

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| Тамойкин В. В. О тензоре эффективной диэлектрической проницаемости случайно-неоднородной магнитоактивной плазмы в диапазоне свистящих атмосфериков | 165 |
| Новиков Г. Г., Цыганков С. Ф., Рубцов Л. Н. Диффузионно-конвективная модель метеорной плазмы | 170 |
| Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Иткина М. А. Об особенностях коэффициента потерь электронов в D-области ионосферы | 174 |
| Черпак Н. Т. Эффект насыщения в квантовых парамагнитных усилителях с учетом потерь в электродинамических системах | 180 |
| Черпак Н. Т. Об изменении фазы сигнала в квантовом парамагнитном усилителе бегущей волны при изменении уровня входного сигнала | 187 |
| Шварцбург А. Б. Самовоздействие волнового пучка в нелинейной диссипативной среде | 192 |
| Малахов А. Н., Муzychuk О. В. О высших приближениях уравнения Дайсона для среднего поля | 202 |
| Малахов А. Н., Кинетические уравнения двумерных кумулянтных функций марковского процесса | 214 |
| Абрамович Б. С., Игнатов А. А. Распространение поверхностного плазмона в тонких пленках со случайными неоднородностями | 224 |
| Пузенко А. А., Чаевский Е. В. Функция взаимной когерентности при скольжении распространении волн над границей раздела в статистически неоднородной среде | 228 |
| Калинин Ю. К., Ручкин А. Д. К методике выделения пакета нормальных волн, обладающих минимальным декрементом затухания, в случае точечного источника, находящегося в сферической квазислойистой среде | 240 |
| Класс В. А., Красильников В. Н. Коротковолновая асимптотика поля, отраженного от сферы или цилиндра с изменяющимися во времени радиусами | 244 |
| Иогансен Л. В., Глобенко Ю. В. Теория резонансных слоисто-неоднородных электромагнитных систем с полным внутренним отражением | 256 |
| Маненков А. Б. Возбуждение открытых периодических волноводов | 263 |
| Ламден Б. С., Новиков В. В. О вырождении собственных частот сферического резонатора | 271 |
| Барсуков К. А., Григорян Г. А. К теории волновода с подвижными границами | 280 |
| Грошков Л. М., Крупин Е. В., Кузнецов М. И., Завьялов С. Х. Оценка времени формирования электронного облака в магнетроне | 288 |
| Калиновский А. К., Каплан Э. Н., Лупан Ю. А. Многоимпульсный высокочастотный разряд у герметизирующей мембраны в волноводе | 298 |
| Богданов Е. П., Романов Ю. А., Шапов С. А. Кинетическая теория пучковой неустойчивости в периодических системах | 305 |
| Архипов Ю. А., Кац Л. И., Шехтер Д. Ш., Шехтер Л. Ш. Магниторезистивный эффект в переменном магнитном поле | 312 |
| Краткие сообщения и письма в редакцию | |
| Новиков А. А. О применении метода связанных волн к анализу нерезонансных взаимодействий | 321 |
| Аннотации депонированных статей | |
| Саяпин А. Ф., Штейн Ю. Г. Влияние системы возбуждения на характеристики сверхпроводящих резонаторов бегущей волны | 324 |
| Кузнецкий Р. С. Импеданс цилиндрического проводника при учете температурной зависимости проводимости | 324 |

УДК 621.371.25

**О ТЕНЗОРЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ
ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ
МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ В ДИАПАЗОНЕ
СВИСТЯЩИХ АТМОСФЕРИКОВ**

В. В. Тамойкин

В диапазоне свистящих атмосфериков вычислены компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости хаотически неоднородной магнитоактивной плазмы. Расчет проведен как для случая частот, меньших гибридной, когда отсутствует плазменный резонанс, так и в резонансных условиях ($\omega > (\omega_H \Omega_H)^{1/2}$, Ω_H , ω_H — гирочастоты ионов и электронов плазмы). Показано, что при наличии плазменного резонанса появляется резонансное поглощение спиральных волн, которое в случае достаточно малых неоднородностей не зависит от их масштаба.

Вопросу о поведении среднего поля в среде с хаотическими неоднородностями посвящено большое число работ. Обзор этих работ имеется в [1], где дан анализ тензора эффективной диэлектрической проницаемости слабо и сильно неоднородных сред, изотропных и анизотропных сред и т. п. Вместе с тем остался невыясненным вопрос о среднем поле в неоднородной гиротропной плазме на частотах, отвечающих свистовому диапазону. Этот диапазон радиоволн представляет значительный интерес для целей ионосферного и магнитосферного распространения, а также при исследовании лабораторной плазмы. В диапазоне свистящих атмосфериков (эти волны называют еще спиральными) должны быть выполнены неравенства

$$\Omega_H \ll \omega \ll \omega_H, \tag{1}$$

где Ω_H , ω_H — гирочастоты ионов и электронов. При этом компоненты тензора диэлектрической проницаемости, записанного в системе координат, где ось Oz направлена вдоль внешнего магнитного поля,

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix}, \tag{2}$$

удовлетворяют неравенствам:

$$|\epsilon| \ll g \ll |\eta|. \tag{3}$$

Диапазон частот (1) разумно разбить на два поддиапазона:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \Omega_H \ll \omega < (\omega_H \Omega_H)^{1/2}, \\ \text{б) } & (\omega_H \Omega_H)^{1/2} < \omega \ll \omega_H. \end{aligned} \tag{4}$$

В первом из них компоненты $\epsilon < 0$, $\eta < 0$. Следовательно, в этом случае плазменный резонанс отсутствует. Во втором поддиапазоне компо-

ненты ϵ и η имеют разные знаки ($\epsilon > 0$, $\eta < 0$), и нужно учитывать плазменный резонанс.

При расчете будем исходить из общих формул [2] для компонент тензора $\epsilon_{ij}^{\Phi\Phi}$ неоднородной магнитоактивной плазмы, полученных тем же способом, что и в [3] для случая изотропной среды. Как показано в [2], общие формулы для тензора $\epsilon_{ij}^{\Phi\Phi}$ в отсутствие пространственной дисперсии, обусловленной неоднородностью среды, имеют вид

$$\epsilon_{ij}^{\Phi\Phi} = \langle \epsilon_{ij} \rangle + \epsilon_{ij}^{(1)}, \quad (5)$$

где символ $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение, а $\epsilon_{ij}^{(1)}$ — добавка к среднему тензору диэлектрической проницаемости, связанная с наличием неоднородностей среды:

$$\epsilon_{ij}^{(1)} = \frac{k_0^2}{2} e_{\kappa\alpha\beta} e_{\rho mn} (\epsilon_{i\rho} - \delta_{i\rho}) (\epsilon_{\kappa j} - \delta_{\kappa j}) \sigma_N^2 N^{-2} \times \\ \times \int \gamma_N(\mathbf{r}) D_{\alpha m} D_{\beta n} I_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Здесь $\sigma_N^2 = \langle (\Delta N)^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуаций электронной концентрации плазмы, N — ее среднее значение, $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме, $e_{\kappa\alpha\beta}$ — абсолютно антисимметричный единичный тензор третьего ранга ($e_{123} = 1$), $\gamma_N(\mathbf{r})$ — коэффициент корреляции флуктуаций $N(\mathbf{r})$,

$$D_{\alpha m} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_m} - \nabla^2 \delta_{\alpha m} - k_0^2 \epsilon_{\alpha m}, \quad (7)$$

$\delta_{\alpha m}$ — символ Кронекера,

$$I_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\Delta(\mathbf{k})} d\mathbf{k}, \quad (8)$$

$\Delta(\mathbf{k}) = k_0^2 \eta (k_z^2 - k_{z_1}^2) (k_z^2 - k_{z_2}^2)$, $\Delta(\mathbf{k}) = 0$ — дисперсионное уравнение для нормальных волн (обыкновенной и необыкновенной) в холодной магнитоактивной плазме,

$$k_{z_{1,2}} = - \frac{(\epsilon + \eta) k_\perp^2 - 2 k_0^2 \epsilon \eta}{2\eta} \pm \frac{1}{2|\eta|} \{ [k_\perp^2 (\epsilon + \eta) - 2 k_0^2 \epsilon \eta]^2 + \\ + 4 |\eta| (k_0^2 \eta - k_\perp^2) (k_0^2 \epsilon^2 - k_0^2 g^2 - \epsilon k_\perp^2) \}^{1/2}. \quad (9)$$

Из (9) видно, что в силу неравенств (3) знак «+» отвечает распространяющейся волне (свисту) — $k_{z_1}^2 > 0$, знак «-» — нераспространяющейся волне — $k_{z_2}^2 < 0$. В [4] показано, что в свистовом диапазоне в силу (3) при $k_0 l |\eta|^{1/2} \gg 1$ (l — масштаб неоднородностей) результаты расчета практически не зависят от компоненты η , и можно положить $|\eta| \approx \infty$. При этом приближенно выполнены соотношения

$$k_{z_1}^2 \approx \frac{1}{2} [2 k_0^2 \epsilon - k_\perp^2 + (k_\perp^4 + 4 k_0^4 g^2)^{1/2}], \\ k_{z_2}^2 \approx - \frac{1}{2} [k_\perp^2 + (k_\perp^4 + 4 k_0^4 g^2)^{1/2}]. \quad (10)$$

Отсюда следует, что в поддиапазоне а) действительным значениям k_{z_1} отвечают лишь поперечные волновые числа, удовлетворяющие не-

равенству

$$k_{\perp}^2 < k_0^2 \frac{g^2 - \varepsilon^2}{|\varepsilon|} \approx k_0^2 \frac{g^2}{|\varepsilon|}, \quad (11)$$

в то время, как в поддиапазоне б) k_{z_1} действительно при изменении k_{\perp} от нуля до бесконечности.

Ниже будем считать выполненным неравенство

$$k_0 l g^{1/2} \ll 1, \quad (12)$$

которое означает малость масштаба неоднородностей по сравнению с длиной спиральной волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля. Рассмотрим сначала случай, когда имеет место плазменный резонанс (поддиапазон б)). Тогда, учитывая вышеприведенные соотношения и неравенства, а также тот факт, что при этом компоненту ε можно положить равной нулю, получим, например, для компоненты $\varepsilon_{11}^{(1)}$ (после интегрирования по переменной k_z) следующее выражение*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(1)} &\approx i \frac{\sigma_N^2 g l^3}{4 \sqrt{2} N^2} \int_0^{\infty} [(k_{\perp}^4 + 4 k_0^4 g^2)^{1/2} + k_{\perp}^2]^{1/2} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2 l^2}{4}\right) k_{\perp} dk_{\perp} - \frac{\sigma_N^2 g l^3}{8 \sqrt{2} N^2} \int_0^{\infty} [(k_{\perp}^4 + 4 k_0^4 g^2)^{1/2} - k_{\perp}^2]^{1/2} \times \\ &\times (1 + k_{\perp} l)^{-1} \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2 l^2}{4}\right) k_{\perp} dk_{\perp}. \end{aligned} \quad (13)$$

Первый интеграл в (13) путем замены $k_{\perp}^2 = 2 k_0^2 g \xi$ сводится к виду

$$J = \sqrt{2} k_0^3 g^{3/2} \int_0^{\infty} [(\xi^2 + 1)^{1/2} + \xi]^{1/2} \exp(-\alpha \xi) d\xi, \quad (14)$$

где $\alpha = \frac{1}{2} k_0^2 l^2 g \ll 1$. Этот интеграл выражается через функции Ломмеля:

$$J = \frac{\sqrt{2} k_0^3 g^{3/2}}{\alpha} \left[S_{1, 1/2}(\alpha) + \frac{1}{2} S_{0, 1/2}(\alpha) \right].$$

При $\alpha \ll 1$ он равен

$$J = \frac{\pi^{1/2}}{\alpha^{3/2}} k_0^3 g^{3/2} (1 + O(\alpha)). \quad (15)$$

Второй интеграл в (13) не вычисляется через известные функции, однако можно показать, что по порядку величины он равен $J_1 \sim k_0^3 g^{3/2} \alpha^{-1/2}$. Следовательно, отношение $J_1/J \sim \alpha \ll 1$.

Аналогичным образом можно подсчитать компоненту $\varepsilon_{12}^{(1)}$. Окончательно выражения для $\varepsilon^{\Phi\Phi} = \varepsilon_{11}^{\Phi\Phi}$ и $g^{\Phi\Phi} = i \varepsilon_{12}^{\Phi\Phi}$ можно представить в виде

$$\varepsilon^{\Phi\Phi} \approx \varepsilon + i \frac{\sqrt{\pi} \sigma_N^2 g}{2 N^2} (1 + O(\alpha)); \quad (16)$$

* В (13) для простоты предполагалось, что $\gamma_N(r) = \exp\left(-\frac{r_{\perp}^2}{l^2} - \frac{|z|}{l}\right)$, поскольку от вида коэффициента корреляции зависит лишь численный множитель порядка единицы, появляющийся в окончательных формулах.

$$g^{\varepsilon\Phi\Phi} \approx g + i \frac{\sqrt{\pi} \sigma_N^2 g}{N^2} \alpha. \quad (17)$$

Как видно из (16) и (17), отношение $\text{Im } g^{\varepsilon\Phi\Phi} / \text{Im } \varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi} \sim \alpha \ll 1$, хотя $\text{Re } g^{\varepsilon\Phi\Phi} / \text{Re } \varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi} = g/\varepsilon \gg 1$. Это означает, что показатель преломления n свистовых волн в неоднородной плазме определяется компонентой $g^{\varepsilon\Phi\Phi}$, а показатель поглощения — мнимой частью $\varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi}$.

В случае малых неоднородностей, когда выполнено неравенство

$$k_0 l |\eta|^{1/2} \ll 1, \quad (18)$$

все вычисления можно провести также до конца, и в результате имеем

$$\varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi} \approx \varepsilon + i_2 \frac{\sqrt{\pi} \sigma_N^2 g^2}{N^2 \varepsilon^{1/2} |\eta|^{1/2}} (1 + O(\alpha)); \quad (19)$$

$$g^{\varepsilon\Phi\Phi} \approx g + 2i \frac{\sqrt{\pi} \sigma_N^2 g \varepsilon^{1/2}}{N^2 |\eta|^{1/2}} (1 + O(\alpha)). \quad (20)$$

Заметим, что в области частот, где $\omega \gg (\omega_H \Omega_H)^{1/2}$, имеет место соотношение $|\eta| = g^2/\varepsilon$. Следовательно, как видно из (16) и (19), выражения для компоненты $\varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi}$ в этом случае совпадают.

Представляет интерес также вычислить компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости для области частот ниже гибридной частоты $(\omega_H \Omega_H)^{1/2}$. При этом общие выражения для $\varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi}$ и $g^{\varepsilon\Phi\Phi}$ имеют довольно сложный вид, однако они существенно упрощаются в двух предельных случаях:

1) $k_0 l g / |\varepsilon|^{1/2} \gg 1$. В этом случае выражения для $\varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi}$ и $g^{\varepsilon\Phi\Phi}$ имеют тот же вид, что и в (16) и (17) при $k_0 l |\eta|^{1/2} \gg 1$ и (19) и (20) при $k_0 l |\eta|^{1/2} \ll 1$;

2) $k_0 l g / |\varepsilon|^{1/2} \ll 1$. Это неравенство может быть совместимо с другим неравенством $k_0 l |\eta|^{1/2} \gg 1$. При этом

$$\varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi} \approx \varepsilon + \frac{\sigma_N^2 k_0 l g^2}{2N^2 |\varepsilon|^{1/2}} + i \frac{\pi \sigma_N^2 (k_0 l)^3 g^4}{16 N^2 |\varepsilon|^{3/2}}; \quad (21)$$

$$g^{\varepsilon\Phi\Phi} \approx g + \frac{\sigma_N^2 k_0 l g |\varepsilon|^{1/2}}{2N^2} + i \frac{3\pi \sigma_N^2 (k_0 l)^3 g^3}{16 N^2 |\varepsilon|^{1/2}}. \quad (22)$$

В противоположном случае $k_0 l |\eta|^{1/2} \ll 1$ получаем

$$\varepsilon^{\varepsilon\Phi\Phi} \approx \varepsilon + a \frac{\sigma_N^2 g^2}{N^2 |\varepsilon \eta|^{1/2}} + i \varepsilon_0; \quad (23)$$

$$g^{\varepsilon\Phi\Phi} \approx g - b \frac{\alpha_N^2 g |\varepsilon|^{1/2}}{N^2 |\eta|^{1/2}} + i g_0, \quad (24)$$

где величины ε_0 и g_0 равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\approx \frac{\sigma_N^2 (k_0 l)^3 g^4}{4 N^2 |\varepsilon|^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \left(1 + \frac{g^2}{|\varepsilon \eta|} \sin^2 \vartheta \right)^{1/2} d\vartheta, \\ g_0 &\approx \frac{\sigma_N^2 (k_0 l)^3 g^3}{4 N^2 |\varepsilon|^{1/2}} \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 \vartheta) \left(1 + \frac{g^2}{|\varepsilon \eta|} \sin^2 \vartheta \right)^{1/2} d\vartheta, \end{aligned} \quad (25)$$

a и b — численные множители порядка единицы, значения которых зависят от вида коэффициента корреляции $\gamma_N(\mathbf{r})$.

Таким образом, при $k_0 l g / |\epsilon|^{1/2} \ll 1$ мнимые части $\epsilon^{\text{эфф}}$ и $g^{\text{эфф}}$ становятся меньшими соответствующих действительных частей и пропорциональны $(k_0 l)^3$, что говорит о рэлеевском характере рассеяния волн на неоднородностях плазмы в этом предельном случае. Из приведенных выражений видно также, что показатель преломления в основном определяется компонентой g (при углах, не слишком близких к $\pi/2$), а показатель поглощения — мнимой частью $\epsilon^{\text{эфф}}$. Так, при $\delta = 0$ $n \approx g^{1/2}$, $\kappa \approx \text{Im } \epsilon^{\text{эфф}} / 2 g^{1/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 356 (1970).
2. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 605 (1964).
3. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 5, 827 (1959).
4. В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Ю. А. Чугунов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию
14 апреля 1975 г.

THE EFFECTIVE DIELECTRIC TENSOR OF A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MAGNETOACTIVE PLASMA IN THE RANGE OF WHISTLING ATMOSPHERICS

V. V. Tamoykin

The components of the effective dielectric tensor of the randomly-inhomogeneous magnetoactive plasma are calculated in the range of whistling atmospherics. Calculation is made both for the case of frequencies less than the hybrid one when the plasma resonance is absent and under resonance conditions ($\omega > (\omega_H \Omega)^{1/2}$, Ω_H , ω_H are the ion and electron plasma gyrofrequencies). It is shown that in the presence of plasma resonance there occurs the resonance absorption of spiral waves which in the case of small inhomogeneties is independent of their scale

УДК 533.951

ДИФFUЗИОННО-КОНВЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ МЕТЕОРНОЙ ПЛАЗМЫ

Г. Г. Новиков, С. Ф. Цыганков, Л. Н. Рубцов

В рамках диффузионного приближения рассмотрено влияние ветрового сдвига на перераспределение заряженных частиц в метеорной плазме.

Как известно из теории ветрового сдвига, увлечение ионосферной плазмы ветром при движении в магнитном поле Земли приводит к возникновению силы Уайтхеда [1], которая способствует перераспределению частиц и образованию узких слоев в области E ионосферы [2].

Представляет интерес выяснение влияния ветрового сдвига на метеорную плазму. При этом мы, однако, не можем применить результаты этой теории к нашей задаче, поскольку в отличие от ионосферы нам приходится иметь дело с трехмерной моделью.

Задача о поведении сильных неоднородностей (метеорная плазма является такой) в трехмерном случае до настоящего времени не решена, так как не удается найти критерий, который позволил бы исключить электрическое поле, если неоднородность замагничена и увлекается ветром [3]. Для того, чтобы выяснить, насколько сильно воздействует ветровой сдвиг на плазму метеорного следа, мы примем во внимание действие силы Уайтхеда. Полагая, что в плазме следа кроме нейтралов атмосферы присутствуют электроны и однократно заряженные ионы одного сорта, мы, следуя [2], будем исходить из уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \Delta N + \operatorname{div} N \mathbf{u} + \frac{\omega_i}{\nu_i} (\mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{u} N) = 0, \quad (1)$$

где $N(\mathbf{r}, t)$ — концентрация ионов или электронов в момент времени t в точке \mathbf{r} , D — коэффициент амбиполярной диффузии, \mathbf{u} — скорость ветра, ω_i , ν_i — гирочастота и частота столкновений ионов с нейтралами окружающей среды; \mathbf{h} — единичный вектор вдоль магнитного поля Земли.

При решении уравнения (1) полагаем, что D , ω_i , ν_i и \mathbf{h} не зависят от времени и координат. Система отсчета выбирается следующим образом: ось z направим вдоль траектории пролета метеора, y — вдоль вектора скорости \mathbf{u} , а ось x — перпендикулярно плоскости YZ . Вектор поля \mathbf{h} имеет следующие компоненты: $\mathbf{h} \equiv \mathbf{h} (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$; α — угол между вектором \mathbf{h} и осью z (рис. 1).

Так как размеры метеорного следа в направлениях x и y много меньше характерных размеров изменения ветра, то с достаточной

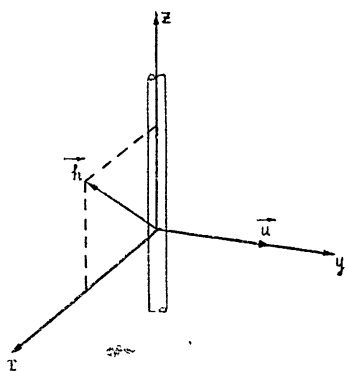


Рис. 1.

степенью точности можно считать, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, но $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$. В этих предположениях вместо (1) будем иметь

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \Delta N + u \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\omega_l}{v_l} u \cos \alpha \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\omega_l}{v_l} u \sin \alpha \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\omega_l}{v_l} N \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

При решении (2) будем считать, что ветер линейно зависит от координаты z , т. е. $u = az$, где a — градиент ветра. Введем следующие переменные:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) z, \\ y_1 &= y - \frac{a}{\gamma_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) z, \\ z_1 &= z e^{\gamma_1 t}, \\ \tau &= t, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega_l}{v_l} a \sin \alpha, \quad \gamma_2 = \frac{\omega_l}{v_l} a \cos \alpha,$$

и новую функцию

$$N(x_1, y_1, z_1, \tau) = n(x_1, y_1, z_1, \tau) e^{\gamma_1 \tau}. \quad (4)$$

Тогда с учетом (3) и (4) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \tau} - D \left[1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} (e^{\gamma_1 \tau} - 1)^2 \right] \frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} - D \left[1 + \frac{a^2}{\gamma_1^2} \times \right. \\ \left. \times (e^{\gamma_1 \tau} - 1)^2 \right] \frac{\partial^2 n}{\partial y_1^2} - D e^{2\gamma_1 \tau} \frac{\partial^2 n}{\partial z_1^2} - 2 D \frac{a \gamma_2}{\gamma_1} (e^{\gamma_1 \tau} - 1)^2 \times \\ \times \frac{\partial^2 n}{\partial x_1 \partial y_1} + 2 D \frac{a}{\gamma_1} e^{\gamma_1 \tau} (e^{\gamma_1 \tau} - 1) \frac{\partial^2 n}{\partial y_1 \partial z_1} + \\ + 2 D \frac{\gamma_2}{\gamma_1} e^{\gamma_1 \tau} (e^{\gamma_1 \tau} - 1) \frac{\partial^2 n}{\partial x_1 \partial z_1} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Начальное распределение выберем в виде гауссова:

$$N(x, y, z) = \frac{\alpha_0}{\pi R_0^2} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{R_0^2} \right), \quad (6)$$

где α_0 , R_0 — соответственно линейная концентрация и начальный радиус метеорного следа. Решение (5) находится с помощью преобразования Фурье по координатам. В исходных переменных оно имеет вид

$$N = \frac{\alpha_0 e^{\gamma_1 t}}{\pi \sqrt{(R_0^2 + 4F_2) \left(R_0^2 + 4F_1 - \frac{4F_3}{R_0^2 + 4F_2} \right)}} \exp \left[-\frac{\left\{ y - \frac{a}{\gamma_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) z \right\}^2}{R_0^2 + 4F_2} \right]$$

$$\left[\frac{\left\langle \left\{ x - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) z \right\} + 2 \frac{F_3}{R_0^2 + 4F_2} \left\{ y - \frac{a}{\gamma_1} (e^{\gamma_1 t} - 1) z \right\} \right\rangle^2}{R_0^2 + 4F_1 - \frac{4F_3}{R_0^2 + 4F_2}} \right], \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= D \left[\left(1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \right) t + \frac{\gamma_2^2}{2\gamma_1^3} (e^{2\gamma_1 t} - 1) - 2 \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^3} (e^{\gamma_1 t} - 1) \right], \\ F_2 &= D \left[\left(1 + \frac{a^2}{\gamma_1^2} \right) t + \frac{a^2}{2\gamma_1^3} (e^{2\gamma_1 t} - 1) - 2 \frac{a^2}{\gamma_1^3} (e^{\gamma_1 t} - 1) \right], \\ F_3 &= 2D \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} a t + a \frac{\gamma_2}{2\gamma_1^3} (e^{2\gamma_1 t} - 1) - 2a \frac{\gamma_2}{\gamma_1^3} (e^{\gamma_1 t} - 1) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

В отсутствие ветра, т. е. при $a = 0$, решение (7) переходит в общеизвестное [4]. Однако, как легко заметить, при $a \neq 0$ решение существенным образом определяется градиентом скорости ветра. Пусть $a < 0$. Тогда при $|\gamma_1 t| \gg 1$ на оси следа $N \sim \frac{e^{\gamma_1 t}}{t}$, в то время как из [4] следует, что $N \sim 1/t$. Таким образом, при отрицательных a след рассасывается значительно быстрее и, следовательно, время жизни следа уменьшается. Иным образом ведет себя метеорная плазма при $a > 0$. В этом случае при $\gamma_1 t \gg 1$ концентрация на оси следа $N \sim 1/\sqrt{t}$, т. е. след рассасывается медленнее, чем в отсутствие ветра. Оценки показывают, что влияние ветра и магнитного поля на плазму следа существенно при $\gamma_1 t \geq 1$. В области метеорной зоны $\omega_i/\nu_i \approx 0,3$ [5], в средних широтах $\alpha \approx 45^\circ$. Пусть градиент ветра будет $a \approx 0,05 \text{ c}^{-1}$. Следовательно, $\gamma_1 \approx 0,01 \text{ c}^{-1}$. Если же $a \approx 0,5 \text{ c}^{-1}$, то $\gamma_1 \approx 0,1 \text{ c}^{-1}$. Таким образом, из оценок следует, что эффект становится заметным только для долгоживущих метеорных следов с временами жизни $\tau \geq 100 \text{ c}$ при $a \approx 0,05 \text{ c}^{-1}$ или с $\tau \geq 10 \text{ c}$ при $a \approx 0,5 \text{ c}^{-1}$.

В заключение остановимся на следующем наблюдательном факте [6]. На последовательных снимках одного долгоживущего метеорного следа видно, что след синусоидально изгибается и в местах узлов синусоиды образуются сгустки. Очевидно, что плотность этих сгустков выше плотности остальных частей следа, так как сгущения продолжают жить и после того, как весь след уже исчез. Постараемся объяснить этот факт в рамках теории ветрового сдвига. Допустим, что скорость ветра изменяется по закону $u = u_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} z$, где u_0, λ — соответственно амплитуда и длина волны ветровой системы. Сделаем следующее допущение. Будем считать, что вызываемое отклонение следа от первоначального положения мало по сравнению с длиной следа. Математически это можно записать так: $u_0 t / \lambda \ll 1$. В этом предположении уравнение (2) с таким профилем ветра удастся решить.

Введем функцию

$$N(x, y, z, t) = \frac{n(x, y, z, t)}{\text{ch } \gamma t - \text{sh } \gamma t \cos \frac{2\pi z}{\lambda}}, \quad (9)$$

где

$$\gamma = u_0 \frac{2\pi \omega_i}{\lambda v_i} \sin \alpha.$$

После замены переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{2u_0 \omega_i}{\gamma v_i} \left(\frac{\pi z}{\lambda} - \operatorname{arctg} \left(e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{\lambda} \right) \right) \cos \alpha, \\ y_1 &= y + \frac{2u_0}{\gamma} \left(\frac{\pi z}{\lambda} - \operatorname{arctg} \left(e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{\lambda} \right) \right) \sin \alpha, \\ z_1 &= 2 \operatorname{arctg} \left(e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tau = t$$

получаем обычное уравнение диффузии, которое легко решается. Мы не приводим здесь всех выкладок, поскольку они хорошо известны. Решение для такого профиля ветра имеет вид

$$\begin{aligned} N &= \frac{\alpha_0}{\pi (R_0^2 + 4Dt)} \left(\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{sh} \gamma t \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ - \frac{\left[x - 2 \frac{u_0 \omega_i}{\gamma v_i} \left(\frac{\pi z}{\lambda} - \operatorname{arctg} \left(e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{\lambda} \right) \right) \sin \alpha \right]^2}{R_0^2 + 4Dt} - \right. \\ &\left. - \frac{\left[y + \frac{2u_0}{\gamma} \left(\frac{\pi z}{\lambda} - \operatorname{arctg} \left(e^{\gamma t} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{\lambda} \right) \right) \cos \alpha \right]^2}{R_0^2 + 4Dt} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из последнего выражения следует, что N является периодической функцией по z . Таким образом, с течением времени в следе могут создаваться области повышенной и пониженной концентрации. Итак, не исключено, что предложенный механизм может объяснить для долгоживущего метеора возникновение чередующихся областей сгущений.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Ю. А. Игнатьеву за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Whitehead, *Nature*, 188, 567 (1960).
2. Б. Н. Гершман, *Динамика ионосферной плазмы*, изд. Наука, М., 1974.
3. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 12, № 1, 20 (1969).
4. Т. Кайзер, *Метеоры*, ИЛ, М., 1959.
5. Ю. А. Игнатьев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 11, № 9, 1332 (1968).
6. И. С. Астапович, *Исследование метеоров*, № 1, изд. Наука, М., 1966.

Институт астрофизики АН Таджикской ССР

Поступила в редакцию
11 июня 1975 г.

A DIFFUSION-CONVECTIVE MODEL OF METEOR PLASMA

G. G. Novikov, S. F. Tsygankov, L. N. Rubtsov

The wind shift effect on the charged particle re-distribution in meteor plasma is considered in the framework of the diffusion approximation,

УДК 551.510.535

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ КОЭФФИЦИЕНТА ПОТЕРЬ ЭЛЕКТРОНОВ В *D*-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина

Получены высотные распределения коэффициента потерь электронов $\psi(h)$ для нескольких случаев внезапных ионосферных возмущений. Отмечено, что коэффициент потерь электронов уменьшается с ростом электронной концентрации. Предложена интерпретация этого явления.

В мае—июне 1970 г. в г. Горьком было зарегистрировано несколько десятков случаев внезапных ионосферных возмущений (ВИВ), во время которых проводились измерения профилей электронной концентрации в *D*-области ионосферы методом частичных отражений. Методика и результаты измерений описаны в [1]. Полученные результаты с привлечением сведений о рентгеновском излучении Солнца, опубликованных в [2], позволили оценить коэффициент потерь электронов $\psi(h)$ в периоды ВИВ.

Из имеющихся данных были отобраны 4 достаточно длительных возмущения (не менее 15 минут), для которых можно было в первом приближении считать выполненными условия квазиравновесия. Возможные отклонения от равновесных условий оценивались путем численного решения дифференциального уравнения

$$\frac{d[e](t)}{dt} = Q(t) - \psi[e]^2(t) \quad (1)$$

при $\psi = 3 \times 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Оказалось, что для достаточно длительных событий отклонение от равновесных значений $[e]$ не превышает 15%. Поэтому для выбранных возмущений коэффициент потерь в *D*-области рассчитывался по соотношению

$$\psi(h) = \frac{Q_0(h) + Q_1(h)}{[e]^2(h)} \quad (2)$$

где $[e]$ —электронная концентрация, Q_0 —функция ионообразования невозмущенной ионосферы, Q_1 —дополнительная функция ионообразования, рассчитанная на основании данных о потоках рентгеновского излучения в диапазонах 0,5—3 Å, 1—8 Å, 8—20 Å. Методика, применяемая для расчета функции ионообразования, описана в [3]. Сведения об интенсивностях дополнительного рентгеновского излучения в 3 диапазонах длин волн в отдельные моменты рассматриваемых возмущений приведены в табл. 1. В последнем столбце таблицы даны интервалы времени усреднения профилей электронной концентрации.

Профили электронной концентрации для анализируемых событий представлены на рис. 1. Верхняя шкала на рис. 1 относится к майским вспышкам, нижняя — к июньским. Для случая 12 мая представлены три профиля электронной концентрации, соответствующие трем после-

довательным моментам времени на спадающей фазе возмущения. Для возмущения 14 июня даны два профиля, относящиеся к фазам возрастания интенсивности рентгеновского излучения двух следующих друг за другом всплесков.

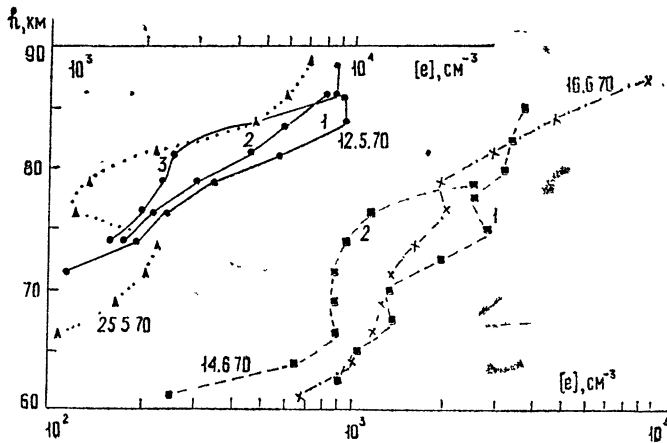


Рис. 1.

Таблица 1

| Дата | Момент времени (UT) | Интенсивность рентгеновского излучения (эрг. см ⁻² . с ⁻¹) | | | Интервал времени усреднения [e] (h) (UT) |
|---------|--|---|--|--|--|
| | | 8—20 Å | 1—8 Å | 0,5—3 Å | |
| 12.5.70 | 7 ³⁵ 8 ⁰⁰ | 1,05 · 10 ⁻¹ 8 · 10 ⁻² | 6,4 · 10 ⁻² 1,5 · 10 ⁻² | 3 · 10 ⁻³ 1,3 · 10 ⁻⁴ | 7 ⁵⁵ —7 ⁵⁶ 7 ⁵⁶ —7 ⁵⁸ 7 ⁵⁸ —8 ⁰⁰ |
| 25.5.70 | 6 ²⁰ 6 ²⁹ | 3 · 10 ⁻² 5 · 10 ⁻² | 5 · 10 ⁻³ 1,5 · 10 ⁻² | 2 · 10 ⁻⁵ 6 · 10 ⁻⁴ | 6 ²⁶ —6 ²⁹ |
| 14.6.70 | 9 ⁴⁰ 9 ⁵⁰ 10 ⁰⁵ 10 ¹² | 7,5 · 10 ⁻² 1,55 · 10 ⁻¹ 7,5 · 10 ⁻² 7,5 · 10 ⁻² | 2 · 10 ⁻² 5,8 · 10 ⁻² 1,4 · 10 ⁻² 2,8 · 10 ⁻² | 3 · 10 ⁻⁴ 1,2 · 10 ⁻³ 2 · 10 ⁻⁴ 10 ⁻³ | 9 ⁴⁰ —9 ⁵⁰ 10 ¹⁰ —10 ¹² |
| 16.6.70 | 7 ⁰⁰ 7 ⁰² | 1,75 · 10 ⁻¹ 7,5 · 10 ⁻² | 6 · 10 ⁻² 3,4 · 10 ⁻² | 2,2 · 10 ⁻³ 1,25 · 10 ⁻³ | 7 ⁰² —7 ⁰⁴ |

Результирующие распределения $\psi(h)$ для тех же случаев представлены на рис. 2. Из рис. 2 видны значительные различия в величинах $\psi(h)$ для разных событий. Характерно при этом, что с увеличением электронной концентрации коэффициент потерь $\psi(h)$ уменьшается. Эта тенденция прослеживается и в течение отдельных событий: 12 мая на спадающей фазе возмущения коэффициент потерь несколько возрастает, 14 июня большему $[e](h)$ соответствует меньший $\psi(h)$.

Таким образом, проанализированные экспериментальные данные приводят к заключению, что коэффициент потерь электронов в D-области в периоды ВИБ уменьшается с ростом электронной концентрации. Возможные неопределенности спектра рентгеновского излучения

не могут изменить этого вывода. На аналогичное уменьшение коэффициента потерь электронов во время ионосферных возмущений обращалось внимание в работах [3-6]. В настоящее время принято считать, что на изменение коэффициента потерь электронов в верхней части D -области влияет изменение соотношения между концентрациями обычных положительных ионов $[X^+]$ и ионов-связок $[Св^+]$.

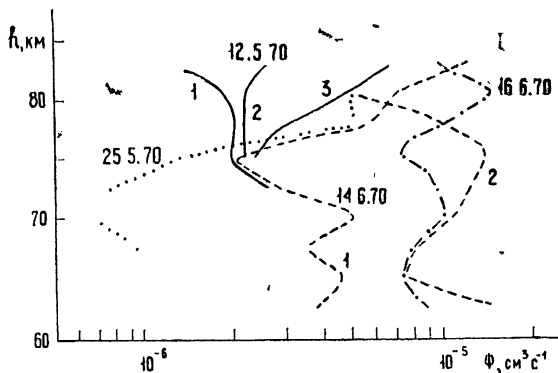


Рис. 2.

Поскольку ионы-связки имеют сравнительно высокий коэффициент рекомбинации ($\alpha_{\text{св}} \approx 10^{-5} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$), а скорость диссоциативной рекомбинации обычных ионов значительно меньше ($\alpha_d \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$), то изменение соотношения между концентрациями $[Св^+]$ и $[X^+]$ может привести к изменениям эффективного коэффициента рекомбинации от $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ до $10^{-5} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Из уравнения непрерывности для электронов с учетом отрицательных ионов и положительных ионов-связок можно получить следующее выражение для коэффициента потерь электронов:

$$\psi = (1 + \lambda)(\alpha_d + \lambda\alpha_i) + \delta(\alpha_{\text{св}} - \alpha_d), \quad (3)$$

где $\delta = \frac{[Св^+]}{[e]}$, $\lambda = \frac{[X^-]}{[e]}$. При выводе (3) учитывалось условие квази-

нейтральности и предполагалось, что коэффициенты ион-ионной рекомбинации обычных ионов и ионов-связок одинаковы: $\alpha_{i \text{ св}} = \alpha_i \approx 10^{-7} \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Соотношение (3) показывает, что коэффициент потерь электронов в D -области в значительной мере определяется параметром δ . Если δ достаточно велико, первым слагаемым в (3) можно пренебречь и потери электронов становятся пропорциональными не $[e]^2$, а $[e]$. При $\delta \rightarrow 0$ (3) совпадает с известным общепринятым выражением, получаемым без учета связок.

Одной из основных проблем фотохимии D -области является поиск процессов, приводящих к достаточно быстрому образованию связок и способных объяснить изменения относительной концентрации связок в зависимости от степени возмущенности ионосферы.

Хауг и Ландмарк [8], рассмотревшие двухионную модель электронной рекомбинации, предположили, что скорость образования быстро рекомбинирующих ионов (связок) пропорциональна концентрации обычных положительных ионов, и ввели константу B , характеризующую эту скорость. Однако ни один из известных в настоящее время фотохимических процессов не может обеспечить достаточно высоких скоростей

В и объяснить наблюдаемые относительные концентрации ионов-связок (см., например, [7]).

В то же время существующие экспериментальные данные по составу положительных ионов на 80 км, собранные в [7], показывают, что абсолютные значения концентрации ионов-связок изменяются не в очень широких пределах. В этой связи представляет интерес следующая упрощенная схема процессов в *D*-области.

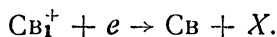
Предположим, что суммарная концентрация нейтральных связок $[Св]$ и положительных ионов-связок $[Св^+]$ остается постоянной на определенной высоте в течение достаточно длительного периода времени:

$$[Св] + [Св^+] = C. \quad (4)$$

При этом положительные ионы-связки создаются в достаточно быстрых взаимодействиях нейтральных связок с первичными положительными ионами (скорость этих реакций обозначим β):



Исчезновение ионов-связок идет путем рекомбинации с электронами с эффективной скоростью $\alpha_{св}$:



В условиях фотохимического равновесия концентрация ионов-связок в этом случае определится соотношением

$$\alpha_{св} [e] [Св^+] = \beta [Св] [X^+]. \quad (8)$$

Учитывая (4), (8) и условие квазинейтральности (9),

$$[X^+] + [Св^+] = [e] (1 + \lambda), \quad (9)$$

можно получить для $[Св^+]$ квадратное уравнение:

$$[Св^+]^2 - [Св^+] \left\{ C + [e] \left(1 + \lambda + \frac{\alpha_{св}}{\beta} \right) \right\} + C (1 + \lambda) [e] = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$[Св^+] = \frac{C + [e] \left(1 + \lambda + \frac{\alpha_{св}}{\beta} \right)}{2} - \sqrt{\frac{\left[C + [e] \left(1 + \lambda + \frac{\alpha_{св}}{\beta} \right) \right]^2}{4} - C (1 + \lambda) [e]}. \quad (11)$$

Из (11) нетрудно получить два предельных случая: 1) когда $[e] \ll C$,

$$[Св^+] = [e] (1 + \lambda),$$

т. е. положительные ионы существуют только в форме связок; 2) когда $[e] \gg C$,

$$[Св^+] = C \frac{1 + \lambda}{1 + \lambda + \frac{\alpha_{св}}{\beta}},$$

т. е. концентрация ионов-связок не зависит от $[e]$ и определяется общим содержанием связок (заряженных и нейтральных), относитель-

ным содержанием отрицательных ионов и отношением скоростей потерь и образования ионов-связок.

На рис. 3 представлены графики величины $\delta = \frac{[Cv^+]}{[e]}$ в зависимости от $[e]$, рассчитанные по формуле (11) при $\lambda = 0$, $\frac{\alpha_{cv}}{\beta} = 1$ для

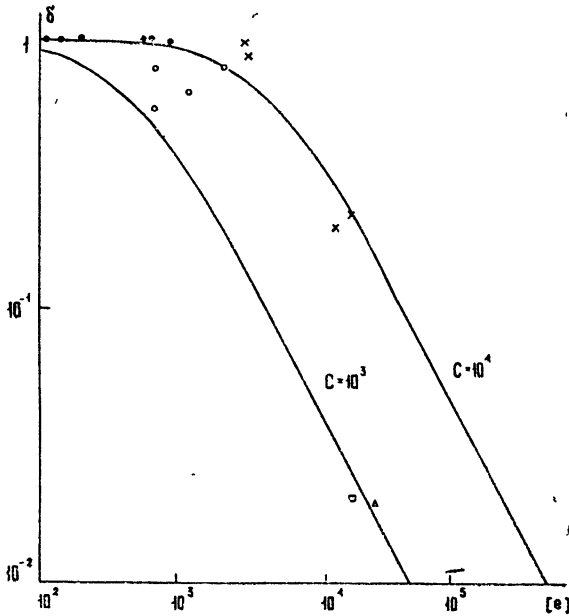


Рис. 3.

двух значений $C = 10^3$ и 10^4 (точки—сумерки, ночь, затмение, кружки—день, кресты—авроральное поглощение, квадраты—ППШ, треугольники—зимняя аномалия). Точки на рис. 3 соответствуют данным по измерениям состава положительных ионов на высоте 80 км в различных условиях [7]. Значения δ , обозначенные точками, получены в пред-

положении, что $\lambda = 0$, и поэтому $\delta = \frac{[Cv^+]}{[Cv^+] + [X^+]}$. Из рис. 3 видно,

что большинство представленных точек расположено в области, ограниченной теоретическими кривыми, рассчитанными при двух значениях параметра $C = 10^3$ и 10^4 . Несмотря на то, что экспериментальные точки относятся к довольно широкому диапазону ионосферных условий (от спокойных ночных до возмущений типа ППШ), параметр C , характеризующий суммарное содержание связок, изменяется не более чем на порядок.

При $[e] \ll C$ параметр δ стремится к постоянному для данной высоты значению $\delta_{\max} = 1 + \lambda$. С ростом электронной концентрации δ уменьшается.

В заключение выражаем благодарность А. Д. Данилову и А. Г. Симонову за предоставленную нам возможность ознакомиться с их работой, направленной в печать.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

2. Solar Geophysical Data, US Department of Commerce, №№ 315, 316, part II (1970).
3. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 10, 1469 (1974)
4. J. N. Rowe, A. J. Ferraro, H. S. Lee, R. W. Kreplin, A. P. Mitra, JATP, 32, 1609 (1970).
5. S. D. Deshpande, A. P. Mitra, JATP, 34, 243 (1972).
6. A. P. Mitra, J. N. Rowe, JATP, 34, 795 (1972).
7. А. Д. Данилов, А. Г. Симонов, Геомагн. и аэрономия (в печати).
8. A. Haug, B. Landmark, JATP, 32, 405 (1970).
9. J. N. Rowe, A. P. Mitra, A. J. Ferraro, H. S. Lee, JATP, 36, 755 (1974).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию
7 апреля 1975 г.

PECULIARITIES OF THE LOSS COEFFICIENT OF ELECTRONS IN THE IONOSPHERIC D-REGION

V. V. Belikovich, E. A. Benediktov, M. A. Itkina

The height distribution of the electron loss coefficient is obtained for several events of sudden ionospheric disturbances. It is pointed out that the electron loss coefficient decreases with the growth of the electron density. Interpretation of this phenomenon is suggested.

УДК 621 375 7

ЭФФЕКТ НАСЫЩЕНИЯ В КВАНТОВЫХ ПАРАМАГНИТНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ В ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н. Т. Черпак

Проводится теоретический анализ зависимости коэффициента усиления от величины входного сигнала с учетом потерь во входном пассивном контуре в резонаторном квантовом парамагнитном усилителе и с учетом потерь в замедляющей системе квантового парамагнитного усилителя бегущей волны.

Экспериментальные результаты сравниваются с расчетом.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при рассмотрении квантового парамагнитного усилителя (КПУ) в качестве предусилителя приемного тракта важным является вопрос о мощности насыщения и динамическом диапазоне. Анализ этого явления в квантовых усилителях посвящено несколько работ [1-4]. Однако при этом отсутствует рассмотрение насыщения в резонаторных КПУ более сложного типа, чем одноконтурные, несмотря на то, что именно первые находят практическое применение.

В квантовых парамагнитных усилителях типа бегущей волны (КПУБВ) при определении зависимости коэффициента усиления от мощности рассматривают два случая распределения СВЧ поля по поперечному сечению активного элемента: однородное [2-4] и экспоненциальное [4]. Несмотря на то, что в [3] решается уравнение для процесса усиления с учетом затухания в замедляющей системе, при анализе эффекта насыщения коэффициент затухания устремляется в нулю.

Следует подчеркнуть, что сравнение экспериментальных данных с расчетом проведено только для однорезонаторных КПУ [4-6].

В некоторых практически важных случаях удовлетворительное значение полосы усиливаемых частот можно получить в КПУ с одним активным резонатором, имеющим на входе пассивный контур [7]. Однако наибольшее практическое применение находят КПУБВ [8].

В данной работе поставлена задача получить зависимость коэффициента усиления от величины входного сигнала в резонаторном КПУ [7] с учетом потерь в пассивном контуре и получить ту же зависимость для КПУБВ [9] с учетом затухания в замедляющей системе.

Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными.

1. РЕЗОНАТОРНЫЙ КПУ С ВХОДНЫМ ПАССИВНЫМ КОНТУРОМ

1. Коэффициент усиления по напряжению на центральной частоте резонаторного КПУ с входным пассивным контуром равен [7]

$$G^{1/2} = \frac{x^2 d_M^{-1} + d_{св} - d}{x^2 d_M^{-1} - d_{св} - d}, \quad (1)$$

где κ — коэффициент связи пассивного контура с активным резонатором, $d_{св}$ — декремент связи пассивного контура с волноводом, d — декремент потерь в пассивном контуре, d_m — магнитный декремент, учитывающий излучение парамагнитного вещества в активном резонаторе. При этом [5]

$$d_m^{-1} = (1 + WT_1) d_{m0}^{-1}, \quad (2)$$

где d_{m0} — магнитный декремент при слабом входном сигнале ($W \rightarrow 0$), W — вероятность индуцированного перехода на частоте сигнала, T_1 — время спин-решеточной релаксации на частоте сигнала.

Для вычисления зависимости коэффициента усиления от величины сигнала используем связь мощности излучения активным веществом $P_{изл}$ с усредненной по объему резонатора V плотностью магнитной энергии $\overline{H^2}$ [5]:

$$\overline{H^2} = \frac{4}{\sqrt{d_m}} \frac{P_{изл}}{V}. \quad (3)$$

Из условия баланса энергии $P_{изл} + P_{вх} - P_{п} = P_{вых}$ ($P_{п}$ — мощность, теряемая в пассивном контуре) следует, что

$$P_{изл} = (G - 1) \frac{P_{вх}}{1 - P_{п}/P_{изл}}, \quad (4)$$

где $\frac{P_{п}}{P_{изл}} = \frac{\kappa^2 d}{d_m}$.

Выразив d_m , $d_{св}$ через G_0 и G и используя соотношения (2) — (4), а также $W = |\mu_c|^2 \overline{H^2} T_2 / \hbar^2$ (μ_c — матричный элемент дипольного момента на сигнальной частоте, T_2 — время спин-спиновой релаксации), получаем из (1) уравнение для коэффициента усиления G резонаторного КПУ с входным пассивным контуром, зависящего от величины входного сигнала:

$$G^{1/2} = \frac{G_0^{1/2} + \eta(G) SP_{вх}}{1 + \eta(G) SP_{вх}}. \quad (5)$$

Здесь S — фактор насыщения, равный

$$S = \frac{2 |\mu_c|^2 T_2 T_1}{\hbar^2} \frac{G_0^{1/2} - 1}{\sqrt{V d_{m0}}},$$

и

$$\eta(G) = \frac{(G_0^{1/2} + 1) + (G - 1) \frac{G_0^{1/2} + 1}{G_0^{1/2} - 1} \frac{\xi}{1 - \xi}}{1 - d^2 \left(\frac{1 - \xi}{\xi} \frac{G^{1/2} + 1}{G^{1/2} - 1} \frac{G_0^{1/2} - 1}{G_0^{1/2} + 1} + 1 \right)}, \quad (6)$$

где $\xi = \frac{d_{m0} d}{\kappa^2}$. Если не учитывать потери в пассивном контуре ($d \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 0$), то $\eta(G) \rightarrow (G^{1/2} + 1)^2$ и (5) полностью совпадает с соответствующим выражением для однорезонаторного усилителя. В случае больших коэффициентов усиления ($G_0^{1/2} \gg 1$) справедливо

$$\eta(G) = \frac{(G^{1/2} + 1)^2 + (G - 1)[\xi/(1 - \xi)]}{1 - d^2 \left(\frac{1 - \xi}{\xi} \frac{G^{1/2} + 1}{G^{1/2} - 1} + 1 \right)}$$

если при этом $d \ll 1$, то

$$\eta(G) = (G^{1/2} + 1)^2 + (G - 1) \frac{\xi}{1 - \xi}.$$

2. На рис. 1 приведены зависимости коэффициента усиления G от относительной мощности входного сигнала $SP_{\text{вх}}$, рассчитанные по формуле (5) для трех значений G_0 . Значение $\xi = 0,5$ было определено для действующего КПУ четырехсантиметрового диапазона на рубине, в котором пассивным контуром являлась толстая ($\sim \lambda_0/4$) диафрагма с подвижным реактивным штырем [7]. Величины $d_{\text{св}}$ и χ^2 выбирались, исходя из условия формирования максимально плоской амплитудно-частотной характеристики КПУ.

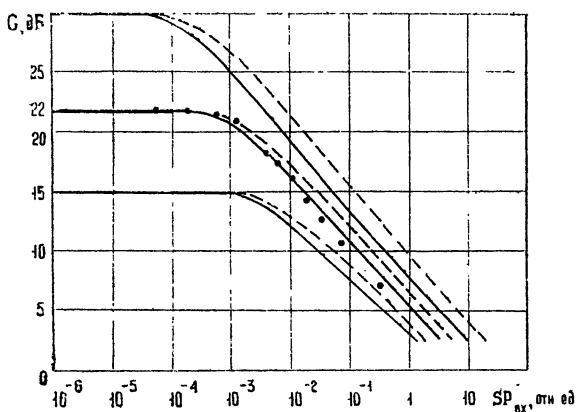


Рис. 1. Пунктир — теоретическая кривая без учета потерь в пассивном контуре; сплошная линия — теоретическая кривая с учетом потерь в пассивном контуре; точками нанесены данные эксперимента.

На этом же рисунке приведена экспериментальная зависимость коэффициента усиления от $P_{\text{вх}}$. Фактор насыщения, измеренный при $G_0 = 22$ дБ, равняется $S = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Вт}^{-1}$. Как видно из рис. 1, учет потерь в пассивном контуре приводит к хорошему соответствию между данными теоретического расчета и эксперимента. Расхождение при сравнительно большой входной мощности сигнала можно объяснить, по-видимому, тем, что в действительности СВЧ поля в резонаторе образуют систему стоячих волн [6, 8], что не учитывалось при данном анализе. Кроме того, здесь не учитывались потери в активном резонаторе усилителя.

2. КПУ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

1. Предположим, что СВЧ поле однородно по любому поперечному сечению замедляющей структуры. Тогда процесс усиления мощности в КПУБВ описывается дифференциальным уравнением вида [3]

$$\frac{dp(z)}{dz} = \frac{\sigma_b p(z)}{1 + Sp(z)} - \sigma_c p(z), \quad (7)$$

где α_c — затухание на единице длины замедляющей системы, α_b — показатель усиления КПУБВ для слабого сигнала, $p(z)$ — мощность, проходящая через сечение z замедляющей системы, S — фактор насыщения сигнала при переходе в парамагнитном кристалле.

Решение уравнения (7) приводит к выражению

$$\frac{G}{G_0} = \left(\frac{1 - \beta GP_{\text{вх}}}{1 - \beta P_{\text{вх}}} \right)^{S/\beta}, \quad (8)$$

где $\beta = \frac{\alpha_b \alpha_c}{\alpha_b - \alpha_c}$. Решение (7) можно получить в другой форме, как это сделано в [3]:

$$\frac{G}{G_0} = \left[\frac{1 - [G/(\gamma - 1)] SP_{\text{вх}}}{1 - [1/(\gamma - 1)] SP_{\text{вх}}} \right]^\gamma, \quad (8a)$$

где $\gamma = \alpha_b/\alpha_c$; однако предельный переход к идеализированному случаю отсутствия потерь в системе ($\alpha_c \rightarrow 0$) в (8) и (8a) дает одно и то же обычно используемое выражение [3-5]:

$$G = G_0 \exp [-SP_{\text{вх}}(G - 1)]. \quad (8б)$$

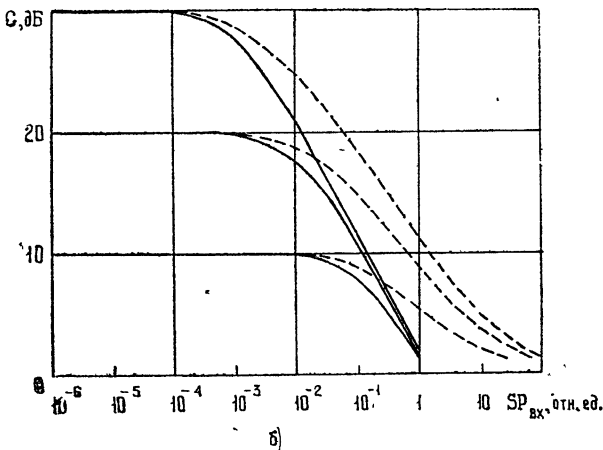
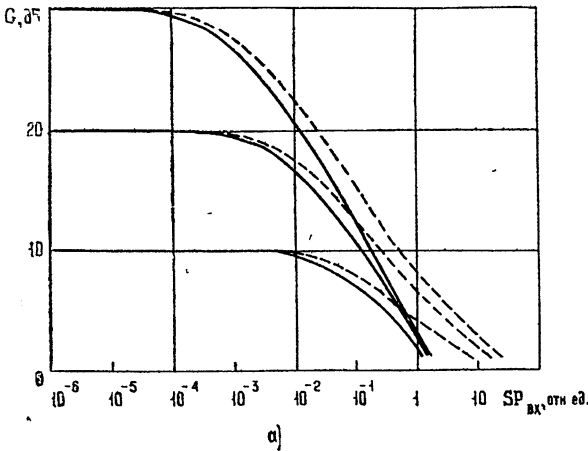


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления G от относительной мощности входного сигнала $SP_{\text{вх}}$ в КПУБВ для однородного (а) и экспоненциального (б) распределения СВЧ поля в активном элементе: пунктир — без учета потерь в замедляющей системе; сплошная линия — с учетом потерь в замедляющей системе.

