

СОДЕРЖАНИЕ

Буров А. Б., Воронов В. Н., Красильников А. А., Серов Н. В. Шестиканальный радиометр для спектральных исследований земной и планетных атмосфер	1795
Ковалевский И. В., Новиков В. Д., Стаханов И. П. К исследованию отсcheidывающихся плазменных образований в магнитосфере методом некогерентного ответа	1800
Благовещенская Н. Ф., Благовещенский Д. В. Влияние геомагнитной активности на распространение радиоволн в высоких широтах	1807
Крупина А. Е. О траекториях распространения волн Барнштейна в высоких широтной ионосфере при внешнем зондировании	1810
Новиков Л. Н., Вотяков С. Л., Суетин В. П. Магнитный резонанс оптически ориентированных атомов в неоднородных полях	1817
Яковлев В. П. Взаимодействие двухуровневого атома с электромагнитным полем в квазиклассическом приближении	1823
Барanova Н. Б., Зельдович Б. Я. Развитие локальных возмущений волны в самофокусирующих средах	1833
Бурлак Г. Н., Коцаренко Н. Я., Фалько Г. Л. Флуктуации акустических волн Лява и рассеяние света в фотоупругих пленках	1841
Журав С. М. Дифракция на периодической структуре, образованной проводящими полуплоскостями конечной толщины	1848
Шевернев В. И. О дифракции плоской неоднородной волны на полуплоскости	1854
Борисов В. В. Электромагнитное поле тока произвольной временной зависимости, распределенного на поверхности сферы	1862
Чаплин А. Ф., Лобачев В. А. Синтез несимметрично возбужденной импедансной цилиндрической антенны	1871
Нусинович Г. С. О многомодовых режимах в МЦР-генераторах	1875
Метель А. С., Настиуха А. И. О роли дополнительной ионизации газа осциллирующими электронами в области катодного падения потенциала тлеющего разряда с полым катодом	1884
Метель А. С., Настиуха А. И. Исследование тлеющего разряда в системе электродов с разнопотенциальными катодами	1891
Орлов Л. К. Генерация третьей гармоники в полупроводниках со сверхрешеткой	1896

Краткие сообщения и письма в редакцию

Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г., Митяков Н. А., Разин В. А., Теплыkh А. И., Шавин П. Б., Томчинский А. М. Дифракция радиоизлучения дискретного источника Кассиопея-А на искусственных ионосферных неоднородностях	1902
Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю., Череповицкий В. А. Свойства искусственных ОНЧ сигналов после двукратного прохождения магнитосферы	1904
Веденеев Ю. Б., Калошин В. О., Прятков Н. М. Комплекс солнечных радиоспектрографов диапазона 100—1000 МГц	1907

Гетманцев Г. Г., Ерухимов Л. М., Митяков Н. А., Поляков С. В., Урядов В. П., Фролов В. Л. Ракурсное рассеяние коротковолновых радиосигналов на искусственных ионосферных неоднородностях	1909
Гребенников А. В., Золотарев И. Д., Манаков Н. Л. О решении одного диффе- ренциального уравнения в теории магнитного резонанса	1912
Хроника	
IV Всесоюзный симпозиум по лазерному зондированию атмосферы	1915
Информация	
Содержание т. XIX журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1976 г.	1917
Именной указатель—т. XIX журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1976 г.	1926

УДК 535.8 : 535.214.4

ШЕСТИКАНАЛЬНЫЙ РАДИОМЕТР ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗЕМНОЙ И ПЛАНЕТНЫХ АТМОСФЕР

А. Б. Буров, В. Н. Воронов, А. А. Красильников, Н. В. Серов

Описан анализатор спектра диапазона волн 3—4 мм с пятью узкими каналами шириной 80 МГц, каждый и одним широким каналом шириной 1000 МГц. Флуктуационная чувствительность радиометра в широком канале равна 0,5 К, а в узком—(1,5—2) К, при постоянной времени 1 с. В приемнике используется высокостабильный гетеродин с относительной нестабильностью частоты меньше или равной 10^{-6} .

Спектральные исследования радиоизлучения земной и планетных атмосфер дают информацию о химическом составе и физических условиях в слое атмосферы, ответственном за радиоизлучение. Диапазон миллиметровых радиоволн особенно интересен с этой точки зрения, так как в нем концентрируются вращательные резонансы многих молекул, составляющих планетные атмосферы. Радиометр для наблюдения молекулярных линий должен иметь ряд специфических особенностей. С одной стороны, необходима достаточно большая полоса анализа, так как молекулярные линии, формирующиеся в планетных атмосферах, довольно широки. В [1] показано, например, что оптимальная полоса пропускания частот радиометра для поиска теллурической линии равномерно перемешанной примеси совпадает с лоренцевской полушириной линии. Для исследования контура линии необходимо более высокое частотное разрешение порядка десятков мегагерц. Такого же порядка полуширины линий O_3 , молекулы которого концентрируются в земной атмосфере при $h \approx 20$ км.

В связи со сказанным был разработан радиометрический анализатор спектра диапазона волн 3—4 мм с полосой анализа 1000 МГц и разрешением по частоте 80 МГц.

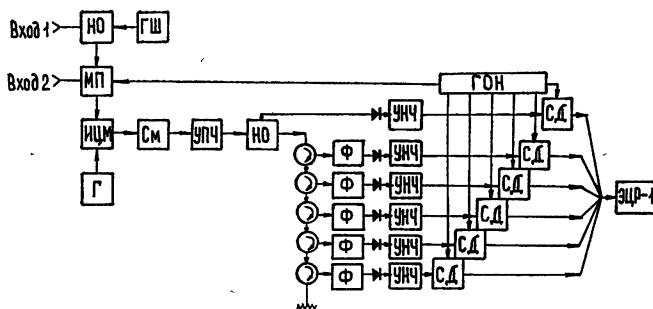


Рис. 1. НО—направленный ответвитель, ГШ—генератор шума, УПЧ—усилитель промежуточной частоты, Ф—двузвененный фильтр на коаксиальных резонаторах.

Блок-схема шестиканального радиометра изображена на рис. 1. Радиометр представляет собой супергетеродинный приемник с механическим модулятором-переключателем на входе [2].

Высокочастотная часть шестиканального радиометра показана на фото рис. 2.

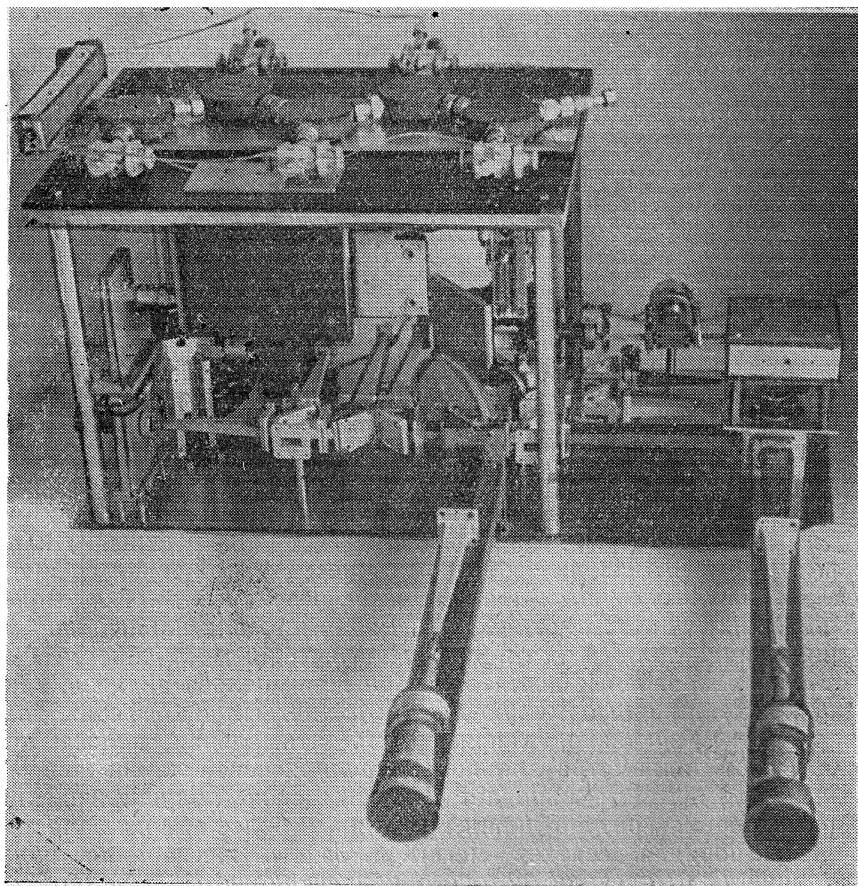


Рис. 2.

Модулятор-переключатель (МП) поочередно подключает к приемнику вход 1 и вход 2. Частота переключения равна 360 Гц . Вход 1 и вход 2 представляют собой рупоры круглого сечения с плавным переходом на прямоугольный волновод. Рупоры рассчитаны на оптимальное облучение зеркала РТ-22 при использовании их в кафсегреновской системе [3].

Таким образом, можно осуществить сканирование диаграммы направленности антенны приемника, что при наблюдениях планет значительно уменьшает влияние вариаций излучения земной атмосферы [4].

Для исследования земной атмосферы к одному из входов приемника подключается эталонная нагрузка, а антенной может служить один из рупоров.

Конструкция модулятора-переключателя такая же, как в [2]. Диск модулятора вращается с помощью синхронного электродвигателя, который питается от генератора опорного напряжения (ГОН).

Выход модулятора-переключателя соединен с интерферометром Цендера—Маха (ИЦМ), с помощью которого колебания сигнала и гете-

родина (Г) подводятся к смесителю (СМ). Использование в тракте смесителя интерферометра дало возможность с малыми потерями подводить к смесителю принимаемое и гетеродинное излучение, а также значительно подавить паразитный сигнал [5] и шумы гетеродина [6].

Высокочастотный тракт радиометра выполнен на сверхразмерных волноводах сечением $23 \times 10 \text{ mm}^2$, что позволяет существенно уменьшить потери во входных цепях, а также сделать достаточно симметричным модулятор-переключатель. Несимметрия плеч модулятора не более (1—2) %. Потери в модуляторе составляют около 0,5 dB. Общие потери в ВЧ тракте не превышают 1,5 dB.

Смеситель выполнен на арсенидно-галлиевом диоде с барьером Шоттки [7]. Потери преобразования составляют для лучших образцов около 8 dB.

Усилитель промежуточной частоты (УПЧ) приемника имеет полосу пропускания частот около 1000 MHz в диапазоне 10 см. В первом каскаде используется туннельный усилитель, а во втором — ЛБВ типа УВ-43. В полосе УПЧ вырезаны пять каналов, каждый из которых формируется селективным двухзвенным фильтром на коаксиальных резонаторах. Полоса пропускания частот каждого фильтра 80 MHz. Развязка между фильтрами осуществляется с помощью циркуляторов типа 10 ЦКШ-2.

После фильтров сигналы детектируются и поступают на селективные усилители низкой частоты (УНЧ), настроенные на частоту 360 Гц. За усилителями следуют синхронные детекторы (СД), на выходе которых включены интегрирующие RC-цепочки. Регистрация сигналов происходит в пяти узких и одном широком каналах электронно-цифровым регистратором ЭЦР-1. Флуктуационный порог чувствительности определялся по излучению черного тела, охлажденного до температуры кипящего азота.

При приеме в основном и зеркальном каналах чувствительность приемника в полосе 1000 MHz равна 0,5 K, а в полосе 80 MHz — (1,5—2) K при постоянной времени 1 с. При необходимости зеркальный канал может быть «вырезан» с помощью двухшлейфового фильтра в ВЧ тракте.

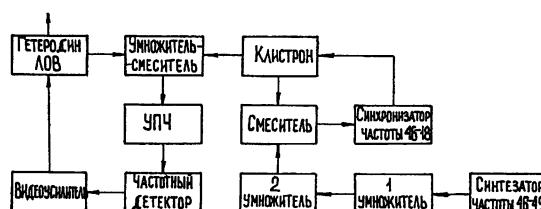


Рис. 3.

В качестве гетеродина используется лампа обратной волны (ЛОВ) ОВ-14. Частота ЛОВ стабилизирована системой частотной автоподстройки (ЧАП) [8, 9] по гармоникам сигнала клистронного генератора (используется клистрон в диапазоне 8,5—10 ГГц). Блок-схема стабилизации частоты гетеродина изображена на рис. 3. Частота сигнала клистрона стабилизируется системой фазовой автоподстройки по кварцевому опорному сигналу. Опорным генератором является синтезатор частоты Ч6-49, где из сигнала с относительной нестабильностью частоты, меньшей или равной $5 \cdot 10^{-8}$, поступающего с кварцевого генератора, синтезируется сигнал с перестройкой через 0,1 Гц в диапазоне (30—31) MHz. Частота сигнала синтезатора умножается с помощью

умножителей 1 и 2 до частоты в диапазоне (8,5—10) ГГц. Умножитель 1 — транзисторный до частот (360—372) МГц, умножитель 2 — варакторный до частот (8,5—10) ГГц. Сигнал с варакторного умножителя подается на смеситель, сюда же подводится часть мощности стабилизируемого клистрона. Сигнал разностной частоты 30 МГц используется для фазовой автоподстройки частоты сигнала клистрона с помощью синхронизатора ЧБ-18. Стабилизированный сигнал клистрона подается на умножитель-смеситель, сюда же подводится часть мощности ЛОВ. Полученные биения частоты 48 МГц усиливаются в УПЧ и подаются на частотный детектор, где вырабатывается сигнал ошибки. Усиленный в видеоусилителе сигнал ошибки прикладывается последовательно с напряжением источника питания замедляющей системы ЛОВ. Коэффициент стабилизации системы ЧАП не менее 500. Относительная нестабильность частоты сигнала ЛОВ меньше или равна 10^{-6} . Система стабилизации частоты позволяет перестраивать частоту сигнала во всем диапазоне ЛОВ.

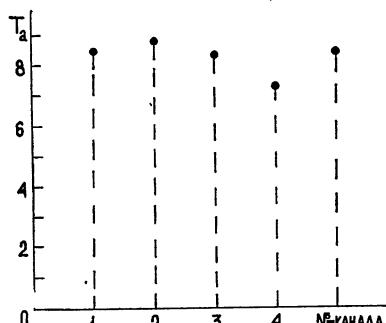


Рис. 4.

Описанный шестиканальный радиометр успешно использовался в 1974 году на радиотелескопе РТ-22 Крымской астрофизической обсерватории АН СССР для спектральных исследований радиоизлучения

планет и земной атмосферы. На рис. 4 показан спектр приращения антенной температуры при наблюдениях планеты Юпитера. Средний канал был настроен на частоту перехода $J = 0 \rightarrow 1$ молекулы ННО. Проводились также наблюдения теллурических линий вращательных спектров молекул О₃ и N₂O.

Авторы выражают глубокую признательность А. Г. Кислякову за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Зинченко, А. Г. Кисляков. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 10, № 12 (1974).
2. В. Н. Воронов, Р. Киракосян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 9, 1439 (1973).
3. Л. Д. Бахрах, М. И. Григорьева, В. А. Ефанов, Л. Р. Коган, В. И. Констаненко, Л. И. Матвеенко, И. Г. Моисеев, Ю. Г. Монин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 9, 1425 (1973).
4. Д. В. Корольков, Ю. Н. Парицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1773 (1968).
5. Л. И. Федосеев, Ю. Ю. Куликов, Радиотехника и электроника, 16, № 4, 554 (1971).
6. Ю. А. Дрягин, Л. М. Кукин, Л. В. Лубяко, Радиотехника и электроника, 19, № 8, 1779 (1974).
7. В. Н. Воронов, А. Д. Гинзбург, А. И. Наумов, Д. Г. Павельев, В. М. Ускова, Л. И. Федосеев, А. А. Шведов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 7, 1125 (1973).
8. М. Р. Капланов, В. А. Левин, Автоматическая подстройка частоты, Госэнергоиздат, М.—Л., 1962.
9. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, ПТЭ, № 1, 159 (1970).

