Г. Якушкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 11, 1660 (1975).
4. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов, Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флуктуациях интенсивности лазерного излучения, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1973.
5. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов, ЖЭТФ, 67, № 6, 2035 (1974).
6. В. А. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 252 (1974).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1068 (1974).

**STRONG FIELD INTENSITY FLUCTUATIONS OF A LIGHT BEAM IN
A TURBULENT ATMOSPHERE***I. G. Yakushkin*

An asymptotic solution of the equation is derived for the fourth moment of the field in a turbulent medium for the region of strong intensity fluctuations when the initial field distribution in the beam is taken into account. The dependence of the intensity fluctuations on the beam parameters is investigated. The conditions of realizing the near and far zone regimes when propagating in the turbulent medium are deduced. The dependence of the intensity fluctuations on Fresnel number observed in the experiment is theoretically explained.

УДК 621.373.826

**ИЗМЕРЕНИЯ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ
КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ**

A. С. Гурвич, В. Каи, Б. П. Потапов

Предлагается методика измерения четырехточечной функции пространственной когерентности Γ_4 комплексного поля световой волны. Приводятся результаты измерений Γ_4 для лазерного излучения в турбулентной среде. Результаты сравниваются с оценками, проведенными в предположении о нормальном законе распределения комплексной фазы и локально-изотропной турбулентности.

1. В теории оптической когерентности функция пространственной когерентности второго порядка имеет фундаментальное значение [1, 2] и является исчерпывающей характеристикой для гауссовых полей. При рассмотрении корреляций интенсивности полей, распределенных не по Гауссу, например, в задаче о сильных флуктуациях в турбулентной среде [3], необходимо знание моментов четвертого и более высоких порядков. В данной работе приводится описание экспериментальной установки, позволяющей измерять моменты четвертого порядка комплексного поля лазерного излучения, прошедшего турбулентную среду. Для проверки методики и аппаратуры были проведены измерения на модельной установке. Эти результаты интересны также тем, что подтверждают справедливость сделанных в [4] предположений о характере распределения поля.

Определим для четырех точек плоской волны, прошедшей через турбулентную среду (рис. 1), функции когерентности второго Γ_2 и четвертого Γ_4 порядков:

$$\Gamma_2(x, p_1, p_2) = \langle E(x, p_1) E^*(x, p_2) \rangle; \quad (1)$$

$$\Gamma_4^+(x, p_1, p_2, p_3, p_4) = \langle E(x, p_1) E^*(x, p_2) E(x, p_3) E^*(x, p_4) \rangle; \quad (2)$$

$$\Gamma_4^-(x, p_1, p_2, p_3, p_4) = \langle E(x, p_1) E^*(x, p_2) E^*(x, p_3) E(x, p_4) \rangle. \quad (3)$$

Поле E в фиксированной плоскости можно представить в виде

$$E = A \exp(i\omega t + i\varphi + i\alpha) = A_0 \exp(\chi + i\omega t + i\varphi + i\alpha), \quad (4)$$

где A и φ — флюктуирующие из-за турбулентности амплитуда и фаза ($\langle \varphi \rangle = 0$), ω — частота света, A_0 — невозмущенная амплитуда, $\chi = \ln A/A_0$, α — постоянный случайный набег фазы. Угловые скобки в (1) — (3) и далее означают статистическое усреднение. Считая, что выполняются условия эргодичности, статистическое и временное усреднения будем считать эквивалентными.

Для турбулентных сред наибольший интерес представляют значения Γ_4 для тех случаев, когда точки расположены в виде параллелограмма. В локально-изотропной среде значения Γ_4 будут определяться только размерами сторон и диагоналей параллелограмма.

Одна из основных трудностей при создании установки заключалась в отделении флюктуирующих разностей фаз от случайного сдвига α . Блок-схема установки, в которой осуществляется такое разделение, показана на рис. 1. Коллимированное излучение He-Ne лазера с длиной волны $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ (1, 2) проходит через турбулизованный слой 3 толщиной $a = 1 \text{ м}$, который создается в вертикальной трубе прямоугольного сечения с нагревательными спиральями. Принудитель-

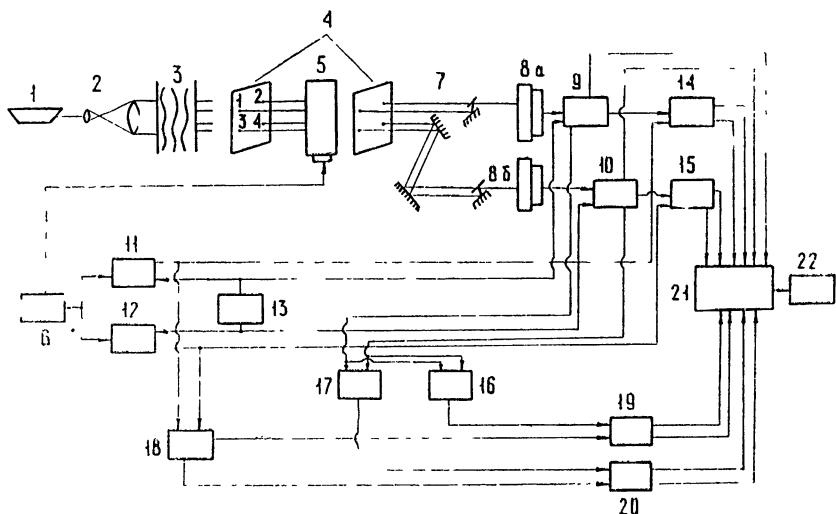


Рис. 1. Блок-схема эксперимента.

ная тяга обеспечивается вентилятором. Режим такого турбулизованного слоя можно задавать изменением мощности, выделяемой нагревательными спиральями, и производительностью вентилятора. Прошедшая через этот слой волна падает на пластину 4 с четырьмя отверстиями. Световые пучки, вырезанные этими отверстиями, расщепляются модулятором Дебая — Сирса 5, с бегущей ультразвуковой волной [5]. Пьезокварц модулятора возбуждается на частоте 30450 кГц генератором 6. Пройдя через систему из полупрозрачных и глухих зеркал 7, первый дифракционный максимум одного пучка и нулевой другого интерферируют на фотокатоде фотоумножителя ФЭУ1 8а и соответственно для второй пары отверстий — на ФЭУ2 8б.

Компоненты тока ФЭУ с частотой биений, равной частоте ультразвука (30450 кГц), подаются на приемники, где они усиливаются и супергетеродинированием понижаются их частоты — до 82 кГц в одном канале (9) и до 50 кГц — в другом (10). Напряжение генератора ультразвука 6 понижается по частоте приемниками опорного канала 11, 12. Сигнальные и опорные приемники имеют общие гетеродины 13. С выходов приемников 9 и 10 сигналы поступают на синхронные детекторы с усредняющими интеграторами 14 и 15 для измерения Γ_2' и Γ_2'' , и, кроме того, на смесители 16 и 17, выделяющие разностную 32 кГц и суммарную 132 кГц частоты соответственно. В смесителе 18 выделяются соответствующие опорные напряжения для синхронного детектирования в блоках 19 и 20. Выходные напряжения всех синхронных детекторов и значения усредненных амплитуд с выходов 8 и 9 поступают на коммутатор 21, который поочередно с шагом 0,5 с подает эти данные на вольтметр с цифровой печатью 22.

С выходов блоков 10, 11 после обработки получаем два независимых измерения Γ_2 , а с блоков 19, 20 — Γ_4^- и Γ_4^+ .

2. Рассмотрим сначала преобразования сигналов для получения Γ_2 . После модулятора Дебая—Сирса поле первого дифракционного максимума, отклоненного навстречу направлению распространения ультразвуковой волны (для отверстия 1) имеет вид

$$E_1 \sim A_1 \exp [i(\omega - \Omega)t + i\varphi_1 + i\alpha_1],$$

а поле нулевого максимума (для отверстия 2)—

$$E_0 \sim A_2 \exp (i\omega t + i\varphi_2 + i\alpha_2),$$

где Ω — частота ультразвука, α_1, α_2 — соответствующие набеги фаз.

Для составляющей тока ФЭУ1 с частотой Ω получим

$$i_{\text{ФЭУ1}} = \frac{1}{2} (E_0 + E_1)(E_0 + E_1)^* \sim$$

$$\sim A_1 A_2 \exp [i\Omega t - i(\varphi_1 - \varphi_2) - i(\alpha_1 - \alpha_2)] + \text{к.с.}$$

Аналогично для тока ФЭУ2 (отверстия 3 и 4):

$$i_{\text{ФЭУ2}} \sim A_3 A_4 \exp [i\Omega t - i(\varphi_3 - \varphi_4) - i(\alpha_3 - \alpha_4)] + \text{к.с.}$$

После приемников выражения для сигналов сохраняют тот же вид, только вносятся дополнительные постоянные аппаратурные сдвиги фаз, а частоты понижены до $\Omega_1 = 82 \text{ кГц}$ и $\Omega_2 = 50 \text{ кГц}$. Для выделения случайных сдвигов фаз $\alpha_{12} \equiv \alpha_1 - \alpha_2$ и $\alpha_{34} \equiv \alpha_3 - \alpha_4$ в синхронных детекторах используются по два опорных напряжения единичной амплитуды, сдвинутых по фазе на $\pi/2$. После синхронного детектирования с синусным опорным напряжением и усреднения получим для канала 82 кГц

$$(U_{c,1})' \sim \Gamma_{2s}' = \langle A_1 A_2 \sin [(\varphi_1 - \varphi_2) + \alpha_{12}] \rangle = \\ = \langle A_1 A_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle \cos \alpha_{12} + \langle A_1 A_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle \sin \alpha_{12}.$$

С косинусным опорным напряжением

$$(U_{c,1})' \sim \Gamma_{2c}' = \langle A_1 A_2 \cos [(\varphi_1 - \varphi_2) + \alpha_{12}] \rangle = \\ = \langle A_1 A_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle \cos \alpha_{12} - \langle A_1 A_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \rangle \sin \alpha_{12}.$$

Следовательно, по каналу 82 кГц для любых α_{12}

$$[(\Gamma_{2s}')^2 + (\Gamma_{2c}')^2]^{1/2} = |\langle A_1 A_2 \exp [i(\varphi_1 - \varphi_2)] \rangle| = |\Gamma_2'|,$$

аналогичное соотношение имеет место для канала 50 кГц.

Рассмотрим теперь преобразования сигналов для получения Γ_4^- и Γ_4^+ . После смесителя и фильтрации разностной частоты 32 кГц получим

$U_{32 \text{ кГц}} \sim A_1 A_2 A_3 A_4 \exp [i\Omega_3 t - i(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) - i(\alpha_{12} - \alpha_{34})] + \text{к.с.}$,
где $\Omega_3 = 32 \text{ кГц}$. Также используя синусное и косинусное опорное напряжения, после синхронного детектирования и усреднения получим для составляющих Γ_4^-

$$\Gamma_{4s}^- = \langle A_1 A_2 A_3 A_3 \sin [(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) + (\alpha_{12} - \alpha_{34})] \rangle,$$

$$\Gamma_{4c}^- = \langle A_1 A_2 A_3 A_4 \cos [(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) + (\alpha_{12} - \alpha_{34})] \rangle,$$

а модуль Γ_4^- равен

$$[(\Gamma_{4s}^-)^2 + (\Gamma_{4c}^-)^2]^{1/2} = |\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \exp [i(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4)] \rangle| = |\Gamma_4^-|.$$

Аналогично получим для Γ_4^+ . Сигнал с выхода смесителя суммарной частоты 132 кГц имеет вид

$U_{132 \text{ кГц}} \sim A_1 A_2 A_3 A_4 \exp [i \Omega_4 t - i(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4) - i(\alpha_{12} + \alpha_{34})] + \text{к. с.},$ где $\Omega_4 = 132 \text{ кГц}$. Следовательно,

$$[(\Gamma_{4s}^+)^2 + (\Gamma_{4c}^+)^2]^{1/2} = |\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \exp [i(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4)] \rangle| = |\Gamma_4^+|.$$

Помимо модулей можно измерять значения аргументов Γ_4^\pm . Считая, что $\operatorname{Im} \Gamma_2 = 0$ (это следует из изотропности), получим

$$\alpha_{12} = \operatorname{arctg} \frac{\Gamma'_{2s}}{\Gamma'_{2c}} - \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn} \Gamma'_{2c} - 1),$$

$$\alpha_{34} = \operatorname{arctg} \frac{\Gamma''_{2s}}{\Gamma''_{2c}} - \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn} \Gamma''_{2c} - 1).$$

Найденные таким образом углы α_{12} и α_{34} определяются с точностью до π , так как неизвестно, какой знак имеют значения Γ_2 . Однако в определение $\arg \Gamma_4^\pm$ входит сумма или разность углов $\alpha_{12} \pm \alpha_{34}$, и эта неопределенность исчезает. Минимальная часть равна

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Gamma_4^\pm &= \langle A_1 A_2 A_3 A_4 \sin (\varphi_1 - \varphi_2 \pm \varphi_3 \mp \varphi_4) \rangle \sim \\ &\sim \Gamma_{4s}^\pm \cos (\alpha_{12} \pm \alpha_{34}) - \Gamma_{4c}^\pm \sin (\alpha_{12} \pm \alpha_{34}), \end{aligned}$$

а аргумент —

$$\arg \Gamma_4^\pm = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \Gamma_4^\pm}{[|\Gamma_4^\pm|^2 - (\operatorname{Im} \Gamma_4^\pm)^2]^{1/2}}.$$

3. Оценки ожидаемых величин можно получить, используя первое приближение МПВ и предположение о логарифмической нормальности поля [4, 6, 7]. Используя известную формулу для случайной величины z , распределенной по Гауссу,

$$\langle \exp z \rangle = \exp \left(\frac{1}{2} \sigma_z^2 + \bar{z} \right),$$

и представляя поле в виде (4), можно получить для расположения точек в виде ромба

$$\frac{\Gamma_2}{\langle A_1 A_2 \rangle} = \exp \left[-\frac{1}{2} D_\varphi(\rho) \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\Gamma_4^+}{\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [D_\varphi(\rho') + D_\varphi(\rho'')] \right\}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_4^-}{\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle} &= \exp \left\{ -2 D_\varphi(\rho) + \frac{1}{2} [D_\varphi(\rho') + D_\varphi(\rho'')] + \right. \\ &\quad \left. + 2i [B_{\chi\varphi}(\rho') - B_{\chi\varphi}(\rho'')] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где ρ — сторона, а $\rho' = |\rho_1 - \rho_4|$, $\rho'' = |\rho_2 - \rho_3|$ — диагонали ромба; $B_{\chi\varphi}(\rho)$ — корреляционная функция флюктуаций логарифма амплитуды и фазы; $D_\varphi(\rho)$ — структурная функция фазы, которая выбрана в виде

$$D_{\varphi}(\rho) = 0,164 k^2 \lambda_0^{5/3} \left[\left(1 + 6 \frac{\rho^2}{\lambda_0^2} \right)^{5/6} - 1 \right] \int_0^L C_s^2(x) dx,$$

где L — длина трассы, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, C_s^2 , λ_0 — структурная характеристика и внутренний масштаб пульсаций диэлектрической проницаемости.

Формулы (6), (7) значительно упрощаются при рассмотрении квадрата ($\rho' = \rho''$) и вырожденного ромба ($\rho' = 2\rho$, $\rho'' = 0$). В частности, для вырожденного ромба

$$\frac{\Gamma_4^+}{\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle} = \exp \left[-\frac{1}{2} D_{\varphi}(2\rho) \right]; \quad (8)$$

$$\frac{\Gamma_4^-}{\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle} = \exp \left[-2 D_{\varphi}(\rho) + \frac{1}{2} D_{\varphi}(2\rho) - i D_{\chi\varphi}(2\rho) \right], \quad (9)$$

где $D_{\gamma\varphi}(\rho)$ — структурная функция логарифма амплитуды и фазы.

Величина Γ_4^+ — чисто действительная, а Γ_4^- , вообще говоря, комплексная, и только для расположения точек в виде квадрата она чисто действительная. Аргумент Γ_4^- для вырожденного ромба, как следует из (9), есть

$$\arg \Gamma_4^- = -D_{\chi\varphi}(2\rho).$$

Для теоретических оценок модулей Γ_4^+ , Γ_4^- и аргументов Γ_4^- использовались значения C_s^2 , полученные из экспериментальных данных Γ_2 , усредненных по двум каналам. Кроме того, в некоторых случаях для контроля одновременно проводились измерения относительной дисперсии флуктуаций интенсивности β^2 аналоговой аппаратурой [8]; из β^2 вычислялись значения $\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{4} \ln(1 + \beta^2)$ [4], а из $\langle \chi^2 \rangle$ — соответствующие C_s^2 . При этом принималось, что вне турбулизованного слоя $C_s^2 = 0$, т. е.

$$C_s^2(x) = \begin{cases} C_s^2 & \text{при } x \leq a, \\ 0 & \text{при } x > a \end{cases}$$

где a — толщина турбулизованного слоя.

Значения $D_{\chi\varphi}(2\rho)$ и $\langle \chi^2 \rangle$ для неоднородной трассы можно получить, используя введенные в [4] функции $D_1(\rho)$ и $D_2(\rho)$ в первом приближении МПВ. Применяя обозначения, принятые в [4], и учитывая малость величин $\frac{1}{D} = \frac{\lambda_0^2}{5,6\lambda L}$ и $\frac{1+iD}{g}$, где $g = 8,8 \frac{\rho^2}{\lambda_0^2}$, получим с точностью до $\frac{1+iD}{g}$ и $1/D$:

$$D_{\chi\varphi}(2\rho) \approx 1,03 k^{7/6} \int_0^a C_s^2(L-x)^{5/6} dx - k(2\rho)^{-1/3} \int_0^a C_s^2(L-x) dx; \quad (10)$$

$$\langle \chi^2 \rangle \approx 0,14 k^{7/6} \int_0^a C_s^2(L-x)^{5/6} dx + 0,012 k^{13/6} \lambda_0^2 \int_0^a G_s^2(L-x)^{-1/6} dx - \\ - 0,028 k^2 \lambda_0^{5/3} \int_0^a C_s^2 dx. \quad (11)$$

Внутренний масштаб λ_0 выбирался равным шести колмогоровским масштабам η_k [9]. Для определения η_k считалось, что турбулентный поток тепла в трубе равен мощности, выделяемой нагревательными спиральами, а диссипация энергии происходит в условиях свободной конвекции.

Все измерения проводились для расположения отверстий в виде квадрата и вырожденного ромба со стороной $r = 0,4 \text{ см}$ для трасс $L = 1,8$ и $L = 10 \text{ м}$. Диаметры отверстий выбраны равными $0,3 \text{ мм}$, что позволило пренебречь усреднением на апертуре.

Время усреднения $\tau_{\text{уср}}$ должно удовлетворять условию $\tau_{\text{фл}} \ll \tau_{\text{уср}} \ll T^{(a)}$, где $\tau_{\text{фл}}$ — характеристические времена наиболее медленных пульсаций, $T^{(a)}$ — характеристическое время аппаратурных дрейфов фазы. Для определения $\tau_{\text{уср}}$ была выбрана длинная серия измерений с малыми аппаратурными дрейфами. При изменении $\tau_{\text{уср}}$ от 10 до 100 с значения модулей Γ_2 , Γ_4^+ , Γ_4^- практически не изменялись. Исходя из этого, было выбрано $\tau_{\text{уср}} \gg 10 \text{ с}$. Нормировка Γ_4^+ и Γ_4^- для простоты производилась не на величину $\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle$, а на $\langle A_1 A_2 \rangle \times \langle A_3 A_4 \rangle$ (в условиях данного эксперимента такая замена нормировки несущественна, так как ошибка при этом порядка β^2 и не превышает 10%).

4. Измерения первоначально проводились для трассы $L = 1,8 \text{ м}$. Величины C_ε^2 , определяемые из экспериментальных значений Γ_2 , изменились в диапазоне $(2 \div 30) \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-2/3}$. При этих условиях среднеквадратичные значения флуктуаций интенсивности β не превышали 10%, и в соответствии с (7) экспериментальные значения аргументов Γ_4^+ и Γ_4^- близки к нулю.

На рис. 2 приведена зависимость экспериментальных значений $\frac{|\Gamma_4^+|}{\langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 A_4 \rangle}$ эксп $\equiv \gamma_{\text{эксп}}^+$ от теоретических $\frac{\Gamma_4^+}{\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle}$ теор $\equiv \gamma_{\text{теор}}^+$, а на рис. 3 — аналогичная зависимость $\frac{|\Gamma_4^-|}{\langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 A_4 \rangle}$ эксп $\equiv \gamma_{\text{эксп}}^-$ от $\frac{|\Gamma_4^-|}{\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle} \equiv \gamma_{\text{теор}}^-$. Данные для измерений $L = 1,8 \text{ м}$ показаны светлыми квадратами (отверстия расположены в виде квадрата) и ромбами (отверстия расположены в виде вырожденного ромба). Экспериментальные и теоретические значения согласуются между собой.

В дальнейших измерениях длина трассы L была увеличена до 10 м. При увеличении L значения Γ_2 остаются неизменными, но, как следует из (10) и (11), амплитудные и амплитудно-фазовые флуктуации возрастают. Для этих измерений были выбраны режимы с $C_\varepsilon^2 = (14 \div 20) \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-2/3}$. Измерявшиеся одновременно значения β менялись в пределах 0,3 — 0,4. Выбор этих режимов обусловлен тем, что для них ожидаемые значения $\arg \Gamma_4^-$ около 0,2 и их можно было зафиксировать в измерениях. Отметим, что для таких C_ε^2 модуль Γ_4^+ близок к нулю и поэтому не измерялся. Значения модуля Γ_4^- для этих измерений показаны на рис. 3 темными квадратами и ромбами. Здесь также экспериментальные и теоретические значения согласуются между собой. Среднее значение C_ε^2 , найденное из Γ_2 , равно $(16 \pm 2) \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-2/3}$, а из β^2 — $(15 \pm 3) \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-2/3}$. Совпадение значений C_ε^2 , определенных этими способами, может служить обоснова-

нием выбора коэффициента 6 для связи колмогоровского масштаба η_k с внутренним масштабом λ_0 . Среднее значение аргумента Γ_4^- для вырожденного ромба из эксперимента равно $0,20 \pm 0,09$, а теоретическое — 0,17. Для квадрата экспериментальные значения аргумента Γ_4^- близки к нулю; среднее по измерениям равно $0,06 \pm 0,04$.

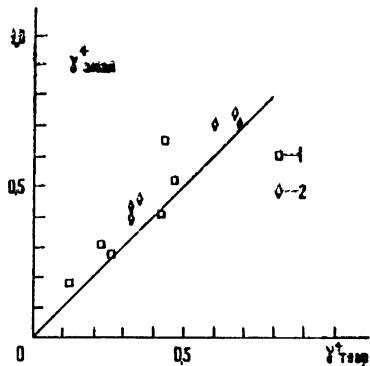


Рис. 2.

Рис. 2. Сравнение результатов измерений γ_4^+ с теоретическим расчетом $\gamma_{\text{теор}}^+$:
1 — квадрат, 2 — ромб, $L = 1,8 \text{ м}$.

Рис. 3. Сравнение результатов измерений γ_4^- с теоретическим расчетом $\gamma_{\text{теор}}^-$:
1 — квадрат, 2 — ромб, $L = 1,8 \text{ м}$, 3 — квадрат, 4 — ромб, $L = 10 \text{ м}$.

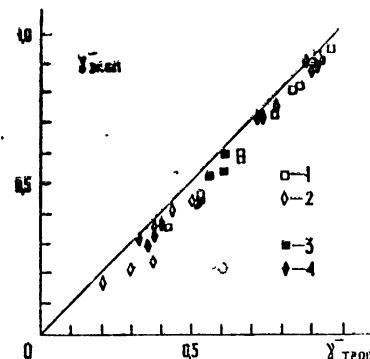


Рис. 3.

5. Проведенные впервые измерения четырехточечной функции когерентности лазерного излучения в турбулентной среде экспериментально подтверждают результаты расчетов по МПВ и предположение о логонормальном распределении комплексного поля. Результаты измерений показывают, что разработанные установка и методика позволяют проводить измерения функций пространственной когерентности поля второго и четвертого порядков лазерного излучения, прошедшего турбулентную среду. К достоинствам установки можно отнести полноту получаемой информации и простоту ее обработки. Необходимо отметить, что методика и аппаратура не накладывают ограничений на величину флюктуаций (аппаратура сконструирована с достаточно большим динамическим диапазоном), и можно ожидать, что окажутся возможными измерения в условиях сильных флюктуаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Вольф, Л. Мандель, УФН, 87, № 3, 491 (1965); 88, № 2, 347 (1966); 88, № 4, 619 (1966).
2. Л. М. Сороко, Основы голографии и когерентной оптики, изд. Наука, М., 1971.
3. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт, изд. ОФАГ АН СССР, М., 1970
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970
6. А. С. Гурвич, М. А. Калястратова, Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1360 (1968).
7. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).

8. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. О. Ломадзе, В. В. Покасов, А. С. Хрупин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 1, 105 (1974).
9. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, т. 2, изд. Наука, М., 1967.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
17 февраля 1975 г.

MEASUREMENTS OF FOUR-POINT FUNCTION OF LASER RADIATION
FIELD COHERENCE IN A TURBULENT MEDIUM

A. S. Gurvich, V. Kan, B. P. Potapov

A procedure of measuring the four-point function of the space coherence Γ_4 of the complex field of a light wave is proposed. The results of measurements of Γ_4 are given for the laser radiation in a turbulent medium. The results are compared with the estimations made on the assumption of the normal distribution law of the complex phase and a locally isotropic turbulence.

УДК 621.371.162

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ ИМПЕДАНСНОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

B. D. Фрейлихер, I. M. Фукс

Получено общее выражение для эффективного импеданса статистически неровной поверхности, справедливое при произвольных углах скольжения. Показано, что при скользящем распространении наличие неровностей может привести к возрастанию среднего поля вблизи поверхности по сравнению со случаем распространения над гладкой импедансной границей раздела. Проведен также расчет индикаторы рассеяния от шероховатой поверхности, из результатов которого следует, что формулы борновского приближения для флюктуационного поля непригодны при малых углах скольжения.

Одной из важнейших характеристик сигнала, рассеянного статистически неровной поверхностью, является среднее (когерентное) поле. Изучению этой величины посвящено большое число работ (см., например, монографии [1, 2]). Общепринятой в настоящее время является концепция эффективного импеданса, согласно которой влияние шероховатостей границы раздела учитывается заменой в граничных условиях истинного импеданса $\eta_0 = 1/\sqrt{\epsilon}$ величиной $\eta_{\text{эфф}}$, зависящей от статистических свойств поверхности.

В работах [1, 2] эффективный импеданс вычислялся методом теории возмущений и оказался равным

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + \eta_g, \quad (1)$$

где η_g — аддитивная поправка, учитывающая рассеяние на неровностях поверхности с $\eta_0 = 0$. Это означает, что расстояние $D \sim \frac{2}{k|\eta|^2} \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$ — длина волны), на котором, согласно [1], существенно убывает функция ослабления точечного источника при скользящем распространении, становится меньше, чем в случае гладкой импедансной поверхности, так как $|\eta_{\text{эфф}}| > |\eta_0|$.

Более строгое рассмотрение, проведенное ниже, показывает, что при некотором соотношении параметров формула (1) оказывается несправедливой: модуль эффективного импеданса становится меньше $|\eta_0|$, т. е. наличие шероховатостей приводит к усилиению поля точечного источника над импедансной поверхностью.

Пусть на поверхности $z = \zeta(x, y)$ (x, y, z — декартова система координат) выполняются следующие граничные условия:

$$\frac{\partial U}{\partial N} = -ik\eta_0 U \quad (2)$$

для скалярного поля U и

$$[NE] = \eta_0 [N[NH]] \quad (3)$$

для электромагнитного (N — нормаль к поверхности $\zeta(x, y)$).

Представляя поле U в виде суммы среднего $\langle U \rangle$ и флюктуационного u полей и разлагая (2) по степеням ζ , можно получить

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial z} + ik\eta_0 \langle U \rangle = \langle (j, \nabla_{\perp}) u \rangle - \left\langle \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\rangle - ik\eta_0 \left\langle \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle \Big|_{z=0}; \quad (4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + ik\eta_0 u = (j, \nabla_{\perp}) \langle U \rangle - \zeta \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial z^2} - ik\eta_0 \zeta \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (4b)$$

Здесь $\nabla_{\perp} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$, $j = \nabla_{\perp} \zeta$ — наклон поверхности в точке $r = \{x, y\}$, $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализации случайной функции $\zeta(x, y)$.

Воспользовавшись теоремой Грина, флюктуационное поле u можно с помощью граничного условия (4 б) выразить через $\langle U \rangle$ и, подставив в (4 а), получить граничное условие для когерентной составляющей $\langle U \rangle$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle U(r, z=0) \rangle}{\partial z} + ik\eta_0 \langle U(r, z=0) \rangle = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\perp} G_0(\rho; z=z'=0) \left[\nabla_{\perp} \frac{\partial W(\rho)}{\partial x'} \frac{\partial \langle U(r', 0) \rangle}{\partial x'} - \right. \\ & \quad \left. - \nabla_{\perp} W(\rho) \frac{\partial^2 \langle U(r', 0) \rangle}{\partial z'^2} - ik\eta_0 \nabla_{\perp} W(\rho) \frac{\partial \langle U(r', 0) \rangle}{\partial z'} \right] d^2 r' + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 G_0(\rho; z=z'=0)}{\partial z^2} \left[\frac{\partial W(\rho)}{\partial x'} \frac{\partial \langle U(r', 0) \rangle}{\partial x'} - \right. \\ & \quad \left. - W(\rho) \frac{\partial^2 \langle U(r', 0) \rangle}{\partial z'^2} - ik\eta_0 W(\rho) \frac{\partial \langle U(r', 0) \rangle}{\partial z'} \right] d^2 r' + \\ & + \frac{ik\eta_0}{4\pi} \int \frac{\partial G_0(\rho; z=z'=0)}{\partial z} \left[\frac{\partial W(\rho)}{\partial x'} \frac{\partial \langle U(r', 0) \rangle}{\partial x'} - \right. \\ & \quad \left. - W(\rho) \frac{\partial^2 \langle U(r', 0) \rangle}{\partial z'^2} - ik\eta_0 W(\rho) \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\partial \langle U(r', 0) \rangle}{\partial z'} \right] d^2 r', \end{aligned} \quad (5)$$

$$\rho = \{x - x', y - y'\}.$$

В качестве $G_0(R, R_0)$ здесь выбрана функция Грина, удовлетворяющая при $z=0$ граничному условию (2), $W(\rho) = \langle \zeta(r) \zeta(r') \rangle$ — корреляционная функция неровностей.

Соотношение (5) отличается от нелокального граничного условия, приведенного в § 6 [2], тем, что в правой части (5) имеются члены, пропорциональные η_0 . Как показано далее, именно они дают 'при малых углах скольжения ψ основной вклад в эффективный импеданс.'

Вследствие того, что G_0 и W зависят только от разности $\rho = r - r'$ (пространственная однородность шероховатой поверхности «в среднем»), отражение плоской волны $\exp[ik(x \cos \psi - z \sin \psi)]$ происходит в соответствии с законом Снеллиуса: падающая и отраженная волны

лежат в одной плоскости, и угол отражения равен углу падения. Это позволяет представить $\langle U \rangle$ в виде

$$\langle U \rangle = e^{ikx} \cos \psi [e^{-ikz \sin \psi} + V_{\text{эфф}}(\psi) e^{ikz \sin \psi}]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и переходя от функций G_0 и W к их фурье-представлениям, для коэффициента отражения среднего поля можно получить

$$V_{\text{эфф}}(\psi) = \frac{\sin \psi - \eta_{\text{эфф}}(\psi)}{\sin \psi + \eta_{\text{эфф}}(\psi)}, \quad (7)$$

где $\eta_{\text{эфф}}(\psi)$ — эффективный импеданс, учитывающий как влияние истинного импеданса η_0 , так и рассеяние на неоднородностях границы раздела:

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + \frac{1}{k} \int d^2 t \frac{(k^2 - t, k_\perp + k\eta_0 \sqrt{k^2 - t^2})(k^2 - t, k_\perp - k^2\eta_0^2)}{\sqrt{k^2 - t^2} + k\eta_0} \times \\ \times \tilde{W}(t - k_\perp). \quad (8)$$

Аналогичные преобразования, проведенные с граничным условием (3), показывают, что для вертикального электрического диполя эффективный импеданс выражается формулой

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + \frac{1}{k} \int \frac{d^2 t \tilde{W}(t - k_\perp)}{\sqrt{k^2 - t^2} + k\eta_0} \times \\ \times [(k^2 - (k_\perp, t) - k^2\eta_0^2)(k^2 - (k_\perp, t) + \sqrt{k^2 - t^2} k\eta_0) + \\ - t_y^2(k_z^2 - k^2\eta_0^2)]. \quad (9)$$

Таким образом, влияние неровностей, вообще говоря, не сводится к появлению в эффективном импедансе добавки к η_0 , не зависящей от η_0 .