Зависимость коэффициента усиления КПУБВ от величины входного сигнала, рассчитанная по формулам (8), представлена на рис. 2 а. Видно, что учет потерь в замедляющей структуре приводит к уменьшению динамического диапазона. Кроме того, зависимость G от $SP_{\text{вх}}$ при этом становится более сильной.

2. Теперь предположим экспоненциальное распределение СВЧ поля в поперечном сечении замедляющей системы. В этом случае поле убывает при удалении от поверхности замедляющей структуры по закону $e^{-\beta y}$, вследствие чего насыщение начинается у поверхности структуры [4]. В предположении, что никакие физические процессы не приводят к распространению насыщения по объему активного вещества, распределение мощности $p(z)$ в поперечном сечении будет характеризоваться плотностью $p_d(z, y) = p(z)e^{-\beta y}$. Таким образом, работа КПУБВ будет описываться уравнением

$$\frac{dp_d(z, y)}{dz} = \frac{\alpha_b p_d(z, y)}{1 + Sp_d(z, y)} - \alpha_c p_d(z, y). \quad (9)$$

Проинтегрировав (9) по y (предполагается, что вещество достаточно далеко простирается в этом направлении), получим

$$\frac{dp(z)}{dz} = \frac{\alpha_b}{S} \ln [1 + Sp(z)] - \alpha_c p(z). \quad (10)$$

Уравнение (10) допускает разделение переменных, однако в общем случае решение (10) не выражается через известные функции.

Если принять во внимание, что на практике

$$\frac{\alpha_c}{\alpha_b} \frac{Sp(z)}{\ln(1 + SP_{\text{вх}})} \ll 1,$$

то решение уравнения (10) можно выразить через интегральные показательные функции и интегральные логарифмы; однако это выражение из-за своей громоздкости неудобно для использования на практике. Если предположить, что $SP_{\text{вх}} \ll 1$, то можно получить решение (10) в более простой форме

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1 - \frac{GSP_{\text{вх}}}{2(1 - \alpha_c/\alpha_b)}}{1 - [2(1 - \alpha_c/\alpha_b)]^{-1} SP_{\text{вх}}}. \quad (11)$$

Зависимость (11) представлена на рис. 2 б.

3. Экспериментальная зависимость G от $SP_{\text{вх}}$ была снята на рубиновом КПУБВ четырехсантиметрового диапазона [9]. Применялась штыревая замедляющая структура. КПУБВ при температуре 4,2 К имел коэффициент усиления 20 дБ и полосу усиливаемых частот $\Delta f = 50$ МГц. Общие потери в замедляющей структуре были таковы, что $\alpha_c/\alpha_b = 0,3$. Фактор насыщения равнялся $S = 10^5 \text{ Вм}^{-1}$. Активные элементы для резонаторного КПУ и КПУБВ были изготовлены из одной и той же булы.

Как видно из рис. 3, экспериментальная зависимость G от $SP_{\text{вх}}$ полностью совпадает с теоретической кривой, рассчитанной в предположении однородного распределения СВЧ поля по поперечному сечению активного элемента с учетом потерь в замедляющей структуре. По-видимому, предположение о бесконечности активного элемента в направлении оси y более грубо, чем предположение об однородном распределении поля по поперечному сечению структуры.

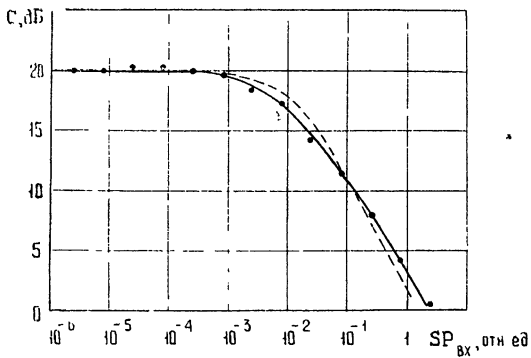


Рис. 3. Сравнение экспериментальных данных с теоретическим расчетом для КПУБВ: пунктир—теоретическая кривая для экспоненциального распределения СВЧ поля; сплошная линия—теоретическая кривая для однородного распределения СВЧ поля; точками нанесены данные эксперимента.

ВЫВОДЫ

Таким образом, учет потерь в электродинамических системах при теоретическом рассмотрении динамического диапазона квантовых усилителей СВЧ приводит к результатам, хорошо совпадающим с экспериментальными данными. Однако для резонаторного усилителя с пассивным контуром экспериментально наблюдается более сильная зависимость коэффициента усиления от уровня входного сигнала, чем зависимость, полученная расчетным путем. Это, по-видимому, обусловлено неоднородностью СВЧ полей в объеме активного кристалла усилителя.

Фактор насыщения в КПУБВ всего в 1,5 раза меньше фактора гашения в резонаторном усилителе. Очевидно, в данном случае большую роль имеет то обстоятельство, что в силу значительной длины активного элемента и сильной зависимости резонансной частоты ЭПР от ориентации оптической оси в кристалле для используемой схемы накачки линия ЭПР является неоднородно уширенной. Последнее может увеличить фактор насыщения. В то же время для резонаторного КПУ нетрудно подобрать более однородный по своим свойствам активный элемент.

В данной работе при анализе фактора насыщения в КПУ мы исходили из того, что в используемом активном кристалле концентрация парамагнитных ионов такова, что кросс-релаксация между ионами, сильно влияющая на эффект насыщения, проявляется очень слабо. Это предположение всегда справедливо при гелиевых температурах 1,4—4,2 К, при которых работают квантовые усилители.

В заключение автор выражает благодарность Т. А. Смирновой и А. В. Тридубу за помощь при проведении измерений.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 П Батчер, Теория трехуровневых парамагнитных усилителей, сб статей «Квантовые парамагнитные усилители», ИЛ, М., 1961, стр 106.
- 2 Н В Карлов, Ю П Пименов, А М Прохоров, Радиотехника и электроника, 6, № 3, 410 (1961).
- 3 Л Л Москвитин, Ю Е Наумов, Радиотехника и электроника, 9, № 12, 2103 (1964).
- 4 А Сигмен, Мазеры, изд Мир, М, 1966.

- 5 Н. В. Карлов, Квантовая электроника и парамагнитный резонанс, Труды ФИАИ СССР, 49, 3 (1969).
6. F. J. Rosenbaum, W. Q. Jeffers, IEEE J. Quant. Electron., QE-1, № 9, 375 (1965).
7. Н. Т. Черпак, Я. Л. Шамфаров, Т. А. Смирнова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 92 (1974).
- 8 Н. Т. Черпак, Я. Л. Шамфаров, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 16, № 8, 53 (1973).
9. Я. Л. Шамфаров, А. И. Стеценко, Н. Т. Черпак, Тезисы докладов III Республиканского семинара по квантовой электронике, Харьков, 1973, стр. 36.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 января 1975 г.

SATURATION EFFECT IN QUANTUM PARAMAGNETIC AMPLIFIERS WITH TAKING INTO ACCOUNT LOSSES IN ELECTRODYNAMIC SYSTEMS

N. T. Cherpak

A theoretical analysis is made of the dependence of the amplification coefficient on the input signal with taking into account the losses in the input passive contour in resonator quantum paramagnetic amplifier and the losses in a slowing-down system of a quantum paramagnetic traveling-wave amplifier. Experimental results are compared with calculations.

УДК 621 375.7

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФАЗЫ СИГНАЛА В КВАНТОВОМ ПАРАМАГНИТНОМ УСИЛИТЕЛЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УРОВНЯ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Н. Т. Черпак

Исследован вопрос о фазовом сдвиге в квантовом парамагнитном усилителе бегущей волны при заданном законе изменения входного сигнала с учетом инерционности усилителя, обусловленной процессами спинрешеточной релаксации в активном веществе. Получены количественные оценки для скоростей изменения входного сигнала, при которых инерционность усилителя не проявляется.

1. При применении квантовых парамагнитных усилителей (КПУ) в фазометрических системах представляет интерес выяснение вопроса о зависимости фазовых сдвигов в КПУ от уровня и скорости изменения входного сигнала [1].

Следует отметить, что в литературе вопрос о фазовых искажениях сигнала, прошедшего через КПУ, обсуждался [2-4]. Однако в указанных работах речь шла об искажениях сигнала с постоянной во времени амплитудой несущей частоты или постоянной амплитудой модуляции. Очевидно, что при воздействии на усилитель монохроматического сигнала с изменяющейся во времени интенсивностью фазовый сдвиг сигнала на выходе усилителя в общем случае будет также изменяться. В связи с этим возникает вопрос, в какой мере релаксационные свойства активного вещества будут влиять на скорость изменения фазового сдвига сигнала.

Можно показать [5], что при воздействии сигнала произвольной амплитуды P фазочастотная характеристика КПУ бегущей волны (КПУБВ) описывается выражением

$$\varphi = \frac{\gamma_0}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{G S P \sin 2\varphi + \gamma_0 x}{G S P \cos 2\varphi - \gamma_0 + 1 + x^2} - \operatorname{arctg} \frac{\gamma_0 x}{S P - \gamma_0 + 1 + x^2} \right] = -x \ln G. \tag{1}$$

Здесь $\gamma_0 = \frac{\alpha_b^{(0)}}{\alpha_c}$, α_c и $\alpha_b^{(0)}$ — затухание и усиление на единице длины

замедляющей структуры на резонансной частоте, $x = 2 \frac{\nu - \nu_d}{\Delta \nu_d}$ — отно-

сительная расстройка сигнала, $\Delta \nu_d$ — ширина линии ЭПР на частоте сигнала ν_d , S — фактор насыщения на частоте ν_d . Коэффициент усиления G зависит от частотной расстройки x и от уровня входного сигнала P . Уравнение (1) получено в предположении однородно уширенной линии ЭПР. Предельный переход к идеализированному случаю

отсутствия потерь в замедляющей структуре ($\gamma_0 \rightarrow \infty$) приводит к значительному упрощению уравнения (1):

$$2\varphi + GSP \frac{\sin 2\varphi}{1+x^2} = -x \ln G_m. \quad (1a)$$

При изменении амплитуды входного сигнала будет изменяться фазовый сдвиг выходного сигнала. Скорость этого сдвига $\frac{d\varphi}{dt}$ для данного КПУБВ определяется скоростью изменения амплитуды входного сигнала (при заданной частотной расстройке). Если для простоты пренебречь затуханием в замедляющей структуре, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{G \sin 2\varphi}{1+SPG \cos 2\varphi} \left[1 - \frac{SP(G-1)}{1+SPG} \right] \frac{d(SP)}{dt}. \quad (2)$$

В случае, когда справедливо неравенство $SPG \ll 1$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{G}{2} \sin 2\varphi \frac{d(SP)}{dt}. \quad (2a)$$

В (2) и (2a) использованы соотношения $G = G_m \exp[-SP(G-1)]$ и $G_m = \exp(\ln G_{m0}/(1+x^2))$, где G_{m0} — коэффициент усиления слабого сигнала на резонансной частоте. Зная закон изменения во времени входного сигнала, можно определить величину фазового сдвига в каждый данный момент времени.

2. Все изложенное выше справедливо в определенных условиях, а именно только в том случае, когда изменение входного сигнала является настолько медленным, что коэффициент усиления G в КПУБВ, а вместе с ним и фазовый сдвиг φ успевают «следить» за изменением этого сигнала. Поскольку скорость изменения коэффициента усиления КПУБВ при изменении уровня входного сигнала определяется не только скоростью изменения входного сигнала, но и скоростью спинрешеточной релаксации, то при значениях $\frac{dP}{dt}$, превышающих неко-

торую величину, будет сказываться инерционность КПУ. Заметим при этом, что в квантовых усилителях, работающих, как правило, при температуре жидкого гелия, применяются активные кристаллы с такими концентрациями парамагнитных ионов, при которых не проявляются заметным образом эффекты, обусловленные процессами кросс-релаксации.

Целью дальнейшего изложения является вывод уравнения (или системы уравнений) для фазового сдвига в КПУБВ при заданном законе изменения входного сигнала с учетом инерционности усилителя, а также получение оценок для изменений сигнала, при которых инерционность КПУБВ не проявляется.

Для решения поставленной задачи необходимо получить временную зависимость коэффициента усиления

$$G(t) = \exp(\alpha_b t) = \exp(kd_m(t)l), \quad (3)$$

где $k = \ln G_{m0}/d_{m0}l$, d_{m0} — резонансное значение магнитного декремента при слабом сигнале, l — длина структуры.

Магнитный декремент при произвольной интенсивности сигнала зависит от продольной координаты z , потому что мощность сигнала, а значит, и степень насыщения активного вещества изменяются в на-

правлении распространения сигнала по замедляющей структуре. Поведение $d_m(t)$ в данном сечении структуры описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt} d_m(t) = -\frac{d_m(t) - d_{m0}}{T_1} - 2W(t) d_m(t), \quad (4)$$

где T_1 — время спин-решеточной релаксации в активном веществе на частоте сигнала, $W(t)$ — вероятность индуцированных переходов на частоте сигнала.

Поток мощности P в замедляющей системе определяется энергией \mathcal{E} , запасенной на единице длины и движущейся с групповой скоростью $v_{гр}$ [6], т. е.

$$P = \mathcal{E} v_{гр}. \quad (5)$$

С другой стороны, энергия, запасенная на единицу длины структуры, равна

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda_0 \mu_0 H_1^2}{4\beta}, \quad (6)$$

где λ_0 — длина волны сигнала, μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума, H_1 — амплитуда магнитного поля на частоте сигнала, β — постоянная распространения в замедляющей структуре. Тогда, учитывая, что

$$W = \frac{1}{4} \gamma^2 \sigma^2 H_1^2 g(\nu) \quad (7)$$

(γ — гиромагнитное отношение, σ^2 — безразмерная вероятность перехода, характеризующая сигнальный переход, $g(\nu)$ — функция формы линии ЭПР), из (5), (6) и (7) можно получить связь между вероятностью перехода $W(t)$ и уровнем мощности в данном сечении структуры:

$$W(t) = c P(t) g(\nu), \quad (8)$$

где

$$c = g^2 \sigma^2 \frac{\beta_B^2 \mu_0 \beta}{\hbar^2 \lambda_0 v_{гр}}.$$

Если учесть зависимость мощности сигнала в данном сечении от коэффициента усиления G и зависимость последнего от магнитного декремента, то решение уравнения (4) несложно записать в следующей форме:

$$d_m(t) = \exp \left[-\frac{t-t_0}{T_1} - 2c g(\nu) \int_{t_0}^t P_{вх}(t) \exp [k d_m(t) l] dt \right] \times \times \left\{ \frac{d_{m0}}{T_1} \int_{t_0}^t \exp \left[\frac{t-t_0}{T_1} + 2c g(\nu) \int_{t_0}^t P_{вх}(t') \exp [k d_m(t') l] dt' \right] + d_m^{(0)} \right\}. \quad (9)$$

Здесь $d_m^{(0)}$ — значение d_m в момент времени $t = t_0$.

Уравнения (9), (3) и (1а) позволяют вычислить $G(t)$ и $\varphi(t)$ при известном законе изменения интенсивности сигнала $P_{вх}$ на входе КПУВВ.

3. Используя (9), можно сделать оценку для скорости изменения мощности входного сигнала $\frac{dP_{вх}}{dt}$, при которой не будет проявляться

инерционность КПУБВ. Очевидно, что выходной сигнал и фазовый сдвиг его будут «следить» за изменением входного сигнала при условии

$$\frac{t - t_0}{T_1} \gg 2 \int_{t_0}^t W(t) dt, \quad (10)$$

где $W(t) = cg(v)P_{\text{вх}}(t)G(t)$. Величина $W(t)$ обычно является плавной функцией t , поэтому в частном случае больших значений $G(t_0)$ и большой скорости изменения входного сигнала $\frac{dP_{\text{вх}}}{dt}$ получаем условие безынерционности усилителя

$$\frac{dP_{\text{вх}}}{dt} \ll \frac{2}{cg(v)T_1 G(t_0)(t - t_0)}. \quad (11)$$

В качестве примера возьмем типичные значения величины, для КПУБВ на рубине: $T_1 = 50 \text{ мс}$, $G(t_0) = 10^2$ при входном сигнале $P_{\text{вх}}(t_0) = 10^{-7} \text{ Вт}$ ($G_{\text{м0}} = 10^3$), $cg(v) = 150 \text{ дж}^{-1}$. Промежуток времени, в течение которого происходит изменение сигнала, выберем равным 10 с ; тогда из (11)

$$\frac{dP_{\text{вх}}}{dt} \ll 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/с}. \quad (12)$$

Из (11) следует, что ограничения, налагаемые неравенством (11) на $\frac{dP_{\text{вх}}}{dt}$ с увеличением $G(t_0)$, T_1 и промежутка времени $t - t_0$ должны становиться более жесткими.

Пусть теперь КПУБВ стоит на входе приемной системы, которая следит за удаляющимся космическим объектом, движущимся с ускорением 10 г ; допустим для простоты, что после достижения первой космической скорости v цель дальше движется равномерно. Мощность $P_{\text{вх}}(t)$ при этом будет изменяться по закону

$$P_{\text{вх}}(t) = \frac{aP_1}{t^2}, \quad (13)$$

где P_1 — мощность передающего устройства, a — коэффициент, зависящий от характеристик передающего и приемного устройств радиосистемы и трассы передающая антенна — приемная станция. Предположим далее, что при достижении объектом скорости v в момент времени t_0 мощность на входе КПУБВ $P_{\text{вх}}(t_0) = 10^{-7} \text{ Вт}$. Используя указанные начальные условия, можно из (13) определить скорость изменения $P_{\text{вх}}(t)$:

$$\frac{dP_{\text{вх}}}{dt} = -\frac{2aP_1}{t^3} = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/с},$$

которая оказывается на несколько порядков ниже предельной скорости (12), при которой будет проявляться инерционность КПУ.

Таким образом, приведенные оценки говорят о том, что инерционностью КПУ в фазометрических системах, в которых входной сигнал является плавно меняющейся функцией времени, можно пренебречь, и для определения скорости изменения фазового сдвига справедливыми остаются уравнения (2) и (2а).

Заметим, что эффект инерционности рассмотренного здесь типа будет тем более значительным, чем больше частотная расстройка x . Это

обусловлено тем, что фазовый сдвиг φ возрастает при увеличении x (в пределах полосы усиления, которая всегда меньше ширины линии ЭПР).

В заключение автор выражает благодарность Я. Л. Шамфарову за дискуссию и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Т. Черпак, II Всесоюзная школа-семинар, Краткие тексты докладов, Ереван, 1974, стр. 92
2. Н. В. Карлов, Т. И. Кузнецова, Радиотехника и электроника, 12, № 2, 284 (1967).
3. Н. В. Карлов, Б. Б. Крынецкий, Т. И. Кузнецова, А. В. Широков, Радиотехника и электроника, 12, № 2, 364 (1967).
4. В. Б. Штейншлейгер, Г. С. Мисежников, П. С. Лифанов, Квантовые усилители СВЧ (мазеры), изд. Сов. радио, М., 1971.
5. Н. Т. Черпак, II Всесоюзная школа-семинар, Краткие тексты докладов, Ереван, 1974, стр. 88.
6. А. Сигмен, Мазеры, изд. Мир, М., 1966.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
30 июля 1974 г.

ON CHANGE IN SIGNAL PHASE IN A QUANTUM PARAMAGNETIC TRAVELING-WAVE AMPLIFIER WHEN CHANGING THE INPUT SIGNAL LEVEL

N. T. Cherpak

We investigate the problem of the phase shift in a quantum paramagnetic traveling-wave amplifier at a given law of changing the input signal with taking into account the amplifier inertia produced by spin-lattice processes in an active medium. Qualitative estimations are obtained for the velocities of changing the input signal for which the amplifier inertia is not revealed.

УДК 538.571

САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВОГО ПУЧКА В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

А. Б. Шварцбург

Аналитически рассмотрена возможность крупномасштабного расслоения локализованного распределения волнового поля в нелинейной среде, причем характер расслоения определяется профилем интенсивности на границе среды. Получены формулы, описывающие влияние многофотонного поглощения на интенсивность пучка вблизи оси. Указана аналогия между аберрациями, связанными с нелинейным поглощением и со сложной формой начального профиля пучка. Рассмотрена возможность повышения интенсивности вблизи оси при специальной форме начального профиля пучка, частично компенсирующей влияние поглощения.

Настоящая работа посвящена аналитическому рассмотрению аберраций интенсивности волнового пучка в нелинейной среде с учетом многофотонного поглощения. Известный результат Таланова о безаберрационной самофокусировке пучка с параболическим профилем интенсивности предсказывает схлопывание такого пучка в точку (фокус) с бесконечной интенсивностью [1]. В работе автора [2] было показано, что в консервативной среде даже малые отступления от строго параболического начального распределения интенсивности приводят к аберрациям, ограничивающим значения интенсивности вблизи фокуса (в приближении геометрической оптики). В отличие от этого, в настоящей работе будут исследованы другие тенденции в нелинейной эволюции пучка, связанные с возникновением и развитием крупномасштабных осцилляций интенсивности, зависящих от начального распределения поля в пучке, а также с влиянием многофотонного поглощения на нелинейную аберрацию лучей.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обсудим стационарную картину самовоздействия осесимметричного монохроматического волнового пучка частоты ω в нелинейной изотропной среде, нелинейность которой описывается малой добавкой к значению диэлектрической проницаемости ϵ ($\text{Re } \epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$, $\text{Im } \epsilon = \delta_0 + \Delta\delta$). Рассмотрим случай, когда добавка к $\text{Re } \epsilon$ пропорциональна интенсивности волны в данной точке I ($\Delta\epsilon = \epsilon_2 I$, $|\Delta\epsilon| \ll \epsilon_0$). Примем основное направление распространения пучка за ось z и ограничимся случаем узкого пучка, когда отклонения лучей от этого направления θ малы ($\theta \ll \pi/2$). Пока нелинейная эволюция поля пучка сказывается сильнее, чем дифракционные эффекты ($(\omega a c^{-1})^2 |\Delta\epsilon| \gg 1$, где a — характерная ширина пучка, c — скорость света), можно использовать для описания самовоздействия пучка уравнения нелинейной геометрической оптики. При таком описании поле волны в каждой точке характеризуется значением интенсивности I и направлением луча θ , проходящего через данную точку. В этом случае система уравнений нелинейной эволюции такого пучка имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \rho} \pm \frac{\partial W}{\partial \rho} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (uW)}{\partial \rho} + \frac{uW}{\rho} = -\kappa W. \quad (2)$$

В этих уравнениях ρ и t — безразмерные переменные: $\rho = r/a$ (r — координата в плоскости, ортогональной z , a — характерный размер пучка при $z=0$), $t = z\beta^{1/2} a^{-1}$ ($\beta = |\epsilon_2| I_0 (2\epsilon_0)^{-1}$, I_0 — максимальное значение интенсивности в плоскости $z=0$); $W = \frac{I(r, t)}{I_0}$ — безразмерная интенсив-

ность, функция u характеризует угол между направлением z и волновым вектором в данной точке $u = \theta\beta^{-1/2}$. Правая часть уравнения (2) описывает поглощение:

$$\kappa = \frac{ka}{\sqrt{\beta}} [\delta_0 + \delta_2(W)] = \kappa_1 + \kappa_2(W), \quad \kappa_{1,2} = \frac{ka}{\sqrt{\beta}} \delta_{0,2}, \quad (3)$$

где $\delta_0 + \delta_2(W)$ — мнимая часть диэлектрической проницаемости с учетом линейного (δ_0) и нелинейного ($\delta_2(W)$) затухания волны [3]. Знаки «+» и «-» в уравнении (1) отвечают соответственно случаю расфокусирующей и фокусирующей сред. Здесь везде рассматривается фокусирующая среда.

Если нелинейная эволюция пучка происходит значительно быстрее, чем его затухание, то в уравнении (2) можно положить в первом приближении $\kappa = 0$. В этом случае (1) и (2) переходят в систему уравнений нелинейной геометрической оптики в консервативной среде. Такая система, как известно, допускает важное частное решение, указанное в [1] и соответствующее параболическому профилю интенсивности и плоскому фазовому фронту при входе в нелинейную среду ($z=0$),

$$W|_{z=0} = \begin{cases} 1 - \rho^2 & (\rho^2 \leq 1) \\ 0 & (\rho^2 \geq 1) \end{cases}, \quad u|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Однако решение, удовлетворяющее условию (4), предсказывает схлопывание всего пучка в точку (фокус). Поэтому для определения интенсивности вблизи фокуса важно учесть эффекты, связанные с поглощением и отличием начального распределения от параболического (4). Для этого удобно использовать некоторые результаты работы автора [2].

1) Будем рассматривать функции W и u в (1) и (2) как независимые переменные, а переменные ρ и t — как функции. В пространстве W, u введем новые переменные ϵ и η по формулам*

$$W = (1 + \epsilon^2)(1 - \eta^2), \quad u = \sqrt{2}\epsilon\eta. \quad (5)$$

2) Эволюция распределения, близкого к параболическому (4), может быть описана функциями вида $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $t = t_0 + t_1$. Здесь величины ρ_0 и t_0 , соответствующие «параболическому» решению, в координатах ϵ, η имеют вид

$$\rho_0 = -\eta(1 + \epsilon^2)^{-1/2}, \quad t_0 = 2^{-1/2}\epsilon(1 + \epsilon^2)^{-1/2}. \quad (6)$$

* Соответствующие формулы для расфокусирующей среды приведены в Приложении.

Это и есть решение Таланова в координатах ε, η . Поправки ρ_1 и t_1 , описывающие возмущение решения (6), находятся через функцию $\psi(\varepsilon, \eta)$ с помощью формул

$$t_1 = \frac{1}{2\Delta} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \quad (\Delta = \varepsilon^2 + \eta^2), \quad (7)$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\Delta} \left[\varepsilon(1 - 2\eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \eta(1 + 2\varepsilon^2) \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right].$$

Функция ψ описывается уравнением*

$$2(1 + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{1 - 3\eta^2}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0. \quad (8)$$

После разделения переменных $\psi(\varepsilon, \eta) = f(\varepsilon)F(\eta)$ функции $f(\varepsilon)$ и $F(\eta)$ удовлетворяют уравнениям

$$(1 + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - \frac{k^2 f}{2} = 0; \quad (9)$$

$$(1 - \eta^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1 - 3\eta^2}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} + k^2 f = 0. \quad (10)$$

3) Линейно-независимые решения уравнения (9) имеют вид

$$f_1(\varepsilon) = \operatorname{ch} \left(\frac{k}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} \varepsilon \right), \quad f_2(\varepsilon) = \operatorname{sh} \left(\frac{k}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsch} \varepsilon \right). \quad (11)$$

Линейно-независимые решения уравнения (8) при $k^2 = 4n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, имеют вид

$$P_0(\eta) = 1, \quad P_1(\eta) = 1 - 2\eta^2, \quad P_2(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 6\eta^4,$$

$$Q_0(\eta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \eta^2}{\eta^2}, \quad Q_1(\eta) = \frac{P_1(\eta)}{2} \ln \frac{1 - \eta^2}{\eta^2} - P_0(\eta), \quad (12)$$

$$Q_2(\eta) = \frac{P_2(\eta)}{2} \ln \frac{1 - \eta^2}{\eta^2} - \frac{3}{2} P_1(\eta).$$

При этом функция ψ , характеризующая возмущения пучка, запишется в виде

$$\psi = \sum_n \{ Q_n(\eta) [A_n f_1(\varepsilon) + B_n f_2(\varepsilon)] + P_n(\eta) \times \\ \times [C_n f_1(\varepsilon) + D_n f_2(\varepsilon)] \}. \quad (13)$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются из граничных условий

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right|_{\varepsilon=0} = -\sqrt{2} \eta \rho_1(\eta). \quad (14)$$

Рассмотрим с помощью полученных решений некоторые виды нелинейной деформации пучка.

* Такой подход представляет собой обобщение соответствующей аналитической процедуры для двумерного случая [5].

2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ НОВЫХ МАКСИМУМОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ ЛОКАЛИЗОВАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ

Рассмотрим эволюцию осесимметричного пучка, распространяющегося в консервативной среде. Предположим, что при входе в среду фазовый фронт пучка является плоским ($u|_{z=0} = 0$), а интенсивность распределена по параболическому закону (4), и исследуем влияние малых возмущений параболического профиля:

$$\rho|_{\varepsilon=0} = -\eta + \rho_1, \quad \rho_1|_{\varepsilon=0} = \frac{\alpha\eta(1-\eta^2)}{2} \ln \frac{1-\eta^2}{\eta^2} + \beta\eta^3. \quad (15)$$

В двухпараметрическом семействе распределения (15) постоянные α и β являются параметрами, причем $|\alpha| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$. Такое распределение, совпадая с параболическим в точках $\rho = 0$ и $\rho = 1$, в остальных точках близко к нему (рис. 1 а).

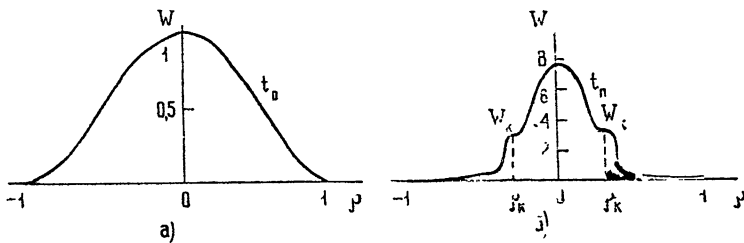


Рис. 1. Нелинейное крупномасштабное расщепление локализованного распределения поля.

Кривая t_0 (рис. 1а) — профиль интенсивности на границе среды ($z = 0$), кривая t_n (рис. 1б) — профиль интенсивности в момент образования точек горизонтального перегиба в распределении интенсивности.

В отличие от работы [2], соответствующей случаю $\alpha = 0, \beta \neq 0$, модель (15) позволяет рассмотреть эволюцию «колоколообразного» профиля со сглаженными краями ($\frac{\partial W}{\partial \rho}|_{\rho=1} = 0$).

Чтобы зависимость $W(\rho)$, определенная в (15), была однозначной, уравнение $\frac{\partial \rho}{\partial W}|_{\varepsilon=0} = 0$ не должно иметь корней в интервале $-1 \leq \eta \leq 1$. Это приводит к условию $\alpha < 0$, которое в дальнейшем считается выполненным.

С помощью граничных условий (12) и профиля (15) можно вычислить коэффициенты в функции (13):

$$B_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \beta, \quad B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha + \beta), \quad B_2 = -\frac{\sqrt{2}}{6} \beta, \quad (16)$$

$$D_0 = -D_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \alpha.$$

Остальные коэффициенты в (13) равны нулю. Теперь можно с помощью формул (7) и (8) вычислить функции ρ_1 и t_1 .

Выпишем функции ρ и t в области больших значений интенсивности ($\varepsilon^2 \gg 1$)*:

* В рассматриваемой модели краевые лучи пучка со «сглаженными» краями сохраняют свое направление ($u = 0$), т. е. вдоль этих лучей $\eta^2 = 1, \varepsilon = 0$,

$$t = -\frac{1 + \alpha + \beta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \varepsilon^{2\sqrt{3}-2} \left\{ (\beta - 2\alpha Q_0(\eta)) \times \right. \\ \left. \times [6\eta^2 P_1(\eta) + \sqrt{3} P_2(\eta)] + \alpha \left[3\sqrt{3} P_1(\eta) - \frac{1 - 12\eta^2 + 12\eta^4}{1 - \eta^2} \right] \right\}; \quad (17)$$

$$\rho = -\frac{\eta}{\varepsilon} - \eta \varepsilon^{2\sqrt{3}-1} \left\{ (\beta - 2\alpha Q_0(\eta)) \left[2P_1(\eta) - \frac{\sqrt{3}}{3} P_2(\eta) \right] - \right. \\ \left. - \alpha P_1(\eta) \left[\sqrt{3} + \frac{1 - 12\eta^2 + 12\eta^4}{3\eta^2(1 - \eta^2)} \right] \right\}. \quad (18)$$

Отклонения профиля пучка от параболического при малых ε не существенны; напротив, при $\varepsilon^2 \gg 1$ они могут привести к качественно новым эффектам, в частности — к образованию точек горизонтального перегиба на профиле интенсивности. Условия возникновения такого перегиба

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} = 0. \quad (19)$$

Подставляя решения (15) в условия (16), можно получить систему уравнений для определения координат точек перегиба ε_n , η_n на плоскости ε , η . Так, вблизи края пучка ($\eta^2 \rightarrow 0$) такие уравнения имеют вид

$$1 + \left[4\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)\beta + \frac{\alpha}{6\beta^2} \right] \varepsilon^{2\sqrt{3}} = 0, \quad (20) \\ \alpha \varepsilon^{2\sqrt{3}+4} + 6(1 + \sqrt{3})\delta^3 = 0.$$

Здесь $\delta = 1 + \eta$, $\eta < 0$, $\delta \ll 1$. Решение системы (20) показывает, что уже при малых возмущениях начального параболического профиля пучок становится неустойчив по отношению к расслоению. Так, при $\alpha = -10^{-4}$, $\beta = 10^{-3}$ получим из системы (20): $\varepsilon_n = 2,6$, $\delta_n = 0,2$. Интенсивность в точке образования горизонтального перегиба, найденная по формуле (5), составляет $W = 2,8$. В пространстве ρ , t координаты точки перегиба, вычисленные по формулам (6) и (7), составляют: $\rho_n = 0,3$, $t_n = 0,9 t_\phi$, где $t_\phi = 2^{-1/2}$ — длина фокусировки параболического профиля.

Точка перегиба, действительно, лежит недалеко от края пучка: согласно формуле (6) $\rho = -\eta f$, где f — безразмерная ширина пучка при данном t , $f = (1 + \varepsilon^2)^{-1/2}$; при указанных значениях ε и η получим $\rho = 0,8$. Подсчет по формулам (5) — (7) показывает, что вблизи точки перегиба профиль пучка еще близок к параболическому ($\rho \approx \rho_0$, $t \approx t_0$); возмущения существенно сказываются на ходе производных $\frac{\partial W}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}$ (рис. 1 б).

Таким образом, возмущения в периферийной части распределения также могут быть существенны для динамики пучка. После возникновения точки горизонтального перегиба начинается развитие новых максимумов интенсивности и расслоение пучка на кольцевые зоны. Динамика пучка в этой области описывается непосредственно уравнениями (1) и (2). Указанное расслоение профиля приводит к длинно-

волновым осцилляциям с макроскопическим масштабом. Картина рас-
слоения определяется начальным размером области локализации поля
и распределением интенсивности на границе среды.

3. АБЕРРАЦИЯ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Рассмотрим здесь простую модель, описывающую деформацию
волнового пучка (4) в среде со слабым нелинейным поглощением, так
что характерная длина поглощения значительно больше нелинейной
длины $a\beta^{-1/2}$. Ограничимся для простоты случаем двухфотонного
поглощения ($x = x_1 + x_2 W$). Тогда, выполняя программу преобразо-
ваний (5)–(7), можно записать уравнение для функции ψ , характе-
ризующей возмущения параболического профиля в глубине среды:

$$(1 + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{1 - \eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{1 - 3\eta^2}{2\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{x_1}{2} \frac{1 - \eta^2}{1 + \varepsilon^2} + \frac{x^2}{2} (1 - \eta^2)^2. \quad (21)$$

Это уравнение лишь правой частью отличается от соответствующего
уравнения (8) для консервативной среды.

Вводя новую переменную $z = 1 - 2\eta^2$, получим из (21):

$$(1 + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + 2 \left[(1 - z^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] = \frac{P_0(z)}{2} \times$$

$$\times \left[\frac{x_1}{2(1 + \varepsilon^2)} + \frac{x_2}{3} \right] + \frac{P_1(z)}{4} \left(\frac{x_1}{1 + \varepsilon^2} + x_2 \right) + \frac{x_2 P_2(z)}{12}. \quad (22)$$

Здесь $P_n(z)$ — полиномы Лежандра. Функцию ψ в (22) можно предста-
вить в виде

$$\psi = f_0(\varepsilon) P_0(z) + f_1(\varepsilon) P_1(z) + f_2(\varepsilon) P_2(z). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и используя ортогональность полиномов Ле-
жандра, получим уравнения для f_0 , f_1 и f_2 :

$$(1 + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 f_n}{\partial \varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\partial f_n}{\partial \varepsilon} - 2n(n + 1)f_n = S_n \quad (n = 0, 1, 2), \quad (24)$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{x_1}{2(1 + \varepsilon^2)} + \frac{x_2}{3} \right], \quad S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{1 + \varepsilon^2} + x_2 \right), \quad S_2 = \frac{x_2}{12}.$$

Для построения картины поглощения рассмотрим простейший
случай параболического профиля начальной интенсивности. Так как
возмущения точного решения ρ_1 и t_1 связаны с поглощением, то нас
будут интересовать решения, обращающие функцию ρ_1 (7) в нуль при
 $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$. Кроме того, искомые функции f должны удовлетворять
при любых x_1 и x_2 условию $\rho_1|_{\varepsilon=0} = 0$.

Как известно [3], в случае линейного поглощения ($x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$)
интенсивность в фокусе по-прежнему стремится к бесконечности, про-
исходит лишь сдвиг фокуса. Однако для вычисления конечной интен-
сивности надо учесть нелинейное поглощение. Для простоты пренебре-
жем в этом случае линейным поглощением, полагая $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$.
При этом вынужденные решения уравнения (24), удовлетворяющие
условию $\rho_1|_{\varepsilon=0} = 0$, имеют вид

$$f_0 = \frac{x_2}{12} \ln^2(\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2}), \quad f_1 = \frac{x_2}{24} [\operatorname{ch}(2 \operatorname{arcsh} \epsilon) - 1], \quad (25)$$

$$f_2 = \frac{x_2}{144} [\operatorname{ch}(2\sqrt{3} \operatorname{arcsh} \epsilon) - 1].$$

Подставляя (25) в (23) и используя (7), запишем выражение для функции ρ_1 в области большой интенсивности вблизи фокуса ($\epsilon^2 \gg 1$, $\eta^2 \ll 1$):

$$\rho_1 = A_x \eta \epsilon^{2\sqrt{3}}^{-1}, \quad A_x = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6}} x_2. \quad (26)$$

В случае нелинейного поглощения развитие гладкого начального возмущения приводит к абберации. Условия пересечения лучей на оси пучка имеют вид [2]

$$\rho = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial W} \right|_t = 0. \quad (27)$$

Используя при вычислении $\rho = \rho_0 + \rho_1$ (6) и (23), получим, что условия (27) удовлетворяются при $\eta = 0$, $\epsilon_k = [V\bar{6}/x_2(V\bar{3} - 1)]^{1/2V\bar{3}}$. Таким образом, при учете нелинейного поглощения интенсивность в фокусе равна большой, но конечной величине:

$$W_k = 1 + \epsilon_k^2 = 1 + \left[\frac{V\bar{6}}{(V\bar{3} - 1)x_2} \right]^{1/V\bar{3}}. \quad (28)$$

Сравнивая (28) с результатами работы [2], видим, что двухфотонное поглощение приводит к таким же абберациям, как и возмущение начальных условий типа $W|_{z=0} = 1 - \rho^2(1 + \alpha) + \alpha\rho^4$. Аналогично можно показать, что, например, трехфотонное поглощение приведет к члену с $P_3(z)$ в (23), а возникающая от этого абберация подобна абберации пучка с начальным профилем $W|_{z=0} = 1 - \rho^2(1 + \alpha) + \alpha\rho^6$.

4. ВЗАИМНАЯ КОМПЕНСАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПУЧКЕ, БЛИЗКОМ К ПАРАБОЛИЧЕСКОМУ

В разд. 3 рассматривался пучок, имеющий на входе в нелинейную среду ($z = 0$) параболический профиль (4). Рассмотрим теперь малые возмущения этого профиля: предположим, что при $z = 0$ профиль интенсивности близок к параболическому:

$$\rho|_{z=0} = -\eta + \rho_1, \quad \rho_1 = \frac{\alpha\eta^3}{2} \left(\frac{|\alpha|}{2} \ll 1 \right). \quad (29)$$

Этому распределению соответствует профиль $W|_{z=0} = 1 - \rho^2(1 + \alpha) + \alpha\rho^4$.

Решение уравнений (1) и (2) с граничным условием (29) легко построить, определяя ρ_1 через функцию ψ (7) и представляя ψ в виде суммы двух функций, $\psi = \psi_1 + \psi_2$ (соответственно $\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}$). Функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют, согласно (7), разным граничным условиям:

$$\rho_{11}|_{z=0} = 0, \quad \rho_{12}|_{z=0} = -\frac{\alpha\eta^3}{2}. \quad (30)$$

Функция ρ_{11} при этом дается решением (23), а функция ρ_{12} получена в работе автора [2] и в области большой интенсивности имеет вид

$$\rho_{12} = A_\alpha \eta \varepsilon^{2\sqrt{3}-1}, \quad A_\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}} \alpha. \quad (31)$$

Таким образом, выражения для поправок, связанных с нелинейным поглощением и малым возмущением начального профиля параболического пучка, имеют одинаковую структуру, и различаются лишь значением констант A . При этом функция $\rho(\varepsilon, \eta)$, описывающая нелинейную эволюцию пучка, близкого к параболическому, в среде с нелинейным поглощением имеет вид

$$\rho = -\frac{\eta}{\varepsilon} [1 + \varepsilon^{2\sqrt{3}} (A_x + A_\alpha)]. \quad (32)$$

Подставляя в (32) значения констант A , легко видеть, что при условии $A_x + A_\alpha = 0$ наступает взаимная компенсация начального возмущения профиля W и эффектов искажения профиля в процессе эволюции в среде. Отсюда легко найти значение возмущения α , необходимого для компенсации:

$$\alpha = -2\sqrt{2} \alpha_2. \quad (33)$$

Значение α в (33) отрицательно, и градиент интенсивности вблизи оси по модулю больше, чем в строго параболическом пучке ($W|_{z=0} = 1 - \rho^2$), так что возможна компенсация дополнительной расходимости. При выполнении условия (33) получим из (32), что в нашем приближении профиль пучка является параболическим ($\rho = \rho_0 = -\eta\varepsilon^{-1}$), и aberrации первого порядка отсутствуют. Для вычисления конечного значения интенсивности надо рассматривать теперь aberrации второго порядка.

После пересечения лучей при aberrации уравнения геометрической оптики (1) и (2) неприменимы. Эти уравнения описывают тенденции крупномасштабной эволюции пучка, зависящей от его геометрических размеров и макроскопических градиентов интенсивности. В другом случае, при описании мелкомасштабной эволюции, существен результат Беспалова и Таланова о существовании при такой эволюции оптимального масштаба неоднородности [4].

Таким образом, здесь рассмотрена крупномасштабная эволюция локализованного осесимметричного распределения волнового поля в нелинейной среде, обусловленная распределением интенсивности на границе среды. В каждом порядке теории возмущений строятся точные аналитические решения, описывающие самовоздействие пучков как в модели «сглаженных» краев (колоколообразное распределение поля конечной ширины), так и в модели «несглаженных» краев пучка; при этом роль периферийных возмущений в нелинейной динамике пучка может быть существенна. Отмечены две тенденции крупномасштабной нелинейной перестройки поля: немонотонный режим, связанный с генерацией длинноволновых осцилляций интенсивности и с последующим расслоением поля, и монотонный режим, связанный с деформацией пучка как целого. При этом нелинейное поглощение может привести к aberrациям лучей, аналогичным aberrациям, обусловленным сложной формой начального профиля интенсивности. Частичная компенсация поглощения с помощью специальной формы начального распределения поля может привести к повышению интенсивности вблизи максимума распределения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В ряде задач, связанных с нелинейной эволюцией локализованных распределений волновых полей, приходится рассматривать самовоздействие таких полей в расфокусирующей среде. Интересуясь осесимметричными волновыми пучками, можно и в случае расфокусирующей среды построить систему аналитических решений уравнений нелинейной геометрической оптики, аналогичных рассмотренному выше случаю фокусирующих сред.

Для пучка, близкого к параболическому, в расфокусирующей среде (знак «+» в (1)), можно ввести в пространство W , и систему координат ε, η по формулам

$$W = (1 - \varepsilon^2)(1 - \eta^2), \quad u = -\sqrt{2}\varepsilon\eta. \quad (\text{П.1})$$

При этом распределение интенсивности и направленности излучения характеризуется функциями $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $t = t_0 + t_1$, где значения $\rho_0 = -\eta(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$, $t_0 = 2^{-1/2}\varepsilon(1 - \varepsilon^2)^{-1/2}$ соответствуют параболическому профилю, а возмущения ρ_1 и t_1 выражаются через некоторую функцию ψ по формулам

$$t_1 = \frac{1}{2\Delta} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right), \quad (\text{П.2})$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\Delta} \left\{ \varepsilon(1 - 2\eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \eta(1 - 2\varepsilon^2) \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\}.$$

Функция $\psi(\varepsilon, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$2(1 - \varepsilon^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{1 - 3\eta^2}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{П.3})$$

с граничными условиями (14); после разделения переменных $\psi(\varepsilon, \eta) = f(\varepsilon)F(\eta)$ функция $F(\eta)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению (10), а функция $f(\varepsilon)$ описывается уравнением

$$(1 - \varepsilon^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{k^2 f}{2} = 0. \quad (\text{П.4})$$

Линейно-независимые решения уравнения (П.4) имеют вид

$$f_1 = \sin \left(\frac{k}{\sqrt{2}} \arcsin \varepsilon \right), \quad f_2 = \cos \left(\frac{k}{\sqrt{2}} \arcsin \varepsilon \right). \quad (\text{П.5})$$

Строя теперь функцию ψ (13), можно с помощью (П.2) исследовать характерные нелинейные деформации в расфокусирующей среде. При этом, если среда консервативна, то осевые aberrации, как известно, не возникают, и функция ψ характеризует другие типы деформаций, например, внеосевую aberrацию лучей или крупномасштабное расклонение поля.

Автор благодарит Ю. А. Кравцова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. И. Таланов, ЖЭТФ, Письма в редакцию, 2, 218 (1965).
- 2 А. В. Schvartsburg, Opt. Communications, 10, 127 (1974).
- 3 С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967).

- 4 В. И Беспалов, В. И. Таланов, ЖЭТФ, Письма в редакцию, 3, 471 (1966).
5 А. Б Шварцбург, ЖЭТФ, 66, 920 (1974).

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
18 октября 1974 г.

SELF-ACTION OF A WAVE BEAM IN A NONLINEAR DISSIPATIVE MEDIUM

A. B. Shvartsburg

The possibility of large-scale lamination of a localized distribution of the wave field in a nonlinear medium is analytically considered, the lamination being determined by the intensity profile at the medium boundary. The formulas are obtained which describe the multi-photon absorption effect on the beam intensity near the axis. The analogy between aberrations connected with a nonlinear absorption and its complex form of the initial beam profile is pointed out. The possibility of increasing the intensity near the axis for a specific form of the initial beam profile partially compensating the absorption effect is considered.

УДК 530.145

О ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА ДЛЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

А. Н. Малахов, О. В. Музычук

Исследуется решение уравнения Дайсона в эксцессном приближении, учитывающем наименее связанные диаграммы всех порядков в разложении массового оператора. На примере резонансной стохастической системы второго порядка с флуктуациями собственной частоты показано, что рассматриваемое приближение учитывает влияние второй параметрической зоны в отличие от приближения Бурре, учитывающего только основную зону параметрического резонанса.

1. Как известно, широкий круг задач современной теоретической физики приводит к решению стохастических дифференциальных уравнений, т. е. уравнений со случайными коэффициентами. Это, прежде всего, проблемы теории турбулентности, статистической термодинамики, задачи распространения волн в случайных средах, задачи оптимальной фильтрации и оптимального управления.

Большой интерес вызывает рассмотрение стохастических линейных операторов с большими флуктуациями, при этом приходится отказаться от традиционных способов теории возмущений и использовать методы, первоначально разработанные в квантовой теории поля. Эти методы так или иначе связаны с селективным суммированием рядов теории возмущений для среднего решения (среднего поля) и моментов поля. Здесь следует отметить метод Келлера [1], метод фейнмановский диаграмм [2-5], метод перенормировки [6, 7], методы, использующие аппарат вариационного исчисления [3, 8] (см. также [9] и приведенную там библиографию). Все эти методы приводят к замкнутому линейному уравнению для среднего поля — уравнению Дейсона, которое обычно решается только в первом приближении — в приближении Бурре. Ясно, однако, что при рассмотрении стохастических операторов с большими флуктуациями параметров это приближение может оказаться недостаточно хорошим для решения задач с необходимой точностью. Кроме того, в общем случае затруднительно сформулировать условия применимости приближения Бурре, не выходя за рамки этого приближения.

В данной работе рассматриваются высшие приближения уравнения Дайсона для среднего поля, не опирающиеся в принципе на предположение малости флуктуаций параметров стохастической линейной системы. Эти приближения можно рассматривать как следствие разложения по «степени негауссовости» некоторого параметра, который предполагается гауссовым в приближении Бурре. Соответствующий рассматриваемым приближениям «массовый» оператор в уравнении Дайсона содержит некоторую подпоследовательность сильносвязных диаграмм всех порядков. Подробно исследуется приближение, названное ниже эксцессным, в котором учитываются наименее связанные диаграммы всех порядков в разложении массового оператора.

Получено выражение для массового оператора стохастической системы, описываемой дифференциальным оператором N -го порядка с одним случайным параметром в эксцессном приближении; проведено сравнение с приближением Бурре, тем самым уточнены условия применимости последнего. Результаты иллюстрируются на примере резонансной стохастической системы второго порядка с флуктуациями собственной частоты. Показано, что рассматриваемое приближение учитывает влияние второй параметрической зоны в отличие от приближения Бурре, учитывающего только основную зону параметрического резонанса (определяемую спектральными компонентами флуктуаций собственной частоты системы в окрестности удвоенной резонансной частоты).

2. Рассмотрим стохастическую линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением со случайными коэффициентами

$$M\left(\frac{d}{dt}, t\right) Y(t) = X(t), \quad (1)$$

где

$$M\left(\frac{d}{dt}, t\right) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}$$

— стохастический дифференциальный оператор, который можно представить в виде

$$M\left(\frac{d}{dt}, t\right) = L\left(\frac{d}{dt}\right) + \tilde{L}\left(\frac{d}{dt}, t\right) \quad (\langle \tilde{L} \rangle = 0). \quad (2)$$

Здесь $\tilde{L} = \sum_{k=0}^N \tilde{a}_k(t) \frac{d^k}{dt^k}$ — флуктуационная часть оператора M , скобки

$\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение, $\tilde{a}_k(t)$ — флуктуации коэффициентов $a_k(t) = \bar{a}_k + \tilde{a}_k(t)$ ($\langle \tilde{a}_k(t) \rangle = 0$), которые будем считать гауссовыми. Если входное воздействие представляет собой дельта-функцию $X(t) = \delta(t - t')$, то решение уравнения (1) есть стохастическая функция Грина $Y(t) \equiv g(t, t')$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$g(t, t') = g_0(t - t') - L^{-1}(t - t_1) \tilde{L}(t_1) g(t_1, t'), \quad (3)$$

где $g_0(t - t')$ — функция Грина «невозмущенной» системы, определяемая равенством

$$g_0(t - t') = L^{-1}(t - t_1) \delta(t_1 - t'),$$

L^{-1} — оператор, обратный «невозмущенному» оператору L .

Стохастическую функцию Грина $g(t, t')$ можно представить в виде

$$g(t, t') = \bar{g}(t - t') + \tilde{g}(t, t'), \quad (4)$$

где $\bar{g}(t - t') \equiv \langle g(t, t') \rangle$ — средняя функция Грина, зависящая только от разности аргументов, если флуктуации оператора \tilde{L} стационарны, а $\tilde{g}(t, t')$ — ее флуктуационная часть. Итерируя уравнение (3) и усредняя с учетом (4), получим следующее операторное уравнение для средней функции Грина (аргументы для краткости опускаем):

$$\bar{g} = g_0 + L^{-1} \langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{L} \rangle \bar{g} + L^{-1} \langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{h} \rangle; \quad (5)$$

здесь \tilde{h} — флуктуационная часть процесса

$$h(t, t') = \tilde{L}(t) \tilde{g}(t, t') = \bar{h} + \tilde{h}, \quad (6)$$

удовлетворяющая итерационному уравнению

$$\tilde{h} = (\langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{L} \rangle - \tilde{L} L^{-1} \tilde{L}) \bar{g} + \langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{h} \rangle - \tilde{L} L^{-1} \tilde{h}. \quad (7)$$

Выражение (5) без последнего члена представляет собой хорошо известное приближение Бурре уравнения Дайсона для среднего поля [2-4]:

$$\bar{g} = g_0 + L^{-1} Q \bar{g}. \quad (8)$$

Последовательно подставляя (7) в (5), можно получить все остальные члены массового оператора Q , входящего в (8).

Перейдем для удобства к символическим обозначениям, взяв за основу принятые в литературе фейнмановские диаграммы (см., например, [3]). Сплошной чертой --- будем обозначать оператор L^{-1} и его

ядро g_0 , жирной чертой --- среднюю функцию Грина \bar{g} , флуктуа-

ционную часть оператора \tilde{L} обозначим точкой \circ , а флуктуации

\tilde{h} — символом --- . Случайные операторы, входящие под общий знак статистического усреднения, будем соединять пунктирными дугами

--- . Используя диаграммный язык, запишем выражение (5)

и (7) соответственно в виде

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \text{---}; \quad (5a)$$

$$\text{---} = \text{---} \circ \text{---} - \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} - \text{---} \circ \text{---}. \quad (7a)$$

Подставляя (7a) в (5a) и учитывая гауссовость оператора \tilde{L} , получим для остаточного члена приближения Бурре выражение

$$\text{---} \circ \text{---} = - \text{---} \circ \text{---} \text{---}, \quad (9)$$

или, в операторном виде

$$L^{-1} \langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{h} \rangle = - L^{-1} \langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{L} L^{-1} h \rangle = - L^{-1} \langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{L} \tilde{H} \rangle, \quad (10)$$

где

$$\tilde{H} \equiv L^{-1} \tilde{h} = L^{-1}(\tilde{L} \tilde{g} - \langle \tilde{L} \tilde{g} \rangle) \quad (11)$$

представляет собой результат действия «невозмущенного» интегрального оператора L^{-1} на флуктуации \tilde{h} . По отношению к флуктуациям функции Грина \tilde{g} , \tilde{H} является результатом применения оператора «перенормировки» [6, 7]. Таким образом, условием справедливости приближения Бурре, не опирающимся на малость флуктуационной части оператора \tilde{L} , является равенство нулю моментной функции

$$\langle \tilde{L} L^{-1} \tilde{L} \tilde{H} \rangle = 0, \quad (12)$$

которое имеет место, если совокупность $\{\tilde{L}, \tilde{L}, \tilde{H}\}$ является гауссовой.

Заметим, что требование нормальности флуктуаций \tilde{H} не означает, в общем случае, что флуктуации самой функции Грина \tilde{g} должны быть гауссовыми. Флуктуации \tilde{H} можно считать гауссовыми, если постоянная времени «невозмущенной» системы значительно превосходит характерное время флуктуаций \tilde{h} , которое по порядку величины совпадает с масштабом корреляции оператора \tilde{L} . Если коэффициенты оператора \tilde{L} представляют собой δ -коррелированные случайные процессы, то флуктуации \tilde{H} будут строго гауссовыми и приближение Бурре является точным.

3. Подставив (7 а) в остаточный член (9), получим сильносвязные диаграммы 4-го порядка в уравнении Дайсона и остаток, содержащий совместные моментные диаграммы 4-го порядка флуктуаций \tilde{L} и \tilde{h} :

$$\begin{aligned} \text{---} &= \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \\ &+ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме моментных функций (моментных диаграмм), ниже нам потребуются так называемые кумулянтные функции [10] и соответствующие им кумулянтные диаграммы. Вершины кумулянтных диаграмм, в отличие от моментных, будем соединять сплошными

дугами . Некоторые соотношения, связывающие моментные

и кумулянтные диаграммы, приведены в Приложении I.

Остаточные члены в выражении (3) можно выразить через совместные кумулянтные диаграммы 3-го и 5-го порядков флуктуаций \tilde{L} и \tilde{h} (см. Приложение I, формулу (П.1.2)).

Продолжая итерационную процедуру в уравнениях (5 а) и (7 а), можно получить сильносвязные диаграммы 6-го порядка для массового оператора Q и остаток, содержащий совместные кумулянтные функции 3-го, 5-го и 7-го порядка и т. д.