**SIX-CHANNEL RADIOMETER FOR SPECTRAL INVESTIGATIONS OF
TERRESTRIAL AND PLANETARY ATMOSPHERES***A. B. Буров, В. Н. Воронов, А. А. Красильников, Н. В. Серов*

A 3—4 mm spectrum analyzer with five narrow channels each of 80 MHz width and one wide channel of 1000 MHz width is described. The radiometer fluctuation sensitivity in a wide channel is equal to 0.5 K and in the narrow one is 1.5—2 K at the time constant 1 sec. A high-stable heterodyne with a relative frequency instability $< 10^{-6}$ is employed in the receiver.

УДК 550.385; 551.510.535

К ИССЛЕДОВАНИЮ ОТСОЕДИНИВШИХСЯ ПЛАЗМЕННЫХ ОБРАЗОВАНИЙ В МАГНИТОСФЕРЕ МЕТОДОМ НЕКОГЕРЕНТНОГО ОТВЕТА

И. В. Ковалевский, В. Д. Новиков, И. П. Стаханов

Показано, что измеряя сдвиг фаз между запросным и ответным сигналами, которыми обмениваются спутник и наземная станция (метод некогерентного ответа), можно зарегистрировать плазменные облака, состоящие из плотной холодной плазмы, которые отрываются во время геомагнитных бурь от плазмосферы и движутся между пламопаузой и границей магнитосферы. Можно получить также информацию об основных параметрах этих образований: концентрации плазмы, размерах, скорости движения, толщине переходного слоя между облаком и окружающей средой плазменной впадины и расстояния от облака до Земли. В отличие от зондовых методов исследования для получения этой информации не требуется, чтобы траектория космического аппарата прошла непосредственно через облако.

1. В периоды магнитосферных бурь и суббурь при перестройке глобальных электрических полей в магнитосфере от плазмосферы отделяются плазменные образования, которые затем дрейфуют в пространстве между пламопаузой и границей магнитосферы. Такие отсоединившиеся плазменные образования (ОПО), состоящие из плотной холодной плазмы, были зарегистрированы при полетах спутников «ОГО-5» и «Эксплорер-45» за пределами плазмосферы [1–4]. Концентрация плазмы в этих образованиях ($n \approx 10 \div 10^2 \text{ см}^{-3}$) на несколько порядков превышает ее значение в окружающей среде плазменной впадины ($0,1 \div 1 \text{ см}^{-3}$) [2, 5]; скорость движения составляет несколько километров в секунду [6]. Характерные размеры ОПО, по-видимому, колеблются в пределах от нескольких десятков до нескольких тысяч километров, причем в большинстве случаев они составляют несколько сотен километров [2]. Относительно формы и природы происхождения ОПО пока нет установившейся точки зрения [2–4]: возможно, что это вытянутые вдоль геомагнитного поля неоднородности, которые можно аппроксимировать в виде цилиндра или плазменных оболочек, связанных с плазмосферой, или же это полностью отсоединившиеся от плазмосферы плазменные облака (области).

Поскольку ОПО играют существенную роль в физике магнитосферы, то рассмотрим возможность исследования динамики ОПО методом некогерентного ответа (МНО), основанного на регистрации разности фаз, возникающей между запросным и ответным сигналами вследствие изменения состояния среды за время распространения сигнала [7–11]. Запросный сигнал посыпают со станции О (запросная станция) и принимают на ответной станции О¹. После смешения его с сигналом генератора станции О¹ с этой станции посыпают ответный сигнал, который принимают на станции О. Фазовый сдвиг $\Delta\Phi$ между запросным и ответным сигналами на станции О определяется выражением [10, 11]

$$\Delta\Phi = -\frac{2\pi e^2}{mc} \frac{1}{\omega} \int_0^R \left[n\left(x, t - \frac{2R-x}{c}\right) - n\left(x, t - \frac{x}{c}\right) \right] dx, \quad (1)$$

где R — расстояние ОО¹, x — координата, отсчитываемая от О, ω — частота сигнала. Заметим, что если посыпать запросный сигнал с космического аппарата, то влияние ионосферы на $\Delta\Phi$ практически исключается [8].

В [8, 9, 12, 13] рассматривалась разность фаз, возникающая от вторжения плоского фронта на траекторию ОО¹, например, ударных волн, тангенциальных разрывов и плазмопаузы. В настоящей работе рассмотрим $\Delta\Phi$, возникающие от перемещения ОПО. Предположим, что О находится в пределах магнитосферы на расстоянии $R \approx 30$ —60 тыс. км от Земли.

2. Пусть ОПО вторгается на траекторию радиолуча в точке O_1 , т. е. $x = x_0$ (рис. 1). Заметные $\Delta\Phi$ возникают лишь в течение короткого промежутка времени в начале вторжения. В этом состоит одно из преимуществ предлагаемого метода перед обычными радиоинтерференционными методами. Ширина $2\Delta x$ — участка траектории радиосигнала, занятого плазмой, можно считать малой по сравнению с ОО¹. Пренебрегая запаздыванием сигнала на этом участке ($x_0 - \Delta x < x < x_0 + \Delta x$), из (1) получим

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi e^2}{mc} \frac{1}{\omega} \left[N\left(t - \frac{2R-x_0}{c}\right) - N\left(t - \frac{x_0}{c}\right) \right], \quad (2)$$

где $N(t) = \int_0^R \Delta n(x, t) dx \approx \int_0^R n(x, t) dx$ — превышение концентрации плазмы в ОПО над ее значением вне его.

Пусть далее $t = t_0$ — момент времени, когда передний край ОПО касается ОО¹ (в точке O_1). Поскольку нас интересуют лишь малые значения $t - t_0$, смещением ОПО вдоль ОО¹ за это время можно пренебречь. Кроме того, можно аппроксимировать поверхность ОПО вблизи O_1 сферической поверхностью с радиусом кривизны r_0 . При этом предполагается, что

$$r_0 \gg \Delta x \gg u(t - t_0), \quad (3)$$

где u — компонента скорости ОПО, перпендикулярная к ОО¹ в плоскости, содержащей ОО¹ и центр кривизны. Если изменение N за время $2R/c$ мало, то (2) преобразуется в

$$\Delta\Phi = -\frac{4\pi e^2}{mc} \frac{1}{\omega} \frac{l}{c} \frac{dN(t)}{dt}, \quad (4)$$

где $l = R - x_0$ — расстояние от точки вторжения до ответной станции (Земля). Пусть внутри ОПО $n = n_0$. Предположим, что граница ОПО резкая, т. е. ширина переходного слоя

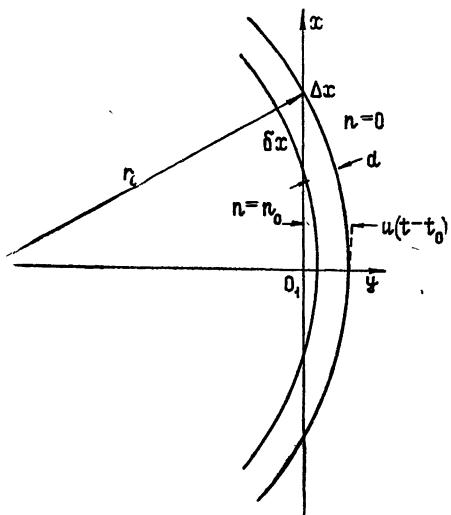


Рис. 1.

$$d \ll u \frac{2l}{c}. \quad (5)$$

Тогда $\Delta x = \sqrt{2r_0 u(t - t_0) - u^2(t - t_0)^2} \approx \sqrt{2r_0 u(t - t_0)}$ и

$$N(t) = \begin{cases} 0 & (t < t_0) \\ 2n_0 \Delta x & (t > t_0) \end{cases}$$

Используя это выражение для $N(t)$ в (2) и выбирая начало отсчета времени, так чтобы $t_0 = x_0/c$, получим

$$\Delta\Phi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ -\frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{\sqrt{2r_0 u}}{c} \sqrt{t} & \left(0 < t \leq \frac{2l}{c}\right) \\ -\frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{\sqrt{2r_0 u}}{c} \left[\sqrt{t} - \sqrt{t - \frac{2l}{c}} \right] & \left(t \geq \frac{2l}{c}\right) \end{cases}, \quad (6)$$

где $\omega_e^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$, $\Delta n \approx n_0$, поскольку n в ОПО значительно больше, чем вне его. Существенной особенностью рассматриваемого метода оказывается то, что, как это видно из (1), (2) и (4), стационарная составляющая n не дает вклада в регистрируемую $\Delta\Phi$, как бы ни был велик ее вклад в N .

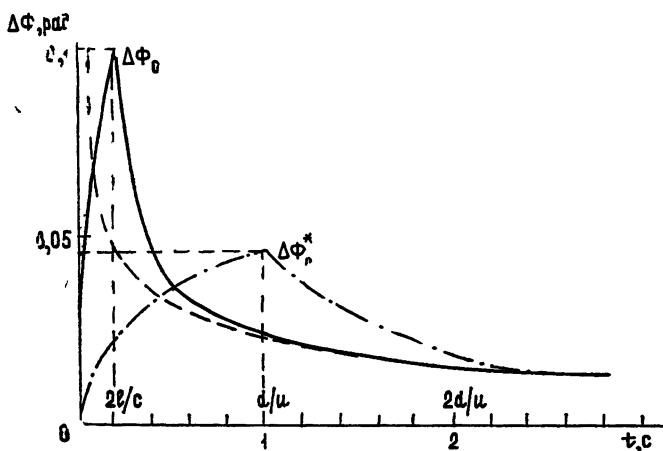


Рис. 2.

Из (6) следует, что максимальное значение $\Delta\Phi$ соответствует моменту $t = 2l/c$ (рис. 2, сплошная кривая):

$$\Delta\Phi_0 = -2 \frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{\sqrt{r_0 l}}{c} \sqrt{\frac{u}{c}}. \quad (7)$$

В отличие от случая плоского фронта [8, 9] эта величина пропорциональна не R , а $\sqrt{r_0 l}$ и слабее зависит от u/c ($\sqrt{u/c}$ вместо u/c). Полагая $r_0 = 300$ км, $l = 3 \cdot 10^4$ км, $u = 3$ км/с, $n_0 = 10^2$ см⁻³, получим, что при $f = \omega/2\pi = 40$ МГц $\Delta\Phi \approx 0,1$ радиан. График функции $\Delta\Phi(t)$ для указанных значений параметров приведен на рис. 2 (сплошная кривая). При $t \rightarrow 0$ скорость роста фазы $(\Delta\omega = \frac{d\Delta\Phi}{dt})$ стремится к беско-

нечности, но в действительности она ограничивается волновыми свойствами сигнала (конечной шириной зон Френеля). Среднее значение скорости на участке быстрого роста ($0 < t < 2l/c$) равно

$$\frac{\Delta\Phi_0}{2l/c} = -\frac{\omega_e^2}{\omega} \sqrt{\frac{r_0}{l}} \sqrt{\frac{u}{c}}. \quad (8)$$

По сравнению с плоским фронтом эта величина возрастает в $2\sqrt{c/u}\sqrt{r_0/l}$ раз. В примере, приведенном выше, скорость роста $\Delta f = \Delta\omega/2\pi \approx 0,1 \text{ Гц}$. В то же время уходы частоты при относительной нестабильности генераторов, равной $\epsilon = 10^{-11}$, составят около $\delta f = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$. Таким образом, фазовый сдвиг, возникающий при вторжении ОПО, можно наблюдать даже при $\epsilon = 10^{-10}$.

При $t \gg 2l/c$ получим, используя (6) (см. рис. 2, пунктир),

$$\Delta\Phi \approx -\frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{l}{c} \frac{\sqrt{2r_0 u}}{c} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \Delta\Phi_0 \sqrt{\frac{2l}{ct}} \quad (9)$$

или

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi_0} = \sqrt{\frac{l}{2ct}}, \quad (10)$$

т. е. при $t \gg l/c$ сдвиг фазы практически исчезает. Заметим, что $l/c \approx 0,1 \text{ с}$ и, таким образом, длительность регистрируемого эффекта порядка секунды. Это обеспечивает возможность разделения эффектов от различных ОПО. В рассматриваемом случае резкого фронта можно, по длительности периода роста разности фаз $\Delta t = 2l/c$, определить l , и, таким образом, локализовать регистрируемое событие.

Поскольку согласно (3) длительность времени наблюдения ограничена неравенством $\Delta t \ll r_0/u$, то необходимо, чтобы

$$r_0 \gg l \frac{u}{c} \approx 1 \text{ км}. \quad (11)$$

Очевидно, что это условие хорошо выполняется для всех ОПО. При выходе ОПО с траектории радиосигнала снова возникает заметный фазовый сдвиг, причем сначала будет происходить медленный рост $\Delta\Phi$ до значения $\Delta\Phi_0$, а затем за $\sim 2l/c$ разность фаз обратится в нуль. Быстрое изменение фазы соответствует периоду, когда ответный сигнал уже не встречает на своем пути ОПО, а запросный еще проходит через него. Для приведенного выше численного примера это происходит приблизительно через 200 секунд после вторжения облака.

3. Так как для ОПО d должна быть порядка ларморовского радиуса протона (т. е. $\sim 3 \text{ км}$), то вместо (5) будет выполняться обратное неравенство. Рассмотрим случай, когда

$$r_0 \gg d \gg u \frac{2l}{c}. \quad (12)$$

Будем считать, что градиенты n внутри ОПО малы по сравнению с их значением на границе. Тогда получаем (см. рис. 1) при $|x - x_0| < \delta x \approx \sqrt{2(r_0 - d)u(t - d/u)} \approx \sqrt{2r_0u(t - d/u)}$ $n = n_0$, а при $\delta x < |x - x_0| < \Delta x = \sqrt{2r_0ut}$

$$n = n(r') = n(\sqrt{(r_0 - ut)^2 + (x - x_0)^2}) \approx n(r_0) - \left[ut - \frac{(x - x_0)^2}{2r_0} \right] \frac{dn}{dt} \Big|_{r_0}. \quad (13)$$

Если на границе $n(r_0) = 0$, а градиент $\frac{dn}{dx}$ равен его среднему значению: $-n_0/d$,

$$\begin{aligned} N(t) &= 2n_0 \int_0^{dx} dx' + 2 \frac{n_0}{d} \int_{dx}^{\Delta x} \left(ut - \frac{x'}{2r_0} \right) dx' = \\ &= \frac{4}{3} \frac{n_0}{d} (\sqrt{2r_0 u^3 t^3} - \sqrt{2r_0 u^3 (t - d/u)^3}). \end{aligned} \quad (14)$$

Момент $t = 0$ принят за начало вторжения плазмы. При $l/c \ll d/u$ такой выбор практически не отличается от выбора $t_0 = l/c$, принятого ранее. При $t < d/u$ второе слагаемое в правой части (14) нужно положить равным нулю.