Нетрудно убедиться, что при $\eta_0 \rightarrow 0$, $\eta_0 \rightarrow \infty$ из формулы (8) можно получить приведенные в [2] выражения для импеданса идеально жесткой и адmittанса идеально мягкой шероховатых поверхностей. При не слишком малых углах скольжения и конечных η_0 ($\psi \gg \eta_0$) (8), (9) имеют вид (1) и также совпадают с полученными ранее результатами. Заметим, что при $W(p) \equiv W(p_x)$ («одномерные» неровности) формулы (8) и (9) совпадают. В дальнейшем мы для простоты ограничимся именно этим случаем.

Если характерный размер неровностей l велик по сравнению с длиной волны ($kl \gg 1$), выражения (8) и (9) существенно упрощаются. Для углов скольжения, удовлетворяющих неравенству $\sin^2 \psi \gg \cos \psi / kl$, (8), (9) можно привести к виду

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + \eta_g(\eta_0) = \eta_0 + \sigma^2 k^2 \sin \psi (\sin^2 \psi - \eta_0^2), \\ \sigma^2 = \langle \zeta^2 \rangle. \quad (10)$$

Видно, что полученная ранее формула для $\eta_{\text{эфф}}$ (§ 6, [2]) справедлива лишь при $\sin \psi \gg \eta_0$, когда $\eta_g = k^2 \sigma^2 \sin^3 \psi$ есть просто эффективный импеданс абсолютно жесткой (идеально проводящей) поверхности.

В обратном предельном случае ($\sin \psi \ll \eta_0$)

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 (1 - \eta_0 k^2 \sigma^2 \sin \psi). \quad (10a)$$

При этом добавка $\eta_g(\eta_0)$ к невозмущенному импедансу η_0 оказывается по модулю в $\left| \frac{\eta_0}{\sin \psi} \right|^2 \gg 1$ раз больше той, которая следует из § 6 [2].

Интересно отметить, что при угле Брюстера ($\sin \psi_B = \eta_0$) влияние шероховатостей в этом предельном случае никак не сказывается на импедансе поверхности $\eta_g(\psi_B) = 0$, $\eta_{\text{эфф}} = \eta_0$.

При скользящем распространении ($\psi \ll 1/V\bar{k}l$) из (8) и (9) для «одномерных» неровностей получаем

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p + \eta_0 \sqrt{2kp})(p - k\eta_0^2)}{\sqrt{2kp} + k\eta_0} \tilde{W}(p) dp. \quad (11)$$

Если $\eta_0 \ll 1/\sqrt{\bar{k}l}$, из (11) следует известная формула:

$$\eta_g = -\frac{\sigma^2 \sqrt{\bar{k}l}}{2\sqrt{2\pi} l^2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} \frac{dw(\xi)}{d\xi} [w(\xi) \equiv W(\xi l)]. \quad (11a)$$

Однако при «больших» импедансах $\left(\eta_0 \gg \frac{1}{\sqrt{\bar{k}l}} \right)$ учет рассеяния на неровностях не сводится к появлению аддитивной поправки к η_0 :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{эфф}} &= \eta_0 \left[1 - 2\eta_0 k^{3/2} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{\infty} \sqrt{p} \tilde{W}(p) dp \right] \approx \\ &\approx \eta_0 \left[1 - c\eta_0 (1+i) \frac{k\sigma^2}{l} \sqrt{\bar{k}l} \right] \end{aligned} \quad (11b)$$

($c \sim 1$).

Таким образом, в случаях, когда справедливы формулы (10 а), (11 б), наличие шероховатостей приводит к уменьшению модуля эффективного импеданса. В результате численное расстояние $S = kD\eta^2$, являющееся аргументом нормальной функции ослабления $y(S)$ [1], при заданной дистанции D уменьшается. При $|S| \gg 1$ $y(S) \sim 1/2S$, т. е. за счет влияния шероховатости поверхности поле в точке приема возрастает по сравнению со случаем распространения над гладкой импедансной границей раздела.

Этот необычный, на первый взгляд, эффект допускает довольно простое физическое истолкование. Хорошо известно (см., например, [1], § 26), что ослабление поля точечного источника при скользящем распространении вдоль импедансной поверхности можно интерпретировать как результат интерференции создаваемого им поля с полем некоторого мнимого источника. При малых углах скольжения $\psi \ll \eta_0$ коэффициент отражения $V(\psi)$ стремится к -1 и эти поля складываются в противофазе, что и приводит к быстрому (как $1/D^2$) убыванию результирующего интерференционного поля.

Неровности границ вызывают размытие мнимого источника, уменьшаются модуль эффективного коэффициента отражения и происходит расфазировка падающей и отраженной волн, так что результатом их интерференции является теперь менее полная взаимная компенсация, т. е. усиление поля точечного источника вблизи поверхности.

Указанное уменьшение модуля коэффициента отражения означает, что шероховатости приводят к уменьшению амплитуды когерентного поля по сравнению с зеркально отраженным от гладкой поверхности. Этот результат довольно очевиден: часть энергии рассеивается некоге-

рентно и уносится от поверхности флуктуационной составляющей u . Однако при предельно малых углах скольжения $\psi \ll \eta_0 \ll 1/V\bar{k}l$, когда $V_{\text{эфф}}(\psi) = -1 + \frac{2 \sin \psi}{\eta_{\text{эфф}}}$, а $\eta_{\text{эфф}}$ определено формулой (11а),

$|V_{\text{эфф}}(\psi)| > |V_0(\psi)|$, т. е. наличие шероховатостей вызывает увеличение модуля коэффициента отражения среднего поля. Связано это, очевидно, с тем, что при таком соотношении параметров флуктуации формы поверхности приводят к уменьшению доли энергии, рассеянной в нижнее полупространство.

Таким образом, из полученных результатов следует, что даже при сколь угодно малом, но конечном импедансе ($|\eta_0| \ll 1$) $\eta_{\text{эфф}}$, вообще говоря, нельзя представить в виде суммы η_0 и «геометрического» импеданса абсолютно жесткой (идеально проводящей, с $\eta_0 = 0$) шероховатой поверхности. Такое представление возможно лишь при не очень малых углах скольжения ($\sin \psi \gg |\eta_0|$). Физическая причина неаддитивности эффективного импеданса заключается в том, что при достаточно малых углах скольжения, $\psi \ll \eta_0$, поверхность произвольной жесткости ведет себя как мягкая — коэффициент отражения при этом близок к -1 , а не к 1 . Это приводит к тому, что при скользящем распространении шероховатости оказываются облученными полем, структура которого существенно отличается от поля над идеально жесткой поверхностью ($\frac{\partial U}{\partial N} = 0$) даже при очень малых значениях производной $\frac{\partial U}{\partial N}$ на поверхности.

Тот факт, что при $\psi \ll \eta_0$ рассеивающие свойства даже очень жесткой ($|\eta_0| \ll 1$) поверхности существенно отличаются от свойств абсолютно неподатливой границы раздела, необходимо учитывать и при исследовании углового распределения энергии во флуктуационном поле u .

В § 8 [2] индикатриса рассеяния $I = \langle |u^2| \rangle$ идеально жесткой поверхности вычислялась в борновском приближении. При этом флуктуационное поле u выражалось с помощью теоремы Грина через значение $\frac{\partial u}{\partial z}$ на поверхности $z = 0$, заданное граничным условием (4б)

с $\eta_0 = 0$, в котором $\langle U(r, R_0) \rangle$ заменялось на $G_0(r, R_0)$ — поле точечного источника над идеально жесткой невозмущенной поверхностью:

$$u(R) = \frac{1}{4\pi} \int G_0(R, r') \left[(j(r'), \nabla_\perp) - \zeta(r') \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] G_0(r', R_0) d^2r'. \quad (12)$$

Указанная замена $\langle U \rangle$ на G_0 означает, очевидно, пренебрежение ослаблением падающего поля за счет влияния неровностей при распространении от источника (R_0) до рассеивающего участка поверхности с координатой r' . При этом считается, что после рассеяния волна распространяется, как над идеально жесткой поверхностью. Такое представление, вообще говоря, неверно, так как за счет шероховатостей абсолютно неподатливая граница раздела становится эффективно импедансной ($\eta_{\text{эфф}}$ выражается формулой (8) с $\eta_0 = 0$) и при малых углах скольжения поле над ней имеет такой же вид, как над идеально мягкой поверхностью, т. е. G_0 существенно отличается от $\langle U \rangle$ [3]. Более того, необходимо учитывать также и ослабление волны при распространении от рассеивающего участка до точки наблюдения R , что сво-

дится к замене в (12) $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}')$ на $\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{r}') \rangle$. Таким образом, с учетом сделанных замечаний флуктуационную компоненту отраженного поля необходимо рассчитывать по формуле

$$u(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \int \langle G(\mathbf{R}, \mathbf{r}') \rangle \left[(\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \nabla_{\perp}) - \zeta(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \times \langle G(\mathbf{r}', \mathbf{R}_0) \rangle d^2\mathbf{r}'.$$
 (13)

Пользуясь соотношением (13), для индикатрисы рассеяния идеально жесткой шероховатой поверхности можно получить

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \frac{1}{16} |1 + V_{\text{эфф}}(\psi_1)|^2 |1 + V_{\text{эфф}}(\psi_2)|^2 J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}).$$
 (14)

Здесь \mathbf{k} , \mathbf{x} — волновые векторы падающей и рассеянной волны, $J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ — индикатриса, вычисленная в § 8 [2] с помощью формулы (12), т. е. без учета влияния эффективного импеданса. Видно, что при малых углах скольжения — ψ_1 — и рассеяния — ψ_2 — множитель перед J_0 становится много меньше единицы, ибо, как указано выше, в этом случае ($\psi \ll |\eta_{\text{эфф}}|$) поверхность отражает как абсолютно мягкая и $V_{\text{эфф}}$ близок к —1 и равен $V_{\text{эфф}} = -1 + \frac{2\psi}{\eta_{\text{эфф}}}$. Таким образом, формулы борновского приближения оказываются непригодными для расчета индикатрисы рассеяния под малыми углами — в этом случае необходимо пользоваться соотношением (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
2. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
3. И. А. Урусовский, О принципе локальности в теории рассеяния волн на неровных поверхностях, Труды VI Всесоюзной акустической конференции, А'В9, Москва, 1968 г.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
14 февраля 1975 г.

WAVE REFLECTION FROM AN IMPEDANCE ROUGH SURFACE

V. D. Freilikher, I. M. Fuks

A general expression valid at arbitrary slide angles is derived for the effective impedance of a statistically rough surface. It is shown that for slide propagation the presence of roughnesses may lead to an increase of the mean field near the surface in contrast to the case of propagation above the smooth impedance interface. The calculation is also made of the indicatrix of scattering from a rough surface. It follows from the results of calculations that the Born approximation formulas for the fluctuation field are inapplicable at small slide angles.

УДК 538.56 : 519.25

О ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ВОЛНЫ НА НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. А. Пономарев, В. П. Якубов

Задача рассеяния скалярной волны на неровной поверхности рассматривается на основе строгого решения интегрального уравнения для граничного значения поля, сформулированного в геометрооптическом приближении. Полученное выражение для функции затенений позволяет рассчитать как ее статистические моменты, так и моменты рассеянного поля. Результаты работы рассматриваются как определенное обоснование метода Кирхгофа.

Одним из основных методов в теории рассеяния коротких волн на неровных поверхностях является метод Кирхгофа (МК). В основе МК лежит физически наглядное предположение, что для пологих крупномасштабных неровностей возможна локальная замена каждого участка поверхности соответствующим участком касательной плоскости [1, 2]. При этом затеняемые участки поверхности исключаются из рассмотрения введением функции затенений [1, 4, 5].

В данной работе задача рассеяния скалярной волны на неровной поверхности рассматривается на основе строгого решения интегрального уравнения, сформулированного в геометрооптическом приближении для граничного значения поля без учета переотражений на поверхности. Получаемое при этом выражение для функции затенений позволяет рассчитать как ее статистические моменты, так и моменты рассеянного поля. Результаты работы дают определенное обоснование методу касательной плоскости (МК).

1. Рассмотрим задачу о рассеянии плоской скалярной волны $\Psi_0 = A_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ на бесконечно протяженной абсолютно жесткой поверхности, отклонения которой от средней плоскости xOy описываются случайной функцией $z = z_s(\rho)$, $\rho = (x, y, 0)$. Для определенности будем считать, что эта функция статистически однородна и подчиняется нормальному закону распределения.

Хотя дальнейшее рассмотрение водится только для плоской падающей волны, тем не менее, очевидно, все изложенное может быть перенесено на случай произвольной волны, допускающей разложение по плоским волнам.

Представим полное поле на поверхности в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_s) = 2\Psi_0(\mathbf{r}_s) S(\rho), \quad \mathbf{r}_s = (x, y, z_s), \quad (1)$$

где $S(\rho)$ — функция ослабления поля на поверхности. Функция $S(\rho)$ при этом удовлетворяет уравнению (см. [1], стр. 226)

$$S(\rho) = 1 - 2 \int \exp(i\mathbf{k}(\mathbf{r}'_s - \mathbf{r}_s)) (N' \nabla') G(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s) S(\rho') (d^2\rho') \quad (2)$$

(интеграл понимается в смысле Коши), где

$$N = \left(-\frac{\partial z_s}{\partial x}, -\frac{\partial z_s}{\partial y}, 1 \right), \quad G(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

Используя обобщенную функцию Хевисайда $\chi[t]$, преобразуем интегральное уравнение (2) для $S(\rho)$ -функции ослабления полного поля на поверхности к виду

$$S(\rho) = 1 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} (d^3 r_1) \exp(i k r_1) (\nabla_1 G(r_1) \nabla_1) \chi[z_1 - \Delta_1] S(\rho + \rho_1), \quad (3)$$

где

$$\Delta_1 = z_s(\rho + \rho_1) - z_s(\rho), \quad (d^3 r_1) = dx_1 dy_1 dz_1.$$

Решение задачи сводится к решению уравнения (3) с последующей подстановкой полученной функции $S(\rho)$ в (1).

2. Применим формально к оценке интегрального члена в (3) метод стационарной фазы (МСФ) [3]. Пренебрегая возможными переотражениями на поверхности и ограничившись только главным членом $S^{(0)}$ асимптотического разложения по степеням $(1/k)$, преобразуем уравнение (3) к виду

$$S^{(0)}(\rho, k) = 1 - \int_{0+}^{\infty} d\xi \frac{d}{d\xi} [\xi \operatorname{ctg} \theta - \Delta^{(0)}] S^{(0)}\left(\rho - \xi \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}}; k\right), \quad (4)$$

где

$$\Delta^{(0)} = z_s\left(\rho - \xi \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}}\right) - z_s(\rho), \quad k = (k_x, k_y, -k_z), \quad k_{\perp} = (k_x, k_y, 0),$$

θ — угол падения плоской волны ($\operatorname{tg} \theta = k_{\perp}/k_z$).

Покажем, что определяемая уравнением (4) функция $S^{(0)}(\rho, k)$ представляет собой функцию затенений [1].

Действительно, пусть $\{\tilde{\xi}_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) — корни уравнения

$$\xi \operatorname{ctg} \theta - \Delta^{(0)} = 0,$$

определяющие точки пересечения поверхности с лучом

$$z = z_s(\rho) + \xi \operatorname{ctg} \theta \quad (\xi \geq 0),$$

причем $\tilde{\xi}_0 = 0$. Число корней N определяет кратность затенений. Обозначим

$$\tilde{S}_i = S^{(0)}\left(\rho - \tilde{\xi}_i \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}}, k\right), \quad \gamma = \nabla_{\perp} z_s\left(\rho - \xi \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}}\right), \quad \gamma(\xi) = -\left(\frac{k_{\perp}}{k_{\perp}} \gamma\right),$$

$$\tilde{\gamma}_i = \gamma(\tilde{\xi}_i),$$

тогда, используя свойства δ -функции, из (4) можно получить

$$\tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_1) + \dots + \tilde{S}_N \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_N) = 1.$$

Если точка наблюдения совпадает с точкой $(\rho - \tilde{\xi}_1 k_{\perp}/k_{\perp})$, то из (4) также следует

$$\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_2) + \dots + \tilde{S}_N \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_N) = 1.$$

Повторяя эту процедуру для всех точек $(\rho - \tilde{\xi}_i k_{\perp} / k_{\perp})$ ($i = 1, 2, \dots, N$), получим систему N уравнений

$$\tilde{S}_j + \sum_{i=j+1}^N \tilde{S}_i \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_i) = 1 \quad (\tilde{S}_N \equiv 1),$$

из которой следует, что

$$S^{(0)}(\rho, k) = \tilde{S}_0 = \prod_{i=1}^N [1 - \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_i)]. \quad (5)$$

В результате $\tilde{S}_0 = 0$, если $N \geq 1$, и $\tilde{S}_0 = 1$ при $N = 0$. Ясно, что определяемая таким образом функция $S^{(0)}(\rho, k)$ есть функция затенений в точке ρ , т. е. $S^{(0)} = 1$, если затенений нет, и $S^{(0)} = 0$, если они есть.

Заметим, что возможны и другие формальные представления для функции $S^{(0)}(\rho, k)$, следующие из (5), например,

$$S^{(0)}(\rho, k) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^N \ln [1 - \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_n)] \right\} = \\ = \exp \left\{ \int_{0+}^{\infty} d\xi \frac{d}{d\xi} \chi [\xi \operatorname{ctg} \theta - \Delta^{(0)}] \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \gamma) \ln [1 - \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \gamma)] \right\}.$$

Более удобным для расчетов, на наш взгляд, является представление функции затенений в виде ряда Неймана уравнения (4).

3. Применим к решению уравнения (4) метод последовательных приближений и покажем, что получающийся при этом ряд Неймана для функции $S^{(0)}(\rho, k)$ содержит конечное число членов, равное кратности затенений рассматриваемой точки другими участками поверхности.

Очевидно, ряд Неймана для функции $S^{(0)}(\rho, k)$ имеет вид

$$S^{(0)}(\rho, k) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)}(\rho), \quad S_0^{(0)} = 1, \quad (6)$$

$$S_n^{(0)} = (-1)^n \underbrace{\int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty}}_n \prod_{j=1}^n \left[d\xi_j \frac{d}{d\xi_j} \chi (\xi_j \operatorname{ctg} \theta - \Delta_j^{(0)}) \right],$$

где

$$\Delta_j^{(0)} = z_{s_j} - z_{s_{j-1}}, \quad z_{s_j} = z_s \left(\rho - (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_j) \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}} \right),$$

$$\gamma_j = \frac{\partial z_{s_j}}{\partial \xi_j}.$$

Используя свойства δ -функции, можно записать

$$S_n^{(0)} = (-1)^n \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=i_1+1}^N \dots \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^N \prod_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} \theta - \tilde{\gamma}_{i_k}).$$

Ясно, что члены ряда $S_n^{(0)}$ обращаются в нуль, как только n становится больше N . Кратность затенений и, следовательно, число членов

ряда (6) зависит от угла падения волны. Число N может быть вычислено по формуле

$$N = \int_{0+}^{\infty} d\xi_1 \frac{d}{d\xi_1} \chi [\xi_1 \operatorname{ctg} \theta - \Delta_i^{(0)}] \operatorname{sgn} (\operatorname{ctg} \theta - \gamma_1). \quad (7)$$

В случае нормального падения ($\theta = 0$) затенения отсутствуют и $N = 0$, по мере увеличения угла падения можно говорить об однократном, двукратном и т. д. затенениях; наконец, при $\theta \rightarrow \pi/2$ кратность затенений N и число членов ряда Неймана неограниченно возрастает.

Оценим среднее по ансамблю реализаций поверхности значение числа N . Обозначим через σ_γ^2 и σ_z^2 дисперсии случайных наклонов (γ) и высот (z_s) поверхности соответственно, а через R — радиус корреляции флуктуаций высот поверхности, причем $\sigma_\gamma \sim \sigma_z/R$. В случае слабых затенений ($a = \operatorname{ctg} \theta/\sigma_\gamma \gg 1$), очевидно, $\langle N \rangle \ll 1$. Более интересен случай сильных затенений ($a \ll 1$). При сильных затенениях ($a \ll 1$) в большинстве случаев пересечения поверхности с лучом происходят при $(\tilde{\xi}_j - \tilde{\xi}_{j-1}) \geq R$ [1], и можно рассматривать все величины $\tilde{z}_j = z_s(\rho - \tilde{\xi}_j k_\perp/k_\perp)$ и $\tilde{\gamma}_j = \frac{\partial}{\partial \xi} z_s(\rho - \tilde{\xi}_j k_\perp/k_\perp) \Big|_{\xi=\tilde{\xi}_j}$ как статистически независимые. Если $w(z_s)$ и $w(\gamma)$ — одномерные законы распределения случайных высот и наклонов поверхности соответственно, то при усреднении (7) получим

$$\langle N \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz_{s_0} w(z_{s_0}) dz_{s_1} w(z_{s_1}) d\gamma_1 w(\gamma_1) \int_{0+}^{\infty} d\xi_1 \delta (\xi_1 \operatorname{ctg} \theta -$$

$$- \Delta_i^{(0)}) |\operatorname{ctg} \theta - \gamma_1| \approx \int_{-\infty}^{\infty} dz_{s_0} w(z_{s_0}) \int_{z_{s_0}}^{\infty} dz_{s_1} w(z_{s_1}) \langle |1 - \gamma_1 \operatorname{tg} \theta| \rangle.$$

Легко показать, что отсюда следует результат

$$\langle N \rangle \approx \frac{1}{2!} \langle |1 - \gamma_1 \operatorname{tg} \theta| \rangle \approx \Lambda(a).$$

Здесь $\Lambda(a) \equiv \langle (\gamma \operatorname{tg} \theta - 1) \chi [\gamma - \operatorname{ctg} \theta] \rangle$ и для нормального закона распределения наклонов поверхности с дисперсией σ_γ^2 определяется выражением

$$\Lambda(a) = \frac{1}{2a} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-a^2/2) - a \operatorname{erfc}(a/\sqrt{2}) \right],$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt,$$

причем $\Lambda \gg 1$ при $a \ll 1$. Величина $\langle N \rangle$ характеризует среднее число существенных членов в ряде Неймана (6).

4. Вычислим среднее значение функции затенений $\langle S^{(0)} \rangle$. В случае слабых затенений ($a = \operatorname{ctg} \theta/\sigma_\gamma \gg 1$) кратность затенений N мала. Ограничившись двумя первыми членами ряда Неймана (6) и учитывая, что

$$\int_{0+}^{\infty} d\xi_1 \frac{d}{d\xi_1} \chi [\xi_1 \operatorname{ctg} \theta - \Delta_1^{(0)}] = \chi [\gamma_0 - \operatorname{ctg} \theta],$$

получим

$$S^{(0)}(\rho, k) \approx 1 - \chi [\gamma_0 - \operatorname{ctg} \theta] = \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma_0], \quad (8)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\partial}{\partial \xi} z_s(\rho - \xi k_{\perp}/k_{\perp})|_{\xi=0}.$$

Последнее выражение означает, что функция $S^{(0)}$ при слабых затенениях переходит в функцию самозатенений [1].

При нормальном законе распределения высот и наклонов поверхности из (8) получим следующее выражение для среднего значения функции затенений $\langle S^{(0)}(\rho, k) \rangle$:

$$\langle S^{(0)}(\rho, k) \rangle \approx 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(a/\sqrt{2}). \quad (9)$$

В случае сильных затенений ($a \ll 1$) N велико и ряд Неймана нужно просуммировать полностью. При этом удобно поступить следующим образом. Заметим, что $S^{(0)}(\rho, k)$ как решение уравнения (4) учитывает, наряду с возможными затенениями одних участков поверхности другими, также самозатенения, т. е.

$$S^{(0)}(\rho, k) = S^{(0)}(\rho, k) \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma_0].$$

Тогда ряд Неймана можно записать в виде

$$S^{(0)}(\rho, k) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\rho), \quad C_0 = \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma_0],$$

$$C_n = \gamma [\operatorname{ctg} \theta - \gamma_0] (-1)^n \int_{0+}^{\infty} \dots \int_{0+}^{\infty} \prod_{j=1}^n \left[d\xi_j \frac{d}{d\xi_j} \chi [\xi_j \operatorname{ctg} \theta - \right. \\ \left. - \Delta_j^{(0)}] \chi (\operatorname{ctg} \theta - \gamma_j) \right]. \quad (10)$$

Как и в п. 3, будем считать, что пересечения поверхности с лучом при сильных затенениях происходят при $(\tilde{\xi}_j - \tilde{\xi}_{j-1}) \geq R$, в результате из (10) после усреднения нетрудно получить

$$\langle C_n \rangle = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \langle \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma] \rangle \langle (1 - \gamma \operatorname{tg} \theta) \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma] \rangle^n$$

или, суммируя по n , найдем, что

$$\langle S^{(0)}(\rho, k) \rangle \approx \langle \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma] \rangle [1 + \Lambda(a)]^{-1}. \quad (11)$$

Формула (11) полностью совпадает с соответствующей интерполяционной формулой, приведенной в [1, 5] и хорошо согласующейся с результатами численного эксперимента [4] практически во всем диапазоне углов падения (θ) . Тем самым еще раз подтверждается вывод, сделанный в [1], о явной предпочтительности (11) по сравнению с выражением

$$\langle S^{(0)} \rangle = \langle \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma] \rangle \frac{1 - e^{-\Lambda(a)}}{\Lambda(a)},$$

приведенным также в [1].

5. В п. 2—4 применение метода стационарной фазы (МСФ) к вычислению интегралов предшествует операции усреднения. Более традиционным является обратный порядок вычислений. Придерживаясь его, вычислим в пренебрежении возможными переотражениями на поверхности среднюю функцию ослабления полного поля на поверхности $\langle S(\rho) \rangle$, что представляется интересным, во-первых, как еще одно подтверждение правомерности формальных операций в п. 2 и, во-вторых, позволяет уточнить с учетом предыдущих результатов условия применимости МСФ к расчету функции затенений.

Как следует из (3), ряд Неймана для функции ослабления имеет вид

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\rho), \quad S_0 = 1, \\ S_n &= \underbrace{\int \dots \int}_{n} \prod_{j=1}^n \left\{ (d^3 r_j) (-2) \exp(i k r_j) \frac{dG(r_j)}{r_j dr_j} [z_j - \right. \\ &\quad \left. - (\rho_j \nabla_j) \Delta_j] \delta(z_j - \Delta_j) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_j &= z_s(\rho_{j_0} + \rho_j) - z_s(\rho_{j_0}), \quad \rho_{j_0} = \rho + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{j-1}, \\ \rho_j &= (x_j, y_j, 0). \end{aligned}$$

Рассматривая среднее значение функции $S(\rho)$, построим n -мерные случайные векторы

$$\alpha = \{\alpha_j\}, \quad \sigma_j = \Delta_j \text{ и } \beta = \{\beta_j\}, \quad \beta_j = (\rho_j \nabla_j) \Delta_j.$$

Пусть их совместная плотность распределения есть функция $w(\alpha, \beta)$, которую можно представить через плотность распределения $w(\alpha)$ и условную плотность распределения $w(\beta | \alpha)$:

$$w(\alpha, \beta) = w(\alpha) w(\beta | \alpha).$$

Определим матрицы $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta}$ смешанных моментов величин α_j и β_j как средние прямого произведения векторов α и β , например,

$$A_{\alpha\beta} = \langle \alpha \oplus \beta \rangle.$$

Тогда функции $w(\alpha)$ и $w(\beta | \alpha)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= [(2\pi)^n \det A_{\alpha\alpha}]^{-1/2} \exp [(-1/2) \alpha^\top A_{\alpha\alpha}^{-1} \alpha], \\ w(\beta | \alpha) &= [(2\pi)^n \det (A_{\beta\beta} - A_{\beta\alpha} A_{\alpha\alpha}^{-1} A_{\alpha\beta})]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \exp \{(-1/2) (\beta - A_{\beta\alpha} A_{\alpha\alpha}^{-1} \alpha)^\top [A_{\beta\beta} - A_{\beta\alpha} A_{\alpha\alpha}^{-1} A_{\alpha\beta}]^{-1} (\beta - A_{\beta\alpha} A_{\alpha\alpha}^{-1} \alpha)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $A_{\alpha\alpha}^{-1}$ есть обратная к $A_{\alpha\alpha}$ матрица, а α^\top означает транспонированный вектор α .

При этом выражение для среднего значения S_n примет вид

$$\begin{aligned} \langle S_n \rangle &= \underbrace{\int \dots \int}_{n} \prod_{j=1}^n \left[(d^3 r_j) (-2) \exp(i k r_j) \frac{dG(r_j)}{r_j dr_j} \right] P(z; \rho_1, \dots, \rho_n) \times \\ &\quad \times w(\alpha = z), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$P(z; \rho_1, \dots, \rho_n) = \int_{-\infty}^{\infty} (d^n \beta) w(\beta | \alpha = z) \prod_{j=1}^n (z_j - \beta_j) \\ (z = \{z_j\})$$

вычисляется по формуле

$$P = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\prod_{j=1}^n \left(z_j - A_{\beta_j \alpha} A_{\alpha \alpha}^{-1} z - \frac{\partial}{\partial \tau_j} \right) \right] \exp [((1/2) \tau^T (A_{\beta \beta} - A_{\beta \alpha} A_{\alpha \alpha}^{-1} A_{\alpha \beta}) \tau]$$

и представляет собой полином n -й степени относительно z_j .

Очевидно, что условия, при которых МСФ применим к оценке интеграла (14), будут определяться поведением функции $w(\alpha = z)$ в пределах первой зоны Френеля (заметим, что $w(z)$ является также функцией переменных ρ_j , которые для компактности записи опущены в обозначениях функции).

Определим характерный масштаб изменения функции $w(z)$ в n -мерном пространстве Z_n с текущими точками $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ следующим образом. Пусть показатель экспоненты в (13) принимает целочисленные значения

$$(1/2) z^T A_{\alpha \alpha}^{-1} z = M, \quad M = 1, 2, 3, \dots$$

Расстояние ε_M между соседними эллипсоидами, задаваемыми этими соотношениями, примем за характерный масштаб изменения функции $w(z)$.

Поскольку при $|\rho| \geq R$ (R — радиус корреляции флуктуаций высот поверхности) матрица $A_{\alpha \alpha}$ не зависит от параметров ρ_j и имеет вид

$$A_{\alpha \alpha} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix},$$

величина ε_M может быть легко оценена. Например, при $|\rho_j| = R$

$$\varepsilon_M = 2\sigma (\sqrt{M+1} - \sqrt{M}) \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{(n+1)(n+2)}},$$

где M определяется положением линии стационарной фазы

$$\rho_j = -\frac{k_{\perp}}{k_{\perp}} \operatorname{tg} \theta z_j \quad (z_j \geq 0)$$

и при этом равно

$$M = E \left[a^2 \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \right], \quad a = \operatorname{ctg} \theta / \sigma_1$$

($E[p]$ означает целую часть числа p).