Как отмечалось выше, приближение Бурре соответствует предположению гауссовости перенормированных флуктуаций \tilde{H} , при этом все совместные кумулянтные диаграммы порядка $n > 2$ полагаются равны-

ми нулю. Можно ограничиться более слабым требованием, а именно, считать совокупность $\{\tilde{L}, \tilde{L}, \dots, \tilde{L}, \tilde{H}\}$ квазигауссовой, положив равными нулю все совместные кумулянтные диаграммы, начиная с некоторого порядка $k > 3$. Это приближение приведет к тому, что массовый оператор будет содержать не все сильносвязные диаграммы, а только некоторую подпоследовательность их, соответствующую рассматриваемому приближению. Положив $k = 4$ и последовательно выполняя подстановку (7 а) в (5 а), получим следующий ряд для средней функции Грина:

$$\begin{aligned}
 & \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \\
 & + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \\
 & + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots = \text{---} + \text{---} \text{---} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 2n, n-1 \right\}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь скобки $\{2n, s\}$ означают совокупность всех сильносвязных диаграмм порядка $2n$, имеющих связность $s = n - 1$ (см. Приложение II). Каждую диаграмму с $2n$ вершинами связности s будем обозначать квадратными скобками $[2n, s]$. Можно показать, что совокупность $\{2n, n - 1\}$ содержит 2^{n-1} диаграмм $[2n, n - 1]$.

Таким образом, рассматриваемое приближение учитывает лишь наименее связанные из сильносвязных диаграмм всех порядков. Физически очевидно, что эти диаграммы вносят наибольший вклад по сравнению с более связными диаграммами соответствующих порядков, поскольку здесь вершины, входящие под общий знак усреднения, расположены наиболее близко друг к другу.

Отметим, что пренебрежение совместными кумулянтными диаграммами флуктуаций \tilde{L} и \tilde{H} 4-го порядка начинает сказываться лишь на диаграммах 6-го и высших порядков в разложении массового оператора Q . Так в (14) входят все сильносвязные диаграммы 4-го порядка, но только 4 (из 12) диаграммы 6-го порядка, имеющие связность $s = 2$, 8 диаграмм 8-го порядка (из 74) со связностью $s = 3$ и т. д. Ряд (14) можно назвать «эксцессным» приближением уравнения Дайсона, так как здесь принимается во внимание совместная кумулянтная функция 3-го порядка флуктуаций \tilde{L} и \tilde{H} , которая фактически определяется совместной кумулянтной функцией 4-го порядка флуктуационного оператора \tilde{L} и функции Грина \tilde{g} . Приближение Бурре в этой терминологии является гауссовым приближением уравнения Дайсона.

Массовый оператор Q , соответствующий «эксцессному» приближению (14), представляет собой бесконечную подпоследовательность диаграмм. Если оператор \tilde{L} мал в некотором статистическом смысле, то в ряде (14) можно оставить несколько первых членов, причем пользоваться разложением (14) более целесообразно, чем первыми членами в полном разложении массового оператора. Кроме того, в некоторых случаях ряд (14) можно просуммировать (см. п. 4).

Полный итерационный ряд уравнения Дайсона, содержащий все сильносвязные диаграммы, можно перегруппировкой членов привести к виду

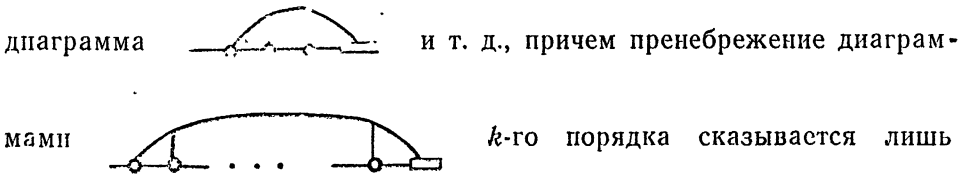
$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\{2n, n-1\} + \{2n, 2n-3\} + \dots + \left\{ 2n, \frac{n(n-1)}{2} \right\} \right) = \quad (15) \\
 & = \text{---} + \text{---} + \dots + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=3}^{n+1} \{2n, s_{nk}\},
 \end{aligned}$$

где $\{2n, s_{nk}\}$ есть совокупность диаграмм порядка $2n$, имеющих связность

$$s_{nk} = \frac{k-2}{2} (2n - k + 1) \quad (k = 3, 4, \dots, n+1).$$

Суммирование по n в (15) есть суммирование по «порядкам малости» оператора \tilde{L} , в то время как суммирование по k означает учет отклонения от гауссовости перенормированных флуктуаций \tilde{H} . При $k=3$ из (15) получается «эксцессное» приближение, при $k=4$ учитывается



мамин k -го порядка сказывается лишь на порядках $n \geq k - 1$.

4. Рассмотрим стохастическую линейную систему, описываемую дифференциальным оператором N -го порядка с одним флуктуирующим параметром (коэффициентом при нулевой производной):

$$M\left(\frac{d}{dt}, t\right) = \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n}{dt^n} + \tilde{a}(t). \quad (16)$$

Воспользовавшись эксцессным приближением, найдем среднюю (или эффективную) частотную характеристику $\bar{K}(j\omega)$ системы (16), связанную со средней функцией Грина преобразованием Фурье:

$$\bar{K}(j\omega) = \int_0^{\infty} \bar{g}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (17)$$

Из уравнения Дайсона (8) следует соотношение*

$$\bar{K}(p) = K_0(p) [1 - K_0(p) q(p)]^{-1} \quad (p = j\omega), \quad (18)$$


связывающее $\bar{K}(p)$ с «невозмущенной» частотной характеристикой $K_0(p)$. Здесь

$$q(p) = \int_0^{\infty} Q(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (19)$$

— преобразование Лапласа ядра массового оператора. Таким образом, нахождение средней частотной характеристики $\bar{K}(p)$ сводится к определению $q(p)$.

Пусть флуктуации параметра $\tilde{a}(t)$ имеют функцию корреляции

$$\Phi_a(\tau) = \sigma^2 \exp(-\Pi |\tau|). \quad (20)$$

Ограничившись лишь одной диаграммой  для массового оператора Q (приближением Бурре), получим для $q(p)$ выражение

$$q_1(p) = \sigma^2 K_0(p + \Pi), \quad (21)$$

где σ^2 и Π — дисперсия и полоса флуктуаций соответственно. Рассмотрев высшие диаграммы, входящие в (14), можно получить следующее рекуррентное соотношение:

$$q_{n+1}(p) = 2\sigma^2 K_0(p + \Pi) K_0(p + 2\Pi) q_n(p) \quad (22)$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

где в $q_n(p)$ учитываются все сильносвязные диаграммы порядка $2n$, имеющие связность $s = n - 1$. Суммируя получившийся ряд, находим эксцесное приближение для ядра $q(p)$:

$$q_0(p) = \sigma^2 K_0(p + \Pi) [1 - 2\sigma^2 K_0(p + \Pi) K_0(p + 2\Pi)]^{-1}. \quad (23)$$

Оценим величину диаграмм высшей связности, опущенных в эксцесном приближении. Для вклада диаграммы 6-го порядка [6; 3] в $q(p)$ можно получить

$$[6; 3] = \sigma^6 K_0^2(p + \Pi) K_0^2(p + 2\Pi) K_0(p + 3\Pi).$$

Отношение величины учитываемых и опущенных диаграмм 6-го порядка имеет вид

$$\frac{2}{3} \left| \frac{K_0(p + \Pi)}{K_0(p + 3\Pi)} \right|; \quad (24)$$

оно определяется в данном случае законом спада крыльев частотной характеристики невозмущенной системы. Для достаточно больших Π очевидно $\left| \frac{K_0(p + \Pi)}{K_0(p + 3\Pi)} \right| \approx 3^N$, где N — порядок системы.

Из сравнения (21) и (23) следует, что условие применимости приближения Бурре для рассматриваемой системы имеет вид

$$2\sigma^2 |K_0(p + \Pi) K_0(p + 2\Pi)| \ll 1. \quad (25)$$

5. Проанализируем полученные результаты на примере резонансной стохастической системы 2-го порядка, собственная частота которой испытывает флуктуации (вызванные, например, флуктуациями контурной емкости). Пусть

$$M\left(\frac{d}{dt}, t\right) = \frac{d^2}{dt^2} + 2h_0 \frac{d}{dt} + \Omega_0^2 + \tilde{a}(t), \quad (16a)$$

$$L(p) = K_0^{-1}(p) = (p + h_0)^2 + \omega_0^2, \quad \omega_0^2 = \Omega_0^2 - h_0^2.$$

Флуктуации $\tilde{a}(t)$ считаем широкополосными по сравнению с полосой пропускания системы h_0 . Рассматривая ядро $q(p)$ для частот, близких к резонансной $p \approx p_0 = j\omega_0$ (это означает, фактически, что мы получим выражение для эффективной частотной характеристики, справед-

ливое для расстроек, меньших полосы флуктуаций параметра), запишем выражения (21)–(23) в виде

$$q_1(p) \approx \frac{1}{4p_0} [S(0) - 2\varphi(2p_0)]; \quad (21a)$$

$$q_{n+1}(p) \approx \frac{1}{2p_0\Pi^2} [\varphi(p_0) - \varphi(2p_0)] q_n(p); \quad (22a)$$

$$q_n(p) \approx \frac{1}{4p_0} [S(0) - 2\varphi(2p_0)] \left[1 - \frac{1}{2p_0\Pi^2} (\varphi(p_0) - \varphi(2p_0)) \right]^{-1}. \quad (23a)$$

Здесь

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} \Phi_a(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2} [S(\omega) - jG(\omega)],$$

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \Phi_a(t) \cos \omega t dt, \quad G(\omega) = 2 \int_0^{\infty} \Phi_a(t) \sin \omega t dt$$

—соответственно спектральная плотность (косинус фурье-преобразование и синус фурье-преобразование функции корреляции флуктуаций).

Таким образом, если в приближении Бурре эффективная частотная характеристика определяется, главным образом, спектром флуктуаций собственной частоты системы на нулевой и основной параметрической частоте ($\omega \approx 2\omega_0$), то в рассматриваемом приближении учитывается также вторая параметрическая зона (область частот вблизи ω_0). Можно показать, что опущенные в эксцесном приближении диаграммы большей связности описывают влияние высших параметрических зон с частотами $\omega_k = 2\omega_0/k$ ($k = 3, 4, \dots$), в частности, диаграммы [6; 3], [8; 4] и т. д. характеризуют влияние третьей зоны с $\omega_3 = \frac{2\omega_0}{3}$.

Эффективную частотную характеристику стохастической системы (16 а) можно представить в виде

$$\bar{K}(j\omega) = (\Omega_1^2 - \omega^2 + 2jh_1\omega)^{-1}, \quad (26)$$

где эффективная полоса пропускания h_1 и собственная частота Ω_1 имеют вид

$$h_1 = h_0 - \frac{q''(\omega_0)}{2\omega_0}, \quad \Omega_1^2 = \Omega_0^2 - q'(\omega_0). \quad (27)$$

Здесь $q'(\omega)$ и $q''(\omega)$ представляют собой соответственно действительную и мнимую части ядра $q(j\omega)$.

Используя (23 а), можно записать последние формулы в развернутом виде:

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{8\omega_0^2} \frac{S(0) - S(2\omega_0) + \mu G(\omega_0)(1 - s_2) - \mu G(2\omega_0)(1 - s_1)}{[1 + \mu(g_1 - g_2)]^2 + \mu^2(s_1 - s_2)^2}, \quad (28)$$

$$\Omega_1^2 = \Omega_0^2 - \frac{1}{4\omega_0} \frac{G(2\omega_0)[1 + \mu(g_2 - g_1)] + \mu(s_2 - s_1)[S(0) - S(2\omega_0)]}{[1 + \mu(g_1 - g_2)]^2 + \mu^2(s_1 - s_2)^2}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mu = \frac{1}{2} \langle \alpha^2 \rangle \left(\frac{\omega_0}{\Pi} \right)^3, \quad (29)$$

$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{\omega_0^4}$ — безразмерная дисперсия флуктуаций параметра $\tilde{a}(t)$,

$$s_k = \frac{S(k\omega_0)}{S(0)}, \quad g_k = \frac{G(k\omega_0)}{S(0)} \quad (k = 1, 2)$$

— безразмерные косинус- и синус-спектры флуктуаций.

Из выражений (28) следует, что при малом μ результат эксцессного приближения совпадает с известными результатами приближения Бурре [5]:

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{8\omega_0^2} [S(0) - S(2\omega_0)], \quad (30)$$

$$\Omega_1^2 = \Omega_0^2 - \frac{1}{4\omega_0} G(2\omega_0).$$

Для «белого» в полосе $0 - 2\omega_0$ спектра флуктуаций параметра эффективная полоса h_1 совпадает с невозмущенным значением h_0 .

Полученные результаты позволяют уточнить указанные в [5] условия применимости приближения Бурре для резонансной стохастической системы 2-го порядка: последнее допускает рассмотрение больших $\langle \alpha^2 \rangle \sim 1$ флуктуаций собственной частоты, только если полоса их превосходит резонансную частоту системы, хотя убывание параметра μ с ростом отношения Π/ω_0 довольно быстрое (при $\Pi = 2\omega_0$, $\mu = \frac{\langle \alpha^2 \rangle}{16}$).

В заключение отметим, что рассмотренная здесь методика получения высших приближенных уравнения Дайсона может быть обобщена на стохастические среды с пространственно-временными флуктуациями параметров, а также на стохастические системы (среды) с негауссовыми флуктуациями.


Авторы благодарны В. И. Татарскому, В. И. Кляцкину за обсуждение работы и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Кумулянтные диаграммы

Рассмотрим совокупность N статистически связанных переменных (величин, процессов, операторов и т. д.), которые для простоты будем обозначать цифрами. Совместные кумулянты этой совокупности в соответствии с [11] будем обозначать $\langle 1, 2, \dots, N-1, N \rangle$, в отличие от моментов $\langle 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (N-1) \cdot N \rangle$. Как известно (см., например, [12]), моменты многомерных распределений весьма громоздким образом связаны с кумулянтами. Вместе с тем, если ввести специальные диаграммные представления для кумулянтов, то выражения моментов через кумулянты получат сравнительно простой и наглядный вид.

Итак, введем следующие диаграммные обозначения для моментов и кумулянтов:

$$\langle 1 \cdot 2 \dots (N-1) \cdot N \rangle \equiv$$


$$\langle 1, 2, \dots, N-1, N \rangle \equiv \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \cdot \dots \cdot \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \cdot$$

Момент первого порядка, совпадающий с кумулянтom, будем обозначать перечеркнутой точкой $\text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \cdot$. В этих обозначениях, например, третий и четвертый совместные моменты следующим образом выражаются через совместные кумулянты:

$$\text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} = \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} + \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} +$$

$$+ \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} + \overset{\frown}{\text{---}} \overset{\frown}{\text{---}} \overset{\frown}{\text{---}}$$

$$\text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} \text{---} + \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} \text{---} +$$

$$+ \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} +$$

$$+ \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} +$$

$$+ \text{---} \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \overset{\frown}{\text{---}}$$

Способ разложения моментов произвольного порядка очевиден: перебираются все возможные кумулянтные связи, соединяющие случайные переменные.

Формульное представление приведенных диаграмм имеет вид

$$\langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \rangle = \langle 1, 2, 3 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle + \langle 1, 3 \rangle \langle 2 \rangle +$$

$$+ \langle 1, 2 \rangle \langle 3 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle,$$

$$\langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4 \rangle + \langle 1, 3, 4 \rangle \langle 2 \rangle + \langle 1, 2, 4 \rangle \langle 3 \rangle +$$

$$+ \langle 1, 2, 3 \rangle \langle 4 \rangle + \langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle + \langle 1, 3 \rangle \langle 2, 4 \rangle + \langle 1, 4 \rangle \langle 2, 3 \rangle +$$

$$+ \langle 1, 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle + \langle 1, 4 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2, 4 \rangle \langle 3 \rangle + \langle 1, 3 \rangle \langle 2 \rangle \langle 4 \rangle +$$

$$+ \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle \langle 4 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle.$$

Если случайные переменные имеют нулевые средние значения, то диаграммы с изолированными точками пропадают, и кумулянты 2-го и 3-го порядков совпадают с соответствующими моментами. Если, к тому же, переменные являются гауссовыми, то все совместные кумулянты порядка выше двух обращаются в нуль. И тогда, например,

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} = \\
 \text{Diagram 5} &= \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8},
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle = \langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle + \langle 1, 3 \rangle \langle 2, 4 \rangle + \langle 1, 4 \rangle \langle 2, 3 \rangle.$$

Моментные и кумулянтные связи можно рассматривать и на фейнмановских диаграммах, при этом горизонтальные линии, соединяющие случайные переменные, имеют смысл ядра оператора L^{-1} , а по всем внутренним вершинам предполагается интегрирование. В соответствии с введенными обозначениями, кумулянтное разложение момента $\langle \tilde{L}L^{-1} \tilde{L}L^{-1} \tilde{L}L^{-1} \tilde{h} \rangle$ имеет вид

$$\text{Diagram 9} = \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13}. \quad (\text{П.1.1})$$

Подставив (7 а) в (П.1.1) и учитывая гауссовость оператора \tilde{L} , получим следующее представление остаточных членов в выражении (13):

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 14} - \text{Diagram 15} &= \text{Diagram 16} - \text{Diagram 17} \\
 &= \text{Diagram 18} + \text{Diagram 19} + \text{Diagram 20} + \\
 &+ \text{Diagram 21} + \text{Diagram 22} + \text{Diagram 23}.
 \end{aligned} \quad (\text{П.1.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Индекс связности

Индекс связности s сильносвязной диаграммы порядка $2n$ определим следующим образом:

$$s = \frac{1}{2}(l - n), \quad (\text{П.11.1})$$

где l — суммарная «длина» статистических связей в рассматриваемой диаграмме, а n — «длина» таких связей в слабосвязной диаграмме вида $\text{Diagram 24} \dots \text{Diagram 25}$. Определенный таким образом индекс характеризует степень перепутанности корреляционных связей в диаграмме.

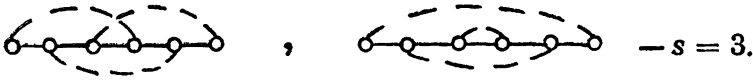
Так для диаграмм 4-го порядка $\text{Diagram 26} \quad \text{Diagram 27} \quad l=4,$

$s = \frac{1}{2}(4 - 2) = 1$, Для всех диаграмм 6-го порядка, вида [6; 2], учиты-

ваемых в эксцессном приближении, например, для



$s = \frac{1}{2}(7-3)=2$, а для остальных диаграмм 6-го порядка, например, для



Можно показать, что минимальная и максимальная связность диаграмм порядка $2n$ соответственно равна

$$s_{\min} = n - 1, \quad s_{\max} = \sum_{m=1}^{n-1} m = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (\text{П.И.2})$$

Так, сильносвязные диаграммы 6-го порядка могут иметь связность $s = 2, 3$; восьмого — $s = 3, 4, 5, 6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Keller, Proc. Symp. Appl. Math. Amer. Math. Soc., **13**, 227 (1960).
2. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **46**, № 4, 1399 (1964).
3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
4. R. E. Collin, Radio Sci., **6**, № 11, 991 (1971).
5. Г. Н. Бочков, Ю. А. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 1, 45 (1973).
6. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, **44**, № 2, 1676 (1963).
7. A. D. Vagvatsis, M. I. Sancer, Radio Sci., **6**, № 1, 87 (1971).
8. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, **110**, № 4, 499 (1973).
9. Л. А. Апресян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 2, 165 (1974).
10. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
11. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 11, 1736 (1974).
12. М. Дж. Кендалл, А. Стюарт, Теория распределений, изд. Наука, М., 1966.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
22 мая 1974 г.

ON THE HIGHEST APPROXIMATIONS OF THE DYSON EQUATION FOR THE MEAN FIELD

A. N. Malakhov, O. V. Muzychuk

The solution of the Dyson equation is investigated in the excess approximation taking into account the less related all-order diagrams in the mass operator expansion. By the example of the resonance stochastic second-order system with the natural frequency fluctuations, it is shown that the approximation considered takes into account the second parametric zone effect in contrast to the Bouřret approximation which regards only the main zone of the parametric resonance.

УДК 538.56 : 519.217

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВУВРЕМЕННЫХ КУМУЛЯНТНЫХ ФУНКЦИЙ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

А. Н. Малахов

Для негауссовых стационарных марковских процессов выводятся линейные уравнения временной эволюции двумерных кумулянтных функций любого порядка. Определяется общий вид кумулянтных функций произвольного марковского процесса. Рассматривается пример инерционной системы с кубической нелинейностью. В гауссовом и эксцессном приближении находится время корреляции процесса на выходе системы и эволюция его спектра в зависимости от параметра нелинейности системы и интенсивности воздействующего шума.

1. В работе [1] были получены кинетические уравнения кумулянтов произвольного марковского процесса. Эти уравнения относились к одномерной плотности вероятности $W(x, t)$ марковского процесса $x(t)$ и описывали временную эволюцию его кумулянтов.

Несомненно большой интерес представляет исследование кумулянтов двумерного распределения $W(x_1, t_1; x_2, t_2)$ — так называемых кумулянтных функций

$$\begin{aligned} x_s(t_1^{(s-p)}, t_2^{(p)}) &\equiv \langle \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{s-p}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_p \rangle \equiv \\ &\equiv \langle x_1^{(s-p)}, x_2^{(p)} \rangle = x_{s-p, p}^{x_1, x_2} \end{aligned}$$

зависящих от t_1 и t_2 . Здесь для обозначения совместных кумулянтов двумерного распределения использованы кумулянтные скобки [2, 3]. Знание, например, второй кумулянтной функции

$$x_2(t_1, t_2) \equiv \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1 \cdot x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$$

— ковариационной функции марковского процесса — позволяет отыскать его спектр — одну из практически важных характеристик марковского процесса.

2. Поставим задачу отыскания уравнений эволюции кумулянтных функций марковского процесса, ограничившись для простоты стационарным марковским процессом, обладающим плотностью вероятности $W(x, x_\tau, \tau)$, где $x = x(t)$, $x_\tau = x(t + \tau)$. Кумулянтные функции этого процесса

$$x_s(0^{(s-p)}, \tau^{(p)}) \equiv \langle x^{(s-p)}, x_\tau^{(p)} \rangle$$

зависят только от τ .

1. ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Начнем с уравнений для моментных функций:

$$a_s(0^{(s-p)}, \tau^{(p)}) \equiv \langle x^{s-p} \cdot x_\tau^p \rangle.$$

Как известно [4], плотность вероятности переходов $\tilde{W}(x, x_\tau, \tau)$ марковского процесса удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\tau^n} K_n(x_\tau) \tilde{W} \equiv \hat{L}(x_\tau) \tilde{W},$$

где $K_n(x)$ — кинетические коэффициенты стационарного марковского процесса, набор которых полностью определяет марковский процесс.

Поскольку $W(x, x_\tau, \tau) = W(x) \tilde{W}(x, x_\tau, \tau)$, то для двумерной плотности вероятности мы получаем то же самое кинетическое уравнение

$$\frac{\partial W(x, x_\tau, \tau)}{\partial \tau} = \hat{L}(x_\tau) W(x, x_\tau, \tau).$$

Отсюда легко находится уравнение для эволюции среднего значения произвольной функции $f(x, x_\tau)$ от марковских переменных

$$\frac{d \langle f(x, x_\tau) \rangle}{d \tau} = \langle \hat{L}^+(x_\tau) f(x, x_\tau) \rangle, \quad (1)$$

где транспонированный кинетический оператор равен

$$\hat{L}^+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(x)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}.$$

Подставляя $f(x, x_\tau) = x^{s-p} x_\tau^p$ в (1), получаем искомое уравнение эволюции моментных функций марковского процесса:

$$\frac{d \alpha_s(0^{(s-p)}, \tau^{(p)})}{d \tau} = \sum_{l=1}^p C_l^p \langle x^{s-p} x_\tau^{p-l} K_l(x_\tau) \rangle. \quad (2)$$

Если марковский процесс непрерывен ($K_l(x) = 0, l \geq 3$),

$$\frac{d \alpha_s(0^{(s-p)}, \tau^{(p)})}{d \tau} = p \langle x^{s-p} x_\tau^{p-1} K_1(x_\tau) \rangle + \frac{p(p-1)}{2} \langle x^{s-p} x_\tau^{p-2} K_2(x_\tau) \rangle.$$

2. Раскрывая правые части последних уравнений и выражая их также через моментные функции, мы приходим к бесконечной зацепляющейся системе уравнений для моментных функций марковского процесса. Лишь в том случае система (2) будет замкнутой для любого конечного набора моментных функций, когда кинетические коэффициенты $K_n(x)$ являются полиномами степени не выше n . Из (2), в частности, следует уравнение для корреляционной функции $K_x[\tau] \equiv \alpha_2(0, \tau)$ произвольного марковского процесса:

$$\frac{d K_x[\tau]}{d \tau} = \langle x \cdot K_1(x_\tau) \rangle. \quad (3)$$

Если в (2) положить $p = s$, то мы получим уравнения для моментов $\alpha_s(\tau, \tau, \dots, \tau) = \alpha_s(0, 0, \dots, 0) = \alpha_s$, которые вовсе не зависят от τ в силу стационарности рассматриваемого марковского процесса. В этом случае (2) сведется к системе уравнений (ср. с [1])

$$\sum_{l=1}^s C_s^l \langle x^{s-l} \cdot K_l(x) \rangle = 0. \quad (4)$$

2. ЭВОЛЮЦИЯ КУМУЛЯНТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Дифференцируя кумулянтную функцию второго порядка

$$\chi_2(0, \tau) = \alpha_2(0, \tau) - \alpha_1^2,$$

придем к

$$\frac{d\chi_2(0, \tau)}{d\tau} = \frac{d\alpha_2(0, \tau)}{d\tau} = \langle x \cdot K_1(x_\tau) \rangle.$$

Учитывая, что (4) при $s = 1$ принимает вид $\langle K_1(x_\tau) \rangle = 0$, уравнение для $\chi_2(0, \tau)$ можно записать в виде

$$\frac{d\chi_2(0, \tau)}{d\tau} = \langle x, K_1(x_\tau) \rangle, \quad (5)$$

который может быть формально получен из (3) при замене в обеих частях равенства моментных скобок на кумулянтные.

Дифференцируя третьи кумулянтные функции

$$\chi_3(0, 0, \tau) = \sigma_3(0, 0, \tau) - 2\alpha_1\alpha_2(0, \tau) - \alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,$$

$$\chi_3(0, \tau, \tau) = \alpha_3(0, \tau, \tau) - 2\alpha_1\alpha_2(0, \tau) - \alpha_1\alpha_2 + 2\sigma_1^3,$$

учитывая (2) и (4), придем к уравнениям

$$\frac{d\chi_3(0, 0, \tau)}{d\tau} = \langle x, x, K_1(x_\tau) \rangle, \quad (6)$$

$$\frac{d\chi_3(0, \tau, \tau)}{d\tau} = 2\langle x, x_\tau, K_1(x_\tau) \rangle + \langle x, K_2(x_\tau) \rangle,$$

которые опять же формально могут быть получены из (2) ($s = 3, p = 1$; $s = 3, p = 2$) при замене моментных скобок на кумулянтные.

Методом индукции можно доказать (аналогично тому, как это сделано в [1]), что уравнения и для произвольных кумулянтных функций получаются из (2) заменой моментных скобок на кумулянтные:

$$\frac{d\chi_s(0^{(s-p)}, \tau^{(p)})}{d\tau} = \sum_{l=1}^p C_p^l \langle x^{(s-p)}, x_\tau^{(p-l)}, K_l(x_\tau) \rangle. \quad (7)$$

2. Таковы уравнения эволюции кумулянтных функций произвольного стационарного марковского процесса. Чтобы перейти от этих уравнений к кинетическим уравнениям, т. е. к уравнениям, замкнутым по отношению к кумулянтным функциям, следует выразить правые части (7) также через кумулянтные функции, т. е., другими словами, следует разомкнуть кумулянтные скобки, входящие в правые части (5)–(7).

Начнем с уравнения для второй кумулянтной функции. В работе [5] была получена следующая формула размыкания моментной скобки:

$$\langle x \psi(y) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \psi^{(n)}(y) \rangle x_{1,n}^x y,$$

откуда элементарно следует, что

$$\langle x, \psi(y) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \psi^{(n)}(y) \rangle x_{1,n}^x y. \quad (8)$$

Полагая $y = x_\tau$, $\psi = K_1$ и подставляя (8) в (5), приходим к уравнению

$$\frac{d x_2(0, \tau)}{d \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{d x^n} K_1(x) \right\rangle x_{1+n}(0, \tau^{(n)}). \quad (9)$$

Итак, мы получили кинетическое уравнение для второй кумулянтной (ковариационной) функции произвольного марковского процесса. В это уравнение, кроме ковариационной функции, входят и все высшие кумулянтные функции. Поэтому для нахождения $x_2(0, \tau)$ необходимо знать и все остальные кумулянтные функции вида $x_s(0, \tau, \tau, \dots, \tau)$. Этими функциями мы и ограничимся.

Чрезвычайно интересным обстоятельством является линейность уравнения (9) относительно кумулянтных функций. К этому обстоятельству мы еще вернемся.

3. Рассмотрим теперь второе уравнение (6). Для раскрытия его правой части следует, помимо (8), применить формулу размыкания кумулянтной скобки вида $\langle x, y, \psi(y) \rangle$. Можно показать, что если ввести в рассмотрение неполные кумулянтные скобки (x, y, z, \dots, w) , определение и свойства которых даны в Приложении, то эта формула размыкания примет вид

$$\langle x, y, \psi(y) \rangle = -\langle \psi \rangle \langle x, y \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{d y^n} \psi(y) \right\rangle x_{1, n}^x, y_n. \quad (10)$$

Используя (8), (10) и принимая во внимание, что $\langle K_1(x) \rangle = 0$, для кумулянтной функции третьего порядка получаем следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{d x_3(0, \tau, \tau)}{d \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{d x^n} [2(x, K_1(x)) + K_2(x)] \right\rangle x_{1+n}(0, \tau^{(n)}). \quad (11)$$

В правую часть этого, опять же линейного, уравнения входят те же кумулянтные функции, что и в (9).

Кинетическое уравнение для четвертой кумулянтной функции будет иметь вид

$$\frac{d x_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{d x^n} [3(x, x, K_1) + 3(x, K_2) + K_3] \right\rangle x_{1+n}(0, \tau^{(n)}). \quad (12)$$

Кинетическое уравнение для кумулянтной функции s -го порядка запишется так:

$$\frac{d x_s(0, \tau^{(s-1)})}{d \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{d x^n} \sum_{l=1}^{s-1} C_{s-1}^l (x^{(s-1-l)}, K_l(x)) \right\rangle x_{1+n}(0, \tau^{(n)}). \quad (13)$$

Если марковский процесс непрерывен, то

$$\begin{aligned} \frac{d x_s(0, \tau^{(s-1)})}{d \tau} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n}{d x^n} \left[(s-1)(x^{(s-2)}, K_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(s-1)(s-2)}{2} (x^{(s-3)}, K_2) \right] \right\rangle x_{1+n}(0, \tau^{(n)}). \end{aligned} \quad (14)$$

4. Итак, мы получили бесконечную систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка для кумулянтных функций произвольного стационарного марковского процесса. Линейность этих уравнений, вообще говоря, представляется удивительной, поскольку марковская переменная $x(t)$ может описывать процессы в существенно нелинейных системах. Вместе с тем, «нелинейность», конечно, имеет место. Она «сидит» в начальных условиях для кумулянтных функций, поскольку установившиеся кумулянты марковского процесса $x_s(0, 0, \dots, 0) = x_s$ подчиняются согласно [1] нелинейным уравнениям. Кроме того, ими же определяются и коэффициенты уравнений (13).

Таким образом, кумулянты марковского процесса двояко влияют на вид кумулянтных функций. Во-первых, через коэффициенты уравнений (13) они определяют конкретный вид кумулянтных функций и, следовательно, скорость временной эволюции, а во-вторых, начальные значения кумулянтных функций. Тем самым, хотя сами кумулянтные функции и подчиняются линейным уравнениям, роль нелинейности системы является тем не менее определяющей.

5. Полученные кинетические уравнения (13) позволяют установить общий вид кумулянтных функций. Если систему уравнений (13) записать в виде

$$\frac{d x_s(0, \tau^{(s-1)})}{d \tau} = \sum_{k=2}^{\infty} A_{sk} x_k(0, \tau^{(k-1)}),$$

где $A_{sk} = A_{sk}(x_1, x_2, \dots)$, то решением этой бесконечной линейной однородной системы будет

$$x_s(0, \tau^{(s-1)}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{sm} \exp(-\lambda_m \tau),$$

где мы предположили для простоты, что $\lambda_m = \lambda_m(x_1, x_2, \dots)$ — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{22} - \lambda & A_{23} & \dots \\ A_{32} & A_{33} - \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

все различны. Коэффициенты $B_{sm} = B_{sm}(x_1, x_2, \dots)$ находятся из системы уравнений (определяемых начальными значениями)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} B_{sm} &= x_s, \\ - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m B_{sm} &= \sum_{k=2}^{\infty} A_{sk} x_k, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 B_{sm} &= \sum_{k, p=2}^{\infty} A_{sk} A_{kp} x_p, \\ &\dots \end{aligned} \quad (16)$$

$$(-1)^N \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^N B_{sm} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_N=2}^{\infty} A_{sk_1} A_{k_1 k_2} \dots A_{k_{N-1} k_N} x_{k_N}$$

с определителем Вандермонда бесконечного порядка. Тем самым, в случае некратных корней кумулянтная функция s -го порядка имеет вид

$$x_s(0, \tau^{(s-1)}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{sm}(x_1, x_2, \dots) \exp[-\lambda_m(x_1, x_2, \dots) \tau]. \quad (17)$$

Такова общая структура кумулянтных функций произвольного марковского процесса. Заметим, что подобная структура для $x_2(0, \tau)$ — ковариационной функции марковского процесса — была ранее найдена Стратоновичем [4].

Основная практическая ценность полученных уравнений (13) заключается в том, что всегда можно заменить бесконечную последовательность кумулянтных функций конечным набором; далее, для этого набора определить конечный набор корней характеристического уравнения и коэффициентов B_{sm} . В результате этого мы получим кумулянтные функции произвольного марковского процесса в том или ином приближении (гауссовом, если ограничиться лишь ковариационной функцией; эксцессном, если считать отличным от нуля $x_2(0, \tau)$, $x_3(0, \tau, \tau)$, $x_4(0, \tau, \tau, \tau)$, и т. п.). Именно таким образом мы и будем ниже разбирать конкретный пример.

6. Нетрудно привести кинетические уравнения кумулянтных функций и для многомерного стационарного марковского процесса $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$, представленного кинетическими коэффициентами

$$K_{i_1}(x), K_{i_1 i_2}(x), K_{i_1 i_2 i_3}(x), \dots$$

Индексы $i_1, i_2, i_3, \dots = 1, 2, \dots, N$ указывают, к каким компонентам относятся коэффициенты.

Можно показать, что кинетические уравнения кумулянтных функций

$$x_{i_1}^{x_1}, x_{i_2}^{x_2}, \dots, x_{i_N}^{x_N} = \langle x, x_{i_1 \tau}^{(k_1)}, x_{i_2 \tau}^{(k_2)}, \dots, x_{i_N \tau}^{(k_N)} \rangle,$$

где через x обозначена произвольная компонента марковского процесса, рассматриваемая в момент времени t , а $x_{i \tau} = x_i(t + \tau)$ имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \langle x, x_{i_1 \tau}^{k_1}, x_{i_2 \tau}^{k_2}, \dots, x_{i_s \tau}^{k_s} \rangle = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_N > 0}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_N!}, \quad (18)$$

$$\left\langle \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_N}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_N^{k_N}} \sum_{l=1}^s C_l^i \{ (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{s-l}}, K_{i_{s-l+1} i_{s-l+2} \dots i_s}(x)) \}_s \right\rangle x_{i_1}^{x_1}, x_{i_2}^{x_2}, \dots, x_{i_N}^{x_N}.$$

С помощью скобок $\{ \dots \}_s$ выполняется симметризация (по индексам) (ср. с [1]).

Эти уравнения также являются линейными и содержат в правых и левых частях кумулянтные функции одного и того же вида. Если все компоненты процесса совпадают, то эти уравнения, как и должно быть, переходят в (13).

3. ПРИМЕР

1. В качестве примера рассмотрим негауссов марковский процесс, описываемый нелинейным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -ax^3 + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — стационарный гауссов дельта-коррелированный процесс: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D \delta(\tau)$. Кинетические коэффициенты этого непрерывного марковского процесса равны $K_1(x) = -ax^3$,

$K_2(x) = D$, и, как показано в [1], в установившемся (стационарном) режиме этот процесс обладает симметричным вероятностным распределением, его нечетные кумулянты (а следовательно, и кумулянтные функции) равны нулю, а четные кумулянты в гауссовом и эксцессном приближении равны соответственно

$$x_2 = \sqrt{D/6a}, \quad x_4 = 0, \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = \sqrt{D/5a}, \quad x_4 = -D/10a.$$

Отыщем кумулянтные функции рассматриваемого процесса в этих же приближениях.

2. В гауссовом приближении отлична от нуля только ковариационная функция, уравнение для которой согласно (9) имеет вид

$$\frac{d x_2(0, \tau)}{d \tau} = \langle K'_1(x) \rangle x_2(0, \tau) = -3a \langle x^2 \rangle x_2(0, \tau) = -3a x_2 x_2(0, \tau).$$

Тем самым, принимая во внимание (19), имеем следующее выражение для ковариационной функции в гауссовом приближении:

$$x_2(0, \tau) = x_2 e^{-3a x_2 |\tau|} = \sqrt{\frac{D}{6a}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{3aD}{2}} |\tau| \right\}. \quad (20)$$

Время корреляции рассматриваемого марковского процесса равно

$$\tau_{\text{корр}} = \sqrt{\frac{2}{3aD}}$$

и весьма существенно зависит от коэффициента нелинейности системы и интенсивности воздействующего шума. Чем выше эта интенсивность, тем меньше время корреляции. Причину этого обстоятельства качественно можно объяснить тем, что, чем больше воздействующий шум, тем больше жесткость системы. В самом деле, если записать $ax^3 = ax^2 \cdot x$, то рассматриваемую систему можно считать как бы «линейной», коэффициент жесткости которой ax^2 зависит от мгновенных значений переменной. Если для усредненной оценки ax^2 заменить на $a \langle x^2 \rangle$, то мы получим качественно правильный результат $\tau_{\text{корр}} = [a \langle x^2 \rangle]^{-1}$, отличающийся от значения, полученного в гауссовом приближении, только коэффициентом 3.

3. В эксцессном приближении система уравнений для $x_2(0, \tau)$ и $x_4(0, \tau, \tau, \tau)$, согласно (9) и (12) с учетом свойств неполных кумулянтных скобок и (19), принимает вид

$$\frac{d x_2(0, \tau)}{d \tau} = A_{22} x_2(0, \tau) + A_{24} x_4(0, \tau, \tau, \tau),$$

$$\frac{d x_4(0, \tau, \tau, \tau)}{d \tau} = A_{42} x_2(0, \tau) + A_{44} x_4(0, \tau, \tau, \tau),$$

где

$$A_{22} = -3a x_2, \quad A_{24} = -a, \quad A_{42} = -\frac{27}{2} a x_2^2, \quad A_{44} = -27a x_2.$$

Корни характеристического уравнения (15) равны

$$\lambda_1 = \sqrt{6aD/5}, \quad \lambda_2 = 27,5 \sqrt{aD/5}, \quad \lambda_2/\lambda_1 \approx 11.$$

Вычисляя с помощью (16) коэффициенты B_{sm} , найдем следующие окончательные выражения для кумулянтных функций в эксцессном приближении:

$$x_2(0, \tau) = \sqrt{\frac{D}{5a}} \left[\frac{501}{502} e^{-\lambda_1 |\tau|} + \frac{1}{502} e^{-\lambda_2 |\tau|} \right],$$

$$x_4(0, \tau, \tau, \tau) = -\frac{D}{10a} \left[\frac{551}{502} e^{-\lambda_1 \tau} - \frac{49}{502} e^{-\lambda_2 \tau} \right] \quad (\tau > 0).$$
(21)

Сравнивая это с результатом гауссова приближения (20), видим, что учет эксцессного приближения привел, во-первых, как и должно быть, к ненулевому значению $x_4(0, \tau, \tau, \tau)$, во-вторых, усложнил вид ковариационной функции и, в-третьих, изменил время корреляции. Вместе с этим, второе слагаемое в обеих кумулянтных функциях для всех τ много меньше первого и гораздо быстрее спадает с ростом τ . По этой причине, а также и потому, что все рассмотрение идет приближенно, мы можем вторыми слагаемыми в (21) пренебречь и считать, что эксцессное приближение дает нам

$$x_2(0, \tau) = \sqrt{\frac{D}{5a}} \exp \left[-\sqrt{\frac{6aD}{5}} |\tau| \right],$$

$$x_4(0, \tau, \tau, \tau) = -\frac{D}{10a} \exp \left[-\sqrt{\frac{6aD}{5}} \tau \right] \quad (\tau > 0).$$

4. Обратимся к спектру мощности марковского процесса. Прежде всего отметим, что из общего вида ковариационной функции (17) следует, что спектр мощности любого марковского процесса представляет собой суперпозицию резонансных спектров различной ширины (определяемых набором λ_m и высоты (определяемых набором B_{2m}) с центром при нулевой частоте (для вещественных корней) или на некоторых отличных от нуля частотах (если встречаются комплексно-сопряженные корни).

В гауссовом приближении $S_x(\omega)$ — спектр мощности марковского процесса — имеет точно резонансную форму с шириной и высотой, равными соответственно

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3aD}{2}}, \quad S_x(0) = \frac{1}{3\pi a}.$$

Таким образом, при увеличении интенсивности воздействующего шума ширина спектра марковского процесса возрастает пропорционально \sqrt{D} , в то время как высота не изменяется: имеет место *режим расширения спектра* (рис. 1).

В эксцессном приближении форма спектра, вообще говоря, усложняется: появляется вторая компонента резонансной формы, существенно большей ширины и много меньшая по высоте. Если

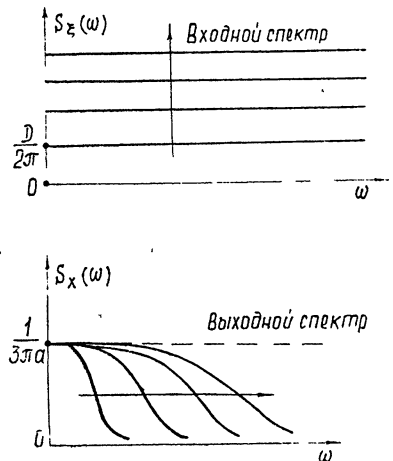


Рис. 1.

ею пренебречь, то учет эксцессного приближения приведет лишь к изменению высоты и ширины спектра той же резонансной формы. Теперь они равны

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6aD}{5}}, \quad S_x(0) = \frac{1}{\sqrt{6}\pi a}.$$

Таким образом, учет эксцессного приближения ничего не изменил в физической трактовке полученных результатов и картине эволюции спектра выходной переменной, а привел лишь к поправкам на параметры спектрально-корреляционных характеристик.

Можно показать, что и следующие приближения окажут точно такое же влияние на получаемые характеристики исследуемого процесса. Ширина спектра будет по-прежнему пропорциональна \sqrt{D} , а высота спектра не будет зависеть от D .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Неполные кумулянтные скобки

1. Помимо угловых кумулянтных скобок $\langle x, y, z, \dots, \omega \rangle$, введенных в [2, 3] и являющихся совместным кумулянтном случайных величин x, y, z, \dots, ω , большую пользу как для вычислений, так и сокращения записи приносит введение неполных кумулянтных скобок (x, y, z, \dots, ω) . Неполная кумулянтная скобка первого порядка просто равна аргументу:

$$(x) \equiv x.$$

Скобки второго и третьего порядка определяются так:

$$\begin{aligned} (x, y) &\equiv xy - \langle x \rangle y \equiv (xy) - \langle x \rangle (y), \\ (x, y, z) &\equiv xyz - \langle x \rangle (y, z) - \langle y \rangle (x, z) - \langle xy \rangle z = \\ &= (xyz) - 2\langle x \rangle (y, z) - \langle xy \rangle (z). \end{aligned}$$

В общем случае (обозначая аргументы цифрами)

$$(1, 2, \dots, N) \equiv (1 \cdot 2 \dots N) - \sum_{k=1}^{N-1} C_{N-1}^k \langle 1 \cdot 2 \dots k \rangle (k+1, k+2, \dots, N)'. \quad (22)$$

Симметризация в сумме идет по $N-1$ первым аргументам. Последний аргумент неполных кумулянтных скобок занимает выделенное положение.

Неполные кумулянтные скобки обладают следующими свойствами:

- 1) (x, y, z, \dots, ω) — симметрическая функция всех аргументов, кроме последнего;
- 2) $(Ax, By, Cz, \dots, K\omega) = ABC \dots K(x, y, z, \dots, \omega)$;
- 3) $(x, y, z_1 + z_2, \dots, \omega) = (x, y, z_1, \dots, \omega) + (x, y, z_2, \dots, \omega)$;
- 4) $(x, y, A, \dots, \omega) = 0$, если детерминированная величина A не стоит на месте последнего аргумента;
- 5) $(x, y, z, \dots, A) = A(x, y, z, \dots, 1) \neq 0$;
- 6) $(x + A, y + B, \dots, z + C, \omega + K) = (x, y, \dots, z, \omega) + K(x, y, \dots, z, 1)$;
- 7) $\langle (x, y, z, \dots, \omega) \rangle = \langle x, y, z, \dots, \omega \rangle$.

Все эти свойства легко доказываются на основании соответствующих свойств угловых кумулянтных скобок (см. [2, 3]) и (22). Последнее основное свойство неполных кумулянтных скобок позволяет пред-

ставить угловую кумулянтную скобку (совместный кумулянт) в виде статистического среднего от некоторой комбинации случайных переменных и их средних значений.

2. Поскольку неполные кумулянтные скобки зависят от случайных переменных, по ним можно дифференцировать. Важно при этом отметить, что результат дифференцирования неполных кумулянтных скобок выражается через эти же скобки. Так, если аргументы неполной кумулянтной скобки (22) зависят, например, от x , то можно показать, что в результате дифференцирования мы получим (аргументы заменены цифрами)

$$\frac{\partial}{\partial x}(1, 2, \dots, N) = \sum_{k=1}^{N-1} (1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N-1, Nk'_x) + (1, 2, \dots, N-1, N'_x). \quad (23)$$

Если теперь это выражение усреднить, то на основании седьмого свойства в правой части мы получим сумму угловых кумулянтных скобок. Тем самым, коэффициенты при кумулянтных функциях в правых частях (11) — (14), (18) после выполнения операций дифференцирования и усреднения неполных кумулянтных скобок будут представлять собой комбинации угловых кумулянтных скобок, которые, в свою очередь, зависят от кумулянтов марковского процесса.

Приведем, наконец, значения производных от неполных кумулянтных скобок первых порядков, входящих в правые части (11) — (14). Эти формулы без труда получаются путем многократного использования (23):

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(x, K) &= n \frac{d^{n-1}K}{dx^{n-1}} + \left(x, \frac{d^n K}{dx^n}\right), \\ \frac{d^n}{dx^n}(x, x, K) &= n(n-1) \frac{d^{n-2}K}{dx^{n-2}} + 2n \left(x, \frac{d^{n-1}K}{dx^{n-1}}\right) + \left(x, x, \frac{d^n K}{dx^n}\right), \\ \frac{d^n}{dx^n}(x, x, x, K) &= n(n-1)(n-2) \frac{d^{n-3}K}{dx^{n-3}} + 3n(n-1) \left(x, \frac{d^{n-2}K}{dx^{n-2}}\right) + \\ &+ 3n \left(x, x, \frac{d^{n-1}K}{dx^{n-1}}\right) + \left(x, x, x, \frac{d^n K}{dx^n}\right). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 71 (1976).
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1736 (1974).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 20, № 1, 186 (1975).
4. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
5. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 8, 1287 (1973).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10 июля 1974 г.

KINETIC EQUATIONS OF TWO-TIME MARKOV'S PROCESS CUMULANT FUNCTIONS

A. N. Malakhov

Linear equations of time evolution of two-time cumulant any order functions are deduced for non-Gaussian stationary Markov's processes. A general form of cumulant functions of an arbitrary Markovian process is determined. The example of the inertial system with cubic nonlinearity is considered. The correlation time at the system output and evolution of its spectrum as a function of the system nonlinearity parameter and acting noise intensity are found in Gaussian and excess approximations.

УДК 539.216 22

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ПЛАЗМОНА В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Б. С. Абрамович, А. А. Игнатов

Рассматривается распространение тангенциального поверхностного плазмона в случайно-неоднородных тонких пленках. В предположении слабых неоднородностей поверхностной проводимости методом возмущений получены спектр и декремент затухания поверхностного плазмона, обусловленные рассеянием среднего поля на случайных неоднородностях пленки. В случае мелкомасштабных флуктуаций поверхностной проводимости рассеяние приводит к уменьшению фазовой скорости поверхностного плазмона и его затуханию, растущему с ростом частоты. Наличие крупномасштабных неоднородностей может приводить к существенному затуханию среднего поля плазмона даже при слабых флуктуациях.

Характерной особенностью высокочастотных свойств тонких пленок полупроводников и металлов является наличие новых типов возбуждений — поверхностных плазмонов (ПП) [¹⁻³]*. Важными вопросами теории таких возбуждений являются вопросы о механизмах затухания и о влиянии неидеальной структуры пленок на распространение ПП. Влияние теплового движения на распространение ПП обсуждалось в [³]. В этой же работе рассматривался механизм затухания ПП, связанный с наличием поверхностного барьера в плазме полупроводников. В такой плазме с неоднородной концентрацией носителей может возникнуть перекачка энергии ПП в объемные плазмоны. Эти механизмы характерны для пленок, обладающих совершенной структурой, в которых концентрация носителей и толщина пленки являются либо постоянными величинами, либо изменяются регулярным образом. Однако поверхность реальных пленок является случайно-неоднородной (в макроскопическом смысле), что в свою очередь обуславливает флуктуации толщины пленки**. В связи с этим представляет интерес выяснение влияния несовершенства пленки на возможность распространения в ней ПП, поскольку наличие случайных неоднородностей может приводить к существенному изменению условий распространения ПП по сравнению с однородной пленкой.

В настоящей работе эффекты, связанные с неоднородностью структуры, рассмотрены на примере тангенциального поверхностного плазмона [²], распространяющегося в достаточно тонкой пленке.

Рассмотрим тонкую пленку со случайно-неоднородной поверхностной проводимостью $\sigma_s(\mathbf{R}) = ie^2 N_s(\mathbf{R})/m\omega$ ($N_s = N_0 d$, где $N_0(\mathbf{R})$ — концентрация носителей в пленке толщины $d(\mathbf{R})$). Введенная таким образом про-

* Аналогичными свойствами обладает область приповерхностного пространственного заряда (ОПЗ) в полупроводниках [⁴], поэтому полученные ниже результаты применимы и в этом случае.

** В случае ОПЗ может флуктуировать плотность поверхностных уровней, а следовательно, и поверхностная плотность носителей тока.

водимость определяет локальную ($\omega/|\mathbf{k}| \gg v_T$, \mathbf{k} — волновой вектор ПП, v_T — тепловая скорость частиц в пленке) связь поверхностного тока \mathbf{j}_s с тангенциальными компонентами электрического поля \mathbf{E}_τ на поверхности пленки $z = 0$:

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{R}) = \sigma_s(\mathbf{R}) \mathbf{E}_\tau(\mathbf{R}), \quad (1)$$

где $\mathbf{j}_s(\mathbf{R}) = \int_0^d \mathbf{j}_\tau(\mathbf{R}, z) dz$, $\mathbf{R} = (x, y)$ — координаты поверхности пленки.

Рассеяние ПП на флуктуациях поверхностной проводимости приводит к перекачке энергии регулярной компоненты электрического поля в хаотическую, что проявляется в изменении дисперсионной кривой ПП и в его затухании.

Для описания высокочастотных свойств неоднородной пленки удобно ввести эффективную поверхностную проводимость $\sigma_s^{\text{эфф}}$, определяющую связь среднего поверхностного тока $\langle \mathbf{j}_s \rangle$ и среднего поля $\langle \mathbf{E}_\tau \rangle$ на поверхности пленки. В статистически однородной среде эта связь является интегральной с разностным ядром и в k -представлении имеет вид

$$\langle \mathbf{j}_s(\omega, \mathbf{k}) \rangle = \sigma_s^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k}) \langle \mathbf{E}_\tau(\omega, \mathbf{k}) \rangle. \quad (2)$$

Таким образом случайно-неоднородная пленка обладает пространственной дисперсией с характерным масштабом, равным масштабу неоднородностей.

Предполагая пленку достаточно тонкой ($kd \ll 1$), уравнение для электрического поля плазмена в квазистатическом пределе ($c \rightarrow \infty$) записывается в виде

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho_s(\mathbf{R})\delta(z)}{\varepsilon(\omega)}. \quad (3)$$

Здесь $\rho_s(\mathbf{R}) = \int_0^d \rho(\mathbf{R}, z) dz$ — поверхностная плотность заряда, $\varepsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость окружающей пленку среды, $\delta(z)$ — одномерная δ -функция. Величины поверхностных токов и зарядов связаны уравнением непрерывности:

$$\text{div}_s \mathbf{j}_s - i\omega\rho_s = 0. \quad (4)$$

Решая уравнение (3) и определяя поле на поверхности пленки, легко найдем

$$\rho_s(\mathbf{R}) = \frac{\varepsilon(\omega)}{2\pi} \int \Pi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \Phi(\mathbf{R}') d\mathbf{R}', \quad (5)$$

где ядро Π в k -представлении имеет вид $\Pi(k) = |\mathbf{k}|$, $\Phi(\mathbf{R})$ — потенциал поля ПП на поверхности пленки ($\mathbf{E}_\tau = -\nabla_s \Phi$).

Подставляя соотношения (5) и (1) в (4), получим уравнение, описывающее распространение ПП в неоднородной пленке*:

$$\text{div}_s \sigma_s \nabla_s \Phi + \frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{2\pi} \int \Pi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \Phi(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' = 0. \quad (6)$$

* Уравнение, аналогичное (6), описывает распространение низкочастотного плазменного возбуждения в тонких пленках сверхпроводников [5].

Потенциал Φ в неоднородной среде представим в виде $\Phi = \langle \Phi \rangle + \varphi$, где $\langle \Phi \rangle$ — среднее значение потенциала, φ — флуктуационное отклонение от среднего значения. Усредняя уравнение (6) по ансамблю неоднородностей поверхностной проводимости, получаем уравнение для среднего поля:

$$\Delta_s \Phi + k_0 \int \Pi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \Phi(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' = -\operatorname{div}_s \langle \alpha \nabla_s \varphi \rangle. \quad (7)$$

Вычитая уравнение из (6), получим уравнение для флуктуаций поля

$$\Delta_s \varphi + k_0 \int \Pi(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \varphi(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' = -\operatorname{div}_s \alpha \nabla_s \langle \Phi \rangle. \quad (8)$$

При выводе уравнения (8) использовалась малость флуктуаций проводимости $\sigma_s(\mathbf{R}) = \langle \sigma_s \rangle [1 + \alpha(\mathbf{R})]$ ($\langle \sigma_s \rangle = \text{const}$, $\langle \alpha \rangle = 0$, $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$), $k_0 = i\omega \epsilon(\omega) / 2\pi \langle \sigma_s \rangle$. Из уравнений (7) и (8) обычным образом (см. [6]) можно получить

$$\sigma_s^{\alpha\Phi}(\omega, \mathbf{k}) = \langle \sigma_s(\omega) \rangle [1 + \alpha^{\alpha\Phi}(\omega, \mathbf{k})], \quad (9)$$

$$\alpha^{\alpha\Phi}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\langle \alpha^2 \rangle}{4\pi^2 k^2} \int \Gamma_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{x}) G(\mathbf{x}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^2 d\mathbf{x}.$$

Здесь $G(\mathbf{k}) = 1/|\mathbf{k}|(k_0 - |\mathbf{k}|)$ — функция Грина уравнений (7) и (8) в k -представлении, $\Gamma(\mathbf{k})$ — спектр нормированной корреляционной функции флуктуаций $\alpha(\mathbf{R})$ ($B_\alpha(\mathbf{R}) = \langle \alpha^2 \rangle \Gamma_\alpha(\mathbf{R}/l$), где $B_\alpha(\mathbf{R}) = \langle \alpha(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{R}) \alpha(\boldsymbol{\rho}) \rangle$ — корреляционная функция случайной величины $\alpha(\mathbf{R})$, l — характерный размер неоднородностей).