В рассматриваемом случае ОПО с «широкой» (в смысле неравенства (12)) границей можно воспользоваться для определения фазового сдвига формулой (4), поскольку относительные изменения N малы при всех значениях t . Действительно, при $t \rightarrow 0$ $N(t) \sim t^{3/2}$, а не t , как в случае узкой границы. Это дает

$$\Delta\Phi = \begin{cases} -2 \frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{l}{d} \frac{u}{c} \frac{\sqrt{2r_0 u}}{c} \sqrt{t} & \left(t \leq \frac{d}{u} \right) \\ -2 \frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{l}{d} \frac{u}{c} \frac{\sqrt{2r_0 u}}{c} \left(\sqrt{t} - \sqrt{t - \frac{d}{u}} \right) & \left(t \geq \frac{d}{u} \right) \end{cases}. \quad (15)$$

График этой функции для $d = 3$ км приведен на рис. 2 (штрих-пунктирная кривая). Значения r_0 , l и n_0 взяты те же, как и для случая с резкой границей. Разность фаз $\Delta\Phi$ принимает при $t = d/u = 1$ с максимальное значение, равное

$$\Delta\Phi_0^* = -2 \frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{l}{c} \frac{u}{c} \sqrt{\frac{2r_0}{d}}. \quad (16)$$

При одинаковых значениях n_0 , u и l оно в $\sqrt{\frac{1}{2} \frac{d}{l} \frac{c}{u}}$ раз меньше, чем для ОПО с резкой границей. Средняя скорость роста разности фаз на крутом участке равна

$$\frac{\Delta\Phi_0^*}{d/u} = -2 \frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{u^2}{c^2} \frac{l}{d} \sqrt{\frac{2r_0}{d}}. \quad (17)$$

Как и в случае плоского фронта с размытой границей [12], эта величина второго порядка по u/c , однако она увеличивается не только вследствие того, что $l/d \gg 1$, но и из-за малой величины d ОПО по отношению к r_0 ($r_0/d \gg 1$). Для рассматриваемого случая Δf порядка $4 \cdot 10^{-2}$ Гц, т. е. она оказывается на порядок большие δ_f при $\epsilon = 10^{-10}$. При увеличении d требования к стабильности возрастают пропорционально $d^{3/2}$.

При $t \gg d/u$ можно воспользоваться асимптотической формулой, которую легко получить из (15):

$$\Delta\Phi = -\frac{\omega_e^2}{\omega} \frac{l}{c} \frac{\sqrt{2r_0 u}}{c} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} (\Delta\Phi_0^*)^* \sqrt{\frac{d}{ut}}. \quad (18)$$

Эта зависимость совпадает с (9), которая получена для ОПО с резкой границей (рис. 2, штриховая кривая). Однако переход к асимптотике

в случае ОПО с размытой границей происходит значительно медленнее. В результате время, в течение которого регистрируются $\Delta\Phi$, возникающие от входа ОПО на траекторию сигнала (и выхода с нее), оказывается значительно больше — порядка нескольких секунд. Тем не менее оно все еще значительно меньше времени, в течение которого ОПО пересекает траекторию, и достаточно мало, чтобы можно было разделить эффекты, возникающие от различных ОПО.

4. Полученные выше формулы и оценки показывают, что при $\epsilon = 10^{-10} \div 10^{-11}$ можно уверенно зарегистрировать вход и выход ОПО на траекторию радиосигнала и разделить влияние разных ОПО, даже если времена их пересечения линией ОО¹ перекрываются. Заметим, что знак $\Delta\Phi$, возникающего при выходе облака, противоположен тому, который возникает при входе его, и, как уже указывалось выше, временная зависимость $\Delta\Phi(t)$ в этих двух случаях также обратная. Вследствие этого выход с траектории нетрудно отличить от его входа.

В случае ОПО с резкой границей непосредственно из эксперимента можно определить l (по времени нарастания $\Delta\Phi$), а по величине $\Delta\Phi_0$ — произведение $n_0 V r_0 u$. Если u известна, то по времени, протекшему между входом и выходом ОПО с траектории сигнала, можно оценить его размеры (r_0), а, следовательно, также и n_0 (по $\Delta\Phi_0$). При организации обмена радиосигналами с двумя различными наземными станциями по разности времен вхождения ОПО на траектории этих радиосигналов можно, зная расстояние l до ОПО и расстояние между станциями, определить его скорость u , следовательно, найти все остальные величины (r_0 , n_0).

Несколько сложнее обстоит дело при ОПО с размытыми границами. В этом случае эксперимент дает значения d/u и $n_0 u V r_0 / d$. Величину l можно оценить с точностью до коэффициента 2, поскольку она должна быть больше расстояния до плазмопаузы, но меньше расстояния до спутника. Тогда по времени начала процесса регистрации для сигналов с двух различных наземных станций можно оценить скорость u , а по интервалу между входом и выходом ОПО на траекторию каждого из сигналов — его размеры (r_0). В этом случае время нарастания разности фаз и ее максимальная величина $\Delta\Phi_0^*$ позволяют оценить d и n_0 .

Помехи со стороны ионосферы в рассматриваемом методе (равные порядка 10^{-6} Гц) устраняются практически полностью [9]. С другой стороны, если использовать обычный метод некогерентных частот, или послать запросный сигнал с Земли, то разность фаз будет обусловлена, преимущественно, ионосферой. Таким образом, можно выяснить связь между магнитосферными и ионосферными возмущениями.

Можно ожидать, что магнитосферные плазменные образования вытянуты вдоль магнитных силовых линий и движутся перпендикулярно к ним вследствие дрейфа. В рамках настоящей статьи не ставилась цель детально учсть влияние структуры и формы облаков на регистрируемые фазовые сдвиги. Однако можно надеяться, что полученные выше результаты существенно не изменятся при этом, так как заметные $\Delta\Phi$ возникают лишь в момент вхождения ОПО на радиотрассу (и выхода с нее). Следовательно, появляется возможность с помощью единственного спутника прозондировать магнитосферу Земли и составить представление о характере движения плазмы в ней.

В заключение авторы выражают свою признательность Я. И. Фельдштейну за полезные обсуждения вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. R. Chappell, Rev. Geophys. Space Phys., 10, 951 (1972).
2. C. R. Chappell, J. Geophys. Res., 79, 1861 (1974).
3. A. J. Chen and J. M. Grebowsky, J. Geophys. Res., 79, 3851 (1974).
4. N. C. Maynard and A. J. Chen, J. Geophys. Res., 80, 1009 (1975).
5. K. K. Harris, J. Geophys. Res., 79, 4654 (1974).
6. M. G. Kivelson and C. T. Russell, Radio Sci., 8, 1035 (1973).
7. A. A. Когчак, J. P. Stakhanov and B. M. Чихачев, Planet. Space Sci., 21, 189 (1973).
8. И. П. Стаханов, Докл. АН СССР, 220, 1310 (1975).
9. И. П. Стаханов, И. В. Kovalevskii, Геомагнетизм и аэрономия, 16, 511 (1976).
10. Н. А. Савич, И. П. Стаханов, Геомагнетизм и аэрономия, 14, 664 (1974).
11. И. П. Стаханов, Космические исследования, 13, 375 (1975).
12. И. П. Стаханов, В. Д. Новиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).
13. И. В. Kovalevskii, Т. В. Кузнецова, В. Д. Новиков, И. П. Стаханов, Геомагнетизм и аэрономия, 16, 204 (1976).

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
24 июня 1975 г.

INVESTIGATION OF DETACHED PLASMA FORMATIONS IN THE MAGNETOSPHERE BY THE NONCOHERENT RESPONSE METHOD

I. V. Kovalevskii, V. D. Novikov, I. P. Stakhanov

It is shown that measuring the phase shift between interrogation and response signals which are exchanged between a satellite and a baseground station (the noncoherent reply method), one may record plasma clouds consisting of a dense cold plasma. They are pulled off from the plasmosphere during geomagnetic storms and move between a plasmapause and the magnetospheric boundary. One can also obtain the information about the basic parameters of these formations: the plasma density, sizes, the velocity of motion, the thickness of the transient layer between a cloud and surrounding medium of the plasma trough and the distance from the cloud to the Earth. Unlike the probe method of investigation, this information is not needed for trajectories of the cosmic apparatus to pass directly through the cloud.

УДК 551.510.35

ВЛИЯНИЕ ГЕОМАГНИТНОЙ АКТИВНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ВЫСОКИХ ШИРОТАХ

Н. Ф. Благовещенская, Д. В. Благовещенский

Рассматривается влияние магнитной активности на прохождение КВ сигналов на авроральных и субавроральной трассах для различных сезонов. Анализируется динамика изменения во времени средних уровней сигналов от магнитной активности в Q-индексах на радиотрассах, расположенных вдоль и поперек зоны полярных сияний, и субавроральной радиотрассе меридионального направления.

Состояние высокоширотной ионосферы в значительной степени зависит от уровня магнитной активности, поэтому механизм распространения и характеристики КВ сигналов на высокоширотных радиотрассах также будут существенно изменяться от этого параметра. В работе рассматривается влияние магнитной активности на прохождение сигналов в различные сезоны на трех радиотрассах. Радиотрасса № 1 протяженностью $D_1 = 1400$ км расположена вдоль зоны полярных сияний, трасса № 2 длиной $D_2 = 500$ км проходит поперек зоны, и радиотрасса № 3 — субавроральная, меридионального направления, имеет протяженность $D_3 = 1700$ км. Измерения проводились круглосуточно для двух сезонов: зимы и равноденствия (год, близкий к минимуму солнечной активности). Использовалась типовая аппаратура. Рабочие частоты на радиотрассе № 1 — $f_p = 9 \div 11$ МГц, на трассе № 2 — $f_p = 5 \div 7$ МГц и на трассе № 3 — $f_p = 4 \div 10$ МГц. Всего обработано около 1500 записей замираний сигналов. Для обработки использовались записи длительностью от долей минуты до нескольких минут (в зависимости от времени стационарности процесса). С помощью ЭВМ «Минск-22» для каждой записи определялись средние значения сигналов. Затем уровни сигналов усреднялись для каждого значения Q-индекса (Q — местный индекс магнитной активности — оценивается на 15-минутных интервалах времени наблюдения) за четырехчасовые промежутки времени суток по различным дням. Усреднение проводилось отдельно для каждой радиотрассы в зимний период и равноденствие.

На рис. 1, 2 представлена динамика изменения во времени средних уровней сигналов в относительных единицах от магнитной активности в Q-индексах на радиотрассах, расположенных вдоль и поперек зоны сияний. Сплошной линией обозначены средние уровни сигналов в зимний период, пунктирной — в равноденствие.

Основные полученные результаты сводятся к следующему:

1. С ростом магнитной активности в дневные часы зимы и равноденствия средние значения сигналов уменьшаются как на авроральных, так и субавроральных трассах вследствие повышенного поглощения и нарушения структуры слоев отражения.

2. В ночные часы зимы и равноденствия, как правило, наблюдается два максимума в зависимостях средних уровней сигналов от магнитной активности. Первый, при $Q = 1 \div 2$, обусловлен отражением от слоев

$F2S$ или $F2$; второй — при $Q = 3 \div 4$ на радиотрассе поперек зоны южных сияний (№ 2), а на трассах № 1 и 3 при $Q = 4 \div 5$ — вызван отражением от спорадических слоев E_s . При больших значениях индекса магнитной активности ($Q > 5$) средние значения сигналов малы из-за повышенного поглощения.

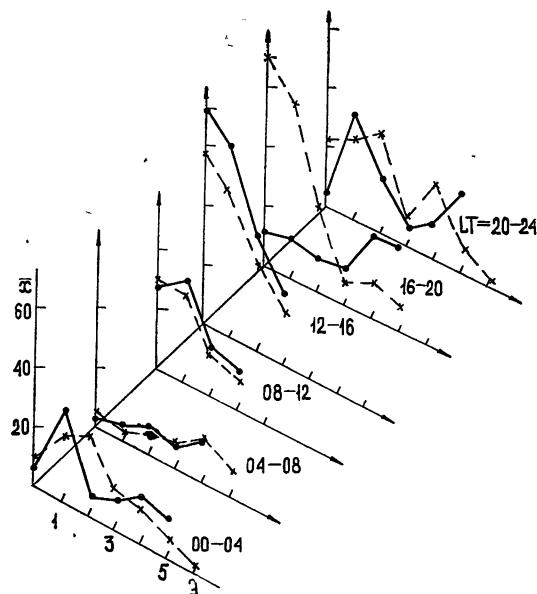


Рис. 1.

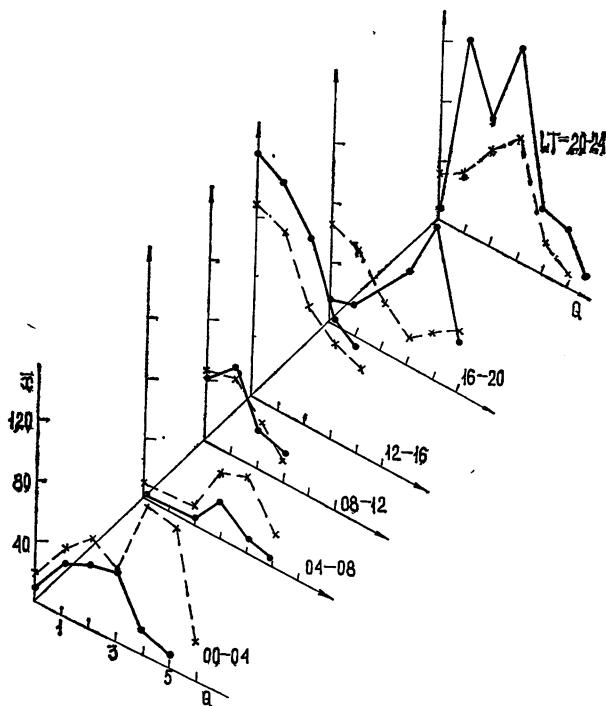


Рис. 2.

3. При слабой магнитной активности ($Q = 0 \div 1$) в вечерние и утренние часы зимнего периода, когда радиотрассы вдоль и поперек зоны сияний расположены в зоне главного провала ионизации, создаются наиболее тяжелые условия для распространения радиоволн КВ диапазона. Возрастание средних значений сигналов при увеличении магнитной активности, которое достигает максимальных значений при $Q = 4$, обусловлено отражением от северной границы главного электронного провала, совпадающей с южной границей зоны авроральной ионизации.

4. В равноденствие при небольших значениях Q -индекса в вечерние часы ($LT = 16 \div 20$) отмечается возрастание средних уровней сигналов на авроральных радиотрассах (№ 1 и № 2) по сравнению с зимним периодом. Это вызвано тем, что главный провал ионизации оказывает меньшее влияние на распространение радиоволн, так как значения электронной концентрации в провале повышаются за счет ультрафиолетового излучения Солнца.

Сибирский институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
СО АН СССР

Поступила в редакцию
27 ноября 1975 г.

INFLUENCE OF THE GEOMAGNETIC ACTIVITY ON RADIO WAVE PROPAGATION AT HIGH LATITUDES

N. F. Blagoveshchenskaya, D. V. Blagoveshchenskii

The influence of the magnetic activity on SW signal transmission on auroral and sub-auroral paths is considered for different seasons. The dynamics is analysed of changing in time the mean levels of signals depending on the magnetic activity in Q -indices on radio paths situated along and across the auroral region and on the sub-auroral path of the meridian direction.

УДК 621.371.25

О ТРАЕКТОРИЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН БЕРНШТЕЙНА В ВЫСОКОШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЕ ПРИ ВНЕШНЕМ ЗОНДИРОВАНИИ

A. E. Крупина

В связи с зондированием ионосферы сверху рассматривается задача о рефракции плазменных волн вблизи гармоник гирочастоты электронов в неоднородной плазме при квазипоперечном распространении. Приведены аналитические выражения для фазовой и групповой траекторий. Получена зависимость времени группового запаздывания пакетов плазменных волн от номера гармоники, резонанснойстройки и других параметров. Сравнение расчетных данных с экспериментальными показывает, что интерпретация резонансов, наблюдавшихся на гармониках гирочастоты электронов, вполне допустима на основе теории рефракции плазменных волн.

Резонансные эффекты, наблюдавшиеся при зондировании ионосферы сверху, обсуждались в многочисленных работах как экспериментальных, так и теоретических (см., например, [1, 2]). Ряд работ связан с объяснением больших длительностей сигналов на резонансных частотах. К настоящему моменту широкое распространение получило объяснение этих длительностей с помощью рефракции пакета электростатических волн в неоднородной плазме. Впервые такая интерпретация была предложена Мак Афи в работе [3], где рассматривалось распространение плазменных волн вблизи ленгмюровской частоты электронов ω_p . В [4, 5] и ряде других работ аналогичное рассмотрение проводилось в применении к резонансу на верхней гибридной частоте ω_r . Для объяснения характеристик резонансов на гармониках гирочастоты электронов ω_H проводился анализ рефракции мод Бернштейна* в неоднородной магнитоактивной плазме [6–8].