Что касается размера первой зоны Френеля в пространстве Z_n , то он для поверхности с крупномасштабными неровностями ($\lambda R \gg 1$) при $|\rho_j| = R$ оценивается формулой

$$\epsilon_F = \sqrt{n} \sqrt{\frac{2\pi R}{k} \sin^{-3} \theta}.$$

Учитывая, что среднее число существенных членов ряда Неймана (6) равно $\langle N \rangle$, ограничимся рассмотрением $\langle S_n \rangle$ при $n \leq \langle N \rangle$. При этом условия применимости МСФ ($\epsilon_F \ll \epsilon_M$) к оценке функции $\langle S(\rho) \rangle$ можно записать в виде

$$\sin^3 \theta \frac{k\sigma^2}{R} \frac{1}{a^2} \gg 1 \quad \text{и} \quad \sin^3 \theta \frac{k\sigma^2}{R} a^4 \gg 1 \quad (15)$$

для слабых ($a \gg 1$) и сильных ($a \ll 1$) затенений соответственно.

Хотя условия (15) получены при $|\rho_j| = R$, тем не менее при их выполнении МСФ позволяет верно оценить значения интеграла (14) для $n \leq \langle N \rangle$, если не учитывать переотражения. Действительно, при выполнении (15) требование $\epsilon_F \ll \epsilon_M$ может нарушаться только в двух областях. Первая область — вблизи начала координат — имеет радиус порядка $O(1/k)$. Вклад в интеграл (14) по этой области имеет порядок $O(1/k^2)$, и им можно пренебречь. Вторая область — при $|\rho_j| \gg R$, так как с ростом $|\rho_j|$ размер первой зоны Френеля ϵ_F увеличивается и может превышать ϵ_M . Однако при этом функция $w(z)$ становится экспоненциально малой по сравнению с ее значением при $|\rho| = R$.

Наконец, применение МСФ при полученных условиях к оценке интегралов (14) приводит к результату для $\langle S_n^{(0)} \rangle$, полностью совпадающему со средним значением для n -го члена ряда (6).

6. На примере среднего поля (п. 6) и индикаторы рассеяния (п. 7) рассмотрим кратко возможность использования полученной функции затенений для расчета статистических моментов рассеянного поля.

Воспользуемся представлением Вейля [1, 2] для функции Грина свободного пространства

$$G(r - r_s') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d^2 \mathbf{x}_\perp)}{(2\pi)^2 2i\mathbf{x}_z} \exp [i\mathbf{x}_\perp (\rho - \rho') + i\mathbf{x}_z |z - z_s'|],$$

где

$$\mathbf{x}_\perp = (x_x, x_y, 0), \quad x_z^2 = k^2 - x_\perp^2, \quad \operatorname{Im} x_z > 0.$$

Если считать, что точка наблюдения $r = (x, y, z)$ лежит выше самых высоких неровностей, так что $|z - z_s'| = (z - z_s')$, то получим следующее выражение для рассеянного поля [1]:

$$\Psi_p(r) = \int \frac{(d^2 \mathbf{x}_\perp)}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{x}_\perp r] A_0 \int (d^2 \rho') \exp(-i\rho' (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{k}_\perp)) \times \\ \times \exp(-i(\mathbf{k}_z + \mathbf{x}_z) z_s') S^{(0)}(\rho', \mathbf{k}) S^{(0)}(\rho', -\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x}_\perp N')}{x_z}. \quad (16)$$

Здесь $S^{(0)}(\rho, -\mathbf{x})$ аналогична функции $S^{(0)}(\rho, \mathbf{k})$ и означает функцию затенений по отношению к направлению на точку наблюдения.

Нетрудно видеть, что для статистически однородной неровной поверхности величина

$$V(\mathbf{x}_\perp) = \left\langle \exp(-i(k_z + z_s)z'_s) S^{(0)}(\rho', \mathbf{k}) S^{(0)}(\rho', -\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x}N)}{x_z} \right\rangle$$

не зависит от переменной интегрирования ρ' , так что из (16) для среднего рассеянного поля следует

$$\langle \Psi_p(r) \rangle = A_0 \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r} + ik_z z) V(\mathbf{k}_\perp).$$

В случае слабых затенений ($a \gg 1$), когда $S^{(0)}$ описывается формулой (8), коэффициент отражения $V(\mathbf{k}_\perp)$ равен

$$V = \tilde{V} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2ik_z z_s) w(z_s) dz_s, \quad \tilde{V} = \langle \chi [\operatorname{ctg} \theta - \gamma] \chi [\operatorname{ctg} \theta + \gamma] \rangle,$$

для нормального закона распределения

$$V = \tilde{V} \exp(-2k_z^2 \sigma^2), \quad \tilde{V} = 1 - \operatorname{erfc}(a/\sqrt{2}). \quad (17)$$

В случае сильных затенений ($a \ll 1$), повторяя рассуждения, изложенные в п. 3 и п. 4, находим

$$V = \tilde{V} \int_{-\infty}^{\infty} dz_s w(z_s) \exp \left[-2ik_z z_s - 2(1 + \Lambda(a)) \int_{z_s}^{\infty} dz'_s w(z'_s) \right].$$

Для нормального закона распределения эта формула принимает вид

$$V = \tilde{V} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{x^2}{2} - 2ik_z \sigma x - (1 + \Lambda(a)) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (18)$$

Формулы (17) и (18) в предельных случаях слабых и сильных затенений практически совпадают с приведенными в [1], но получены при более мягких условиях. Если в [1] эффективный коэффициент отражения вычислялся для точки наблюдения в зоне Фраунгофера, то в нашем случае пределы применимости формул (17) и (18) связаны с выполнением для точки наблюдения неравенства $z \geq \max z_s$. Приведенный же в [2, 6] эффективный коэффициент отражения, вычисленный при выполнении неравенства $z \geq \max z_s$, не учитывает затенений.

7. Аналогично при более слабых ограничениях, чем в [1, 2], может быть вычислена индикатриса рассеяния волны на неровной поверхности.

Представим рассеянное поле в виде разложения по плоским волнам [1, 2]:

$$\Psi_p(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d^2 \mathbf{x}_\perp)}{(2\pi)^2 2iz_z} A(\mathbf{x}_\perp) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} e^{i\mathbf{k}_z z}, \quad z_z^2 = k^2 - \mathbf{x}_\perp^2, \quad \operatorname{Im} z_z > 0, \quad (19)$$

что возможно при выполнении условия $z \geq \max z_s$.

Для статистически однородной поверхности имеет место соотношение $\langle A(\mathbf{x}'_\perp) A^*(\mathbf{x}''_\perp) \rangle = J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}''_\perp)$, где $J(\mathbf{k}, \mathbf{x})$ соответствует индикатрисе рассеяния. Сопоставляя (19) с (16), после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = & 4A_0^2(2\pi)^3 \int (d^3 p') \exp(i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{x}_\perp) \cdot \mathbf{p}') \times \\
 & \times \langle (\mathbf{x}N') (\mathbf{x}N'') \exp[-i(\mathbf{k}_z + \mathbf{x}_z)(z'_s - z''_s)] S^{(0)}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'', \mathbf{k}) \times \\
 & \times S^{(0)}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'', -\mathbf{x}) S^{(0)}(\mathbf{p}'', \mathbf{k}) S^{(0)}(\mathbf{p}'', -\mathbf{x}) \rangle. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Учитывая, что основной вклад в интеграл определяется малыми окрестностями точек зеркального отражения, можно в показателе экспоненты заменить $(z'_s - z''_s) \approx (\nabla' \nabla'') z'_s$, а в предэкспоненциальных множителях положить [1]

$$z'_s \approx z''_s, S^{(0)}(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'', \mathbf{k}) \approx S^{(0)}(\mathbf{p}'', \mathbf{k}), \nabla' z_s(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'') \approx \nabla'' z_s(\mathbf{p}'').$$

В результате, выполнив интегрирование в (20), найдем

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \approx A_0^2(2\pi)^4 \frac{q^4}{q_z^2} \langle \delta(q_\perp + \gamma q_z) S^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) S^{(0)}(\mathbf{p}, -\mathbf{x}) \rangle,$$

$$q = \mathbf{x} - \mathbf{k}, \quad \gamma = \nabla z_s(\mathbf{p}).$$

Используя затем полученное в п. 4 выражение для функции затенений, нетрудно показать, что

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{x}) \approx J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) Q(\mathbf{k}, \mathbf{x}),$$

где

$$J_0(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = A_0^2(2\pi)^4 \frac{q^4}{q_z^4} w(\gamma = -q_\perp/q_z)$$

описывает индикатору рассеяния при отсутствии затенений, а множитель Q — влияние затенений. При слабых затенениях ($a \equiv k_z/(k_\perp \sigma_t) \gg 1$, $b \equiv x_z/(x_\perp \sigma_t) \gg 1$) величина $Q \approx 1$. При сильных затенениях ($a, b \ll 1$) будем различать два случая. Первый — когда азимутальный угол между лучами, проведенными в направлениях \mathbf{k} и $-\mathbf{x}$, велик, так что можно пренебречь корреляцией между пересечениями этих лучей с поверхностью; второй случай — когда угол мал и корреляция значительна. В первом случае имеет место формула

$$Q \approx \{[1 + \Lambda(a)] + [1 + \Lambda(b)]\}^{-1},$$

во втором —

$$Q \approx \{1 + \Lambda(c)\}^{-1}, \quad c = \min\{a, b\}.$$

Полученные результаты близки к приведенным в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
2. А. Б. Шмелев, УФН, 106, № 3, 459 (1972).
3. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970.
4. R. A. Brockelman, T. Hagfors, IEEE Trans., AP-14, № 5, 621 (1966).
5. B. G. Smith, IEEE Trans., AP-15, № 5, 668 (1967).
6. Ю. А. Кравцов, И. М. Фукс, А. Б. Шмелев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 6, 854 (1971).

**GEOMETRICAL-OPTICS APPROXIMATION IN THE PROBLEM OF
SCATTERING OF A WAVE ON A ROUGH SURFACE***G. A. Ponomarev, V. P. Yakubov*

The problem of scattering of a scalar wave on a rough surface is considered on the basis of a strict solution of the integral equation for the boundary field formulated in the geometrical optics approximation. The expression derived for the shadow function permits both its statistical moments and moments of the scattered field to be calculated. The results of the paper are considered as the definite substantiation of the Kirchhoff method.

УДК 538.56 : 519.25

О СТАТИСТИКЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛН ЗА СЛУЧАЙНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

A. I. Саичев

Проводится теоретическое исследование в малоугловом приближении геометрической оптики вероятностного распределения интенсивности световой волны за двумерным фазовым экраном, образованным тонким слоем, заполненным случайно-неоднородной средой. Показано, в частности, что при больших интенсивностях вероятностное распределение интенсивности обратно пропорционально третьей степени интенсивности, что обусловлено особенностями амплитуды волны вблизи каустических поверхностей. Вычисляется среднее число лучей, приходящих в точки за экраном.

1. Как известно (см., например, [1-8]), случайные отклонения фазового фронта волны от плоского, вносимые фазовым экраном, могут приводить к сильным флуктуациям ее интенсивности, обусловленным случайной фокусировкой и дефокусировкой волны. Изучение сильных флуктуаций интенсивности волны за фазовым экраном — трудная задача, так как каждый более высокий момент интенсивности все более и более громоздко выражается через статистические характеристики фазового экрана [1-6]. Однако в приближении геометрической оптики задача существенно упрощается. Плотность вероятности интенсивности случайной световой волны может быть в этом приближении легко найдена из решения кинетического уравнения, предложенного в [9].

В данной работе это уравнение привлекается для изучения статистических свойств интенсивности и других физически интересных параметров световой волны. Находятся, в частности, плотность вероятности интенсивности световой волны за случайным фазовым экраном и среднее число волн, приходящих в точки за ним. Определены также некоторые свойства случайных каустик за фазовым экраном, статистика которых существенно связана со статистикой флуктуаций интенсивности [10].

2. Рассмотрим световую волну в малоугловом приближении геометрической оптики. Фаза волны $S(x, \rho)$, распространяющейся в свободном пространстве, в этом приближении удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} S)^2 = 0. \quad (1)$$

Здесь x — продольная, а $\rho = \{\rho_1, \rho_2\}$ — поперечная координаты, k — волновое число.

Следуя работе [9], можно записать для $w[\mathbf{v}, I, h, p; x, \rho]$ — плотности вероятности поперечных компонент локального волнового вектора \mathbf{v} , интенсивности I , средней кривизны h и гауссовой кривизны p фазового фронта волны, где

$$\mathbf{v} = \nabla_{\perp} S, \quad h = -\frac{1}{2k} \Delta_{\perp} S, \quad p = \frac{1}{k^3} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial p_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial p_2^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial p_1 \partial p_2} \right)^2 \right],$$

уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{k} (\mathbf{v} \nabla_{\perp}) w + 2hw + \frac{\partial}{\partial h} [(2h^2 - p)w] + \\ + 2h \frac{\partial}{\partial p} [pw] + 2h \frac{\partial}{\partial I} [Iw] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В общем случае его граничное условие, определяемое статистикой фазового экрана и самой волны до ее падения на экран, имеет вид

$$w[\mathbf{v}, I, h, p; 0, \rho] = w_0[\mathbf{v}, I, h, p, \rho]. \quad (3)$$

3. Уравнение (2) легко решается методом характеристик. Соответствующие ему характеристические уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} = 2h^2 - p, \quad \frac{dp}{dx} = 2hp, \quad \frac{d\rho}{dx} = \frac{\mathbf{v}}{k}, \\ \frac{dI}{dx} = 2hl, \quad \frac{dw}{dx} = -10hw. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим подробнее только первые два из них, поскольку решения остальных очевидны. После замены переменных

$$h = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad p = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad (5)$$

где R_1, R_2 — главные радиусы фазового фронта в данной лучевой трубке, эти уравнения переходят в легко решаемые физически очевидные уравнения:

$$\frac{dR_{1,2}}{dx} + 1 = 0.$$

Решая систему (4), найдем после несложных преобразований плотность вероятности w , удовлетворяющую уравнению (2) и граничному условию (3):

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{|1 + 2hx + px^2|^5} \times \\ \times w_0 \left[\mathbf{v}, \frac{I}{|1 + 2hx + px^2|}, \frac{h + px}{1 + 2hx + px^2}, \frac{p}{1 + 2hx + px^2}; \rho - vx \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

4. Анализ этого выражения приводит к выводу (ср. с [11]), что на расстояниях от экрана, на которых вероятность появления каустик отлична от нуля, (6) уже не является плотностью вероятности, а может быть представлено в виде

$$w = \sum_{N=1}^{\infty} P(N; x, \rho) \sum_{n=1}^N w[\mathbf{v}, I, h, p; x, \rho | n, N], \quad (7)$$

где $P(N; x, \rho)$ — вероятность того, что в точку (x, ρ) приходит N волн, а $w[\mathbf{v}, I, h, p; x, \rho | n, N]$ — плотность вероятности n -й волны в данной точке при условии, что в эту точку приходит всего N волн.

Соответственно нормировка ω , заданная выражением (6), равна среднему числу волн, приходящих в данную точку, $\langle N(x, \rho) \rangle$.

В дальнейшем для простоты мы будем изучать только волны статистически однородные по поперечным координатам, т. е. предположим, что ω_0 не зависит от ρ . В этом случае, интегрируя (6) по v, I, h, p и делая замену переменных

$$h_0 = \frac{h + px}{1 + 2hx + px^2}, \quad p_0 = \frac{p}{1 + 2hx + px^2},$$

получим следующую формулу для среднего числа волн:

$$\langle N(x, \rho) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} H_0[h, p] |1 - 2hx + px^2| dh dp. \quad (8)$$

Здесь

$$H_0[h, p] = \int_0^{\infty} dI \int_{-\infty}^{\infty} w_0[v, I, h, p] dv$$

— совместная плотность вероятности средней и гауссовой кривизны фазового фронта волны на выходе из фазового экрана.

На тех расстояниях от фазового экрана, на которых каустики еще не успели образоваться и где в каждую точку приходит только одна волна, выражение (6) является плотностью вероятности и $\langle N \rangle = 1$. Покажем, как это равенство следует из (8).

Выражая h и p по формуле (5) через главные радиусы кривизны, найдем, что

$$|1 - 2hx + px^2| = \left| \left(1 - \frac{x}{R_1}\right) \left(1 - \frac{x}{R_2}\right) \right|. \quad (9)$$

Очевидно, если главные радиусы кривизны фазового фронта волны при $x = 0$ не меньше некоторой величины $|R|^*$, то каустики появляются только при $x \geq |R|^*$. На расстояниях же $x < |R|^*$ каустик еще нет и $1 - x/R_1, 2 > 0$ для всех R_1, R_2 , при которых $H_0[h, p] \neq 0$. Следовательно, согласно (9), модуль в выражении (8) на таких расстояниях берется от положительной величины, и поэтому можно в данном случае переписать равенство (8) так:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} H_0[h, p] dh dp - 2x \iint_{-\infty}^{\infty} h H_0[h, p] dh dp + \\ &\quad + x^2 \iint_{-\infty}^{\infty} p H_0[h, p] dh dp = 1, \end{aligned}$$

поскольку

$$\iint_{-\infty}^{\infty} h H_0[h, p] dh dp = -\frac{1}{2k} \Delta_{\perp} \langle S(0, \rho) \rangle = 0,$$

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} p H_0[h, p] dh dp &= \frac{1}{k^2} \left\langle \frac{\partial^2 S(0, \rho)}{\partial \rho_1^2} \frac{\partial^2 S(0, \rho)}{\partial \rho_2^2} \right\rangle - \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \left\langle \left(\frac{\partial^2 S(0, \rho)}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \right)^2 \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

5. Пожалуй, наиболее важной вероятностной характеристикой световой волны за фазовым экраном является плотность вероятности ее интенсивности $G[I; x, p]$. Интегрируя (6) по v, h и p и считая, что w_0 не зависит от p , после несложных преобразований получим

$$G[I; x] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_0 [I | 1 - 2hx + px^2 |, h, p] (1 - 2hx + px^2)^2 dh dp, \quad (10)$$

где

$$\bar{w}_0 [I, h, p] = \int_{-\infty}^{\infty} w_0 [v, I, h, p] dv.$$

Простейшим следствием (10) является независимость $\langle I(x, p) \rangle$ от x .

6. Применим полученные выше формулы к исследованию статистических свойств волны за конкретным фазовым экраном. Пусть фазовые искажения, вносимые экраном,—гауссова с известной структурной функцией:

$$\langle [S(p_1) - S(p_1 + p)]^2 \rangle = A[p] = \frac{D}{2} p^2 - \frac{B}{8} p^4 + \dots$$

Для определенности будем полагать еще, что на экран падает плоская волна единичной интенсивности. При этом w_0 принимает вид

$$w_0 = \frac{1}{D} \exp \left[-\frac{v^2}{D} \right] \delta(I - 1) \times \quad (11) \\ \times \frac{k^3}{V(2\pi B)^3} \exp \left[-\frac{k^2}{2B} (3h^2 - 2p) \right] [1 + \operatorname{sgn}(h^2 - p)].$$

Равенство нулю w_0 при $h^2 - p < 0$ связано с тем, что согласно (5)

$$h^2 - p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 \geq 0.$$

7. Подставляя (11) в (8), нетрудно найти среднее число волн, приходящих в точку на расстоянии x от экрана:

$$\langle N \rangle = 1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{2Bx^2}{\sqrt{3}k^2} \right) \exp \left\{ -\frac{23}{24} \frac{k^2}{Bx^2} \right\}. \quad (12)$$

Выражение (12) отлично от единицы в любых сколь угодно близких к экрану точках. Это означает, что каустики образуются сразу за фазовым экраном, и указывает на определенную несовместимость одновременного предположения о гауссовойости $S(p)$ и справедливости геометрооптического приближения.

8. Подставляя (11) в (10), найдем $G[I; x]$:

$$G[I; x] = \frac{k^2}{\sqrt{3Bx^2} I^3} \left\{ \exp \left\{ -\frac{k^2}{Bx^2} - \frac{k^2}{3Bx^2} \right\} + \right.$$

$$+ \exp \left\{ \frac{k^2}{Bx^2 I} - \frac{k^2}{3Bx^2} \right\} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{3k^2}{IBx^2}} + \sqrt{\frac{k^2}{3Bx^2}} \right) + \right. \\ \left. + \Phi \left(-\sqrt{\frac{3k^2}{IBx^2}} + \sqrt{\frac{k^2}{3Bx^2}} \right) \right], \quad (13)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right] dt.$$

Согласно (7), (13) представляет собой взвешенную сумму плотностей вероятности интенсивности каждой из нескольких волн, приходящих в данную точку.

Выясним поведение $G[I; x]$ при $I \rightarrow \infty$. Как видно из (13),

$$G[I; x] = \frac{2k^2}{I^3 \sqrt{3} Bx^2} \exp \left[-\frac{k^2}{3Bx^2} \right], \quad (14)$$

т. е. при больших $I G[I; x]$ спадает, как $1/I^3$, — настолько медленно, что $\langle I^n \rangle = \infty$ при $n \geq 2$. Этот результат есть следствие особенностей интенсивности волны на каустических поверхностях, образующихся за фазовым экраном.

Такое медленное спадание $G[I; x]$ при $I \rightarrow \infty$ легко объяснить, предположив, что $I(x, \rho)$ — эргодическая функция по поперечным координатам, для которой

$$\langle I^n(x, \rho) \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L I^n(x, \rho_1, 0) d\rho_1. \quad (15)$$

Как известно (см., например, [12]), интенсивность волны, рассчитанная в приближении геометрической оптики, имеет вблизи каустических поверхностей особенности типа $1/\sqrt{\rho_1 - \rho_0}$, где ρ_0 — координата пересечения прямой $(x, \rho_2 = 0)$ и данной каустической поверхности. Поэтому интеграл в (15), а значит и $\langle I^n \rangle$, обращается в бесконечность, как только $n \geq 2$. Таким образом, $G[I; x]$ спадает при $I \rightarrow \infty$, как $1/I^3$, из-за того, что реализации интенсивности имеют вблизи каусгик особенности типа $1/\sqrt{\rho_{1,2}}$.

9. Отметим, что попытка вычислить плотность вероятности интенсивности за двумерным фазовым экраном в приближении геометрической оптики делалась в работе [8]. Однако в ней моделью фазового экрана служил набор линз со случайной, распределенной по Гауссу кривизной. Главные радиусы кривизны каждой такой линзы считались одинаковыми, что приводит к особенностям интенсивности волны типа фокусов и, как следствие этого, к более медленному спаданию $G[I; x]$ при $I \rightarrow \infty$ (как $1/I^{3/2}$). В случае же реального фазового экрана, рассмотренного выше, вероятность образования фокусов равна нулю, и поэтому выражение (14) сильно отличается от аналогичного выражения, найденного в [8]*.

* После того, как эта статья была направлена в печать, нам стало известно, что в работе [4] рассмотрена линзовая модель двумерного фазового экрана с некоррелированными фокусирующими свойствами, приводящая к асимптотике $G \sim 1/I^n$. Однако, из этой работы не ясно, каким статистическим свойствам фазовых искажений, вносимых экраном, соответствует предложенная модель.

Сделаем еще замечание о поведении «хвоста» плотности вероятности интенсивности световой волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде. Очевидно, как и в разобранном случае волны за фазовым экраном, они определяются поведением интенсивности волны в окрестности неособых каустик. Следовательно, как и плотность вероятности интенсивности за случайным фазовым экраном, вероятностное распределение интенсивности волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде и рассмотренной в приближении геометрической оптики, спадает при больших I , как $1/I^3$.

10. Покажем, как плотность вероятности интенсивности, полученная в [8], может быть найдена в рамках данного рассмотрения. Если в каждой точке плоскости $x = 0$ находятся сферические линзы, кривизна каждой из которых случайна и имеет гауссово распределение, то $w_0[I, h, p]$ — плотность вероятности интенсивности, средней и гауссовой кривизны первоначальной плоской волны — на выходе из такого фазового экрана принимает вид

$$\bar{w}_0 = \delta(I - 1) \delta(h^2 - p) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (16)$$

где σ — дисперсия флюктуаций кривизны линз. Дельта-функция от $h^2 - p$ отражает здесь тот факт, что главные радиусы кривизны каждой из линз, составляющих фазовый экран, равны между собой. Подставляя (16) в (10), получим

$$G(I; x) = \frac{1}{xI^2 \sqrt{I} 8\pi\sigma^2} \left\{ \exp\left[-\frac{(1 + 1/\sqrt{I})^2}{2x^2\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(1 - 1/\sqrt{I})^2}{2x^2\sigma^2}\right] \right\},$$

что совпадает с точностью до обозначений с выражением, найденным в [8]. Подставляя следующую из (16) совместную плотность вероятности h и p сразу за экраном в (8), вычислим и среднее число волн, приходящих в точку на расстоянии x от данного экрана:

$$\langle N \rangle = 1 + \sigma^2 x^2.$$

Таким образом, несмотря на то, что в точки фокусов за экраном приходит сразу бесконечное число лучей, среднее их число ограничено. Это объясняется тем, что вклад в вероятностную меру от точек, в которые приходит бесконечное число волн, равен нулю.

Приведем в заключение плотность вероятности интенсивности за одномерным фазовым экраном. При этом один из главных радиусов кривизны тождественно равен нулю и $w_0[I, h, p]$ принимает вид

$$\bar{w}_0 = \delta(I - 1) \delta(p) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right].$$

В этом случае (10) приводит к следующей плотности вероятности:

$$G[I; x] = \frac{1}{I^3 x \sqrt{8\pi\sigma^2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(1 + 1/I)^2}{8\sigma^2 x^2}\right] + \exp\left[-\frac{(1 - 1/I)^2}{8\sigma^2 x^2}\right] \right\}.$$

Это выражение было получено ранее в работах [7, 8]. Среднее число волн за одномерным фазовым экраном равно [11]

$$\langle N \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2\sqrt{2}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + 2\sigma_x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{8\sigma^2 x^2}\right\}.$$

11. Остановимся еще на нескольких характеристиках световых волн за фазовым экраном, связанных с образованием каустик. Пока среднее число волн на некотором расстоянии x от фазового экрана невелико ($\langle N \rangle \leq 2$), удается, зная $\langle N \rangle$, определить на поперечной плоскости область, в точки которой приходит сразу несколько волн. Действительно, в этом случае можно в равенстве

$$\langle N \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} NP(N; x)$$

пренебречь вероятностями $P(N; x)$ при $N \geq 5$ и записать его так:

$$\langle N \rangle \approx P_1 + 3P_3, \quad P_1 + P_3 \approx 1.$$

Отсюда та часть поперечной плоскости, в точки которой приходит несколько волн, равна

$$P_3 \approx \frac{\langle N \rangle - 1}{2}. \quad (17)$$

Другой интересной характеристикой световой волны за фазовым экраном является средняя плотность каустик. Рассмотрим для простоты одномерный фазовый экран. В этом случае средняя плотность каустик на расстоянии x от фазового экрана $C(x)$ равна плотности пересечений уровня $-1/2x$ функцией средней кривизны волны непосредственно за фазовым экраном $h_0(\rho)$.

Как известно [13], если совместная плотность вероятности $h_0(\rho)$ и ее производной $\alpha = dh_0/d\rho$ в той же точке равна $W[h, \alpha]$, то

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| W[-1/2x, \alpha] d\alpha. \quad (18)$$

Если фазовые флуктуации экрана гауссова и

$$W[h, \alpha] = \frac{1}{2\pi\sigma\alpha} \exp\left[-\frac{h^2}{2\sigma^2} - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right],$$

равенство (18) принимает вид

$$C(x) = \frac{\sigma_x}{\sigma} \frac{4}{\pi} \exp\left[-\frac{1}{8\sigma^2 x^2}\right].$$

Как видно отсюда, на больших расстояниях от экрана происходит «насыщение» каустиками и их среднее число стремится к максимальному $C(\infty) = 4\sigma_x/\pi\sigma$. Насыщенность поперечной плоскости каустиками характеризует относительное число каустик:

$$S(x) = \frac{C(x)}{C(\infty)} = \exp\left[-\frac{1}{8\sigma^2 x^2}\right]. \quad (19)$$

Нетрудно заметить в выражениях для среднего числа волн и асимптотического поведения $G[I; x]$ наличие экспоненты типа (19). Это еще раз указывает на замеченную в [10] тесную связь между статистикой каустик и статистикой флуктуаций интенсивности.

Автор благодарен А. Н. Малахову за внимание к работе и С. Н. Гурбатову за ценные замечания, а также Ю. А. Кравцову за просмотр статьи в рукописи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, № 4, 630 (1961).
2. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 1, 56 (1968).
3. R. P. Mergier, Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 382 (1962).
4. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 85 (1971).
5. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
6. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1427 (1971).
7. Е. Е. Salpeter, Astrophys. J., 147, № 2, 433 (1967).
8. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1541 (1973).
9. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 6, 2080 (1974).
10. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, вып. 3, 798 (1968).
11. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, ЖЭТФ, 67, вып. 3, 940 (1974).
12. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд. Наука, М., 1972.
13. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, изд. Сов. радио, М., 1969.
14. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Препринт НИРФИ, № 48, Горький, 1974.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
5 ноября 1974 г.

THE STATISTICS OF WAVE INTENSITY BEHIND THE PHASE SCREEN IN THE GEOMETRICAL OPTICS APPROXIMATION

A. I. Saichev

A theoretical investigation is made of a small-angular geometrical optics approximation of the probability intensity distribution of a light wave behind the two-dimensional phase screen formed by a thin layer filled by a randomly-inhomogeneous medium. It is shown, in particular, that for large intensities the probability intensity distribution is inversely proportional to the three-power intensity that is due to the peculiarities of the wave amplitude near caustic surfaces. The mean number of rays coming to the points behind the screen is calculated.

УДК 621.372.413

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП К ЗАДАЧЕ О НАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

М. П. Базарова

Рассматривается скалярная задача о нахождении собственных частот и собственных функций симметричных резонаторов. Решение представляется в виде разложения по линейным комбинациям решений уравнения Гельмгольца в сферической системе координат, преобразующимся по неприводимым представлениям группы симметрии резонатора. В качестве примера рассчитана наименьшая собственная частота резонатора, имеющего форму октаэдра. Для оценки точности расчета аналогичные вычисления выполнены для кубического резонатора

Метод теории групп для исследования задач дифракции и классификации собственных частот симметричных резонаторов использовался в работах [1-4]. В настоящей работе теория представлений групп применяется для нахождения собственных частот симметричных резонаторов.

Рассмотрим трехмерную задачу о собственных значениях скалярного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности S , инвариантными относительно точечной группы G . Решение этой граничной задачи можно представить в виде разложения по решениям уравнения Гельмгольца в сферической системе координат

$$\Psi(\rho, \theta, \varphi) = \sum_l A_l \left[\sum_m C_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi) \right] P_l(k\rho), \quad (2)$$

где $Y_l^m(\theta, \varphi)$ — сферические функции, $l = 0, 1, 2, \dots$,

$$m = -l, -(l-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l,$$

$P_l(k\rho)$ — решения радиальной части уравнения Гельмгольца,

$$P_l(k\rho) = \frac{1}{V\rho} J_{l+1/2}(k\rho), \quad (3)$$

где $J_{l+1/2}(k\rho)$ — функция Бесселя полуцелого индекса. Постоянные коэффициенты в разложении (2) и значения k следует выбрать так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям. Точность решения граничной задачи определяется, очевидно, числом оставленных в разложении (2) членов.

Известно, что собственные функции граничной задачи (1) всегда можно выбрать так, чтобы они образовывали базисы неприводимых представлений группы симметрии граничной задачи [5]. Используем это свойство симметрии точного решения для нахождения приближенного

решения граничной задачи (1). Будем искать решение, преобразующееся по одному из неприводимых представлений группы симметрии задачи, в виде разложения по решениям дифференциального уравнения, преобразующимся по этому же представлению.