Для изотропных флуктуаций гауссова типа $\Gamma_\alpha(\mathbf{R}) = \exp(-R^2/l^2)$ формула (9) преобразуется к виду

$$\alpha^{\alpha\Phi}(\omega, k) = \langle \alpha^2 \rangle e^{-p^2/2} [q_1(p) - q_2(p)]; \quad (10)$$

$$q_1(p) = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x^2/2}}{p-x} I_0(px) dx - i\pi p^2 e^{-p^2/2} I_0(p^2); \quad (11)$$

$$q_2(p) = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{x e^{-x^2/2}}{p-x} I_1(px) dx - i\pi e^{-p^2/2} I_1(p^2), \quad (12)$$

где $p = kl/\sqrt{2}$, I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя. В двух предельных случаях мелкомасштабных ($p \ll 1$) и крупномасштабных ($p \gg 1$) флуктуаций интегралы в (11) и (12) легко вычисляются. При этом для эффективной поверхностной проводимости получаем

$$\sigma_s^{\alpha\Phi}(\omega, k) = \langle \sigma_s(\omega) \rangle \left[1 - \frac{\langle \alpha^2 \rangle}{2} (1 + i\pi p^2) \right] (p \ll 1); \quad (13)$$

$$\sigma_s^{\alpha\Phi}(\omega, k) = \langle \sigma_s(\omega) \rangle \left[1 + \langle \alpha^2 \rangle \left(1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} p \right) \right] (p \gg 1). \quad (14)$$

Зная эффективную поверхностную проводимость, можно написать дисперсионное уравнение для ПП в случае случайно-неоднородной пленки;

$$|k| = \frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{2\pi\sigma_s^{\text{ФФ}}(\omega, k)} \quad (15)$$

Разрешая уравнение (15) относительно частоты для пленки, помещенной в диэлектрик ($\varepsilon(\omega) = \text{const}$), с учетом (13) и (14) получим

$$\omega = \omega_\tau \left[1 - \langle \alpha^2 \rangle \left(\frac{1}{4} + i \frac{\pi}{8} k^2 l^2 \right) \right] \quad (kl \ll 1); \quad (16)$$

$$\omega = \omega_\tau \left[1 + \langle \alpha^2 \rangle \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{\pi}}{4} kl \right) \right] \quad (kl \gg 1), \quad (17)$$

где $\omega_\tau = \omega_0 (kd/2)^{1/2}$ — частота тангенциального ПП в однородной тонкой пленке, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N_0/m^*$, N_0 — средняя концентрация частиц в пленке, m^* — их эффективная масса.

Из выражений (16) и (17) следует критерий возможности распространения ПП в случайно-неоднородных тонких пленках. Действительно, реальная достаточно тонкая полупроводниковая или металлическая пленка может состоять из хаотически ориентированных кристаллитов. Если размер кристаллов a ($a \sim l$) велик по сравнению с длиной волны ПП ($ka \gg 1$), то даже при малых флуктуациях толщины $\langle \alpha^2 \rangle \sim (ka)^{-1}$ из (17) следует, что декремент затухания ПП из-за рассеяния $\gamma_p \sim \langle \alpha^2 \rangle kl \sim 1$, и, следовательно, ПП сильно затухает.

Если же рифленость поверхности имеет характерный масштаб $l \ll \lambda$, то, как следует из (16), наличие слабых флуктуаций толщины приводит к уменьшению фазовой скорости ПП и его затуханию с декрементом $\gamma_p \sim k^2 l^2$.

В заключение отметим, что при переходе к постоянным ($-i\omega \rightarrow \nu$, ν — частота столкновений носителей в пленке) и однородным ($k \rightarrow 0$) полям выражение (13) совпадает со статической проводимостью неоднородной пленки, полученной в [7].

Авторы благодарны А. А. Андронову за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Stern, Phys. Rev. Lett., **18**, 546 (1967).
2. W. Steinmann, Phys. Stat. Solid, **28**, 437 (1968).
3. Ю. А. Романов, ЖЭТФ, **47**, 2119 (1964).
4. М. Накаята, J. Phys. Soc. Japan, **36**, 393 (1973).
5. И. О. Кулик, ЖЭТФ, **65**, 2016 (1973).
6. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, № 6, 827 (1959); Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 3, 356 (1970).
7. Э. М. Баскин, М. В. Энтин, ФТП, **4**, 1973 (1970).

Научно-исследовательский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
9 декабря 1974 г.

PROPAGATION OF A SURFACE PLASMON IN THIN FILMS WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

B. S. Abramovich, A. A. Ignatov

The propagation of a tangential surface plasmon in randomly-inhomogeneous thin films is considered. The spectrum and the attenuation decrement of the surface plasmon due to the mean field scattering by random film inhomogeneities are obtained the assumption of weak inhomogeneities of the surface conductivity by the perturbation method. In the case of small-scale fluctuations of the surface conductivity the scattering leads to decreasing the phase velocity of the surface plasmon and its attenuation increasing with the frequency. The presence of large-scale inhomogeneities may lead to an essential attenuation of the mean field of the plasmon even at weak fluctuations.

УДК 538.574

ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН НАД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский

В квазиоптическом приближении получено уравнение для функции взаимной когерентности при скользющем распространении волн над границей раздела в статистически неоднородной среде. Замкнутые уравнения для моментов получены с помощью метода локальных возмущений. Показано, что без существенной ошибки при решении задач такого типа можно пользоваться уравнением для функции взаимной когерентности в безграничном неоднородном пространстве, дополнив это уравнение граничными условиями.

Для плоской границы раздела и граничных условий Дирихле или Неймана сформулирована удобная для численных расчетов система интегральных уравнений Фредгольма второго рода. С ее помощью получено также приближенное аналитическое решение задач для небольших дистанций, когда флуктуационная и регулярная компоненты поля сравнимы по величине, а геометрические параметры задачи удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Из полученного решения видно, что вблизи границы раздела на высотах порядка радиуса корреляции поля происходит сложное взаимодействие падающего и отраженного полей. В случае больших высот функция взаимной когерентности такая же, как для прямой и зеркально расположенной антенны, излучающих независимые поля в безграничной неоднородной среде.

1. К настоящему времени в литературе подробно рассмотрен вопрос о распространении волн в неограниченной среде со случайными крупномасштабными неоднородностями [1]. В присутствии границ учет многократного рассеяния усложняется. В этом случае каждый элементарный акт рассеяния на неоднородностях среды сопровождается появлением отраженной от границы волны, скоррелированной с прямой рассеянной волной. Исследование средних полей для такой модели выполнено в работах [2] (случай скользющего распространения вдоль плоской границы) и [3] (случай нормального падения на плоскую границу раздела).

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение для функции взаимной когерентности при скользющем распространении волн над границей раздела в неоднородной среде. При этом могут учитываться малая кривизна границы и слоистая регулярная структура среды над границей. В качестве иллюстрации рассмотрена задача о статистически однородной среде и плоской границе раздела. Даже в этом случае точное решение получить не удастся. Сформулированы интегральные уравнения для граничных задач Дирихле и Неймана, и асимптотическими методами получено решение для трасс, на которых флуктуационная и регулярная компоненты поля сравнимы по величине.

2. Расчет проводится в приближении параболического уравнения, для применимости которого необходимо требовать узость углового

спектра падающего поля и крупномасштабность неоднородностей. Ограничиваясь для простоты двумерным случаем и рассматривая только скользящее распространение, параболическое уравнение относительно медленно изменяющейся амплитуды можно сформулировать в лучевых координатах, в которых уравнение границы имеет вид $x = 0$, а координата z выбрана вдоль направления распространения волн:

$$\frac{\partial}{\partial z} U = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, z) U. \quad (1)$$

В случае плоской границы X и Z — оси прямоугольной системы координат. В случае сферической поверхности: x — высота над поверхностью, z — координата вдоль дуги на поверхности сферы.

В общем случае, учитывая в качестве сферичности границы, так и крупномасштабные плоские или сферические слои, имеем [4]

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon_0(x) + \varepsilon_1(x, z),$$

где $\varepsilon_0(x) = \langle \varepsilon(x, z) \rangle$ (угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon(x, z)$). Будем считать, что $\varepsilon_0(x)$ медленно изменяется на расстоянии Δ , равном размеру неоднородностей, а поле $\varepsilon_1(x, z)$ однородно и изотропно:

$$\langle \varepsilon_1(x_1, z) \varepsilon_1(x_2, z) \rangle = B(|x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|).$$

Функция $U(x, z)$ удовлетворяет также начальному условию,

$$U(x, 0) = f(x),$$

и граничному условию первого, второго или третьего рода:

$$U|_{x=0} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U|_{x=0} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U|_{x=0} = -ik\beta U|_{x=0}. \quad (4)$$

3. Найдем уравнение для функции взаимной когерентности:

$$F(x_1, x_2, z) = \langle U(x_1, z) U^*(x_2, z) \rangle. \quad (5)$$

Используя (1), можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F &= \frac{i}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) F + \frac{ik}{2} [\langle \varepsilon(x_1, z) U(x_1, z) \times \\ &\times U^*(x_2, z) \rangle - \langle \varepsilon^*(x_2, z) U(x_1, z) U^*(x_2, z) \rangle]. \end{aligned} \quad (6)$$

В дальнейшем, как обычно, флуктуационная компонента ε_1 предполагается вещественной: $\varepsilon_1(x, z) = \varepsilon_1^*(x, z)$.

Для выражения статистических моментов третьего порядка, входящих в правую часть соотношения (6), через моменты низших порядков используем метод локальных возмущений [5, 6]. Как показано в [5], в случае изотропных неоднородностей в неограниченной среде функции взаимной когерентности в приближении локальных возмущений и в приближении марковского случайного процесса не отличаются друг от друга. Можно ожидать, что и при наличии границы результаты, полу-

ченные обоими методами, совпадут. Выбор метода локальных возмущений диктуется в данном случае его конструктивной простотой.

Предполагая, что возмущения на одной неоднородности малы: $\langle \varepsilon_1^2 \rangle k\Lambda \gg 1$, а на дистанции имеется много неоднородностей: $z/\Lambda \gg 1$, можно получить [6]

$$\begin{aligned} & \langle \varepsilon_1(x_1, z) U(x_1, z) U^*(x_2, z) \rangle \approx \\ & \approx \frac{ik}{2} \int_0^z d\eta \int_0^\infty d\xi \langle U(\xi, \eta) U^*(x_2, z) \rangle \langle \varepsilon_1(\xi, \eta) \times \\ & \times \varepsilon_1(x_1, z) \rangle [g(x_1, \xi, z - \eta) - g^*(x_2, \xi, z - \eta)], \end{aligned} \quad (7)$$

где $g(x, \xi, z - \eta)$ — функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} g = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g + \frac{ik}{2} \varepsilon_0(x) g + \delta(x - \xi) \delta(z - \eta) \quad (8)$$

с граничными условиями вида (2) — (4).

Отличие выражения (7) от аналогичной формулы в случае неограниченной среды заключается в том, что в рассматриваемом случае интегрирование по поперечной координате проводится по полубесконечному интервалу, а функция g есть функция Грина соответствующей граничной задачи (2) — (4), учитывающая также регулярную зависимость ε_0 от высоты над поверхностью. В случае сферической поверхности g есть решение, полученное Фоком [4]. Для плоской границы с импедансным условием (4) и при $\varepsilon_0 \equiv 0$ g — функция ослабления Вейля—Ван-дер-Поля.

Таким образом, в общем случае результат, даваемый формулой (7), существенно зависит от геометрии задачи, вида граничных условий и функции $\varepsilon_0(x)$. Существенно упрощающим обстоятельством, однако, являются локальные свойства подынтегральной функции (7). Учитывая, что при интегрировании по продольной координате корреляционная функция $\langle \varepsilon_1(\xi, \eta) \varepsilon_1(x_1, z) \rangle$ отлична от нуля в окрестности точки z размером Λ , эффективная область изменения аргумента z — в функции g , соответствующего продольной координате, также порядка Λ . Это эквивалентно малым расстояниям по дальности между положением источника, для которого рассчитана функция Грина, и наблюдателем. Последнее обстоятельство и позволяет существенно упростить соотношение (7).

Если на расстоянии порядка Λ от источника пренебречь влиянием регулярной рефракции за счет $\varepsilon_0(x)$, связанной с зависимостью ε_0 от высоты и кривизной поверхности, и считать также, что численное расстояние, соответствующее длине неоднородности, мало, функцию g можно представить в виде суммы прямой и отраженной волн [4, 7]:

$$g(x, \xi, z - \eta) = g_0(x - \xi, z - \eta) + Rg_0(x + \xi, z - \eta), \quad (9)$$

где g_0 — функция Грина, удовлетворяющая уравнению (8) с $\varepsilon_0 \equiv 0$ в неограниченной среде:

$$g_0(x - \xi, z - \eta) = \sqrt{\frac{ik}{\pi(z - \eta)}} \exp\left(\frac{ik(x - \xi)^2}{2(z - \eta)}\right), \quad (10)$$

а R — френелевский коэффициент отражения. В случае граничных условий (2) и (3) имеем $R = \pm 1$. Для граничных условий вида (4) —

$R = R(x, \xi, z - \eta)$. Подставим приближенное выражение (9) в формулу (7) и перейдем к безразмерным переменным

$$x = \Lambda x_0, \quad z = \Lambda z_0, \quad \xi = \Lambda \xi_0, \quad \eta = \Lambda \eta_0.$$

Слагаемые в подынтегральном выражении, соответствующие слагаемым функции Грина (9), пропорциональны экспонентам с большим параметром в показателе

$$\exp\left(ik\Lambda \frac{(x_0 - \xi_0)^2}{2(z_0 - \eta_0)}\right), \quad \exp\left(ik\Lambda \frac{(x_0 + \xi_0)^2}{2(z_0 - \eta_0)}\right),$$

и интегралы по поперечным переменным можно вычислить методом стационарной фазы. Из (7) и (9) следует, что стационарные точки слагаемых, соответствующих прямым волнам, попадают в интервал интегрирования и асимптотический вклад от них пропорционален $1/\sqrt{k\Lambda}$. Стационарные точки слагаемых, соответствующих отраженным волнам, не попадают в интервал интегрирования, и, вычисляя в этом случае асимптотический вклад от конца интервала, получим, как известно, величину порядка $1/k\Lambda$. Такая асимптотическая оценка слагаемых, соответствующих прямым и отраженным волнам, справедлива во всем верхнем полупространстве ($x_1, x_2 \geq 0$), за исключением узкой зоны, прилегающей к границе. При $0 \leq x_1, x_2 \leq \sqrt{\Lambda/k}$ вклады от прямых и отраженных волн становятся сравнимы. Пренебрегая влиянием зоны вблизи поверхности ввиду ее малости, по сравнению с радиусом корреляции неоднородностей Λ , получим следующий результат:

$$\langle \varepsilon_1(x_1, z) U(x_1, z) U^*(x_2, z) \rangle \approx M_0 \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{k\Lambda}}\right) \right],$$

где M_0 — значение искомого момента в неограниченной среде при $\varepsilon_0 \equiv 0$. Вычисляя аналогично момент $\langle \varepsilon_1(x_2, z) U(x_1, z) U^*(x_2, z) \rangle$ и подставляя результаты в (6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F &= \frac{i}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) F + \frac{ik}{2} [\varepsilon_0(x_1) - \varepsilon_0^*(x_2)] F - \\ &- \frac{k^2}{2} [\gamma(0) - \gamma(x_1 - x_2)] F, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\gamma(x) = \int_0^\infty B(x, s) ds.$$

Таким образом, вид дифференциального уравнения для функции взаимной когерентности F при наличии границы раздела не отличается от вида дифференциального уравнения в случае неограниченной среды. Учет границы сводится к удовлетворению соответствующих граничных условий для этой функции. Они получаются непосредственно из (2) — (4), так как отражающие свойства границы не зависят от флуктуаций показателя преломления среды. Например, умножая (2) на $U^*(x_2, z)$ и усредняя, получаем нулевое граничное условие на границе $x_1 = 0$. Аналогичная выкладка для второй границы дает

$$F|_{x_1=0} = F|_{x_2=0} = 0. \quad (12)$$

Задача сводится к решению уравнения (11) в первом квадранте плоскости X_1, X_2 с граничными условиями (12), заданными на сторонах квадранта, и начальным условием при $z = 0$.

4. При нескользющем распространении волн полученные результаты неприменимы. В этом случае значительно усложняется система лучевых координат, в которой формулируется параболическое уравнение и расширяется область вблизи границы, в которой существенно сказывается корреляция отраженной от поверхности волны с прямой волной. В частности, когда происходит нормальное падение волны на границу, согласно [3] механизм многократного рассеяния качественно изменяется.

В случае скользящего распространения волн, несмотря на неизменность дифференциального уравнения, решение задачи намного усложняется, так как наличие границы уменьшает симметрию решения. В общем случае удается только перейти к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и решать их с помощью ЭВМ. Однако важные асимптотические свойства решения можно установить, изучая интегральные операторы. Для иллюстрации рассмотрим подробней задачу со статистически однородными флуктуациями показателя преломления ($\epsilon_0 \equiv 0$) и граничными условиями Дирихле или Неймана на плоской границе раздела.

5. По постановке задачи функция взаимной когерентности $F(x_1, x_2, z)$ рассматривается в первом квадранте плоскости X_1, X_2 . Доопределим эту функцию в трех остальных квадрантах, так что из этих вспомогательных решений $\Phi(x_1, x_2, z)$ во всей плоскости X_1, X_2 можно путем простой суперпозиции получить решение граничной задачи. Будем считать, что Φ — решение уравнения (11) с четно продолженным во все квадранты оператором, т. е. функция Φ удовлетворяет уравнению

$$L_0 \Phi = -\rho [|x_1| - |x_2|] \Phi, \quad (13)$$

где

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right); \quad (14)$$

$$\rho(x) = \frac{k^2}{2} [\gamma(0) - \gamma(x)], \quad (15)$$

и для определенности начальное распределение задано в первом квадранте.

Для дальнейших вычислений удобно перейти в систему координат, повернутую на $-\pi/4$ относительно X_1, X_2 . Пусть

$$\tau_1 = x_1 - x_2, \quad \tau_2 = x_1 + x_2. \quad (16)$$

Тогда

$$L_0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2i}{k} \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}, \quad \rho [|x_1| - |x_2|] \rightarrow \rho(\tau_1, \tau_2). \quad (17)$$

Выделим из Φ регулярную компоненту Φ_r , удовлетворяющую начальному условию и уравнению

$$L_0 \Phi_r = -\frac{k^2}{2} \gamma(0) \Phi_r. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) с начальными условиями имеет вид

$$\Phi_r = e^{-z/h} \Phi_{0r}, \quad (19)$$

где $1/h = \frac{k^2}{2} \gamma(0)$, Φ_{0r} — функция взаимной когерентности для неограниченной среды в отсутствие неоднородностей ($\gamma \equiv 0$).

Если искать решение Φ в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_r, \tag{20}$$

из (13) для Φ_0 имеем уравнение

$$L_0 \Phi_0 = -\rho(\tau_1, \tau_2) \Phi_0 + \frac{k^2}{2} \gamma(\tau_1, \tau_2) \Phi_r. \tag{21}$$

6. Уравнение (21) можно точно решить только в двух случаях [1]: либо когда функция ρ зависит только от τ_1 , либо когда функция ρ зависит только от τ_2 . Поэтому целесообразно предельно приблизить решение уравнения (21) к решению таких упрощенных уравнений. Конструктивно такое приближение можно сделать, перейдя к системе уравнений.

Предварительно упростим запись уравнения (21). Разобьем для этого всю область изменения переменных τ_1, τ_2 на четыре сектора (рис. 1), соответствующие четырем квадрантам в плоскости переменных x_1, x_2 . Введем вспомогательные функции H_1, H_2 так, что H_1 равно 1 в I и III областях, нулю во II и IV, а H_2 равно 1 во II, IV и нулю в I, III областях. Тогда вместо (21) имеем

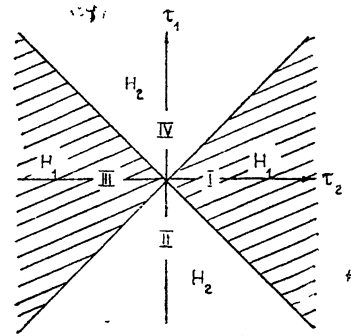


Рис. 1.

$$L_0 \Phi_0 = -[H_1 \rho(\tau_1) + H_2 \rho(\tau_2)] \Phi_0 + \frac{k^2}{2} \times \\ \times [H_1 \gamma(\tau_1) + H_2 \gamma(\tau_2)] \Phi_r. \tag{22}$$

Будем искать решение уравнения (22) в виде суммы функций:

$$\Phi_0 = \Phi_+ + \Phi_-, \tag{23}$$

предполагая, что они удовлетворяют системе уравнений

$$L_0 \Phi_- = -\rho(\tau_1) \Phi_- + H_1 [\rho(\tau_2) - \rho(\tau_1)] \Phi_+ + \frac{k^2}{2} H_1 \gamma(\tau_1) \Phi_r; \tag{24}$$

$$L_0 \Phi_+ = -\rho(\tau_2) \Phi_+ - H_2 [\rho(\tau_2) - \rho(\tau_1)] \Phi_- + \frac{k^2}{2} H_2 \gamma(\tau_2) \Phi_r, \tag{25}$$

с нулевыми начальными условиями. Уравнение (22), как легко убедиться сложением (24) и (25), является точным следствием этой системы уравнений, но система уравнений (24) и (25) — более удобный объект для изучения, чем уравнение (22), благодаря большой наглядности процессов, описываемых функциями Φ_-, Φ_+ . Так, согласно (24), функция Φ_- описывает распространение поля в поглощающей среде с коэффициентом поглощения, зависящим только от координаты τ_1 . Полоса прозрачности, в которой поле распространяется без поглощения, расположена вдоль координатной оси τ_2 , так как $\rho(\tau_1) = 0$ при $\tau_1 = 0$. Поле Φ_- возбуждается регулярным полем Φ_r и вторым «модом» Φ_+ . Не решая задачи, по аналогии с распространением поля в неограниченной флуктуирующей среде, можно утверждать, что при достаточно больших расстояниях функция будет существенно отлична от нуля лишь

в своей полосе прозрачности, т. е. ее интервал изменений по τ_2 с увеличением дистанции возрастает, а интервал изменений по τ_1 уменьшается.

7. Для асимптотического анализа системы уравнений (24) и (25) необходимо установить зоны фиктивных источников, аналогичные зонам Френеля, которые в основном определяют поля Φ_- , Φ_+ в точке наблюдения. Такое рассмотрение можно проводить, только исходя из интегральной формулировки задачи. Поэтому перейдем предварительно от дифференциальной системы уравнений (24) и (25) к интегральной системе.

Если бы в системе уравнений (24) и (25) не было перекрестных членов, учитывающих переизлучение из «мода» в «мод», для каждого из этих уравнений согласно [1] точно определялась бы функция Грина. Если обозначить эти функции через G_- , G_+ и применить к уравнению (24) интегральный оператор с G_- и интегральный оператор с G_+ к уравнению (25), получим систему интегральных уравнений

$$\Phi_- = \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{10} d\tau_{20} G_- H_1 [\rho(\tau_{20}) - \rho(\tau_{10})] \Phi_+ + \Phi_-^{(0)}; \quad (26)$$

$$\Phi_+ = \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{10} d\tau_{20} G_+ H_2 [\rho(\tau_{10}) - \rho(\tau_{20})] \Phi_- + \Phi_+^{(0)}, \quad (27)$$

где функции Грина имеют вид

$$G_- = G_0 W_-, \quad G_+ = G_0 W_+; \quad (28)$$

$$G_0 = \frac{k}{4\pi(z - \xi)} \exp\left(\frac{ik(\tau_1 - \tau_{10})(\tau_2 - \tau_{20})}{2(z - \xi)}\right); \quad (29)$$

$$W_+ = \exp\left(-\frac{z - \xi}{\tau_1 - \tau_{10}} \int_{\tau_{10}}^{\tau_1} \rho(s) ds\right), \quad (30)$$

$$W_- = \exp\left(-\frac{z - \xi}{\tau_2 - \tau_{20}} \int_{\tau_{20}}^{\tau_2} \rho(s) ds\right),$$

а $\Phi_-^{(0)}$, $\Phi_+^{(0)}$ — известные функции, которые определяются многократными интегралами от начального распределения поля $f(\tau_1, \tau_2)$:

$$\Phi_-^{(0)} = \frac{k^2}{2} \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{10} d\tau_{20} G_- H_1 \gamma(\tau_{10}) \Phi_r; \quad (31)$$

$$\Phi_+^{(0)} = \frac{k^2}{2} \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{10} d\tau_{20} G_+ H_2 \gamma(\tau_{20}) \Phi_r; \quad (32)$$

$$\Phi_r = \frac{ke^{-\xi/h}}{4\pi\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds_1 ds_2 \exp\left(\frac{ik(\tau_{10} - s_1)(\tau_{20} - s_2)}{2\xi}\right) f(s_1, s_2). \quad (33)$$

8. В общем случае систему уравнений (26) и (27) можно решать с помощью ЭВМ. Из этих уравнений удобно получать и приближенные

ршения, когда благодаря специальной геометрии задачи механизм многократного рассеяния упрощается. Рассмотрим подробнее следующую задачу:

а) расстояния до излучающей антенны не слишком велики, так что регулярная компонента поля сравнима с флуктуационной или согласно (19).

$$z \leq h = \frac{2}{k^2 \gamma(0)}; \quad (34)$$

б) линейный размер антенны a мал по сравнению с характерным размером неоднородностей Λ :

$$a/\Lambda \ll 1; \quad (35)$$

в) расстоянию h соответствует зона Фраунгофера, т. е.

$$ka^2/h \ll 1; \quad (36)$$

г) антенна поднята над границей раздела на высоту H , большую по сравнению с характерным размером неоднородностей Λ ,

$$H/\Lambda \gg 1; \quad (37)$$

д) зона Френеля, соответствующая расстояниям h , существенно больше характерных размеров неоднородностей Λ , т. е.

$$\sqrt{\frac{h}{k}} \gg \Lambda, \quad \text{или} \quad \frac{h}{k\Lambda^2} \gg 1. \quad (38)$$

Качественно специфика этой задачи видна и на уровне дифференциальных уравнений (24) и (25). Диффузия поля на расстоянии h приводит к распространению регулярной компоненты Φ_r в поперечном направлении в пределах зоны с линейными размерами, существенно большими радиуса корреляции неоднородностей Λ , а множители $\gamma(\tau_1)$ и $\gamma(\tau_2)$ отличны от нуля лишь при значениях аргументов порядка Λ . Таким образом, фиктивные источники, описываемые функциями $\gamma(\tau_1)\Phi_r$, $\gamma(\tau_2)\Phi_r$, имеют в пространстве слоистую структуру, и естественно ожидать, что, по крайней мере, основной «мод» Φ_- будет формироваться фиктивными источниками независимо от Φ_+ . Асимптотические оценки будем проводить, исходя из интегральных уравнений (26) и (27).

Упростим выражения для свободных членов уравнений (26) и (27). Учитывая, что $H_1 = 1 - H_2$, интеграл (31) можно записать в виде разности

$$\Phi_-^{(0)} = \frac{k^2}{2} \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{10} d\tau_{20} [G_- \gamma(\tau_{10}) \Phi_r - G_- H_2 \gamma(\tau_{10}) \Phi_r]. \quad (39)$$

Первый из этих интегралов можно существенно упростить, не прибегая к прямым вычислениям. Действительно, флуктуационная компонента функции когерентности в безграничной неоднородной среде удовлетворяет уравнению, которое получается из (24) заменами $\Phi_+ \equiv 0$, $H_1 \equiv 1$; поэтому она представима в виде интеграла, совпадающего с первым членом суммы (39). В то же время, согласно [1], флуктуационная компонента функции когерентности представима в виде более простых поверхностных интегралов, так что

$$\frac{k^2}{2} \int_0^z d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{10} d\tau_{20} G_{-\gamma}(\tau_{10}) \Phi_r = \frac{k}{4\pi z} \iint_{-\infty}^{+\infty} ds_1 ds_2 \times$$

$$\times f(s_1, s_2) \exp\left(\frac{ik(\tau_1 - s_1)(\tau_2 - s_2)}{2z}\right) \left[\exp\left(-\frac{z}{\tau_1 - s_1} \int_{s_1}^{\tau_1} \rho(v) dv\right) - \right. \quad (40)$$

$$\left. - \exp(-z/h) \right].$$

Второй интеграл в (39) при сделанных предположениях мал по сравнению с первым. Действительно, произведение $\gamma(\tau_{10}) H_2$ отлично от нуля лишь в области, где каждая из функций существенно отлична от нуля. Пересечение полосы шириной Λ вблизи координатной оси τ_2 с вторым и четвертым секторами (см. рис. 1) имеет вид двух площадок с характерным размером Λ вблизи начала координат, т. е. в пространстве переменных τ_1, τ_2, z при $z \sim h$ имеем области типа шнуров, прилегающие к началу координат. Подынтегральная функция Φ_r отлична от нуля лишь при достаточно больших ξ , когда диффузия поля достигает начала координат, поэтому приближенно

$$\frac{k^2}{2} \int_0^z d\xi \iint_{-\infty}^{+\infty} d\tau_{10} d\tau_{20} G_{-H_2} \gamma(\tau_{10}) \Phi_r \sim \frac{k^2}{2} \gamma(0) \times$$

$$\times \Phi_r(0, 0, h) \int_0^h d\xi \iint_{-\Lambda}^{\Lambda} d\tau_{10} d\tau_{20} G_{-} \sim \frac{\Phi_r(0, 0, h)}{h} \int_0^h d\xi \times \quad (41)$$

$$\times \iint_{-\Lambda}^{\Lambda} dx_1 dx_2 \frac{k \exp\left(\frac{ik}{2\xi_1} (x_1^2 - x_2^2)\right)}{4\pi\xi_1},$$

и, разбивая интегрирование по ξ на два интервала $[0, h_m]$ и $[h_m, h]$ так, что $\frac{k\Lambda^2}{h_m} \sim 1$, $h_m \sim k\Lambda^2$, получаем следующие оценки для каждого из этих интегралов: величина первого интеграла имеет порядок

$$\frac{\Phi_r(0, 0, h)}{h} h_m \sim \frac{k\Lambda^2}{h} \Phi_r(0, 0, h)$$

(пределы интегрирования в первом интеграле фактически определяются осцилляциями экспоненты, и поперечные пределы интегрирования можно считать бесконечными), величина второго интеграла имеет порядок

$$\frac{1}{h} \Phi_r(0, 0, h) \Lambda^2 \int_{h_m}^h d\xi \frac{k}{\pi\xi} \sim \frac{k\Lambda^2}{h} \Phi_r(0, 0, h) \ln\left(\frac{h}{h_m}\right)$$

(во втором интеграле можно пренебречь осцилляциями экспоненты), и оба они в $k\Lambda^2/h$ раз меньше интеграла (40), который имеет тот же порядок величины, что Φ_r .

Итак, величина $\Phi_{-}^{(0)}$ определяется интегралом (40). Учитывая, что размер антенны предполагается малым по сравнению с характерным размером неоднородностей, стоящую в квадратных скобках функцию можно вынести за знак интеграла, и для $\Phi_{-}^{(0)}$ получаем

$$\Phi_{-}^{(0)} = \left[\exp \left(-\frac{z}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \rho(\nu) d\nu \right) - \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \right] \Phi_{0r}. \quad (42)$$

Стоящий перед функцией Φ_{0r} множитель при $z \sim h$ является быстрым, так как он отличается от нуля лишь при $\tau_1 \sim \Lambda$, тогда как функция Φ_{0r} , согласно (38), изменяется на существенно больших расстояниях. Действительно,

$$\rho(\nu) = \frac{k^2}{2} [\gamma(0) - \gamma(\nu)]$$

и при $|\tau_1| \gg \Lambda$

$$\frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \rho(\nu) d\nu = \frac{k^2}{2} \left[\gamma(0) - \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\infty} \rho(\nu) d\nu \right] = \frac{1}{h} \left[1 + O \left(\frac{\Lambda}{|\tau_1|} \right) \right], \quad (43)$$

что приводит к уменьшению стоящего перед Φ_{0r} множителя до величины порядка $O \left(\frac{\Lambda}{|\tau_1|} \right)$. Итак, без существенной ошибки вместо (42) имеем

$$\Phi_{-}^{(0)} = \left[\exp \left(-\frac{z}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \rho(\nu) d\nu \right) - \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \right] \Phi_{0r}(0, \tau_2, z). \quad (44)$$

Свободный член второго интегрального уравнения $\Phi_{+}^{(0)}$ рассчитывается совершенно так же. Пренебрегая фиктивными источниками, расположенными в областях типа шнуров, вместо (42) получаем

$$\Phi_{+}^{(0)} = \left[\exp \left(-\frac{z}{H - \tau_2} \int_{\tau_2}^H \rho(\nu) d\nu \right) - \exp \left(-\frac{z}{h} \right) \right] \Phi_{0r}. \quad (45)$$

Но высота антенны H согласно (37) существенно больше размеров неоднородностей Λ . Поэтому, так же как в (43), вклад в интегралы от τ_2 до H -области, где функция $\rho(\nu)$ отлична от нуля, несуществен, и в рамках рассматриваемого приближения $\Phi_{+}^{(0)} = 0$.

Теперь нетрудно указать и асимптотическое решение интегральной системы уравнений (26) и (27). Оно имеет вид

$$\Phi_{-} = \Phi_{-}^{(0)}, \quad \Phi_{+} = 0. \quad (46)$$

Действительно, при $\Phi_{+} = 0$ решением уравнения (26) является функция $\Phi_{-}^{(0)}$, а подстановка значения $\Phi_{-}^{(0)}$, определяемого формулой (44), в уравнение (27) приводит к фиктивным источникам типа шнуров, так как меньший радиус корреляции у $\Phi_{-}^{(0)}$ порядка Λ , а источники такого типа, как было показано выше, создают малые поля, не контролируемые рассматриваемым приближением.

Подстановка (44) и (46) в (20) дает

$$\Phi = \exp\left(-\frac{z}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \rho(\nu) d\nu\right) \Phi_{or}(0, \tau_2, z). \quad (47)$$

Итак, в рассматриваемом приближении решение весьма сложного уравнения (13) с коэффициентом ρ , зависящим от разности $|x_1| - |x_2|$, не отличается от решения уравнения, определяющего функцию когерентности в безграничном пространстве, в котором аргументом функции ρ является разность $x_1 - x_2$. Структура функции когерентности для безграничного пространства в данном случае также весьма упрощенная: неоднородности среды сказываются только при приеме в разнесенных точках; распределение интенсивности то же, что было в однородной среде ($\Phi(0, \tau_2, z) = \Phi_{or}(0, \tau_2, z)$).

Решение краевых задач Неймана и Дирихле получается суперпозицией решений уравнения (13) так же, как в случае однородного пространства. Строим три дополнительных решения, отличающихся от (47) начальными условиями. Если решению Φ_n соответствует начальное значение $f_n(x_1, x_2)$ и

$$f_2 = f(-x_1, x_2), \quad f_3 = f(-x_1, -x_2), \quad f_4 = f(x_1, -x_2),$$

в силу симметрии (13) решение краевой задачи Неймана имеет вид

$$F = F_N = \Phi + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4,$$

а краевая задача Дирихле решается суперпозицией

$$F = F_D = \Phi - \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_4.$$

Решения Φ_n можно получить соответствующими отражениями Φ , и, учитывая (47), для функции взаимной когерентности имеем

$$F = \exp\left(-\frac{z}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} \rho(\nu) d\nu\right) [\Phi_{or}(0, \tau_2, z) + \Phi_{or}(0, -\tau_2, z)] \pm' \\ \pm \exp\left(-\frac{z}{\tau_2} \int_0^{\tau_2} \rho(\nu) d\nu\right) [\Phi_{or}(0, \tau_1, z) + \Phi_{or}(0, -\tau_1, z)], \quad (48)$$

где знак «+» соответствует задаче Неймана, а «-» — задаче Дирихле. Без существенной ошибки во второй квадратной скобке можно положить $\tau_1 = 0$, так как в реальном пространстве $|\tau_1| \leq \tau_2$ и экспоненциальный множитель является быстрой функцией.

Для интенсивности поля на высоте $\frac{1}{2} \tau_2$ имеем

$$F(0, \tau_2, z) = \Phi_{or}(0, \tau_2, z) + \Phi_{or}(0, -\tau_2, z) \pm \\ \pm 2 \exp\left(-\frac{z}{\tau_2} \int_0^{\tau_2} \rho(\nu) d\nu\right) \Phi(0, 0, z). \quad (49)$$

Влияние границы раздела, как видно из (49), сказывается двояким образом: на высотах, больших, чем радиус корреляции поля (он в данном случае совпадает с радиусом корреляции неоднородностей), для

обеих граничных задач к интенсивности прямой волны добавляется интенсивность зеркально отраженного источника, т. е. имеет место некогерентное сложение прямого и отраженного полей. На высотах порядка радиуса корреляции поля имеет место более сложный процесс рассеяния, интенсивность поля падает до нуля в случае задачи Дирихле и учетверяется по сравнению с безграничной средой в случае задачи Неймана. Эта переходная зона существенно меньше поперечных размеров области некогерентного сложения полей.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972)
- 2 Ф. Г. Басс, Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 553 (1959)
- 3 В. И. Кляцкин, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (краткие тезисы докладов), 1, 334, Москва—Ереван, 1973.
- 4 В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970.
- 5 Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, № 4, 594 (1969).
- 6 Е. В. Чаевский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 886 (1974).
- 7 Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
13 мая 1974 г.,
после доработки
5 сентября 1975 г.

MUTUAL WAVE COHERENCE FUNCTION IN SLIDING WAVE PROPAGATION ABOVE THE INTERFACE IN A STATISTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

A. A. Puzenko, E. V. Chaevskii

In the quasi-optics approximation the equation is obtained for the mutual coherence function in sliding wave propagation above the interface in a statistically inhomogeneous medium. Closed equations for the moments are obtained using the local perturbation method. It is shown that solving such type problems one may use without an essential error the equation for the mutual coherence function in the unbounded inhomogeneous space having added the boundary conditions in this equation.

The system of the integral second-order Fredholm equation convenient for numerical calculation is formulated for a plane interface and Dirichle and Neiman boundary conditions. Using it an approximate analytical solution of the problems is obtained for small distances when the fluctuation and regular field components are comparable in magnitude and the geometrical parameters of the problem satisfy some additional conditions. It is seen from the solution obtained that near the interface at the heights of the order of the field correlation radius there occurs a complex interaction between the incident and reflected fields. In the case of large heights the mutual coherence function is the same as for the straight and specularly situated antennas radiating the independent fields in a unbounded inhomogeneous medium.

УДК 621 371 25

К МЕТОДИКЕ ВЫДЕЛЕНИЯ ПАКЕТА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН, ОБЛАДАЮЩИХ МИНИМАЛЬНЫМ ДЕКРЕМЕНТОМ ЗАТУХАНИЯ, В СЛУЧАЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ КВАЗИСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Ю. К. Калинин, А. Д. Ручкин

Рассматривается один из методов приближенного решения уравнения полюсов для случая нормальных волн, возбуждаемых точечным источником, находящимся в сферической квазислоистой среде. Получены оценки частотного диапазона существования волн с минимальным декрементом затухания, для которого приводится аналитическое выражение.

Рассматриваем сосредоточенный аксиально-симметричный источник, находящийся в точке ($r = a, \vartheta = 0$) сферической системы координат. Свойства среды при $r > a$ описываются функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r, \vartheta, \varphi, \omega)$, для которой определены геометрические параметры по вертикали h_1 и h_2 ($h_1 < h_2$), такие, что функция $r^2 \varepsilon(r)$ имеет максимумы в точках $r = a + h_i$ ($i = 1, 2$). Кроме этого предполагается, что минимум функции $r^2 \varepsilon(r)$ в точке h_3 ($h_1 < h_3 < h_2$) располагается вблизи нижнего максимума ($h_3 - h_1 \ll h_2 - h_3$) для некоторой полосы ω колебаний электромагнитного поля. Принимается также, что $\varepsilon(a) = 1, |\varepsilon(r < a)| \gg 1$.

Сферическая квазислоистость выражается условием $\left| \text{grad } \varepsilon - i_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right| \ll |\text{grad } \varepsilon|$, и, кроме того,

$$\sqrt{\frac{2h_2}{a}} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \right| \ll 1, \quad \sqrt{\frac{2h_2}{a}} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right| \ll 1.$$

Далее можем предположить, что решением задачи для квазислоистой среды может служить решение для центрально-симметричной среды с ε , параметрически зависящим от координат (ϑ, φ). Поэтому вначале целесообразно рассмотреть методику выделения пакета нормальных волн, обладающих минимальным декрементом затухания, именно для случая центрально-симметричной среды. Формальное решение задач такого типа известно [1] и для соответствующим образом выбранной компоненты потенциала U выражается в виде контурного интеграла

$$U \sim \int_C \frac{P_\nu(\cos(\pi - \vartheta)) g_\nu(a, \{\varepsilon(r)\}) g_\nu(r, \{\varepsilon(r)\})}{[1 - Q(\nu, \{\varepsilon(r)\})] \sin \pi \nu} d\nu. \quad (1)$$

В формуле (1) P_ν — функция Лежандра, $g_\nu(r, \{\varepsilon(r)\})$ — радиальная функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} g_\nu(r) + \left[k_0^2 \varepsilon(r) - \frac{\nu^2}{r^2} \right] g_\nu(r) = 0, \quad (2)$$

и на участках конечной ширины, где $\varepsilon(r)$ является константой ε_c , выражающаяся через функции Ханкеля $V \sqrt{r} H_{\nu + \frac{1}{2}}^{(1,2)}(k_0 \sqrt{\varepsilon_c} r)$. Множитель $Q(\nu, \{\varepsilon(r)\})$ выражается через коэффициенты отражения T_n и T_t на некоторых выделенных границах — нижней $r_n = a$ и верхней $r_t \approx a + h_1$, а также через отношения радиальных и «бегущих» решений уравнения (2), взятых на этих границах. Не выписывая точного вида уравнения полюсов $Q = 1$ (см. [1]), приведем это равенство в ВКБ приближении

$$\int_{r_0}^{\nu_s} [k_0^2 \varepsilon(u) u^2 - \nu_s^2]^{1/2} \frac{du}{u} = \pi s + \frac{i}{2} \ln T_n + \frac{\pi}{4} \mathbf{1} \left(1 - \frac{\text{Re} \varepsilon \nu_s}{k_0^2 a^2} \right), \quad (3)$$

max $\left\{ a, \frac{\nu_s}{k_0} \right\}$

где $\mathbf{1}(x)$ — функция единичного скачка, $k_0 \sqrt{\varepsilon(r_0)} r_0 = \nu_s$. Ограничимся случаем $\text{Re} \varepsilon \gg \text{Im} \varepsilon$, а также предположим, что в интервале высот $[h_1, h_2]$ функция $\text{Im} \varepsilon$ имеет отрицательную производную по координате r . В этих предположениях наибольший интерес представляют решения ν_s уравнения (3), обладающие свойствами:

$$\frac{\partial \nu_s}{\partial k_0} - a \approx h_2, \quad k_0 \frac{\partial^2 \nu_s}{\partial k_0^2} \ll h_2 - h_1. \quad (4)$$

Можно показать, что ν_s как решения уравнения (3) при условиях (4) могут быть найдены итерационным процессом, наиболее быстро сходящимся, если в качестве нулевого приближения выбрать $(\nu_s)_0 = k_0(a + h_2) \sqrt{\varepsilon(a + h_2)}$. Действительно, выше оговорено, что при $r = a + h_2$ подкоренное выражение имеет максимум, и, следовательно, такому выбору $(\nu_s)_0$ соответствует максимальное значение параметра s , обозначенного s_m . Уравнения (3) позволяют получить следующий член итерационного ряда, что приводит к

$$\nu_s \approx (\nu_s)_0 + \sqrt{\frac{a}{2h_2}} \pi \frac{s}{s_m}. \quad (5)$$

Величина s_m в рамках сделанных предположений может быть рассчитана для любой функции $\varepsilon(r)$. В ряде случаев $\varepsilon(r)$ удобно представить как кусочно постоянную функцию. Тогда формула (5) может быть представлена как итерационное решение соответствующего алгебраического уравнения, к которому сводится в ВКБ приближении уравнение полюсов (3):

$$\nu_s = (\nu_s)_0 - (\nu_s)_0^{1/3} F((\nu_s)_0, h_1, h_2), \quad (6)$$

где $F((\nu_s)_0, h_1, h_2)$ — медленно изменяющаяся функция, выражающаяся через элементарные функции от своих аргументов.

Непосредственное исследование решения (6) для $\varepsilon(h_i)$, представляемого в виде $\varepsilon(h_i) = 1 - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2}$, показывает, что оно удовлетворяет условиям (4), по крайней мере, в диапазоне колебаний электромагнитных волн:

$$\omega_{c1} \sqrt{\frac{a}{2h_1}} < \omega < \omega_{c2} \sqrt{\frac{a}{2h_2}}. \quad (7)$$

При этом декремент затухания $\text{Im} \nu_s$ выражается формулой

$$\operatorname{Im} \nu_s = \frac{10^{-2}}{\sqrt{1 - \omega_{c2}^2/\omega^2}} \omega \operatorname{Im} \varepsilon(a + h_2). \quad (8)$$

Отметим, что формулы (5) и (8) в окрестности правой части неравенства (7) приводят к значениям $\operatorname{Re} \nu \approx 1,04 ka$, $\operatorname{Im} \nu = 0,5 \pm \pm 0,05 \text{ дБ/рад}$ для характерных профилей $\operatorname{Re} \varepsilon(r)$ и $\operatorname{Im} \varepsilon(r)$.

Приведенные формулы в своей совокупности дают решение поставленной задачи выделения пакета волн, обладающих минимальным декрементом затухания. Однако при этом весьма существенно, как расположены на плоскости ν выделенные полюсы ν_s . Представление об этом дает рис. 1, где показано, как первоначальный контур интегрирования C (в формуле (1)) деформируется для нахождения дискретного спектра решений уравнения (2) (точки ветвления и разрезы, порождающие непрерывную часть спектра на рис. 1, не показаны как несущественные для проводимого рассмотрения). При этом (в соответствии с терминологией [1]), определяется контур C_A , охватывающий полюсы ($\operatorname{Re} \nu < ka$), сохраняющиеся при предельном переходе $a \rightarrow \infty$. Контур C_B определяет нормальные волны в канале $a \leq r \leq a + h_2$ ($k_0 a < \operatorname{Re} \nu < k_0(a + h_2)$). Контур C_D определяет пакеты волн, если они существуют, в области $a + h_2 < r$. Контур C_G — определяющий быстро затухающие пакеты волн в области $a \leq r$, $\vartheta \ll 1$. Именно B -полюсы представляют собой решение поставленной задачи в случае центрально-симметричной среды.

Определим теперь правила использования полученных формул, когда $\varepsilon(r)$ становится в рамках сделанных предположений параметрической функцией ϑ и φ . Прежде всего ограничимся случаем, когда $\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} \right| \gg \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right|$, что позволяет фактически рассматривать зависимость только от ϑ . Наиболее существенными становятся зависимости $\omega_{c1}(\vartheta)$ и $\omega_{c2}(\vartheta)$, входящие в формулы (7) и (8), из которых следует, что интервал частот колебаний электромагнитных волн, для которых существуют B -полюсы, становится функцией ϑ . При этом возможно наличие интервала углов $[\vartheta_1, \vartheta_2]$, внутри которого B -полюсы отсутствуют, поскольку на краях этого интервала правые и левые частоты неравенства (7) равны друг другу. При этом будет происходить трансформация B -волн в A -волны, что приведет к локальному увеличению декремента затухания. К таким же ограничениям приводит соотношение (8), определяющее ϑ_3 , для которых $\omega = \omega_{c2}(\vartheta_3)$. На таких границах также будут прекращать свое существование B -волны.

Зависимость ε от φ для отмеченных выше явлений не столь существенна, однако именно она может привести к повороту фазового фронта на угол α . Этот угол может быть приближенно определен из формулы

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{1}{k_0 a} \int \frac{\partial (\nu_s)_0}{\partial \varphi} d\vartheta \quad (9)$$

по аналогии с тем, как это сделано в [2] для случая G -волн, определяемых полюсами, находящимися внутри контура C_G .

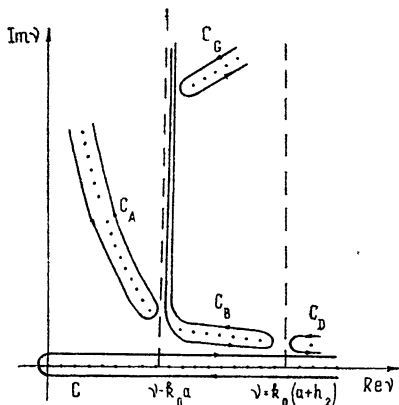


Рис. 1.

Перечисленными соотношениями определяется большая часть простейших явлений, связанных с выделением пакета нормальных волн в случае сосредоточенного источника, находящегося в сферически квазислоистой среде. По-видимому, предметом отдельного рассмотрения должен быть случай $\vartheta \approx n\pi$, а также случай наличия у функции $r^2 \varepsilon(r)$ большего числа экстремумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bremmer, *Terrestrial Radio Waves*, Elsevier Publ., Amsterdam., 1949.
2. Е. Л. Фейнберг, *Распространение радиоволн вдоль земной поверхности*, изд. АН СССР, М., 1961.

Поступила в редакцию
26 декабря 1974 г.

ON THE METHOD OF SEPARATION OF A PACKET OF NORMAL WAVES
POSSESSING A MINIMUM DAMPING INCREMENT IN THE CASE OF A POINT
SOURCE BEING IN A SPHERICAL QUASI-STRATIFIED MEDIUM

Yu. K. Kalinin, A. D. Ruchkin

We consider one of the methods of the approximate solution of the equation of poles for the case of normal waves excited by a point source being in a spherical quasi-stratified medium. The frequency range of existence of waves with minimum attenuation decrement for which the analytical expression is given is estimated.

УДК 538.571 72

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ПОЛЯ, ОТРАЖЕННОГО ОТ СФЕРЫ ИЛИ ЦИЛИНДРА С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ РАДИУСАМИ

В. А. Класс, В. Н. Красильников

На основании развитого ранее авторами математического аппарата строится коротковолновая асимптотика электромагнитного поля, отраженного от поверхности импедансной сферы или цилиндра с изменяющимся во времени радиусом. На скорость движения поверхности жестких ограничений не накладывается. В частности, рассмотрены релятивистские режимы, когда движение идет со скоростью, близкой к скорости света. При этом на расширяющемся теле область тени сжимается к теневому полюсу, а на схлопывающемся—к полюсу освещенному. Фазовые закономерности находятся в соответствии с двойным эффектом Доплера, а амплитудные подтверждают высказанный ранее эвристический принцип «кажущегося положения» границы раздела.

Настоящая статья завершает исследования, начатые в работах [1] и [2]. Развитый в них математический аппарат будет использован для построения коротковолновой асимптотики электромагнитного поля, отраженного от поверхности импедансной сферы с изменяющимся во времени радиусом $a(t)$. При этом, в отличие от работы [3], не накладывается жестких ограничений на относительную скорость движения поверхности β —она не мала и не постоянна. Сходные результаты имеют место и для цилиндра, итоговые формулы будут указаны.

1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОТРАЖЕННОГО ПОЛЯ В ЗОНЕ ФРАУНГФЕРА

Потенциалы Дебая u и v для дифрагированного поля, возникающего при взаимодействии плоской электромагнитной волны со сферой переменного радиуса, ищутся, согласно [4], в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, t) P_n^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi, \quad (1)$$

$$v(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, t) P_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi.$$

Сходство этих рядов дает возможность остановиться на расчете только первого из них, который, учитывая результаты, полученные в [5] и [1], можно записать

$$u = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1/2}{n(n+1)} (-c)^{n+2} L_n D_t^{-(n+2)} \times$$

$$\times \{ \Phi_n^{(1)}(\tau) - \Phi_n^{(2)}(\tau) \} P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

Напомним, что асимптотические представления для функций $\Phi_n^{(i)}(\tau)$ получены в [2] при значении аргумента $\tau = t_a + \frac{a(t_a)}{c} (\xi_v + \eta_v)$ в момент времени t_a , который мы условились называть моментом взаимодействия с границей раздела рассматриваемой фазы волны с фиксированным номером n . В пространство $r > a(t_a)$ эти функции продолжают по характеристике

$$\tau = t - r/c = t_a + [a(t_a)/c](\xi_v + \eta_v). \quad (3)$$

Поскольку разность $\Phi_n^{(1)}(\tau) - \Phi_n^{(2)}(\tau)$ убывает при $n \gg p_0 = \frac{\omega_0 a}{c}$ быстрее, чем экспоненциально, то в ряду (1) существенны лишь слагаемые с номерами n , не большими p_0 .

Если выбрать точку наблюдения (r, θ, φ) достаточно далеко от сферы, то во всех существенных членах ряда можно использовать оператор L_n [1] в виде

$$L_n \approx \frac{1}{r^n} \frac{\partial^n}{\partial r^n}. \quad (4)$$

Порядок возникающей при этом погрешности равен $n^2 \frac{c}{\omega_v r}$, т. е. приближение (4) пригодно при

$$r \gg \frac{a^2 \omega_0^2}{c \omega_v}. \quad (5)$$

Неравенство (5) определяет зону Фраунгофера; напомним, что ω_0 — частота падающего поля, а ω_v — доплеровская частота, равная при $n = p_0$ $\omega_v = \omega_0 \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}$.

Электромагнитное поле в зоне Фраунгофера практически поперечно, и его компоненты связаны с потенциалами Дебая u и v , упрощенными формулами:

$$\begin{aligned} E_\theta \approx H_\varphi &\approx \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi}, \\ E_\varphi \approx -H_\theta &\approx \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Входящая в (6) производная от потенциала Дебая $\frac{\partial u}{\partial r} = c \cos \varphi D_t^{-1} \frac{\partial J}{\partial \theta}$ (аналогично и для v) выражается через сумму

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1/2}{n(n+1)} \{ \Phi_n^{(1)}(\tau) - \Phi_n^{(2)}(\tau) \} P_n(\cos \theta), \quad (7)$$

в которую добавлен член с $n = 0$, не дающий вклада в потенциалы и поля.

В задаче дифракции на цилиндре упрощение интегрального оператора $\hat{L}_m^{(2)}$ во фраунгоферовой зоне, подобное указанному в (4) для оператора L_n , происходит при учете асимптотических свойств гамма-функций и явного вида перевальных точек.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВАТСОНА

Применение к ряду (7) известного в теории дифракции преобразования Ватсона [6] приводит к следующему результату:

$$J = \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{\lambda + 1/2}{\lambda(\lambda + 1)} \{ \Phi_{\lambda}^{(1)}(\tau) - \Phi_{\lambda}^{(2)}(\tau) \} \frac{P_{\lambda}(-\cos \theta)}{\sin \lambda \pi} d\lambda, \quad (8)$$

где контур Γ охватывает нули функции $\sin \lambda \pi$, расположенные на полуоси $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Используем формулы [7], связывающие $P_{\lambda}(x)$ с функциями Лежандра первого — $Q_{\lambda}^{(1)}(x)$ и второго — $Q_{\lambda}^{(2)}(x)$ рода,

$$P_{\lambda}(-\cos \theta) = e^{\pm i\lambda\pi} P_{\lambda}(\cos \theta) \pm 2i \sin \lambda \pi Q_{\lambda}^{(2)}(\cos \theta),$$

с верхним знаком на части Γ_+ контура интегрирования, лежащей выше вещественной оси, и с нижним знаком — на нижней (Γ_-) части контура Γ . Тогда интеграл (8) разбивается на сумму $J_1 + J_2$, где

$$J_1 = \frac{i}{2} \int_{\Gamma_-} \frac{(\lambda + 1/2) P_{\lambda}(\cos \theta)}{\lambda(\lambda + 1) \sin \lambda \pi} e^{-i\lambda\pi} \{ \Phi_{\lambda}^{(1)} - \Phi_{\lambda}^{(2)} \} d\lambda + \quad (9)$$

$$+ \frac{i}{2} \int_{\Gamma_+} \frac{(\lambda + 1/2) P_{\lambda}(\cos \theta)}{\lambda(\lambda + 1) \sin \lambda \pi} e^{i\lambda\pi} \{ \Phi_{\lambda}^{(1)} - \Phi_{\lambda}^{(2)} \} d\lambda;$$

$$J_2 = - \int_{\Gamma_-} \frac{\lambda + 1/2}{\lambda(\lambda + 1)} Q_{\lambda}^{(1)}(\cos \theta) \{ \Phi_{\lambda}^{(1)} - \Phi_{\lambda}^{(2)} \} d\lambda + \quad (10)$$

$$+ \int_{\Gamma_+} \frac{\lambda + 1/2}{\lambda(\lambda + 1)} Q_{\lambda}^{(2)}(\cos \theta) \{ \Phi_{\lambda}^{(1)} - \Phi_{\lambda}^{(2)} \} d\lambda.$$

Существенно, что подынтегральное выражение в формуле (10) не имеет полюсов на вещественной оси при $\lambda > 0$.