В данной работе будет рассмотрена задача о рефракции плазменных волн при $\omega \approx n\omega_H$ ($n = 2, 3, \dots$) в случае квазипоперечного распространения. Заметим, что в [6] содержится качественное рассмотрение и некоторые предварительные оценки для резонанса $\omega \approx 2\omega_H$. В работе [7] рассмотрена задача о рефракции мод Бернштейна при распространении строго перпендикулярно магнитному полю H_0 , причем предполагается, что вектор $\nabla\omega_H$ лежит в плоскости, перпендикулярной H_0 . Такая модель может быть использована для интерпретации резонансов на гармониках гирочастоты в экваториальной области, где они наблюдаются при больших n (до $n = 20$) [2]. Однако резонансы на частотах $\omega \approx n\omega_H$ проявляются на средних и даже на высоких широтах (до $n = 5$), где модель, использованная в [7], явно неприменима. В связи с этим будем рассматривать случай, когда вектор $\nabla\omega_H$ не лежит в плоскости, перпендикулярной H_0 . Задача с аналогичной геометрией решалась в работе [8], однако в ней не были получены аналитические выражения для времени группового запаздывания t_{gr} , а также функциональные представления для фазовой и групповой траекторий.

* Об определении этих мод и их свойствах см., например, [9, 10].

Как и в работах [7, 8], оказывается, что при расчете траекторий неоднородность магнитного поля более существенна, чем неоднородность плазмы. Полученное аналитическое выражение для $t_{\text{тр}}$ дает возможность проследить зависимость $t_{\text{тр}}$ от номера гармоники n , что важно для непосредственного сравнения с экспериментом. Оценки горизонтальных расстояний, которые можно сделать, используя уравнения групповой траектории, показывают, что возможна регистрация отраженного сигнала на ту же антенну, работающую в режиме приема. Заметим, что преобразование дисперсионного уравнения к упрощенной форме, которая используется для конкретных расчетов, проведено в [8] весьма промоздким способом. Поэтому ниже будет кратко приведен другой, более компактный способ получения упрощенного дисперсионного уравнения.

1. Известно, что дисперсионное уравнение для электростатических волн, распространяющихся под углом θ к магнитному полю H_0 , имеет вид [9]

$$\epsilon_{xx} \sin^2 \theta + \epsilon_{zz} \cos^2 \theta + 2\epsilon_{xz} \cos \theta \sin \theta = 0, \quad (1)$$

где ϵ_{xx} , ϵ_{zz} и ϵ_{xz} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы. Предполагается, что распространение происходит в плоскости xz , магнитное поле направлено вдоль оси z (см. рис. 1).

Численные расчеты, выполненные в [6], указывают, что затухание Ландау несущественно для продольных волн на частотах $\omega \approx n\omega_H$ в узком, но конечном диапазоне углов $|\theta - 90^\circ| \leq 3^\circ \div 4^\circ$. Будем далее рассматривать именно эту область углов, считая θ близким к $\pi/2$ и предполагая выполнененным неравенство

$$\cos^2 \theta \ll 1. \quad (2)$$

Представим компоненты тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} в виде суммы двух слагаемых:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} + \epsilon_{ik}^{(n)}, \quad (3)$$

где $\epsilon_{ik}^{(0)}$ соответствует приближению холодной плазмы, а $\epsilon_{ik}^{(n)}$ связаны с учетом пространственной дисперсии в области частот $\omega \approx n\omega_H$ ($n \geq 2$).

Так как в приближении холодной плазмы компонента $\epsilon_{xz} = 0$, то уравнение (1) при учете неравенства (2) принимает вид

$$(\epsilon_{xx}^{(0)} + \epsilon_{xx}^{(n)}) \sin^2 \theta + \epsilon_{zz}^{(0)} \cos^2 \theta = 0, \quad (4)$$

где

$$\epsilon_{xx}^{(0)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2},$$

$$\epsilon_{zz}^{(0)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

$$\epsilon_{xx}^{(n)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{2\omega}{k_z v_t} \frac{n^2 \omega_H^2}{k_x^2 v_t^2} I_n \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{z_n - y} dy.$$

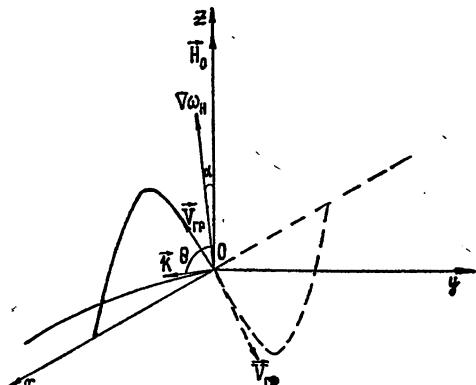


Рис. 1.

В соотношениях (4) использованы следующие обозначения:

$$z_n = (\omega - n\omega_H)/k_z v_t, \quad \lambda^2 = k_x^2 v_t^2 / \omega_H^2, \quad I_n(\lambda^2/2)$$

— модифицированная функция Бесселя, v_t — тепловая скорость электронов, k_x , k_z — компоненты волнового вектора.

Далее, в (4) произведем интегрирование, предполагая, что $z_n = (\omega - n\omega_H)(k_z v_t)^{-1} \gg 1$, и разложим в ряд функцию $I_n(\lambda^2/2)$, считая, что $k_x^2 v_t^2 / 2\omega_H^2 \ll 1$. Тогда дисперсионное уравнение (4) примет вид

$$\frac{n^2}{n! 2^{n-1}} \left(\frac{k_x^2 v_t^2}{\omega_H^2} \right)^{n-1} \left[1 - \frac{k_x^2 v_t^2}{2\omega_H^2} + \frac{k_z^2 v_t^2}{2(\omega - n\omega_H)^2} \right] - \\ - (\omega - n\omega_H) \frac{\omega}{\omega_p^2} \left[\frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{k_z^2}{k_x^2} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right) \right] = 0. \quad (5)$$

С учетом неравенства (2) в уравнении (5) в квадратных скобках можно пренебречь членом $k_z^2/k_x^2(\omega_p^2/\omega^2 - 1)$ по сравнению с $(\omega^2 - \omega_r^2)(\omega^2 - \omega_H^2)^{-1}$ (специальный случай двойного резонанса $\omega \approx n\omega_H \approx \omega_r$ не рассматривается).

Заметим, что из дисперсионного уравнения (5) можно получить условия прозрачности, а именно,

$$\omega - n\omega_H > 0 \quad \text{при} \quad \omega^2 - \omega_r^2 > 0; \quad (6a)$$

$$\omega - n\omega_H < 0 \quad \text{при} \quad \omega^2 - \omega_r^2 < 0. \quad (6b)$$

Выполняя дифференцирование, из (5) имеем следующие выражения для компонент групповой скорости V_{rp} :

$$V_{rp\ x} = \frac{n^2}{n! 2^{n-1}} \left(\frac{k_x^2 v_t^2}{\omega_H^2} \right)^{n-1} \frac{2(n-1)}{k_x} \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\omega^2 - \omega_H^2}{\omega^2 - \omega_r^2}, \quad (7)$$

$$V_{rp\ z} = \frac{k_z v_t^2}{(\omega - n\omega_H)^2} \frac{k_x}{2(n-1)} V_{rp\ x}.$$

Из соотношений (6) и (7) следует, что в области прозрачности (6 а) распространяются прямые волны ($k V_{rp} > 0$), а в области (6 б) — обратные волны ($k V_{rp} < 0$).

Вводя угол α между векторами $\nabla\omega_H$ и H_0 , можно сформулировать закон Снеллиуса в виде

$$k_x = k_{x0} \left(1 + \operatorname{tg} \alpha \frac{k_z - k_{z0}}{k_{x0}} \right), \quad (8)$$

где k_{z0} , k_{x0} соответствуют уровню излучателя $z = 0$. Будем считать далее, что выполняется неравенство

$$\left| \operatorname{tg} \alpha \frac{k_z - k_{z0}}{k_{x0}} \right| \ll 1. \quad (9)$$

При учете (2) неравенство (9) нарушается только при $\operatorname{tg} \alpha \gg 1$, т. е. (9) несправедливо в экваториальной области ионосфера, которая здесь не рассматривается. Подставим далее соотношение (8) в уравнение (5) и учтем выполнимость неравенства (9). Тогда, разлагая в ряд

члены биномиального вида и отбрасывая величины второго порядка малости, получим уравнение

$$\begin{aligned} k_z^2 \frac{av_t^2}{2(\omega - n\omega_H)^2} + k_z \frac{a(n-1)\operatorname{tg}\alpha}{k_{x_0}} - \left[(\omega - n\omega_H) b - \right. \\ \left. - a \left(1 - \frac{k_{x_0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) + a(n-1)\operatorname{tg}\alpha \frac{k_{x_0}}{k_{x_0}} \right] = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$a = \frac{n^2}{n! 2^{n-1}} \left(\frac{k_{x_0}^2 v_t^2}{\omega_H^2} \right)^{n-1}, \quad b = \frac{\omega}{\omega_p^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}.$$

На основе уравнения (10) численным методом можно получить фазовые и групповые траектории в время $t_{\text{гр}}$. Для получения результатов в аналитической форме необходимо потребовать выполнимость более сильных ограничений на угол α :

$$(n-1) \left| \frac{k_z}{k_{x_0}} \operatorname{tg}\alpha \right| \ll z_n^{-2}. \quad (11)$$

При $\alpha = 0$ это условие, естественно, выполняется. При малых α степень его выполнимости зависит от малости параметра z_n^{-2} и от точности, с которой справедливо ограничение (2). При условии (11) из (10) получаем, что

$$k_z^2 = (\omega - n\omega_H)^2 \frac{2}{av_t^2} \left[(\omega - n\omega_H) b - a \left(1 - \frac{k_{x_0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) \right], \quad (12)$$

т. е. фактически величина k_z^2 имеет вид, характерный для случая $\alpha = 0$.

Используя (12), можно решить уравнение фазовой траектории

$$\frac{dx}{k_x} = \frac{dz}{k_z}, \quad (13)$$

а также найти систему лучей, определяемых из уравнения

$$\frac{dx}{V_{\text{гр}} z} = \frac{dz}{V_{\text{гр}} z}. \quad (14)$$

Координаты точек отражения находятся из условия $k_z^2 = 0$, т. е. из соотношения

$$(\omega - n\omega_H) b - a \left(1 - \frac{k_{x_0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) = 0. \quad (15)$$

Координата z_m точки поворота лучей задается условием $V_{\text{гр}} z = 0$. Поскольку $V_{\text{гр}} z$ пропорциональна k_z (см. (7)), то это условие совпадает с соотношением (15). Для времени группового запаздывания волнового пакета $t_{\text{гр}}$ имеем*

$$t_{\text{гр}} = 2 \int_0^{z_m} \frac{dz}{V_{\text{гр}} z} = \frac{2}{v_t^2} \int_0^{z_m} \frac{(\omega - n\omega_H) dz}{k_z}. \quad (16)$$

* Предполагается, что посылка сигнала производится с уровня $z = 0$, а запаздывание определяется по возвращении сигнала на тот же уровень.

2. В рассматриваемой задаче, как показывают предварительные оценки, расстояния, проходимые лучом по вертикали, не должны быть значительными по сравнению с характерными масштабами для ионосферной области F . Тогда изменение гирочастоты ω_H можно аппроксимировать линейным законом

$$\omega_H(z) = \omega_{H0} + \beta z, \quad (17)$$

где $\omega_{H0} = \omega_H(z=0)$ и $\beta = \left(\frac{\partial \omega_H}{\partial z}\right)_{z=0}$. Можно показать, аналогично тому,

как это сделано в [7], что рефракция будет в первую очередь определяться неоднородностью магнитного поля, несмотря на то, что относительный градиент электронной концентрации больше аналогичного градиента ω_H .

Из соотношений (15) и (17) находим координату z_m точки поворота лучей:

$$z_m = \left[(\omega - n\omega_{H0}) \frac{\omega}{\omega_p^2} \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{n^2}{n! 2^{n-1}} \left(\frac{k_{x0}^2 v_t^2}{\omega_H^2} \right)^{n-1} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) \right] \left(\frac{\omega}{\omega_p^2} \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \beta n \right)^{-1}. \quad (18)$$

Из (5), (6) и (18) следует, что для прямых волн отражение происходит в области положительных z , а для обратных волн $z_m < 0$ (числитель (18) всегда положителен, а $\beta > 0$ в северном полушарии). Используя соотношения (12), (13) и (17), вычисляем фазовую траекторию:

$$x = \frac{2\sqrt{2}k_{x0}}{av_t n \beta} \sqrt{1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2}} \left\{ \arctg \left[\frac{(\omega - n\omega_{H0}) b - a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right)}{a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right)} \right]^{1/2} - \right. \\ \left. - \arctg \left[\frac{(\omega - n\omega_{H0}) b - a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) - \beta nbz}{a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right)} \right]^{1/2} \right\}. \quad (19)$$

При $z = z_m$ (18) из соотношения (19) получаем значение координаты точки отражения $x_{m\phi}$:

$$x_{m\phi} = \frac{2\sqrt{2}k_{x0}}{av_t \beta n} \sqrt{1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2}} \arctg \left[\frac{(\omega - n\omega_{H0}) b - a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right)}{a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right)} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

С использованием (12), (14) и (17) групповая траектория для прямых волн определяется зависимостью

$$x = \frac{4(n-1)}{k_{x0} v_t^2 \beta n b^2} [f(z) - f(0)], \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} f(z) = & - \left[(\omega - n\omega_{H0}) b - a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) - \beta n b z \right]^{1/2} \times \\ & \times \left[\frac{1}{3} (\omega - n\omega_{H0}) b + \frac{2}{3} a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) - \frac{1}{3} \beta n b z \right], \\ f(0) = & - \left[(\omega - n\omega_{H0}) b - a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) \right]^{1/2} \times \\ & \times \left[\frac{1}{3} (\omega - n\omega_{H0}) b + \frac{2}{3} a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для обратных волн групповая траектория получается из (21) заменой x на $-x$. При $z = z_m$ (18) из (21) получаем координату точки поворота луча $x_{m\text{ гр}}$:

$$\begin{aligned} x_{m\text{ гр}} = & \pm \frac{4(n-1)}{k_{x0} v_t^2 \beta n b^2} \left[(\omega - n\omega_{H0}) b - a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) \right]^{1/2} \times \\ & \times \left[\frac{1}{3} (\omega - n\omega_{H0}) b + \frac{2}{3} a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где знаки \pm относятся к прямой и обратной волнам соответственно. Заметим, что при учете (7), (12) и (18) легко установить, что волны с $k_z < 0$ не имеют групповых траекторий с возвратом на начальный уровень. Аналогичный вывод был сделан в работе [8].

Вычисляя время группового запаздывания $t_{\text{гр}}$ в соответствии с (16), получаем

$$t_{\text{гр}} = \frac{\sqrt{2} a \omega_p (\omega^2 - \omega_H^2)}{v_t \beta \omega |\omega^2 - \omega_r^2|} \left[(\omega - n\omega_{H0}) b - a \left(1 - \frac{k_{x0}^2 v_t^2}{2\omega_H^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (23)$$

Напомним, что параметры a и b в соотношениях (21), (22) и (23) определены в (10).

Зависимость времени группового запаздывания от номера гармоники n в (23) для интересующих нас первых номеров гармоник ($n = 2 \div 5$) оказывается довольно сложной. Однако можно установить, что $t_{\text{гр}}$ падает с ростом n по закону

$$t_{\text{гр}} \sim \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2}{n! 2^{n-1}}}, \quad (24)$$

т. е. приблизительно $t_{\text{гр}} \sim 1/n$, что не противоречит эксперименту [2].