Обозначим линейные комбинации сферических функций Y_l^m , образующие базисы неприводимых представлений группы G , через

$$K_{it}^{(l)(j)}(\theta, \varphi) = \sum_m C_{itm}^{(l)(j)} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4)$$

где индекс t нумерует повторяющиеся неприводимые представления $\Gamma^{(i)}$ группы G в разложении пространства $R^{(l)}$ размерности $2l+1$, индекс i нумерует орты базисов этих представлений, индексы l и j соответствуют неприводимым представлениям групп O^+ (3) и G . Решение уравнения Гельмгольца, обладающее симметрией неприводимого представления $\Gamma^{(j)}$ группы G , может быть представлено тогда в виде

$$\Psi_i^{(j)} = \sum_{l,t} A_{lt} K_{it}^{(l)(j)} P_l(k\rho). \quad (5)$$

Функция $\Psi_i^{(j)}$ является i -м ортом базиса неприводимого представления группы G , причем всем ортам одного базиса соответствует одна и та же собственная частота.

Рассмотрим задачу о нахождении собственных колебаний акустического резонатора в форме октаэдра (рис. 1), сводящуюся к решению уравнения Гельмгольца (1) с граничным условием

$$\Psi | S = 0, \quad (6)$$

где S —поверхность октаэдра. Группой симметрии октаэдра является группа куба O_h . Линейные комбинации сферических функций, образующие базисы неприводимых представлений группы O_h (так называемые кубические гармоники), приведены в работе [7]. Первые три кубические гармоники, преобразующиеся, например, по тождественному представлению группы O_h , имеют вид

$$K_{11}^{(1)(1)} = 1,$$

$$K_{11}^{(4)(1)} = \frac{5\sqrt{21}}{4} \frac{1}{\rho^4} \left(x^4 + y^4 + z^4 - \frac{3}{5} \rho^4 \right), \quad (7)$$

$$K_{11}^{(6)(1)} = \frac{21 \cdot 11 \cdot \sqrt{26}}{8} \frac{1}{\rho^6} \left[x^2 y^2 z^2 + \frac{\rho^2}{22} \left(x^4 + y^4 + z^4 - \frac{3}{5} \rho^4 \right) - \frac{1}{105} \rho^6 \right],$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Приближенное решение граничной задачи (6), (1), преобразующееся по тождественному представлению ($j=1$) группы O_h , представим отрезком ряда (5), полагая $l \leq l_1$. Потребуем выполнения граничных условий (6) «в среднем», используя метод, предложенный в работе [7]. С этой целью введем цилиндрические координаты r, α, ξ на грани октаэдра (ось ξ нормальна к плоскости грани). Можно показать, что связь между декартовыми и введенными цилиндрическими координатами имеет следующий вид (длина ребра октаэдра принята равной $\sqrt{2}$):

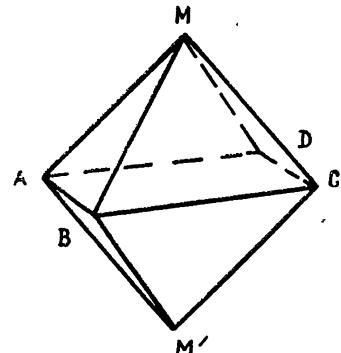


Рис. 1.

$$x = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} r \sin \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \alpha,$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} r \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \alpha, \quad (8)$$

$$z = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin \alpha$$

(см. рис. 2).

Переходя в выражениях кубических гармоник от декартовых координат к цилиндрическим, рассмотрим, например, решение $\Psi^{(1)}$, преобразующееся по тождественному представлению, на окружности, которая получается от пересечения поверхности октаэдра со сферой радиуса ρ . Очевидно, что приближенное решение $\Psi^{(1)}(r, \alpha, \rho)$ при фиксированных r и ρ можно рассматривать как отрезок ряда Фурье для функции $\Psi^{(1)}$:

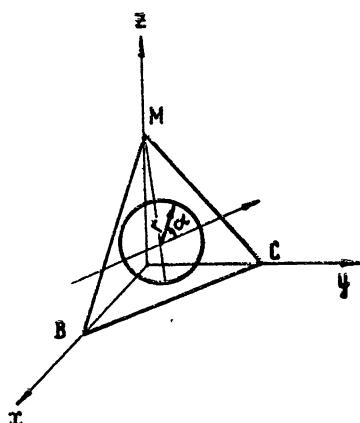


Рис. 2.

$$\Psi^{(1)} = \sum_{l,t} A_{lt} P_l(k\rho) \left[\sum_n B_{ltn}(r, \rho) \cos n\alpha + \sum_m B_{ltm}(r, \rho) \sin m\alpha \right]. \quad (9)$$

Так как решение $\Psi^{(1)}$ должно удовлетворять граничным условиям (6), то приравняем нуль коэффициенты Фурье в разложении (9). Для нахождения неизвестных коэффициентов A_{lt} получим тогда линейную систему уравнений, а неизвестные собственные значения k найдем из условия обращения в нуль определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных A_{lt} .

Проведенные вычисления показали, что если ограничиться требованием выполнения граничных условий на одной окружности, то собственные значения будут определяться нулями функций Бесселя $J_{1/2}(k\rho)$, $J_{9/2}(k\rho)$, ..., где ρ — расстояние от центра октаэдра до точек окружности. Отсюда следует, что значение k_{\min} в этом приближении существенно зависит от величины ρ . Если за ρ выбрать радиус сферы, объем которой равен объему октаэдра, то приближенное наименьшее собственное значение k_{\min} будет равно 5,44. Для уточнения результата потребуем выполнения граничных условий на нескольких окружностях, взятых на грани октаэдра. Систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A_{lt} мы получим, погрешав, чтобы сумма квадратов коэффициентов Фурье в разложении (9) для всех рассматриваемых окружностей была бы минимальной.

Для иллюстрации эффективности этого метода был выполнен расчет основного собственного значения k октаэдра при учете двух первых кубических гармоник. Граничные условия накладывались в центре грани октаэдра и на трех окружностях с радиусами 0,1; 0,25; 0,36. Приближенное наименьшее собственное значение k оказалось равным 4,82.

Для оценки точности результата аналогичный расчет был выполнен для нахождения основного собственного значения резонатора в фор-

ме куба. При выполнении граничных условий на окружности, получающейся от пересечения поверхности куба со сферой, объем которой равен объему куба, приближенное наименьшее собственное значение оказалось равным 2,53 (длина ребра куба принята равной 2, см. рис. 3). Если же потребовать выполнения граничных условий в центре грани куба и на трех окружностях с радиусами 0,37; 0,73; 1, то соответствующее приближенное значение k_{\min} будет равно 2,72. Сравнивая эту величину с точным значением $k_{\min} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, можно сделать вывод, что при учете двух членов разложения погрешность в определении основной собственной частоты составляет величину, меньшую, чем 1%.

Описанный алгоритм позволяет провести численные расчеты низших собственных частот и собственных функций для различных симметричных резонаторов.

В заключение автор выражает благодарность Г. И. Макарову и В. Н. Красильникову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Е. Кинбер, А. Б. Котляр, Радиотехника и электроника, 16, вып. 4 (1971).
2. Н. А. Сапогова, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 12, 1869 (1971).
3. В. В. Гаплевский, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 12, 1906 (1971).
4. R. M. Bevensee, Arch. der Electr. Ubertragung, 16, № 9, 449 (1962).
5. В. А. Лайлд, IRE Trans., MTT-7, 238 (1959).
6. Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, М., 1957.
7. Н. А. Bath, F. Lage, Phys. Rev., 71, 612 (1947) (перевод в книге «Симметрия в твердом теле», М., 1970).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
28 мая 1974 г.,
после доработки
7 апреля 1975 г.

APPLICATION OF THE GROUP REPRESENTATION THEORY TO THE EIGENVALUE PROBLEM OF SYMMETRICAL RESONATOR OSCILLATIONS

M. P. Bazarova

A scalar problem of finding natural oscillations and eigen functions of symmetrical resonators is considered. The solution represented as the expansion over linear combinations of the solutions of Helmholtz equation in a spherical coordinate system which are transformed over irreducible group representations of the resonator symmetry. As an example, the lowest eigen frequency of the resonator having the form of octahedron is calculated. To estimate the calculation accuracy analogous calculation are made for a cubic resonator.

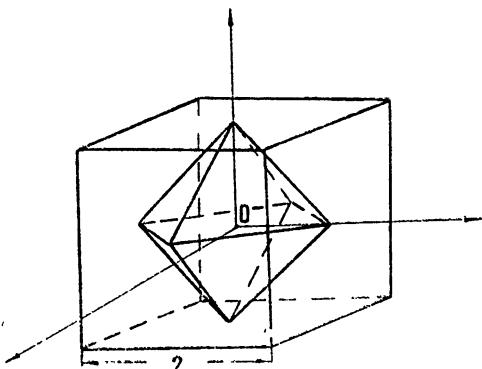


Рис. 3

УДК 621.372.8

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ В ПЛОСКОМ ИМПЕДАНСНОМ ВОЛНОВОДЕ

Т. И. Бичуцкая

Исследуются некоторые характеристики нормальных ТМ-волн в зависимости от электрических свойств стенок волновода на основе анализа линий нулей, проведенного в [1, 2]. Рассматривается поведение поля вертикального электрического диполя в волноводе при наличии кратных собственных чисел в спектре поперечного оператора

Поле электромагнитных волн ТМ-типа в волноводе, образованном двумя параллельными импедансными плоскостями, при разложении по собственным функциям поперечного оператора имеет вид ряда нормальных волн [3] (зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$), если отсутствуют вырожденные собственные числа в спектре оператора. Такие характеристики нормальных волн, как фазовая скорость (v_ϕ), затухание (σ) и высотный множитель $f(z/h)$ определяются следующими соотношениями [3]:

$$\frac{v_\phi}{c} = \frac{\beta}{\operatorname{Re} \sqrt{\beta^2 - \eta^2}}; \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{1}{h} \operatorname{Im} \sqrt{\beta^2 - \eta^2}; \quad (2)$$

$$f\left(\frac{z}{h}\right) = \cos\left(\eta \frac{z}{h}\right) - \frac{i \delta_1 \beta}{\eta} \sin\left(\eta \frac{z}{h}\right), \quad (3)$$

где η — модифицированное собственное значение (МСЗ), c — скорость света, $\beta = kh$, k — волновое число, h — высота волновода, δ_1 и δ_2 — приведенные поверхностные импедансы его нижней и верхней стенок соответственно, z — поперечная координата, отсчитываемая от нижней стеки волновода.

Будем исследовать поведение затухания (2) и фазовой скорости (1) при изменении обоих параметров δ_1 и δ_2 . Для этой цели используем построенные в [1, 2] линии нулей, которые можно рассматривать, как геометрическое место МСЗ при изменении $|\delta|_{1,2}$ от 0 до ∞ и фиксированных $\arg \delta_{1,2}$. Указанные характеристики изучим в основном для нулевой моды, которая является определяющей в диапазоне СДВ при распространении электромагнитных волн в волноводном канале Земля—ионосфера. Эта же мода используется для волноводной связи на волнах короче 10 см и в однопроводных линиях с диэлектрическим покрытием на дециметровых и сантиметровых волнах [4–6], где она является поверхностной волной.

1. Рассмотрим вначале фазовые скорости нулевой и первой мод v_ϕ^0 и v_ϕ^1 как для чисто мнимых импедансов стенок волновода, так

и для произвольных комплексных импедансов, удовлетворяющих условию физической осуществимости пассивных структур ($\operatorname{Re} \delta_{1,2} \geq 0$). Прежде всего отметим, что для вещественных МСЗ фазовую скорость нулевой моды (1) имеет смысл рассматривать лишь для $\beta > \beta_{rp}$, которое для $\beta_{rp} \ll 1$ может быть приближенно определено из уравнения для собственных чисел:

$$\beta_{rp} \approx \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} \delta_1) + \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} \delta_2).$$

Кроме того, согласно уравнению для собственных чисел и выражению (1) $v_\phi^0|_{\delta\beta=0}=0$ и $v_\phi^1|_{\delta\beta=0} = \frac{c}{(1-\pi^2/\beta^2)^{1/2}}$. Дальнейшее поведение $v_\phi^{0,1}(|\delta\beta|)$ будем изучать, исследуя картину линий нулей, представленную на рис. 1. На рис. 1 светлыми и черными точками изображены МСЗ для стенок волновода без потерь и использованы обозначения типа $e-e$, $e-u$ (e —емкостный, u —индуктивный), при этом первая буква обозначает характер импеданса нижней стенки, вторая — верхней. Такие обозначения будут использованы нами и в дальнейшем. На рис. 1 изображены также линии нулей кривыми, помеченными цифрами, рассчитанные для разных импедансов стенок, значения которых указаны на рисунке. Стрелками отмечено направление перемещения МСЗ по линиям нулей с ростом $|\delta_{1,2}|$.

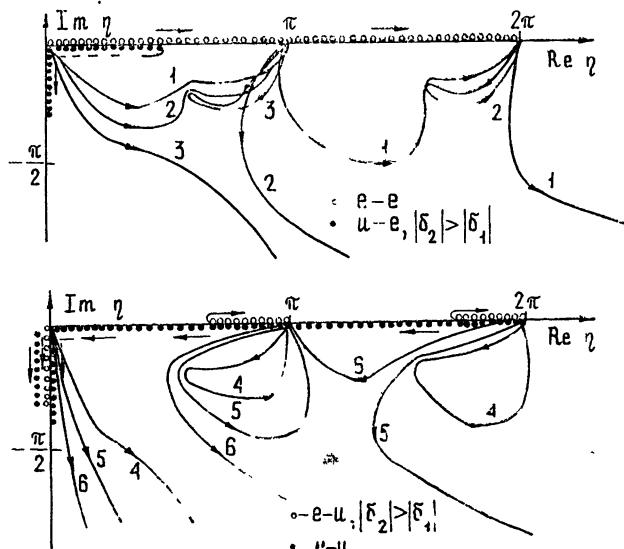


Рис. 1. Динамика МСЗ для $|\delta_1| = 0,1 |\delta_2|$:

$$\begin{aligned} 1 - \arg \delta_1 &= 27^\circ, \arg \delta_2 = -18^\circ; \quad 2 - \arg \delta_1 = 7^\circ, \arg \delta_2 = -38^\circ; \\ 3 - \arg \delta_1 &= 1^\circ, 5, \arg \delta_2 = -43^\circ, 5; \quad 4 - \arg \delta_1 = -7^\circ, \arg \delta_2 = \\ &= -52^\circ; \quad 5 - \arg \delta_1 = -25^\circ, \arg \delta_2 = -70^\circ, \quad 6 - \arg \delta_1 = \\ &= -36^\circ, \arg \delta_2 = -81^\circ. \end{aligned}$$

В случае чисто емкостных импедансов обеих стенок, когда МСЗ нулевой и первой мод вещественны и возрастают с ростом $|\delta|$, фазовые скорости $v_\phi^{0,1}$ согласно (1) будут растущими функциями $|\delta|$ с предельными значениями $v_\phi^0 \xrightarrow{|\delta| \rightarrow \infty} \frac{c}{(1-\pi^2/\beta^2)^{1/2}}$ и $v_\phi^1 \xrightarrow{|\delta| \rightarrow \infty} \frac{c}{(1-4\pi^2/\beta^2)^{1/2}}$ соответственно. При разноименных чисто мнимых импедансах обеих стенок, поскольку МСЗ нулевой и первой мод ведут себя различным

образом, с ростом $|\delta|$ в зависимости от знака $\operatorname{Im} \delta_2$, где $\delta_2 = \delta_1 + \delta_2$, рассмотрим последовательно фазовые скорости для разных знаков $\operatorname{Im} \delta_2$. Если $\operatorname{Im} \delta_2 > 0$, то фазовые скорости, согласно (1), будут иметь максимум в точках поворота соответствующих линий нулей, после прохождения которого фазовая скорость первой моды будет убывать до начального значения $v_{\phi}^1 \xrightarrow{|\delta| \rightarrow \infty} \frac{c}{(1 - \pi^2/\beta^2)^{1/2}}$, а фазовая скорость нулевой моды с ростом $|\delta|$ будет монотонно стремиться к нулю, принимая значение $v_{\phi}^0 = c$ при некотором $|\delta|_{kp}$.

Воспользуемся уравнением для МСЗ [1] и найдем $|\delta_{kp}|$ в виде

$$\operatorname{Im} \delta_{2 kp} = - \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{1 + \beta \operatorname{Im} \delta_1}. \quad (4)$$

Если $\operatorname{Im} \delta_2 < 0$, то фазовая скорость нулевой моды согласно (1) и рис. 1 — убывающая функция $|\delta|$, а фазовая скорость первой моды имеет минимум в точке поворота линий нулей и затем с ростом $|\delta|$ v_{ϕ}^1

стремится к своему начальному значению $v_{\phi}^1 \xrightarrow{|\delta| \rightarrow \infty} \frac{c}{(1 - \pi^2/\beta^2)^{1/2}}$.

В случае чисто индуктивных импедансов обеих стенок, когда МСЗ нулевой моды чисто мнимые, а МСЗ первой моды с ростом $|\delta|$ перемещаются по вещественной оси от $\eta = \pi$ к $\eta = 0$ и затем при $|\delta| > |\delta_{kp}|$ уходят по мнимой отрицательной полуоси на бесконечность, фазовые скорости обеих мод — монотонно убывающие функции $|\delta|$, при этом $v_{\phi}^1(|\delta|_{kp}) = c$, где $|\delta_{kp}|$ определяется соотношением (4).

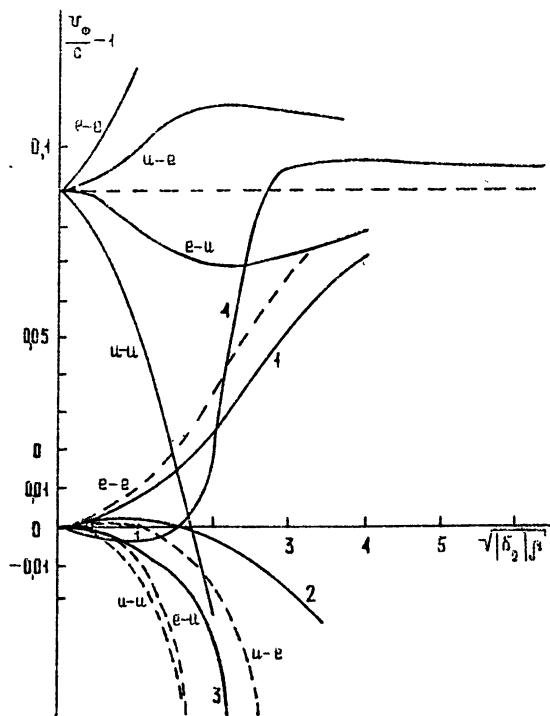


Рис. 2. Фазовые скорости нулевой и первой мод $\beta = 7,92$:
 1 — $\arg \delta_1 = 16^\circ$, $|\delta_1| = 0,5 |\delta_2|$; 2 — $\arg \delta_1 = -\arg \delta_2 = -45^\circ$,
 $|\delta_1| = 0,5 |\delta_2|$; 3 — $\arg \delta_1 = -6^\circ$, $\arg \delta_2 = -51^\circ$, $|\delta_1| = 0,1 |\delta_2|$;
 4 — $\arg \delta_1 = -27^\circ$, $|\delta_1| = |\delta_2|$; $e-e$, $u-e$, $e-u$, $u-u$: $|\delta_1| = 0,5 |\delta_2|$.

Качественный характер поведения фазовых скоростей для чисто мнимых импедансов стенок подтверждается расчетами, приведенными на рис. 2 пунктирными и сплошными кривыми с индексами, поясняющими характер импеданса стенок. Параметры расчета указаны на рисунке.

Из анализа (1) и рис. 1, 2 следует, что при чисто мнимых импедансах первая мода всегда быстрая, за исключением случая чисто индуктивных импедансов обеих стенок при $|\delta| > |\delta_{kp}|$, когда первая мода переходит в поверхностную волну [1] и ее фазовая скорость становится меньше скорости света. Нулевая же мода оказывается быстрой лишь при чисто емкостных импедансах стенок и при разноименных чисто мнимых импедансах, если $|\delta| < |\delta_{kp}|$, когда больший импеданс чисто емкостный. В остальных случаях нулевая мода переходит в поверхностную волну с $v_\phi < c$.

В случае комплексных импедансов стенок рассмотрим фазовую скорость только нулевой моды. При этом, воспользовавшись выражением для собственного числа в окрестности точек выхода ($\delta\beta = 0$) и входа ($\delta\beta = \infty$), получим для фазовой скорости при $\beta > \pi$ представление

$$\frac{v_\phi}{c} \approx \begin{cases} 1 + \frac{\operatorname{Im} \delta_z}{2\beta} & \text{для } |\delta\beta| \ll 1 \\ 1 + \frac{\pi^2}{2\beta^2} - \frac{\pi^2}{\beta^2} \left(\frac{\operatorname{Im} \delta_1 \beta}{|\delta_1 \beta|^2} + \frac{\operatorname{Im} \delta_2 \beta}{|\delta_2 \beta|^2} \right) & \text{для } |\delta\beta| \gg 1, \\ -\frac{1}{\operatorname{Im} \delta_i} & \text{для } |\delta\beta| \gg 1 \text{ и } \arg \delta < \arg \delta_{kp} \end{cases} \quad (5)$$

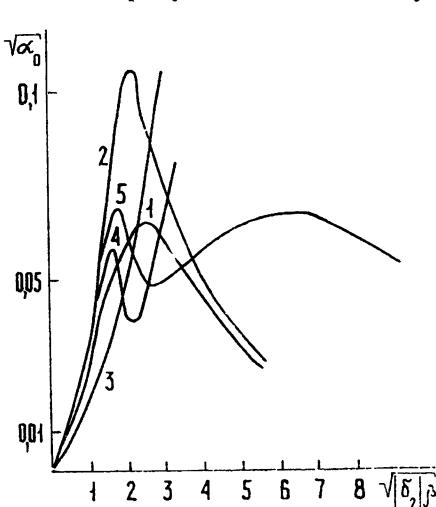
где $\arg \delta_{kp}$ — наименьшее значение $\arg \delta$, при котором вырождаются МСЗ нулевой и первой мод, индекс «*i*» у импеданса соответствует номеру той стенки, импеданс которой индуктивен; если обе стенки имеют индуктивный импеданс, то *i* соответствует номеру стенки с большим $|\operatorname{Im} \delta|$ [1].

Из анализа выражений (5) следует, что при малых $|\delta|$ $v_\phi^0 < c$ для $\operatorname{Im} \delta_z < 0$ и $v_\phi^0 > c$ для $\operatorname{Im} \delta_z > 0$, а затем с ростом $|\delta|$ фазовая скорость нулевой моды либо стремится к $v_\phi^0 \xrightarrow{|\delta| \rightarrow \infty} \frac{c}{(1 - \pi^2/\beta^2)^{1/2}}$, либо,

если $\arg \delta < \arg \delta_{kp}$, $v_\phi^0 \xrightarrow{|\delta| \rightarrow \infty} -\frac{c}{\operatorname{Im} \delta_i}$. Эти качественные выводы подтверждаются расчетами, представленными на рис. 2 кривыми 1, 2 для $\operatorname{Im} \delta_z > 0$ и 3, 4 для $\operatorname{Im} \delta_z < 0$. Из анализа (5) и рис. 2 следует, что нулевая мода быстрая при емкостных импедансах обеих стенок и медленная, если импедансы обеих стенок индуктивные и такие, что $\arg \delta < \arg \delta_{kp}$. В остальных случаях имеет место переход фазовой скорости через значение $v_\phi^0 = c$.

2. Обратимся теперь к рассмотрению затухания α нулевой моды как функции $|\delta|$. Заметим, что рассмотренные в [1, 2] линии нулей при величинах δ_1 и δ_2 одного порядка, либо монотонно уходили в бесконечную точку входа, либо имели одну вершину, если входили в точку $\eta = \pi$. Следовательно, в таких случаях затухание, как функция $|\delta|$ или монотонно растущая кривая, или кривая, имеющая один максимум согласно (2). Расчеты затухания, выполненные на ЭВМ для указанного соотношения импедансов, представлены кривыми 1, 2, 3 на рис. 3, и, как видно из рисунка, с ростом $|\delta|$ затухание возрастает от нуля до

шекоторого максимального значения (кривые 1, 2) и затем спадает до нуля при $|\delta| \rightarrow \infty$. В случае, когда одна из стенок имеет индуктивный импеданс и его $\arg \delta < \arg \delta_{kp}$, затухание α будет расти с ростом $|\delta|$ монотонно (кривая 3 на рис. 3). Если же обе стенки индуктивны, то в малой окрестности $\arg \delta_{0 kp}$, где $\arg \delta_{0 kp}$ — значение $\arg \delta$, при котором произошло касание бесконечных линий нулевой и первой мод, линия нулевой моды на своем пути на бесконечность сама себя пересекает, образуя петлю, и ее затухание с ростом $|\delta|$ растет не монотонно



и имеет минимум (кривая 4 на рис. 3). Когда импедансы стенок волновода отличаются по меньшей мере на порядок, затухание может иметь вид двугорбой кривой (кривая 5 на рис. 3), обусловленный наличием двух вершин у соответствующей линии нулей (кривая 2 на рис. 1).

Рис. 3. Затухание нулевой моды $\beta = 7,92$:
1— $\arg \delta_1, 2=16^\circ$, $|\delta_1|=0,5 |\delta_2|$; 2— $\arg \delta_1, 2=-27^\circ$, $|\delta_1|=|\delta_2|$; 3— $\arg \delta_1=-67^\circ$, $\arg \delta_2=68^\circ$, $|\delta_1|=0,5 |\delta_2|$; 4— $\arg \delta_1=-81^\circ$, $\arg \delta_2=-51^\circ$, $|\delta_1|=0,5 |\delta_2|$; 5— $\arg \delta_1=7^\circ$, $\arg \delta_2=-38^\circ$, $|\delta_1|=0,1 |\delta_2|$.

3. Рассмотрим теперь распределение поля нулевой моды по высоте волновода. Согласно соотношению (3) и уравнению для собственных чисел при $|\eta| \ll 1$ высотный множитель может быть приближенно представлен в окрестности нижней и верхней стенок в виде

$$|f(z)|^2 \approx 1 + 2 \operatorname{Im}(\delta_1 \beta) \frac{z}{h} - \operatorname{Im}(\delta_2 \beta) \left(\frac{z}{h} \right)^2, \quad (6)$$

$$|f(h-z)|^2 \approx [1 - \operatorname{Im}(\delta_2 - \delta_1) \beta] \left[1 + 2 \operatorname{Im}(\delta_2 \beta) \frac{h-z}{h} - \operatorname{Im}(\delta_2 \beta) \left(\frac{h-z}{h} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Как следует из выражений (6) и (7), при подъеме над ёмкостной поверхностью ($\operatorname{Im} \delta \beta > 0$) поле нулевой моды возрастает, а над индуктивной ($\operatorname{Im} \delta \beta < 0$) — убывает. Поле на верхней стенке согласно соотношению (7) при равных импедансах обеих стенок будет такое же, как и на нижней, и распределение поля по высоте должно быть симметричным. Эти качественные выводы подтверждаются расчетами, выполненными на ЭВМ и представленными на рис. 4 в виде зависимостей $|f(z/h)|$ для указанных на рисунке параметров. Изменение поля на верхней стенке и его распределение на высоте волновода с ростом отношения $|\delta_1/\delta_2|$ можно проследить по кривым $e-e$, рассчитанным для $|\delta_1/\delta_2| = 0,5; 1,2$ и обозначенным на рис. 4 цифрами 1, 2, 3 соответственно. Кривая 2 на рис. 4 подтверждает качественный вывод о симметричном распределении поля по высоте волновода при равных импедансах его стенок. Кроме того, из (6), (7) и рис. 4 следует, что экстремальное значение распределения поля по высоте смещается в сторону той стенки, $|\operatorname{Im} \delta|$ которой меньше.

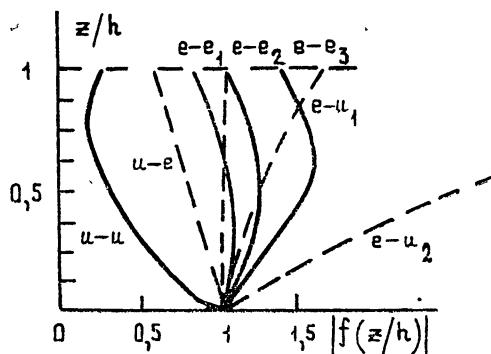
Следует отметить, что распределение поля по высоте может иметь линейный характер, что замечено и в [7], при тех значениях чисто

мнимых импедансов, когда МСЗ η переходит с вещественной оси на мнимую. Такая ситуация характерна для первой моды в случае чисто индуктивных импедансов и для нулевой моды в случае разноименных чисто мнимых импедансов, если больший импеданс одной из стенок чисто емкостный. При этом если (4) подставить в (3) и положить $\eta = 0$, то можно определить высотный множитель на верхней стенке в виде

$$f(h) = - \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{\operatorname{Im} \delta_2}. \quad (8)$$

Итак, при чисто индуктивных импедансах стенок, таких, что выполняется соотношение (4), высотный множитель первой моды будет линейно убывающей функцией высоты. В другом случае разноименных чисто мнимых импедансов, когда выполняется соотношение (4), высотный множитель нулевой моды будет линейно растущей функцией высоты.

Рис. 4. Высотный множитель:
 $u - u - \delta_1 \beta = 2,1 \exp(-i82^\circ)$, $\delta_2 \beta = 4,2 \exp(-i52^\circ)$; $u - e - \delta_1 \beta = 0,5 \exp(-i\frac{\pi}{4})$, $\delta_2 \beta_1 = e^{i(\pi/4)}$;
 $e - u_1 - \delta_1 \beta = 0,5 \exp(i45^\circ)$, $\delta_2 \beta = \exp(-i44^\circ)$; $e - u_2 - \delta_1 \beta = 2,1 \exp(i45^\circ)$, $\delta_2 \beta = 4,2 \exp(-i44^\circ)$;
 $e - e_1 - \delta_1 \beta = 0,5i$, $\delta_2 \beta = i$; $e - e_2 - \delta_{1,2} \beta = i$; $e - e_3 - \delta_1 \beta = 2i$, $\delta_2 \beta = i$.



4. Перейдем, наконец, к вычислению электрической компоненты E_z поля вертикального электрического диполя при наличии кратных собственных чисел в спектре поперечного оператора L_x [3]. Наибольшая степень кратности собственных чисел в плоском изотропном импедансном волноводе равна трем [1, 2]. Однако трудно ожидать в волноводе Земля—ионосфера появление трехкратно вырожденного собственного числа, поскольку последнее имеет место лишь в волноводе, образованном средами с близкими свойствами [1]. Поэтому построим поле с помощью присоединенных волн [8] лишь в случае двукратно вырожденного собственного числа. При этом для выявления качественных закономерностей поведения поля в окрестности вырожденных параметров волновода достаточно провести рассмотрение для случая $\delta_1 = 0$. Тогда электрическая компонента поля E_z на нижней стенке волновода в цилиндрической системе координат при $kr \gg 1$ примет следующий вид при условии вырождения нулевой и первой мод:

$$E_z \approx \frac{Jh_d}{2h} i \omega \mu_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(\pi/4)} V, \\ V = \frac{\exp(ikrs_0)}{(2/\beta)(u_0^{(2)}, g_0^{(2)})} \frac{u_0^2(0)}{\sqrt{s_0}} \left(1 + \frac{ikrs_0}{2} + s_0^2 \frac{(u_0^{(2)}, g_0^{(2)})}{(u_0^{(2)}, g_0^{(2)})} \right) + \quad (9) \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u_n^2(0) s_n^{3/2} \exp(ikrs_n)}{(u_n, g_n)},$$

$$g_0^{(2)} = \bar{u}_0^{(1)}(x), \quad g_0^{(2)} = \frac{d\bar{u}_0^{(1)}(x)}{dx}$$

и в случае $\delta_1 = 0$

$$u_n(x) = \cos \sqrt{\mu_n} x,$$

$$\frac{2}{\beta} (u_0^{(2)}, g_0^{(2)}) = - \frac{\beta^2}{2i\delta\beta},$$

$$\frac{(u_0^{(2)}, g_0^{(2)})}{(u_0^{(2)}, g_0^{(2)})} = - \frac{\beta^2}{2i\delta\beta} + \frac{\beta^2}{6(1-i\delta\beta)},$$

где

$$s_n = \sqrt{1 - \mu_n}, \quad x = kz, \quad \mu_n = \eta_n^2 / \beta^2, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м},$$

ω — круговая частота, J — ток в антенне, h_d — ее действующая высота. Выражение (9) может быть также получено из ряда нормальных волн предельным переходом по параметру δ в сумме нулевой и первой мод. Как следует из (9), при наличии двукратно вырожденного собственного числа на экспоненциальную зависимость поля от расстояния накладывается линейная зависимость, но, как показывают проведенные расчеты, линейно растущий член не является определяющим в суммарном поле даже на небольших расстояниях от источника.