Отметим наиболее важные детали поведения функций $\Phi_{\lambda}^{(i)}(\tau) = S_{\lambda}^{(i)}(\tau) e^{\sigma_{\lambda}(\tau)}$ в правой полуплоскости λ .

1) Вблизи вещественной оси не имеется иных полюсов у функции $S_{\lambda}^{(i)}$, кроме расположенных в области $\lambda \approx p_v$ и связанных с дифракционными лучами Келлера. Положение этих полюсов можно найти, используя выражение $S_{\lambda}^{(i)}$ через функции Эйри W_1 [2]:

$$\frac{dW_1(z)}{dz} - \omega \left(\frac{p_v}{2} \right)^{1/3} W_1(z) = 0, \quad (11)$$

где ω — импеданс и вспомогательная переменная $z = (\lambda - p_v) \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{1/3}$.

Корни уравнения (11) располагаются около линии, выходящей из точки $\lambda = p_v$, под углом $\pi/3$ к вещественной оси; причем, даже для ближайших к оси полюсов $\operatorname{Im} \lambda_s \sim O\{p_v^{1/3}\}$.

2) В случае расширяющейся сферы у функции $\Phi_{\lambda}^{(2)}$ имеется двоякая точка ветвления второго порядка

$$\lambda_{кр} + 1 = p_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (12)$$

из которой выходят разрезы, уходящие на бесконечность (рис. 1). Для сжимающейся сферы ветвление испытывает функция $\Phi_\lambda^{(i)}$.

3) Поведение функций $\Phi_\lambda^{(i)}$ при $\lambda \rightarrow \infty$ определяется поведением $\exp(\varphi_\lambda)$. При этом всюду (за исключением мнимой оси) функции $\Phi_\lambda^{(i)}$ неограниченно растут, а их разность убывает быстрее, чем экспоненциально.

В освещенной области легко оценить вклад интеграла J_1 в дифрагированное поле. Используя убывание подынтегральной функции на бесконечности в правой полуплоскости, λ , можно свести интегрирование по контурам Γ_+ и Γ_- к интегралам по берегам разрезов, выходящих из точки $\lambda_{кр}$, интегралу по контурам $(-1/2, -1/2 \pm i\infty)$ и интегралу, охватывающему полюсы подынтегральной функции, вклад от которого в поле экспоненциально мал (рис. 1). В окрестности вещественной оси по мере отхода от нее, благодаря сомножителю $e^{\pm i\lambda\pi}(\sin \lambda\pi)^{-1}$, наблюдается экспоненциальное убывание подынтегральных функций, поэтому все слагаемые в (9) могут быть вычислены методом наискорейшего спуска и дают вклад в поле порядка $F_1(\lambda_1)\Delta\lambda_1$, где $F_1(\lambda_1)$ — значение медленно меняющейся функции в существенной для интегрирования области (вблизи точек $\lambda = -1/2$, $\lambda = \lambda_{кр}$), а $\Delta\lambda_1$ — размер последней. Для интеграла (9) — $\Delta\lambda_1 \sim O\{1\}$; для интеграла же (10) — $\Delta\lambda_2 \gg O(p_0^{1/3})$, а соответствующее значение медленно меняющейся функции удовлетворяет неравенству $|F_2(\lambda_2)| \gg |F_1(\lambda_1)|$. Поэтому с принятой степенью точности можно не считаться с вкладом в отраженное поле от слагаемого J_1 .

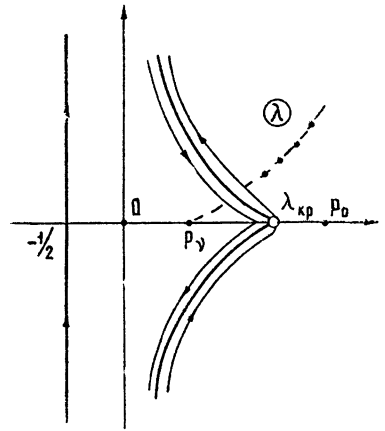


Рис. 1.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА J_2

В освещенной области главная часть отраженного поля связана с интегралом (10). Перейдем в последнем к новой переменной интегрирования $\mu = \lambda + 1/2$ и используем асимптотики функций Лежандра $Q_\lambda^{(i)}$ [7]:

$$J_2 = \int_{\Gamma_+} \frac{\mu}{\mu^2 - 1/4} \{\Phi_\mu^{(1)} - \Phi_\mu^{(2)}\} g_\mu(\cos \theta) e^{i\mu\theta - i\pi/4} d\mu - \int_{\Gamma_-} \frac{\mu}{\mu^2 - 1/4} \{\Phi_\mu^{(1)} - \Phi_\mu^{(2)}\} g_\mu(\cos \theta) e^{-i\mu\theta + i\pi/4} d\mu, \tag{13}$$

где $g_\mu(\cos \theta) = [2\pi\mu \sin \theta]^{-1/2} \{1 + O(1/\mu)\}$, а явный вид функции $\Phi_\mu^{(i)}$ таков [2]:

$$\Phi_\mu^{(i)}(\tau) = S_\mu^{(i)}(\tau) \exp\left(-i \int_a^\tau \omega_\nu(x) dx\right),$$

$$S_\mu^{(i)}(\tau) = - \frac{\omega_0 A_0^{(i)}(\xi_0 + \eta_0 - \omega)}{\omega_\nu A_\nu^{(i)}(\xi_\nu + \eta_\nu - \omega)} \{1 + O(p_\nu^{-1/3})\}, \tag{14}$$

$$-i \int_a^{\tau} \omega_\nu(x) dx = -i \omega_0 \left[t_a + \frac{a(t_a)}{c} (\xi_0 + \eta_0) \right] + (\mu + 1/2) \ln \frac{\xi_\nu}{\xi_0}.$$

Функции $\Phi_\mu^{(1)}$ и $\Phi_\mu^{(2)}$ стремятся друг к другу при $\mu \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg \mu| < \pi/2$, что даст возможность построить единую функцию $\Phi_\mu(\tau)$, заданную на двулистной римановой поверхности $\Phi_\mu = \frac{1}{2} \{ \Phi_\mu^{(1)} + \Phi_\mu^{(2)} \pm \sqrt{(\Phi_\mu^{(1)} - \Phi_\mu^{(2)})^2}$; причем на первом листе она равна $\Phi_\mu^{(1)}$, а на втором — $\Phi_\mu^{(2)}$. Точка $\mu = \infty$ является двоякой точкой ветвления или точкой аналитической связи $\Phi_\mu^{(1)}$ и $\Phi_\mu^{(2)}$, ибо в ней эти функции равны. Аналогичным образом строится ветвящаяся функция $\varepsilon(\mu) = \text{sgn}(\text{Im } \mu) \mu \exp \left[\text{sgn}(\text{Im } \mu) \left(i \mu \theta - i \frac{\pi}{4} \right) \right]$, имеющая точку аналитической связи $\mu = 0$ и разрезы, идущие вдоль вещественной оси. С учетом этих обозначений (13) запишется

$$J_2 = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{\varepsilon(\mu)}{\mu^2 - 1/4} \Phi_\mu(\tau) g_\mu(\cos \theta) d\mu. \quad (15)$$

Контур интегрирования $\gamma_1 + \gamma_2$ указан на рис. 2; пунктиром обозначена его часть, расположенная на нижнем листе, где при $\beta > 0$ у $\Phi_\mu(\tau)$ есть точка ветвления $\mu_{\text{кр}} = \lambda_{\text{кр}} + 1/2$. Разность $\Phi_\mu^{(1)} - \Phi_\mu^{(2)}$ получается при интегрировании единой функции Φ_μ за счет противоположного обхода контуров на разных листах римановой поверхности.

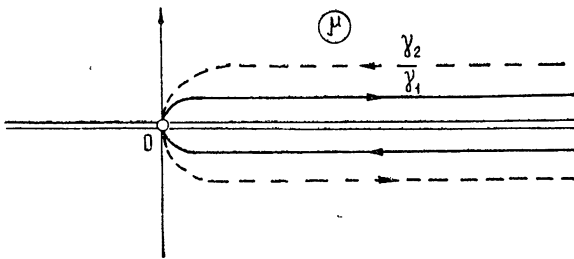


Рис. 2.

Применим метод седловой точки к интегралу (15), быстро меняющаяся фаза которого с учетом связи $\xi_0 = \exp(i\psi_0)$ и $\xi_\nu = \exp[i(\pi - \psi_\mu)]$ седловых точек с углами ψ_0 и ψ_μ равна [2]

$$\varphi_\mu(\tau) = -i \omega_0 \left[t_a + \frac{a(t_a)}{c} \cos \psi_0 \right] + i \mu (\pi - \psi_\mu - \psi_0) + i \mu \theta \text{sgn} \{ \text{Im } \mu \}, \quad (16)$$

член $\exp \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_\mu}{\xi_0} \right)$ отнесен к медленно меняющейся амплитуде.

При вещественных значениях μ угол ψ_0 имеет смысл угла падения, ψ_μ — угла отражения отдельной сферической волны. Уравнение характеристики (3) показывает, что фиксация времени и места наблюдения $\left(\tau = t - \frac{r}{c} = \text{const} \right)$ не означает однозначного выбора момента взаимодействия $t_a = t_a(\tau, \mu)$. Поэтому производные по μ следует вычислять по формуле

$$\left(\frac{d}{d\mu}\right)_\tau = \frac{\partial}{\partial\mu} + \left(\frac{\partial t_a}{\partial\mu}\right)_\tau \frac{\partial}{\partial t_a}. \quad (17)$$

Дифференцируя выражение (3), получим

$$\omega_0 \left(\frac{\partial t_a}{\partial\mu}\right)_\tau = -\rho_0 \frac{d\psi_\mu}{d\mu} \frac{\sin\psi_0}{1+\beta\cos\psi_0}. \quad (18)$$

Первая производная фазовой функции (16)

$$\begin{aligned} \varphi'_\mu = & -\omega_0 \frac{\partial t_a}{\partial\mu} (1 + \beta \cos \psi_0) + i\rho_0 \sin \psi_0 \psi'_0 + i[\pi - \psi_\mu - \psi_0 + \\ & + \theta \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \mu)] - i\mu(\psi'_\mu + \psi'_0) \end{aligned}$$

с учетом (18) и соотношения $\mu = \rho_0 \sin \psi_0$ запишется так:

$$\varphi'_\mu = i[\pi - \psi_\mu - \psi_0 + \theta \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \mu)]. \quad (19)$$

Анализ уравнения $\varphi'_\mu = 0$ показывает, что единственная седловая точка μ_0 находится при $\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \mu) = -1$, причем ее положение определяется углом падения

$$\psi_\mu(\mu_0) + \psi_0(\mu_0) = \pi - \theta, \quad (20)$$

что соответствует лучевым представлениям для зоны Фраунгофера (рис. 5). Динамика движения седловой точки описывается законом отражения [2]

$$\frac{\sin \psi_0}{1+\beta \cos \psi_0} = \frac{\sin \psi_\mu}{1-\beta \cos \psi_\mu}. \quad (21)$$

Например, для расширяющейся сферы ($\beta > 0$) при изменении θ от π до $\pi/2 + \arcsin \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$ седловая точка μ_0 находится на первом листе римановой поверхности функции Φ_μ и движется по нижней части контура γ_1 от точки $\mu = 0$ к точке $\mu = \rho_0$. Если θ убывает от $\pi/2 + \arcsin \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$ до 0, то седловая точка движется по второму листу от точки ρ_0 к точке ветвления $\mu = \mu_{кр}$ функции $\Phi_\mu^{(2)}(\tau)$. Возрастание угла падения от $\pi/2$ до $\pi - \arcsin \sqrt{1-\beta^2}$ связано с тем, что граница догоняет уходящую от нее падающую волну.

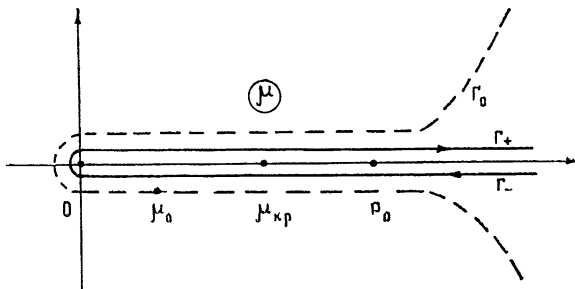


Рис. 3.

Для асимптотических расчетов на плоскости μ удобнее использовать контур наибоыстрейших осцилляций Γ_0 : $\text{Re } \varphi(\mu) = \text{Re } \varphi(\mu_0)$. Контур Γ_0 на участке $0 < \mu < \rho_0$ проходит по берегам разреза, идущего вдоль вещественной оси; затем он удаляется от нее и на бесконечности стремится стать параллельным мнимой оси (рис. 3, пунктир). Такой контур на бесконечности переходит с одного листа римановой поверхности функции $\Phi_\mu(\tau)$ на другой подобно исходному контуру $(\gamma_1 + \gamma_2)$. Очевидно, что Γ_0 и $(\gamma_1 + \gamma_2)$ могут быть совмещены. При вычислении второй производной от фазы $\varphi_\mu''(\tau) = -i(\psi'_0 + \psi'_\mu)$ дифференцирование по μ следует также осуществлять по формуле (17). Связь производных ψ'_μ и ψ'_0 находится из закона отражения: (21)

$$\frac{d\psi_\mu}{d\mu} = \frac{\sin \psi_\mu}{\sin \psi_0} \frac{d\psi_0}{d\mu} - \frac{\partial \beta}{\partial t_a} \frac{\sin \theta}{\cos \psi_0 + \beta} \left(\frac{\partial t_a}{\partial \mu} \right), \quad (22)$$

где использовано (20) и учтено, что β явно не зависит от μ . Из выражения $\mu_0 = \rho_0 \sin \psi_0$ найдем

$$\frac{d\psi_0}{d\mu} = \frac{1}{\rho_0 \cos \psi_0} \left(1 - \beta \omega_0 \sin \psi_0 \frac{\partial t_a}{\partial \mu} \right), \quad (23)$$

и, решая совместно (18), (22) и (23), получим

$$\begin{aligned} (\psi'_0 + \psi'_\mu)_{\rho_0} = & \left[(\sin \psi_0 + \sin \psi_\mu)(1 + \beta \cos \psi_0) - \frac{a}{c} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t_a} \right) \sin^2 \psi_0 \times \right. \\ & \times \left. \frac{\sin \theta}{\beta + \cos \psi_0} \right] \left\{ \rho_0 \sin \psi_0 \left[\cos \psi_0 + \beta \cos^2 \psi_0 - \beta \sin \psi_0 \sin \psi_\mu - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{a}{c} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t_a} \right) \frac{\sin \psi_\mu \sin \psi_0 \cos \psi_0}{1 - \beta^2} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Это выражение дает возможность оценить размер области ε , существенной при интегрировании в окрестности седловой точки: $\varepsilon \sim O\{[\varphi_\mu'']^{-1/2}\}$. В силу (24) $\varepsilon \sim O\{\rho_0^{1/2} |\cos \psi_0|^{1/2}\}$, что оправдывает сделанные в разд. 2 оценки.

Выпишем теперь главный член коротковолновой асимптотики для интеграла J_2 :

$$J_2 \approx - \frac{S_{\mu_0}(\tau)}{\mu_0 \sqrt{\mu_0 \sin \theta}} \sqrt{\frac{\xi_\mu}{\xi_0}} \exp[\varphi_{\mu_0}(\tau)] \{ \psi'_0 + \psi'_\mu \}_{\rho_0}^{-1/2}, \quad (25)$$

где в выражении для фазы

$$\varphi_\mu(\tau) = -i\omega_0 \left\{ t_a + \frac{a(t_a)}{c} \cos \psi_0 \right\} + i\mu(\pi - \psi_\mu - \psi_0) - i\mu\theta$$

два последних слагаемых взаимно уничтожаются в седловой точке $\mu = \mu_0$ в силу (20). Множитель $S_\mu(\tau)$ дается формулой (14) и при учете зависимости ξ_0 и ξ_μ от углов ψ_0 и ψ_μ представляется

$$S_\mu(\tau) = R_u \left(\frac{\xi_0}{\xi_\mu} \right)^{1/2} \left(\frac{\cos \psi_\mu}{\cos \psi_0} \right)^{1/2} \frac{\sin \psi_0}{\sin \psi_\mu} \left[1 + \left(\frac{a}{c} \right)^2 \frac{\sin \psi_\mu}{\mu} \text{tg } \psi_\mu \left(\frac{\partial \omega_\nu}{\partial \tau} \right)_\mu \right]^{1/2}.$$

Здесь через R_u обозначен коэффициент отражения Френеля для волн рассматриваемой (TM) поляризации,

$$R_{\mu} = - \frac{\cos \psi_0 - \omega}{\cos \psi_{\mu} + \omega}.$$

Производная $\left(\frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \tau}\right)_{\mu}$, входящая в выражение для S_{μ} , может быть найдена так:

$$\left(\frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \tau}\right)_{\mu} = \left(\frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial t_a}\right)_{\mu} \left(\frac{\partial t_a}{\partial \tau}\right)_{\mu},$$

причем $\left(\frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial t_a}\right)_{\mu}$ находится из закона для отраженной частоты [2]

$$\omega_{\nu} = \omega_0 \frac{1 + \beta \cos \psi_0}{1 - \beta \cos \psi_{\mu}} = \omega_0 \frac{1 + 2\beta \cos \psi_0 + \beta^2}{1 - \beta^2} \quad (26)$$

и равна

$$\left(\frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial t_a}\right)_{\mu} = \frac{2\omega_0 \sin \psi_0}{1 - \beta^2} \left(\frac{c}{a} \beta^2 \operatorname{tg} \psi_0 + \frac{\partial \beta}{\partial t_a} \operatorname{ctg} \psi_{\mu}\right), \quad (27)$$

а производная $\left(\frac{\partial \tau}{\partial t_a}\right)_{\mu}$ — путем дифференцирования уравнения характеристики (3):

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial t_a}\right)_{\mu} = 1 - \beta \cos \psi_{\mu} - \beta \frac{\sin^2 \psi_{\mu}}{\cos \psi_0} - 2 \frac{a}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t_a} \frac{\sin^2 \psi_{\mu}}{1 - \beta^2}. \quad (28)$$

Укажем на области неприменимости асимптотической формулы (25):

1) область $|\mu_0| < p_0^{1/3}$ малых значений μ_0 и малых углов падения $|\sin \psi_0| < p_0^{-2/3}$, где несправедливы приближенные решения интегродифференциальных уравнений [2];

2) область $|p_0 - \mu_0| < p_0^{1/3}$ углов падения, близких к скользящим $|\cos \psi_0| < p_0^{-1/3}$, когда следует использовать в асимптотике функции Эйри;

3) если μ_0 близка к точке ветвления $\mu_{кр} = p_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, которая определяет положение линии тени, проходящей по поверхности сферы переменного радиуса (рис. 5) при

$$\cos \theta_{кр} = -\beta. \quad (29)$$

При медленных движениях, когда $|\beta p_0^{1/3}| \ll 1$, второе и третье ограничения фактически совпадают. Резкое различие между ними имеет место в ультрарелятивистском случае, когда $\beta \rightarrow 1$ и допустимы углы падения ψ_0 , большие $\pi/2$. Геометрическое пояснение к этому случаю дает рис. 4. Подчеркнем, что принципиальная неприменимость асимптотической формулы имеет место только в конусе тени, возникновение других областей неприменимости связано с несовершенством асимптотического расчета.

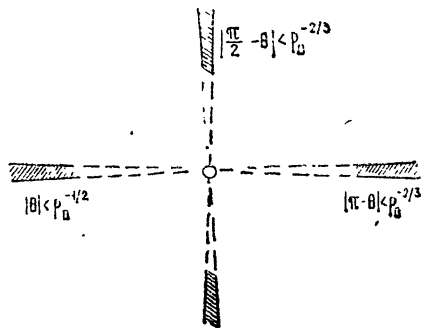


Рис. 4.

4. СТРУКТУРА ОТРАЖЕННОГО ПОЛЯ В ОСВЕЩЕННОЙ ОБЛАСТИ

Выпишем главные члены асимптотики отраженного поля (6) в освещенной области зоны Фраунгофера, учтя вклад и от второго потенциала Дебая v :

$$E_{\theta} \approx H_{\varphi} \approx \frac{\cos \varphi}{r} \frac{c}{i \omega_0} \mu_0^2 J_2(\tau \omega),$$

$$E_{\varphi} \approx -H_{\theta} \approx \frac{\sin \varphi}{r} \frac{c}{i \omega_0} \mu_0^2 J_2\left(\frac{1}{\tau \omega}\right). \quad (30)$$

Компоненты поля несущественно отличаются друг от друга, и достаточно рассмотреть одну из них, например E_{θ} :

$$E_{\theta} \approx -\frac{\cos \varphi}{r} \frac{c}{i \omega_0} \left(\frac{\rho_0 \sin \psi_0 \cos \psi_{\mu}}{\sin \theta \cos \psi_0} \right)_{\mu_0}^{1/2} \left(\frac{d \psi_{\mu}}{d \mu} + \frac{d \psi_0}{d \mu} \right)_{\mu_0}^{-1/2} \times$$

$$\times \left[1 + \left(\frac{a}{c} \right)^2 \frac{\sin^2 \psi_{\mu}}{\mu_0} \operatorname{tg} \psi_{\mu} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \tau} \right)_{\mu_0} \right]^{1/2} R_{\mu} \exp(\varphi_{\mu_0}(\tau)).$$

В последней формуле естественно перейти от угла ψ_{μ} к величинам, характеризующим падающую волну. Это громоздкое преобразование можно проделать, пользуясь формулами (24), (27), (28) и равенствами, вытекающими из закона отражения (21) и (20):

$$\frac{\sin \psi_0 + \sin \psi_{\mu}}{\sin \psi_0} = \frac{2(1 + \beta \cos \psi_0)}{1 + 2\beta \cos \psi_0 + \beta^2},$$

$$\operatorname{tg} \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_{\mu} = \frac{2 \operatorname{tg} \psi_0 (\cos \psi_0 + \beta)}{\cos \psi_0 (1 + \beta^2) + 2\beta},$$

$$\sin \theta = (\operatorname{tg} \psi_0 + \operatorname{tg} \psi_{\mu}) \cos \psi_0 \cos \psi_{\mu}.$$

Окончательное выражение для компоненты E_{θ} отраженного поля имеет вид

$$E_{\theta} \approx -\frac{a(t_a) \cos \varphi (1 + 2\beta \cos \psi_0 + \beta^2)}{2r(1 + \beta \cos \psi_0)} \frac{R_{\mu} \exp\{-i \omega_0 [t_a + (a(t_a)/c) \cos \psi_0]\}}{\left[1 - \frac{a}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t_a} \frac{\sin^2 \psi_0}{(1 + \beta \cos \psi_0)^2} \right]^{1/2}}. \quad (31)$$

Наблюдаемая фаза совпадает с фазой падающей волны $-i \omega_0 \left[t_a + \frac{a(t_a)}{c} \cos \psi_0 \right]$ в момент взаимодействия t_a на поверхности сферы в точке, где угол падения равен ψ_0 . От поверхности эта фаза распространяется вдоль отраженного под углом ψ_{μ} луча, согласно уравнению характеристики (3), отнесенной к седловой точке μ_0 . Текущая частота вдоль отраженного луча и в точке наблюдения дается (26), что отвечает двойному эффекту Доплера. Отметим, что при $|\beta| < 1$ не возникает принципиальных затруднений с продолжением поля в пространство $r > a(t_a)$ по характеристике (3).

Усложнение амплитудных закономерностей по сравнению со случаем дифракции на неподвижной сфере связано с изменением закона отражения (21). Полученная формула (31) находится в полном согласии с результатом, вытекающим из эвристического правила вычисления лучевых амплитуд в задачах отражения волн от движущихся границ

раздела, сформулированного в работе [8]. Там предлагалось при расчете интенсивности на фиксированном фазовом фронте рассматривать не мгновенное, а кажущееся положение границы раздела, соответствующее взаимодействию с ней данного фазового фронта. По отношению к кажущемуся положению угол падения равен углу отражения, и расходимость лучей описывается обычными формулами [9].

Таким образом, формула (31), по существу, обосновывает принцип «кажущегося положения границы» с точки зрения теории дифракции. Из (31) следует также, что коэффициенты отражения Френеля для мгновенного и кажущегося положений границы одинаковы.

В случае дифракции плоской волны на равномерно расширяющейся или сжимающейся сфере кажущееся положение границы является, как показано в [8], эллипсоидом вращения, вынутаым вдоль направления распространения волны. Если a_0 — радиус сферы в момент первого касания данного фазового фронта с ее поверхностью, то большая B и малая A полуоси равны:

$$A = a_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad B = \frac{a_0}{1 - \beta}$$

(рис. 5, где область тени заштрихована). При произвольном законе движения сферической поверхности ее кажущееся положение может быть достаточно сложным. Естественное ограничение на характер движения поверхности, означающее медленность изменения функции $S_p(\tau)$ по сравнению с фазовым множителем, заключается в неравенстве

$$\left| \frac{\partial \beta}{\partial t_a} \right| \frac{a}{c} \ll 1, \tag{32}$$

т. е. изменения относительной скорости β должны быть малы за времена порядка a/c ; на саму величину β никаких ограничений, кроме условия $|\beta| \ll 1$, не накладывается.

Следует заметить, что, хотя лучевая картина в рассматриваемой задаче является нестационарной, но семейство отраженных лучей осуществляет простое покрытие физического пространства в освещенной области, так как ω , в (26) остается везде конечной при $|\beta| < 1$.

Рассмотрим поведение поля в предельных случаях движения границы. При малых скоростях, учитывая принятую степень точности, достаточно неравенства

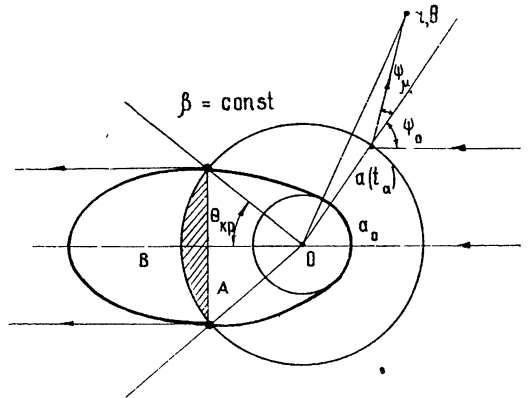


Рис. 5.

$$|\beta| \ll p_0^{-1/3} \tag{33}$$

для отбрасывания членов порядка β по сравнению с единицей. При этом

$$E_0 \approx -\frac{a(t_a)}{2r} \cos \varphi R_u \exp \left[-i \omega_0 \left(t_a + \frac{a(t_a)}{c} \cos \varphi_a \right) \right], \tag{34}$$

амплитуда волны определяется так же, как при дифракции коротких волн на сфере фиксированного радиуса. Наблюдается лишь медленное изменение амплитуды отраженной волны и незначительный сдвиг текущей частоты за счет эффекта Допплера.

Эффекты, обусловленные движением границы, выражены наиболее сильно в режиме ультрарелятивистского расширения

$$\rho_0^{1/3}(1 - \beta) \ll 1, \quad (35)$$

когда граница тени (29) стягивается к теневому полюсу сферы. При этом угол отражения ψ_r много меньше угла падения ψ_0 всюду в области $|\psi_0| \gg (1 - \beta)^{1/4}$, т. е. отраженные лучи при $\beta \rightarrow 1$ распространяются независимо от угла падения по нормали к границе. В этом случае отраженное поле имеет вид

$$E_0 \approx -R_u \frac{a(t_a) \cos \varphi}{r} \exp \left\{ -i \omega_0 \left(t_a + \frac{a(t_a)}{c} \cos \psi_0 \right) \right\}, \quad (36)$$

отличающийся от (34) множителем 2. Увеличение вдвое полей, отраженных от быстро расширяющихся сфер, происходит из-за резкого уменьшения области тени и отражения лучей практически от полной поверхности сферы.

Для сферы, сжимающейся со скоростью, близкой к скорости света,

$$\rho_0^{1/3}(1 + \beta) \ll 1,$$

отражение волн происходит от малой области в окрестности освещенного полюса, что приводит к аномально слабому отражению практически во всю освещенную область, за исключением границы полутени. Предельный переход к «невидимости» объектов, схлопывающихся со скоростью света, является плавным.

С помощью аналогичных методов сходные результаты получаются в задаче дифракции коротких волн на цилиндре переменного радиуса. Выпишем выражение для компоненты E_z отраженного поля

$$E_z \approx - \left[\frac{1 + 2\beta \cos \psi_0 + \beta^2}{1 + \beta \cos \psi_0} \right] \left[\frac{a(\cos \psi_r - \beta)}{2r(1 - \beta^2)} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{R_v \exp \{ -i \omega_0 [t_a + (a(t_a)/c) \cos \psi_0] \}}{\left[1 - \frac{a}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t_a} \frac{\sin^2 \psi_0}{(1 + \beta \cos \psi_0)^2} \right]^{1/2}}, \quad (37)$$

где через R_v обозначен коэффициент отражения Френеля для волны у которой вектор электрического поля параллелен оси z . Смысл углов ψ_0 и ψ_r — прежний.

Резюмируя содержание наших работ [1, 2] и данной статьи, отметим, что:

1) в этих работах предложен математический аппарат, позволяющий асимптотически исследовать отраженное поле в задачах дифракции волн на сферах и цилиндрах с практически произвольно изменяющимися по времени радиусами;

2) сформулированные в [3] эвристические законы взаимодействия лучей с произвольно движущимися криволинейными границами получили теперь волновое подтверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Класс, В. Н. Красильников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 12, 1855 (1975).
2. В. А. Класс, В. Н. Красильников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 1, 116 (1976).
3. J. Lam, J. Math. and Phys., 47, № 2, 199 (1968).
4. В. Н. Красильников, Проблемы дифракции, изд. ЛГУ, 7, 67 (1968).
5. В. Н. Красильников, Проблемы дифракции, изд. ЛГУ, 7, 72 (1968).
6. Х. Хенл и др, Теория дифракции, изд. Мир, 1964.
7. Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М, 1952.
8. В. Н. Красильников, Л. Н. Лутченко, Проблемы дифракции, изд. ЛГУ, 12, 122 (1973).
9. В. А. Фок, ЖЭТФ, 20, № 11, 961 (1950).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
28 августа 1974 г.

SHORTWAVE ASYMPTOTICS OF THE FIELD REFLECTED FROM SPHERE OR
CYLINDER WITH TIME-VARYING RADII

V. A. Klass, V. N. Krasil'nikov

Based upon the mathematical apparatus developed earlier by the authors, a short-wave asymptotics of the electromagnetic field reflected from the surface of the impedance sphere or cylinder with time-varying radii is built. Strict limitations on the velocity of motion of the surface are not imposed. In particular, the relativistic regimes when the surface moves with the velocity close to the light velocity are considered. In this case on the broadening body the shadow region is narrowed towards the shadow pole and on the collapse one towards the illuminated pole. Phase regularities are found in accord with the double Doppler effect, and the amplitude ones support the earlier suggested heuristic principle of „apparent position“ of the interface.

УДК 621.372.414

ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНЫХ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ С ПОЛНЫМ ВНУТРЕННИМ ОТРАЖЕНИЕМ

Л. В. Иогансен, Ю. В. Глобенко

Обобщена теория резонансных электромагнитных систем с полным внутренним отражением [1] на случай слоисто-неоднородных сред. Рассчитано накопление цилиндрических волн в резонансный конденсатор полного внутреннего отражения с линейно-неоднородным резонатором, а также излучение цилиндрических волн из такого резонансного конденсатора.

В работах [1, 2] была развита теория резонансных электромагнитных систем с полным внутренним отражением (ПВО), в рамках которой исследовано резонансное туннелирование плоских электромагнитных волн в системе однородных диэлектрических слоев конечной длины с учетом резонансного дифракционного эффекта [3], присущего волнам любой природы. В последующие годы основные предсказания теории [1-3] удалось реализовать на практике, в частности, в диэлектрических световодах [4-6]. В настоящее время достигнут значительный прогресс в деле изготовления тонкопленочных световодов, свойства которых меняются вдоль слоя по заданному закону [7, 8]. Ввиду этого представляется целесообразным обобщить теорию [1-3] на случай слоисто-неоднородных сред и выяснить скрытые здесь возможности, в частности, связанные с туннелированием неплоских волн. Такому обобщению и посвящена настоящая статья.

1. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКО-СЛОИСТЫЕ СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ВДОЛЬ СЛОЯ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим систему плоских диэлектрических слоев, например, образующую резонансный конденсатор ПВО [1, 3] (рис. 1). В отличие от [1] считаем, что показатель преломления среды 3 не постоянен, а медленно меняется вдоль слоя —

$n_3 = n(x)$. Электромагнитные волны наклонно падают из среды 1 на плоскость раздела P_{12} , где выполнены условия ПВО, т. е. слой 2 является малопрозрачным барьером.

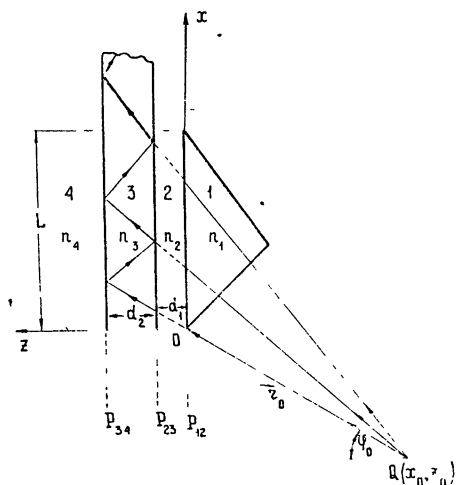


Рис. 1. Закачка цилиндрической волны в резонансный конденсатор полного внутреннего отражения с линейно-неоднородным резонатором: $n_3 = n_0 + \frac{\Delta n(L)}{L} x$. Волновой вектор волны, падающей из среды 1, и собственной волны резонатора 3 согласованно поворачиваются по мере смещения вдоль оси x , что и обеспечивает сохранение условия резонанса.

В [1-3] для расчета резонансного дифракционного эффекта развит дифференциальный метод шивания на границах раздела сред решений волнового уравнения, выбранных в виде ортогональных волн. Эти решения, а также уравнения шивания справедливы с точностью до первых производных от медленно меняющихся амплитудных функций. При этом относительная точность результатов порядка $e^{-2q_2 d_1} \ll 1$ (q_2 — мнимая составляющая волнового вектора внутри барьера), т. е. порядка прозрачности барьера, являющейся малым параметром задачи.

Точный интегральный метод решения резонансной дифракционной задачи был развит в [9] и связан с значительными вычислительными трудностями. Для получения обозримого результата в [9] также пришлось произвести разложение по малому параметру $e^{-2q_2 d_1}$. При этом, как показало обсуждение [10, 11], интегральный метод [9] и дифференциальный метод [1-3] полностью эквивалентны. К тому же дифференциальный метод физичнее и нагляднее, легко позволяет контролировать результаты и избегать ошибок. Ниже мы обобщим метод [1-3] на случай сред с медленно изменяющимися параметрами. Волны будем описывать векторным потенциалом $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, взятым в той же калибровке, как и в [1]. Электрическое поле $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$, магнитное поле

$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ (предполагается, что среда немагнитна, $\mu = 1$). Рассмотрим случай установившихся гармонических колебаний, при этом временная зависимость описывается множителем $\exp(i\omega t)$. Плоскость слоев обозначим (x, y) . Условия вдоль оси y считаются однородными. Пусть волновой вектор лежит в плоскости (x, z) . Рассмотрим случай s -поляризации, когда вектор \mathbf{E} направлен вдоль орта \mathbf{s} по оси y в плоскости слоя. Решение уравнений Максвелла

$$\Delta \mathbf{A} + \frac{n^2(x)\omega^2}{c^2} \mathbf{A} = 0; \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (2)$$

для среды \mathcal{Z} ищем в виде $\mathbf{A} = s A_0(x, z) \exp[-i(k_x x + k_z z)]$, где k_x, k_z — постоянные, $A_0(x, z)$ — медленно изменяющаяся амплитуда $\left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \ll k_x A_0, \frac{\partial A_0}{\partial z} \ll k_z A_0\right)$. Пренебрегая вторыми производными $\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2}$, получаем вместо (1), приближенное уравнение

$$2ik_x \frac{\partial A_0}{\partial x} + 2ik_z \frac{\partial A_0}{\partial z} - \left[\frac{n^2(x)\omega^2}{c^2} - (k_x^2 + k_z^2) \right] A_0 = 0. \quad (3)$$

Выберем $k^2 = k_x^2 + k_z^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2}$, где $n_0 = n(x)|_{x=0}$. Решение уравнения (3) имеет вид

$$A_0 = \exp \left\{ \frac{\omega^2}{2ik_x c^2} \int [n^2(x) - n_0^2] dx \right\} f \left(x - \frac{k_x}{k_z} z \right), \quad (4)$$

где $f \left(x - \frac{k_x}{k_z} z \right)$ — произвольная функция, мало изменяющаяся на длине волны.

Уравнение (2) удовлетворяется автоматически. Условие малости

изменения амплитуды (4) на длине волны дает $n^2(x) - n_0^2 \ll 2 \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} \sim 1$.

Положим $n(x) = n_0 + \Delta n(x)$ ($|\Delta n(x)| \ll 1$). Тогда $n^2(x) - n_0^2 \approx 2 n_0 \Delta n(x)$. Подставляя это в (4), получаем следующее выражение для прямой и обратной однородных волн в среде 3 с переменным n :

$$A = A \left(x - \frac{k_x}{k_z} z \right) \exp [-i(k_x x + k_z z)] \exp \left[-i \frac{k^2}{k_x} \int \frac{\Delta n(x)}{n_0} dx \right], \quad (5)$$

$$B = B \left(x + \frac{k_x}{k_z} z \right) \exp [-i(k_x x - k_z z)] \exp \left(-i \frac{k^2}{k_x} \int \frac{\Delta n(x)}{n_0} dx \right).$$

В среде 2 с постоянным n_2 возбуждаются обычные неоднородные ортогональные волны [1] с амплитудами F и G . Пренебрегая вторыми производными от медленно изменяющихся амплитуд, условия сшивания полей на границе P_{23} можно разрешить относительно $A(x)$ и $B(x)$, а также $F(x)$ и $G(x)$. Получаем

$$A(x) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 + i \frac{q_z}{k_z} \right) - i \frac{q_z}{k_z} \frac{k^2}{k_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] F(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 - i \frac{q_z}{k_z} \right) + i \frac{q_z}{k_z} \frac{k^2}{k_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] G(x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{k_x}{k_z q_z} \left(1 + \frac{q_z^2}{k_z^2} \right) [F'(x) - G'(x)] \right\} \exp \left(i \frac{k^2}{k_x} \int \frac{\Delta n(x)}{n_0} dx \right), \quad (6)$$

$$B(x) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 - i \frac{q_z}{k_z} \right) + i \frac{q_z}{k_z} \frac{k^2}{k_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] F(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + i \frac{q_z}{k_z} \right) - i \frac{q_z}{k_z} \frac{k^2}{k_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] G(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{k_x}{k_z q_z} \left(1 + \frac{q_z^2}{k_z^2} \right) [F'(x) - G'(x)] \right\} \exp \left(i \frac{k^2}{k_x} \int \frac{\Delta n(x)}{n_0} dx \right);$$

$$F(x) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 - i \frac{k_z}{q_z} \right) + i \frac{k_z}{q_z} \frac{k^2}{q_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] A(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 + i \frac{k_z}{q_z} \right) - i \frac{k_z}{q_z} \frac{k^2}{q_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] B(x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{k_x}{k_z q_z} \left(1 + \frac{k_z^2}{q_z^2} \right) [A'(x) - B'(x)] \right\} \exp \left(-i \frac{k^2}{k_x} \int \frac{\Delta n(x)}{n_0} dx \right), \quad (7)$$

$$G(x) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 + i \frac{k_z}{q_z} \right) - i \frac{k_z}{q_z} \frac{k^2}{q_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] A(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\left(1 - i \frac{k_z}{q_z} \right) + i \frac{k_z}{q_z} \frac{k^2}{q_z^2} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] B(x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{k_x}{k_z q_z} \left(1 + \frac{k_z^2}{q_z^2} \right) [A'(x) - B'(x)] \right\} \exp \left(-i \frac{k^2}{k_x} \int \frac{\Delta n(x)}{n_0} dx \right).$$

Уравнения (6) и (7) являются обобщением полученных в [1] уравнений на случай слоисто-неоднородных сред и могут быть использованы, в частности, для решения различных задач по резонансному туннелированию неплоских волн.

2. ТУННЕЛИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В РЕЗОНАНСНЫЙ КОНДЕНСАТОР ПВО С ЛИНЕЙНО-НЕОДНОРОДНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

Рассчитаем закачку в изображенный на рисунке резонансный конденсатор ПВО падающей на него цилиндрической волны с осью в точке Q . Представим сначала асимптотику цилиндрической волны $A_Q \frac{e^{-i(kr-\omega t)}}{\sqrt{r}}$ в области, где $kr \gg 1$, в виде ортогональной волны $A \left(x - \frac{k_x}{k_z} z \right) \exp[-i(k_x x + k_z z - \omega t)]$, где k_x, k_z — константы. Будем считать, что $x \leq L \ll r_0$ (L — размеры системы вдоль слоев, r_0 — расстояние от точки Q до системы, см. рисунок). В поперечном направлении $z \leq d \sim \lambda \ll L$. Разложив в ряд и ограничиваясь членами до $(L/r_0)^2$, получаем искомое выражение:

$$A_Q \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \approx \left\{ A_Q \frac{e^{-ikr_0}}{\sqrt{r_0}} \exp \left[-\frac{i}{2kr_0} (k_z x - k_x z)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{k_x}{2k_z k r_0} (k_z x - k_x z) \right] \right\} \exp[-i(k_x x + k_z z)]. \quad (8)$$

Далее порядок расчета такой же, как и в [1]: считаем, что в среде 4 возбуждается экспоненциально убывающая в глубь среды ортогональная неоднородная волна с неизвестной амплитудой $G(x)$ в плоскости раздела P_{34} . Через эту амплитуду с помощью уравнений шивания последовательно выражаем амплитуды волн во всех средах, причем на границах P_{34} и P_{23} используем уравнения (6) и (7). В результате получаем следующее дифференциальное соотношение, связывающее неизвестные $G(x)$ и $G'(x)$ с известной амплитудой $A_{P_{12}}(x)$ s -поляризованной волны, падающей из среды 1 на P_{12} :

$$\tilde{L}(x, \varepsilon) G'(x, \varepsilon) + G(x, \varepsilon) = \\ = - \frac{2k_z (k_z + iq_z) [(k_z'^2 + q_z^2)/(k_z'^2 + q_z'^2)]^{1/2} \exp(q_z d_1)}{(k_z + iq_z)^2 - \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\varepsilon + d_2^* \frac{k^2}{k_z} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] (k_z^2 - q_z^2)} A_{P_{12}}(x). \quad (9)$$

Приближенное условие резонанса по аналогии с [1] имеет вид

$$\operatorname{tg}(k_z' d_2)_{\text{рез}} = \frac{k_z'(q_z + q_z')}{k_z'^2 - q_z q_z'}. \quad (10)$$

В (9) положено $(k_z' d_2) = (k_z' d_2)_{\text{рез}} + \varepsilon$, где ε — безразмерный действительный параметр, причем $|\varepsilon| \ll 1$, и введены обозначения

$$\tilde{L}(x, \varepsilon) = i \frac{2q_z k_z l_0}{(k_z + iq_z)^2 - \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\varepsilon + d_2^* \frac{k^2}{k_z} \frac{\Delta n(x)}{n_0} \right] (k_z^2 - q_z^2)},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{(k_z^2 - q_z^2) 2q_z k_z' \exp(-2q_z d_1)}{(k_z^2 + q_z^2) (k_z'^2 + q_z'^2)}, \quad (11)$$

$$l_0 = \frac{k_x}{k_z} \frac{(k_z^2 + q_z^2) (k_z'^2 + q_z'^2) \exp(2q_z d_1)}{(2q_z k_z')^2} \left(d_2 + \frac{1}{q_z} + \frac{1}{q_z'} \right),$$

$$d_2^* = d_2 + \frac{q_z}{k_z'^2 + q_z'^2} + \frac{q_z'}{k_z'^2 + q_z'^2}.$$

Пусть показатель преломления резонатора z линейно возрастает вдоль x , т. е. $\Delta n(x) = \frac{\Delta n(L)}{L} x$. При этом, подставляя $A_{P_{12}}(x)$, т. е. амплитуду (8) при $z=0$, в (9) и полагая, что точный резонанс ($\varepsilon = \varepsilon_0$) выполняется при $x=0$, находим, что в области $x > 0$ искомое решение имеет вид

$$G(x, \varepsilon) = -A_Q \frac{\exp(-ikr_0) (q_z - ik_z) [(k_z'^2 + q_z^2)/(k_z'^2 + q_z'^2)]^{1/2} \exp(q_z d_1)}{\sqrt{r_0} q_z} \times \quad (12)$$

$$\times \exp \left[-\frac{x}{l_0} - i\chi \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right] \int_0^{x/l_0} \left(1 - \frac{k_x l_0 u}{2kr_0} \right) \exp(u + i\gamma u^2) du,$$

где введен параметр неоднородности резонатора

$$\chi = \frac{k^2 l_0^2}{2k_x L} \frac{d_2^*}{\left(d_2 + \frac{1}{q_z} + \frac{1}{q_z'} \right)} \frac{\Delta n(L)}{n_0} \quad (13)$$

и параметр $\gamma = \chi - \frac{k_z^2 l_0^2}{2kr_0}$.

В (12) под интегралом показатель экспоненты $i\gamma u^2$ зависит как от радиуса r_0 падающей цилиндрической волны, так и от неоднородности резонатора. При $\gamma(L/l_0)^2 \gg 1$ подынтегральное выражение в (12) быстро осциллирует, и интеграл близок к нулю, т. е. резонансное накопление волн не происходит. Наоборот, при $r_0 \rightarrow \infty$, $\gamma = 0$ (12) переходит в полученное в [1] решение для случая, когда падающая волна $A_{P_{12}}(x)$ является плоской и $n_3 = \text{const}$. Действительная часть $G(x, \varepsilon_0)$ достигает при этом максимума. Для эффективной закачки падающей цилиндрической волны в резонатор необходимо выполнение условия $\gamma = 0$, т. е. вклад, обусловленный цилиндричностью волны и характеризующийся членом $\frac{k_z^2 x^2}{2kr_0}$, должен компенсироваться членом, связанным с изменением показателя преломления. Это дает для фокусного расстояния резонансного конденсатора выражение:

$$r_0 = \frac{k_x k_z^2}{k^3} \left(\frac{d_2 + \frac{1}{q_z} + \frac{1}{q_z'}}{d_2^*} \right) \frac{n_0}{\Delta n(L)} L. \quad (14)$$

Для амплитуды отраженной от резонансного конденсатора волны получаем

$$B_{P_{12}}(x, \varepsilon_0) = A_Q \frac{\exp[-i(kr_0 + k_z^2 x^2 / 2kr_0)]}{\sqrt{r_0}} \left(\frac{k_z + iq_z}{k_z - iq_z} \right) \left\{ 1 - \frac{k_x x}{2kr_0} - \right. \\ \left. - 2 \exp \left[-\frac{x}{l_0} - i\gamma \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right] \int_0^{x/l_0} \left(1 - \frac{k_x l_0 u}{2kr_0} \right) \exp(u + i\gamma u^2) du \right\}. \quad (15)$$

Для волн внутри резонатора получаем

$$|A_{P_{23}}(x, \varepsilon_0)| = |B_{P_{23}}(x, \varepsilon_0)| \approx \frac{A_Q [(k_z^2 + q_z^2)(k_z'^2 + q_z'^2)]^{1/2}}{\sqrt{r_0} 2q_z k_z} \times \\ \times \exp \left(q_z d_1 - \frac{x}{l_0} \right) \left| \int_0^{x/l_0} \left(1 - \frac{k_x l_0 u}{2kr_0} \right) \exp(u + i\gamma u^2) du \right|. \quad (16)$$

С точностью до старших членов в разложении по (L/r_0) локальный коэффициент отражения волн от резонансного конденсатора равен

$$R(x, \varepsilon_0) = \frac{|B_{P_{12}}(x, \varepsilon_0)|^2}{|A_{P_{12}}(x)|^2} \approx \left| 1 - 2 \exp \left[-\frac{x}{l_0} - i\gamma \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^{x/l_0} \exp(u + i\gamma u^2) du \right|^2. \quad (17)$$

При $\gamma \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \gg 1$ $R(x, \varepsilon_0) \approx 1$. В случае $\gamma \left(\frac{x}{l_0} \right)^2 \ll 1$

$$R(x, \varepsilon_0) \approx (1 - 2e^{-(x/l_0)})^2 + 4\gamma^2 \left[2(1 - e^{-(x/l_0)}) - \frac{x}{l_0} \left(2 - \frac{x}{l_0} e^{-(x/l_0)} \right) \right]^2. \quad (18)$$

Очевидно, что (18) нигде не обращается в нуль.

Вводя локальный коэффициент просачивания волны в резонатор $C(x, \varepsilon_0) = 1 - R(x, \varepsilon_0)$, находим энергетическую емкость резонансного конденсатора при $\gamma \ll 1$:

$$\bar{C}(L, \varepsilon_0) = \int_0^L C(x, \varepsilon_0) dx = 2l_0 (1 - e^{-(L/l_0)})^2 - \\ - 4\gamma^2 \int_0^L \left[2(1 - \exp[-(x/l_0)]) - \frac{x}{l_0} \left(2 - \frac{x}{l_0} \exp[-(x/l_0)] \right) \right]^2 dx. \quad (19)$$

При $\gamma = 0$ и $L/r_0 \rightarrow 0$ (17)–(19) совпадают с характеристиками резонансного конденсатора с $n_3 = \text{const}$ для плоских волн [1].

В заключение отметим, что аналогичным методом можно рассчитать излучение цилиндрической волны из резонансного конденсатора ПВО с линейно-неоднородным резонатором. При этом на рисунке надо изменить на противоположное направление всех волн и считать заданной амплитуду \tilde{A}_{30} волны, приходящей по резонатору.

Для амплитуды излучаемой из резонансного конденсатора волны получаем

$$B_{P_{12}}(x) = \frac{4iq_z k_z'}{(k_z - iq_z)(k_z' - iq_z')} \sqrt{\frac{k_z'^2 + q_z'^2}{k_z'^2 + q_z^2}} \exp(-q_z d_1) \times \quad (20)$$

$$\times \exp\left[-\frac{x}{l_0} - iy \left(\frac{x}{l_0}\right)^2\right] \tilde{A}_{30}.$$

Выражение (20) из-за наличия в показателе экспоненты квадратичного члена $iy \left(\frac{x}{l_0}\right)^2$ описывает асимптотически цилиндрическую волну вида (8) с фокусным расстоянием (14).

Поток энергии, вытекающей с волной (20) из резонансного конденсатора через поверхность P_{12} в область I , равен

$$S = \frac{\omega}{2c} \frac{k_x'}{k_z} \left(d_2 + \frac{1}{q_z} + \frac{1}{q_z'}\right) \left\{ k_z \left[1 - \exp\left(-\frac{2L}{l_0}\right)\right] - \frac{k_x}{l_0 k_z} \chi \times \right. \quad (21)$$

$$\left. \times \left[1 - \exp\left(-\frac{2L}{l_0}\right) - \frac{2L}{l_0} \exp\left(-\frac{2L}{l_0}\right)\right] \right\} |\tilde{A}_{30}|^2.$$

При $L \ll l_0$

$$S = \frac{\omega}{c} k_x \left(d_2 + \frac{1}{q_z} + \frac{1}{q_z'}\right) \frac{L}{l_0} |\tilde{A}_{30}|^2.$$

При $L \gg l_0$ (полубесконечный конденсатор)

$$S = \frac{\omega}{2c} k_x \left(d_2 + \frac{1}{q_z} + \frac{1}{q_z'}\right) |\tilde{A}_{30}|^2,$$

т. е. вытекает вся энергия, которая поступает в конденсатор по резонатору.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Иогансен, ЖТФ, 32, 406 (1962); 36, 2056 (1966); 38, 781 (1968).
2. Л. В. Иогансен, Оптика и спектроскопия, 12, 318 (1962); 19, 403 (1965), 27, 144 (1969).
3. Л. В. Иогансен, ЖЭТФ, 40, 1838 (1961); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 5, 958 (1963).
4. Х. И. Гаприндашвили, Р. Н. Кухарский, Е. А. Лебедева, Б. С. Лежава, В. В. Мумладзе, В. В. Чавчанидзе, Радиотехника и электроника, 15, 1457 (1970).
5. P. K. Tien, R. Ulrich, J. Opt. Soc. Am., 60, 1325 (1970).
6. Е. М. Золотов, В. М. Пелехатый, Квантовая электроника, 1, 979 (1974).
7. P. K. Tien, G. Smolinsky, R. J. Martin, Appl. Opt., 11, 637 (1972).
8. A. Iwaya, H. Furuta, H. Noda, Proc. IEEE, 60, 470 (1972).
9. L. Bergstein, C. Shulman, Appl. Opt., 5, 9 (1966).
10. L. V. Iogansen, Appl. Opt., 6, 2001 (1967).
11. L. Bergstein, Appl. Opt., 6, 2002 (1967).

Всесоюзный заочный институт текстильной и легкой промышленности

Поступила в редакцию
10 ноября 1974 г.

THE THEORY OF RESONANCE STRATIFIED-INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETIC SYSTEMS WITH TOTAL INTERNAL REFLECTION

L. V. Iogansen, Yu. V. Globenko

The theory of resonance electromagnetic system with total internal reflection [1] is generalized for the case of stratified-inhomogeneous media. The accumulation of cylindrical waves into a resonant condenser of a total internal reflection with a linearly inhomogeneous resonator is calculated, as well as the radiation of cylindrical waves from such a resonant condenser.

УДК 621.372.5

ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

А. Б. Маненков

Рассмотрена задача о возбуждении сторонними токами открытых периодических волноводов произвольного вида. Расчет возбуждения проводится с помощью разложения полей по системе волн непрерывного и дискретного спектров. Вблизи оси волновода из полного поля выделены поля слабозатухающих квазисобственных волн.

При анализе волн, возбуждаемых сторонними источниками в квазиоптических волноводах, поля обычно представляют в виде суперпозиции квазисобственных волн (лучевых мод), являющихся решениями однородных уравнений Максвелла (см., например, [1]). Такой расчет, естественно, является приближенным, поскольку используемая система полей не является полной ([2], стр. 378). Например, в этом приближении практически не учитываются волны, уходящие под большими углами к оси волновода. В настоящей работе построена система полей, учитывающая как поверхностные волны, так и волны излучения, и с помощью этой системы рассмотрено возбуждение периодических открытых волноводов. Приведенный расчет обобщает результаты, полученные для закрытых периодических систем в работе [3]. Решение задачи о возбуждении ищется в виде спектрального разложения [2, 4, 5]; окончательные соотношения аналогичны полученным ранее для открытых однородных волноводов [4].

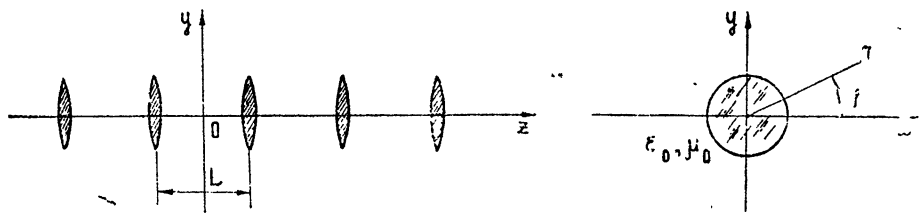


Рис. 1.

Открытым периодическим волноводом будем называть бесконечную периодическую структуру с осью вдоль z , для которой комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости являются периодическими функциями z (рис. 1):

$$\epsilon(r, \varphi, z + pL) = \epsilon(r, \varphi, z), \quad \mu(r, \varphi, z + pL) = \mu(r, \varphi, z), \quad (1)$$

где L —период, r, φ, z —цилиндрические координаты и $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем при $r > \tilde{r}$ (вне волновода)

$$\epsilon \equiv \epsilon_0, \quad \mu \equiv \mu_0. \quad (2)$$

Будем предполагать, что среда внутри волновода имеет хотя бы неболь-

шое поглощение ($\text{Im } \epsilon > 0$). Зависимость от времени предполагаем в виде $e^{-i\omega t}$.