3. Приведем некоторые оценки в соответствии с изложенными выше результатами. Оценим величины $x_{m\text{ф}}$, $x_{m\text{гр}}$, $t_{\text{гр}}$ и длину волны λ_0 при заданной резонансной расстройке, градиенте ω_H и других параметрах.

Используя ионограмму, приведенную в работе [11] (ионограмма b рис. 1 из [11] соответствует области ионосферы, удаленной от экватора), получим следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \omega_{H0} &= 4 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}, \quad v_t = 3 \cdot 10^8 \text{ km} \cdot \text{c}^{-1}, \\ \omega_{p0} &= 16 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}, \quad \beta = 1,3 \cdot 10^3 \text{ km}^{-1} \cdot \text{c}^{-2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда для $n = 3$ и $\theta = 87^\circ$ при значениях расстройки $\Delta = -10^4 \text{ c}^{-1}$ ($\Delta = \omega - n\omega_{H0}$) из соотношений (18), (20), (22) и (23) имеем

$$\begin{aligned} z_m &= -200 \text{ м}, & x_{m\text{rp}} &= -12 \text{ м}, \\ x_{m\phi} &= 9 \text{ км}, & t_{\text{rp}} &\approx 10^{-3} \text{ с}. \end{aligned}$$

Из приведенных оценок следует, что $x_{m\phi} \gg |x_{m\text{rp}}|$, так что для волны при распространении в неоднородной среде остаются выполненные условия квазипоперечности (2).

Групповая траектория (21) при значениях параметров (25) приведена на рис. 2.

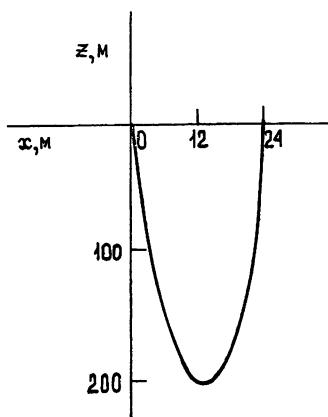


Рис. 2.

Оценим длину волны λ_0 при $n = 3$, $\theta = 87^\circ$ и $\Delta = -10^4 \text{ c}^{-1}$. При использовании параметров (25) из соотношения (5) получаем $\lambda_0 = 2\pi/k \approx 2 \text{ м}$. Следовательно, на расстояниях порядка z_m укладывается достаточно большое количество длин волн, так что приближение геометрической оптики можно считать справедливым.

Таким образом, интерпретация резонансов, наблюдавшихся при $\omega \approx n\omega_H$ в высоколатитудной ионосфере, на основе теории рефракции плазменных волн представляется вполне допустимой.

В заключение автор выражает благодарность Б. Н. Гершману за постоянную помощь в работе и В. А. Яшину за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. E. K. Lockwood, Can. J. Phys., 41, 190 (1963).
2. Proc. IEEE, 57, № 6 (1969) (см. перевод в сб. Зондирование ионосферы сверху, изд. Мир, М., 1969).
3. J. R. McFee, J. Geophys. Res., 74, 802 (1969).
4. J. R. McFee, J. Geophys. Res., 74, 6403 (1969).
5. Б. Н. Гершман, А. Е. Крупина, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 7, 981 (1973).
6. M. K. Andrews, M. T. C. Fang, J. Plasma Phys., 6, 579 (1971).
7. Б. Н. Гершман, А. Е. Крупина, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 10, 1461 (1974).
8. J. Bitočn, Rad. Sci., 9, 17 (1974).
9. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.
10. Достижения физики плазмы, перевод с английского под ред. М. С. Рабиновича, изд. Мир, М., 1974.
11. H. Oya, J. Geophys. Res., 75, 4279 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
5 июня 1975 г.

TRAJECTORIES OF BERNSTEIN MODES PROPAGATION IN HIGH-LATITUDE IONOSPHERE AT TOPSIDE SOUNDING

A. E. Krupina

In connection with topside sounding of the ionosphere, the problem of refraction of plasma waves near electron gyro-frequency harmonics in the inhomogeneous plasma at quasi-transverse propagation is considered. Analytical expressions are given for phase and group trajectories. The dependence of the time of group delay of plasma waves packets from the harmonic number, resonant mis-tuning and other parameters is obtained. Comparison of estimated and experimental data show that the interpretation of resonances observed at the electron gyro-frequency harmonics is fully admissible on the basis of the refraction theory of plasma waves.

УДК 538.12

МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС ОПТИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ АТОМОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЯХ

Л. Н. Новиков, С. Л. Вотяков, В. П. Суетин

Проведено теоретическое и экспериментальное изучение взаимодействия оптически ориентированных атомов с пространственно-однородным и неоднородным радиочастотными полями. На основании этого предложена методика для измерения коэффициентов самодиффузии и диффузии атомов в среде буферных газов.

Успехи, достигнутые в области оптической ориентации атомов в газовой фазе и оптических способов регистрации магнитного резонанса, подчеркивают плодотворность применения указанных методов к изучению ряда смежных вопросов газовой динамики, в частности, исследованию коэффициентов бинарной диффузии и самодиффузии. В настоящей работе проведено теоретическое и экспериментальное исследование взаимодействия хаотически движущихся оптически ориентированных атомов с пространственно-однородным и неоднородным радиочастотными полями. На основании этого авторами предложена методика для измерения коэффициентов самодиффузии и диффузии в среде буферных газов.

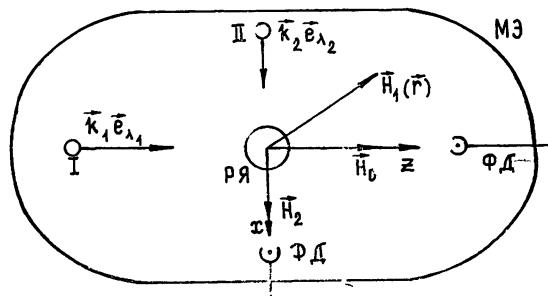


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
I— $k_1 e_{\lambda_1}$ —луч накачки, II— $k_2 e_{\lambda_2}$ —детектирующий луч, ФД—фотодиоды,
РЯ—резонансная ячейка, МЭ—магнитный экран.

Рассмотрим систему атомов со спином $I = 1/2$, находящихся в условиях ориентации резонансным оптическим излучением, распространяющимся вдоль оси $0z$ (рис. 1). Пусть на систему наложено магнитное поле, которое содержит как неоднородную по объему ячейку часть:

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = H_{1\perp} (i \cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t) + H_{1z} \mathbf{k} \cos \omega_1 t, \quad (1)$$

так и пространственно-однородную:

$$\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_0 = H_2 (i \cos \omega_2 t + j \sin \omega_2 t) + H_0 \mathbf{k}. \quad (2)$$

Во вращающейся с частотой ω_2 системе координат расчет релаксационного процесса под действием переменного возмущения (1) может быть выполнен с использованием аппарата корреляционных функций [1, 2]. В результате для времен продольной и поперечной релаксации, обусловленной хаотическим тепловым движением атомов в пространственно-неоднородном поле $H_1(r)$, имеем

$$\frac{1}{\tau_1} \sim \frac{\tau_v \langle \gamma^2 H_{1\perp}^2 \rangle}{1 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \tau_v^2} \left(1 + \frac{1}{2} i \right),$$

$$\frac{1}{\tau_2} \sim \frac{\tau_v \langle \gamma^2 H_{1\perp}^2 \rangle}{1 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \tau_v^2} \left(1 + \frac{1}{2} i \right) + \frac{\tau_v \langle \gamma^2 H_{1z}^2 \rangle}{1 + \omega_1^2 \tau_v^2}, \quad (3)$$

где $\omega_2 \sim \omega_0 = \gamma H_0$, усреднение $\langle \cdot \rangle$ производится по случайным траекториям хаотического движения атомов в ячейке, τ_v — время корреляции случайного процесса $H_1(t)$, совпадающее либо со временем пролета атома $\tau_{\text{пр}} \approx 0,68 \frac{R}{\langle v \rangle}$ (R — радиус сферической ячейки, $\langle v \rangle$ — средняя тепловая скорость) [4], либо со временем диффузии атомов между стенками ячейки $\tau_d \approx 0,115 D_0^{-1} R^2 p_3 p_0^{-1} T_a^0 T_3^{-1}$ (T_a^0 — температура ячейки, p_3 — давление буферного газа при температуре заполнения T_3^0 , D_0 — коэффициент диффузии при нормальном давлении p_0) [4].

Полученным выражениям легко дать простую физическую интерпретацию, а именно, действительные части (3) описывают обычный релаксационный процесс, связанный с поглощением квантов неоднородного радиочастотного поля и реальными переходами в атомной системе, в то время как мнимая часть $\delta\omega_p = \text{Im} \frac{1}{\tau_i}$ выражений (3) отвечает за сдвиг частоты магнитного резонанса, обусловленный виртуальными переходами под действием поля $H_1(t)$, которые «связывают» подуровни $|+1/2\rangle$ и $|{-1/2}\rangle$ и приводят к изменению их энергий.

Рассмотренное явление весьма близко по физической природе к процессу поглощения атомной системой оптического фотона. Известно [3], что это взаимодействие приводит к сокращению времени жизни основного состояния, сопровождающемуся реальным поглощением фотона, а также к сдвигу зеemanовских подуровней.

Если среднее значение неоднородного радиочастотного поля отлично от нуля, тогда наряду со сдвигом, описанным выше, необходимо учесть сдвиг, по природе схожий с обобщенным сдвигом Блоха—Зигерта [5, 6]:

$$\delta\omega_B \sim \frac{\langle \gamma H_1 \rangle^2}{\omega_0}.$$

Очевидно, что условие, накладываемое на пространственное распределение поля $H_1(r)$: $\langle H_1(r) \rangle^2 / \langle H_1^2(r) \rangle \ll 1$, является оптимальным для наблюдения релаксационного сдвига $\delta\omega_p$ по сравнению со сдвигом $\delta\omega_B$.

Учитывая резонансную полевую зависимость времени релаксации (3), из уравнений типа Блоха несложно получить решение для компонент макроскопической намагниченности M в следующем виде:

$$M_z \sim M_0 [1 - \gamma^2 H_2^2 \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \Gamma^{-1}] f(\omega_2 - \omega_1), \quad (4)$$

$$M_{\perp} \sim M_0 \exp(i\omega_2 t) \gamma H_2 \tau_2^{-1} [1 - i(\omega_0 - \omega_2 + \delta\omega_p)] \Gamma^{-1} f(\omega_2 - \omega_1),$$

$$\Gamma \equiv [1 + (\omega_0 - \omega_2 + \delta\omega_p)^2 \tau_2^2 + \gamma^2 H_2^2 \tau_1 \tau_2],$$

где $\tau_i^{-1} = T_p^{-1} + \tau_{iT}^{-1}$ ($i = 1, 2$), τ_{iT} , T_p — времена термической и оптической релаксации, частота ω_2 удовлетворяет условию $\omega_2 \gg \tau_v^{-1}$, а функция $f(\omega_2 - \omega_1)$ определяется как

$$f(\omega_2 - \omega_1) \sim \begin{cases} \left[1 - \frac{\langle \gamma^2 H_{1\perp}^2 \rangle \tau_v \tau_2'}{1 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \tau_v^2 + \tau_v \tau_2' \langle \gamma^2 H_{1\perp}^2 \rangle} \right] & \text{в области } (\omega_1 - \omega_2) \tau_v \sim 1, \\ \left[1 - \frac{\langle \gamma^2 H_{1z}^2 \rangle \tau_v \tau_2'}{1 + \omega_1^2 \tau_v^2 + \tau_v \tau_2' \langle \gamma^2 H_{1z}^2 \rangle} \right] & \text{в области } \omega_1 \tau_v \sim 1. \end{cases}$$

Из выражений (3) и (4) следует, что как амплитуда сигнала, так и его ширина являются суперпозицией двух лоренцевых функций от частоты ω_1 с центрами при $\omega_1 = 0$, $\omega_1 = \omega_2$ и ширинами $1/\tau_v$. Их амплитуда определяется среднеквадратичным значением неоднородного поля $\langle H_1^2 \rangle$.

Таким образом, по зависимости ширины и амплитуды сигнала, индуцированного полем H_2 , возможно определение ширины спектра возмущения (t) , а следовательно, и скорости диффузии атомов: $\frac{2R}{\tau_v}$,

и коэффициента диффузии D_0 . В частном случае, когда частоты полей H_1 и H_2 совпадают, $\omega_1 = \omega_2$, соотношение (4) преобразуется к виду, совпадающему по форме с выражениями, полученными для компонент намагниченности M в работах [4, 5].

Изложенные выше результаты теории были экспериментально проверены в системе оптически ориентированных атомов Cs¹³³. Экспериментальная установка в целом совпадает с описанной в работе [5]. Система колец Гельмгольца с резонансной ячейкой и источником света помещалась в пятислойный магнитный экран из пермалоя с целью уменьшения влияния магнитных помех. Коэффициент ослабления экрана составлял 10^{-4} . Эксперименты были выполнены на сферической резонансной ячейке ($R = 1,6 \text{ см}$) с парами Cs ($p \sim 10^{-5} \text{ тор}$) при $T_{\text{яч}} = 290 \text{ К}$ без буферного газа, тогда $\lambda_{\text{св. пр}} \gg R$ и $\tau = \tau_{\text{пр}}$ в выражениях (3) и (4). Также были исследованы ячейки ($R = 1,6 \text{ см}$) с парами Cs и буферным газом Ne, давление которого составляло от 0,1 до 0,3 тор при $T_{\text{яч}} = 290 \text{ К}$. Неоднородное радиочастотное поле создавалось встречно включенными кольцами Гельмгольца. Сигнал резонанса, пропорциональный продольной компоненте намагниченности, регистрировался фотодетектором (ФД на рис. 1) по интенсивности света, прошедшего через атомную систему. Регистрация и обработка сигнала велась либо на частоте модуляции амплитуды радиочастотного поля $\Omega \ll 1/\tau_2'$, либо на частоте модуляции статического поля H_0 . Сигнал резонанса, модулированный с частотой ω_2 , пропорциональный поперечной компоненте намагниченности, регистрировался по интенсивности второго вспомогательного луча света, прошедшего через атомную систему в направлении, перпендикулярном лучу накачки. Использование техники синхронного детектирования позволяло выделить сигналы как дисперсионной формы, так и формы кривой поглощения.

На рис. 2 а изображена серия зависимостей амплитуды сигнала резонанса $S \sim M_{\perp}$ в ячейке без буферного газа и его ширины от частоты неоднородного радиочастотного поля ω_1 . Полученная зависимость удовлетворительно описывается суммой двух лоренцевых функций с ширинами $4,8 \text{ кГц}$, что соответствует времени пролета $3,9 \cdot 10^{-4} \text{ с}$. При увеличении амплитуды поля H_1 наблюдалось радиочастотное уширение

огибающих. Аналогичные измерения были выполнены для сигнала $S \sim M_z$ -компоненте намагниченности.

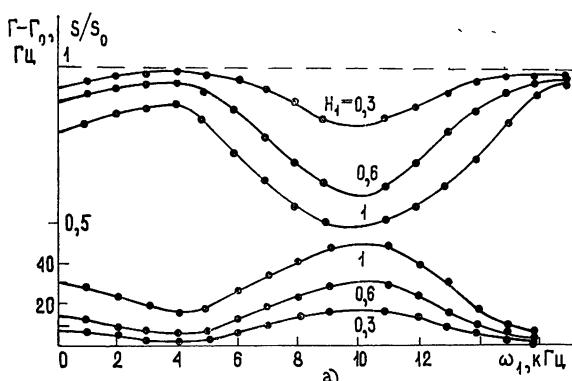


Рис. 2а.