Присутствие в спектре кратного МСЗ оказывается лишь на поведении поля каждой из вырождающихся мод в окрестности того значения параметра волновода, при котором моды вырождаются. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 5, где изображена зависимость модуля поля нулевой и первой мод от частоты при $\sigma_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ мо/м}$, $\delta_1 = 0$, $h = 79,95 \text{ см}$.

Как видно из рис. 5, при $f \rightarrow f_{\text{выр}} = 4,75 \text{ кГц}$, когда совпадают МСЗ нулевой и первой мод, поле каждой из этих мод имеет особенность. Однако при суммировании, поскольку в окрестности $f_{\text{выр}}$ (или $h_{\text{выр}}$) рассматриваемые моды быстро растут, имея при этом противоположные фазы, указанная особенность пропадает.

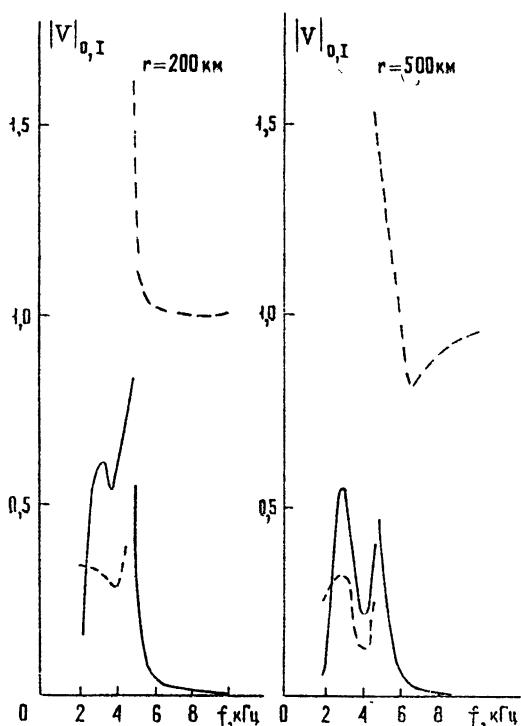


Рис. 5. Поле нулевой и первой мод;

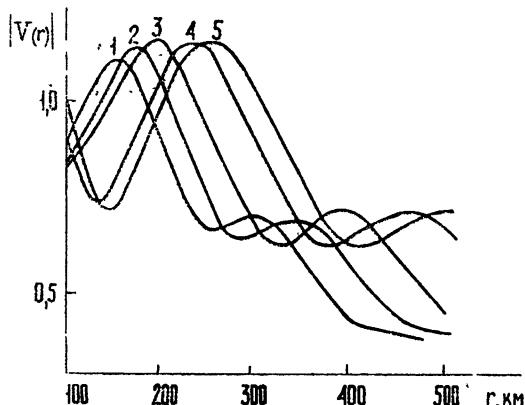
— нулевая мода,
— первая мода.

Зависимость суммарного поля в волноводе от расстояния, рассчитанная по формуле (9) с учетом четырех мод при $\delta_1 = 0$, $\sigma_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ мо/м}$,

$\delta = 4,75 \text{ кГц}$ и различных значениях h , приведена на рис. 6, кривая 3 на рис. 6 соответствует $h_{\text{вып}} = 79,95 \text{ км}$, при котором нулевое собственное значение поперечного оператора становится двукратным. Как следует из расчетов и рис. 6, поведение поля в волноводе в окрестности $h_{\text{вып}}$ не имеет качественных особенностей и в достаточно малой окрестности $h_{\text{вып}}$ поле может быть рассчитано по ряду нормальных волн.

Рис. 6. Суммарное поле в волноводе;

1 — $h = 73 \text{ км}$, 2 — $h = 76 \text{ км}$,
3 — $h = 79,95 \text{ км}$, 4 — $h = 85 \text{ км}$,
5 — $h = 88 \text{ км}$.



В заключение автор выражает глубокую благодарность В. В. Новикову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Бичуцкая, В. В. Новиков, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 18, № 1, 108 (1975).
2. Т. И. Бичуцкая, В. В. Новиков, Тезисы докладов X Всеоюзной конференции по распространению радиоволн, секция 1, М., 1972, стр. 225.
3. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, Л, вып. 7, 1972, стр. 19.
4. G. Goubaud, J. Appl. Phys., № 11, 1119 (1951).
5. G. Goubaud, Proc. IRE, № 6, 619 (1951).
6. H. E. Barlow, Proc. IEE, 112, 477 (1965).
7. E. G. Neumann, Archiv für Electr. über. El. und Com., 27, № 7/8, 343 (1973).
8. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, изд. Наука, М., 1969, стр. 526.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
10 февраля 1975 г.

FIELD STRUCTURE IN PLANE IMPEDANCE WAVEGUIDE

T. I. Bichutskaya

Some characteristics of normal TM-waves depending of electric properties of the waveguide walls are investigated on the basis of the zero line analysis made in [1, 2]. The field behaviour of the vertical electric dipole in a waveguide in the presence of multiple eigen numbers in the spectrum of the transverse operator is considered.

УДК 621.372.09

О РЕЗОНАНСНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНЗОВЫХ ВОЛНОВОДАХ

B. A. Петрищев

Исследуется поведение волновых пучков в нелинейных линзовых волноводах вблизи стационарного решения. Показано, что в двумерном точечном отображении, описывающем такие системы в безабберационном приближении, возможна «резонансная неустойчивость». Построено асимптотическое дифференциальное описание для отображений плоскости в плоскость с якобианом, не равным единице, вблизи резонансных точек и исследован характер решения. Результаты анализа применены к волновым пучкам в нелинейных линзовыми системах. С помощью численного моделирования показано, что неустойчивость в резонансных точках низших порядков приводит к потере части мощности пучков на начальном участке волновода. Резонансная неустойчивость высших порядков является слабой и при волноводном распространении в нелинейных линзовых системах практически не проявляется.

В работах [1-3] рассмотрено распространение волновых пучков в квазиоптических линзовых системах с фазовыми корректорами, зависящими от интенсивности поля волны. Определены стационарные (повторяющиеся от корректора к корректору) пучки колоколообразного профиля и исследована их устойчивость. В безабберационном приближении показано, что область устойчивости стационарных решений не совпадает с областью их существования, и выведены неравенства, при нарушении которых стационарные пучки становятся неустойчивыми относительно возмущений их параметров (математически это означает, что собственные значения матрицы преобразования малых возмущений на периоде волновода по модулю превышают единицу). В области, где указанные неравенства выполняются, собственные числа характеристической матрицы по модулю равны единице, и эта область была названа в [1-3] областью устойчивости стационарных режимов в нелинейных линзовых волноводах. Проведенное в [1-3] численное моделирование распространения пучков в нелинейных волноводах (в рамках уравнений квазиоптики) показало, что в диафрагмированных линзовых системах распространение пучков, принадлежащих области неустойчивости по безабберационному приближению, сопровождается большими дифракционными потерями, в то время как потери на излучение пучков, параметры которых принадлежат области устойчивости, малы. Этот результат интерпретирован как подтверждение результатов безабберационного приближения.

Известно, однако [4], что исследование устойчивости стационарных решений в линейном приближении в том случае, когда собственные числа характеристической матрицы имеют модуль, равный единице ($| \lambda | = 1$), не является достаточным, и требуется дополнительное рассмотрение. Такая ситуация, как было сказано, имеет место в задаче о волновых пучках в нелинейных волноводах для области параметров, названной в [1-3] областью устойчивости. В работе [5] при исследовании системы разностных уравнений, аналогичных тем, что описывают

в безаберрационном приближении пучки в линзовых волноводах, был обнаружен эффект «резонансной неустойчивости» стационарных решений в области $|\lambda| = 1$. В связи с этим представляется необходимым провести в данной статье более подробное исследование устойчивости распространения пучков в этой области. Как и в работах [1-3], исследование будет проведено аналитически в безаберрационном приближении, а также с помощью численных методов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Преобразование волновых пучков в нелинейных линзовых волноводах включает в себя преобразование фазы волны нелинейным корректором и квазиоптическое преобразование поля в промежутке между линзами. В безаберрационном приближении это преобразование сводится к нелинейному точечному отображению на плоскости «ширина—сходимость»

$$\begin{pmatrix} a_{N+1} \\ \dot{a}_{N+1} \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} a_N \\ \dot{a}_N \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где a_N — ширина квазигауссова пучка, $\dot{a}_N = -a_N/R_N$ — сходимость (R_N — радиус кривизны фазового фронта) на N -м фазовом корректоре (линзе). Неподвижная точка отображения (1) определяет стационарные пучки в нелинейном волноводе в виде зависимости ширины пучка от мощности излучения $a_0(P)$ [1-3]:

$$\begin{pmatrix} a_0(P) \\ \dot{a}_0(P) \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} a_0(P) \\ \dot{a}_0(P) \end{pmatrix}.$$

Исследование устойчивости стационарных пучков, таким образом, сводится к исследованию устойчивости неподвижной точки \hat{T} .

Обозначим через λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения матрицы \hat{T} , линеаризованной вблизи неподвижной точки. В области неустойчивости стационарных пучков $|\lambda_j| > 1$ [1-3]. В области, названной областью устойчивости, λ_j являются комплексно-сопряженными с модулем, равным 1:

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\nu}, \quad (2)$$

где ν — действительное число, изменяющееся от 0 до π при изменении параметров стационарных пучков. В этом случае линеаризованное отображение $\hat{T}_{\text{лин}}$ не дает представления об устойчивости неподвижной точки отображения \hat{T} . Поэтому для исследования вопроса о распространении пучков в области $|\lambda| = 1$ рассмотрим отображение \hat{T} в окрестности неподвижной точки с учетом нелинейных членов. Отображение (1) в переменных $x_k = a_k^2$, $y_k = a_k \dot{a}_k$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= x_N + 2y_N + \frac{1 + y_N^2}{x_N}, \\ y_{N+1} &= y_N + \frac{1 + y_N^2}{x_N} - \frac{x_{N+1}}{F(x_{N+1})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $F(x_k)$ — фокусное расстояние k -й нелинейной линзы (для пучка

мощностью P оно зависит от ширины пучка на корректоре [1]). Положим $x_k = x_0 + \alpha_k$, $y_k = y_0 + \beta_k$, где

$$x_0^2 = \frac{4F_0}{4F_0 - 1}, \quad y_0^2 = \frac{1}{4F_0 - 1}, \quad F_0 = F(x_0) \quad (4)$$

— неподвижная точка отображения (3), и, считая $\alpha_k, \beta_k \ll x_0, y_0$ представим (3) в виде разложения в ряд по степеням α_k, β_k :

$$\alpha_{N+1} = \gamma_{11} \alpha_N + \gamma_{12} \beta_N + \sum_{l+k=2} a_{lk} x^l \beta^k + \sum_{l+k=3} a_{lk} \alpha^l \beta^k + \dots \quad (5)$$

$$\beta_{N+1} = \gamma_{21} \alpha_N + \gamma_{22} \beta_N + \sum_{l+k=2} b_{lk} \alpha^l \beta^k + \sum_{l+k=3} b_{lk} \alpha^l \beta^k + \dots;$$

$$\gamma_{11} = \frac{F_0 - 1}{F_0}, \quad \gamma_{12} = \frac{2F_0 - 1}{F_0}, \quad \gamma_{21} = \frac{1}{F_0^3} [F_0(1 - F_0) - x_0 F_0'(1 - F_0) - F_0^2], \quad (6)$$

$$\gamma_{22} = F_0^{-3} [F_0^2(F_0 - 1) + x_0 F_0'(2F_0 - 1) - F_0(2F_0 - 1)].$$

Коэффициенты a_{lk} и b_{lk} определяются из (3) с учетом конкретного вида $F(x)$.

Матрица

$$\hat{T}_{\text{лип}} = \hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

имеет характеристические корни (2). Наша задача состоит в исследовании поведения асимптотической системы (5) в окрестности точки $\alpha = 0, \beta = 0$, т. е. вблизи стационарного решения (3). Система уравнений вида (5) рассматривалась в [5] применительно к исследованию фазовых колебаний в микротроне и геометрооптических колебаний лучей в открытых резонаторах с неквадратичными корректорами. В [5] было показано, что при значениях

$$\nu = 2\pi q/p, \quad (7)$$

где p и q — целые числа, в системе (5) возможна «резонансная» неустойчивость, состоящая в раскачке колебаний α_N, β_N пропорционально номеру преобразования N . Автором [5] было обращено наше внимание на возможность резонансной неустойчивости в нелинейных линзовых системах. В данной статье и будет проведено исследование этого вопроса. Аналитическое исследование укороченной системы (5) будет дополнено численным расчетом исходной системы (3), а также численным моделированием в рамках квазиоптических уравнений.

Как и в [5], будем исследовать отображение (5) с помощью перехода от разностных уравнений (5) к дифференциальным и последующего анализа дифференциальных уравнений. Поскольку в [5] при построении эквивалентной системы дифференциальных уравнений делается предположение о равенстве единице якобиана преобразования (5), непосредственно применить результаты анализа [5] к нашему случаю не удается: в нашем случае якобиан исходного преобразования (3) и асимптотического представления (5) отличен от единицы*:

$$\frac{D(x_{N+1}, y_{N+1})}{D(x_N, y_N)} = 1 + 2 \frac{y_N}{x_N} + \frac{1 + y_N^2}{x_N^2}.$$

* Якобиан (3) равен единице в неподвижной точке. В окрестности неподвижной точки $y_N < 0$, и при осуществлении преобразования (3) якобиан может принимать значения как больше, так и меньше единицы.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБЩИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Для дальнейшего исследования преобразуем матрицу $\hat{\gamma}$ к каноническому виду

$$\hat{\gamma}_{\text{нов}} = \begin{pmatrix} e^{i\nu} & 0 \\ 0 & e^{-i\nu} \end{pmatrix}.$$

При этом α_k и β_k преобразуются к новым переменным:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_N + \rho\beta_N \\ \alpha_N + \rho^*\beta_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{N+1} + \rho\beta_{N+1} \\ \alpha_{N+1} + \rho^*\beta_{N+1} \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\rho = \frac{\gamma_{22} - \gamma_{11} + i\sqrt{4 - (\gamma_{11} + \gamma_{22})^2}}{2\gamma_{21}}. \quad (9)$$

В результате приходим к новому точечному отображению:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= e^{i\nu}\alpha + \mu(\varphi_{20}\alpha^2 + \varphi_{11}\alpha\beta + \varphi_{02}\beta^2) + \mu^2(\varphi_{30}\alpha^3 + \varphi_{21}\alpha^2\beta + \varphi_{12}\alpha\beta^2 + \varphi_{03}\beta^3) + \dots, \\ \bar{\beta} &= e^{-i\nu}\beta + \mu(\psi_{20}\alpha^2 + \psi_{11}\alpha\beta + \psi_{02}\beta^2) + \mu^2(\psi_{30}\alpha^3 + \psi_{21}\alpha^2\beta + \psi_{12}\alpha\beta^2 + \psi_{03}\beta^3) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) мы, считая α и β малыми величинами, положили

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\text{стар}} = \mu \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}_{\text{стар}} = \mu \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}, \quad \mu \ll 1, \quad \alpha, \beta \sim 1.$$

В [6] описан способ построения системы дифференциальных уравнений, для которых (10) является отображением сдвига. Этот способ не применим, однако, в резонансных точках [6]. Построение эквивалентной системы дифференциальных уравнений в резонансных точках может быть осуществлено после перехода от (10) к отображению, близкому к тождественному. Воспользуемся для этого методом, предложенным в [7]: перейдем к новым переменным

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = S_0(\alpha, \beta) + \mu S_1(\alpha, \beta) + \mu^2 S_2(\alpha, \beta) + \dots, \quad (11)$$

для которых получим преобразование, близкое к тождественному, асимптотически (при $\mu \rightarrow 0$) эквивалентное (10):

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \mu R_1(\eta_1, \eta_2) + \mu^2 R_2(\eta_1, \eta_2) + \dots \quad (12)$$

Здесь S_J и R_J — вектор-функции, которые строятся одновременно методом последовательных приближений по μ [7].

В нулевом приближении получаем (мы рассматриваем систему (10) в резонансных точках (7))

$$S_0(\alpha, \beta) \equiv \begin{pmatrix} S_{01} \\ S_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^\mu \\ \beta^\mu \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В первом приближении R_1 отлична от нуля только в том случае, если $p = 3$, и для точки $\nu = 2\pi/3$ (пусть $q = 1$) имеем

$$R_1(\eta_1, \eta_2) \equiv \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{12} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} e^{2i\nu} & \varphi_{02} \\ e^{-2i\nu} & \psi_{20} \end{pmatrix} \eta_1^{2/3} \eta_2^{2/3}; \quad (14)$$

$$S_{11} = 3e^{2i\nu} \left(\frac{\varphi_{20}}{e^{4i\nu} - 1} \alpha^4 + \frac{\varphi_{11}}{e^{2i\nu} - 1} \alpha^3 \beta \right) \quad (S_{12} = S_{11}^*). \quad (15)$$

Если $p \neq 3$,

$$R_1 \equiv 0; \quad (16)$$

$$S_{11} = -pe^{i(p-1)\nu} \frac{\varphi_{kl}}{e^{i(k+p-l-1)\nu} - 1} \alpha^{k+p-1} \beta^l \quad (S_{12} = S_{11}^*) \quad (17)$$

(в (17) суммирование по повторяющимся индексам $k + l = 2$).

При $p = 3$ преобразование (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= \eta_1 + \mu 3e^{2i\nu} \varphi_{02} \eta_1^{2/3} \eta_2^{2/3} + \dots, \\ \bar{\eta}_2 &= \eta_2 + \mu 3e^{-2i\nu} \psi_{20} \eta_1^{2/3} \eta_2^{2/3} + \dots. \end{aligned} \quad (18)$$

Отображение (18) близко к тождественному, а для него легко строится дифференциальное уравнение, для которого (18) есть отображение сдвига (с точностью до членов $\sim \mu$) [6]

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{d\tau} &= \mu 3e^{2i\nu} \varphi_{02} \eta_1^{2/3} \eta_2^{2/3} + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} &= \mu 3e^{-2i\nu} \psi_{20} \eta_1^{2/3} \eta_2^{2/3} + \dots. \end{aligned} \quad (19)$$

В действительных переменных $\eta_1 = \frac{1}{2}(\eta_{1\text{стар}} + \eta_{2\text{стар}})$, $\eta_2 = \frac{1}{2i}(\eta_{1\text{стар}} - \eta_{2\text{стар}})$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{d\tau} &= \mu \Gamma_1 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{2/3} + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} &= \mu \Gamma_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{2/3} + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Gamma_1 = \operatorname{Re}(3e^{2i\nu} \varphi_{02}), \quad \Gamma_2 = \operatorname{Im}(3e^{2i\nu} \varphi_{02}).$$

Дифференциальное уравнение может быть записано и для окрестности резонансной точки. Пусть $\nu = 2\pi/3 \pm \delta$, $\delta \sim \mu$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{d\tau} &= -3\delta\eta_2 + \mu \Gamma_1 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{2/3} + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} &= 3\delta\eta_1 + \mu \Gamma_2 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{2/3} + \dots. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогичное построение с точностью до членов $\sim \mu^2$ приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{d\tau} &= -\omega_1\eta_2 + (\mu \Gamma_1 + \mu^2 \Gamma_3) (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{2/3} + \mu^2 (\Gamma_3 \eta_1 - \Gamma_5 \eta_2) (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/3} + \dots, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} &= \omega_1\eta_1 + (\mu \Gamma_2 + \mu^2 \Gamma_4) (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{2/3} + \mu^2 (\Gamma_6 \eta_1 + \Gamma_5 \eta_2) (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/3} + \dots; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\omega_1 = 3\delta, \quad \Gamma_3 = \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_3, \quad \Gamma_4 = \operatorname{Im} \tilde{\Gamma}_3, \quad \Gamma_5 = \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_5, \quad \Gamma_6 = \operatorname{Im} \tilde{\Gamma}_5,$$

$$\tilde{\Gamma}_3 = \frac{3}{4} \frac{\delta}{\mu} (\sqrt{3} - i) \varphi_{02}, \quad (23)$$

$$\tilde{\Gamma}_5 = \frac{1}{2} (3 - 5i\sqrt{3}) \varphi_{11} \varphi_{20} - \frac{3}{2} (1 + i\sqrt{3}) \varphi_{21} - \frac{1}{2} (3 + i\sqrt{3}) |\varphi_{11}|^2 - 3 |\varphi_{02}|^2.$$

При учете членов $\sim \mu^2$, получим отличные от нуля нелинейные члены в (11) и (12) для резонансной точки $\nu = 2\pi/4$, и, вообще говоря, всякой последующей резонансной точке $\nu = 2\pi/p$ соответствует более высокое приближение в (10), (11), (12). Соответствующие выкладки приводят к следующей системе дифференциальных уравнений для случая $\nu = 2\pi/4 + \delta$:

$$\frac{d\eta_1}{d\nu} = -\omega_2 \eta_2 + \mu^2 \Gamma_7 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{3/4} + \mu^2 (\Gamma_9 \eta_1 - \Gamma_{10} \eta_2) (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/4} + \dots, \quad (24)$$

$$\frac{d\eta_2}{d\nu} = \omega_2 \eta_1 + \mu^2 \Gamma_8 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{3/4} + \mu^2 (\Gamma_{10} \eta_1 + \Gamma_9 \eta_2) (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/4} + \dots;$$

$$\omega_2 = 4\delta, \quad \Gamma_7 = \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_7, \quad \Gamma_8 = \operatorname{Im} \tilde{\Gamma}_7, \quad \Gamma_9 = \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}_9, \quad \Gamma_{10} = \operatorname{Im} \tilde{\Gamma}_9,$$

$$\tilde{\Gamma}_7 = -2(5 - i) \varphi_{11} \varphi_{02} + 4(1 + i) \varphi_{02} \psi_{02} - 4i \varphi_{03}, \quad (25)$$

$$\tilde{\Gamma}_9 = 2(3 - i) \varphi_{20} \varphi_{11} - 4i \varphi_{21} - 2(1 + i) |\varphi_{11}|^2 - 4(1 - i) |\varphi_{02}|^2.$$

Таким образом, для отображения (10) в резонансных точках $\nu = \frac{2\pi}{3} + \delta; \nu = \frac{2\pi}{4} + \delta$ мы получили системы дифференциальных уравнений, асимптотически эквивалентных (10) в том смысле, что отображение (10) с точностью до величин $\sim \mu^2$ может быть представлено как отображение одвига в решении этих дифференциальных уравнений. Продолжая ряд последовательных приближений, можно построить дифференциальные уравнения для резонансной точки любого порядка.

Ход дальнейших рассуждений будет таков: не конкретизируя вида Γ_J , проведем общий качественный анализ систем (22), (23), (24), (25), а затем укажем, как результаты этого анализа относятся к пучкам в нелинейных линзовидных волноводах.

Рассмотрим сначала точку $\nu = \frac{2\pi}{3} + \delta$. В первом приближении при $\delta = 0$ эквивалентная система дифференциальных уравнений имеет вид (20), из которого следует, что интегральные кривые описываются уравнением

$$\eta_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \eta_1 + \text{const} \quad (26)$$

и что имеется единственное состояние равновесия $\eta_1 = \eta_2 = 0$, через которое проходит одна интегральная прямая. Вид фазовой плоскости уравнения (20) показан на рис. 1 а. Отображение (10), таким образом, при $\nu = \frac{2\pi}{3}$ неустойчиво (при одновременно отличных от нуля Γ_1 и Γ_2)

при сколь угодно малых отклонениях от нулевого значения η_1 и η_2 (т. е. неподвижной точки (1)). Нетрудно видеть также, что неустойчивость имеет в этом случае взрывной характер, т. е. развивается за конечное время. Если $\delta \neq 0$, система (21) имеет два состояния равновесия: центр

$$\eta_1 = \eta_2 = 0$$

и седло

$$\eta_1 = - \left(\frac{3\delta}{\mu} \right)^3 \frac{\Gamma_2}{(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^2}, \quad \eta_2 = \left(\frac{3\delta}{\mu} \right)^3 \frac{\Gamma_1}{(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^2}. \quad (27)$$

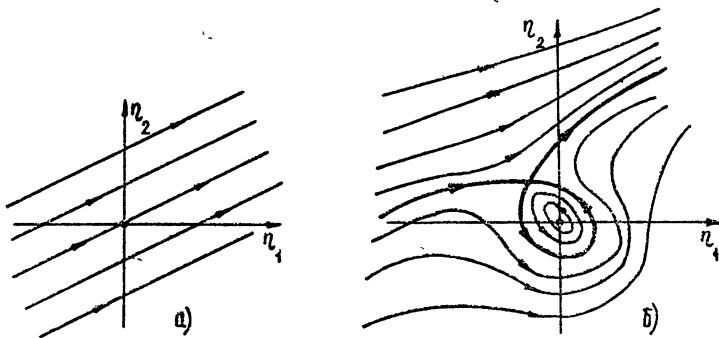


Рис. 1. Вид фазовой плоскости эквивалентной системы дифференциальных уравнений

а) в резонансной точке $\nu = 2\pi/3$; б) в окрестности резонансной точки: $\nu = 2\pi/3 + \delta$.

Вид фазовой плоскости приведен на рис. 1 б. Решение (2) устойчиво в ограниченной области, размеры которой зависят от δ , т. е. от отстройки от резонанса. На плоскости $(Re \alpha, Im \alpha)$ при этом будут иметь место четыре состояния равновесия (центр и три седла), определяемые из (11).

Во втором приближении для $\nu = \frac{2\pi}{3} + \delta$ при $\delta = 0$, кроме очевидного состояния равновесия $\eta_1 = \eta_2 = 0$, имеется еще одно состояние равновесия

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = - \frac{\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2}{\mu^3(\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2)} \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_1 \Gamma_5 + \bar{\Gamma}_2 \Gamma_6 \\ \bar{\Gamma}_2 \Gamma_5 - \bar{\Gamma}_1 \Gamma_6 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_1 = \Gamma_1 + \mu \Gamma_3, \quad \bar{\Gamma}_2 = \Gamma_2 + \mu \Gamma_4,$$
(28)

которое может быть узлом или фокусом в зависимости от знака

$$\Sigma = \sigma^2 - 4\Delta, \quad (29)$$

где

$$\sigma = - \frac{4}{3} \Gamma_5 \frac{\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2}{\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2}, \quad \Delta = \frac{(\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2)^2}{3(\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2)}.$$

При $\Sigma < 0$ состояние равновесия (28) — фокус, при $\Sigma > 0$ — узел. При $\sigma > 0$ равновесие устойчивое, при $\sigma < 0$ — неустойчивое.

Заметим, что второе состояние равновесия имеет смысл только при

$$(\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2)^3 \ll \Gamma_5^2 + \Gamma_6^2, \quad (30)$$

поскольку в противном случае область вблизи η_1, η_2 соответствует большим значениям $\eta_{1,2} \gg \mu^{-3}$, т. е. значениям $\alpha_{\text{стар}}, \beta_{\text{стар}} \gg 1$, что выходит за границы применимости асимптотического метода (5) — (11), (12) — (24). В частном случае $\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_2 = 0$ состояние равновесия (28) совпадает с точкой $\eta_1 = \eta_2 = 0$. При $\delta \neq 0$ состояния равновесия $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \neq 0$ находятся из условий

$$(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/3} = \frac{\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2 - 2\omega_1\Gamma_6 \pm [(\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2 - 2\omega_1\Gamma_6)^3 - 4\omega_1^2(\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2)]^{1/2}}{2\mu^2(\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2)}, \quad (31)$$

$$\eta_2 = -\frac{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/3}}{\mu(\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2)} [\mu(\bar{\Gamma}_2\Gamma_5 - \bar{\Gamma}_1\Gamma_6)(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/3} - \omega_1\bar{\Gamma}_1].$$

При выполнении неравенства

$$(\bar{\Gamma}_1^2 + \bar{\Gamma}_2^2 - 2\omega_1\Gamma_6) > 4\omega_1^2(\Gamma_5^2 + \Gamma_6^2) \quad (32)$$

система (22) имеет три состояния равновесия, из которых пара центр — седло рождается из вырожденного состояния равновесия $\eta_1 = \eta_2 = 0$, а третье сохраняет характер (28). Если условие (32) не выполняется, состояний равновесия, отличных от нулевого, не возникает. Равновесие $\eta_1 = \eta_2 = 0$ имеет в этом случае вид фокуса, устойчивость которого определяется знаком Γ_5 .

Опишем теперь характер решения системы (24), определяющей свойства отображения (10) в окрестности резонансной точки $\nu = 2\pi/4$. Влияние нелинейности проявляется для $\nu = 2\pi/4 + \delta$, начиная со второго приближения, а в первом приближении (24) описывает колебания гармонического осциллятора.

При $\delta = 0$ система (24) имеет одно состояние равновесия $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Для описания решения (24) удобно перейти к полярным координатам $\eta_1 = r \cos \theta$, $\eta_2 = r \sin \theta$:

$$\frac{dr}{d\tau} = \mu^2(\Gamma_7 \cos \theta + \Gamma_8 \sin \theta + \Gamma_9) r^{3/2} + \dots, \quad (33)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \mu^2(-\Gamma_7 \sin \theta + \Gamma_8 \cos \theta + \Gamma_{10}) r^{1/2} + \dots.$$

Вид фазовой плоскости для (33) зависит от соотношения параметров $\Gamma_7, \dots, \Gamma_{10}$. При $\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 > \Gamma_{10}^2$ имеются две интегральные прямые, начинающиеся из точки $r = 0$, угол наклона которых находится по формуле

$$\cos \theta_0 = \frac{-\Gamma_8\Gamma_{10} \pm \Gamma_7 \sqrt{\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 - \Gamma_{10}^2}}{\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2}.$$

Если при этом $\Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2 > \Gamma_7^2 + \Gamma_8^2$, то состояние равновесия $r = 0$ — узел, устойчивый при $\Gamma_9 < 0$ и неустойчивый при $\Gamma_9 > 0$ (рис. 2 а). Если $\Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2 < \Gamma_7^2 + \Gamma_8^2$, то равновесие $r = 0$ — неустойчивое, вырожденное (индекс Пуанкаре равен нулю) (см. рис. 2 б). При $\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 < \Gamma_{10}^2$ фазовые траектории вблизи состояния равновесия, устойчивого или неустойчивого в зависимости от знака Γ_9 , имеют вид спирали, при $\Gamma_9 = 0$ состояние равновесия — центр (рис. 2 в, г).

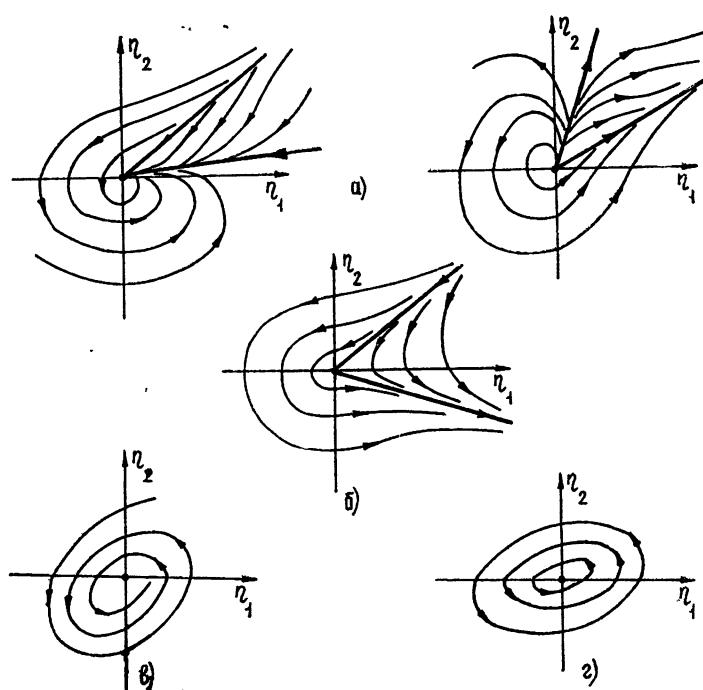


Рис. 2. Фазовые портреты эквивалентной системы в резонансной точке $\nu = 2\pi/4$:

- а) $\Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2 > \Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 > \Gamma_{10}^2$; б) $\Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2 < \Gamma_7^2 + \Gamma_8^2$; в) $\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 < \Gamma_{10}^2$ ($\Gamma_9 \neq 0$); г) $\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 < \Gamma_{10}^2$ ($\Gamma_9 = 0$).