Введем систему волн открытого периодического волновода. Как следует из нашей работы [4], для однородного волновода волны непрерывного спектра являются собственными волнами в задаче рассеяния конических волн на данном волноводе. Поля этих волн в цилиндрической системе координат при $r \rightarrow \infty$ выражаются через функции Герца U_x и V_x , которые имеют вид

$$\begin{aligned} U_x &\approx g_x^{(e)}(\varphi)[e^{i(hz+xr)} + \Gamma(x)e^{i(hz-xr)}]/\sqrt{r}, \\ V_x &\approx g_x^{(m)}(\varphi)[e^{i(hz+xr)} + \Gamma(x)e^{i(hz-xr)}]/\sqrt{r}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x^2 = k^2 - h^2$. Второе слагаемое в функциях (3) представляет собой падающую коническую волну, а первое — отраженную, причем для падающей и отраженной волны диаграммы направленности $g_x^{(e,m)}(\varphi)$ совпадают. Величина $1/\Gamma(x)$ играет роль коэффициента отражения конической волны.

Волны непрерывного спектра в периодических волноводах вводим следующим образом. При падении одной конической волны на периодическую структуру возникает спектр пространственных гармоник конических волн, поэтому естественно искать собственные волны периодического волновода в виде суммы таких пространственных гармоник. Пусть на волновод падает суперпозиция конических волн, распространяющихся в направлении $z > 0$. Поля этих волн при $r \gg \tilde{r}$ можно выразить через векторы Герца [6]:

$$\mathbf{P} = U + \mathbf{l}, \quad \mathbf{P}' = V + \mathbf{l} \quad (4)$$

(\mathbf{l} — орт вдоль оси z), где

$$U^+ = \sum_n \frac{A_n^+(\varphi)}{\sqrt{r}} \exp[i(h_n z - x_n r)], \quad (5)$$

$$V^+ = \sum_n \frac{B_n^+(\varphi)}{\sqrt{r}} \exp[i(h_n z - x_n r)];$$

$$h_n = h_x + \frac{2\pi n}{L}, \quad x_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}, \quad k^2 = h_x^2 + x^2. \quad (6)$$

Отраженные волны имеют вид (при $r \gg \tilde{r}$)

$$U^- = \sum_n \frac{A_n^-(\varphi)}{\sqrt{r}} \exp[i(h_n z + x_n r)], \quad (7)$$

$$V^- = \sum_n \frac{B_n^-(\varphi)}{\sqrt{r}} \exp[i(h_n z + x_n r)].$$

В формулах (5) и (7) в суммы входит конечное число слагаемых, а именно только те, для которых $\text{Im } x_n = 0$. Функции (5) и (7) можно связать оператором рассеяния \hat{S} (ср. [4]):

$$\hat{S} \begin{pmatrix} A_n^+(\varphi) \\ B_n^+(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n^-(\varphi) \\ B_n^-(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Далее обычным способом строится система собственных элементов обратного оператора \hat{S}^{-1} :

$$\hat{S}^{-1} \begin{pmatrix} u_{n\tau x}^{(1)}(\varphi) \\ v_{n\tau x}^{(1)}(\varphi) \end{pmatrix} = \Gamma_\tau^{(1)}(x) \begin{pmatrix} u_{n\tau x}^{(1)}(\varphi) \\ v_{n\tau x}^{(1)}(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где τ — дискретный индекс (например, азимутальное число), а x — непрерывный параметр (поперечное волновое число). Величина $1/\Gamma_\tau(x)$ имеет смысл коэффициента отражения конических волн от волновода. Указанное построение системы собственных волн справедливо лишь при $0 < x < k$; однако мы будем считать, что все функции допускают аналитическое продолжение в комплексную плоскость параметра x [2]. Аналогичным образом можно ввести собственные волны, распространяющиеся в обратном направлении оси z . Прямые волны будем отмечать верхним индексом (1), а обратные — индексом (2), причем $h_x^{(1)} = -h_x^{(2)}$. Можно показать, используя лемму Лоренца [6], что собственные значения для встречных волн при одинаковых x равны

$$\Gamma_\tau^{(1)}(x) = \Gamma_\tau^{(2)}(x) = \Gamma_\tau(x). \quad (10)$$

В силу (5)–(10) функции Герца собственных волн непрерывного спектра $E_{\tau x}^{(\alpha)}, H_{\tau x}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) при $r \rightarrow \infty$ имеют вид

$$U_{\tau x}^{(\alpha)} = \sum_n \frac{u_{n\tau x}^{(\alpha)}(\varphi)}{\sqrt{r}} [e^{ix_n r} + \Gamma_\tau(x) e^{-ix_n r}] \exp(ih_n^{(\alpha)} z), \quad (11)$$

$$V_{\tau x}^{(\alpha)} = \sum_n \frac{v_{n\tau x}^{(\alpha)}(\varphi)}{\sqrt{r}} [e^{ix_n r} + \Gamma_\tau(x) e^{-ix_n r}] \exp(ih_n^{(\alpha)} z).$$

Функции $u_{n\tau x}^{(1)}, v_{n\tau x}^{(1)}$ и $u_{n\tau x}^{(2)}, v_{n\tau x}^{(2)}$ в общем случае различны. Если волновод обладает симметрией относительно плоскости $z = 0$ (симметричные линзы, гребенка и т. п.), т. е.

$$\varepsilon(r, \varphi, -z) = \varepsilon(r, \varphi, z), \quad \mu(r, \varphi, -z) = \mu(r, \varphi, z), \quad (12)$$

то эти функции можно выбрать так, что

$$u_{n\tau x}^{(1)} = u_{n\tau x}^{(2)}, \quad v_{n\tau x}^{(1)} = -v_{n\tau x}^{(2)}. \quad (13)$$

Поля рассмотренных выше конических волн удовлетворяют соотношениям

$$E_{\tau x}^{(\alpha)}(r, \varphi, z + pL) = \exp(ih_x^{(\alpha)} pL) E_{\tau x}^{(\alpha)}(r, \varphi, z), \quad (14)$$

$$H_{\tau x}^{(\alpha)}(r, \varphi, z + pL) = \exp(ih_x^{(\alpha)} pL) H_{\tau x}^{(\alpha)}(r, \varphi, z)$$

($\alpha = 1, 2$), которые можно рассматривать как обобщение теоремы Флоке.

Используя лемму Лоренца, как и в случае однородных волноводов [4], можно доказать, что волны непрерывного спектра образуют ортогональную систему полей. Обозначим через

$$I_{\tau x, \tau' x'}^{\alpha\beta} = \int_{z=\text{const}} (E_{\tau x}^{(\alpha)} \times H_{\tau' x'}^{(\beta)} - E_{\tau' x'}^{(\beta)} \times H_{\tau x}^{(\alpha)}) \cdot \mathbf{r} dr d\varphi \quad (15)$$

интеграл, взятый по поперечному сечению $z = \text{const}$. Рассуждая, как и в работе [4], нетрудно показать, что этот интеграл не зависит от z . С другой стороны, из формул (14) вытекает, что

$$I_{\tau x, \tau' x'}^{\alpha\beta}(z + pL) = \exp[i(h_x^{(\alpha)} + h_x^{(\beta)})pL] I_{\tau x, \tau' x'}^{\alpha\beta}(z), \quad (16)$$

откуда следует, что $I_{\tau x, \tau' x'}^{\alpha\beta} = 0$ при $h_x^{(\alpha)} \neq -h_x^{(\beta)}$. Интегрируя тождество

$$\text{div}(E_{\tau x}^{(\alpha)} \times H_{\tau' x'}^{(\beta)} - E_{\tau' x'}^{(\beta)} \times H_{\tau x}^{(\alpha)}) = 0 \quad (17)$$

по объему кругового цилиндра с основаниями в плоскостях z и $z + L$ и радиусом $r_0 \rightarrow \infty$ и учитывая формулы (10) и (11), можно показать [4], что

$$I_{\tau x, \tau' x'}^{\alpha\beta} = D_\tau(x)(\beta - \alpha)\delta_{\tau\tau'}\delta(x - x'), \quad (18)$$

где нормирующий множитель

$$D_\tau(x) = \frac{-4\pi\omega}{x} h_x \Gamma_\tau(x) G_\tau(x), \quad (19)$$

$$G_\tau(x) = \sum_n x_n^3 \int_0^{2\pi} (\varepsilon_0 \mu_{n\tau x}^{(1)} \mu_{n\tau x}^{(2)} - \mu_0 \sigma_{n\tau x}^{(1)} \sigma_{n\tau x}^{(2)}) d\varphi.$$

Кроме волн непрерывного спектра в открытом волноводе могут распространяться также собственные волны дискретного спектра (поверхностные моды), для которых $\text{Im } x_s > 0$. Эти волны ортогональны к волнам непрерывного спектра и ортогональны между собой. Поля этих волн будем обозначать через $E_s^{(\alpha)}$, $H_s^{(\alpha)}$ ($s = 1, 2, \dots, s_m$).

Пользуясь соотношениями ортогональности, нетрудно вывести выражения для полей, возбуждаемых сторонними токами, т. е. решения неоднородных уравнений Максвелла:

$$\text{rot } E = i\omega\mu H - j^m, \quad \text{rot } H = -i\omega\varepsilon E + j^e. \quad (20)$$

Эти выражения формально совпадают с окончательными формулами работы [4] и имеют вид

$$E = \sum_{\alpha=1,2} \left[\sum_s C_s^{(\alpha)} E_s^{(\alpha)} + \sum_\tau \int_0^\infty C_{\tau x}^{(\alpha)} E_{\tau x}^{(\alpha)} d\tau \right] + \frac{j_z^e}{i\omega\varepsilon} l, \quad (21)$$

$$H = \sum_{\alpha=1,2} \left[\sum_s C_s^{(\alpha)} H_s^{(\alpha)} + \sum_\tau \int_0^\infty C_{\tau x}^{(\alpha)} H_{\tau x}^{(\alpha)} d\tau \right] + \frac{j_z^m}{i\omega\mu} l,$$

где, например, амплитуды прямых волн равны

$$C_s^{(1)} = \frac{1}{N_s} \int_{s(<z)} (j^e E_s^{(2)} - j^m H_s^{(2)}) dV, \quad (22)$$

$$C_{\tau x}^{(1)} = \frac{1}{D_\tau(x)} \int_{\tau x(<z)} (j^e E_{\tau x}^{(2)} - j^m H_{\tau x}^{(2)}) dV$$

(N_s — нормы волн дискретного спектра). Символ ($< z$) означает интегрирование по всем источникам, находящимся левее данного сечения z . Отметим, что функции $C_{\tau x}^{(\alpha)}$ в комплексной плоскости x имеют точки ветвления при $h_{nx} = 0$ [7].

Квазисобственные (быстрые или вытекающие) волны не вошли явно в разложения (21), так как поля этих волн не ограничены при $r \rightarrow \infty$. При исследовании полей вблизи оси волновода быстрые волны можно выделить из интегралов по собственным волнам, смещая контур интегрирования $(0, +\infty)$ в комплексной плоскости x вниз. Нетрудно показать, что поперечные волновые числа квазисобственных волн x_σ являются полюсами амплитуд $C_\tau^{(\alpha)}$ в полуплоскости $\text{Im } x < 0$ (или, что то же, корнями уравнения $\Gamma_\tau(x) = 0$). После деформации контура интегрирования и вычисления вычетов в точках x_σ в разложении полей к сумме поверхностных мод добавятся слагаемые $C_\sigma^{(\alpha)} E_\sigma^{(\alpha)}$ и $C_\sigma^{(\alpha)} H_\sigma^{(\alpha)}$ [4], соответствующие квазисобственным волнам, при этом амплитуды $C_\sigma^{(\alpha)}$ определяются по формулам

$$C_\sigma^{(1)} = \frac{1}{\tilde{N}_\sigma} \int_{N_\sigma(x < z)} (j^e E_\sigma^{(2)} - j^m H_\sigma^{(2)}) dV, \quad \tilde{N}_\sigma = \frac{i}{2\pi} \frac{dD_\tau(x_\sigma)}{dx}. \quad (23)$$

Для квазисобственных волн роль нормы играет производная нормирующего множителя $D_\tau(x)$ в точках x_σ .

Общие свойства квазисобственных волн в открытых периодических волноводах подробно исследованы в [2] (см. стр. 277—282). Отметим только, что вне волновода их поля имеют вид уходящих конических волн, экспоненциально растущих при увеличении r (так как $\Gamma_\tau(x_\sigma) = 0$ и $\text{Im } x_\sigma < 0$). Норму этих волн можно определить (ср. [2, 4]), если при вычислении выражения вида (15) при $x = x' = x_\sigma$ интегрирование по r проводить не в реальном пространстве, а в комплексной плоскости:

$$\tilde{N}_\sigma = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} e^{i\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (E_\sigma^{(1)} \times H_\sigma^{(2)} - E_\sigma^{(2)} \times H_\sigma^{(1)}) l r dr d\varphi. \quad (24)$$

В последней формуле символ $r_0 \rightarrow \infty e^{i\gamma}$ означает, что после достижения больших r_0 , при которых справедливы формулы (11), дальнейшее изменение r_0 проводится в комплексной плоскости так, что $\exp(2i x_{n\sigma} r_0) \rightarrow 0$.

Как следует из формул (23) и (24), норма быстрых волн оказывается конечной. В квазиоптических волноводах за пределами рабочего объема поле сводится к слабым уходящим волнам, экспоненциальный рост которых происходит только вдали от оси волновода. Естественно поэтому предположить, что в таких системах при вычислении нормы можно ограничиться интегрированием только по рабочему сечению волновода. Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере открытой линии, образованной последовательностью фазовых корректоров (линз, диафрагм и т. п.). Для простоты мы ограничимся двумерным случаем; поперечный размер волновода в направлении оси y обозначим через $2a$. В приближении параболического уравнения в пространстве между корректорами поперечные компоненты полей могут быть представлены в виде

$$E_x = \eta_0 H_y = W(y, z) e^{ikz} \quad (\eta_0 = \sqrt{\nu_0/\epsilon_0}), \quad (25)$$

где W — медленно изменяющаяся функция координат. Предполагая, что волноводная структура симметрична относительно плоскости $y = 0$, для четных функций W при $|y| > a$ можно написать разложение [2]:

$$W(y, z) = \sum_{-\infty}^{\infty} B_m \exp\{i[x_m |y| + (h_m - k)z]\}, \quad (26)$$

где $x_m \approx \sqrt{x^2 + 2\pi mk/L}$ при малых m . Норма квазисобственной волны в этом приближении равна

$$\tilde{N} = \frac{4}{\eta_0} \int_0^{\infty e^{i\gamma}} W^2(y, z) dy. \quad (27)$$

Разобьем интеграл в последней формуле на два слагаемых

$$I_a = \int_0^a W^2 dy, \quad I_{\text{rad}} = \int_a^{\infty e^{i\gamma}} W^2 dy, \quad (28)$$

где первый интеграл вычисляется при действительных y , а второй — для комплексных $y = a + \xi e^{i\gamma}$ ($0 \leq \xi < \infty$). Подставляя ряд (26) в формулу (28) и проводя почленное интегрирование, получим

$$I_{\text{rad}} = \sum_{m,n} \frac{B_m B_n}{i(x_m + x_n)} \exp[i(x_m + x_n)a] \sim \frac{W^2(a)}{x}, \quad (29)$$

т. е. I_{rad} определяется значением поля на краю линз. Интеграл I_a приближенно равен $I_a \approx a_0 W_0^2$, где a_0 — средний размер волнового пучка (т. е. размер каустики, диафрагм или линз), а W_0 — среднее значение поля вблизи оси волновода. Из последних соотношений следует, что

$$\frac{I_{\text{rad}}}{I_a} \sim \frac{1}{\kappa a_0} \frac{W^2(a)}{W_0^2}. \quad (30)$$

Оценим теперь порядок сомножителей в правой части формулы (30). Поперечное волновое число κ в открытых периодических волноводах имеет [2] порядок $\sqrt{L/k}$ (линзовые линии) или $1/a_0$ (диафрагменные линии), поэтому $|\kappa| a_0 \sim 1$. Как известно, в открытых линиях на границе фазовых корректоров ($y = \pm a$) поля спадают до весьма малых значений; по существу благодаря этому свойству и обеспечивается слабое затухание квазисобственных волн при распространении вдоль волновода (т. е. малые потери на излучение). Например, в линзовых линиях для волн с каустиками при $a \gg y_c$ ($2y_c$ — поперечный размер между каустическими поверхностями) имеем $W(a)/W_0 \sim \exp(-a^2/2y_c^2)$, а для диафрагменного волновода $W(a)/W_0 \sim \sqrt{L/ka^2}$ [2]. Таким образом, для слабозатухающих быстрых волн в силу условия $W(a)/W_0 \ll 1$ мы получаем соотношения

$$|I_{\text{rad}}| \ll |I_a|, \quad \tilde{N} = \frac{4}{\eta_0} \int_0^a W^2 dy, \quad (31)$$

т. е. значение \tilde{N} фактически определяется интегралом по сечению волновода. Отметим, что написанное неравенство справедливо только для волн низших типов; для волн высших номеров $W(a) \sim W_0$ и при вычислении нормы надо пользоваться общим выражением (24). Соотношение (30) можно переписать также в виде

$$\frac{I_{\text{rad}}}{I_a} \sim \frac{k}{x^2} \text{Im } h, \quad (32)$$

если учесть, что по порядку величины коэффициент затухания равен $\text{Im } h \sim \kappa W^2(a)/(ka_0 W_0^2)$. Оценки показывают, что в реальных системах миллиметрового диапазона отношение $|I_{\text{rad}}/I_a|$ имеет порядок 10^{-3} и меньше.

В заключение отметим, что в случае, когда для открытого волновода существует эквивалентный открытый резонатор (см. [2], стр. 295), выражение для нормы квазисобственных волн \tilde{N} в приближении параболического уравнения можно получить из выражения для нормы соответствующего квазисобственного колебания N_{res} , учитывая очевидное соотношение

$$N_{\text{res}} = L\tilde{N}/2.$$

Пользуясь приведенными выше формулами, нетрудно приближенно рассчитать возбуждение быстрых волн в открытых волноводах. Как и в закрытых системах, эффективность возбуждения открытой линии может быть высокой, если распределение сторонних источников близко к распределению полей возбуждаемой волны [8]; в противном случае энергия передается в основном высшим волнам и сферической волне. Например, при возбуждении открытых волноводов миллиметрового диапазона сосредоточенными источниками мощностью, переносимая рабочей волной, составляет величину порядка 10^{-2} или меньше от полной мощности излучения. Подчеркнем, что в открытых линиях при возбуждении быстрых волн принципиально невозможно достичь полного перехода энергии источников в энергию этих волн: часть мощности всегда уносится сферической волной [4].

Отметим, что вблизи оси волновода кроме суммы квазисобственных и поверхностных волн также присутствует интегральное слагаемое — пространственная волна (или фон), которое сравнительно медленно убывает при $|z| \rightarrow \infty$. Величину полей фона при больших $|z|$ (точнее, при $|z| \gg ka^2$) можно определить методом стационарной фазы из формул (21). Существование пространственной волны приводит к тому, что выделять из интегралов (21) поля быстрых волн имеет смысл лишь при $|z| \lesssim z_* = 1/\text{Im } h_*$; при больших $|z|$ каждая быстрая волна становится неотличимой от пространственной волны.

Наличие пространственной волны является одной из причин, по которой нельзя пользоваться разложениями только по квазисобственным волнам. Присутствие этой волны может сказаться и при расчете преобразования волн в нерегулярных волноводах. Пренебрежение фоном вряд ли можно считать обоснованным, поскольку поле этой волны может быть сравнимо с квазисобственными волнами высших номеров. Вопрос о величине поля пространственной волны требует дальнейшего изучения.

Автор благодарен П. Л. Капице, Л. А. Вайнштейну за обсуждение работы и ценные замечания и В. В. Шевченко за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Котельник, в сб. Квазиоптика, изд. Мир, М., 1966, стр. 210.
2. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
3. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 10, 2340 (1957)
4. А. Б. Маненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 5, 739 (1970).
5. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд. Наука, М., 1969.
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
7. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1065 (1961).
8. G. Goubau, Advances in microwaves, 3, Academic Press, N. Y. — London, 1968, p. 110.

EXCITATION OF OPEN PERIODIC WAVEGUIDES

A. B. Manenkov

The problem of excitation of arbitrary-shaped open periodic waveguides is considered. The excitation is calculated by using the field expansion over the wave systems of continuous and discrete spectra. The fields of weakly-attenuating quasi-modes are separated from the full field near the waveguide axis.

УДК 621.372.413

О ВЫРОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СФЕРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Б. С. Ламден, В. В. Новиков

Исследуется зависимость собственных частот сферического резонатора от поверхностного импеданса стенки его полости. Показано, что для определенных значений поверхностного импеданса имеет место вырождение собственных частот, причем их алгебраическая кратность оказывается равной двум.

Задача о собственных колебаниях и собственных частотах сферического резонатора с идеально проводящей стенкой полости или стенкой полости, обладающей конечной проводимостью, хорошо изучена [1, 2]. Менее изученной является аналогичная задача для сферического резонатора при произвольном поверхностном импедансе $\eta_{\text{пов}}$ стенки его полости. Рассмотрен лишь случай, когда импеданс имеет чисто индуктивный или чисто емкостный характер [3]. В настоящей работе приводятся результаты исследования зависимости собственных частот сферического резонатора от поверхностного импеданса его стенки, который принимает всевозможные значения, соответствующие пассивным физическим осуществимым структурам ($\text{Re } \eta_{\text{пов}} \geq 0$) [4].

Электромагнитное поле внутри сферической полости радиуса a , заполненной однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ , может быть представлено в сферической системе координат r, θ, φ в виде суперпозиции ТМ- и ТЕ-полей (далее рассматривается гармоническая зависимость поля от времени вида $e^{-i\omega t}$) [1]:

$$E = \text{rot rot } \Pi_e e_r + ik \text{ rot } \Pi_h e_r; \quad (1)$$

$$H = \eta_c H = -ik \text{ rot } \Pi_e e_r + \text{rot rot } \Pi_h e_r, \quad (2)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ — волновое число, а $\eta_c = \sqrt{\mu/\epsilon}$ — характеристический импеданс среды, заполняющей резонатор. Потенциалы поля Π_e и Π_h удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi_\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi_\alpha}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi_\alpha = 0 \quad (3)$$

$$(\alpha = e, h).$$

Электромагнитное поле должно быть ограниченным при $r = 0$, а на стенке полости — удовлетворять граничному условию, в качестве которого мы используем приближенное граничное условие импедансного типа [5]

$$[e_r, E] = -\delta [e_e [e_r, H]], \quad (4)$$

где $\delta = \eta_{\text{пов}}/\eta_c$ — приведенный поверхностный импеданс стенки полости резонатора. Учитывая выражения (1), (2) и соотношение (4),

находим, что потенциалы должны быть ограничены в начале координат и подчиняться импедансным граничным условиям при $r = a$:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial r} = ik\delta \Pi_e, \quad \frac{\partial \Pi_h}{\partial r} = \frac{ik}{\delta} \Pi_h. \quad (5)$$

Поскольку уравнения для электрического и магнитного потенциалов совпадают, а граничное условие при $r = a$ для магнитного потенциала получается из граничного условия для электрического потенциала заменой приведенного поверхностного импеданса на обратную величину, то достаточно рассмотреть поле ТМ-типа.

Общее решение уравнения (3), ограниченное в начале координат, может быть представлено в виде ряда по сферическим функциям:

$$\Pi_e = \Pi_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \Pi_{mn}, \quad (6)$$

$$\Pi_{mn} = (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \psi_n(kr),$$

где n и m — целые числа, $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенная функция Лежандра, $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — функция Бесселя, a_{mn}

и b_{mn} — произвольные постоянные. Заметим, что член Π_{00} в разложении (6) можно не принимать во внимание, так как, согласно (1), (2), соответствующее ему электромагнитное поле равно нулю. Подстановка общего решения (6) в первое граничное условие (5) приводит к уравнению для собственных частот $\omega_s^{(n)}$ n -го типа колебаний

$$\psi_n'(z_s^{(n)}) = i\delta \psi_n(z_s^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

где штрих обозначает производную по аргументу, $z_s^{(n)} = k_s^{(n)} a$, $k_s^{(n)} = \omega_s^{(n)} \sqrt{\epsilon\mu}$,

$$\omega_s^{(n)} = \frac{z_s^{(n)}}{a \sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{k_s^{(n)}}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (8)$$

Исследуем поведение корней $z_s^{(n)}$ уравнения (7) в зависимости от величины приведенного поверхностного импеданса. Для этого рассмотрим линии нулей на комплексной плоскости (z), соответствующие лучам $\arg \delta = \text{const} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg \delta \leq +\frac{\pi}{2} \right)$, $0 \leq |\delta| \leq \infty$ на плоскости $|\delta|$.

Точками выхода линий нулей будем называть корни $z_{s0}^{(n)}$ уравнения (7) при $\delta = 0$, а точками входа — его корни $z_{s\infty}^{(n)}$ при $|\delta| = \infty$. Точки выхода являются нулями производной функции $\psi_n(z)$

$$\psi_n'(z_{s0}^{(n)}) = 0 \quad (z_{s0}^{(n)} \neq 0) \quad (9)$$

и определяют собственные частоты ТМ-колебаний резонатора с идеально проводящей стенкой полости. Точки входа являются нулями функции $\psi_n(z)$

$$\psi_n(z_{s\infty}^{(n)}) = 0 \quad (z_{s\infty}^{(n)} \neq 0) \quad (10)$$

и определяют собственные частоты ТМ-колебаний резонатора с идеально магнитной стенкой (или собственные частоты ТЕ-колебаний резонатора с идеально проводящей стенкой полости). Корни уравнений

(9) и (10) вещественны и симметричны относительно начала координат [6]. Для оценки этих корней на положительной части вещественной оси плоскости (z) можно воспользоваться следующими приближенными выражениями [2]:

$$z_{s0}^{(n)} \approx n \frac{\pi}{2} + \left(s - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad z_{s\infty}^{(n)} \approx n \frac{\pi}{2} + s\pi \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Используя метод последовательных приближений, при известных $z_{s0}^{(n)}$ и $z_{s\infty}^{(n)}$ нетрудно получить приближенные значения корней уравнений (7) для малых и больших $|\delta|$:

$$z_s^{(n)} \approx z_{s0}^{(n)} - i\delta \left[1 - \frac{n(n+1)}{z_{s0}^{(n)2}} \right]^{-1} \quad \left(|\delta| \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \right); \quad (11)$$

$$z_s^{(n)} \approx z_{s\infty}^{(n)} - \frac{i}{\delta} \quad (|\delta| \gg 1). \quad (12)$$

При нахождении условия применимости выражения (11) было учтено неравенство

$$z_{10}^{(n)} > \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{5}{2}\right)},$$

являющееся следствием свойств нулей функции Бесселя и их производных [6].

Помимо точек входа $z_{s\infty}^{(n)}$, представляющих собой корни уравнения (10), точкой входа одной из линий нулей уравнения (7) является начало координат плоскости (z). При $|\delta| \rightarrow \infty$ нуль уравнения (7), расположенный в окрестности начала координат, описывается выражением, которое получается из (7) в результате использования степенного разложения для $\psi_n(z)$:

$$z_0^{(n)} \approx -i \frac{n+1}{\delta}. \quad (13)$$

Выражения (11)—(13) позволяют проанализировать ход линий нулей в окрестности точек выхода и входа. Линии нулей выходят из точек выхода под углами $\arg \delta - \frac{\pi}{2}$, а подходят к точкам входа под углами $-\arg \delta - \frac{\pi}{2}$ (рис. 1). При чисто индуктивном и чисто емкостном импедансах линии нулей в окрестности точек выхода и входа идут по вещественной оси. Покажем, что в этих случаях корни уравнения (7) вещественны при любых значениях $|\delta|$. Корни $z_s^{(n)}$ связаны соотношением (8) с величинами $k_s^{(n)}$, которые являются собственными значениями дифференциального оператора

$$LU_n = -k_s^{(n)2} U_n, \quad L = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad (14)$$

$\frac{dU_n}{dr} = ik_s^{(n)} \delta U_n$ при $r = a$, U_n — ограничено при $r = 0$. Действительно, из (14) мы получаем $U_n = \psi_n(k_s^{(n)} r)$, а из граничного условия при $r = a$ приходим к уравнению для собственных значений $k_s^{(n)}$, которое

совпадает с (7). Умножим теперь уравнение (14) на комплексно сопряженную функцию \bar{U}_n и проинтегрируем получившееся соотношение по r от 0 до a . В результате мы получаем уравнение, связывающее собственное значение $k_s^{(n)}$ с собственной функцией $\psi_n(k_s^{(n)} r)$ дифференциального оператора L :

$$k_s^{(n)2} - A k_s^{(n)} - B = 0, \quad (15)$$

где

$$A = - \frac{i\delta |\psi_n(k_s^{(n)} a)|^2}{\int_0^a |\psi_n|^2 dr}, \quad B = \frac{n(n+1) \int_0^a \frac{|\psi_n|^2}{r^2} dr + \int_0^a \left| \frac{d\psi_n}{dr} \right|^2 dr}{\int_0^a |\psi_n|^2 dr}.$$

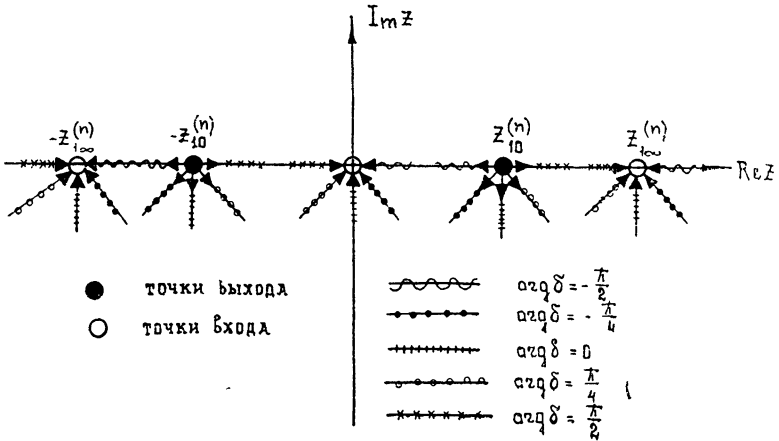


Рис. 1. Ход линий нулей в окрестности точек выхода и входа (стрелки указывают направление перемещения корней характеристического уравнения вдоль линий нулей при увеличении $|\delta|$).

Поскольку $B > 0$, а A вещественно при мнимых δ , то из (15) следует, что $k_s^{(n)}$ (а, следовательно, и $z_s^{(n)}$) является вещественной величиной при чисто индуктивном и чисто емкостном импедансах. Далее, из (7) видно, что данному значению $z_s^{(n)}$ соответствует только одно значение δ , в силу чего линии нулей не могут иметь точек пересечения. Поэтому при произвольном аргументе поверхностного импеданса $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg \delta \leq +\frac{\pi}{2}\right)$ все корни уравнения (7) и линии нулей располагаются в нижней полуплоскости ($\text{Im } z_s^{(n)} \leq 0$).

В случае чисто индуктивного импеданса линии нулей из точек выхода по вещественной оси идут в соседние точки входа, расположенные слева от точек выхода, а в случае чисто емкостного импеданса — по вещественной оси идут в соседние точки входа, расположенные справа от точек выхода. Таким образом, точка входа линии нулей, выходящей из фиксированной точки выхода, в зависимости от аргумента поверхностного импеданса может располагаться слева или справа от точки выхода. Такая смена точки входа связана с явлением касания линий нулей, т. е. с наличием кратных корней у уравнения (7). Уравнение

(7) обладает двукратными корнями $z_{s,B}^{(n)}$ (корней с большей кратностью нет), которые помимо (7) удовлетворяют уравнению

$$\psi'_n(z_{s,B}^{(n)}) = i \sqrt{1 - \frac{n(n+1)}{z_{s,B}^{(n)2}}} \psi_n(z_{s,B}^{(n)}),$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{1 - \frac{n(n+1)}{z_{s,B}^{(n)2}}} \geq 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) позволяет найти кратные корни уравнения (7), а (7) совместно с (16) — определить соответствующие этим корням значения приведенного поверхностного импеданса:

$$\delta_{s,B}^{(n)} = \sqrt{1 - \frac{n(n+1)}{z_{s,B}^{(n)2}}}. \quad (17)$$

Нетрудно показать, используя соотношения обхода по аргументу для функции Бесселя и ее производной [6], что корни уравнения (16) симметричны относительно мнимой оси плоскости (z); при этом из (17) следует, что симметрично расположенным кратным корням уравнения (7) соответствуют комплексно сопряженные значения приведенного поверхностного импеданса. Для корней уравнения (16) в четвертом квадранте плоскости (z) имеет место следующее приближенное выражение, которое получается, если в этом уравнении для функции Бесселя использовать ее асимптотическое представление, а затем применить для решения получившегося уравнения метод последовательных приближений:

$$z_{s,B}^{(n)} \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} + s\pi - \frac{i}{2} \ln \frac{4}{n(n+1)} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} + s\pi \right]^3 \quad (18)$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots).$$

Выражение (18) позволяет найти приближенные значения импедансов, соответствующих кратным корням уравнения (7):

$$|\delta_{s,B}^{(n)}| \approx \sqrt{1 - \frac{n(n+1)}{\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} + s\pi\right]^2}}; \quad (19)$$

$$\arg \delta_{s,B}^{(n)} \approx -\frac{2}{|\delta_{s,B}^{(n)}|^2} \frac{\ln \frac{4}{n(n+1)} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} + s\pi\right]^3}{\frac{4}{n(n+1)} \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} + s\pi\right]^3}. \quad (20)$$

Согласно (19) и (20), кратным корням уравнения (7), расположенным в четвертом квадранте плоскости (z), соответствуют индуктивные импедансы, причем с ростом номера s аргумент импеданса $\delta_{s,B}^{(n)}$ стремится к нулю, а его модуль — к единице.

На основании уравнения (7) с использованием (16) нетрудно выяснить поведение линий нулей в окрестности кратных корней. Если положить $\delta = \delta_{s,B}^{(n)} + \Delta\delta$, $z_s^{(n)} = z_{s,B}^{(n)} + \Delta z_s^{(n)}$ и, считая выполненными неравенства $|\Delta\delta| \ll |\delta_{s,B}^{(n)}|$, $|\Delta z_s^{(n)}| \ll |z_{s,B}^{(n)}|$, провести разложение по

степеням $\Delta z_s^{(n)}$ функции Бесселя и ее производной в окрестности $z_{s,B}^{(n)}$, то после несложных выкладок мы находим

$$\Delta z_s^{(n)} \approx \pm \exp(i\varphi_s^{(n)}) D_s^{(n)} \sqrt{\Delta|\delta| + i|\delta_{s,B}^{(n)}| \Delta(\arg \delta)}, \quad (21)$$

где

$$\varphi_s^{(n)} = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \arg z_{s,B}^{(n)} + \frac{1}{2} \arg \delta_{s,B}^{(n)}, \quad D_s^{(n)} = \frac{|z_{s,B}^{(n)}|^3}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\Delta|\delta| = |\delta| - |\delta_{s,B}^{(n)}|, \quad \Delta(\arg \delta) = \arg \delta - \arg \delta_{s,B}^{(n)}.$$

Ход нулей в окрестности кратного корня $z_{s,B}^{(n)}$, вытекающий из (21), представлен на рис. 2.

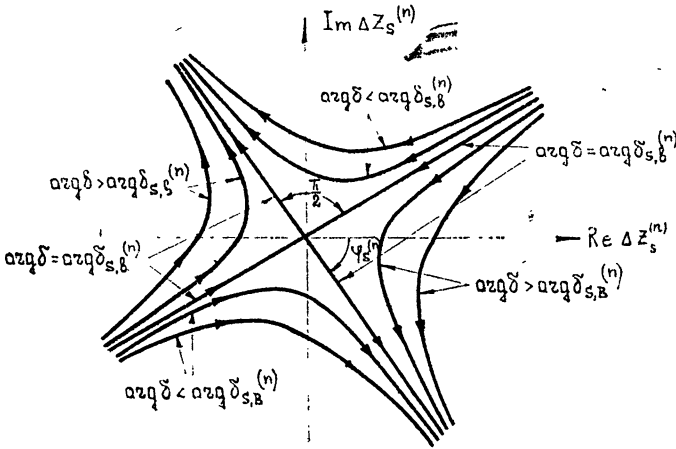


Рис. 2. Ход линий нулей в окрестности корня второй кратности $z_{s,B}^{(n)}$.

И, наконец, рассмотрим уравнение (7) в области $|z| > n^2$, $\text{Im } z < 0$, $|\text{Im } z| > 1$. В этой области после использования асимптотических представлений функции Бесселя и ее производной уравнение (7) значительно упрощается и принимает вид

$$q + i \arg \delta \approx 2(-)^n e^{-2iz} - \frac{n(n+1)}{2z^2},$$

$$q = |\delta| - 1 \quad (|q| \ll 1, \quad |\arg \delta| \ll 1). \quad (22)$$

Это уравнение обладает линией нулей, расположенной в области $|z| > n^2$, $|\text{Im } z| \gg 1$, где выполняется неравенство $\left| \frac{n(n+1)}{2z^2} \right| \gg 2|e^{-2iz}|$.

Корни уравнения, лежащие на этой линии, согласно (22) даются выражением

$$z_0^{(n)} \approx -i \sqrt{\frac{n(n+1)}{q + i \arg \delta}},$$

а качественный ход линии нулей $z_0^{(n)}$ показан на рис. 3.

Изложенные выше результаты позволяют представить общий характер поведения линий нулей уравнения (7). На рис. 4 приведена качественная картина линий нулей в четвертом квадранте плоскости (z). Линии нулей пронумерованы в порядке увеличения аргумента поверхностного импеданса от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. В заштрихованных областях

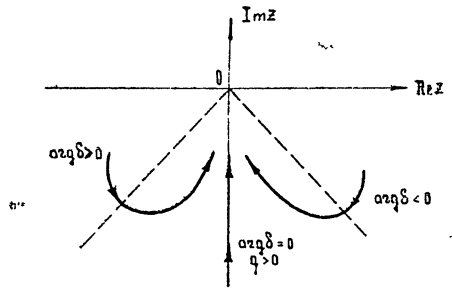


Рис. 3. Ход линии нулей $z_0^{(n)}$.

располагаются линии нулей для емкостных импедансов. Как видно из рисунка, по мере увеличения аргумента импеданса от $-\frac{\pi}{2}$ до 0 линии нулей отходят от вещественной оси и происходит их последовательное касание, которое захватывает все более далеко расположенные от начала координат линии нулей. В результате явления касания происходит смена точки входа линии нулей, идущей из фиксированной точки выхода $z_{s0}^{(n)}$. Вначале при $\arg \delta < \arg \delta_{s,B}^{(n)}$ точка выхода лежит левее точки выхода ($z_{s-1,\infty}^{(n)}$). Затем при $\arg \delta_{s,B}^{(n)} < \arg \delta < \arg \delta_{s+1,B}^{(n)}$ точкой входа является начало координат. И, наконец, при $\arg \delta > \arg \delta_{s+1,B}^{(n)}$ точка входа располагается справа от точки выхода ($z_{s0}^{(n)}$). В случае чисто активного импеданса ($\arg \delta = 0$) все линии нулей из точек выхода $z_{s0}^{(n)}$ идут в соседние точки входа $z_{s\infty}^{(n)}$, расположенные справа от точек выхода (линии 5 на рис. 4). Кроме того, в этом случае линией нулей является отрицательная часть мнимой оси. При дальнейшем

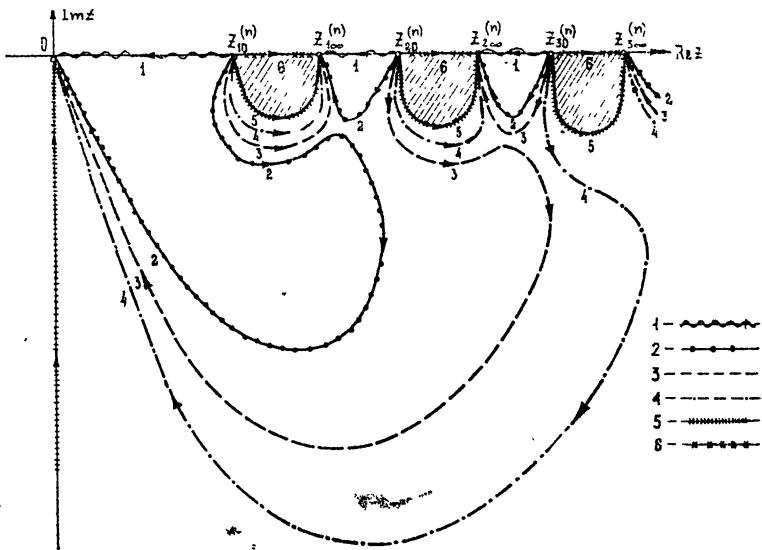


Рис. 4. Общая картина линий нулей:

$$\begin{aligned}
 1 - \arg \delta = -\frac{\pi}{2}; \quad 2 - -\frac{\pi}{2} < \arg \delta < \arg \delta_{1,B}^{(n)}, \quad 3 - \arg \delta_{1,B}^{(n)} < \arg \delta < \arg \delta_{2,B}^{(n)}, \\
 4 - \arg \delta_{2,B}^{(n)} < \arg \delta < \arg \delta_{3,B}^{(n)}; \quad 5 - \arg \delta = 0; \quad 6 - \arg \delta = +\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

увеличении аргумента импеданса от 0 до $\frac{\pi}{2}$ линии нулей, располагаясь в заштрихованных областях (рис. 4), прижимаются к вещественной оси.

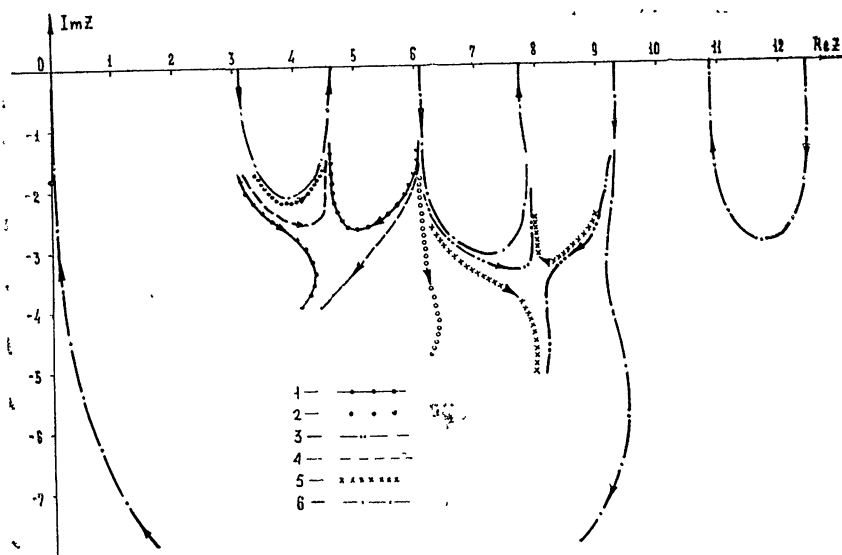


Рис. 5. Линии нулей \bar{z} для $n=1$ и следующих значений аргумента импеданса: 1 — $1^{\circ}55'$, 2 — $56'$, 3 — $34'$, 4 — $1^{\circ}38'$, 5 — $36'$, 6 — $25'$.

Линии нулей в третьем квадранте комплексной плоскости (z) легко строятся на основании известных линий нулей, лежащих в четвертом квадранте. Действительно, из (7) следует, что если при данном δ корень уравнения равен z , то корнем уравнения с комплексно сопряженным значением $\bar{\delta}$ является величина $-\bar{z}$. Поэтому линии нулей, соответствующие комплексно сопряженным импедансам, располагаются симметрично относительно мнимой оси. Учитывая это обстоятельство, мы видим, что в третьем квадранте при емкостных импедансах имеет место явление касания линий нулей, которое по мере увеличения аргумента импеданса захватывает все более близко расположенные к началу координат линии нулей. Здесь также имеет место смена точки входа линии нулей, и если при $\arg \delta < 0$ точки входа лежат слева от точек выхода, то при $\arg \delta > -\arg \delta_{1,в}^{(n)}$ они располагаются справа.

Поскольку приведенные результаты основаны на степенных и асимптотических разложениях функций Бесселя и носят приближенный характер, для уточнения деталей поведения линий нулей и оценки точности полученных выше приближенных формул целесообразно обратиться к результатам численного решения уравнения (7). В качестве иллюстрации результатов численных расчетов на ЭВМ на рис. 5 приведены отрезки отдельных линий нулей в окрестности первой и второй точек касания для случая $n=1$. Сопоставление результатов численных расчетов координат точек касания линий нулей со значениями, получающимися по приближенной формуле (18), показывает, что погрешность этой формулы уменьшается с увеличением номера s и составляет единицы процентов уже при $s=2$.

Таким образом, при определенных значениях поверхностного импеданса стенки полости сферического резонатора имеет место вырожде-

ние его собственных частот. Вырождение возникает в узком секторе аргументов импеданса примерно от $-1^{\circ}50'$ до $+1^{\circ}50'$, когда модуль приведенного поверхностного импеданса близок к единице. Как видно из (18), мнимая часть вырожденных частот сравнительно велика, так что добротность резонатора на этих частотах оказывается низкой (порядка единиц при малых s).

В заключение необходимо отметить, что при анализе уравнения (7) мы считали приведенный поверхностный импеданс не зависящим от частоты. В действительности поверхностный импеданс практически всегда является функцией частоты, и зависимость его от частоты значительно усложняет исследование уравнения (7). Для облегчения его решения в этом случае задачу целесообразно разбить на два этапа. На первом этапе следует рассмотреть уравнение (7) для частотно-независимого импеданса и найти его решение: $\omega_s^{(n)} = \omega_s^{(n)}(\delta)$. На втором этапе, задаваясь явным видом $\delta = \delta(\omega)$, необходимо решить систему уравнений

$$\omega_s^{(n)} = \omega_s^{(n)}(\delta), \quad \delta = \delta(\omega_s^{(n)}).$$

Решение этой системы и определит собственные частоты резонатора при заданной частотной зависимости поверхностного импеданса. Результаты настоящей работы относятся к решению первого этапа задачи определения собственных частот сферического резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, ВКАС, Л., 1949.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
3. P. Bhartia, M. A. K. Hamid, IEEE Trans., MTT-19, № 1, 110 (1971).
4. Э. М. Гюннинен, Г. И. Макаров, в сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 5, изд. ЛГУ, 97 (1966).
5. М. А. Леонтович, в сб. Исследования по распространению радиоволн, т. 2, изд. АН СССР, М.—Л., 5 (1948).
6. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, М., 1949.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
3 декабря 1974 г.

NATURAL FREQUENCY DEGENERATION OF A SPHERICAL RESONATOR

B. S. Lamden, V. V. Novikov

The dependence of the natural frequencies of a spherical resonator on the surface impedance of its cavity wall is investigated. It is shown that the natural frequency degeneration takes place for the definite values of the surface impedance, the algebraic multiplicity of the frequencies appears to be equal to two.

УДК 621.372.09

К ТЕОРИИ ВОЛНОВОДА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

К. А. Барсуков, Г. А. Григорян

Исследуется распространение электромагнитных волн типа H_{n0} в прямоугольном волноводе, поперечный размер которого меняется во времени. Найдено точное решение этой задачи для случая неравномерного движения одной из стенок волновода.

В последнее время появилось довольно большое число работ, посвященных исследованию электромагнитных полей в системах с движущимися границами раздела (см., например, [1] и указанную там литературу). Основным методом исследования задач подобного типа является метод распространяющихся волн и лишь в сравнительно небольшом количестве работ использовался метод разделения переменных. По существу, последним методом получено точное решение только двух задач: о резонаторе и волноводе с линейным законом движения стенки [2-4] и об одномерном резонаторе с гиперболическим законом движения стенки [4]. Ниже рассматривается точное решение задачи о распространении волн типа H_{n0} в прямоугольном волноводе, когда одна из стенок неравномерно двигается по определенному закону.

1. Пусть дан прямоугольный волновод без заполнения $\epsilon = \mu = 1$ с образующей параллельной оси Oz , стенки которого обладают бесконечно большой проводимостью. Рассмотрим распространение электромагнитных волн типа H_{n0} в таком волноводе, когда у электрического поля отлична от нуля единственная составляющая E_y . Одна из боковых стенок $x = 0$ волновода неподвижна, а вторая в момент времени $t = 0$ начинает двигаться по закону

$$x = \sqrt{2a\beta\tau + a^2}, \quad (1)$$

где $\tau = ct$ и $v = \beta c$ — начальная скорость движения стенки. При возрастании времени скорость стенки падает и обращается в нуль при достаточно больших τ при $\beta > 0$. При малых $\beta\tau$ уравнение (1) принимает вид

$$x = a + \beta\tau - \frac{\beta^2}{2a}\tau^2.$$

Таким образом, в этом случае формула (1) моделирует равномерное движение стенки с точностью до β^2 , а при учете следующего члена — равнозамедленное движение с ускорением $g = \beta^2 c^2/a$. Для волн типа H_{n0} векторы поля могут быть записаны через скалярную функцию $A(x, \tau)e^{ihz}$ в виде

$$E_y = -\frac{\partial A}{\partial \tau} e^{ihz}, \quad H_x = -ihAe^{ihz}, \quad H_z = \frac{\partial A}{\partial x} e^{ihz}, \quad (2)$$

где h — постоянная распространения для волновода, и остальные ком-

поненты векторов E и H равны нулю. Функция $A(x, \tau)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - h^2 A = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями на боковых стенках волновода (см. [2]):

$$A(0, \tau) = 0, \quad A(\sqrt{2a\beta\tau + a^2}, \tau) = 0. \quad (4)$$

Перейдем к новым переменным ξ, η задаваемыми соотношениями

$$\xi = \frac{1}{2} [\varphi(\tau + x) - \varphi(\tau - x)], \quad (5)$$

$$\eta = \frac{1}{2} [\varphi(\tau + x) + \varphi(\tau - x)],$$

где

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{a\beta}\zeta} - \frac{1}{\beta}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что граница волновода $x = 0$ переходит в $\xi = 0$, $ax = \sqrt{2a\beta\tau + a^2}$ в $\xi = 1$ в области переменных ξ, η . Проводя в уравнении (3) замену переменных (5), получим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + h^2 a^2 [\beta^2 \xi^2 - (1 + \beta\eta)^2] A = 0. \quad (7)$$

Последнее уравнение очевидно допускает разделение переменных. В самом деле, если искать неизвестную функцию A в виде

$$A = U(\xi) V(\eta), \quad (8)$$

то, разделяя переменные, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + (h^2 a^2 \beta^2 \xi^2 + \mu^2) U = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2} + [h^2 a^2 (1 + \beta\eta)^2 + \mu^2] V = 0,$$

где μ^2 — постоянная разделения с граничными условиями

$$U(0) = 0, \quad U(1) = 0. \quad (10)$$

2. Решением уравнений (9) являются так называемые функции параболического цилиндра, достаточно подробная теория которых содержится в работах [5-7]. Решение уравнений (9) представляется в [6] в виде степенного ряда

$$U_x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n, \quad (11)$$

и коэффициенты этого ряда удовлетворяют рекуррентной формуле

$$A_n = -\frac{1}{n(n-1)} (A_{n-4} + \kappa A_{n-2}) \quad (n = 4, 5, \dots),$$

$$A_2 = -\frac{x}{2} A_0, \quad A_3 = -\frac{x}{6} A_1, \quad (12)$$

где $x = \frac{\mu^2}{ha\beta}$ и $\zeta = \sqrt{ha\beta} \xi$, либо $\zeta = \sqrt{ha\beta} (\eta + 1/\beta)$ и A_0, A_1 — произвольны. Из (11) соответствующим выбором A_0 и A_1 выделяется фундаментальная система решений условиями

$$\begin{aligned} {}_e U_x(0) &= 1, & {}_e U'_x(0) &= 0, \\ {}_0 U_x(0) &= 0, & {}_0 U'_x(0) &= 1, \end{aligned}$$

причем четная функция этой системы ${}_e U_x(\zeta)$ представляется рядом

$${}_e U_x(\zeta) = 1 - \frac{x}{2!} \zeta^2 + \frac{x^2 - 2}{4!} \zeta^4 - \frac{x^3 - 14x}{6!} \zeta^6 + \dots, \quad (13)$$

а нечетная ${}_0 U_x(\zeta)$ — рядом

$${}_0 U_x(\zeta) = \zeta - \frac{x}{3!} \zeta^3 + \frac{x^2 - 6}{5!} \zeta^5 - \frac{x^3 - 26x}{7!} \zeta^7 + \dots \quad (14)$$

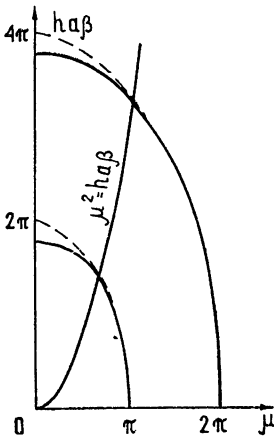


Рис. 1.

Для решения первого из уравнений (9) с граничными условиями (10) мы воспользуемся нечетной функцией ${}_0 U_x(\zeta)$. Тогда первое уравнение (10) удовлетворяется автоматически, а второе приводит к соотношению

$${}_0 U_x(\sqrt{ha\beta}) = 0, \quad (15)$$

дающему связь между параметрами $ha\beta$ и μ . В соответствии с теоремой Штурма—Лиувилля уравнение (15) имеет бесконечное число ветвей. Для первых двух ветвей зависимость $ha\beta$ от μ представлена графически на рис. 1 в виде сплошной кривой.

Общее решение уравнения (7) может быть представлено через функции параболического цилиндра в виде

$$\begin{aligned} A = \sum_{n=1}^{\infty} {}_0 U_{x_n}(\sqrt{ha\beta} \xi) \left\{ \alpha_n {}_0 U_{x_n} \left(\sqrt{ha\beta} \left(\eta + \frac{1}{\beta} \right) \right) + \right. \\ \left. + \beta_n {}_e U_{x_n} \left(\sqrt{ha\beta} \left(\eta + \frac{1}{\beta} \right) \right) \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где значок n указывает номер ветви уравнения (15), а неизвестные коэффициенты α_n и β_n определяются из начальных условий задачи.

3. Формула (16) дает точное решение задачи. Однако провести наглядный физический анализ формулы (16) в полном объеме представляется затруднительным. Поэтому ниже мы получим приближенное решение методом ВКБ, справедливое в достаточно широкой области

значений переменных. Сделаем замену переменной $\xi = \frac{\mu}{ha\beta} s$ в первом уравнении (9) и запишем его в виде

$$\frac{d^2 U}{ds^2} + x^2 (s^2 + 1) U = 0. \quad (17)$$

Как обычно, в методе ВКБ решение (17) ищем в виде произведения

$$U = Q(s) \exp\left(\pm i x \int_0^s \sqrt{1+s^2} ds\right), \quad (18)$$

где

$$Q(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} Q_n(s).$$

Ограничиваясь нахождением первых двух членов ряда, получим

$$Q_0 = C (s^2 + 1)^{-1/4}, \quad Q_1 = \mp C \frac{s (s^2 + 6)}{24 i (s^2 + 1)^{7/4}}. \quad (19)$$

Если теперь потребовать, чтобы $\left| \frac{1}{x} Q_1 \right| \ll |Q_0|$, то

$$U(\xi) = C \left(\frac{h^2 a^2 \beta^2}{\mu^2} \xi^2 + 1 \right)^{-1/4} \sin \frac{\mu^2}{ha\beta} \int_0^{\frac{ha\beta \xi}{\mu}} \sqrt{1+s^2} ds, \quad (20)$$

и формула (20) справедлива, если

$$\left| \frac{s (s^2 + 6)}{24 x (s^2 + 1)^{3/2}} \right| \ll 1. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что левая часть (21) имеет максимум при $s = \sqrt{2/3}$ и, если заменить ее на максимальное значение, то условие применимости приближенной формулы (20)

$$0,105 \left| \frac{ha\beta}{\mu^2} \right| \ll 1 \quad (22)$$

справедливо для любых значений переменной ξ . Первое из граничных условий (10) $U(0) = 0$ удовлетворяется с помощью (20) автоматически, а второе условие $U(1) = 0$ приводит к следующему уравнению, связывающему параметры μ и $ha\beta$:

$$f(r) = \sqrt{1+r^2} + \frac{1}{r} \ln(r + \sqrt{1+r^2}) = \frac{2\pi n}{\mu}, \quad (23)$$

где $r = \frac{ha\beta}{\mu}$ и $n = 0, 1, 2, \dots$. Слева в (23) стоит стандартная функция

$f(r)$. Обозначая обратную к ней функцию как $f^{-1}\left(\frac{2\pi n}{\mu}\right)$, мы получим

$$ha\beta = \mu_n f^{-1}\left(\frac{2\pi n}{\mu_n}\right) \quad (24)$$

— функциональную зависимость между $ha\beta$ и μ_n . График последней при $n = 1, 2$ изображен на рис. 1 пунктирной линией. На этом же рисунке нанесена кривая $ha\beta = \mu_n^2$, дающая запас точности приближения по условию (22) в один порядок. Заметим, что расхождение между точными и приближенными значениями функции малы для любых значений μ_n и $ha\beta$ и уже при $n = 2$ составляют несколько процентов при малых μ_n , где неравенство (22) не выполняется. При $\frac{ha\beta}{\mu_n} \ll 1$ уравнение (24) допускает сравнительно простую запись:

$$ha\beta = \sqrt{6\mu_n(\pi n - \mu_n)}, \quad (25)$$

пригодную, например, для нерелятивистского закона движения границы.