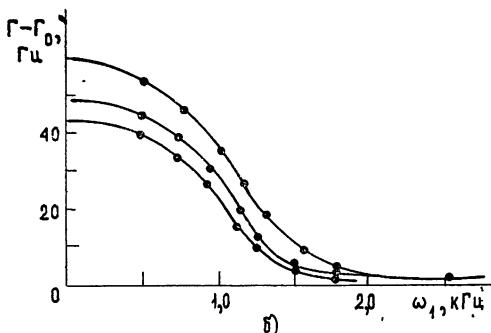


Рис. 2б.

Рис. 2. Зависимости амплитуды сигнала резонанса $S \sim M_{\perp}$ и его ширины от частоты неоднородного радиочастотного поля для нескольких значений амплитуды H_1 ($\omega_2 = 10 \text{ кГц}$, H_1 в относительных единицах):

а) в ячейке без буферного газа ($p \sim 10^{-5} \text{ torr}$, $R = 1.6 \text{ см}$, $T = 290 \text{ K}$); б) в ячейке с Ne ($p = 0.119 \text{ torr}$, $R = 1.6 \text{ см}$, $T = 290 \text{ K}$).

На рис. 2 б представлен ряд зависимостей ширины сигнала от частоты ω_1 , полученных в ячейке с буферным газом Ne ($p = 0.119 \text{ torr}$, $R = 1.6 \text{ см}$, $T = 290 \text{ K}$). По ширине огибающих $\Gamma_{\text{ог}}$ было рассчитано значение коэффициента диффузии C_s в Ne , которое составило $D_0 = 0.175 \text{ см}^2/\text{с}$.

Ранее в ряде работ по зависимости времени релаксации τ_2 от давления буферного газа p было найдено, что коэффициент диффузии данной бинарной системы равен $D_0' = 0.15 \text{ см}^2/\text{с}$ [7], $D_0'' = 0.24 \text{ см}^2/\text{с}$ [8], $D_0''' = 0.40 \text{ см}^2/\text{с}$ [9].

При наложении неоднородного поля наряду с уширением сигналов резонанса наблюдается относительный сдвиг их положения. Из выражений (3) следует, что отношение сдвига резонанса к его уширению $\text{Im } 1/\tau_1 (\text{Re } 1/\tau_2)^{-1}$ в области полей $\omega_1 \sim \omega_2$ является линейной функцией разности $(\omega_2 - \omega_1)$. Результаты эксперимента для указанного отношения представлены на рис. 3 ($\omega_2 = 10 \text{ кГц}$). Они удовлетворительно описываются линейной функцией. В указанных экспериментах среднее значение $\langle H_1 \rangle^2 \ll \langle H_1^2 \rangle$, и поэтому сдвига, аналогичного обобщенному сдвигу Блоха—Зигерта, не наблюдалось.

На рис. 4 представлена серия зависимостей сдвига $\delta\omega_p$ от квадрата амплитуды неоднородного радиочастотного поля для нескольких значений частоты ω_1 ($\omega_2 = 12 \text{ кГц} = \text{const}$). При изменении знака разности $(\omega_2 - \omega_1)$ менялся относительный знак сдвига $\delta\omega_p$.

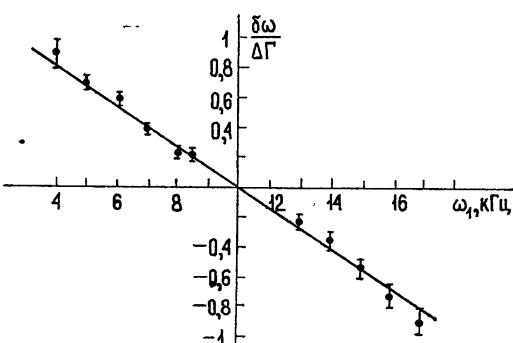


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость релаксационного сдвига $\delta\omega_p$ сигнала магнитного резонанса от разности $\omega_1 - \omega_2$ в ячейке без буферного газа.

Рис. 4. Зависимость сдвига $\delta\omega_p$ от квадрата амплитуды неоднородного радиочастотного поля для нескольких значений частоты ω_1 .

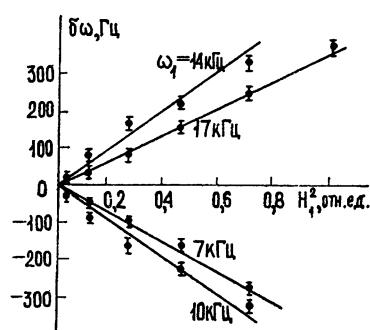
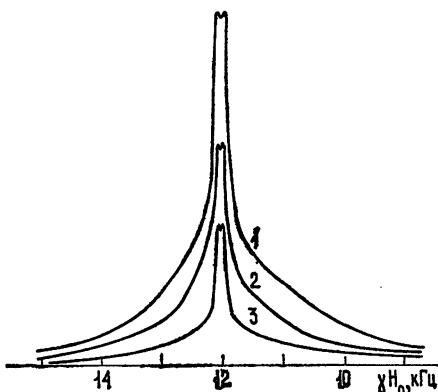


Рис. 4.

В отличие от предложенной ранее методики измерения D_0 [4, 5], настоящий метод может быть применен при исследовании бинарных систем с малым коэффициентом диффузии D_0 , когда время диффузии приближается по величине к времени релаксации: $\tau_d \leq \tau_2$. В этом случае, следуя работам [4, 5], не удается с высокой степенью точности разрешить суперпозиционную структуру сигнала магнитного резонанса $S \sim M_z$, индуцированного пространственно-неоднородным полем $H_1(r)$. При этом ошибка в измерении τ_d и, следовательно, D_0 существенно

Рис. 5. Серия записей сигнала резонанса Cs^{138} , пропорционального продольной компоненте намагниченности M_z (H_1 в относительных единицах), в ячейке с буферным газом Ne ($R = 16$ мм, $T = 290$ К, $\omega_1 = 12$ кГц, $p = 0,119$ тор); $1 - H_1' = 1,0$; $2 - H_1'' = 0,8$, $3 - H_1''' = 0,4$.



возрастает. Так, на рис. 5 представлена серия записей сигнала $S \sim M_z$ в ячейке с атомами Cs и буферным газом Ne ($p = 0,119$ тор, $T = 290$ К). Видно, что узкая и широкая линии резонанса почти полностью сливаются. Ошибка в измерении D_0 составляет 50 и более процентов, в то время как при измерении предложенным в работе методом ошибка была около 8%.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
2. С. Л. Вотяков, В. В. Зверев, Л. Н. Новиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 6, 869 (1975).
3. J. Barrat, G. Cohen-Tannoudji, J. Phys., 22, 329, 443 (1961).

4. С. Л. Воляков, С. П. Довгополь, Л. Н. Новиков, В. П. Путырский, *Оптика и спектроскопия*, 36, 1041 (1974).
5. R. Barbe, M. Leduc, F. Laloë, *J. Phys.*, 38, 699; 39, 935 (1974).
6. Л. Н. Новиков, Л. Г. Малышев, Письма в ЖЭТФ, 15, 129 (1972).
7. F. Sturnia, Beverini, Minguzzi, *Phys. Rev.*, A4, 550 (1971).
8. S. Legowski, *J. Chem. Phys.*, 41, 1313 (1969).
9. F. Franz, E. Lüscher, *Phys. Rev.*, 135, A582 (1964).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
13 ноября 1975 г.

MAGNETIC RESONANCE OF OPTICALLY ORIENTED ATOMS IN INHOMOGENEOUS FIELDS

L. N. Novikov, S. L. Votyakov, V. P. Suetin

A theoretical and experimental investigation has been made of the interaction of optically oriented atoms with spatially homogeneous and inhomogeneous RF fields. On this basis a method is suggested to measure atom self-diffusion and diffusion coefficients in a medium of buffer gases.

УДК 539.186

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХУРОВНЕВОГО АТОМА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. П. Яковлев

С помощью разложения по когерентным состояниям поля получено общее уравнение, определяющее в квазиклассическом случае энергетический спектр системы, состоящей из двухуровневого атома и одной моды квантованного электромагнитного поля. Отдельно исследовано взаимодействие с низкочастотным полем в условиях многофотонного резонанса.

1. В настоящее время интерес к классической задаче квантовой механики о взаимодействии атома с электромагнитным полем связан, прежде всего, с исследованием многоквантовых процессов в сильных световых полях, вызывающих существенную перестройку атомного спектра [1]. Теоретическое описание такой ситуации требует выхода за рамки теории возмущений, что приводит к существенным математическим трудностям.

Особенности поведения атома в сильном поле (прежде всего, в резонансном случае) могут быть исследованы, по крайней мере, качественно, с помощью модели двухуровневой системы, взаимодействующей с одной модой электромагнитного поля. В рамках этой модели задача сводится к определению спектра стационарных состояний системы, состоящей из двухуровневого атома и поля. Влияние других состояний атома и мод поля, приводящее к затуханию указанных состояний, предполагается малым и может быть учтено по теории возмущений. Это обстоятельство ограничивает область применимости данной модели.

Стационарные состояния

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-iEt) \{ \varphi_1 |f_1\rangle + \varphi_2 |f_2\rangle \} \quad (1)$$

системы, состоящей из двухуровневого атома, взаимодействующего дипольным образом с одной модой квантованного поля, определяются уравнениями

$$\begin{aligned} (H_\omega - E - \varepsilon) |f_1\rangle + \frac{i}{2} \lambda (c^+ - c) |f_2\rangle &= 0, \\ (H_\omega - E + \varepsilon) |f_2\rangle + \frac{i}{2} \lambda (c^+ - c) |f_1\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varphi_{1,2}$ и $\mp \varepsilon$ — волновые функции и уровни энергии атома, $H_\omega = \omega(c^+ c + 1/2)$ — гамильтониан поля, $|f_{1,2}\rangle$ — векторы состояний, зависящие от полевых переменных, $\lambda = d \sqrt{\frac{2\omega}{V}}$, d — дипольный матричный элемент.

Эти уравнения, а также соответствующие уравнения для атома в классическом поле, исследовались в ряде работ [2-7, 12, 13]. В работе [3] в приближении вращающейся фазы получено решение для случая одноФотонного резонанса. Многофотонные резонансы исследовались в [4, 5]. В работах Зарецкого и Крайнова [6] с помощью адиабатического приближения рассчитана вероятность резонансного многоквантового возбуждения атомных уровней в классическом поле малой частоты ($\omega \ll \epsilon$). Меликян [12] применил известный в теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами метод Хилла для исследования спектра квазиэнергии двухуровневой системы в классическом поле. Уравнения (2) решаются точно для вырожденных ($\epsilon = 0$) уровней [7]. Случай больших частот ($\omega \gg \epsilon$) рассмотрен в работах [4, 13].

В настоящей работе в разд. 2 с помощью разложения по когерентным состояниям поля получено и исследовано общее уравнение (11), определяющее энергетический спектр системы для поля произвольной интенсивности и частоты в квазиклассическом случае, когда среднее число фотонов велико. Это уравнение охватывает, в частности, результаты, полученные ранее [3, 4, 5, 13].

В разд. 3 с методической целью отдельно рассмотрено взаимодействие с низкочастотным полем ($\omega \ll \epsilon$). Получен спектр стационарных состояний системы и вычислены заселенности атомных уровней (32). Предложенный в этом разделе квазиклассический метод решения системы двух дифференциальных уравнений второго порядка представляет, по нашему мнению, определенный методический интерес и может быть использован при исследовании аналогичных уравнений в других физических задачах.

2. Перейдем к функциям $|f_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_1\rangle \pm |f_2\rangle)$, которые разложим по когерентным состояниям поля [8]:

$$|f_{\pm}\rangle = \int_C dz u_{\pm}(z) \left| -i \frac{\lambda}{2\omega} z \right\rangle, \quad (3)$$

где $\left| -i \frac{\lambda}{2\omega} z \right\rangle \equiv |\alpha\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle$, а интегрирование происходит по некоторому контуру C в плоскости комплексного переменного z . Подставим разложения (3) в систему уравнений (2) и, учитывая результат действия полевых операторов на когерентные состояния

$$c|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad c^+|\alpha\rangle = \frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle, \quad H_{\omega}|\alpha\rangle = \omega \left(1/2 + \alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) |\alpha\rangle,$$

произведем интегрирование по частям, перенеся действие производных $\partial/\partial\alpha$ на функции u_{\pm} . Потребуем, чтобы отытегрированные части обращались в нуль. Для этого выберем контур C замкнутым и будем искать такие решения u_{\pm} , которые возвращались бы к своим исходным значениям после обхода по контуру C . Кроме того, контур C должен охватывать особые точки функций u_{\pm} , так как в противном случае мы получим тривиальное решение $|f_1\rangle = |f_2\rangle = 0$. Далее, приравнивая в подинтегральном выражении коэффициенты при $|\alpha\rangle$, получим следующую систему уравнений для функций u_{\pm} :

$$\begin{aligned} -(1-z) \frac{du_+}{dz} + \left[\mu + 1 - \frac{\lambda^2}{4\omega^2} (1-z) \right] u_+ + \frac{\epsilon}{\omega} u_- &= 0, \\ (1+z) \frac{du_-}{dz} + \left[\mu + 1 - \frac{\lambda^2}{4\omega^2} (1+z) \right] u_- + \frac{\epsilon}{\omega} u_+ &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где параметр μ связан с энергией системы соотношением $\mu = \frac{E}{\omega} + \frac{\lambda^2}{4\omega^2} - \frac{1}{2}$.

Уравнения (4) имеют три особые точки: две регулярные $z = \pm 1$ с индексами $-1 - \mu$ и $-\mu$ и одну иррегулярную на бесконечности. Перейдем к дифференциальному уравнению второго порядка для функции u_+ , которую будем искать в виде

$$u_+ = (1 - z)^{-1-\mu} (1 + z)^{-\mu} \cdot \exp \left(-\frac{\lambda^2}{4\omega^2} z \right) w(z). \quad (5)$$

Тогда для $w(z)$ получаем следующее уравнение:

$$(1 - z^2) w'' + \left[1 - (1 - 2\mu)z - \frac{\lambda^2}{2\omega^2} (1 - z^2) \right] w' - \left[\mu^2 - \frac{\epsilon^2}{\omega^2} - \frac{\lambda^2 \mu}{2\omega^2} (1 - z) \right] w = 0. \quad (6)$$

Выберем контур C в виде замкнутой петли, которая обходит особые точки $z = \pm 1$ в противоположных направлениях. В результате такого обхода функция $(1 - z)^{-1-\mu} (1 + z)^{-\mu}$ возвращается к своему исходному значению. Поэтому для получения нужного нам решения $u_+(z)$ следует искать регулярные решения $w(z)$ уравнения (6). Таковые существуют только для определенных значений параметра μ . Эти собственные значения μ и определяют энергетический спектр системы.

Разложим $w(z)$ по полиномам Якоби [9]:

$$w(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{y_m(1)} y_m(z), \quad y_m(z) = P_m^{(-1-\mu, -\mu)}(z), \quad y_m(1) = \frac{\Gamma(m - \mu)}{\Gamma(-\mu)m!}. \quad (7)$$

Используя дифференциальное уравнение, рекуррентные соотношения и условие ортогональности для полиномов Якоби, получаем следующее трехчленное рекуррентное соотношение для коэффициентов c_m :

$$\begin{aligned} & \left[(m - \mu)^2 - \frac{\epsilon^2}{\omega^2} - \frac{\lambda^2}{2\omega^2} (\mu + 1/2) \frac{4(m - \mu)^2}{4(m - \mu)^2 - 1} \right] c_m + \\ & + \frac{\lambda^2}{4\omega^2} \left(\frac{\mu + 1/2}{m - \mu + 1/2} + 1 \right) (m + 1 - \mu) c_{m+1} + \\ & + \frac{\lambda^2}{4\omega^2} \left(\frac{\mu + 1/2}{m - \mu - 1/2} - 1 \right) (m - 1 - \mu) c_{m-1} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Наибольший интерес представляет квазиклассический случай (большие μ), который соответствует переходу к классическому полю.