Пусть $\delta \neq 0$. Отличные от $\eta_1 = \eta_2 = 0$ состояния равновесия определяются уравнениями

$$(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/4} = \frac{-\omega_2 \Gamma_{10} \pm \omega_2 \sqrt{\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 - \Gamma_9^2}}{\mu^2 (\Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2 - \Gamma_7^2 - \Gamma_8^2)},$$

$$\eta_2 = \frac{(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/4}}{\mu^2 (\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2)} [\mu^2 (\Gamma_7 \Gamma_{10} - \Gamma_8 \Gamma_9) (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/4} + \omega_2 \Gamma_7].$$

Из требования действительности и положительности $(\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/4}$ следует, что дополнительные состояния равновесия могут возникнуть, если $\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 \geq \Gamma_9^2$. При этом, если $\Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2 > \Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 > \Gamma_9^2$, то возникают либо два состояния равновесия при $\omega_2 \Gamma_{10} < 0$, либо не возникает ни одного ($\omega_2 \Gamma_{10} > 0$). При $\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 > \Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2$ появляется одно новое состояние равновесия типа седла.

Таким образом, мы показали, что в зависимости от параметров преобразование (10) в точках $\nu = \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}$ может быть как устойчивым, так и неустойчивым. При отстройке от «резонанса» ($\delta \neq 0$) неустойчивое преобразование может становиться ограниченно устойчивым, и область устойчивости тем больше, чем больше отстройка δ . Последнее утверждение идентично утверждению [5] для систем с якобианом: тождественно равным 1. Поведение системы (10), однако, может быть более сложным, чем в [5], так, система (10) допускает значительно более разнообразный набор фазовых портретов.

Неустойчивость, исследованная для $p = 3$ и 4 , может иметь место и для резонансов более высокого порядка, однако раскачка колебаний в этих точках будет тем слабее, чем больше номер p (например, если при $\nu = 2\pi/3$ неустойчивость носит взрывной характер и развивается за конечное время, то при $\nu = 2\pi/4$ неустойчивость развивается уже за бесконечное время). Рассмотрение «резонансов» $p > 4$ соответствует учету следующих приближений в (11), (12) и более высокой нелинейности в (10). Влияние членов $O(\mu^2)$ в (10) на поведение системы вблизи точек $\nu = 2\pi/3, 2\pi/4$ и поведение системы вблизи других «резонансных» точек будет рассмотрено численными методами в следующем разделе на примере преобразования пучков в нелинейных линзовых волноводах.

3. ПОВЕДЕНИЕ ГАУССОПОДОБНЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНОЗОВЫХ ВОЛНОВОДАХ ВБЛИЗИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

1. Безаберрационное приближение. Применим результаты разд. 2 к волновым пучкам в линзовых системах. Будем рассматривать волновод, образованный последовательностью плоскопараллельных слоев нелинейного диэлектрика с тепловым и керровским механизмом нелинейности. С помощью численных методов проведем учет членов высших порядков в преобразовании (3) — (5).

В безаберрационном приближении преобразование пучка в волноводе с тепловой нелинейностью описывается системой (3), где $F = F_T^{NL} = x/P$ (P — мощность волнового пучка в относительных единицах) [1]. Можно найти, что в укороченной системе (10) для $\nu = 2\pi/3$ в этом случае

$$\Gamma_1 = -\frac{3\sqrt{15}}{4}, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_4 = -\frac{3\sqrt{15}}{8} \frac{\delta}{\mu},$$

$$\Gamma_5 = -\frac{45}{16}, \quad \Gamma_6 = -\frac{15\sqrt{3}}{3}.$$

В соответствии с разд. 2 преобразование пучков в линзовом волноводе с тепловой нелинейностью неустойчиво (в безаберрационном приближении) при мощности P , соответствующей резонансной точке $\nu = 2\pi/3$, и ограничено устойчиво в ее окрестности $\nu = \frac{2\pi}{3} + \delta$. Фазовая пло-

скость имеет вид рис. 1, причем интегральные кривые параллельны оси $\eta_2 = 0$ при $\delta = 0$, а при $\delta \neq 0$ состояние равновесия типа седла расположено на оси $\eta_1 = 0$.

При мощности пучка P , соответствующей резонансной точке $\nu = 2\pi/4$,

$$\Gamma_7 = -9/2, \quad \Gamma_8 = -15/2, \quad \Gamma_9 = 9, \quad \Gamma_{10} = 3,$$

выполняются условия

$$\Gamma_{10}^2 < \Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 < \Gamma_9^2 + \Gamma_{10}^2, \quad \Gamma_9 > 0,$$

и стационарный режим волновода при $\nu = 2\pi/4$ является неустойчивым, а характер раскачки колебаний соответствует движению точки на фазовой плоскости вблизи состояния равновесия типа неустойчивого узла. При $\delta \neq 0$, поскольку $\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 < \Gamma_9^2$, состояние равновесия $\eta_1 = \eta_2 = 0$ (стационарный пучок) остается единственным и при достаточном отклонении параметров пучка от стационарных имеет вид неустойчивого фокуса.

Для волноводов с керровской нелинейностью $F = F_{\kappa}^{NL} = x^3/Q$, Не приводя конкретных выражений для Γ_j , укажем, что в окрестности $\nu=2\pi/3$ поведение пучков аналогично случаю тепловой нелинейности. В том случае, когда мощность пучков Q близка к значению, соответствующему $\nu=2\pi/4$, поведению пучков соответствует движение изображающей точки вблизи неустойчивого фокуса

$$(\Gamma_7^2 + \Gamma_8^2 < \Gamma_9^2, \Gamma_{10}^2; \Gamma_9 > 0).$$

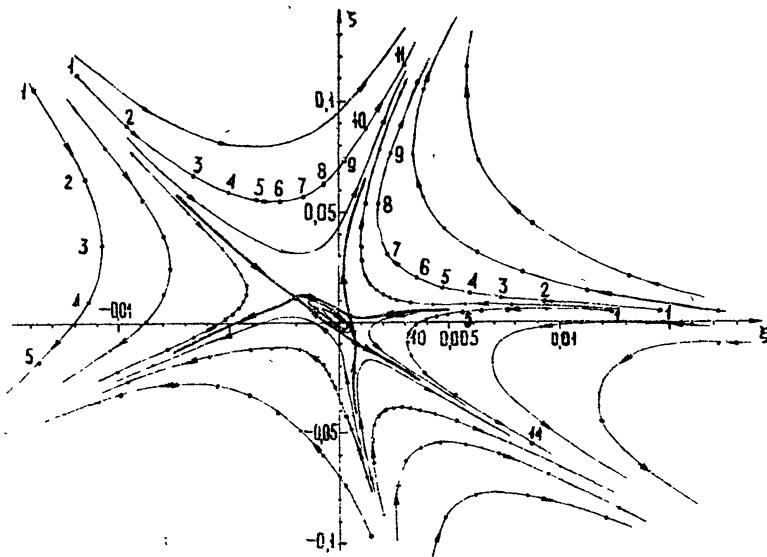


Рис. 3. Фазовая плоскость распространения пучков в линзовом волноводе с керровской нелинейностью вблизи резонансной точки $\nu = 2\pi/3$ (безабберационное приближение). Цифры у кривых соответствуют номеру N трехкратного преобразования \hat{T}_3 .

С целью учета влияния членов высших порядков в отображении (3) были проведены расчеты исходного преобразования (3) на ЭВМ для волноводов с керровской нелинейностью $(F_N = \frac{x_N^2}{Q} = \frac{a_N^4}{Q})$ вблизи резонансных точек

$$\nu_3 = \frac{2\pi}{3} \left(Q_3 = \frac{16 + \sqrt{48}}{13} \right), \quad \nu_4 = \frac{2\pi}{4} \left(Q_4 = \frac{8 + \sqrt{7}}{7} \right),$$

$$\nu_{12} = \frac{2\pi}{12} \left(Q_{12} = \frac{16 + 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{14 + \sqrt{3}} \right).$$

На рис. 3 показана фазовая плоскость отображения (3) при значении $Q = Q_3 - 0,002$. Кривые на фазовой плоскости показывают движение изображающей точки преобразования $\hat{T}_3 = \hat{T} \cdot \hat{T} \cdot \hat{T}$, т. е. изменение ширины и сходимости пучка на каждом третьем корректоре

$$\xi_{3N} = \frac{a_{3N} - a_0}{a_0}, \quad \zeta_{3N} = \frac{a_{3N} - \dot{a}_0}{\dot{a}_0}.$$

Поскольку отображение $\hat{T}_3 \text{лин} = \hat{T}_{\text{лин}} \hat{T}_{\text{лин}} \hat{T}_{\text{лин}}$ является тождественным в резонансной точке $\nu = 2\pi/3$ (а величины $\begin{pmatrix} a_{3N} \\ a_{3N'} \end{pmatrix}$, как и $\begin{pmatrix} a_N^3 \\ a_{N'}^3 \end{pmatrix}$, инвариантами по N для преобразования $\hat{T}_{\text{лин}}$), то при рассмотрении $\begin{pmatrix} \xi_{3N} \\ \zeta_{3N} \end{pmatrix}$ выделяются медленные движения системы, как и при аналитическом исследовании. В согласии с анализом разд. 2 фазовая плоскость имеет четыре состояния равновесия, три из которых — седла. Замкнутая кривая, состоящая из кусков сепаратрис, ограничивает область устойчивого преобразования. При задании начальных условий за границей этой области происходит быстрый уход системы от стационарного состояния: применительно к пучкам в линзовом волноводе это означает отсутствие локализации пучка вблизи оси волновода. Неустойчивость, однако, не имеет взрывного характера, как это следует из первого приближения, что легко интерпретируется физически: при больших a_N , т. е. при широких пучках, действие нелинейности становится слабым ($F^{NL} \rightarrow \infty$), и пучки распространяются в линейной среде: расходимость стремится к постоянному значению $a_N \rightarrow a_\infty = \text{const}(N)$, а ширина растет пропорционально расстоянию, $a_N \sim a_\infty N$.

На рис. 4 показана фазовая плоскость отображения (3) при значении $Q = Q_4 = 0,002$. Как и в предыдущем случае, поведение решения соответствует результатам разд. 2 для укороченного преобразования (5): преобразование устойчиво в небольшой области вблизи стационарного режима и неустойчиво при достаточном отклонении начальных параметров от стационарных (картина фазовых траекторий имеет вид неустойчивого фокуса). Однако, как показывают цифры на кривых, дающие значение номера четырехкратного преобразования, $\xi_{4N} = \frac{a_{4N} - a_0}{a_0}, \zeta_{4N} = \frac{\dot{a}_{4N} - \dot{a}_0}{\dot{a}_0}$, раскачка колебаний происходит в этом случае гораздо медленнее, чем для $\nu = 2\pi/3$.

Фазовые траектории в резонансной точке $\nu = 2\pi/12$ также имеют вид слаборазматывающейся спирали. Движение изображающей точки по интегральной кривой при этом еще более медленное, чем в «резонансе» $\nu = 2\pi/4$.

Таким образом, численные расчеты подтвердили, что точечное отображение (3), описывающее распространение волновых пучков в нелинейных волноводах в безаберрационном приближении, является неустойчивым в резонансных точках (7) (или ограниченно устойчивым в их окрестности). Существенно, однако, что неустойчивость является быстрой лишь в резонансной точке $\nu = 2\pi/3$, а уже в точке $\nu = 2\pi/4$ и тем более в «резонансах» высших порядков неустойчивость развивается достаточно медленно, так что заметное отклонение параметров волнового пучка от стационарных значений происходит на длине десятков и сотен периодов линзовой системы.

2. Учет aberrаций нелинейных линз. Квазиоптический расчет распространения пучков с учетом aberrаций проведен [1-3] численными методами. Выводы данной работы о резонансной неустойчивости в безаберрационных уравнениях потребовали более детального численного эксперимента. В дополнительных счетах, проведенных по схеме, описанной в [1, 2], особое внимание былоделено распространению пучков, начальные параметры которых (мощность, ширина, сходимость) задавались в резонансных точках. Как и раньше, мы интересовались изме-

нением профиля интенсивности пучков при распространении в волноводе и величиной дифракционных потерь, рассматривая ее как одну из основных характеристик волноводных свойств линзовой системы.

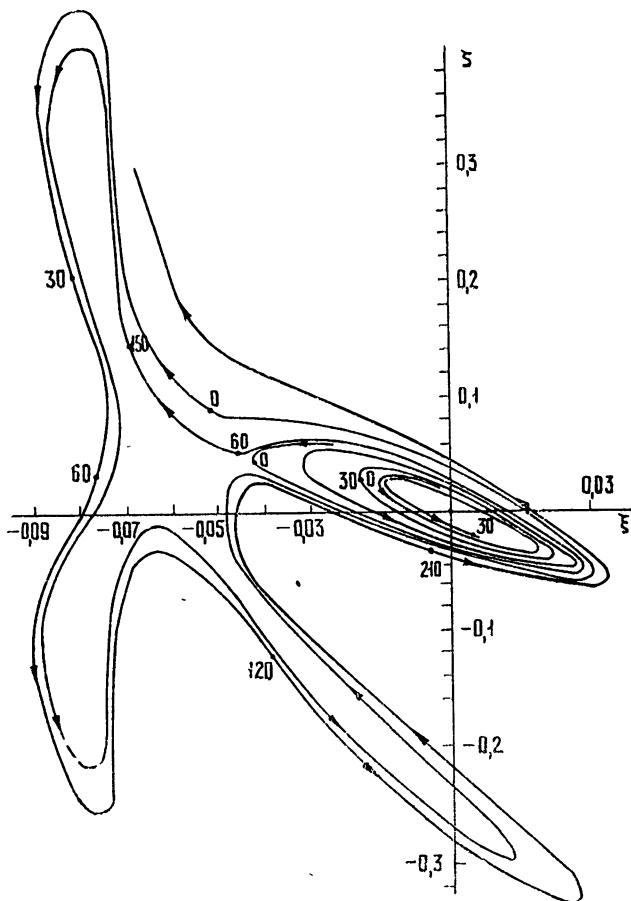


Рис. 4. Фазовая картина поведения пучков в нелинейном линзовом волноводе в окрестности резонансной точки $\gamma = 2\pi/4$ (безаберционное приближение). Цифры у кривых соответствуют номеру N четырехкратного преобразования \hat{T}_4 .

Оказалось, что с точки зрения этой характеристики поведение пучков в резонансных точках укладывается в проведенное в [1-3] разбиение на области устойчивости и неустойчивости.

Так, на рис. 5 показана зависимость коэффициента дифракционных потерь мощности пучков δ в дифрагированном волноводе с нелинейными корректорами [1, 2] от номера корректора N в резонансных точках $\gamma_3 = \frac{2\pi}{3}$, $\gamma_4 = \frac{2\pi}{4}$, $\gamma_{12} = \frac{2\pi}{12}$ и, для сравнения, та же зависимость для пучков с той же начальной шириной a , что и в резонансных точках γ_3 , γ_4 , γ_{12} , но мощностью Q , принадлежащей неустойчивой ветви стационарного решения. Стационарное решение приведено на рис. 5 б в виде графика $a_0^2(u_0)$, где $u_0 = \sqrt{\frac{2Q}{a_0^2}}$ — осевая интенсивность; точками

на этом рисунке отмечены параметры входных пучков. Ветвь $u_0 > 2$ принадлежит области неустойчивости стационарных режимов. Видно, что в случае $u_0 < 2$ потери малы, и ход $\delta(N)$ указывает на захват пучка и устойчивую квазистационарную самоканализацию. В то же время сопряженные (для каждого a_0) «запредельные» пучки $u_0 > 2$ распространяются с сильными дифракционными потерями вследствие неустойчивости [1-3].

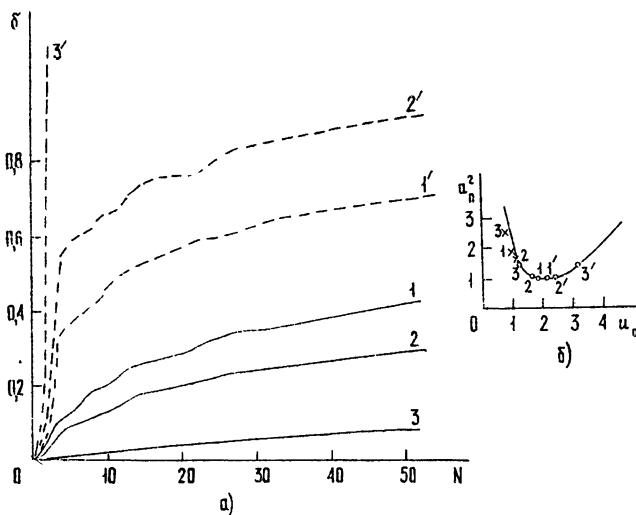


Рис. 5. а) Зависимость коэффициента дифракционных потерь мощности δ при распространении волновых пучков в дифрагмированном линзовом волноводе с керровской нелинейностью от номера корректора N . Цифры у кривых на рис. 5б соотвествуют выбору начальных условий так, как показано на рис. 5б. При этом «штрихованные» пучки имеют ту же начальную ширину, что и нештрихованные, но принадлежат неустойчивой ветви стационарного решения ($u_0 > 2$).

Из рис. 5 видно, однако, что распространение пучков в случае $\nu = 2\pi/3$ и $\nu = 2\pi/4$ сопровождается высокими погонными потерями на начальном участке волновода. При этом большие потери имеет пучок, параметры которого соответствуют $\nu = 2\pi/3$, хотя начальная ширина этого пучка наименьшая. Результатам численного эксперимента может быть дана следующая интерпретация. Резонансная неустойчивость является свойством точечного отображения (3)-(7). При точном (волновом) описании распространение пучков в нелинейных линзовых системах не сводится к двумерному точечному отображению. Аналогом отображения (3) в этом случае является бесконечномерное преобразование вида $x_j^{(N+1)} = \lambda_j x_j^{(N)} + \text{нел. члены}, J = 1, 2, \dots$. Поскольку величины λ_j вследствие aberrаций зависят от N , трудно ожидать выполнения резонансных условий [6] для бесконечного ряда λ_j . Вместе с тем, распространение пучков гауссова профиля на начальном участке волновода может быть достаточно близко к безабберационному, и в результате этого в резонансных точках (7) может наблюдаться некоторая раскачка колебаний пучка. Такая локальная неустойчивость, сопровождающаяся относительно высокими погонными потерями, наблюдается на начальном участке в вариантах $\nu = 2\pi/3$ и $\nu = 2\pi/4$ (рис. 5, кривые 1, 2). Однако при дальнейшем распространении нелинейные aberrации вызывают «рассинхронизацию» и оказывают ста-

билизирующее действие на пучок. Кроме того, дифракционные потери из-за неустойчивости на начальном участке приводят к уменьшению мощности пучка и сдвигу изображающей точки на плоскости (a_0^2, u_0) (рис. 5 б) влево в сторону меньших u_0 . Такое изменение мощности соответствует переходу в область меньших v , т. е. в область резонансов более высокого порядка. Резонансная неустойчивость высших порядков (в счетах $v = 2\pi/12$) является слабой и в безаберрационном приближении, а в численных aberrационных счетах она практически не проявляется (рис. 5 а, кривая 3). В результате пучок выходит на установившийся режим, соответствующий левой ветви стационарного решения (рис. 5). Параметры установившихся пучков в конце волновода ($N = 50$) отмечены на рис. 5 б знаком \times (цифры соответствуют входным пучкам 1, 2, 3).

Таким образом, можно сделать вывод, что остаются в силе основные утверждения работ [1-3], и для устойчивой канализации волновых пучков параметры нелинейных линзовых систем следует выбирать в соответствии с неравенствами, приведенными в этих работах. Исключение составляет лишь малая область вблизи границы неустойчивости $u_0 = 2$ (эта граница соответствует конфокальной линзовой системе [1-3]) — область резонансов $v = 2\pi/3$ и $v = 2\pi/4$. Задание начальных параметров пучков в этой области приводит к потерям на начальном участке и сдвигу в новое стационарное состояние, соответствующее меньшей мощности.

ЛИТЕРАТУРА

- С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 908 (1970).
- С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Препринт НИРФИ № 7, Горький, 1970.
- С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 8, 1162 (1972).
- Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 1, 41; № 2, 95, № 5—6, 146 (1958).
- В. Н. Мелехин, ЖЭТФ, 61, № 4, 1319 (1971).
- Ю. И. Неймарк, Метод точечных отображений, изд. Наука, М., 1972.
- К. Г. Валеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 333 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
21 октября 1974 г.

RESONANCE INSTABILITY OF WAVE BEAMS IN NONLINEAR LENS WAVEGUIDES

V. A. Petrishchev

The behaviour of wave beams in nonlinear lens waveguides near the stationary solutions is investigated. It is shown that in a two-dimensional point representation describing such systems in aberrationless approximation there may be a "resonance instability". An asymptotic differential description is built to represent a plane in a plane with Jakobian not being equal to unity near resonance points and the character of the solution is investigated. The results of the analysis are applicable to wave beams in nonlinear lens systems. Using numerical modelling it is shown that the instability at the resonance lowest-order points leads to a part of intensity being lost at the initial section of the waveguide. The highest-order resonance instability is weak and not practically revealed in nonlinear lens waveguides propagation.

УДК 621.385.623.2

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОНИЗОВАННЫХ ВНЕШНИМ СИГНАЛОМ ОДНОМОДОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОМОДОВОМ МЦР-МОНОТРОНЕ

B. C. Ергаков, M. A. Моисеев, P. Э. Эрм

Рассматривается синхронизация колебаний в МЦР-моноotronе путем предварительной модуляции электронного пучка (вне резонатора) при произвольном числе близких по частоте в масштабе ширины полосы циклотронного резонанса конкурирующих мод. Определяются достаточные условия устойчивости синхронизованных колебаний и показывается, что при оптимальных параметрах, соответствующих максимуму КПД, устойчивость колебаний рабочей моды обеспечивается при любых добротностях конкурирующих мод.

Применение в мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) большой мощности электродинамических систем с поперечными размерами, существенно превышающими длину рабочей волны, обостряет проблему конкуренции типов колебаний и приводит к необходимости их селекции [1, 2]. Одним из возможных методов селекции типов колебаний в резонаторе МЦР-моноотрона может быть синхронизация колебаний рабочей моды путем модуляции электронного пучка внешним сигналом во вспомогательном резонаторе, электродинамически изолированном от основного трубкой дрейфа электронов [3].

В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости синхронизованных колебаний в МЦР-моноотроне с аксиально-симметричными резонатором и трубчатым электронным пучком, когда частоты конкурирующих мод близки в масштабе ширины полосы циклотронного резонанса. В этом случае, в отличие от случая большого разноса собственных частот [4], электронные восприимчивости конкурирующих мод [5, 3] выражаются через электронную восприимчивость рабочей моды, что позволяет упростить исследование и сделать выводы, общие для МЦР-моноотронов на различных гармониках циклотронной частоты с различными продольными распределениями полей в резонаторах. Количественные результаты, полученные с помощью ЭВМ, приводятся для МЦР-моноотрона на первой гармонике циклотронной частоты с гауссовым распределением высокочастотного поля вдоль резонатора.

1. УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

Укороченные уравнения самосогласованного поля, описывающие взаимодействие предварительно модулированного электронного потока с полями произвольного числа мод в резонаторе, можно записать в виде [3, 6]

$$\frac{dF_s}{d\tau} + iF_s \frac{d\varphi_s}{d\tau} + \frac{Q_1}{Q_s} F_s (1 + i\gamma_s + iU_s \chi_s) = 0; \quad (1)$$

$$\chi_s = \frac{2}{F_s} \int_0^{\infty} \overline{p \exp(-i\Phi_s)} f_s^*(\zeta) d\zeta; \quad (2)$$

$$\frac{dp}{d\zeta} + ip(\Delta + w - 1) = -inw^{n-1} \sum_s f_s(\zeta) F_s \exp(i\Phi_s). \quad (3)$$

Уравнение движения электронов (3) интегрируется при начальном условии

$$p(\zeta = 0) = \exp[i(\theta_0 - X \sin \theta_0 + \Phi_c - \theta_{ap})]. \quad (4)$$

Здесь $F_s(\tau)$ и $\varphi_s(\tau)$ — безразмерная амплитуда и фаза, ω_s и Q_s — собственная частота и добротность s -моды, $\gamma_s = 2Q_s(\omega - \omega_s)/\omega_s$, $\tau = \omega t/2Q_1$, ω — частота внешнего сигнала, I_s — параметр, пропорциональный произведению тока пучка, добротности Q_s и структурного фактора, характеризующего эффективность взаимодействия электронов с переменным полем, χ_s — функция F_s , φ_s , пропорциональная электронной восприимчивости s -моды, $\mu = (\pi v_{\perp}^2/\beta_{\parallel})(L/\lambda)$, $\beta_{\perp} = v_{\perp 0}/c$, $\beta_{\parallel} = v_{\parallel 0}/c$ — отношения скоростей невозмущенных вращательного и поступательного движений электронов к скорости света, L — длина резонатора, $\lambda = 2\pi c/\omega$, ζ — независимая переменная, пропорциональная продольной координате, отсчитываемой от входного сечения резонатора, $\Delta = \pm 2(\omega - n\omega_H)/\beta_{\perp}^2 \omega$, n — номер рабочей гармоники циклотронной частоты ω_H , $w = |p|^{2/n}$ — относительная энергия вращательного движения электрона, $f_s(\zeta)$ — функция продольного распределения поля s -моды, X — параметр группировки электронов на участке дрейфа, пропорциональный амплитуде внешнего сигнала, $\theta_{ap} = \Delta \mu_{ap}$ — угол пролета электронов через участок дрейфа, $\Phi_s = \varphi_s + (n - m_s)\psi_0$, m_s — азимутальный индекс s -моды. Двойная черта в (2) означает усреднение по начальной фазе вращательного движения электронов θ_0 и азимутальной координате центров электронных орбит ψ_0 .

Синхронизованные колебания, соответствующие состоянию равновесия системы уравнений (1) — (4) с отличной от нуля амплитудой поля только рабочей ($s = 1$) моды, возможны тогда, когда азимутальный индекс этой моды m_1 совпадает с азимутальным индексом высокочастотного поля в модулирующем резонаторе m_c , а конкурирующие моды ($s \neq 1$ имеют другие амплитудные индексы ($m_s \neq m_1$) или их собственные частоты удовлетворяют неравенствам $|\omega_1 - \omega_s| \gg \omega_{1,s}/Q_{1,s}$. В этом состоянии равновесия функция $\chi_1(F_1, \varphi_1, F_s = 0)$, пропорциональная электронной восприимчивости рабочей моды, определяется соотношениями (4), (5), (9) [3] и может быть представлена рядом

$$\chi_1 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \chi^{(l)}(F_1) R_l J_l(lX) \exp(-il\varphi_1), \quad (5)$$

где $\chi^{(l)}$ — функции, зависящие только от амплитуды F_1 , параметров Δ и μ , $J_l(lX)$ — функции Бесселя, коэффициенты R_l характеризуют уменьшение гармоник переменной составляющей тока сгруппированного электронного пучка на входе в резонатор вследствие разброса скоростей электронов, приводящего к разбросу θ_{ap} в начальных условиях (4).

Если все конкурирующие моды имеют близкие собственные частоты $|\omega_1 - \omega_s| \ll \pi v_{\perp 0}/L$ и одинаковые продольные распределения полей $f_s(\zeta) = f_1(\zeta)$, то функции $\chi_s (s \neq 1)$, найденные из решения укороченных уравнений движения электронов (3), в достаточно малой

окрестности состояния равновесия могут быть записаны следующим образом:

$$\chi_s = \chi_1 \frac{F_1}{F_s} \overline{\exp [i(\Phi_1 - \Phi_s)]} + \sum_{s' \neq 1} \frac{F_{s'}}{F_s} \left\{ \left(\chi_1 + \frac{F_1}{2} \frac{\partial \chi_1}{\partial F_1} - \frac{i}{2} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi_1} \right) \overline{\exp [i(\Phi_{s'} - \Phi_s)]} + \left(\frac{F_1}{2} \frac{\partial \chi_1}{\partial F_1} + \frac{i}{2} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi_1} \right) \times \right. \\ \left. \times \overline{\exp [i(2\Phi_1 - \Phi_s - \Phi_{s'})]} \right\}. \quad (6)$$

Из характеристического уравнения системы (1)–(3), линеаризованной в окрестности состояния равновесия, следует, что стационарные одномодовые колебания устойчивы, если выполняются условия

$$B = I_1 \left(\frac{\partial \chi'_1}{\partial \varphi_1} - F_1 \frac{\partial \chi''_1}{\partial F_1} \right) > 0; \quad (7a)$$

$$C = I_1^2 F_1 \left(\frac{\partial \chi'_1}{\partial F_1} \frac{\partial \chi''_1}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \chi'_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \chi''_1}{\partial F_1} \right) > 0; \quad (7b)$$

$$1 - I_s \chi''_s > 0, \quad (7c)$$

где χ'_s и χ''_s — действительные и мнимые составляющие функций χ_s .

При выполнении соотношений

$$|\omega_s - \omega_{s'}| \gg \frac{\omega_s}{Q_s} \delta_{m_s m'_{s'}},$$

$$|2\omega_1 - \omega_s - \omega_{s'}| \gg \frac{\omega_s}{Q_s} \delta_{2m_1, m_s + m'_{s'}},$$

реализуемых в МЦР-монотронах с не слишком высокими поперечными индексами мод в резонаторах, в (6) отлично от нуля только одно слагаемое ($s' = s$), и условие (7в) в этом случае принимает вид

$$I_s < \tilde{I}_{s \text{ st}} = \begin{cases} I_1 (1 - B/2)^{-1} & (B < 2) \\ \infty & (B \geq 2) \end{cases}. \quad (8)$$

Здесь δ_{ij} — символы Кронекера, $\tilde{I}_{s \text{ st}}$ имеет смысл приведенного стартового тока конкурирующей моды при наличии стационарных колебаний на рабочей моде.

2. АНАЛИЗ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Характеристики синхронизированного МЦР-монотрона определяются, главным образом, первым членом ряда (5) — зависимостью $\chi^{(0)}$ от амплитуды колебаний F_1 . В той области параметров, в которой функция $\chi^{(0)}$ имеет максимум в точке $F_1 = 0$, МЦР-монотрон является генератором с мягким режимом возбуждения колебаний, а в области, где максимум $\chi^{(0)}$ достигается при $F_1 > 0$, — генератором с жестким режимом возбуждения. В этих двух случаях зависимости $\tilde{I}_{s \text{ st}}$ от I_1 имеют качественно различный вид.

На рис. 1 и 2 приведены значения $\tilde{I}_{s \text{ st}}$ и поперечного электронного КПД, равного $\eta_1 = F_1^2 \gamma_1''$, при оптимальной частоте внешнего сигнала, удовлетворяющей соотношению $\frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi_1} = 0$, для МЦР-монастрона с $n = 1$ и гауссовой функцией продольного распределения переменного поля в резонаторе $f_s(\zeta) = \exp\{-3[(2\zeta/\mu) - 1]^2\}$. Сплошные кривые на этих рисунках и рис. 3 соответствуют устойчивым по условиям (7 а) и (7 б) колебаниям, пунктирные — неустойчивым. Кривая $F_1 = \tilde{F}_1$ или $I_1 = \tilde{I}_1$, определяемая равенством $C = 0$, является границей, выше которой колебания с максимальной амплитудой неустойчивы (при $I_1 > \tilde{I}_1$ максимумы амплитудно-частотных характеристик на плоскости $\gamma_1 F_1$ находятся в области состояний равновесия типа седла, где производная $\frac{\partial \gamma_1'}{\partial \varphi_1} < 0$ и условие (7 б) не выполняется [3]). В области $I_1 > \tilde{I}_1$ устойчивые колебания имеют наибольшие амплитуды на границе полосы синхронизации, определяемой пересечением амплитудно-частотных характеристик с границей области седел $C = 0$.