Решение уравнения (7) в приближении ВКБ по аналогии с (20) определяется соотношением

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n}{\gamma_n} \int_0^{\xi} \sqrt{1+\zeta^2} d\zeta\right)}{\left\{(\gamma_n^2 \xi^2 + 1) \left[\gamma_n^2 \left(\eta + \frac{1}{\beta}\right) + 1\right]\right\}^{1/4}} \times \\ \times \left\{ a_n \exp\left[i \frac{\mu_n}{\gamma_n} \int_0^{\eta(\eta+1/\beta)} \sqrt{1+\zeta^2} d\zeta \right] + \right. \\ \left. + b_n \exp\left[-i \frac{\mu_n}{\gamma_n} \int_0^{\eta(\eta+1/\beta)} \sqrt{1+\zeta^2} d\zeta \right] \right\}, \quad (26)$$

где $\gamma_n = ha\beta/\mu_n$, a_n и b_n — коэффициенты, определяемые из начальных условий задачи, а суммирование проводится последовательно по ветвям функции (24). Заметим, что формула (26) применима при любых значениях параметров ξ и η , если выполнено неравенство (22).

Мгновенные частоты ω_n^\pm и поперечные волновые числа $k_{n\perp}^\pm$ электромагнитного поля в волноводе можно определить из соотношений

$$\omega_n^\pm = c \frac{\partial \Phi_n^\pm}{\partial \tau}, \quad k_{n\perp}^\pm = \frac{\partial \Phi_n^\pm}{\partial x}, \quad (27)$$

где

$$\Phi_n^\pm = \frac{\mu_n}{\gamma_n} \left(\int_0^{\eta(\eta+1/\beta)} \sqrt{1+\zeta^2} d\zeta \pm \int_0^{\xi} \sqrt{1+\zeta^2} d\zeta \right). \quad (28)$$

Если выполнить в (27) дифференцирование, то

$$\omega_n^\pm = -c \mu_n \frac{(\eta + 1/\beta) \sqrt{\gamma_n^2 (\eta + 1/\beta)^2 + 1} \mp \xi \sqrt{\gamma_n^2 \xi^2 + 1}}{a\beta [\xi^2 - (\eta + 1/\beta)^2]}, \\ k_{n\perp}^\pm = \mu_n \frac{\xi \sqrt{\gamma_n^2 (\eta + 1/\beta)^2 + 1} \mp (\eta + 1/\beta) \sqrt{\gamma_n^2 \xi^2 + 1}}{a\beta [\xi^2 - (\eta + 1/\beta)^2]}, \quad (29)$$

причем ω_n^\pm и $k_{n\perp}^\pm$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{\omega_n^{\pm 2}}{c^2} - k_{n\perp}^{\pm 2} = h^2, \quad (30)$$

справедливого для стационарных волноводов. В предельном случае $\gamma_n \ll 1$, который имеет место, например, для нерелятивистского движения стенки, частоты и волновые числа можно записать в виде

$$\omega_n^\pm = \frac{c\mu_n}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 h^2}{\mu_n^2}} - \frac{\beta\tau}{a \sqrt{1 + \frac{a^2 h^2}{\mu_n^2}}} \mp \beta \frac{x}{a} \right), \quad (31)$$

$$k_{n\perp}^\pm = \frac{\mu_n}{a} \left[\pm \left(1 - \frac{\beta\tau}{a} \right) - \beta \frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 h^2}{\mu_n^2}} \right].$$

Заметим, что частота стационарного волновода $\omega_n^0 = \frac{c\mu_n}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 h^2}{\mu_n^2}}$

сохраняется на плоскости $x = \frac{ct}{[1 + a^2 h^2 / \mu_n^2]^{1/2}}$, на которой всегда $\omega_n^- = \omega_n^0$, причем левее этой плоскости $\omega_n^- < \omega_n^0$ и правее $\omega_n^- > \omega_n^0$.

4. В частном случае при $h = 0$ волновод превращается в плоский резонатор и все полученные выше результаты упрощаются. Решение уравнения (9) при $h = 0$ с граничными условиями (10), как легко видеть, представляется в виде

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \{ \exp [i \pi n (\eta + \xi)] - \exp [i \pi n (\eta - \xi)] \}, \quad (32)$$

где $a_n = a_{-n}^*$, или в переменных x и τ

$$A(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \{ \exp [i \pi n \varphi (\tau + x)] - \exp [i \pi n \varphi (\tau - x)] \}, \quad (33)$$

где $\varphi(\zeta) = \left(1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{a\beta} \zeta \right)^{1/2} - \frac{1}{\beta}$. Поле в резонаторе представляется в виде системы плоских одномерных волн, амплитуды которых определяются начальными значениями полей. Пусть при $\tau = 0$

$$E_y(x, 0) = E_0(x) = - \left. \frac{\partial A}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad H_z(x, 0) = H_0(x) = \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{\tau=0}. \quad (34)$$

Тогда нетрудно видеть, что коэффициенты a_n определяются соотношением

$$a_n = \frac{1}{4i\pi n} \int_{-a}^a \chi(\zeta) e^{-i\pi n \varphi(\zeta)} d\zeta, \quad (35)$$

где $\chi(\zeta) = H_0(\zeta) - E_0(\zeta)$ и $H_0(\zeta)$, $E_0(\zeta)$ продолжают соответственно четным и нечетным образом на область отрицательных значений ζ . Пусть при $\tau < 0$, когда стенки резонатора неподвижны, в резонаторе реализовалось колебание вида

$$E_y = E_0 \sin \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi m}{a} \tau.$$

Тогда функция $\chi(x)$ оказывается равной

$$\chi(x) = -E_0 \sin \frac{\pi m}{a} x. \quad (36)$$

В таком случае, как нетрудно показать с помощью вычисления интеграла в (35), a_n выразятся через функции Френеля:

$$a_n = \frac{E_0 a}{8 \pi m \sqrt{m \beta}} \exp \left[-i \frac{\pi}{2} \frac{(m-n)^2 + m^2 \beta^2}{m \beta} \right] \left[\Phi \left(\frac{m-n+m\beta}{\sqrt{m\beta}} \right) - \Phi \left(\frac{m-n-m\beta}{\sqrt{m\beta}} \right) \right] + \frac{E_0 a}{8 \pi m \sqrt{m \beta}} \exp \left[i \frac{\pi}{2} \frac{(m+n)^2 + m^2 \beta^2}{m \beta} \right] \times (37)$$

$$\times \left[\Phi^* \left(\frac{m+n+m\beta}{\sqrt{m\beta}} \right) - \Phi^* \left(\frac{m+n-m\beta}{\sqrt{m\beta}} \right) \right],$$

где

$$\Phi(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \exp \left(i \frac{\pi}{2} \vartheta^2 \right) d\vartheta.$$

В предельном случае малых $m\beta$ (37) упрощается и принимает вид

$$a_n = (-1)^{m-n+1} \frac{E_0 a}{i \pi^2} \frac{m n \beta}{(m^2 - n^2)^2} \quad (n \neq m), \quad (38)$$

$$a_m = \frac{E_0 a}{4 \pi m} - \frac{E_0 a}{16 i \pi^2 m^2} \beta \quad (n = m).$$

Из (38) следует, что при малых β наиболее существенный вклад в поле дает m -я гармоника образовавшихся здесь своеобразных «динамических мод» (функции $\exp(-i\pi n \varphi(\zeta))$ и $\sin \frac{\pi m}{a} \zeta$ с точностью до β являются ортогональными). Величина же соседних с ней гармоник быстро падает по мере увеличения относительных номеров этих гармоник. Мгновенные частоты гармоник можно найти из первой формулы (29), полагая там $h = 0$. Заметим, что все решение по методу ВКБ в силу условия (22) становятся точным при $h = 0$. Итак,

$$\omega_n^{\pm} = \frac{\pi n c}{a} \frac{1}{[1 + \beta^2 + (2/a)\beta(\tau \pm x)]^{1/2}}. \quad (39)$$

При малых β отношение частот ω_n^+ и ω_n^- оказывается равным [2]

$$\frac{\omega_n^+}{\omega_n^-} = \frac{1 - \beta \frac{x}{a + \beta \tau}}{1 + \beta \frac{x}{a + \beta \tau}} \quad (40)$$

и при $x = a + \beta \tau$ переходит в хорошо известную формулу отражения от движущегося зеркала.

Поле в резонаторе находится по формулам (2) и при $h = 0$ представляется в виде

$$\begin{cases} E_y \\ H_z \end{cases} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \frac{\pi n}{a\beta} a_n \left\{ \frac{\exp [i\pi n \varphi (\tau - x)]}{\varphi (\tau - x) + 1/\beta} \mp \frac{\exp [i\pi n \varphi (\tau + x)]}{\varphi (\tau + x) + 1/\beta} \right\}, \quad (41)$$

где знак минус соответствует E_y , а знак плюс — H_z , причем поля в (41) остаются конечными при любых x и τ . При нерелятивистской скорости движения стенки ($\beta \ll 1$) выражения для частот и полей резонатора (39) и (41) совпадают с [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 10, 1538 (1971).
2. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 6, 935 (1969).
3. А. И. Весницкий, А. В. Костров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 5, 754 (1971).
4. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 10, 1532 (1971).
5. R. D. Spence, C. P. Wells, Phys. Rev., **62**, 58 (1942).
6. C. P. Wells, R. D. Spence, J. Math. Phys. Mass. Inst. Techn., **24**, № 1, 51 (1945).
7. W. Magnus, Zeitschrift für Physik, **118**, № 5—6, 343 (1941).
8. Р. И. Баранов, Ю. М. Широков, ЖЭТФ, **53**, № 6 (12), 2123 (1967).

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
29 октября 1974 г.

TO THE THEORY OF WAVEGUIDE WITH MOVING BOUNDARIES

K. A. Barsukov, G. A. Grigoryan

The propagation of H_{n0} type electromagnetic waves in a rectangular waveguide the cross section of which varies in time is considered. An exact solution of this problem is found for the case of a nonuniform motion of one of the waveguide walls.

УДК 621.385.6

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА В МАГНЕТРОНЕ

Л. М. Грошков, Е. В. Крупин, М. И. Кузнецов, С. Х. Завьялов

Проведен оценочный расчет времени формирования электронного облака в магнетроне в предгенерационном режиме. Сравнение результатов эксперимента с расчетными данными показывает, что минимальное время нарастания импульса анодного напряжения, при котором еще обеспечивается стабильное возбуждение автоколебаний в магнетроне, совпадает с временем формирования диффузионной части электронного облака.

ВВЕДЕНИЕ

В [1, 2] было теоретически и экспериментально установлено, что в статическом предгенерационном режиме магнетрона состояние значительной части электронного облака близко к так называемому статическому синхронному состоянию. Такое состояние наиболее благоприятно для возбуждения рабочих колебаний в магнетроне, потому что подавляющая часть электронов имеет одинаковые угловые скорости. Следовательно, время формирования статического состояния электронного облака является и, временем, необходимым для установления наиболее благоприятных условий возбуждения рабочих колебаний в магнетронных генераторах. Поэтому его оценка представляет непосредственный интерес для анализа возбуждения импульсных магнетронов.

В настоящей работе эта оценка выполнена на основании следующих соображений. Установление статического состояния электронного облака в негенерирующем магнетроне (магнетронном диоде) происходит в результате диффузии электронов, вызванной шумовым электрическим полем. Коэффициенты диффузии, характеризующие этот процесс, рассчитаны в [3]. Используя результаты [3], можно составить диффузионное уравнение, описывающее установление статического предгенерационного состояния электронного облака, и рассчитать время его формирования путем решения этого уравнения при определенных начальных условиях.

Строгое решение указанного уравнения с учетом зависимости коэффициента диффузии от плотности заряда представляет сложную математическую задачу. Поэтому для оценки времени формирования электронного облака магнетрона целесообразно составить и решить диффузионное уравнение без учета зависимости коэффициента диффузии от плотности заряда.

Поскольку зависимость коэффициента диффузии D от плотности заряда ρ обусловлена влиянием последнего на постоянную составляющую электрического поля, то, предполагая, что D не зависит от ρ , естественно считать, что и поле в диффузионной части электронного облака постоянно. В свою очередь это означает, что граница между диффузионной и регулярной частью электронного облака в процессе формирования диффузионной части электронного облака не смещается.

В настоящей работе используются все указанные упрощающие предположения.

Согласно [3], коэффициент диффузии равен

$$D = \frac{(e/m)^2 \overline{E}_y^2}{2\omega_H^2 \tau |\omega_e|^2}, \quad (1)$$

где \overline{E}_y^2 — средний квадрат азимутальной компоненты флуктуационного поля, ω_H — циклотронная частота, $\omega_e^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{v_e}{v_\phi}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2$, ω — средняя частота той полосы частот в спектре шумов магнетрона, в которой сосредоточена подавляющая часть энергии флуктуаций электрического поля, τ — время корреляции флуктуационного поля, v_e — угловая скорость электронов в точке наблюдения, v_ϕ — угловая фазовая скорость шумовой волны.

Расчет величины ω может быть выполнен на основании следующих соображений. Известно, что величина ω в процессе формирования диффузионной части электронного облака практически не изменяется [6]. Следовательно, она может быть вычислена по формулам работы [4], полученным для установившихся состояний. Величина τ , согласно экспериментальным данным, находится в пределах $\frac{20}{\omega} \leq \tau < \frac{50}{\omega}$.

При указанных выше упрощающих предположениях величина отношения $\frac{v_e(r)}{v_\phi}$ в каждой точке может быть легко рассчитана, если известна фазовая скорость шумовой волны. В рамках принятых упрощающих предположений эта скорость близка к скорости электронов на границе между диффузионной и двухпоточной частями электронного облака. Согласно [4, 5], она меньше последней на 5—10%.

Таким образом,

$$|\omega_e|^2 = \omega^2 \left[1 - \frac{v_e(r)}{x v_e(\bar{r})} \right]^2 + \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 = \omega^2 \left[\left(1 - \frac{v_e(r)}{x v_e(\bar{r})} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right],$$

где $v_e(\bar{r})$ — азимутальная скорость электронов на границе между диффузионной и двухпоточной частями электронного облака, $x = 0,9 \div 0,95$, $Q = \omega\tau$ — добротность электронного резонатора.

В плоском магнетроне без пространственного заряда $|\omega_e|$ является постоянной величиной,

$$|\omega_e|^2 = \omega^2 \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \right)^2 \right].$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи для плоского магнетрона без пространственного заряда упрощается. Оно рассматривается в разд. 1 настоящей статьи. В разд. 2 показано, как это решение может быть использовано для оценки времени формирования электронного облака в цилиндрическом магнетроне с пространственным зарядом.

1. НЕСТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛОСКОМ МАГНЕТРОННОМ ДИОДЕ БЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Время установления стационарного состояния в магнетронном диоде складывается из времени формирования прикатодной двухпоточ-

ной части электронного облака и времени формирования пространственного заряда в части пространства между анодом и границей двухпоточной области (эту часть пространственного заряда в дальнейшем мы будем называть диффузионной). Время формирования двухпоточной части электронного облака не превосходит нескольких десятков периодов циклотронных колебаний.

В [6] экспериментально показано, что время формирования стационарного состояния на 4—5 порядков больше, чем период циклотронных колебаний. Следовательно, оно значительно превосходит время формирования двухпоточной части электронного облака. Таким образом, расчет времени установления стационарного состояния сводится к расчету времени формирования диффузионной части электронного облака.

Рассчитывая это время, мы будем предполагать, что до момента $t = 0$ анодное напряжение отсутствовало, а в момент $t = 0$ мгновенно возросло до стационарного значения. По изложенным выше соображениям будем считать, что в тот же момент сформировалась двухпоточная часть электронного облака и установились ее шумовые колебания. При указанных предположениях под временем установления стационарного состояния T естественно понимать время, в течение которого в диффузионной части электронного облака устанавливается плотность заряда, отличающаяся от стационарной не более чем в $(1 - 1/e)$ раз,

$$n(r, t) = (1 - 1/e) n(r, \infty).$$

Как в [7], для составления диффузионного уравнения целесообразно выражать расстояние точки наблюдения от границы двухпоточной части электронного облака через величину z :

$$z = \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta d \ln \frac{\operatorname{th}(\beta d/2)}{\operatorname{th}(\beta/2)(d - x)}, \quad (2)$$

где $\beta = 1/r_p$, d — расстояние от границы двухпоточной части облака до анода, x — расстояние от границы облака до точки наблюдения.

Рассматривая выражения для коэффициента диффузии [3], можно убедиться, что

$$D(z) = \frac{(e/m)^2 \bar{E}_y^2}{2\omega_H^2 \tau |\omega_e|^2}.$$

Иными словами, коэффициент диффузии не зависит от z .

Следовательно, в переменных z, t рассматриваемое нестационарное диффузионное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + N \delta(z - z_0), \quad (3)$$

где n — концентрация электронов, N — число электронов, проходящих за единицу времени через единичную площадку вблизи границы между диффузионной и двухпоточной частью в направлении к аноду*, т. е. через плоскость $x = \Delta x$, δ — дельта-функция.

Решение этого уравнения должно удовлетворять следующим условиям:

* Напомним, что, согласно [7], величина Δx должна превосходить среднее квадратичное смещение электрона за время корреляции флуктуационного поля. Будем считать, что $\Delta x = \frac{E_y}{B} \tau$.

$$n(z, 0) = n(Z, t) = n(0, t) = 0,$$

$$Z = \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta d \ln \frac{\operatorname{th}(\beta d/2)}{\operatorname{th}(\beta/2)R},$$

где R — минимальное расстояние, на которое ведущие центры траекторий электронов могут приблизиться к аноду. Согласно [8], оно может быть оценено при помощи приближенного равенства

$$R = 0,1 (r_a - r_k).$$

При указанных условиях решение уравнения (3) имеет вид

$$n(z, t) = \frac{2NZ}{D\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{Dk^2\pi^2}{Z^2} t\right) \right] \sin \frac{k\pi z}{Z} \sin \frac{k\pi z_0}{Z}. \quad (4)$$

В установившемся состоянии

$$n(z, \infty) = \frac{2NZ}{D\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi z}{Z} \sin \frac{k\pi z_0}{Z} = \frac{Nz_0}{D} \left(1 - \frac{z}{Z}\right).$$

Представляется естественным определить время установления стационарного состояния как такую величину T , при которой

$$\frac{n(z, T)}{n(z, \infty)} \geq 1 - \frac{1}{e} \quad (5)$$

для всех z в интервале $z_0 < z < Z$.

2. ВРЕМЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МАГНЕТРОНЕ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ

С практической точки зрения наибольший интерес представляет расчет времени формирования электронного облака в цилиндрических магнетронах с учетом пространственного заряда. На первый взгляд может показаться, что расчеты по формуле (5) предыдущего раздела могут дать только очень грубую оценку этого времени, так как она получена без учета цилиндричности и пространственного заряда. Однако в практически важных случаях $\frac{r_k}{r_a} = 0,5 \div 0,6$. Для приборов с таким

отношением радиуса катода к радиусу анода зависимость величины флуктуационного поля \tilde{E} от $r - \bar{r}$ весьма близка к зависимости \tilde{E} от $x - \bar{x}$ в плоском магнетроне. Покажем, что в этих случаях совместное влияние пространственного заряда и цилиндричности прибора на величину ω_e оказывается таким, что в области, где течет заметный диффузионный ток, величина $|\omega_e|$ выходит за пределы среднего стационарного значения $|\omega_e|_{ст}$ не более, чем на 0,1 ω_e .

Иными словами, покажем, что время формирования электронного облака с относительной ошибкой не более 50% может быть вычислено по формулам, полученным выше для плоского магнетрона без пространственного заряда, если в этих формулах подставить $|\omega_e| = |\omega_e|_{ст}$.

Выделим область вблизи границы двухпоточной части электронного облака, в которой в самом начале процесса формирования $|\omega_e|_{ст}$ не превышает 0,2 ω_e , т. е. область, в которой в процессе формирования

электронного облака средняя величина $|\omega_e|$ выходит за пределы стационарного значения не более, чем на $0,1\omega$.

Принимая во внимание, что, согласно [4], на границе двухпоточной части электронного облака $\omega_e \approx -0,1\omega$, $|\omega_{e|ст} = 0,2\omega$ и что угловая скорость электрона равна $\frac{E(r)}{Br} = \frac{E(r)}{Br^2 r} = v(r) \frac{1}{r^2}$, можно убедиться,

что границей этой области в начальный момент формирования диффузионной части электронного облака является $r = 1,2 \div 1,25 \bar{r}$.

При оценке времени формирования диффузионной части электронного облака с указанной выше точностью влиянием пространственного заряда на коэффициент диффузии в области $\bar{r} < r < 1,2 \div 1,25 \bar{r}$ можно пренебречь, так как, во-первых, коэффициент диффузии в этой области при возможных изменениях пространственного заряда выходит за пределы стационарного значения не более чем на 50% и, во-вторых, эта область в практически интересных режимах (при $h = B/B_{кр} > 1,5$) составляет незначительную часть диффузионного слоя. Однако пространственный заряд, продиффундировавший в область $\bar{r} < r$, влияет на коэффициент диффузии и в области $1,25 \bar{r} < r < r_a$. Но это влияние можно не учитывать до тех пор, пока заряд, продиффундировавший через поверхность $r = 1,25 \bar{r}$ по направлению к аноду, мал по сравнению со стационарным зарядом в области $1,25 \bar{r} < r < r_a$ и, следовательно, не может заметным образом (т. е. с точностью до 50%) повлиять на время накопления заряда до стационарной величины в этой области. Согласно [1], в стационарном режиме плотность заряда в области $1,25 \bar{r} < r < r_a$ почти постоянна, а во время формирования электронного облака $\rho(1,25 \bar{r}) > \rho(r)$, если $r > 1,25 \bar{r}$.

Следовательно, можно рассчитывать процесс формирования диффузионной части электронного облака без учета пространственного заряда по крайней мере до того момента t_1 , когда при $r = 1,25 \bar{r}$ плотность заряда станет равна $0,2 - 0,3$ стационарной.

Как в [7], для упрощения расчетов введем вместо r такую переменную x , чтобы коэффициент диффузии точек, изображающих электроны в x -пространстве, не зависел от x , точнее, чтобы

$$\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D(\bar{r}).$$

Поскольку

$$\Delta t = \frac{(\Delta r)^2}{2D(r)},$$

то

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{\bar{r}}^r \sqrt{\frac{D(\bar{r})}{D(r)}} dr = \\ &= x_0 + \frac{11(1 - \bar{r}/r_a)\bar{r}^2}{r} + \frac{11\bar{r}^2(1 - \bar{r}/r_a)}{r_a} \ln \frac{r_a - r}{r} - \\ &\quad - 10(r_a - \bar{r}) \ln(r_a - r) \Big|_{\bar{r}}^r, \end{aligned}$$

потому что без пространственного заряда

$$\frac{D(\bar{r})}{D(r)} = \frac{\left(1 - \frac{1,1\bar{r}^2}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}{0,01 + 1/Q^2} \frac{(r_a - \bar{r})^2}{(r_a - r)^2}.$$

Целесообразно выбрать x_0 так, чтобы

$$x_0 \gg \int_{\frac{r}{r_0}}^r \sqrt{\frac{D(\bar{r})}{D(r)}} dr.$$

Тогда уравнение диффузии упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = D(\bar{r}) \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2}, \quad (6)$$

где P — плотность точек, изображающих электроны в x -пространстве.

Как и в разд. 1, считаем, что радиусы циклотронных орбит электронов одинаковы и равны $r_{ц} \sim 0,1 (r_a - r)$. Учтем, что, согласно [1],

$$x(1,25 \bar{r}) - x_0 \ll x(r_a - r_{ц}) - x_0.$$

Это позволяет на интервале времени $0 < t < t_1$ не учитывать наличие поглощающей границы в плоскости $x = x(r_a - r_{ц})$. Тогда решение стационарного диффузионного уравнения имеет вид

$$P_1(x, t) = P(x_0) \operatorname{erf} c \left(\frac{x - x_0}{2 \sqrt{D(\bar{r}) t}} \right). \quad (7)$$

Соответственно

$$\rho(r, t) = eP(x_0) \operatorname{erf} c \left(\frac{x(r) - x_0}{2 \sqrt{D(\bar{r}) t}} \right) \frac{x}{r} \frac{dx}{dr} = \quad (8)$$

$$= \rho(\bar{r}) \frac{\bar{r}}{r} \sqrt{\frac{D(\bar{r})}{D(r)}} \operatorname{erf} c \left(\frac{\int_{\frac{r}{r_0}}^r \sqrt{\frac{D(\bar{r})}{D(r)}} dr}{2 \sqrt{D(\bar{r}) t}} \right).$$

Используя (8), можно убедиться, что в момент t_1 , когда $\rho(1,25 \bar{r}) = 0,3 \rho_{ст}(1,25 \bar{r})$, средняя плотность заряда в подавляющей части области $r < r < 1,25 \bar{r}$ близка к стационарной (см. рис. 1), а в подавляющей части области $1,25 \bar{r} < r < r_a - r_{ц}$ $\rho \ll \rho_{ст}$. Следовательно, в течение интервала времени $0 < t < t_1$ диффузионный ток имеет заметную величину только при $r < 1,25 \bar{r}$.

Выражение (8) позволяет найти поле $|\omega_e|$ в момент t_1 . Оказывается, что $|\omega_e|$ отличается от стационарного значения не более чем на $0,1 \omega$ и в области $1,25 \bar{r} < r < 1,45 \bar{r}$.

Следовательно, при оценочном расчете формирования электронного облака дальнейшее влияние пространственного заряда на величину $|\omega_e|$ и на коэффициент диффузии в этой области можно не учитывать.

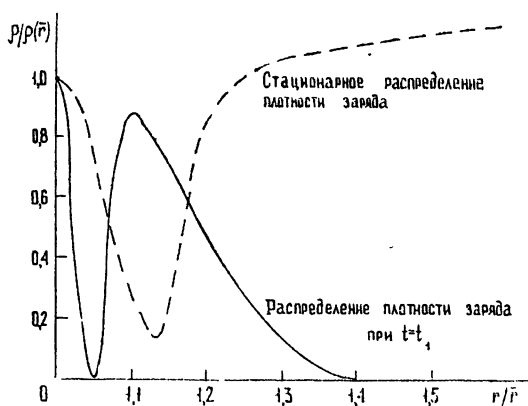


Рис. 1.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно убедиться, что в момент t_2 , когда $\rho(1,45 \bar{r}) = 0,3\rho_{ст}$, пространственный заряд в области $1,45 \bar{r} < r < r_a$ заметного влияния на поле и $|\omega_e|$ также не оказывает. Следовательно, можно привести задачу о расчете процесса формирования электронного облака на интервале времени $t_1 < t < t_2$ к решению диффузионного уравнения

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = D(\bar{r}) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2}$$

в пространстве

$$x_2 = x_0 + \int_{\frac{r}{r_a}}^{\bar{r}} \sqrt{\frac{D(\bar{r})}{D(r, t_1)}} dr,$$

где $D(r, t_1)$ — коэффициент диффузии, вычисленный с учетом пространственного заряда в момент t_1 .

Уравнение должно решаться при условии

$$P(x_2, t_1) = \frac{\rho(r(x_2), t_1) r(x_2)}{ex_2}$$

и граничных условиях

$$P_2(x_0) = \frac{\rho_{ст}(\bar{r}_1) \bar{r}}{ex_0},$$

$$P_2(x_2(r_a - r_u), t) = 0.$$

Решение этой задачи известно:

$$P_2(x, t) = \frac{P_2(x_0) [x_2 - x_2(r_a - r_u)]}{x_0 - x_2(r_a - r_u)} (x - x_2(r_a - r_u)) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left\{ -\frac{n^2 \pi^2 D(\bar{r}) t}{[x_2(r_a - r_u) - x_0]^2} \right\} \sin \frac{n \pi (x_2 - x_0)}{x_2(r_a - r_u) - x_0},$$

где

$$A_n = \frac{2}{x_2(r_a - r_u) - x_0} \int_{x_0}^{x_2(r_a - r_u)} \left\{ P_2(x_2, t_1) - \right. \\ \left. - \frac{P_2(x_0) [x_2 - x_2(r_a - r_u)] (x - x_2(r_a - r_u))}{x_0 - x_2(r_a - r_u)} \right\} \sin \frac{n \pi [x - x_2(r_a - r_u)]}{x_2(r_a - r_u) - x_0} dx.$$

Расчеты показывают, что в момент t_2 средняя плотность заряда практически равна стационарной в области $\bar{r} < r < 1,45 \bar{r}$ и мала по сравнению со стационарной всюду при $1,45 \bar{r} \leq r < r_a - r_u$. Следовательно, и на интервале времени $t_1 < t < t_2$ подавляющая часть диффузионного тока протекает в области, где $|\omega_e|$ отличается от стационарного значения не более, чем на $|\omega_e|_{ст}$.

Учитывая поле пространственного заряда, находящегося в области $\bar{r} < r < 1,45 \bar{r}$, можно показать, что поле в области $r < r < 1,53 \bar{r}$ отличается от стационарного настолько мало, что в этой области $|\omega_e|$ практически совпадает со стационарной величиной. В практически наиболее интересных случаях $(1,53 \bar{r} - r_a) \leq 0,05 r_a$.

Следовательно, на третьем этапе расчета величина $|\omega_e|$ существенно отличается от стационарного значения во всем пространстве от границы двухпоточной части электронного облака до анода.

Таким образом, при расчете формирования электронного облака магнетрона при $r_a/r_k = 2 \div 3$ можно без существенных ошибок полагать, что в области, где диффузионный ток имеет существенную величину, $|\omega_e|$ отличается от среднего стационарного значения не более, чем на величину порядка $|\omega_e|_{ст}$. Иными словами, в этих случаях можно рассчитывать время формирования электронного облака, предполагая, что $|\omega_e|$ постоянен во всем пространстве и имеет значение, близкое к среднему стационарному, т. е. вести расчет по формулам (4) и (5).

Ниже приведены таблицы, рассчитанные на машине «Наири», для наиболее часто применяемого на практике отношения $r_a/r_k = 2$ и $\omega_e = 0,1 \omega$ при различных значениях $h = B/B_{кр}$.

Т а б л и ц а 1

| Q = 10 | | | | | | |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| h | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,25 | 2,5 |
| T/τ | 53,4 | 53,7 | 56,7 | 57,5 | 60 | 61,7 |

| Q = 20 | | | | | | |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| h | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,25 | 2,5 |
| T/τ | 52,5 | 52,6 | 55,5 | 56,2 | 59 | 60,5 |

| Q = 50 | | | | | | |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| h | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,25 | 2,5 |
| T/τ | 45,2 | 45,3 | 47,9 | 49,3 | 52,1 | 53,5 |

Принимая во внимание, что согласно [9]. $Q = 20 \div 50$ и что $\omega = \frac{2 \omega_{раб}}{N}$; где N — число резонаторов магнетрона, с помощью табл. 1

можно найти время формирования электронного облака. Для типичных импульсных магнетронов десятисантиметрового диапазона оно составляет 0,2 — 0,5 мкс. Примерно такую же величину, как известно, имеет для импульсных магнетронов этого диапазона минимальное время нарастания анодного напряжения, допустимое с точки зрения стабильности возбуждения рабочих колебаний. Таким образом, результаты сопоставления времени формирования электронного облака в предгенерационном режиме с минимально допустимым временем нарастания анодного напряжения в импульсных магнетронах дают основание предполагать, что минимальное допустимое время нарастания импульса анодного напряжения определяется временем, необходимым для формирования состояния электронного облака, близкого к статическому. Объясняется это тем, что статический режим электронного облака близок к так называемому статическому синхронному режиму. Но статический синхронный режим является, как известно, наиболее благоприятным режимом для возбуждения рабочих колебаний.

Расчет времени формирования электронного облака при $r_a/r_k \approx 1$ также представляет несомненный практический интерес. Однако и для этого случая наличие пространственного заряда в диффузионной части электронного облака существенно сказывается на величине ω_e . В [11]

показано, что величина ω_e в установившемся режиме оказывается порядка ω .

Следовательно, можно получить не слишком грубую оценку времени формирования диффузионной части электронного облака в коаксиальных магнетронах, если подставить в формулу (1) значение $\omega_e = \omega$.

В табл. 2 такой расчет выполнен для магнетрона с $r_a/r_k = 1,2$ и $Q = 10$ для ряда значений h . Используя данные табл. 2, можно установить, что для коаксиальных магнетронов десятисантиметрового диапазона время формирования диффузионной части электронного облака составляет 4—7 мкс. В известных коаксиальных магнетронах этого диа-

Таблица 2

| h | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,25 | 2,5 |
|----------|------|-----|------|-------|------|-----|
| T/τ | 170 | 275 | 325 | 352,5 | 360 | 400 |

пазона максимальное допустимое время нарастания анодного напряжения равно 3—5 мкс. Это дает основания предполагать, что и в коаксиальных магнетронах минимальное допустимое время нарастания анодного напряжения в основном определяется временем, необходимым для формирования диффузионной части электронного облака.

Причина этого, по-видимому, заключается в том, что и в коаксиальных магнетронах, где $r_a/r_k \approx 1$, статический режим электронного облака также является наиболее благоприятным для возбуждения рабочих колебаний. Согласно результатам работ [11, 12], в этом режиме вблизи от анода имеется большое число электронов с примерно одинаковыми азимутальными скоростями. В начале же формирования статического электронного облака в квазиплоском магнетроне практически весь пространственный заряд находится в состоянии, близком к статическому двухслойному. В ближайшем к аноду слое электроны практически равномерно распределены по азимутальным скоростям в пределах от $u_e/2$ до u_e , где u_e — скорость электронов на верхней границе электронного облака.

Из-за такого большого разброса по скоростям подавляющее большинство электронов не может быть сформировано в спицы флуктуационными полями резонаторной системы (см., например, [10]). Следовательно, возбуждение рабочих колебаний становится возможным только тогда, когда сформируется диффузионная часть электронного облака.

Поэтому естественно ожидать, что минимальное время нарастания напряжения в импульсных коаксиальных магнетронах, при котором еще обеспечивается стабильное возбуждение рабочих колебаний, должно быть близко к времени формирования диффузионной части электронного облака.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кузнецов, В. А. Бербасов, И. Н. Железцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 283 (1972).
2. В. А. Бербасов, Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 944 (1972).
3. М. И. Кузнецов, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 11, 28 (1969).
4. М. И. Кузнецов, С. В. Степанов, И. Н. Железцова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 787 (1972).
5. В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, Л. С. Родыгина, А. Д. Юнаковский, Тезисы докладов VI Межвузовской конференции по электронике СВЧ, Минск, 1969, стр. 124.
6. В. А. Бербасов, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 8, 96 (1969).

7. Л. М. Грошков, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 11, 18, (1969).
8. М. И. Кузнецов, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 12, 83 (1970).
9. В. А. Бербасов, М. И. Кузнецов, В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 2, 290 (1960).
10. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., 1962.
11. М. И. Кузнецов, Депонированная статья, свидетельство о депонировании № 0512/70.
12. Heddermann, J. Appl. Phys., 26, 145 (1955).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10 июня 1974 г,
после доработки
4 апреля 1975 г.

AN ESTIMATION OF THE TIME OF FORMATION OF AN ELECTRON CLOUD IN A MAGNETRON

L. M. Groshkov, E. V. Krupin, M. I. Kuznetsov, S. Kh. Zav'yalov

An estimation of the time of formation of an electron cloud in a magnetron in the pre-generation regime is made. A comparison of the experimental results with calculations shows that the minimum growth time of the pulse of the anode voltage at which a stable excitation of self-oscillations in a magnetron is not yet provided coincides with that of the diffuse part of the electron cloud.

УДК 621.372.8

МНОГОИМПУЛЬСНЫЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ РАЗРЯД У ГЕРМЕТИЗИРУЮЩЕЙ МЕМБРАНЫ В ВОЛНОВОДЕ

А. К. Калиновский, Э. Н. Каплан, Ю. А. Лупан

Рассматриваются вопросы многоимпульсного высокочастотного разряда в прямоугольных волноводах и в волноводных секциях с переменным сечением, герметизированных диэлектрической мембраной.

В работе [1] рассматривался одноимпульсный ВЧ разряд у поверхности плоской мембраны в прямоугольном, секториальном и пирамидальном волноводах. При одноимпульсном ВЧ разряде концентрация свободных электронов (n) возрастает до критических значений ($n_{кр}$) за время действия импульса электромагнитной волны (τ), а за время паузы между импульсами ($T - \tau$) снижается до уровня естественного электронного фона (n_{ϕ}). Рост концентрации электронов в процессе действия импульса определяется уравнением [1]

$$\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{d^2 n}{dy^2} + \frac{d^2 n}{dz^2} + \frac{k^2}{2} \left[\left(1 - \beta \frac{\pi^2 x^2}{a^2}\right) + (1 - d^3 z) \right] n - \frac{\nu_a + \gamma^2}{D_m} n = 0 \quad (1)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} n\left(-\frac{a}{2}, y, z, t\right) &= n\left(\frac{a}{2}, y, z, t\right) = n\left(x, -\frac{b}{2}, z, t\right) = n\left(x, \frac{b}{2}, z, t\right) = \\ &= n(x, y, 0, t) = n(x, y, \infty, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $k^2 = \frac{\nu_{im}}{D_m}$, ν_{im} — частота ионизации молекул и атомов в воздухе,

ν_a , D — частота прилипания и коэффициент свободной диффузии, индекс m означает, что значения ν_i и D взяты в точке с максимальной напряженностью ВЧ поля,

$$\frac{\nu_i}{P} = 2,5 \cdot 10^7 \left[1,45 \left(\frac{E_{эфф}}{P}\right)^{1/2} + 0,01 \left(\frac{E_{эфф}}{P}\right)^{3/2} \right] \times \quad (3)$$

$$\times \exp\left(-\frac{278}{E_{эфф}/P}\right) [c^{-1} \cdot мм \text{ рт. ст.}^{-1}];$$

$$D_m = \frac{1}{P} \left(29 + 0,9 \frac{E_{эффm}}{P} \right) 10^4 [см^2 \cdot c^{-1}]; \quad (4)$$

$$\frac{\nu_a}{P} = 2,12 \cdot 10^4 [c^{-1} \cdot мм \text{ рт. ст.}^{-1}]; \quad (5)$$

$$E_{эфф} = \frac{E_0}{\sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{35,6}{P\lambda}\right)^2 \right]}} [B \cdot см^{-1}]; \quad (6)$$

$$\beta = \left[\frac{d \lg (v_i/P)}{d \lg (E_{эфф}/P)} \right]_{E_{эфф} = E_m}, \quad (7)$$

E_0 — амплитуда электрической напряженности в В/см, λ — длина волны в свободном пространстве в см, P — давление воздуха в мм рт. ст., d^3 — для прямоугольного, секториального и пирамидального волноводов принимает соответственно значения $2\beta a$, β/l , $2\beta/l$, α — погонные потери в стенках волновода, l , a , b — размеры волновода (рис. 1), γ^2 — характеризует среднюю скорость нарастания концентрации электронов за время импульса.

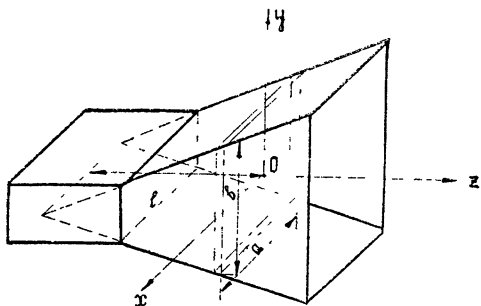


Рис. 1. Выбор системы координат.

Для одноимпульсного ВЧ разряда $\gamma_{одн} = \frac{1}{\tau} \ln \frac{n_{кр}}{n_{\phi}} c^{-1}$, причем $n_{кр} [см^{-3}] = 10^8 \div 10^{13}/\lambda^2$ в зависимости от способа индикации возникновения ВЧ разряда, а n_{ϕ} в отсутствие искусственных радиоактивных источников примерно равна $1 см^{-3}$.

Непрерывному режиму, для которого время формирования ВЧ разряда практически не ограничено ($\tau \rightarrow \infty$), отвечает $\gamma^2 = 0$. Если же частота следования импульсов электромагнитной энергии и давление воздуха таковы, что в течение паузы между импульсами сохраняется некоторая остаточная концентрация электронов, превышающая естественный фон, то происходит ступенчатое накопление электронов в разрядной области и средняя скорость нарастания концентрации в течение импульса принимает некоторое промежуточное значение между нулем и $\gamma_{одн}^2$. Режим формирования ВЧ разряда, при котором имеет место ступенчатое накопление электронов в разрядной области носит название многоимпульсного. Критической напряженностью ВЧ пробоя называют такую величину электрической напряженности поля в точке максимума, при которой концентрация свободных электронов за период следования импульсов (T) меняется на очень малую величину. В пределе

$$n(x, y, z, T) + n_{\phi} \rightarrow n(x, y, z, 0) + \text{один электрон}. \quad (8)$$

Согласно [1] решение уравнения (1) можно представить в виде

$$n = n_{m0} \exp(-\nu_a t + D_m k^2 t) \sum_{s, q, r=0}^{\infty} A_{sqr} X_s(x) \exp\left(-\frac{1}{2} D_m k_{xs}^2 t\right) \times \quad (9)$$

$$\times Y_q(y) \exp(-D_m k_{yq}^2 t) Z_r(z) \exp\left(-\frac{1}{2} D_m k_{zr}^2 t\right),$$

где n_{m0} — начальная концентрация в точке с максимальной напряженностью поля, A_{sqr} — коэффициенты разложения ($s, q, r = 1, 2, 3, \dots$),

$$\frac{k_{xs}^2}{k^2} = \frac{\sqrt{2}(1+4s)\pi\sqrt{\beta}}{ka}, \quad (10)$$

$$k_{yq}^2 = \frac{(2q+1)^2 \pi^2}{b^2}; \quad (11)$$

$$\frac{k_{z0}^2}{k^2} = 4,3 \frac{d^2}{k^{2/3}}, \quad \frac{k_{z1}^2}{k^2} = 8 \times \frac{d^2}{k^{2/3}} \text{ и т. д.}, \quad (12)$$

$X_s(x)$, $Y_q(y)$, $Z_r(z)$ образуют полные системы взаимно ортогональных функций, а $X_s(x)$ и $Y_q(y)$, кроме того, периодичны на интервалах $[-a, a]$ и $[-b, b]$ соответственно. Тогда в момент включения электромагнитного импульса

$$n_0(x, y, z, 0) = n_{m0} \sum_{s, q, r}^{\infty} A_{sqr} X_s(x) Y_q(y) Z_r(z), \quad (13)$$

а в момент окончания импульса, вследствие быстрого затухания высших мод,

$$n(x, y, z, \tau) = n_{m0} \exp(\gamma^2 \tau) A_{000} X_0(x) Y_0(y) Z_0(z), \quad (14)$$

где

$$\gamma^2 = \nu_a + D_m \left(k^2 - \frac{k_{x0}^2}{2} - k_{y0}^2 - \frac{k_{z0}^2}{2} \right). \quad (15)$$

Уравнение (15), формулы (3)—(5) и (10)—(12) позволяют вычислить $E_{эфф}$ критическое, если независимым образом найдена скорость изменения концентрации электронов за время действия импульса — γ^2 . Для независимого определения γ^2 воспользуемся условием (8). В остальном методика расчета критической напряженности многоимпульсного ВЧ разряда в точности повторяет изложенную в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ НАРАСТАНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ИМПУЛЬСЕ

Чтобы процесс накопления свободных электронов от импульса к импульсу стал стационарным и не зависел от случайных флуктуаций, необходимо, чтобы

$$n(x, y, z, T) \gg 1. \quad (16)$$

Поскольку электронный фон n_{ϕ} также имеет порядок 1 см^{-3} , то условие (8) можно переписать в виде

$$n(x, y, z, T) \approx n(x, y, z, 0). \quad (17)$$

Значение $n(x, y, z, 0)$ определяется выражением (13), а для определения $n(x, y, z, T)$ необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D' \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) - \nu'_a n, \quad (18)$$

характеризующее изменение концентрации электронов в течение паузы между импульсами. Начальным значением концентрации для этого уравнения будет $n(x, y, z, \tau)$, определяемое формулой (14), конечным — искомое $n(x, y, z, T - \tau)$. Граничные условия определяются соотношениями (2). Если принять, что импульсы электромагнитной энергии имеют прямоугольную форму и учесть, что энергия свободных электронов убывает во много раз быстрее, чем их концентрация, то диффузию и прилипание электронов в паузе можно характеризовать примерными значениями коэффициента диффузии и частоты прилипания

$$\nu'_a = 1,15 \cdot 10^3 P [c^{-1}]; \quad (19)$$

$$D' = 2,9 \cdot 10^5 \frac{1}{P} [\text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}], \quad (20)$$

характерными для термодинамически равновесных с воздухом «тепловых» электронов [2].

Повышение температуры воздуха в процессе формирования многоимпульсного ВЧ разряда будет пренебрежимо малым из-за малой концентрации электронов и, следовательно, ничтожной доли возбужденных ими молекул. Поэтому этим эффектом можно пренебречь.

Решение (18) может быть записано в форме [3]

$$n(x, y, z, t - \tau) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{\infty} G(x, y, z, \tau/x', y', z', t) n(x, y, z, \tau) dx' dy' dz', \quad (21)$$

где функция Грина $G(x, y, z, \tau/x', y', z', t)$ имеет вид

$$G(x, y, z, \tau/x', y', z', t) = \frac{\exp[-v'_a(t - \tau)]}{8[\pi D'(t - \tau)]^{3/2}} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-x'-2la)^2}{4D'(t - \tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+x'-2la)^2}{4D'(t - \tau)}\right) \right] \right\} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(y-y'-2lb)^2}{4D'(t - \tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(y+y'-2lb)^2}{4D'(t - \tau)}\right) \right] \right\} \left[\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4D'(t - \tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(z+z')^2}{4D'(t - \tau)}\right) \right], \quad (22)$$

а $n(x, y, z, \tau)$ определяется выражением (14). Подставив (13) и (21) в условие (17) и заменив t на T , получим уравнение для определения γ^2 . Подробности решения этого уравнения вынесены в Приложение. Результатом является формула

$$\frac{\gamma^2}{P} = \left(\frac{v'_a}{P} + D' P \frac{\pi^2}{(Pa)^2} + D' P \frac{\pi^2}{(Pb)^2} \right) \frac{T - \tau}{\tau} + \frac{4,5}{P\tau} \frac{1}{ka\sqrt{\beta}} + \frac{0,11}{P\tau} \lg 0,35 k^2 a^2 \beta + \frac{0,44}{P\tau} \lg 0,01 [D'(T - \tau)]^{3/2} k^2 d^3, \quad (23)$$

в которой скважность $Q = \frac{T - \tau}{\tau} \approx \frac{1}{F\tau}$, а F — частота повторения импульсов. Применимость формулы (23) ограничена значениями

$$\frac{\gamma^2}{P} \leq \frac{1}{P\tau} \ln \frac{n_{кр}}{n_{\phi}} \quad (24)$$

РАСЧЕТ $E_{кр}$ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

Подставив (23) в (15) и пользуясь формулами (3)–(6), (10)–(12), получим уравнение для численного расчета критической напряженности поля ($E_{кр}$) в зависимости от габаритов волновода, давления воздуха, длины волны, длительности и частоты повторения импульсов. Переносимая по волноводам предельная мощность определится в этом случае формулой

$$S_{кр} [\text{кВт}] = \frac{ab}{1,51} E_{кр}^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}, \quad (25)$$

если $E_{кр}$ выражено в $\text{кВ} \cdot \text{см}^{-1}$.

На рис. 2 приведены расчетные зависимости и данные экспериментальных измерений в сантиметровом диапазоне длин волн. Методика измерения описана в работе [1].

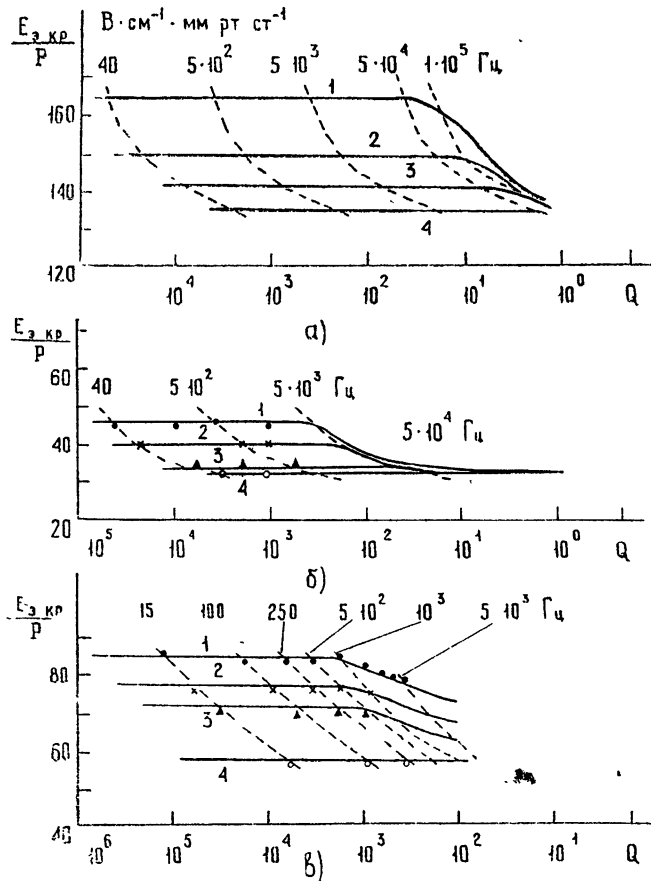


Рис. 2. Зависимость критической напряженности поля от давления ($1 - \tau = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $2 - \tau = 1 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $3 - \tau = 3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $4 - \tau = 10 \cdot 10^{-6} \text{ с}$).

а) для герметизированного волновода сечением $28,5 \times 12,6 \text{ мм}^2$ при

$P = 0,5 \text{ мм рт. ст.}$;

б) для герметизированного волновода сечением $28,5 \times 12,6 \text{ мм}^2$ при

$P = 50 \text{ мм рт. ст.}$;

в) для герметизированного рупорного излучателя при $P = 3 \text{ мм рт. ст.}$

Как видно из расчетных графиков и данных эксперимента, многоимпульсный ВЧ разряд в волноводах наступает при частоте повторения импульсов несколько тысяч герц и выше. Частота перехода от одноимпульсного к многоимпульсному разряду при низких давлениях определяется интенсивностью потерь электронов в паузу за счет диффузии к стенкам волновода и герметизирующей мембране, а при давлениях в несколько десятков мм рт. ст. — частотой прилипания в паузу между импульсами. Если потери электронов определяются диффузией, то γ^2 и $E_{кр}$ слабо зависят от частоты повторения импульсов и заметно снижаются при увеличении их длительности вследствие того, что из неоднородного распределения электрической напряженности ВЧ поля внутри волновода диффузионный поток $\Gamma = -D \text{ grad } n$ в течение импульса значительно выше, чем в паузе, когда поле выключено. Использо-

вание в этом случае приближения однородного поля для расчета $E_{кр} = f(\tau, F)$ ведет к заметным отличиям от эксперимента, так как вследствие равенства в однородном поле градиентов концентрации электронов в импульсе и в паузе значения

$$\frac{\gamma^2}{P} = \left(\frac{v'_a}{P} + D' P \frac{\pi^2}{(Pa)^2} + D' P \frac{\pi^2}{(Pb)^2} \right) \frac{1}{F\tau} \quad (26)$$

и $E_{кр}$ определяются исключительно скважностью излучения. Из-за ограниченной скважности и длительности импульса передатчика ($Q \geq 300$, $\tau \leq 10 \cdot 10^{-6}$ с) и больших потерь за счет диффузии на стенки, эксперименты, проведенные в волноводах, целиком относятся к одноимпульсному режиму и лишь подтверждают, что переход от одноимпульсного ВЧ разряда к многоимпульсному наступает при частоте повторения импульсов выше нескольких тысяч герц.

Для иллюстрации различной зависимости от τ и F в неоднородных полях была рассчитана и экспериментально измерена зависимость $E_{кр} = f(\tau, F)$ для рупорного излучателя, раскрыв которого был герметизирован таким образом, чтобы устранить диффузию на стенки (рис. 2). Для расчета были использованы уравнения, аналогичные (1), (18) и граничные условия

$$n(\pm \infty, y, z, t) = n(x, \pm \infty, z, t) = n(x, y, 0, t) = n(x, y, \infty, t) = 0.$$

Приведенный анализ показывает, что снижение критической напряженности поля и предельного уровня канализируемой по волноводам сантиметрового диапазона мощности за счет увеличения частоты повторения импульсов должно учитываться лишь в тех случаях, когда частота повторения импульсов превышает несколько тысяч герц. При более низких F возникающий в волноводах разряд носит одноимпульсный характер.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Подставим функции $X_s(x)$, $Y_q(y)$ и $Z_r(z)$ в выражение (21), описывающее концентрацию электронов в паузе между импульсами. Учтем, что $X_s(x)$, $Y_q(y)$, $Z_r(z)$ взаимноортогональны, $X_s(x)$, $Y_q(y)$ периодичны, соответственно на интервалах $[-a, a]$ и $[-b, b]$, а

$$Y_0 = \cos \frac{\pi}{b} y. \quad (27)$$

Подставив (13) и (21) в условие (17) и разложив $X_s(x)$ и $Y_q(y)$ в ряды Фурье, найдем после ряда преобразований, что

$$\begin{aligned} n_{m0} \exp \left\{ \gamma^2 \tau - \left[v'_a + D' \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) \right] (T - \tau) \right\} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \frac{A_{000} A_1^0 B_1^0}{2 \sqrt{\pi D' (T - \tau)}} \times \\ \times \int_0^\infty Z_0(z') \left[\exp \left(- \frac{(z - z')^2}{4 D' (T - \tau)} \right) - \exp \left(- \frac{(z + z')^2}{4 D' (T - \tau)} \right) \right] dz' = \quad (28) \\ = n_{m0} \sum_{s, q, r=0}^\infty A_{sqr} X_s(x) Y_q(y) Z_r(z'), \end{aligned}$$

где

$$A_1^0 = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} X_0(x) \cos \frac{\pi x}{a} dx; \quad (29)$$

$$B_1^0 = \frac{4}{b} \int_0^{b/2} Y_0(y) \cos \frac{\pi y}{b} dy. \quad (30)$$

Потребуем, чтобы функции $X_0(x)$, $Y_0(y)$, $Z_0(z')$ были нормированы на интервалах $[-a, a]$, $[-b, b]$, $[-\infty, \infty]$, так чтобы выполнялось

$$\frac{4}{a} \int_0^{a/2} [X_0(x)]^2 dx = \frac{4}{b} \int_0^{b/2} [Y_0(y)]^2 dy = \int_0^{\infty} [Z_0(z)]^2 dz = 1. \quad (31)$$

Заменим для удобства интегрирования приведенные в [1] точные выражения для $X_0(x)$, $Z_0(z')$ приближенными нормированными функциями, аппроксимирующими $X^0(x)$, $Z_0(z')$ с точностью до 10—15%,

$$X_0(x) \approx 0,65 (ka \sqrt{\beta})^{1/4} \left[\exp \left(-\frac{kx^2 \pi \sqrt{\beta}}{2 \sqrt{2} a} \right) - \exp \left(-\frac{ka \pi \sqrt{\beta}}{8 \sqrt{2}} \right) \right]; \quad (32)$$

$$Z_0(z) \approx 0,8 kd^{3/2} \exp [-0,68 z (k^2/2)^{1/3} d]. \quad (33)$$

Подставив (27) и (31) в (29) и (30), найдем

$$B_1^0 = 1; \quad (34)$$

$$A_1^0 = \left[\frac{4,5 \exp [- (4,5/ka \sqrt{\beta})]}{(ka \sqrt{\beta})^{1/2}} \right]^{1/2}. \quad (35)$$

Умножим (28) на $(4/a) X_0(x)$, $(4/b) Y_0(y)$, $Z_0(z)$ и проинтегрируем по x , y , z в соответствующих интервалах. При этом заменим $X_0(x)$, $Y_0(y)$, $Z_0(z')$ приближенными функциями, а A_1^0 и B_1^0 выразим с помощью (34) и (35). Прологарифмировав полученное в результате интегрирования выражение, найдем для γ^2 формулу (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Н. Каплан, А. К. Калиновский, Ю. А. Лупан, Н. Н. Титов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 10, 1568 (1974)
2. И. Мак-Даниель, Процессы столкновений в ионизированных газах, изд. Мир, М., 1967.
3. Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, изд. Наука, М., 1964.