Переобозначим $\mu = \mu + n$, $m = n + s$, $c_m = c_{n+s} \rightarrow c_s$, где n — число фотонов в поле в отсутствие взаимодействия, совпадающее в квазиклассическом случае со средним числом фотонов в состоянии (1). Считаем, что $n \gg 1$, $n \gg \frac{\epsilon}{\omega}$ и, кроме того, $\lambda \rightarrow 0$, но $\lambda \sqrt{n} = d\mathcal{E}_0$ — конечная величина (\mathcal{E}_0 — амплитуда напряженности классического поля). В этом случае

стационарное состояние (1) эквивалентно состоянию с определенной квазиэнергией [10, 11] в классическом поле.

Тогда рекуррентное соотношение (8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 c_s + a(s - \tilde{\mu})c_{s+1} + a(\tilde{\mu} - s)c_{s-1} &= 0, \\
 a(x) = \Lambda^2 \frac{(x+1)(x-1/2)}{(x^2 - \nu_1^2)(x^2 - \nu_2^2)}, \quad \Lambda^2 = \frac{\lambda^2(n+1/2)}{4\omega^2}, \quad \nu_1 \pm \nu_2 = & \\
 = \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\omega} \pm \frac{1}{2} \right)^2 + 2\Lambda^2 \right\}^{1/2} &
 \end{aligned} \tag{9}$$

и считать, что индекс s меняется в бесконечных пределах ($-\infty < s < \infty$).

Собственные значения $\tilde{\mu}$ являются корнями определителя однородной системы уравнений (9):

$$D(\tilde{\mu}) = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & 0 & a(\tilde{\mu}+1) & 1 & & & & & & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & a(\tilde{\mu}) & & & & & & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & a(\tilde{\mu}-1) & 1 & & & & a(-\tilde{\mu}+1) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & a(\tilde{\mu}-2) & & & & & 1 & a(-\tilde{\mu}+2) & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \tag{10}$$

Функция $D(\tilde{\mu})$ обладает следующими свойствами: 1) $D(\tilde{\mu})$ — мероморфная функция, имеющая простые полюсы в точках $\pm \nu_1 + k$, $\pm \nu_2 + k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); 2) $D(\tilde{\mu})$ — четная периодическая функция с периодом 1; 3) $D(\tilde{\mu}) \rightarrow 1$ при $|\tilde{\mu}| \rightarrow \infty$. Поэтому $D(\tilde{\mu})$ можно представить в виде

$$D(\tilde{\mu}) = 1 + \pi A_1 [\operatorname{ctg} \pi(\tilde{\mu} - \nu_1) - \operatorname{ctg} \pi(\tilde{\mu} + \nu_1)] + \pi A_2 [\operatorname{ctg} \pi(\tilde{\mu} - \nu_2) - \operatorname{ctg} \pi(\tilde{\mu} + \nu_2)]. \tag{10a}$$

Коэффициенты A_1 и A_2 не зависят от $\tilde{\mu}$ и могут быть выражены через $D(0)$ и $D(1/2)$. (Выбор этих значений $\tilde{\mu}$ удобен тем, что некоторые элементы определителя обращаются в нуль.) Так как $a(1/2) = 0$, то $D(1/2)$ равно произведению трех определителей, которые выделены пунктирами в (10). При этом средний определитель $1 - a^2(-1/2) = 0$ и, следовательно, $D(1/2) = 0$. Заметим, что $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}$ (а также другие полуцелые значения) не являются собственными значениями задачи. Появление этих лишних корней связано с тем, что при переходе от (8) к (9) мы разделили рекуррентное соотношение на коэффициент при c_m .

Окончательно, уравнение для определения собственных значений $D(\tilde{\mu}) = 0$ принимает вид

$$\sin^2 \pi \tilde{\mu} = D(0) \sin^2 \pi \nu_1 \sin^2 \pi \nu_2, \tag{11}$$

$$D(0) = D^2(\nu_1, \nu_2), \quad D(\nu_1, \nu_2) = \begin{vmatrix} 1 & a(1) & 0 & 0 & \dots & \dots \\ a(-2) & 1 & a(2) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & a(-3) & 1 & a(3) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Это уравнение определяет энергетический спектр системы в общем случае для произвольной частоты и интенсивности поля. Определитель $D(\nu_1, \nu_2)$ удается вычислить в конечном виде в некоторых предельных случаях.

Если частота поля велика по сравнению с расстоянием между уровнями атома $\frac{\epsilon}{\omega} \ll 1$, то $\nu_1 \approx \sqrt{\frac{1}{4} + 2\Lambda^2}$, $\nu_2 \approx \frac{1}{2\nu_1} \frac{\epsilon}{\omega} \ll 1$, и для определения собственных значений μ достаточно вычислить определитель $D(\nu_1, 0)$, который в этом случае выражается через функцию Бесселя:

$$D(\nu_1, 0) = \frac{2\nu_1}{\sin \pi \nu_1} J_0(4\Lambda), \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + 2\Lambda^2}.$$

Таким образом, собственные значения μ имеют вид [4, 13]

$$\tilde{\mu} = \pm \frac{\epsilon}{\omega} J_0(4\Lambda) = \pm \frac{\epsilon}{\omega} J_0\left(2 \frac{d\mathcal{E}_0}{\omega}\right).$$

Для слабого поля $\Lambda^2 \ll 1$ (и произвольных значений ϵ/ω) можно ограничиться несколькими членами разложения $D(\nu_1, \nu_2)$ в ряд по степеням Λ^2 :

$$D(\nu_1, \nu_2) \approx 1 - \Lambda^4 \frac{\pi a_1 \operatorname{ctg} \pi \nu_1 + \pi a_2 \operatorname{ctg} \pi \nu_2}{4 (\nu_1^2 - \nu_2^2)^2},$$

$$a_1 = \frac{\nu_1 (\nu_1^2 - \nu_2^2)}{[(1+\nu_2)^2 - \nu_1^2] [(1-\nu_2)^2 - \nu_1^2]} \left(\frac{9 - 4\nu_2^2}{4\nu_1^2 - 1} + 3\nu_2^2 + \nu_1^2 - 4 \right), \quad (12)$$

$$a_2 = a_1 (\nu_1 \leftrightarrow \nu_2).$$

Для резонансной ситуации (представляющей наибольший интерес в случае слабого поля), когда $\frac{\epsilon}{\omega} \approx k + 1/2$, написанных членов разложения достаточно, если $k = 0$ и $k = 1$. В частности, при трехфотонном резонансе $\left(\frac{\epsilon}{\omega} \approx \frac{3}{2}, \nu_2 \approx \frac{1}{2}, \nu_1 \approx \frac{3}{2}\right)$ для спектра получается следующее выражение:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\nu_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{16} \Lambda^6}, \quad \nu_1 \approx \frac{\epsilon}{\omega} + \frac{3}{4} \Lambda^2, \quad \left|\nu_1 - \frac{3}{2}\right| \leq \Lambda^3, \quad (13)$$

которое правильно дает положение резонанса с учетом штарковского сдвига. Для резонансов более высокой кратности, которые могут быть рассмотрены аналогичным образом, надо учитывать следующие члены разложения $D(\nu_1, \nu_2)$ по степеням Λ^2 , что требует весьма громоздких вычислений. Отметим, что наши результаты отличаются от результатов работы [12], что связано, по всей видимости, с недостаточностью (особенно вблизи многофотонного резонанса) тех разложений по параметру взаимодействия, которые были проведены в [12].

3. Исследование случая низкочастотного поля $\left(\frac{\epsilon}{\omega} \gg 1\right)$ для больших значений μ ($\mu \gg \frac{\epsilon}{\omega}, \lambda \rightarrow 0$, но $\lambda \sqrt{\mu}$ — конечная величина) удобно провести непосредственно с помощью квазиклассического решения системы уравнений (2).

Перейдя к каноническим переменным $\hat{p} = p$ и $\hat{q} = i \frac{d}{dp}$ по обычным формулам $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$, $c^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} - i\hat{p})$, запишем систему уравнений (2) для функций $f_{1,2}(p)$ в виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{2} p^2 - \mu - \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{\omega} \right) f_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda p}{\omega} f_2 &= 0, \\ \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{2} p^2 - \mu - \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{\omega} \right) f_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda p}{\omega} f_1 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай не слишком сильного поля, так что

$$\frac{\lambda \sqrt{\mu}}{\epsilon} \ll 1, \text{ но } \frac{\lambda^2 \mu}{\epsilon \omega} \geq 1, \quad \frac{\epsilon}{\omega} \gg 1.$$

Тогда уравнения (14) можно решать по теории возмущений. Будем искать такое решение, что $f_2 \ll f_1$. Функцию f_2 выразим через f_1 с помощью второго из уравнений (14),

$$f_2 \approx -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\lambda p}{\epsilon} f_1 \quad \left(p \sim \sqrt{\mu}, \frac{\lambda p}{\epsilon} \sim \frac{\lambda \sqrt{\mu}}{\epsilon} \ll 1 \right), \quad (15)$$

и подставим в первое уравнение. В результате получим следующее уравнение для f_1 :

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\epsilon\omega} \right) p^2 - \mu - \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{\omega} \right] f_1 = 0, \quad (16)$$

решением которого является осцилляторная волновая функция:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= \psi_n(p\xi), \quad \psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) H_n(z), \\ \xi &= \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\epsilon\omega}\right)^{1/4} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{8\epsilon\omega}, \end{aligned} \quad (17)$$

а собственные значения μ имеют вид

$$\mu^{(1)} = -\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{\omega} + \xi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) \approx n - \frac{\epsilon}{\omega} - \frac{\lambda^2 (n + 1/2)}{4\epsilon\omega}. \quad (18)$$

Функция $\psi_n(p\xi)$ описывает состояние с определенным числом фотонов с частотой $\omega = \xi^2 \omega$. Если разложить $\psi_n(p\xi)$ по функциям $\psi_k(p)$, то квадраты коэффициентов разложения a_k^2 дадут вероятности состояний с определенным числом «старых» фотонов (с частотой ω) в состоянии $|\Psi(t)\rangle$ (1) (функцией f_2 можно пренебречь). В общем случае эти величины выражаются через полиномы Якоби, а в квазиклассическом пределе $\left(n \gg \frac{\epsilon}{\omega} \gg 1\right)$ — через функции Бесселя: $a_{n+2s}^2 = J_s^2 \left(\frac{\lambda^2 n}{8\epsilon\omega} \right)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При этом среднее число фотонов $\bar{k} = n$, флюктуация $\sqrt{\langle (\Delta k)^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^2 (n + 1/2)}{4\epsilon\omega}$, а относительная флюктуация $\delta \sim \frac{d^2}{\epsilon V}$

обратно пропорциональна объему V , занимаемому полем. Для поля с напряженностью $\mathcal{E}_0 \sim 10^8 \text{ В/см}$ и длиной волны $l = 5 \cdot 10^3 \text{ \AA}$, заключенного в объеме $V \geq l^3$, $n \sim 3 \cdot 10^9$, а относительная флуктуация (при расстоянии между уровнями $2\epsilon \sim 10 \text{ эВ}$) пренебрежимо мала, $\delta \sim 10^{-10}$.

Другое линейно независимое решение имеет вид

$$\begin{aligned} f_2(p) &= \psi_m(p\eta), \quad f_1 \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\lambda p}{\epsilon} f_2 \ll f_2, \quad \eta = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2\epsilon\omega}\right)^{1/4} \approx 1 + \frac{\lambda^2}{8\epsilon\omega}, \\ \mu^{(2)} &= -\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{\omega} + \eta^2(m + 1/2) \approx m + \frac{\epsilon}{\omega} + \frac{\lambda^2(m + 1/2)}{4\epsilon\omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученные решения (17) — (19) становятся неправильными в условиях многофотонного резонанса, когда собственные значения (18) и (19) близки друг к другу ($\mu^{(1)} \approx \mu^{(2)}$, $n - m = 2k + 1$, $k \gg 1$). В этом случае $f_1 \sim f_2$ и правильное решение может быть представлено как линейная комбинация решений (18) и (19).

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \chi_1 + \sin \frac{\theta}{2} \chi_2, \\ f_2 &= -\sin \frac{\theta}{2} \chi_1 + \cos \frac{\theta}{2} \chi_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda p}{\epsilon}$, $\cos \theta = 1 / \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 p^2}{2\epsilon^2}}$.

Подставляя (20) в (14) и пренебрегая малыми членами, содержащими $d\theta/dp$, получаем независимые уравнения для χ_1 и χ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi_{1,2}}{dp^2} + \Phi_{1,2}^2(p) \chi_{1,2} &= 0, \\ \Phi_{1,2} &= \left(2\mu + 1 - p^2 \pm \frac{2\epsilon}{\omega} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 p^2}{2\epsilon^2}}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

В квазиклассическом приближении решениями этих уравнений являются функции

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_1}} \exp\left(i \int_0^p \Phi_1 dp\right), \quad u^*(p), \quad (22)$$

$$v(p) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_2}} \exp\left(i \int_0^p \Phi_2 dp\right), \quad v^*(p).$$

Классические точки поворота, в которых $\Phi_{1,2}$ обращаются в нуль, обозначим, соответственно, $\pm p_1$ и $\pm p_2$. Кроме них, функции $\Phi_{1,2}$ имеют еще две комплексные точки ветвления $\pm ip_0 = \pm i \frac{\sqrt{2}\epsilon}{\lambda}$, в которых $\Phi_{1,2}$ обращается в нуль $\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 p^2}{2\epsilon^2}}$. При обходе в комплексной плоскости p точек ветвления $\pm ip_0$ выражение $\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 p^2}{2\epsilon^2}}$ меняет знак и функции

Φ_1 и Φ_2 переходят друг в друга (соответственно, $u \rightleftharpoons v$). Кроме того, при таком обходе $\cos \frac{\theta}{2} \rightarrow \sin \frac{\theta}{2}$ и $\sin \frac{\theta}{2} \rightarrow -\cos \frac{\theta}{2}$. Возьмем решение $u(p)$ (22) при $p < 0$. При аналитическом продолжении этого решения в область $p > 0$ вдоль действительной оси

$$u(p < 0) \rightarrow u(p > 0).$$

При аналитическом продолжении через верхнюю полуплоскость (в верхней полуплоскости $u(p)$ экспоненциально убывает) с обходом точки ip_0 (обход совершается вдали от точки ip_0)

$$u(p < 0) \rightarrow Rv(p > 0),$$

где R представляет собой экспоненциально малый коэффициент надбарьерного отражения [6]:

$$\begin{aligned} R &= \exp \left\{ - \int_0^{p_0} [\Phi_1(ip) - \Phi_2(ip)] dp \right\} \approx \\ &\approx \exp \left\{ - \frac{2\varepsilon}{\omega} \int_0^{p_0} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{\varepsilon^2} \operatorname{sh}^2 \tau} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Величина, стоящая в показателе экспоненты, выражается через полный эллиптический интеграл. Для не слишком больших полей R имеет вид [6]

$$R = \exp \left\{ \left[\frac{2\varepsilon}{\omega} + \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{2\varepsilon\omega} \right] \ln \frac{e}{4} \frac{\lambda \sqrt{\mu + 1/2}}{\varepsilon} - \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{2\varepsilon\omega} \right\} (R \ll 1). \quad (23a)$$

Таким образом, связь между решениями в областях $p < 0$ и $p > 0$ такова:

$$\cos \frac{\theta}{2} u(p) \rightarrow \cos \frac{\theta}{2} u(p) + R \sin \frac{\theta}{2} v(p). \quad (24)$$

Аналогично

$$\sin \frac{\theta}{2} v(p) \rightarrow \sin \frac{\theta}{2} v(p) - R \cos \frac{\theta}{2} u(p). \quad (24a)$$

Соотношения для u^* и v^* получаются комплексным сопряжением (24) и (24 а).