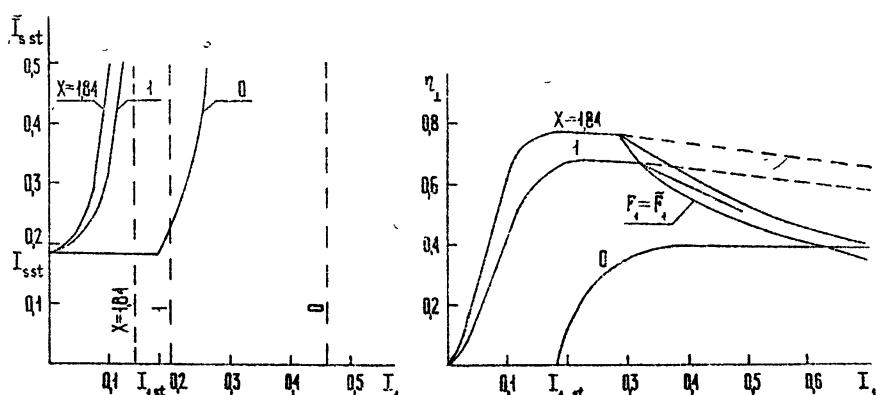


Рис. 1. Стартовое значение параметра I_s и поперечный электронный КПД при оптимальном γ_1 в области мягкого возбуждения колебаний ($n = 1$, $\mu = 7$, $\Delta = 1$).

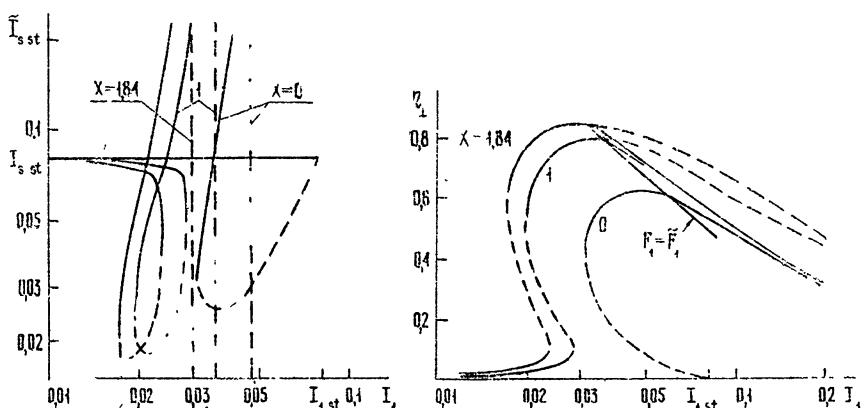


Рис. 2. Стартовое значение параметра I_s и поперечный электронный КПД при оптимальном γ_1 в области жесткого возбуждения колебаний ($n = 1$, $\mu = 17$, $\Delta = 0,6$).

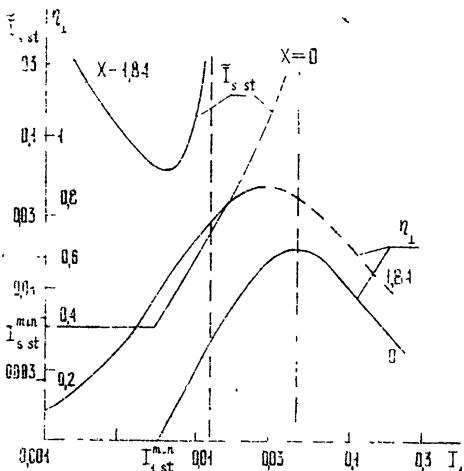
В автономном режиме ($X = 0$) значения $\tilde{I}_{s st}$ определяются вытекающим из (7 а) и (8) выражением

$$\tilde{I}_{s st} = \begin{cases} \left(\chi''^{(0)} + \frac{F_1}{2} \frac{\partial \chi''^{(0)}}{\partial F_1} \right)^{-1} = 2F_1 \left(\frac{\partial \eta_{\perp}}{\partial F_1} \right)^{-1} & \left(\frac{\partial \eta_{\perp}}{\partial F_1} > 0 \right) \\ \infty & \left(\frac{\partial \eta_{\perp}}{\partial F_1} \leq 0 \right) \end{cases} \quad (9)$$

При отсутствии высокочастотных колебаний в автономном МЦР-

монотроне $\tilde{I}_{s st} = I_{s st} = [\chi''^{(0)}(F_1 = 0)]^{-1}$. В области мягкого возбуждения (рис. 1) и $I_{1 st} < I_1 < I_{1 opt}$ (при $I_1 = I_{1 opt}$ КПД имеет максимальную величину) соотношение (9) приближенно можно записать в виде

Рис. 3. Стартовое значение параметра I_s и поперечный электронный КПД при оптимальных γ_1 , Δ ($n = 1$, $\mu = 17$).



$$\tilde{I}_{s st} = I_{s st} [1 + 2(I_1 - I_{1 st})(I_{1 opt} - I_1)^{-1}]$$

Если $I_1 \geq I_{1 opt}$, то самовозбуждение конкурирующих мод в автономном МЦР-монотроне при наличии колебаний на рабочей моде становится невозможным ($B \geq 2$).

По мере увеличения параметра группировки электронов до оптимального значения $X \approx 1,84$ и увеличения амплитуды поля рабочей моды значение $\tilde{I}_{s st}$ возрастает и обращается в бесконечность при $I_1 = I_{1 kp}$, близком к $I_{1 opt}$, но несколько меньшем последнего. Колебания в режимах, соответствующих максимумам амплитудно-частотных характеристик при $X = 1,84$, наиболее устойчивы относительно самовозбуждения конкурирующих мод.

В МЦР-монотроне с жестким возбуждением, в отличие от МЦР-монотрона с мягким возбуждением, увеличение амплитуды колебаний рабочей моды может привести к уменьшению стартовых токов конкурирующих мод (рис. 2). Величина $\tilde{I}_{s st}$ существенно превышает $I_{s st}$ лишь при токах пучка, близких к оптимальному.

Зависимость $\tilde{I}_{s st}$ от I_1 в режиме синхронизованных колебаний приближенно определяется соотношением (9), из которого следует, что увеличение устойчивости колебаний рабочей моды в режиме синхронизации связано с увеличением их амплитуды по сравнению с амплитудой свободных колебаний.

Графики, приведенные на рис. 1 и 2, получены при фиксированных параметрах Δ , выбранных таким образом, что максимумы зависимостей КПД от I_1 имеют наибольшие величины.

Представляют также интерес режимы МЦР-монотрона, в которых подстройкой величины параметра Δ обеспечивается максимальный КПД при любом значении I_1 . В случае такой оптимизации параметра

Δ условия (7 а), (7 б) выполняются при любых $I_1 \leq I_{1\text{opt}}$, а значение $\tilde{I}_{s\text{st}}$ в режиме синхронизации на порядок превышает $\tilde{I}_{s\text{st}}$ и минимальное по параметру Δ стартовое значение — $I_{s\text{st}}^{\min}$ автономного МЦР-моноotronа (рис. 3).

В рассмотренной области параметров, в которой МЦР-моноotron имеет первый наибольший по величине максимум КПД, выполняются неравенства $I_{1\text{kr}} \leq I_{1\text{opt}} < \tilde{I}_1$. Поэтому одномодовые одночастотные колебания в оптимальном режиме устойчивы при любых добротностях конкурирующих мод. Синхронизация колебаний в МЦР-моноотроне существенно расширяет область параметров μ, I , в которой невозможно самовозбуждение конкурирующих мод (рис. 4). Отклонение частоты внешнего сигнала от оптимальной приводит к уменьшению $\tilde{I}_{s\text{st}}$; на границе полосы синхронизации, где $B = 0$, значение $\tilde{I}_{s\text{st}}$ равно \tilde{I}_1 .

Зависимости рис. 1—4 рассчитывались без учета разброса начальных скоростей электронов (коэффициенты R_l в соотношении (5) принимались равными единице). Учет разброса скоростей при определении углов пролета электронов через длинный участок дрейфа качественно не изменяет характеристики синхронизованного МЦР-моноотрона, хотя и приводит к некоторому уменьшению его КПД (рис. 5). Значения $I_{1\text{kr}}, I_{1\text{opt}}, \tilde{I}_1$ с увеличением разброса скоростей возрастают приблизительно пропорционально уменьшению поперечного электронного КПД (величины $F_{1\text{opt}}$ и Δ_{opt} почти не зависят от разброса скоростей и параметра группировки электронов).

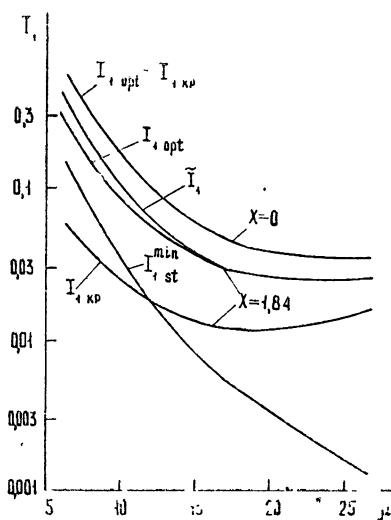


Рис. 4.

Рис. 4. Границы областей качественно различного попедения автономного ($X=0$) и синхронизированного ($X=1,84$) МЦР-моноотронов при $n=1$ и оптимальных γ_1, Δ .

Рис. 5. Поперечный электронный КПД МЦР-моноотрона с пучком без разброса скоростей электронов (сплошные линии) и с разбросом, соответствующим $R_1=0,7$ (пунктирные) при $n=1$ и оптимальных γ_1, Δ, I_1 .

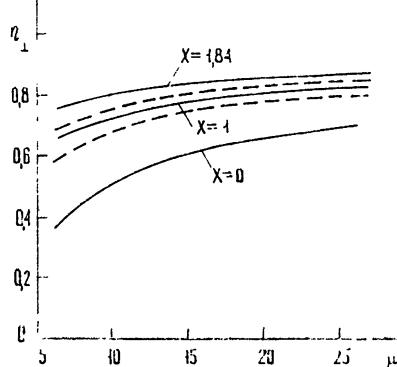


Рис. 5.

Заметим, что наличие разброса скоростей позволяет при расчетах пренебречь высшими гармониками переменной составляющей тока пучка на входе в резонатор. Пренебрежение в (5) членами с индексами

$|I| > 2$ при разбросе, вызывающем, например, изменение углов проleta электронов через участок дрейфа θ_{dp} на π (в этом случае $R_1 \approx 0,7$), приводит к ошибке в определении поперечного электронного КПД, примерно равной 0,01 — 0,03.

Отметим также, что результаты численного исследования других МЦР-монотронов с различными функциями распределения поля в резонаторах (с одной продольной вариацией), работающих на различных гармониках циклотронной частоты ($n \leq 5$), качественно совпадают с полученными выше.

Предварительная модуляция электронного пучка внешним сигналом при надлежащем выборе параметров синхронизированного МЦР-монотрона увеличивает стартовые значения параметров I_s , пропорциональных току пучка и добротностям конкурирующих мод. В режимах с максимальным КПД (при оптимальных величинах тока пучка и частоты внешнего сигнала) устойчивость одномодовых колебаний в МЦР-монотроне обеспечивается при любых добротностях конкурирующих мод независимо от значений параметров μ , Δ , X , n .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967)
2. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Т. Б. Панкрантова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 2, 280 (1975).
3. В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 1, 120 (1975).
4. И. Г. Зарницая, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 3, 459 (1975).
5. М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 2, 290 (1975).
6. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 11, 1709 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
21 октября 1974 г.

TO THE STABILITY OF SINGLE-MODE OSCILLATIONS SYNCHRONIZED IN A MULTI-MODE CRM-MONOTRON

V. S. Ergakov, M. A. Moiseev, R. E. Erm

We consider the oscillation synchronization in CRM-monotron by a preliminary modulation of an electron beam (outside the resonator) at an arbitrary number of competing modes which are close in the frequency in the scale of the cyclotron resonant bandwidth. Sufficient conditions of synchronized oscillations are determined. It is shown that for the optimum parameters corresponding to the maximum efficiency, the instability of the operating mode oscillations is provided at any Q-factors of competing modes.

УДК 621.3.032 266

**К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОДОВ В ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ПУШКИ, ФОРМИРУЮЩЕЙ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПУЧОК
ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ УСЛОВИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ
КРИВОЛИНЕЙНОГО КАТОДА***

V. N. Данилов, V. A. Сыровой

Решается задача описания прикатодной области осесимметричной электростатической пушки, формирующей широкий пучок с неоднородной плотностью тока эмиссии в режиме полного пространственного заряда. Решение внутренней задачи представлено в виде разложений всех параметров пучка по степеням расстояния от катода. Поле вне пучка определено рядом, полученным в результате упрощения интеграла Харкера с комплексной подынтегральной функцией. Упрощения основаны на близости точки наблюдения к краю катода и границе течения. Решение внешней задачи, равномерное во всей окрестности катода, дано в элементарных функциях. Оно позволяет с достаточной полнотой рассчитывать картину эквипотенциалей вне пучка и определить форму всех возможных фокусирующих электродов. Приведенные решения, в частности, дают возможность синтезировать короткую диодную пушку с плоским сеточным анодом и сферическим катодом. Найдена форма нулевого и отрицательных фокусирующих электродов и продолжения анодного электрода для такого устройства.

Расчет пушки по методу синтеза как для пучка, так и для внешнего поля обычно осуществляется на основе параксиального приближения. Область применимости последнего ограничивается узкой полосой вблизи оси пучка во внутренней задаче, а во внешней задаче, кроме того, решение может быть построено вблизи катода только в пределах сектора с углом в 45° . В [2] угол расширен до $67^\circ.5$. В рамках низшего параксиального приближения плотность тока эмиссии однородна, а катод имеет форму параболоида.

Целью данной работы являлось расширение класса решений, пригодных для расчета прикатодной зоны пушки, на основе разложений, использующих узость рассматриваемой области по сравнению с масштабом неоднородности условий на катоде. Иными словами, строится снова параксиальное приближение, но с осью, которая в меридиональной плоскости совпадает с поверхностью катода и ориентирована поперек оси пучка. В таких «антипараксиальных» решениях на ширину катода и первеанс пучка, вообще говоря, не накладывается каких-либо ограничений, в то время, как вдоль по пучку область их пригодности определяется тем числом членов в разложениях, которое удается вычислить.

Можно надеяться, что предлагаемые ниже прикатодные решения позволят внести значительные уточнения в расчет пушек. Так, в рамках этих решений удается точно выделить расположенные на катоде особенности внутреннего и внешнего поля и, тем самым, построить всюду равномерные разложения, радиус сходимости которых лимити-

* Работа доложена на V Всесоюзном семинаре по методам расчета электронно-оптических систем [1].

руется только гладкостью условий на катоде. Расчет прикатодной зоны должен производиться с повышенной точностью, так как в области малых скоростей электронные траектории весьма восприимчивы к малым вариациям формы электродов.

Решение внешней задачи, равномерное во всей окрестности точки старта граничного электрона, необходимо при рассмотрении проблемы синтеза теплового зазора пушки, неразрешимой в рамках известных параксиальных теорий.

Наконец, антипараксиальное приближение позволяет полностью рассчитать короткую пушку с высоким первенством и большой сходимостью, в которой анодный электрод продолжается внутрь пучка в виде сетки. Это же приближение в равной мере описывает промежуток катод—сетка и формирующую наружные электроды в модуляторных пушках.

1. РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ В ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ

В отличие от работ [3, 4], где рассмотрение велось в произвольной ортогональной системе координат в трехмерном случае, для описания прикатодной области осесимметричного пучка введем в меридиональной плоскости R, z координаты s, l , связанные с поверхностью катода:

$$R = R_c(l), \quad z = Z_c(l). \quad (1.1)$$

При этом s есть расстояние, отсчитываемое вдоль нормали к катоду, l — длина дуги на нем, которую удобно отсчитывать от оси вращения. Хотя использование произвольной системы позволяет сформулировать задачу отыскания оптимальной системы с наибольшим радиусом сходимости разложений, однако координаты s, l обладают несомненным преимуществом наглядности и простоты. Связь R, z с s, l задается формулами

$$\begin{aligned} R &= R_c(l) - Z'_c(l)s, \quad z = Z_c(l) + R'_c(l)s, \quad R'^2 + Z'^2 = 1, \\ z_1 &= -R''_c/Z'_c, \quad z_2 = Z'_c/R_c, \quad T = z_1 + z_2, \quad k_2 = -R'_c/R_c. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь z_1, z_2 — главные кривизны катода, T — его полная кривизна, k_2 — вспомогательная величина.

Уравнения осесимметричного электростатического пучка в системе s, l имеют вид

$$\begin{aligned} v_s^2 + \left(\frac{v_l}{1 - z_1 s} \right)^2 &= 2\varphi, \quad \frac{\partial v_s}{\partial l} = \frac{\partial v_l}{\partial s}, \\ \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\sigma v_l}{(1 - z_1 s)^2} \right] + \frac{\partial}{\partial s} (\sigma v_s) &= 0, \quad \sigma = R(1 - z_1 s)\rho, \\ \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{R}{1 - z_1 s} \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left[R(1 - z_1 s) \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right] &= \sigma. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $v_s, v_l/(1 - z_1 s)$ — компоненты скорости, ρ — плотность пространственного заряда, φ — потенциал электрического поля. Все величины в (1.3) отнесены к своим характерным значениям, отмеченным звездочкой, которые связаны с двумя независимыми масштабами φ_* и L_* (единий геометрический масштаб) соотношениями

$$v_* = \sqrt{e/m \varphi_*}, \quad 4\pi\rho_* = \varphi_* L_*^{-2}, \quad J_* = \rho_* v_*, \quad z_* = L_*^{-1}. \quad (1.4)$$

Эмиссия с катода с заданным распределением плотности тока $J(l)$ осуществляется в режиме полного пространственного заряда:

$$s = 0, \rho v_s = J(l), \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0, v_s = v_l = \varphi = 0. \quad (1.5)$$

Предполагается, что $J(l)$ и $R_c(l)$, $Z_c(l)$ в (1.1) — гладкие функции с масштабом неоднородности порядка единицы по безразмерной продольной координате l . Эти функции являются «управляющими параметрами» в задаче синтеза, позволяющими строить течение желаемого вида.

Алгоритм построения разложений по степеням координаты, нормальной к катоду, с выделенной особенностью, достаточно подробно описан в [3]. Ограничимся поэтому сводкой результатов, отметив, что по сравнению с [3] рассмотрено более высокое приближение: в разложении для φ сохраняются члены порядка $s^{13/3}$. Для потенциала, компонент скорости и плотности пространственного заряда получаем соответственно

$$\begin{aligned} 2\varphi &= s^{4/3} \sum_{k=0} \varphi_k(l) s^k, \quad v_s = s^{2/3} \sum_{k=0} U_k(l) s^k, \\ v_l &= s^{5/3} \sum_{k=0} V_k(l) s^k, \quad 2\sigma = s^{-2/3} \sum_{k=0} \rho_k(l) s^k, \\ \varphi_0 &= \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3}, \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{8}{15} T, \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_0} &= \frac{83}{225} (z_1^2 + z_2^2) + \frac{157}{450} z_1 z_2 + \frac{4}{45} k_2 \frac{J'}{J} + \frac{13}{450} \frac{J'^2}{J^2} - \frac{4}{45} \frac{J''}{J}, \\ \frac{\varphi_3}{\varphi_0} &= -\frac{37}{990} (T'' - k_2 T') + \frac{31463}{111375} (z_1^3 + z_2^3) + \frac{199}{750} z_1 z_2 T - \\ &- \left(\frac{1048}{7425} z_1 + \frac{343}{7425} z_2 \right) \frac{J''}{J} + \left(\frac{689}{14850} z_1 + \frac{221}{14850} z_2 \right) \frac{J'^2}{J^2} - \\ &- \left(\frac{27}{275} z'_1 + \frac{8}{2475} z'_2 \right) \frac{J'}{J} + \left(\frac{1048}{7425} z_1 + \frac{343}{7425} z_2 \right) k_2 \frac{J'}{J}, \\ U_0 &= \left(\frac{9J}{2} \right)^{1/3}, \quad \frac{U_1}{U_0} = \frac{4}{15} T, \\ \frac{U_2}{U_0} &= \frac{31}{600} T^2 + \frac{7}{72} (z_1^2 + z_2^2) - \frac{2}{45} \left(\frac{J''}{J} - k_2 \frac{J'}{J} \right) - \frac{1}{180} \frac{J'^2}{J^2}, \\ \frac{U_3}{U_0} &= \frac{1}{2} \frac{\varphi_3}{\varphi_0} - \frac{U_1}{U_0} \frac{U_2}{U_0} - z_1 \left(\frac{V_0}{U_0} \right)^2 - \frac{V_0}{U_0} \frac{V_1}{U_0}, \\ \frac{V_0}{U_0} &= \frac{1}{5} \frac{J'}{J}, \quad \frac{V_1}{U_0} = \frac{1}{10} T' + \frac{1}{30} T \frac{J'}{J}, \\ \frac{V_2}{U_0} &= \left[\frac{67}{4950} (z_1^2 + z_2^2) + \frac{31}{3300} z_1 z_2 \right] \frac{J'}{J} - \frac{4}{495} k_2 \frac{J'^2}{J^2} + \frac{1}{396} \frac{J'^3}{J^3} + \\ &+ \frac{1}{198} \frac{J' J''}{J^2} + \frac{67}{825} (z_1 z'_1 + z_2 z'_2) + \frac{31}{1100} (z_2 z'_1 + z_1 z'_2) + \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{165} \left(k_2' \frac{J'}{J} + k_2 \frac{J''}{J} - \frac{J'''}{J} \right), \\
 \rho_0 & = \frac{4}{9} \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3} R, \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = - \frac{4}{15} T, \\
 \frac{\rho_2}{\rho_0} & = \frac{7}{360} T^2 - \frac{7}{72} (z_1^2 + z_2^2) - \frac{1}{18} \left(\frac{J''}{J} - k_2 \frac{J'}{J} \right) + \frac{1}{180} \frac{J'^2}{J^2}, \\
 \frac{\rho_3}{\rho_0} & = 10 \frac{\sigma_3}{\sigma_0} + \frac{35}{2} \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \frac{\sigma_2}{\sigma_0} + 25 \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \frac{65}{2} \frac{\varphi_3}{\varphi_0} + \\
 & + \frac{(\varphi'_0 \beta_1 + \varphi'_1 \beta_0)'}{\rho_0}, \quad \frac{\sigma_n}{\sigma_0} = r_1^{n-1} (z_1 - z_2), \quad \beta_0 = R, \quad \beta_1 = -RT.
 \end{aligned}$$

Располагая коэффициентами (1.6), можно получить дифференциальное уравнение траектории и проинтегрировать его подобно тому, как это было сделано в [5]. В локальных декартовых координатах X, Y (ось X направлена по нормали к катоду, ось Y — по касательной) траектория с принятой в работе точностью задается параболой четвертой степени:

$$\begin{aligned}
 Y & = aX^2 + bX^3 + cX^4, \\
 a & = \frac{1}{10} \frac{J'}{J}, \quad b = \frac{1}{150} (4z_1 - z_2) \frac{J'}{J} + \frac{1}{30} T', \\
 c & = \left(\frac{7}{660} z_1^2 - \frac{23}{6600} z_1 z_2 - \frac{3}{1100} z_2^2 \right) \frac{J'}{J} + \frac{73}{330} z_1 z_1' + \quad (1.7) \\
 & + \frac{37}{220} z_1 z_2' + \frac{3}{220} z_2 z_2' + \frac{1}{2640} z_2 z_1' + \frac{7}{825} \frac{J' J''}{J^2} - \\
 & - \frac{1}{200} \frac{J'^3}{J^3} - \frac{1}{825} k_2 \frac{J'^2}{J^2} + \frac{1}{330} \left(k_2' \frac{J'}{J} + k_2 \frac{J''}{J} - \frac{J'''}{J} \right).
 \end{aligned}$$

Формулы (1.6), (1.7) полностью описывают электронный поток и позволяют сформулировать условия на границе течения, необходимые для решения внешней задачи.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ ПУЧКА

Применяя формулы [5], связывающие криволинейные координаты s, l с локальными декартовыми координатами X, Y ,

$$s = X - \frac{1}{2} z_1 Y^2 + \dots, \quad l - l_0 = Y + z_1 X Y + \dots,$$

и учитывая (1.7), обнаруживаем, что на границе течения в пределах точности, с которой ведется рассмотрение

$$s = X, \quad l - l_0 = aX^2 + (b + az_1) X^3. \quad (2.1)$$

В силу этого φ_0 и φ_1 в (16) должны быть дополнительно разложены в окрестности точки старта $s = 0, l = l_0$:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{J'}{J} [aX^2 + (b + az_1)X^3] \right\}, \\ \varphi_1 &= \frac{8}{15} (T + T' aX^3).\end{aligned}\quad (2.2)$$

В этих формулах и ниже, так же как в (1.7) (и в отличие от (16)), все величины вычисляются в точке старта.

Введем функцию, представляющую собой аналитическое продолжение траектории (1.7), заданной параметрически:

$$\begin{aligned}X = X_e(u) &= u, \quad Y = Y_e(u) = au^2 + bu^3 + cu^4, \\ X + iY &= X_e(w) + iY_e(w) = w + i(a\omega^2 + b\omega^3 + c\omega^4), \\ w &= u + iv.\end{aligned}\quad (2.3)$$

В координатах u, v уравнение границы пучка запишется как $v = 0$.

Подставляя (2.2) в (1.6) и пользуясь выражениями для коэффициентов (1.7), получаем следующее выражение для потенциала на границе течения:

$$\begin{aligned}2\varphi|_{v=0} &= V(u) = V_0 u^{4/3} + V_1 u^{7/3} + V_2 u^{10/3} + V_3 u^{10/3}, \\ V_0 &= \varphi_0, \quad V_1 = \varphi_1, \quad \frac{V_2}{V_0} = \frac{\varphi_2}{\varphi_0} + \frac{1}{15} \frac{J'^2}{J^2}, \\ \frac{V_3}{V_0} &= \frac{\varphi_3}{\varphi_0} + \frac{17}{225} T' \frac{J'}{J} + \left(\frac{3}{25} z_1 + \frac{7}{225} z_2 \right) \frac{J'^2}{J^2}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Нормальную производную потенциала при $v = 0$ найдем из очевидного условия баланса сил на траектории

$$2\varphi k_t = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{g_{vv}}} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad g_{vv} = \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2. \quad (2.5)$$

Здесь k_t — кривизна траектории:

$$k_t = \frac{2a + 6bu + 12cu^2}{(1 + 4a^2u^2)^{3/2}} = 2a + 6bu + 12(c - a^3)u^2. \quad (2.6)$$

В (2.6) сохранены квадратичные члены с тем, чтобы обеспечить в выражении для $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, стоящей под интегралом, вычисление членов порядка $u^{10/3}$. Аналогичные рассуждения дают для g_{vv}

$$g_{vv}|_{v=0} = (1 + 4a^2v^2 - 4av - 12buv + 4a^3u^3)|_{v=0} = 1 + 4a^2u^2. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6), (2.7) в (2.5), получим

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_{v=0} &= F(u) = F_0 u^{4/3} + F_1 u^{7/3} + F_2 u^{10/3}, \\ F_0 &= 4a_0 V_0, \quad F_1 = 4(aV_1 + 3bV_0), \\ F_2 &= 4aV_2 + 12bV_1 + 8(3c - 2a^3)V_0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

3. РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ В ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ

При решении внешней задачи будем исходить из выражения для потенциала [6] для системы с аксиальной симметрией в форме [7], когда функция Римана выражена через гипергеометрическую функцию Гаусса. При таком представлении интегrand не содержит неопределенностей вида 0/0:

$$\begin{aligned} \varphi = & \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{R_e(w)}{R} \right]^{1/2} V(w) + \int_0^v \left[\left(\frac{R_e}{R} \right)^{1/2} \left(F + \frac{\beta V}{2R_e} \right) F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{V}{8R_e^{1/2} R^{3/2}} \left(\frac{(R^2 - R_e^2 + (z_e - z)^2}{2R_e} \beta + (z_e - z)\alpha \right) F \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e \right) \right] d\xi \right\}, \\ \lambda_e = & - \frac{(R_e - R)^2 + (z_e - z)^2}{4R_e R}, \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$R = R_e(u), \quad z = z_e(u), \quad \alpha = \frac{dR_e}{du}, \quad \beta = \frac{dz_e}{du}$$

— параметрические уравнения границы пучка в координатах $R, z; R_e, z_e, \alpha, \beta, V, F$ под интегралом — функции ζ , аргумент гипергеометрической функции λ_e — комплексная величина.

Уравнения для R_e, z_e легко получаются из X_e, Y_e в (2.3), если ввести угол ϑ , определяющий наклон нормали к катоду в точке старта (R_0, z_0) к оси вращения z :

$$\begin{aligned} R_e(u) &= R_0 + X_e(u) \sin \vartheta + Y_e(u) \cos \vartheta, \\ z_e(u) &= z_0 + X_e(u) \cos \vartheta - Y_e(u) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2), (2.4), (2.8) в (3.1), получаем решение задачи при произвольном соотношении R_0 и ширины полосы a_* , в которой справедливы разложения (1.6).