Поступила в редакцию
4 июня 1974 г.,
после доработки
25 февраля 1975 г.

A MULTI-PULSE HIGH-FREQUENCY DISCHARGE OF A HERMETIC MEMBRANE IN A WAVEGUIDE

A. K. Kalinovskii, E. N. Kaplan, Yu. A. Lupan

The problem of a multi-pulse high-frequency discharge in a rectangular waveguides and waveguide sections with a variable cross section hermetized by a dielectric membrane is considered.

УДК 533.951

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Е. П. Богданов, Ю. А. Романов, С. А. Шамов

В кинетическом приближении исследована неустойчивость плазменных пучков в периодических структурах. Найдены условия возникновения неустойчивости. Проведено сравнение с квазигидродинамикой.

В настоящей работе в кинетическом приближении исследована неустойчивость пространственно-разделенных плазменных пучков в периодических системах с целью выявления возможности создания на их основе твердотельного аналога ЛБВ. Интерес к этому устройству сильно вырос с появлением работы [1] и остается до настоящего времени.

В газовой плазме хорошо известна неустойчивость взаимопроникающих безграницных пучков. В частности, найдены границы неустойчивости как в однетемпературной [2], так и в двухтемпературной бесстолкновительной плазме [3]. В работе [1] эти результаты были распространены и в соответствующих местах обобщены на случай полупроводниковой плазмы.

Для возникновения пучковой неустойчивости в двухкомпонентной однетемпературной плазме (с равными концентрациями заряженных частиц) необходимо выполнение условия [2].

$$v > 0,926(v_{T_1} + v_{T_2}), \quad (1)$$

где v — относительная скорость пучка, $v_{T_{1,2}} = \sqrt{2\kappa T_{1,2}/m_{1,2}}$ — тепловые скорости составляющих их частиц, $m_{1,2}$ — их эффективные массы, T — температура, κ — постоянная Больцмана. В твердотельной плазме условие (1) является очень жестким, а возможно, и невыполнимым.

Более обнадеживающей является двухтемпературная плазма с разными концентрациями и частотами столкновений в пучках. Если

$$v_{T_1} > v_{T_2}, \quad \omega_{01} > \omega_{02} \quad \text{и} \quad \nu_1 \gg \nu_2,$$

где $\omega_{01,2}$ и $\nu_{1,2}$ — плазменные частоты и частоты столкновений частиц соответствующего пучка, то неустойчивость возникает при условиях

$$v_{T_2}/\sqrt{2} < v_{кр} < v_{T_1}; \quad (2)$$

$$\nu_2 < \omega_{02} \quad (3)$$

($v_{кр}$ — минимальная относительная скорость пучков, при которой система становится неустойчивой). Например, при $v_{T_1} = 12v_{T_2}$, $\omega_{01} = 4\omega_{02}$, $\nu_1 = 10\omega_{02}$, $\nu_2 = 0,1\omega_{02}$ квазигидродинамический расчет дает $v_{кр} \approx 0,17v_{T_1}$. Условия (2) и (3) в отдельности могут быть легко выполнены во многих полупроводниках. Однако одновременное их выполнение затруднительно. Так в InSb неустойчивость возникает при [1] $T_1 > 10T_2$.

$\nu_2 < 0,1\omega_{0,2}$. В [4] указывается, что в InSb может быть достигнуто $T_1 \approx 3T_2$, что явно недостаточно. Для увеличения отношения температур нужно увеличить либо ν_2 , либо m_2 . В обоих случаях неравенство (3) ухудшается. Для сохранения неравенства (3) можно было бы увеличить концентрацию частиц второго пучка. Однако анализ показывает, что при росте ω_{02}/ω_{01} увеличивается $v_{кр}$. Одновременное же увеличение концентраций плазменных частиц в пучках приводит к трудностям создания больших отношений T_1/T_2 (из-за электрон-дырочного взаимодействия) и больших постоянных электрических полей в объеме полупроводника.

В связи с указанными трудностями реализации в полупроводниках неустойчивости взаимодействующих пучков значительный интерес представляют системы, содержащие пространственно-разделенные пучки [4-12]. Их основные преимущества следующие.

1. Оба взаимодействующих пучка могут состоять из частиц с высокой подвижностью. Например, оба пучка могут быть электронными.

2. Пропуская ток лишь через отдельные слои, можно достичь довольно больших отношений T_1/T_2 .

3. Многокомпонентность. Например, два пространственно-разделенных электронно-дырочных пучка соответствуют четырехкомпонентной плазме.

4. Один из пучков может обладать предельно малой частотой столкновений и температурой, что можно реализовать, например, в полупроводниках со щелями, через которые проходят обычные электронные пучки [6, 9].

В работах [10, 11] в квазигидродинамическом приближении исследована неустойчивость двух пространственно-разделенных однокомпонентных плазменных пучков. Пространственная разделенность пучков приводит к естественному ослаблению их взаимодействия и двумерности процессов (в частности, дополнительно появляется поперечная диффузия частиц). Эти два обстоятельства приводят к увеличению $v_{кр}$ и уменьшению инкрементов нарастающих волн в этих системах по сравнению с системами взаимодействующих пучков. Например, для полуограниченных соприкасающихся пучков с приведенными выше параметрами взаимодействующих пучков имеем $v_{кр} \approx 0,5v_{T_1}$ вместо $0,17v_{T_1}$. Этот пример указывает, что преимущества пространственно-разделенных пучков в выборе параметров реализовать не так просто.

Поперечную диффузию частиц можно ослабить, используя пучки малой толщины. Однако с уменьшением толщины слоя d_j растет относительная доля энергии волны вне слоев, которая является пассивной. Как показывают расчеты [11], эти два факта приводят к некоторому уменьшению $v_{кр}$ и инкрементов нарастающих волн при уменьшении d_j . При $d_j \rightarrow 0$ неустойчивость исчезает.

В связи с указанной тенденцией уменьшения $v_{кр}$ при уменьшении толщин взаимодействующих пучков и целесообразностью исключить пассивную часть энергии усиливаемой волны заслуживают особого внимания многослойные структуры, содержащие плазменные пучки малой толщины. Одним из вариантов таких систем являются периодические структуры.

В работе [12] в квазигидродинамическом приближении исследована неустойчивость плазменных пучков в периодических системах двух типов. Первый тип представлял собой структуры, состоящие из чередующихся однокомпонентных разнотемпературных плазменных пучков, второй тип — структуры, состоящие из чередующихся двухкомпонентного разнотемпературного пучка и диэлектрического слоя.

В обоих случаях пучки могут быть созданы как путем пропуска электрического тока через отдельные полупроводниковые слои, так и путем пропускания обычных электронных пучков в твердотельной системе со щелями. Поэтому излагаемая ниже теория применима как к газовой и твердотельной плазме, помещенной в постоянное электрическое поле, так и к твердотельным системам со щелями, через которые пропускаются обычные электронные пучки. Полученные в этой работе результаты указывают на возможность реализации пучковой неустойчивости в периодических системах, которые объединяют в себе преимущества пространственно-разделенных пучков (в смысле широкого выбора параметров) и взаимопроникающих пучков (в смысле сравнительно малых $v_{кр}$ и больших инкрементов).

Однако, поскольку часть результатов работы [12] лежит вне области применимости квазигидродинамики, представляется необходимым рассмотреть пучковую неустойчивость в периодических структурах в кинетическом приближении. Этой цели и посвящена настоящая работа.

Дисперсионное уравнение электромагнитных E -волн в периодических структурах с плазменными слоями получено в [12, 13]. В случае предельно тонких слоев в квазистатической области при условии зеркального отражения плазменных частиц от границ слоя оно имеет вид

$$k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + q^2 \varepsilon_{\parallel} = 0, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = (d_1 \varepsilon_1^{\perp} + d_2 \varepsilon_2^{\perp}) d^{-1}; \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\parallel}^{-1} = (d_1 \varepsilon_{01}^{-1} + d_2 \varepsilon_{02}^{-1}) d^{-1}, \tag{6}$$

$\varepsilon_j^{\perp}(k_{\perp}, \omega)$ — продольная диэлектрическая проницаемость j -слоя, d_j — его толщина ($j = 1, 2$), $d = d_1 + d_2$ — период структуры, ε_{0j} — диэлектрическая проницаемость решетки j -слоя, q, k_{\perp} — составляющие волнового вектора волны соответственно вдоль и поперек периода структуры, ω — частота.

Продольная диэлектрическая проницаемость, рассчитанная на основе кинетического уравнения с интегралом столкновений Батнагара—Гросса—Крука (БГК) [14]

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{ст} = -\nu \left(f - \frac{f_0}{n_0} n \right) \tag{7}$$

(f и n — неравновесная функция распределения и концентрация плазменных частиц, f_0 и n_0 — стационарные значения этих величин), определяется выражением [15]

$$\varepsilon^{\parallel} = \varepsilon_0 \left\{ 1 + 2 \sum \frac{\omega_{0\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{1 + i\sqrt{\pi} z_{\alpha} W(z_{\alpha})}{1 - \sqrt{\pi} \frac{v_{\alpha}}{k v_{T\alpha}} W(z_{\alpha})} \right\}, \tag{8}$$

где

$$z_{\alpha} = (\omega - k v_{0\alpha} + i \nu_{\alpha}) / k v_{T\alpha},$$

$$\omega_{0\alpha}^2 = 4\pi n_{0\alpha} e_{\alpha}^2 / \varepsilon_0 m_{\alpha}, \tag{9}$$

$$W(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right)$$

— функция Крампта комплексного аргумента,

Путем несложных преобразований уравнение (4) можно привести к виду

$$\tilde{\varepsilon}^l = 0, \quad (10)$$

где $\tilde{\varepsilon}^l$ определяется выражением (8) с плазменными частотами

$$\tilde{\omega}_{01}^2 = \frac{d_1 \varepsilon_{01}}{d \tilde{\varepsilon}_0} \omega_{01}^2, \quad \tilde{\omega}_{02}^2 = \frac{d_2 \varepsilon_{02}}{d \tilde{\varepsilon}_0} \omega_{02}^2 \quad (11)$$

для периодических структур I типа и

$$\tilde{\omega}_{01}^2 = \frac{d_1 \varepsilon_{01}}{d \tilde{\varepsilon}_0} \omega_{01}^2, \quad \tilde{\omega}_{02}^2 = \frac{d_1 \varepsilon_{01}}{d \tilde{\varepsilon}_0} \omega_{02}^2 \quad (12)$$

для периодических структур II типа,

$$\tilde{\varepsilon}_0 = (d_1 \varepsilon_{01} + d_2 \varepsilon_{02}) d^{-1} + (d \operatorname{tg}^2 \varphi) (d_1 \varepsilon_{01}^{-1} + d_2 \varepsilon_{02}^{-1})^{-1}, \operatorname{tg} \varphi = q/k. \quad (13)$$

Таким образом, с точностью до переобозначений плазменных частот неустойчивость тонкослойных периодических структур обоих типов и безграничной системы взаимопроникающих пучков описывается одним и тем же уравнением (10).

На рис. 1—3 приведены граничные кривые неустойчивости, рассчитанные на основе уравнений (10) с $q = 0$, $d_1 = d_2 = d/2$ (сплошные кривые) при нескольких наборах параметров. На этих же рисунках для сравнения приведены соответствующие кривые, рассчитанные в квазигидродинамическом приближении (штриховые кривые). Как и следовало ожидать, квазигидродинамика хорошо работает для систем с существенно разными параметрами. Именно в этом случае для подавляющей части граничной кривой могут быть выполнены неравенства

$$|\omega + i\nu_2| \gg kv_{T_2}, \quad (14)$$

$$|\omega + i\nu_1| \ll kv_{T_1}$$

либо, наоборот,

$$|\omega + i\nu_2| \ll kv_{T_2}, \quad (15)$$

$$|\omega + i\nu_1| \gg kv_{T_1},$$

являющиеся условиями применимости квазигидродинамики.

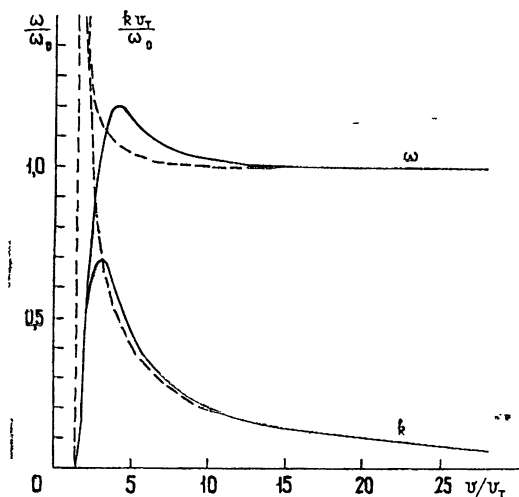


Рис. 1. Границы пучковой неустойчивости в тонкослойных периодических структурах: $v_{T_1} = v_{T_2}$, $\omega_{01} = \omega_{02}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,1\omega_0$ (сплошная линия—кинетика, штриховая линия—квазигидродинамика).

Особенно важным является то обстоятельство, что уравнение (10) имеет решение в области

$$\omega \rightarrow 0, \quad k \rightarrow 0, \quad \omega/k = v_\Phi = \text{const}, \quad (16)$$

которое определяет точку пересечения граничных кривых неустойчивости $\omega(v)$ и $k(v)$ с осью v . Эта точка при $d_1 = d_2$ характеризуется значениями

$$v_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{v_{T_1}^2}{\tilde{\omega}_{01}^2} + \frac{v_{T_2}^2}{\tilde{\omega}_{02}^2} \right) \left(\frac{\tilde{\omega}_{01}^2}{\nu_1} + \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\nu_2} \right)^2 \left(\frac{\tilde{\omega}_{01}^2}{\nu_1^2} + \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\nu_2^2} - 1 \right)^{-1}; \quad (17)$$

$$v_\Phi^2 = v_0^2 \left(1 + \frac{\nu_2 \tilde{\omega}_{01}^2}{\nu_1 \tilde{\omega}_{02}^2} \right)^{-1} \quad (18)$$

(область (16) лежит в пределах применимости квазигидродинамики, поэтому соотношения (17) и (18) могут быть получены из квазигидродинамических уравнений).

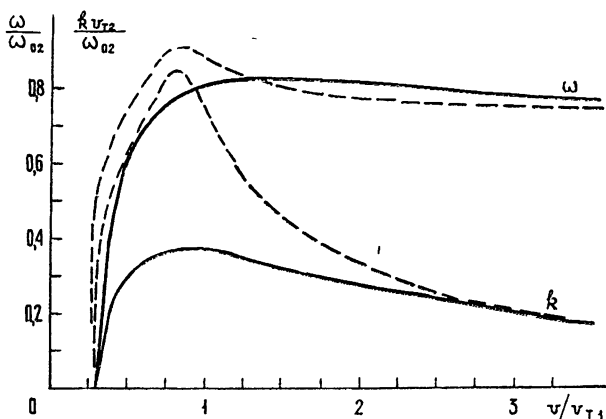


Рис. 2. Границы пучковой неустойчивости в тонкослойных периодических структурах: $v_{T_1} = 8v_{T_2}$, $\omega_{01} = 3\omega_{02}$, $\nu_1 = 5\omega_{02}$, $\nu_2 = 0,1\omega_{02}$ (сплошная линия—кинетика, штриховая линия—квазигидродинамика).

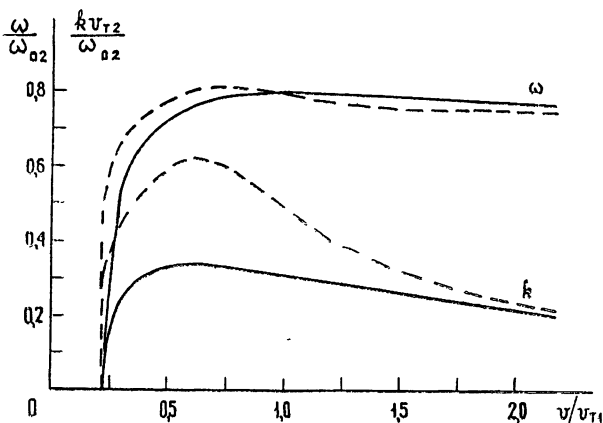


Рис. 3. Границы пучковой неустойчивости в тонкослойных периодических структурах: $v_{T_1} = 12v_{T_2}$, $\omega_{01} = 4\omega_{02}$, $\nu_1 = 10\omega_{02}$, $\nu_2 = 0,1\omega_{02}$. (сплошная линия—кинетика, штриховая линия—квазигидродинамика).

В случае не очень малых отношений $\nu_{1,2}/\tilde{\omega}_{02}$ $v_0 \sim v_{кр}$. Очевидно, что всегда $v_0 \gtrsim v_{кр}$. Поэтому величина v_0 является хорошей характеристикой неустойчивости системы. В приведенных на рис. 1—3 примерах $v_0 \approx v_{кр}$.

Соотношение (17) имеет смысл при

$$\frac{\tilde{\omega}_{01}^2}{\nu_1^2} + \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\nu_2^2} - 1 > 0. \quad (19)$$

При нарушении условия (19) неустойчивость исчезает. Ниже для определенности будем считать $\tilde{\omega}_{01} > \tilde{\omega}_{02}$. Легко видеть, что если

$$\left(\frac{v_{T_2}}{v_{T_1}}\right)^2 < \frac{\left[2\left(\frac{\tilde{\omega}_{01}^2}{\nu_1^2} + \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\nu_2^2} - 1\right) - \left(\frac{\tilde{\omega}_{02}}{\tilde{\omega}_{01}} \frac{\tilde{\omega}_{02}}{\nu_2} + \frac{\tilde{\omega}_{01}}{\nu_1}\right)^2\right]}{\left(\frac{\tilde{\omega}_{02}}{\nu_2} + \frac{\tilde{\omega}_{01}}{\tilde{\omega}_{02}} \frac{\tilde{\omega}_{01}}{\nu_1}\right)^2},$$

то

$$v_0 < v_{T_1}.$$

При $\nu_2 = 0$

$$v_0^2 = \frac{v_T^2}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\tilde{\omega}_{01}^2} \frac{v_{T_1}^2}{v_{T_2}^2}\right).$$

Эта величина является минимальным значением критической дрейфовой скорости при $\tilde{\omega}_{01} > \tilde{\omega}_{02}$.

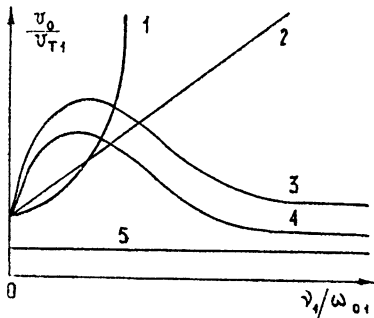


Рис. 4. Зависимость v_0 от частот столкновений ($\tilde{\omega}_{01} > \tilde{\omega}_{02}$):

$$\begin{aligned} 1 - \nu_2 > \tilde{\omega}_{02}^2, \quad 2 - \nu_2 = \tilde{\omega}_{02}^2, \quad 3 - \tilde{\omega}_{02}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\tilde{\omega}_{01}^2}\right) < \\ < \nu_2 < \tilde{\omega}_{02}^2, \quad 4 - 0 < \nu_2 < \tilde{\omega}_{02}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\tilde{\omega}_{01}^2}\right), \\ 5 - \nu_2 = 0. \end{aligned}$$

Качественный вид зависимости $v_0(\nu_1)$ приведен на рис. 4. Для случая $\nu_2 < \tilde{\omega}_{02}$ (кривая 3) значение v_0 при увеличении ν_1 сначала растет, проходит через максимум

$$v_{0m}^2 = \frac{v_{T_2}^2}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\tilde{\omega}_{01}^2} \frac{v_{T_1}^2}{v_{T_2}^2}\right) \left[\frac{\tilde{\omega}_{01}^2}{\tilde{\omega}_{02}^2} + \left(1 - \frac{\nu_2^2}{\tilde{\omega}_{02}^2}\right)^{-1}\right] \quad (20)$$

при

$$\nu_{1m} = \nu_2 \left(1 - \frac{\nu_2^2}{\tilde{\omega}_{02}^2}\right)^{-1}, \quad (21)$$

а затем падает до величины

$$v_0^2 = \frac{v_{T_3}^2}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\tilde{\omega}_{01}^2} \frac{v_{T_1}^2}{v_{T_3}^2} \right) \left(1 - \frac{v_2^2}{\tilde{\omega}_{02}^2} \right)^{-1}. \quad (22)$$

Причем, если

$$v_2^2 < \tilde{\omega}_{02}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{\tilde{\omega}_{01}^2} \right), \quad (23)$$

то v_0 при $v_1 \rightarrow \infty$ становится меньше, чем при $v_1 = 0$. Другими словами, при малых частотах столкновений в одном пучке увеличение частоты столкновений в другом пучке играет положительную роль, уменьшая величину критической скорости. Такое поведение характерно при переходе с ростом v_1 бунемановской неустойчивости в резистивную. При $v_2 = \tilde{\omega}_{02}$ значение v_0 линейно растет с $v_1/\tilde{\omega}_{01}$ (кривая 2, рис. 4). При $v_2 > \tilde{\omega}_{02}$ неустойчивость существует лишь в области

$$v_1^2 < \tilde{\omega}_{01}^2 \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_{02}^2}{v_2^2} \right). \quad (24)$$

Полученные в работе результаты указывают на необходимость тщательного подбора параметров периодических структур для реализации в них пучковой неустойчивости. В частности, возможен набор параметров, когда $v_{кр} < v_{T_1}, v_{T_2}$. Однако этот случай не всегда является лучшим с экспериментальной точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Pines, J. R. Shrieffer, Phys. Rev., **124**, 1387 (1961).
2. O. Buneman, Phys. Rev., **115**, 503 (1959).
3. E. A. Jackson, Phys. Fluids, **3**, 786 (1960).
4. B. V. Robinson, G. A. Swartz, J. Appl. Phys., **38**, 2461 (1967).
5. А. Б. Михайловский, Э. А. Пашицкий, ЖЭТФ, **48**, 1787 (1965).
6. С. П. Баканов, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ, **36**, 1639 (1966).
7. G. A. Baraff, J. Phys. Chem. Solids, **28**, 1037 (1967).
8. С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, ФТТ, **9**, 579, 2943 (1967).
9. Р. Р. Киквидзе, В. Г. Котетешвили, А. А. Рухадзе, ФТТ, **14**, 183, 2231 (1972); ФТТ, **15**, 622 (1973).
10. Ю. А. Романов, В. Ф. Дряхлушин, ЖЭТФ, **58**, 348 (1970).
11. Е. П. Богданов, Л. К. Орлов, Ю. А. Романов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 2, 228 (1971), **14**, № 6, 805 (1971); **15**, № 4, 521 (1972).
12. Е. П. Богданов, Ю. А. Романов, В. М. Трошин, ЖТФ, **45**, вып. 1, 32 (1975).
13. Ю. А. Романов, ЖТФ, **42**, вып. 9, 1804 (1972).
14. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, Phys. Rev., **94**, 511 (1954); E. P. Gross, M. Krook, Phys. Rev., **102**, 593 (1956).
15. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, том 1, Атомиздат, М., 1970, стр. 133.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 июля 1974 г.

THE KINETIC THEORY OF BEAM INSTABILITY IN PERIODIC SYSTEMS

E. P. Bogdanov, Yu. A. Romanov, S. A. Shamov

The instability of plasma beams in periodic structures is investigated in the kinetic approximation. The conditions of the instability occurrence are found. Comparison with quasi-hydrodynamics is made.

УДК 538.12

МАГНИТОРЕЗИСТИВНЫЙ ЭФФЕКТ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. А. Архипов, Л. И. Кац, Д. Ш. Шехтер, Л. Ш. Шехтер

Теоретически и экспериментально исследуется магниторезистивный эффект в переменном магнитном поле. Выяснено влияние различных механизмов рассеяния носителей в образце в случае вырожденного и невырожденного полупроводника, учтены возможный непараболический характер энергетической зоны и влияние геометрических размеров образца. Эксперимент в исследованной области параметров дает согласие с теорией.

Широкий круг вопросов, связанных с изучением гальваномагнитных явлений в полупроводниках, до сих пор является предметом многочисленных исследований. Основное внимание при этом уделяется изучению этих эффектов при наличии внешних стационарных полей. Вместе с тем целый ряд новых полезных качеств известных эффектов может быть получен при изучении их поведения во внешних переменных полях. Наименее изученным является вопрос о характере гальваномагнитных эффектов в переменных магнитных полях.

В работах [1, 2] рассматривались гальваномагнитные эффекты в полупроводнике в переменном магнитном поле, и показано, что эффекты Холла и магнитосопротивления носят осциллирующий характер при изменении параметра $\Delta = \omega_1/\Omega$ — отношения амплитуды магнитного поля ($\omega_1 = eH_1/m^*c$) к его частоте. Последовательное рассмотрение магниторезистивного эффекта с точки зрения его последующего применения к конкретным полупроводникам требует выяснения влияния различных механизмов рассеяния в случае вырожденного и невырожденного полупроводника, учета непараболического характера энергетической зоны, влияния геометрических размеров образца, а также достаточно строгой экспериментальной проверки некоторых характерных особенностей эффекта. Эти вопросы составляют содержание данной работы.

1. ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЗМОВ РАССЕЯНИЯ

Воспользуемся общим выражением для магнитосопротивления:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho(H) - \rho(0)}{\rho(0)}, \quad \rho(H) = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (1)$$

Здесь σ_{xx} и σ_{xy} — компоненты тензора электропроводности, которые для случая электрического поля E_0 , направленного по оси x , и магнитного поля $H = H_0 + H_1 \cos \Omega t$, направленного вдоль оси z , имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_0 v^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{1}{(\omega_0 + n\Omega)^2 + v^2}, \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_0 v \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{\omega_0 + n\Omega}{(\omega_0 + n\Omega)^2 + v^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_0 = eN\mu$, $\omega_0 = eH_0/m^*c$, а N , μ и m^* — соответственно концентрация, подвижность и эффективная масса носителей заряда, $\nu = 1/\tau$ — эффективная частота соударений, $J_n(\Delta)$ — функция Бесселя целочисленного индекса.

В квазистатическом случае ($\Omega\tau \ll 1$) можно воспользоваться приближенной формулой суммирования рядов [3]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2(\alpha)}{a + inb} = [a^2 + (\alpha b)^2]^{-1/2}. \quad (3)$$

Это позволяет получить для величины магнитосопротивления следующее выражение:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left[\left(1 + \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\nu^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega_0^2}{\nu^2} \right]^{1/4} \cos \frac{\vartheta}{2} - 1, \quad (4)$$

где

$$\vartheta = \arctg \frac{2\nu\omega_0}{\nu^2 + \omega_1^2 - \omega_0^2}.$$

Анализ последнего выражения показывает, что модель «среднего» электрона, на основе которой получен этот результат, приводит к существованию магнитосопротивления, обусловленного исключительно переменной составляющей магнитного поля.

Для слабого постоянного магнитного поля $\omega_0\tau \ll 1$ получаем из (4)

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{\nu^2}} - 1, \quad (5)$$

т. е. при малых значениях H_1 ($\omega_1\tau \ll 1$) изучаемый эффект оказывается квадратичным по величине $\omega_1\tau$, аналогично известному результату для этой же модели, но с двумя типами носителей в постоянном магнитном поле.

При $\omega_1\tau \gg 1$ насыщения не наблюдается, а при $\omega_1 \rightarrow 0$ эффект, как следовало ожидать, исчезает.

В другом предельном случае быстропеременного магнитного поля ($\Omega\tau \gg 1$ при $\omega_0\tau \ll 1$ или $\Omega \gg \omega_0$ при $\omega_0\tau \gg 1$), как было подробно исследовано в работе [1], эффект приобретает осциллирующий характер в зависимости от параметра Δ .

Учет распределения носителей по скоростям, а также влияния различных механизмов рассеяния проводится на основе кинетического уравнения [2]. Рассмотрим вначале случай невырожденного полупроводника с одним преобладающим механизмом рассеяния; при этом зависимость частоты столкновений от энергии имеет вид

$$\nu = \nu_0 x^{n/2},$$

где $x = mv^2/2k_0T$, n — параметр, значения которого определяются конкретным механизмом рассеяния, а ν_0 зависит только от температуры.

В случае доминирующего рассеяния на акустических фононах ($n = 1$) компоненты тензора σ_{ij} на нулевой частоте принимают вид [2]

$$\sigma_{xx}(0) = \sigma_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \int_0^{\infty} x^2 \exp(-x) \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\nu_0} + l \frac{\Omega}{\nu_0} \right)^2 + x} dx,$$

$$\sigma_{xy}(0) = -\sigma_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x) \frac{\frac{\omega_0}{\nu_0} + l \frac{\Omega}{\nu_0}}{\left(\frac{\omega_0}{\nu_0} + l \frac{\Omega}{\nu_0}\right)^2 + x} dx, \quad (6)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2}{m\nu_0} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5-n}{2}\right) = \frac{4Ne^2}{3\sqrt{\pi} m \nu_0}.$$

При $\Omega \gg \nu_0$ и в присутствии сильного постоянного магнитного поля возможна асимптотическая оценка приведенных выше интегралов:

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp(-x)(A+x)^{-1} dx \approx \frac{2}{A}, \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x)(A+x)^{-1} dx \approx \frac{3\sqrt{\pi}}{4A} \quad (A \gg 1).$$

Оценки (7) позволяют существенно упростить выражения (6):

$$\sigma_{xx} = 2\sigma_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\nu_0} + l \frac{\Omega}{\nu_0}\right)^2}, \quad (8)$$

$$\sigma_{xy} = -2\sigma_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\nu_0} + l \frac{\Omega}{\nu_0}\right)}.$$

Если, кроме указанных выше условий, выполняется неравенство $\Omega \gg \omega_0$, то для эффективной проводимости $\sigma_{\text{в}}$ получаем следующее выражение:

$$\sigma_{\text{в}} = \sigma_0 J_0^2(\Delta) \left(\frac{9\pi}{32} + 2 \frac{\nu_0^2}{\omega_0^2} \right). \quad (9)$$

Напомним, что эффективное удельное сопротивление полупроводника в сильном магнитном поле в нулевом порядке по ν_0/ω_0 при рассеянии на акустических фононах равно $32/9\pi$ [4].

В этом приближении из (9) следует:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\frac{32}{9\pi} - J_0^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta)}, \quad (10)$$

т. е. расчет зависимости $\frac{\Delta\rho}{\rho}(\Delta)$ на основе кинетического уравнения приводит к постоянному смещению по сравнению с результатом [1] в модели «среднего» электрона (замена единицы на $32/9\pi$) при сохранении осциллирующего характера этой зависимости.

В сильно вырожденном полупроводнике в нулевом приближении по параметру η^{-1} ($\eta = \zeta/k_0T$, ζ — химический потенциал) решение кинетического уравнения приводит к выражениям

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \frac{1}{1 + \eta^{-n} \left(\frac{\omega_0 + l\Omega}{\nu_0} \right)^2},$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_0 \frac{\eta^{-n/2}}{\nu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \frac{\omega_0 + l\Omega}{1 + \eta^{-n} \left(\frac{\omega_0 + l\Omega}{\nu_0} \right)^2}.$$
(11)

Поскольку введение «эффективной» частоты столкновений $\nu_{эфф} = \nu_0 \eta^{n/2}$ позволяет свести тензор электропроводности (11) к виду (2) (с заменой ν на $\nu_{эфф}$), весь анализ поведения магнитосопротивления, выполненный для модели «среднего» электрона, полностью переносится на вырожденный полупроводник. При этом характер эффекта опять определяется прежними соотношениями между частотами Ω , ω_0 и $\nu_{эфф}$, причем, поскольку «эффективная» частота зависит от параметра n , тем самым выявляется роль конкретного выделенного механизма рассеяния.

2. УЧЕТ НЕПАРАБОЛИЧНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ

Для невырожденного полупроводника, обобщение полученных ранее результатов для слабого ($\Delta < 1$) поля в приближении кейновской зоны получено в работе [5]. В пределе сильного вырождения компоненты тензора σ_{ij} можно привести к виду (2), если параметры Δ , ω_0 и ν заменить их «эффективными» значениями:

$$\Delta_{эфф} = \Delta(1 + 2\beta\eta)^{-1}, \quad \omega_{эфф} = \omega_0(1 + 2\beta\eta)^{-1},$$

$$\nu_{эфф} = \nu_0(1 + 2\beta\eta)(\eta + \beta\eta^2)^{n/2},$$
(12)

где $\beta = k_0 T / \varepsilon_g$ — параметр непараболичности.

Для оценки влияния нестандартности зоны на характер рассматриваемого эффекта проведем сравнение со случаем $\beta = 0$. Критерии, определяющие условия осцилляций магнитосопротивления, с использованием кейновского закона дисперсии энергии, примут вид (при $n = 1$)

$$\omega_0 \ll \nu_0(T)(1 + 2\beta\eta)^2(\eta + \beta\eta^2)^{1/2},$$

$$\Omega \gg \nu_0(T)(1 + 2\beta\eta)(\eta + \beta\eta^2)^{1/2}.$$
(13)

Последнее неравенство показывает, что частота магнитного поля Ω , при которой наблюдаются осцилляции, превосходит соответствующее значение этой частоты при $\beta = 0$. Для примера заметим, что для n -InSb ($\eta \approx 10$ и $\beta \approx 0,1$) значение частоты Ω увеличивается больше, чем на порядок по сравнению с соответствующим значением при $\beta = 0$.

В целом результаты анализа в условиях преимущественного рассеяния на акустических ($n = 1$) и оптических ($n = -1$) колебаниях решетки, а также в случае рассеяния на нейтральных ($n = 0$) и ионизованных ($n = -3$) примесях суммированы в табл. 1.

Таблица 1

| n | Критерий слабого постоянного магнитного поля | Условия наблюдения осцилляций магнитосопротивления |
|-----|---|---|
| 0 | $\omega_0 \ll \nu_{00}(T)(1 + 2\beta\eta)^2$ | $\Omega > \nu_{00}(T)(1 + 2\beta\eta)$ |
| 1 | $\omega_0 \ll \nu_{01}(T)(1 + 2\beta\eta)^2(\eta + \beta\eta^2)^{1/2}$ | $\Omega > \nu_{01}(T)(1 + 2\beta\eta)(\eta + \beta\eta^2)^{1/2}$ |
| -1 | $\omega_0 \ll \nu_{0,-1}(T)(1 + 2\beta\eta)^2(\eta + \beta\eta^2)^{-1/2}$ | $\Omega > \nu_{0,-1}(T)(1 + 2\beta\eta)(\eta + \beta\eta^2)^{-1/2}$ |
| -3 | $\omega_0 \ll \nu_{0,-3}(T)(1 + 2\beta\eta)^2(\eta + \beta\eta^2)^{-3/2}$ | $\Omega > \nu_{0,-3}(T)(1 + 2\beta\eta)(\eta + \beta\eta^2)^{-3/2}$ |

Учет непараболичности энергетической зоны приводит к смещению максимумов осциллирующей зависимости: k -й максимум будет находиться в точке $\Delta_k = x_k(1 + 2\beta\eta)$, где x_k — k -й корень функции $J_0(\Delta)$.

3. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ ОБРАЗЦА

Известно, что эффект магнитосопротивления в постоянном магнитном поле существенно зависит от геометрической формы образца: магнитосопротивление растет с уменьшением отношения длины (a) образца к его толщине (b). Зависимость магнитосопротивления от геометрических размеров образца можно факторизовать [6] введением множителя $F(u, \theta)$, зависящего от величины $u = a/b$ и угла Холла θ . В случае слабых магнитных полей [6]

$$F(u, \theta) = 1 + \theta^2 g(u), \quad (14)$$

где

$$g(u) = \begin{cases} 0,54 \frac{1}{u} & (u \geq 1) \\ 1 - 0,54u & (u \leq 0,35) \end{cases}.$$

В дополнительном переменном магнитном поле в рамках этой же модели при $\omega_0\tau \ll 1$ выражение для угла Холла принимает вид

$$\operatorname{tg} \theta \approx \theta \approx \theta_0 \varphi(\Delta). \quad (15)$$

В этом выражении θ_0 — угол Холла, обусловленный только действием слабого постоянного магнитного поля, а функция $\varphi(\Delta)$ представляет собой отношение двух бесконечных рядов — $\varphi(\Delta) = \alpha(\Delta)/\chi(\Delta)$, где

$$\alpha(\Delta) = J_0^2(\Delta) + 2\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{\nu^2 - (n\Omega)^2}{[\nu^2 + (n\Omega)^2]^2}, \quad (16)$$

$$\chi(\Delta) = J_0^2(\Delta) + 2\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{1}{\nu^2 + (n\Omega)^2}.$$

Таким образом, из (14) и (15) следует, что

$$F(u, \theta) = 1 + \theta_0^2 \varphi^2(\Delta) g(u). \quad (17)$$

Анализ функций $\varphi(\Delta)$ показывает, что наибольшая зависимость от переменного магнитного поля наблюдается при условии $\nu \approx \Omega$. В этом случае в приближении нулевого порядка по малому параметру $\lambda = \frac{\nu^2 - \Omega^2}{\nu^2}$ для значений Δ , не совпадающих с корнями $J_n(\Delta)$,

$$\varphi(\Delta) = \frac{J_0^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta) + J_1^2(\Delta)}. \quad (18)$$

Расчеты, проведенные по формуле (17), представлены на рис. 5 вместе с экспериментальными данными, которые обсуждаются ниже.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

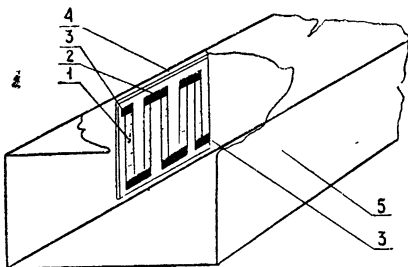
Для создания магнитных полей сверхвысоких частот использовался принцип пространственного разделения электрического и магнитного полей в прямоугольном волноводе, работающем на основном типе колебаний. В соответствии с этим экспериментальная установка представ-

ляла собой прямоугольный волновод сечением 72×34 мм², возбуждаемый импульсным магнетронным генератором. Магнетрон работает в импульсном режиме со скважностью 1000 и длительностью импульсов 10 мкс. Рабочая частота магнетрона равна 2,92 ГГц. Мощность в импульсе более 100 кВт. Установка оснащена охлаждаемым ферритовым волноводным вентилем, измерительной волноводной линией и малоотражающим переменным аттенуатором.

Исследуемый полупроводниковый образец, изготовленный из n -InSb с концентрацией $(4 \div 6) \cdot 10^{15}$ см⁻³, конструктивные особенности которого иллюстрирует рис. 1, располагался вдоль узкой стенки волновода. Размеры отдельной пластины полупроводника $10 \times 1 \times 0,1$ мм³. С учетом 50-микронной слюдяной пластины магниторезистор расположен в волноводе на расстоянии не более 150—200 мкм.

Рис. 1. Магниторезистивный датчик в прямоугольном волноводе:

1—пластины n -InSb, 2—металлические (индиевые) полоски, 3—контактные медные полоски, 4—диэлектрическая подложка, 5—прямоугольный волновод.



Расчет полей в волноводе показывает, что даже при уровнях мощности порядка 100 кВт величина E_1 в области расположения образца не превосходит 10—20 В/см. Указанная цифра при наличии однородного образца, по-видимому, обеспечивает отсутствие при импульсном режиме работы нелинейных эффектов, обусловленных электрическим полем волны.

Одновременно необходимо иметь в виду малые значения величины H_1 , что заставляет принять специальные меры для индикации магниторезистивного эффекта в переменном магнитном поле. В нашем случае индикация эффекта магнитосопротивления в импульсном режиме основана на принципе измерения усиленного широкополосным усилителем изменения падения напряжения на полупроводниковом образце. Реализация этого метода достигается следующим образом: на полупроводниковый образец 1 подается постоянное отсчетное напряжение, величина которого определяется особенностью ВАХ образца (ввиду того, что магниторезисторы из n -InSb обладают сравнительно небольшим сопротивлением (5—20 Ом), имеющиеся стандартные широкополосные усилители неприменимы). Это обстоятельство потребовало создания согласующего усилителя с параметрами: полоса частот 50 Гц—10 МГц, входное сопротивление не более 10 Ом, входное сопротивление следующего каскада 500 кОм. Использование подобного согласующего усилителя позволяет в качестве последующего каскада применить стандартный усилитель 103-И.

Усиленный импульс регистрируется с помощью импульсного осциллографа ИО-4. Для калибровки всей системы усиления применен генератор прямоугольных импульсов 26-И с калиброванным делителем. Регистрация и контроль температуры осуществляется термодарой.

Таким образом, магниторезистивный эффект экспериментально исследуется по измерению отношения $\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta R}{R_0}$, т. е. заданием отсчетного напряжения U и измерением амплитуды импульса ΔU . Значение величины U выбирается из следующих соображений: вольт-амперная

характеристика магниторезисторов, снятая с помощью осциллографа на частоте 200 кГц , имеет вид, приведенный на рис. 2, который показывает линейный участок до $U \approx 1,7 \text{ В}$. Поэтому с учетом приведенных выше соображений о величине электрического поля волновода с высокой степенью точности можно считать, что при $U \leq 1,5 \text{ В}$ изменение R в импульсном режиме обусловлено действием магнитного поля. В этом случае $\Delta U = 0$ при $U = 0$, т. е. при отсутствии опорного сигнала импульс цепи индикации не регистрируется.

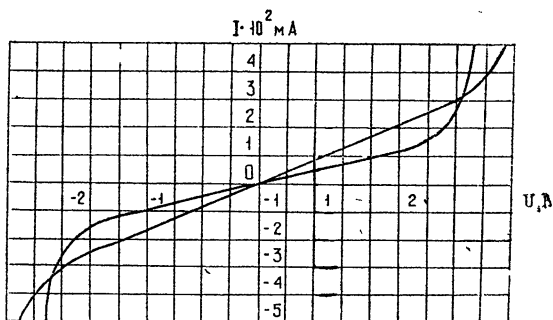


Рис. 2.

Для подтверждения высказанных соображений проводилось измерение подвижности μ n -InSb при комнатной температуре по определению ΔR в постоянном магнитном поле ($H_0 = 1200 \text{ Э}$, измерения ΔR проводились мостом постоянного тока МО-62 с точностью $0,05\%$)

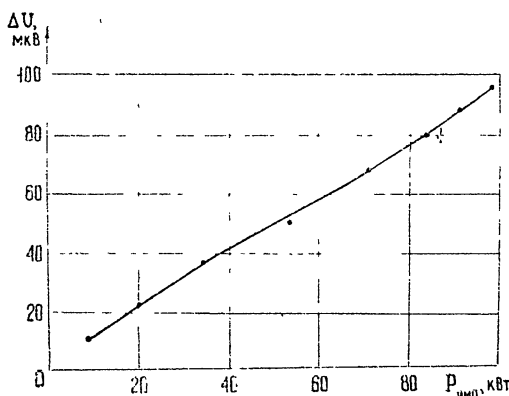


Рис. 3.

и в СВЧ магнитном поле по указанной выше методике, определяя H_1 по известному уровню СВЧ мощности (измеренному с помощью водяного калориметра). Полученные значения μ соответственно равны 48000 и $51000 \text{ см}^2/\text{Вс}$.

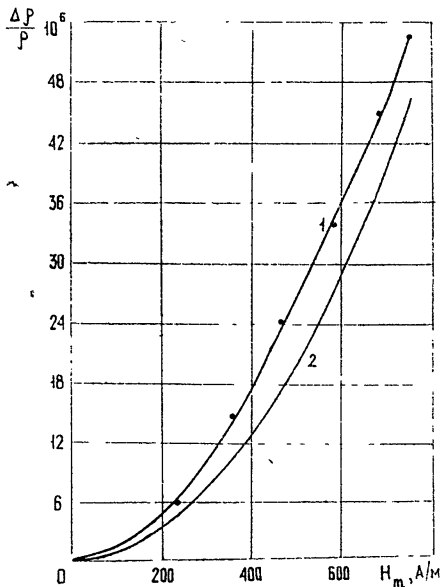
Результаты измерения ΔU в зависимости от величины подаваемой в волновод мощности для двух образцов, ВАХ которых приведена на рис. 2, представлены на рис. 3. Пересчет этих данных с целью получения характера зависимости магнитосопротивления от величины

магнитного поля приводит к рис. 4. Квадратичный характер функции $(\Delta\rho/\rho)(H_1)$ для экспериментально реализованного случая $\Omega\tau \ll 1$ удовлетворительно коррелирует с зависимостью $\Delta\rho/\rho \sim \frac{1}{2}(\omega_1\tau)^2$ [1] (см. также формулу (5)).

Поскольку СВЧ мощность P связана с амплитудой переменного поля H_1 соотношением $P \sim H_1^2$, а $\Delta U/U \sim \omega_1^2$ и, следовательно, H_1^2 , то $\Delta U \sim P$, что объясняет линейную зависимость, представленную на рис. 3, и открывает интересные возможности по разработке безынерционного малоотражающего измерителя высоких уровней мощности [7] (КСВ волновода с магниторезистором порядка $1,03 - 1,05$).

Исследование температурной зависимости эффекта проводилось в двух случаях: в постоянном и СВЧ магнитном полях. В постоянном магнитном поле температурный коэффициент составляет 0,5% на градус. Измерения, проведенные при $P = 100 \text{ кВт}$ в импульсе в интервале температур 20 — 60°C, обеспечиваемых обдувом волновода горячим воздухом и контролем температуры с помощью термопары, дали значения этого коэффициента $\sim 0,4\%$ на градус.

Рис. 4. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости магнитосопротивления $\Delta\rho/\rho$ от напряженности высокочастотного магнитного поля.



Для экспериментальной проверки влияния геометрического фактора на величину исследуемого эффекта проводилось измерение сопротивления одиночной пластины антимолида индия n -типа, установленной в разборном макете волновода. Размеры пластины $23 \times 9 \times 0,2 \text{ мм}^3$, величина подаваемой в волновод мощности соответствовала значению параметра $\Delta = 0,2$. После измерения отношения $R(H)/R(0)$ образец вынимался из волновода, разрезался и после нанесения новых омических контактов устанавливался строго на прежнее место. Геометрия пластины и применяемая система резки и монтажа позволили осуществить экспериментальные образцы со следующими отношениями длины образца к его толщине: 0,39; 0,52; 1,18; 2,56; 33,3. Последний принимался в качестве бесконечно длинного. Полученные экспериментальные результаты представлены в виде соответствующих точек на рис. 5.

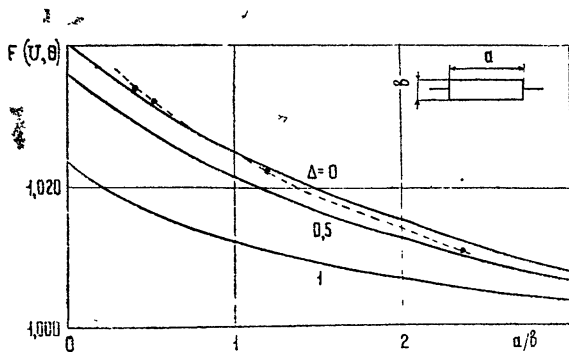


Рис. 5. Теоретическая и экспериментальная (пунктирная линия) зависимости геометрического фактора магнитосопротивления,

Здесь же приведены теоретические кривые для значений $\Delta = 0; 1/2, 1$. На графике представлено значение множителя $F(u, \theta)$ как отношения $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_u / \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{u=\infty}$. Как указывается выше, экспериментальное значение для бесконечно длинного образца соответствует $u = 33,3$.

В заключение укажем, что экспериментальное изучение осциллирующего характера магниторезистивного эффекта, наблюдаемого при условиях, обсуждаемых в данной работе, является предметом самостоятельного исследования.

Авторы признательны Ю. А. Скрыльникову и А. В. Калмыкову за помощь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Кац, Д. Ш. Шехтер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 3, 405 (1974).
2. Л. И. Кац, В. П. Тержова, Д. Ш. Шехтер, Л. Ш. Шехтер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 675 (1972).
3. Ф. Т. Васьюко, И. М. Дыкман, ФТТ, 11, 3343 (1969).
4. Б. М. Аскеров, Кинетические эффекты в полупроводниках, изд. Наука, Л, 1970.
5. Д. Ш. Шехтер, Изв. высш. уч. зав. — Физика, 9, 152 (1972).
6. H. J. Lippman, F. Kuhrt, Naturforsch, 13a, 462 (1958).
7. Л. И. Кац, Д. Ш. Шехтер, Авторское свидетельство № 356578, 1972.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
18 ноября 1974 г.

MAGNETO-RESISTIVE EFFECT IN A VARIABLE MAGNETIC FIELD

Yu. A. Arkhipov, L. I. Kats, D. Sh. Shekhter, L. Sh. Shekhter

A magneto-resistive effect in a variable magnetic field is theoretically and experimentally investigated. The influence of different mechanisms of the carrier scattering in a sample is clarified in the case of degenerated and nondegenerated semiconductor. A possible nonparabolic character of the energetic zone and the geometry dimensions of the sample are taken into account. The experiment in the investigated region of the parameters is in agreement with the theory.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538 574

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СВЯЗАННЫХ ВОЛН К АНАЛИЗУ
НЕРЕЗОНАНСНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ**

А. А. Новиков

Как известно, практически все приближенные методы теории нелинейных волн опираются на адиабатичность процессов, т. е. предполагается, что исходная постановка задачи допускает введение новых, медленных по сравнению с собственными масштабами волны, переменных, переход к которым существенно упрощает задачу. Основные идеи исследования квазимонохроматических процессов в диспергирующих средах сводятся к трем основным подходам методу связанных волн [1, 2], асимптотическому методу [3, 4] и гамильтонову формализму [5]. Метод связанных волн, состоящий в переходе к уравнениям для комплексных амплитуд с последующим усреднением, выделяется своей наглядностью, но позволяет получить лишь поправки первого приближения. Этого явно недостаточно при исследовании нерезонансных процессов, таких, как самовоздействие и взаимодействие волн с нераспадным спектром на квадратичной нелинейности, когда эффекты первого приближения отсутствуют. Асимптотический метод [3] избавлен от этого недостатка и позволяет разделить уравнения для огибающих и несущих с любой точностью, но соответствующая процедура несколько затруднена тем, что линейные свойства задачи учитываются тем же способом, что и нелинейные. Трудностью же применения хорошо разработанного гамильтонова формализма является отсутствие универсального способа введения канонических переменных. В настоящей заметке обсуждается подход, объединяющий простоту и наглядность метода связанных волн со строгостью и возможностями асимптотического метода.

Уравнения, описывающие процессы в распределенных системах, обычно могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - B \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{u} = \mu \mathbf{f} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{u}, x, t \right), \quad (1)$$

где \mathbf{u}, \mathbf{f} — N -мерные векторы, B — матрица $N \times N$, параметр $\mu \ll 1$ подчеркивает малость нелинейности. Для перехода к уравнениям связанных волн воспользуемся правилами операторной алгебры для $\frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{x}$ и перейдем в собственный базис матрицы $B(\mathbf{x})$, т. е. представим вектор \mathbf{u} в виде разложения по собственным векторам $\Psi_l(\mathbf{x})$ этой матрицы:

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{l=1}^N \Psi_l \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g_l(x, t). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и домножая скалярно полученное равенство на векторы $\zeta_j(\mathbf{x})$ взаимного к Ψ_l базиса, получим уравнения для нормальных волн линеаризованной системы $g_l(x, t)$, связанные нелинейностью:

$$D_j \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) g_j(x, t) = \mu (\zeta_j, \Psi_l)^{-1} (\zeta_j, \mathbf{f}), \quad (3)$$

где $D_j = \frac{\partial}{\partial t} - P_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$, $P_j(\mathbf{x})$ — собственные значения матрицы $B(\mathbf{x})$ — ветви дисперсионного уравнения линеаризованной системы. Смысл перехода к новым переменным $g_l(x, t)$ состоит в том, что теперь линейная часть задачи максимально упрощена и тем самым нелинейные явления выделены в «чистом виде». При отсутствии нелинейности ($\mu = 0$) общее решение (3) записывается сразу:

$$g_l(x, t) = \int \varphi(k) \exp [i(\omega_l(k)t - kx)] dk,$$

где $i\omega_l = P_l$, $k = ix$, а уравнение для огибающей $a_{kl}(\chi, \tau)$ квазимонохроматической волны

$$g_{kl}^0(x, t) = a_{kl}(\chi, \tau) \exp [i(\operatorname{Re} \omega_l(k)t - kx)] + \text{к. с.}, \quad (4)$$

где $\chi = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon = \frac{\Delta k}{k} \sim \frac{\Delta \omega}{\omega} \ll 1$, получается просто разложением в ряд закона дисперсии

$$\tilde{D}_{kl} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) a_{kl}(\chi, \tau) = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{kl} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + i \operatorname{Re} \omega_l(k) - P_l \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \chi} - ik \right) \approx \\ &\approx \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \operatorname{Im} \omega_l(k) + \frac{d\omega}{dk} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{i}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \chi} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Пусть в нелинейном процессе участвуют несколько квазимонохроматических волн типа (4). Наличие нелинейности приведет к тому, что появятся нерезонансные до-бавки w ,

$$g_l = \sum_k g_{lk}^0 + \mu w_l^{(1)} + \mu^2 w_l^{(2)} + \dots \quad (6)$$

и поправки к уравнениям (5)

$$\tilde{D}_{kl} \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \chi} \right) a_{kl} = \mu F_{kl}^{(1)} + \mu^2 F_{kl}^{(2)} + \dots \quad (7)$$

Подчеркнем, что в отличие от [3] в (6) и (7) учитываются только нелинейные эффекты, а все линейные свойства задачи содержатся в (2), (4) и (5). Это обстоятельство заметно упрощает вычисления, что очень важно для приложений.

Применяя далее стандартную процедуру [3, 4], т. е. подставляя (6) и (7) в (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим

$$\begin{aligned} D_l \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) w_l^{(n)} &= - \sum_k F_{kl}^{(n)} \exp [i(\operatorname{Re} \omega_l(k)t - kx)] + \\ &+ F_l^{(n)} - D_l \left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \chi} \right) w_l^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $F_l^{(n)}$ — соответствующий коэффициент разложения правой части (3) в ряд Тейлора по μ после подстановки g_l в виде (6). После удаления резонансных членов путем выбора $F_{kl}^{(n)}$ в виде

$$F_{kl}^{(n)} = \frac{\operatorname{Re} \omega k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi/\operatorname{Re} \omega} dt \int_0^{2\pi/k} dx F_l^{(n)} \exp [-i(\operatorname{Re} \omega_l(k)t - kx)] \quad (9)$$

из (8) легко находятся $w_l^{(n)}$.

Переход к уравнениям для нормальных волн легко осуществляется также при изучении волн в нестационарных и неоднородных средах, когда матрица $B(x)$ зависит еще от x и t . В этом случае при подстановке (2) с $\Psi(x)$, зависящими от x , t , в (1) надо лишь учитывать, что функции от x и функции от x не коммутируют, а возникающие при приведении левой части (1) к виду (3) коммутаторы должны быть перенесены вправо и учитываться вместе с нелинейностью.

Использование новых переменных типа нормальных волн оказывается полезным при решении многих задач, допускающих выделение уже решенной частной задачи. Так уравнения связанных волн (3) могут быть использованы при исследовании волновых процессов в слабодиспергирующих средах. Например, основные результаты

работы [6] могут быть получены без итераций простым разложением правой части (3) в ряд по g , а левой—в ряд по x для систем с ВЧ дисперсией или в ряд по $1/x$ для систем с НЧ дисперсией.

Общий метод перехода к уравнениям связанных волн состоит в решении всей неосцилляторной части задачи в рамках операторного метода для x, p с последующим разложением результата на простейшие дроби со знаменателями $p-p_l(x)$ или $x-x_l(p)$. Примеры подобного перехода см. в [7, 8].

Автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Люиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, ИЛ, М., 1963.
2. В. Е. Захаров, ПМТФ, № 1, 14 (1965).
3. М. И. Рабинович, Докл. АН СССР, 191, 1253 (1970).
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 195.
5. В. Е. Захаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 4, 431 (1974).
6. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ПММ, 38, 121 (1974).
7. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 11, 1700 (1971).
8. Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров, В. М. Куртепов, К. А. Наугольных, Океанология, 15, № 2, 205 (1975).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
25 марта 1975 г.