Построим квазилокальное решение, справедливое при $a_* < R_0$. Воспользуемся малостью окрестности, в которой ведется рассмотрение и которая характеризуется малым параметром $\varepsilon_* = a_*/L_*$. Учитывая, что $\lambda_e \sim \varepsilon_*^2$, а сохраняются члены порядка $\varepsilon_*^{13/3}$, из (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{VR} \operatorname{Re} [VR_e(w)V(w)] + \frac{1}{VR} \operatorname{Re} \int_0^v VR_e \left(F + \frac{\beta V}{2R_e} \right) d\xi - \\ & - \frac{1}{16RV} \operatorname{Re} \int_0^v \left(F + \frac{\beta V}{2R_e} \right) [(R_e - R)^2 + (z_e - z)^2] \frac{d\xi}{VR_e} - \\ & - \frac{1}{8RV} \operatorname{Re} \int_0^v V \left[\frac{R^2 - R_e^2 + (z_e - z)^2}{2R_e} \beta + (z_e - z)\alpha \right] \frac{d\xi}{VR_e}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Произведем разложения подынтегральных функций, имея в виду в дальнейшем выполнить интегрирование. В отличие от [5] первое слаг-

гаемое в (3.3) и множители, стоящие перед интегралами, сохраняются неизменными. Учитывая (2.3), (3.5), имеем

$$\begin{aligned} z_e(\zeta) &= z_0 + \zeta \cos \vartheta - (a\zeta^2 + b\zeta^3) \sin \vartheta, \\ R_e(\zeta) &= R_0 + \zeta \sin \vartheta + (a\zeta^2 + b\zeta^3) \cos \vartheta, \\ R &= R_0 + u \sin \vartheta + v \cos \vartheta - 2auv \sin \vartheta + a(u^2 - v^2) \cos \vartheta, \quad (3.4) \\ z &= z_0 + u \cos \vartheta - v \sin \vartheta - 2auv \cos \vartheta - a(u^2 - v^2) \sin \vartheta, \\ \alpha(\zeta) &= \sin \vartheta + (2a\zeta + 3b\zeta^2) \cos \vartheta, \\ \beta(\zeta) &= \cos \vartheta - (2a\zeta + 3b\zeta^2) \sin \vartheta, \\ R_e(\zeta) - R &= i\xi \sin \vartheta - v \cos \vartheta, \\ z_e(\zeta) - z &= i\xi \cos \vartheta + v \sin \vartheta, \\ (R_e - R)^2 + (z_e - z)^2 &= v^2 - \xi^2. \end{aligned}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и переходя к интегрированию по ζ —

$$\operatorname{Re} \int_0^w F(u + i\xi) d\xi = \operatorname{Im} \int_0^w F(\zeta) d\zeta,$$

приходим к следующему окончательному выражению для потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{R}} [\operatorname{Re} \sqrt{R_e(w)} \operatorname{Re} V(w) - \operatorname{Im} \sqrt{R_e(w)} \operatorname{Im} V(w)] + \\ &\quad + \operatorname{Im} \left(\frac{3}{7} D_1 w^{7/3} + \frac{3}{10} D_2 w^{10/3} + \frac{3}{13} D_3 w^{13/3} \right), \\ D_1 &= \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{16 R_0 R} \right) F_0 + \left\{ \frac{\cos \vartheta}{2} - \frac{v}{8R} - \frac{\sin 2\vartheta}{16R} \left(\frac{\cos \vartheta}{R_0} + a \right) uv - \right. \\ &\quad - \left[\frac{\cos \vartheta}{32 R_0 R} (1 + 2 \sin^2 \vartheta) + \frac{a}{8R} (2 - \cos^2 \vartheta) \right] u^2 - \\ &\quad - \left. \left[\frac{\cos \vartheta}{32 R_0 R} (1 + 2 \cos^2 \vartheta) - \frac{a}{8R} \cos^2 \vartheta \right] v^2 \right\} \frac{V_0}{\sqrt{R_0 R}}, \\ D_2 &= \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \left(F_1 + \frac{\sin \vartheta}{2R_0} \right) + \frac{u}{8R} \frac{F_0}{\sqrt{R_0 R}} + \left(\cos \vartheta - \frac{v}{4R} \right) \frac{V_1}{2 \sqrt{R_0 R}} + \\ &\quad + \left\{ - \left(a + \frac{\cos \vartheta}{4R_0} \right) \sin \vartheta + \left[\frac{a}{4R} (2 - \cos^2 \vartheta) + \frac{\cos \vartheta}{16R_0 R} (1 + 2 \sin^2 \vartheta) \right] u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \vartheta}{16R_0 R} (1 + 2 \cos^2 \vartheta) v \right\} \frac{V_0}{\sqrt{R_0 R}}, \quad (3.5) \\ D_3 &= \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1/2} F_2 + \frac{1}{\sqrt{R_0 R}} \left[\frac{\sin \vartheta}{2} F_1 + \left(\frac{a \cos \vartheta}{2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{8R_0} - \frac{1}{16R} \right) F_0 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{R_0 R}} \left[\frac{\cos \vartheta}{2} V_2 - \frac{\sin \vartheta}{2} \left(2a + \frac{\cos \vartheta}{2R_0} \right) V_1 \right] + \left[- \frac{3b \sin \vartheta}{2} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{a}{8R} (2 - \cos^2 \vartheta) + \frac{a}{4R_0} (2 \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) + \frac{\cos \vartheta}{32 R_0} \left(\frac{6 \sin^2 \vartheta}{R_0} - \right. \\ \left. - \frac{1 + 2 \sin^2 \vartheta}{R} \right) \frac{V_0}{\sqrt{R_0 R}}.$$

Формулы (3.5) дают решение внешней задачи, равномерно пригодное вблизи катода и вблизи границы пучка, в элементарных функциях.

4. РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ И ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ СФЕРА—ПЛОСКОСТЬ

Применим полученные выше результаты для расчета диода с указанной геометрией (рис. 1) и начнем с решения краевой задачи [4].

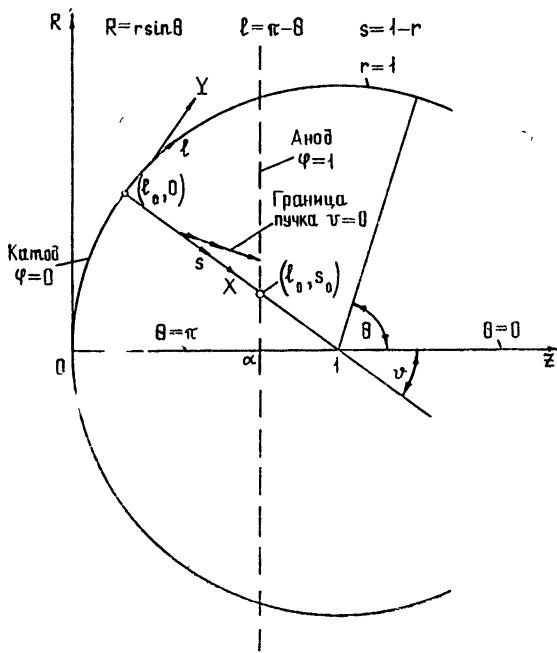


Рис. 1.

При этом $x_1 = x_2 = 1$, $T = 2$, $k_2 = -\operatorname{ctg} \theta$, так что для потенциала и траекторий коэффициентов получаем

$$2\varphi = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} s^{4/3} \left\{ 1 + \alpha_0 s + \left[\beta_0 + \beta_1 \frac{J'^2}{J^2} + \beta_2 \left(\frac{J''}{J} + \operatorname{ctg} \theta \frac{J'}{J} \right) \right] s^2 + \right. \\ \left. + \left[\gamma_0 + \gamma_1 \frac{J'^2}{J^2} + \gamma_2 \left(\frac{J''}{J} + \operatorname{ctg} \theta \frac{J'}{J} \right) \right] s^3 \right\}, \\ \alpha_0 = \frac{16}{15}, \quad \beta_0 = \frac{163}{150}, \quad \beta_1 = \frac{13}{450}, \quad \beta_2 = -\frac{4}{45}, \quad (4.1) \\ \gamma_0 = \frac{122029}{111375}, \quad \gamma_1 = \frac{91}{1485}, \quad \gamma_2 = -\frac{1391}{7425},$$

$$a = \frac{1}{10} \frac{J'}{J}, \quad b = \frac{1}{50} \frac{J'}{J}, \quad c = \frac{29}{6600} \frac{J'}{J} + \frac{7}{825} \frac{J' J''}{J^2} - \frac{1}{200} \frac{J'^3}{J^3} +$$

$$+ \frac{1}{825} \operatorname{ctg} \theta \frac{J'^2}{J^2} - \frac{1}{330} \left(\csc^2 \theta \frac{J'}{J} + \operatorname{ctg} \theta \frac{J''}{J} + \frac{J'''}{J} \right),$$

$$J' = \frac{dJ}{dl} = - \frac{dJ}{d\theta}.$$

Уравнение анода $z = d$ в координатах s, θ имеет вид

$$s_a = 1 - \frac{d - 1}{\cos \theta}.$$

Обращая формулу (4.1), вычислим плотность тока в нулевом, первом и т. д. приближении [4]:

$$J_0 = (d/s_a)^2, \quad J_1 = J_0 (1 + \alpha_0 s_a)^{-3/2},$$

$$J_2 = J_0 \left\{ 1 + \alpha_0 s_a + \left[\beta_0 + \beta_1 \frac{J_0'^2}{J_0^2} + \beta_2 \frac{J_0''}{J_0} + \beta_2 \frac{2(d-1)}{s_a \cos \theta} \right] s_a^2 \right\}^{-3/2},$$

$$J_3 = J_0 \left\{ 1 + \alpha_0 s_a + \left[\beta_0 + \beta_1 \frac{J_1'^2}{J_1^2} + \beta_2 \frac{J_1''}{J_1} + \beta_2 \frac{d-1}{2 \cos \theta} \left(\frac{4}{s_a} + \frac{3\alpha_0}{1 + \alpha_0 s_a} \right) \right] s_a^2 + \left[\gamma_0 + \gamma_1 \frac{J_0'^2}{J_0^2} + \gamma_2 \frac{J_0''}{J_0} + \gamma_2 \frac{2(d-1)}{s_a \cos \theta} \right] s_a^3 \right\}^{-3/2}. \quad (4.2)$$

При этом J нормирована на плотность тока в плоском ленгмюровском диоде с потенциалом анода φ_a и расстоянием d между электродами. Кроме того, в (4.2) раскрыты неопределенности при $\theta = \pi$ в выражении $\operatorname{ctg} \theta J'/J$. Траекторные коэффициенты после аналогичных преобразований имеют вид

$$a = \frac{1}{10} \frac{J'_2}{J_2}, \quad b = \frac{1}{50} \frac{J'_1}{J_1},$$

$$c = \frac{29}{6600} \frac{J'_0}{J_0} + \frac{7}{825} \frac{J'_0 J''_0}{J_0^2} - \frac{1}{200} \frac{J'^3_0}{J_0^3} + \frac{1}{825} \frac{2(d-1)}{s_a \cos \theta} \frac{J'_0}{J_0} -$$

$$- \frac{1}{330} \left[\frac{2(d-1)}{s_a} \operatorname{tg} \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{3}{s_a} \right) + \frac{J'''_0}{J_0} \right].$$

В отличие от [4] радикалы в (4.2) не подвергались разложению.

На рис. 2, 3 приведены результаты расчета плотности тока J и полного тока пучка I по приближениям.

На рис. 4—6 представлено решение внешней задачи при $d = 0,3$ и различной ширине пучка, определяемой параметром l_0 . Переменные X, Y отнесены к расстоянию s_0 от катода до анода в точке старта, измеренному вдоль s . Кривая $\varphi = 0$ при $X < 0$ определяет форму катода, если тепловой зазор рассчитывается по методу синтеза. На рис. 7, 8 изображены эквипотенциали в лапласовской области при $d = 0,6$. Пересечение линий на рис. 8 дает область неоднозначности потенциала, возникновение которой связано с тем обстоятельством, что функция (2.3), представляющая собой аналитическое продолжение траектории,

не дает конформного отображения полуплоскости на внешность этой кривой. Трудности такого рода всегда имеют место при процедуре аналитического продолжения [8]. Они носят, однако, чисто математический характер, а не связаны с физикой задачи, как это утверждается в [8].

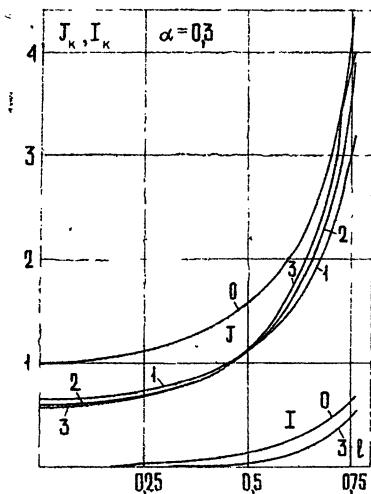


Рис. 2.

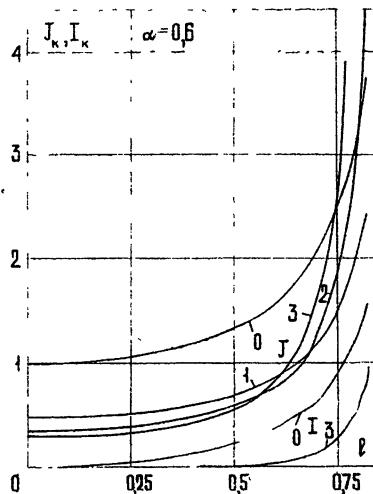


Рис. 3.

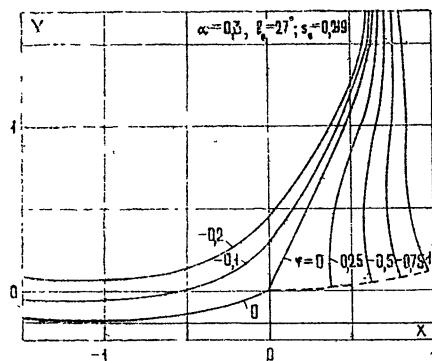


Рис. 4.

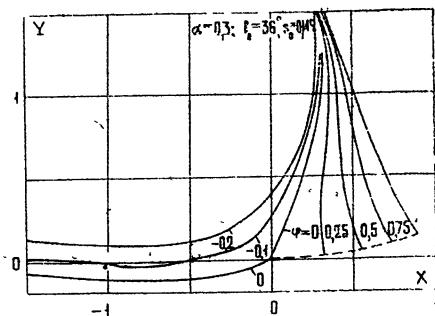


Рис. 5.

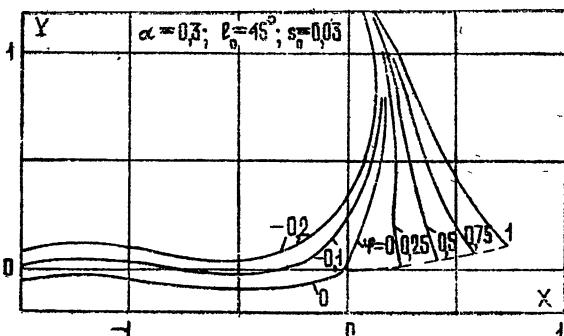


Рис. 6.

Заметим, что построенное выше решение внешней задачи справедливо в окрестности начала координат порядка R_0 , так что кривые на рис. 8 должны быть оборваны прежде, чем эквипотенциали начнут пересекаться.

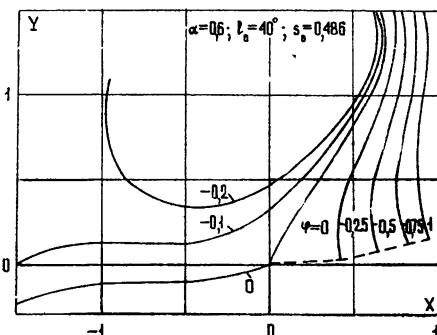


Рис. 7.

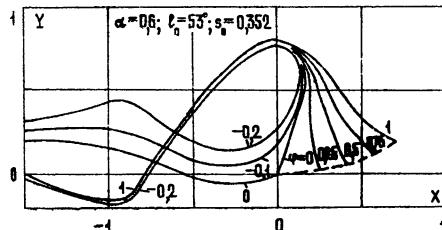


Рис. 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Данилов, В. А. Сыровой, Методы расчета электронно-оптических систем, серия Электроника СВЧ, вып. 4 (34), М., 1974.
2. В. Т. Овчаров, В. В. Пензяков, Радиотехника и электроника, 15, № 9 (1970).
3. Ю. Е. Кузнецов, В. А. Сыровой, ПМТФ, № 2, 41 (1966).
4. В. Н. Данилов, В. А. Сыровой, ПМТФ, № 1, 11 (1969).
5. В. А. Сыровой, ПМТФ, № 5, 96 (1967).
6. K. J. Harker, J. Math. Phys., 4, № 7 (1963).
7. В. Н. Данилов, В. А. Сыровой, ПММ, 35, № 4, 656 (1971).
8. П. Кирштейн, Г. Кайно, У. Уотерс, Формирование электронных пучков, изд. Мир, М., 1970, стр. 421.

Центральный аэрогидродинамический институт

Поступила в редакцию
28 января 1975 г.

CALCULATION OF ELECTRODES IN THE NEAR-CATHODE REGION OF AN AXIALLY SYMMETRIC ELECTRON GUN UNDER NONUNIFORM CONDITIONS ON A CURVILINEAR CATHODE

V. N. Danilov, V. A. Syrovoy

The problem is solved to describe the near-cathode region of an axially symmetric electron gun forming a broad beam with the nonuniform current density at the cathode under space-charge conditions. The solution of the space-charge flow equations is represented as the cathode distance power expansion for all beam parameters. The series expansion for the field outside the beam is derived from integral given by K. Harker. This simplification is based on the vicinity of the observation point to the cathode edge and beam boundary. The solution of the external problem valid in the whole vicinity of the cathode is given in elementary functions. It permits a pattern of equipotentials outside the beam to be fully enough calculated and all possible focusing electrodes defined. The given solutions, in particular, make it possible to synthesize a short diode gun with plane grid anode and spheric cathode. The zero and negative focusing electrode form is found, as well as extention of the anode electrode for such a device.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.255

**К ВОПРОСУ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ В ХОЛОДНОЙ
НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ**

В. В. Демченко, А. Я. Омельченко

В настоящем сообщении излагаются результаты теории параметрического возбуждения потенциальных волн в холодной неоднородной изотропной плазме. Предложен метод, позволяющий разделить задачу о параметрическом резонансе в неоднородной плазме на две части. «Временная» часть, описывающая параметрическую раскачуку колебаний и дающая возможность определить частоты и инкременты нарастания неустойчивых волн, описывается уравнениями, которые с точностью до переобозначения плазменных частот $(\omega_{p0}^2 \rightarrow p^2, \omega_{pl}^2 \rightarrow \frac{m_e}{m_i} p^2)$ совпадают с уравнениями, определяющими параметрическое возбуждение волн в однородной плазме. Значения постоянной разделения p находятся в результате решения «пространственной» части задачи с учетом конкретных граничных условий.

Рассмотрим холодную неоднородную изотропную плазму, равновесная плотность n_0 , которой изменяется вдоль оси z . Вектор однородного электрического поля $E_{ext} = E_0 \sin \omega_0 t$ ориентирован вдоль оси x . В рассматриваемом случае холодной плазмы система уравнений состоит из уравнений гидродинамики, дополненных уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \nabla) \mathbf{v}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [E_{ext} - \nabla \varphi]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0; \quad (2)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_{\alpha=e, i} e_\alpha n_\alpha, \quad (3)$$

где n_α и \mathbf{v}_α — плотность и скорость частиц сорта α , φ — потенциал самосогласованного электрического поля.

Из уравнений движения (1) найдем скорость, которую частицы приобретают под воздействием внешнего электрического поля,

$$u_\alpha = - \frac{e_\alpha E_0 \cos \omega_0 t}{m_\alpha \omega_0}. \quad (4)$$

Представляя неравновесные величины в виде $f'(r, t) = f'(z, t) \exp[i(k_x x + k_y y)]$, линеаризуя систему уравнений (1)–(3) и учитывая (4), для функций

$$n_\alpha = e_\alpha n'_\alpha \exp(-i A_\alpha(t)), \quad A_\alpha = \frac{e_\alpha k_x E_0 \sin \omega_0 t}{m_\alpha \omega_0^2} \equiv a_\alpha \sin \omega_0 t \quad (5)$$

и потенциала электрического поля φ получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_\alpha}{\partial t^2} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \exp(-i A_\alpha(t)) \hat{\Delta}_2 \varphi; \quad (6)$$

$$\hat{L}_1 \varphi = \sum_{\alpha=e, i} 4\pi v_\alpha \exp(i A_\alpha(t)), \quad (7)$$

где

$$\hat{L}_1 \equiv -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2, \quad \hat{L}_2 \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left(n_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) - k^2 n_0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Полагая $v_\alpha(z, t) = v_{\alpha 1}(t) v_{\alpha 2}(z)$, $\varphi(z, t) = \varphi_1(t) \varphi_2(z)$ и разделяя переменные в уравнениях (6), (7), находим

$$\frac{\partial^2 v_{e1}}{\partial t^2} + p^2 \{v_{e1} + v_{i1} \exp[i(A_t(t) - A_e(t))]\} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 v_{i1}}{\partial t^2} + \frac{m_e}{m_i} p^2 \{v_{i1} + v_{e1} \exp[-i(A_t(t) - A_e(t))]\} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\epsilon \frac{d \varphi_2}{dz} \right) - k^2 \epsilon \varphi_2 = 0, \quad (10)$$

где $\epsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(z)}{p^2}$, p — постоянная разделения.

Решив уравнение (10), определим возможные значения постоянной p . При этом система уравнений (8), (9) с точностью до переобозначений $\omega_{pe}^2 \rightarrow p^2$, $\omega_{pi}^2 \rightarrow \frac{m_e}{m_i} p^2$ совпадает с системой уравнений, описывающей параметрическое возбуждение волн в однородной плазме [1].

В качестве примера рассмотрим параметрическое возбуждение НЧ поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы раздела двух изотропных плазм с различной плотностью при учете переходного слоя между ними. Градиент невозмущенной плотности направлен вдоль оси z . Полупространство $z < 0$, заполненное плазмой с плотностью n_0 , отдельно от полупространства $z > a$ с плотностью n_0^{II} переходным слоем $0 < z < a$, в котором плотность частиц монотонно изменяется. Внешнее электрическое поле направлено вдоль границы раздела по оси x .

Решая (10) методом, изложенным в [2], находим уравнение для определения величины p :

$$\epsilon^I + \epsilon^{II} = -k \epsilon^I \epsilon^{II} \int_0^a \frac{dz}{\epsilon(z)}, \quad (11)$$

где ϵ^I и ϵ^{II} — «диэлектрические проницаемости» плазмы соответственно при $z < 0$ и $z > a$. Представляя p в виде $p = p_0 + ip_1$ и предполагая эффект бесстолкновительного затухания слабым ($|p_1| \ll |p_0|$), для величин p_0 и p_1 получим следующие выражения:

$$p_0^2 \equiv \omega_{pe}^{*2} = \frac{\omega_{pe}^{I2}}{2} + \frac{\omega_{pe}^{II2}}{2}, \quad (12)$$

$$p_1 = -\frac{\pi kh_2}{4} \epsilon^{I2} |p_0|, \quad (13)$$

где

$$h_2 = \left| \frac{d \epsilon}{dz} \right|_{z=z_R}^{-1}, \quad \epsilon(z_R) = 0.$$

Система уравнений (8), (9), описывающая параметрическую раскачку колебаний, представляет собой систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, методы решения которых известны [1]. Решая систему уравнений (8), (9), с точностью до слагаемых $\sim \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2$, находим дисперсионное уравнение, описывающее НЧ потенциальные колебания холодной неоднородной плазмы в переменном электрическом поле:

$$D_0 \equiv 1 - \frac{m_e}{m_i} \frac{p^2}{\omega^2} + \frac{m_e}{m_i} \frac{p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(a_e) p^2}{(\omega + n\omega_0)^2 - p^2} = 0. \quad (14)$$

Представляя ρ в виде $\rho = \rho_0 + i\rho_1$, из дисперсионного уравнения (14) получаем следующие выражения для частоты и декремента затухания НЧ колебаний (в настоящем сообщении для упрощения изложения рассматривается случай нерезонансного возбуждения колебаний, когда $\omega_0 \neq \omega_{pe}^*$):

$$\omega_{\text{НЧ}} = \pm \frac{m_e}{m_l} |p_0| (1 - J_0^2(a)), \quad \gamma_{\text{НЧ}} = - \frac{m_e}{m_l} |p_1| (1 - J_0^2(a)) \quad (\omega_0 \gg \omega_{pe}^*), \quad (15)$$

$$\omega_{\text{НЧ}} = \pm \left(\frac{1}{2} \frac{a^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 - p_0^2} \frac{m_e}{m_l} p_0^2 \right)^{1/2}, \quad \gamma_{\text{НЧ}} = - \frac{|p_1|}{|p_0|} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - p_0^2} | \omega_{\text{НЧ}} |$$

$$(\omega_0 \gg \omega_{pe}^*, a \ll 1),$$

где величины p_0 и p_1 определяются выражениями (12) и (13).

Необходимо отметить, что предложенный в настоящем сообщении метод исследования значительно проще метода, обычно применяемого в теории параметрического резонанса в неоднородной плазме. По этой причине представляет интерес применение изложенного метода к решению задач о параметрическом возбуждении волн в анизотропной плазме, а также в задачах о параметрическом резонансе в плазме с учетом теплового движения частиц.

В заключение благодарим А. Б. Киценко и К. Н. Степанова за полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).
2. V. V. Demchenko, K. E. Zayed, Physica, 59, 385 (1972).

Поступила в редакцию
25 марта 1975 г

УДК 621.372.8

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙ ДВИЖУЩУЮСЯ ЗАКОРАЧИВАЮЩУЮ СТЕНКУ ВОЛНОВОДА

Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев, А. Д. Тер-Погосян

Рассмотрим произвольный регулярный волновод без потерь ($\epsilon = \mu = 1$), в котором по закону $z = vt$ движется закорачивающаяся стенка. Навстречу ей вдоль оси z со скоростью $-u$ летит заряд e ($j_z = -eud(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z+ut)$). Так как $j_x = j_y = 0$, то волны типа H не возбуждаются. Волновое уравнение для продольной компоненты электрического поля, определяющее возбуждение волн типа E в волноводе:

$$\Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_z}{\partial t}. \quad (1)$$

Решение (1) ищем в виде

$$E_z = \sum_n \psi_n(x, y) \psi_n(x_0, y_0) \left[\frac{2ie(1-u^2/c^2)}{u^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp\left(i\frac{\omega}{u}z + i\omega t\right)}{s_n} d\omega + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\omega') \exp(-i\gamma'_n z + i\omega' t) d\omega \right], \quad (2)$$

где $\psi_n(x, y)$ — мембранные функции волновода, γ'_n — поперечное волновое число,

$$\gamma'_n = \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} - x_n^2}, \quad s_n = x_n^2 + \frac{\omega^2}{u^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

Первый член в (2) представляет собой поле, связанное с частицей, второй — поле излучения. Поперечные компоненты поля равны

$$E_x = \sum_n \frac{\partial \psi_n(x, y)}{\partial x} \psi_n(x_0, y_0) \left[-\frac{2e}{u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{u} z + i \omega t\right)}{s_n} d\omega - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{x_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma'_n B_n(\omega') \exp(-i \gamma'_n z + i \omega' t) d\omega \right], \quad (3)$$

$$H_y = \sum_n \frac{\partial \psi_n(x, y)}{\partial y} \psi_n(x_0, y_0) \left[\frac{2e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{u} z + i \omega t\right)}{s_n} d\omega - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{cx_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega' B_n(\omega') \exp(-i \gamma'_n z + i \omega' t) d\omega \right].$$

Неизвестный коэффициент $B_n(\omega')$ найдем из граничных условий на движущейся стенке, которые запишем в системе координат, связанной со стенкой:

$$(E_x - \beta H_y)|_{z=vt} = 0 \quad (\beta = v/c). \quad (4)$$

Из (3) и (4) получим

$$B_n(\omega') = \frac{2ie}{u} \left(1 + \frac{vu}{c^2}\right) \frac{x_n^2}{\gamma'_n - \omega' \beta/c} \frac{1}{s_n}, \quad (5a)$$

$$\omega \left(1 + \frac{v}{u}\right) = \omega' - \gamma'_n v. \quad (5b)$$

Корни уравнения (5 б) равны

$$\omega'_{1,2} = \frac{\omega(1 + v/u) \pm [\omega^2 \beta^2 (1 + v/u)^2 - v^2 x_n^2 (1 - \beta^2)]^{1/2}}{1 - \beta^2}, \quad (6)$$

$$\gamma'_{n1,2} = \frac{\omega \beta^2 (1 + v/u) \pm [\omega^2 \beta^2 (1 + v/u)^2 - v^2 x_n^2 (1 - \beta^2)]^{1/2}}{v(1 - \beta^2)}.$$

На рис. 1 приведена зависимость $\frac{\omega_1'}{\omega}$ и $\frac{\omega_2'}{\omega}$ от $\frac{\omega}{\omega_{kp}}$ для $\beta = 0,5$, $u/c = 0,98$. Область $0 < \omega < \omega_1 = \frac{c x_n (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 + v/u}$, в которой $\omega'_{1,2}$ и $\gamma'_{n1,2}$ — комплексные, отбрасываем. Если $\omega \geq \omega_1$, то $\omega_1' > 0$ и $\gamma'_{n1} > 0$, что соответствует излучению в область $z > vt$. Ясно, что в этом случае необходимо потребовать, чтобы групповая скорость излученной волны была больше скорости стенки. Тогда нижняя граница спектра распространяющихся волн будет равна $\omega_{10}' = \frac{c x_n}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. На рис. 1 это соответствует значениям ω_1'/ω , лежащим выше пунктирной кривой.

Если $\omega_1 < \omega < \omega_2 = \frac{c x_n}{1 + v/u}$, то $\omega_2' > 0$ и $\gamma'_{n2} > 0$, но так как эти значения $\frac{\omega_2}{\omega}$ лежат ниже пунктирной кривой, то эти частоты не будут распространяться. Для $\omega > \omega_2$, $\omega_2' > 0$ и $\gamma'_{n2} < 0$, что соответствует излучению в область $z < vt$.

Поток энергии переходного излучения для n -й моды E -волны равен

$$S_{1,2}^{(n)} = \frac{2e^2}{u^2} \frac{(1 + vu/c^2)^2}{(1 + v/u)^2} (\psi_n(x_0, y_0))^2 x_n^2 \int_{\omega_{10}}^{\infty} \frac{\omega'_{1,2}}{s_n^2 \left[\frac{\omega^2}{c^2} - x_n^2 \frac{1 - \beta^2}{(1 + v/u)^2} \right]^{1/2}} d\omega, \quad (7)$$

где индексы 1, 2 относятся к области $z > vt$ и $z < vt$ соответственно. Нижний предел интегрирования для излучения в область $z > vt$ равен $\omega_{10} = \frac{c\alpha_n}{\sqrt{1-\beta^2}}$, для излучения в область $z < vt - \omega_{20} = c\alpha_n$.

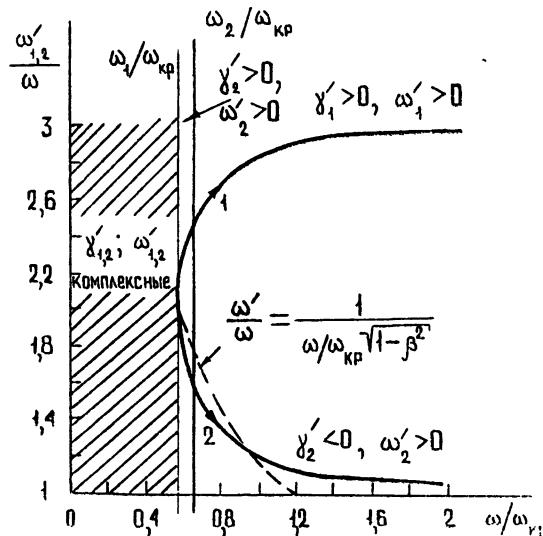


Рис. 1.

На рис. 2 приведены результаты вычислений по формуле (7), причем рассчитывалось $\frac{dS_{1,2}^{(n)}}{d\gamma_n}$ для $\beta = 0; 0,1; 0,5$ ($u/c = 0,98$). По сравнению со стационарным случаем интенсивность излучения в области $z > vt$ выше, а в области $z < vt$ — ниже. Отсюда же видно, что зависимость потока энергии от частот одинакова в обеих областях.

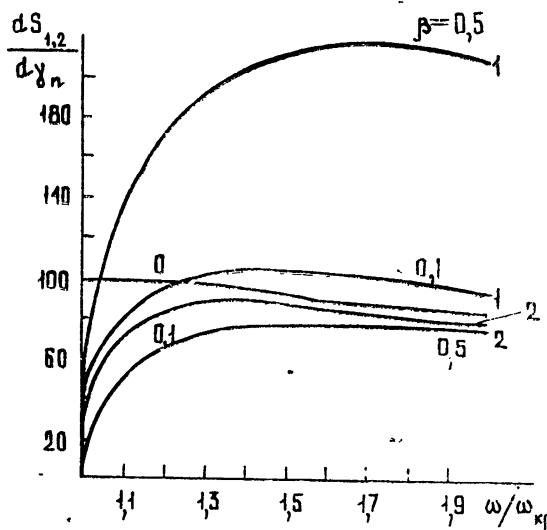


Рис. 2.

Совершим предельный переход к свободному пространству, устремив поперечные размеры волновода к бесконечности:

$$\frac{dS_{1,2}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 u^2}{\pi^2 c^3} \frac{(1 + vu/c^2)^2}{(1 + v/u)(1 - \beta^2)} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{(1 - u^2/c^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{1 \pm \beta \left[1 - \frac{1 - \beta^2}{(1 + v/u)^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2}}{\left[1 - \frac{1 - \beta^2}{(1 + v/u)^2} \sin^2 \theta \right]^{1/2}},$$

где Ω — телесный угол, θ — угол между направлением движения заряда и направлением наблюдения. Получаем энергию переходного излучения при нормальном падении на идеально проводящую бесконечную плоскость, движущуюся по закону $z = vt$. Положив $\beta = 0$, придем к известному выражению Гинзбурга—Франка [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Э А Беглоян, Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев, Научное сообщение ЕФИ, ЕФИ-75 (74), Ереван, 1974.
2. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1946).

Поступила в редакцию
17 марта 1975 г.