Далее, выберем функцию χ_1 в виде такой линейной комбинации функций $u(p)$ и $u^*(p)$, чтобы при $p < -p_1$ решение убывало экспоненциально (для χ_2 нужно, соответственно, выбрать линейную комбинацию $v(p)$ и $v^*(p)$, убывающую экспоненциально при $p < -p_2$). Тогда $f_1(p)$ при $p < 0$ имеет вид

$$f_1 = c_1 \cos \frac{\theta}{2} \left\{ e^{\frac{i}{2} \left(S_1 - \frac{\pi}{2} \right)} u(p) + \text{к. с.} \right\} + c_2 \sin \frac{\theta}{2} \left\{ e^{\frac{i}{2} \left(S_1 - \frac{\pi}{2} \right)} v(p) + \text{к. с.} \right\}, \quad (25)$$

где

$$S_{1,2} = 2 \int_0^{p_{1,2}} \Phi_{1,2} dp \approx \pi(\mu + 1/2) \pm S, \quad (26)$$

$$S = \frac{2\varepsilon}{\omega} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{\varepsilon^2} \sin^2 \tau} d\tau.$$

С помощью соотношений (24) и (24 а) продолжаем решение (25) в область $p > 0$. Получившееся решение должно экспоненциально убывать справа от точек поворота p_1 и p_2 . Это приводит к однородной системе уравнений для коэффициентов c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 \cos S_1 - c_2 R \cos \frac{1}{2}(S_1 + S_2) &= 0, \\ c_1 R \cos \frac{1}{2}(S_1 + S_2) + c_2 \cos S_2 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем

$$\sin^2 \pi(\mu + 1/2) = \cos^2 S + R^2. \quad (28)$$

Вблизи резонанса фаза S близка к $\pi(k + 1/2)$, т. е.

$$\frac{1}{\pi} S \approx \frac{\epsilon}{\omega} + \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{4\epsilon\omega} \approx k + 1/2, \quad (29)$$

и собственные значения μ близки к полуцелым числам

$$\mu = n + \frac{1}{2} + \Delta\mu, \quad \Delta\mu \approx \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\left[S - \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]^2 + R^2} \quad (n \gg k \gg 1). \quad (30)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 вблизи резонанса имеют вид

$$c_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[1 \mp \frac{S - \pi(k + 1/2)}{\pi\Delta\mu} \right], \quad 2c_1 c_2 = (-1)^{k+1} \frac{R}{\pi\Delta\mu}. \quad (31)$$

Формулы (28) — (31) соответствуют результатам работы [6]. Вероятности нахождения атома в нижнем и верхнем состояниях, соответственно равны

$$w_1 \approx c_1^2 + \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{8\epsilon^2} (c_2^2 - c_1^2), \quad w_2 \approx c_2^2 + \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{8\epsilon^2} (c_1^2 - c_2^2). \quad (32)$$

Вблизи резонанса $c_1^2 \sim c_2^2 \sim 1$, поэтому в этих выражениях можно пренебречь вторыми слагаемыми (так как $\frac{\lambda^2\mu}{\epsilon^2} \ll 1$). В точном резонансе $w_1 = w_2 = 1/2$. Вдали от резонанса один из коэффициентов мал (например, $c_2 \sim R \ll \frac{\lambda^2\mu}{\epsilon^2} \ll 1$), а другой близок к 1. Тогда $w_1 \approx 1$, $w_2 \approx \frac{\lambda^2(\mu + 1/2)}{8\epsilon^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{d\mathcal{E}_0}{\epsilon} \right)^2$, что совпадает с результатом теории возмущений (15). Полученные результаты соответствуют режиму насыщения для двухуровневой системы в низкочастотном классическом поле при адиабатическом включении взаимодействия.

В заключение автор выражает признательность В. П. Крайнову за обсуждение данной работы и ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Делоне, Препринт ФИАН, № 146, М., 1974.
2. S. Stenholm, Phys. Rept., 6C (1973).
3. E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE, 51, 89 (1963).

4. J. H. Shirley, Phys. Rev., 138B, № 4, 979 (1965).
5. S. Stenholm, J. Phys. B: Atom, Molec. Phys., 5, 878, 890 (1972).
6. Д. Ф. Зарецкий, В. П. Крайнов, ЖЭТФ, 66, № 2, 537 (1974); ЖЭТФ, 67, № 10, 1301 (1974).
7. N. Polonsky, C. Cohen-Tannoudji, J. Phys., 26, 409 (1965).
8. R. J. Glauber, Phys. Rev., 131, 2766 (1963).
9. Г. Бейтмен, А. Эрдэйи, Высшие трансцендентные функции, изд. Наука, М., 1966.
10. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 51, 1492 (1966).
11. В. И. Ритус, ЖЭТФ, 51, 1544 (1966).
12. А. О. Меликян, ЖЭТФ, 68, № 4, 1228 (1975).
13. В. П. Яковлев, ЖЭТФ, 67, № 9, 921 (1974).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
23 мая 1975 г.

INTERACTION OF A TWO-LEVEL ATOM WITH THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE QUASI-CLASSICAL APPROXIMATION

V. P. Yakovlev

Using the expansion over coherent states of the field, a general equation is derived which defines the energy spectrum of the system consisting of a two-level atom and a mode of the quantum electromagnetic field in the quasi-classical case. The interaction with the low-frequency field under the conditions of multi-photon resonance is investigated separately.

УДК 538.56

РАЗВИТИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВОЛНЫ В САМОФОКУСИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Н. Б. Баранова, Б. Я. Зельдович

В рамках линеаризованного приближения рассмотрена пространственно-временная эволюция локальных возмущений амплитуды и фазы плоской монохроматической волны в нелинейной диспергирующей среде. Получены асимптотические выражения для функций Грина, характеризующих отклик на монохроматические, а также локализованные по времени одно- и двумерные по поперечным координатам возмущения. Найдены области неустойчивости волны как в пространстве поперечных волновых векторов и сдвигов частоты возмущения $(|q|, \Omega)$, так и в пространстве поперечных координат и времени $(|\tau|, c)$ для самофокусирующих и самодефокусирующих сред с различными знаками дисперсии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление неустойчивости волны в нелинейной реактивной среде было впервые рассмотрено Беспаловым и Талановым в работах [1, 2]. В последнее время вопрос о нарастании малых возмущений амплитуды мощной световой волны в самофокусирующих средах приобрел важное практическое значение в связи с созданием мощных твердотельных лазеров (см. [3, 4]). В большинстве работ рассматривается развитие синусоидальных возмущений, что позволяет сразу найти выражение для инкремента. В то же время источниками возмущений поля волны обычно являются микровключения в среде либо границы оптической системы (диафрагмы). В настоящей работе в рамках линеаризованной теории анализируется поведение функций Грина (т. е. откликов на локализованные возмущения) для ряда задач о распространении мощной световой волны в нелинейной реактивной и, вообще говоря, диспергирующей среде. Структура этих функций (положение максимумов и минимумов) позволяет судить о том, как будут расположены нарастающие возмущения по отношению к исходной неоднородности. В целях полноты изложения приведены результаты как для самофокусирующей ($\epsilon_2 > 0$), так и самодефокусирующей ($\epsilon_2 < 0$) сред для случаев линейных (одномерных) и точечных (двумерных) возмущений. Рассматривается также функция Грина для задачи о пространственно-временной эволюции немонохроматических возмущений.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений для амплитуд синфазной и квадратурной компонент возмущения плоской монохроматической волны v_1 и v_2 имеет вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) v_1 + \frac{1}{2k_0} \left(\Delta_{\perp} - k_0 A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v_2 = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) v_2 - \frac{1}{2k_0} \left(\Delta_{\perp} - k_0 A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v_1 - 2hv_2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ω_0 и k_0 — центральная частота излучения и невозмущенное волновое число на этой частоте, $r = (x, y)$ — координаты в поперечном сечении пучка, $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$, $A = \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0}$, $\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_2}{2} |E|^2$, $h = \left| \frac{q_m^2}{2k_0} \right|$, $q_m^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{\epsilon_2}{2} |E_0|^2$. Комплексная амплитуда полного поля $E(z, r, t)$ представлена в виде

$$E(z, r, t) = E_0 e^{i h z} [1 + v_1(z, r, t) + i v_2(z, r, t)],$$

где безразмерные величины v_1 и v_2 предполагаются малыми: $v_{1,2} \leq 1$.

Общее решение системы (1) может быть представлено в виде ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} v_i(z, r, t) = \sum_{k=1, 2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_{ik}(z, r - r', t - t') \times \\ \times v_k(z = 0, r', t'). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрению свойств функции Грина $G_{ik}(z, r, t)$ и посвящена настоящая работа. Функцию Грина G_{ik} из (2) удобно вычислять, пользуясь разложением в интеграл Фурье:

$$G_{ik}(z, r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} d^2 q_{\perp} \exp(i q_{\perp} r - i \Omega t) \tilde{G}_{ik}(z, q_{\perp}, \Omega), \quad (3)$$

причем, в силу вещественности элементов матрицы G_{ik} для \tilde{G}_{ik} имеет место соотношение $\tilde{G}_{ik}(z, -q_{\perp}, -\Omega) = \tilde{G}_{ik}^*(z, q_{\perp}, \Omega)$. Матрица $\tilde{G}_{ik}(z, q_{\perp}, \Omega)$ в представлении Фурье имеет и непосредственный смысл: она характеризует развитие возмущений с определенной величиной поперечного волнового вектора $q_{\perp} = (q_x, q_y)$ и сдвига частоты Ω ; при этом одновременно развиваются возмущения с $(-q_{\perp}, -\Omega)$.

Из системы (1) для $\tilde{G}_{ik}(z, q_{\perp}, \Omega)$ следует:

$$\tilde{G}_{ik} = e^{i \Omega z / u} \begin{pmatrix} \cos sz & \frac{q}{\sqrt{q^2 - 2q_m^2}} \sin sz \\ -\frac{\sqrt{q^2 - 2q_m^2}}{q} \sin sz & \cos sz \end{pmatrix}, \quad (4a)$$

где

$$q = \sqrt{q_{\perp}^2 - k_0 A \Omega^2}, \quad s = \frac{q}{2k_0} \sqrt{q^2 - 2q_m^2}. \quad (4b)$$

Знаки квадратного корня, фигурирующие в (4), требуют более аккуратного определения в связи с необходимостью перехода к комплексным значениям q_{\perp} и Ω при вычислении интеграла (3). Подробное описание выбора ветвей корня на комплексной плоскости приведено в [5]. При мнимом $s(q)$ тригонометрические функции в (4a) сводятся к гиперболическим и при $|z \operatorname{Im} s| \geq 1$ описывают экспоненциальное нарастание возмущений. Так, для $q = q_m$ (при $\epsilon_2 > 0$) инкремент становится максимальным и $G_{ik} \propto e^{hz}$ [1].

Приближенному вычислению интеграла Фурье (3) посвящены разд. 3 и 4 настоящей работы.

3. МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

a) Самофокусирующая среда ($\epsilon_2 > 0$). В случае $\epsilon_2 > 0$ имеет место самофокусировка монохроматического излучения; в дальнейшем мы будем называть это явление «пространственной» самофокусировкой, чтобы отличать его от временной эволюции поля в нелинейной реактивной среде. Вид функции Грина $G_{ik}(z, r)$ зависит от z и $|r|$, эту зависимость удобно привести к зависимости от двух безразмерных параметров. В качестве первого из них мы выберем величину hz , характеризующую показатель экспоненты нарастания «оптимальных» возмущений. Все дальнейшие вычисления будут, строго говоря, асимптотическими по параметру $hz \gg 1$; впрочем, получаемые результаты имеют разумную точность уже при $hz \sim 1,5-2$. В качестве второго параметра удобно взять угол $|r|/z$ между направлением распространения невозмущенной волны и лучом, соединяющим возмущение с точкой наблюдения; этот угол удобно выразить в единицах «оптимального» угла:

$$\varphi_r = \frac{k_0 |r|}{|q_m| z}, \quad (5a)$$

или для одномерных возмущений

$$\varphi_x = \frac{k_0 |x|}{|q_m| z}. \quad (5b)$$

Вычисление функции Грина $G_{ik}(z, r)$ методом перевала с большим параметром hz соответствует приближению параксиальной геометрической оптики (параксиальность связана с тем, что мы ограничились параболическим приближением в системе (1)). Специфика нашей задачи проявляется в следующих обстоятельствах. Прежде всего, благодаря параметрической связи в нелинейной среде мы имеем дело с распространением пар волн с противоположными значениями попечерного волнового вектора q_\perp . Кроме того, из-за взаимодействия с мощной невозмущенной волной определенного направления распространения (вдоль оси z) возникает «анизотропия» различных направлений распространения возмущений, т. е. нетривиальная зависимость эйконала $zs(q)$ от волнового вектора $q = |q_\perp|$. Наконец, из-за наличия мнимой части в эйконале $zs(q)$ (при $|q_\perp| \leq q_m \sqrt{2}$) сами групповая и фазовая скорости становятся, вообще говоря, комплексными; это соответствует сдвигу точки перевала с вещественной оси в комплексную плоскость q .

Характерным для функции Грина в отсутствие нелинейности является то, что «амплитуда» $\sqrt{G_{11}^2 + G_{21}^2}$ или $\sqrt{G_{12}^2 + G_{22}^2}$ не зависит от r , а фаза $\chi = \frac{k_0 |r|^2}{2z}$ такова, что направление эффективного волнового вектора $k_0^{-1} \nabla \chi$ совпадает с направлением r/z на точку наблюдения. Оба этих свойства функции Грина теряются в нелинейной среде, где «амплитуда» уже не постоянна, а градиент фазы $k_0^{-1} \nabla \chi$ не совпадает с r/z .

Функция Грина в самофокусирующей среде ведет себя существенно по-разному в областях $\varphi < 2$, $|\varphi - 2| \ll 1$, $\varphi > 2$ (напомним, что $G_{ik}(z, r) = G_{ik}(z, |r|)$, и поэтому достаточно рассматривать положительные φ). При $\varphi < 2$ амплитуда функции Грина экспоненциально велика. Это означает, что нарастание возмущений, внесенных локализованной неоднородностью, происходит в пределах конуса $|r| < z \frac{2q_m}{k_0}$. Этот конус уместно

сравнить с конусом $\frac{|q_\perp|}{k_0} < \frac{q_m V\sqrt{2}}{k_0}$ значений q_\perp , для которых инкремент положителен; то, что в r -пространстве этот конус шире в $\sqrt{2}$ раз, связано как раз с неколлинеарностью групповой и фазовой скоростей. Не выписывая простые, но громоздкие выражения при произвольном $\varphi < 2$ (см. [4, 5]), приведем здесь выражения, в которых и сам показатель экспоненты разложен по степеням φ . Для любых $i, k = 1, 2$ имеем

$$G_{ik}^I(z, x) \approx \sqrt{\frac{k_0}{4\pi z}} \exp \left[hz \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \cos \left[2hz \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \right) \varphi \right], \quad (6)$$

$$G_{ik}^{II}(z, |r|) \approx \sqrt{\frac{k_0}{16\pi z}} q_m \exp \left[hz \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] J_0 \left[2hz \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \right) \varphi \right],$$

где J_0 — функция Бесселя.

Таким образом, функция Грина имеет экспоненциально большой максимум в точке $x = 0$ (или $r = 0$) и осцилляции по поперечной координате с волновым числом $|q_\perp| = q_m$ вблизи этого максимума. Такая структура возмущений, наросших из исходной локальной неоднородности, привлекается при интерпретации картины разрушений самофокусировочного типа (см. [3, 4, 6, 7]).

Вблизи направления $\varphi = 2$ происходит переход от зоны неустойчивости к зоне устойчивости. В окрестности этого направления функция Грина может быть выражена [5] через функции Эйри $u(x)$ и $v(x)$, введенные Фоком (см., например, [8]).

При $\varphi > 2$ функция Грина имеет вид

$$G_{11}^I = G_{22}^I \approx \sqrt{\frac{k_0}{2\pi z}} \cos \left[\frac{k_0 x^2}{2z} \left(1 + \frac{1}{\varphi^2} \right) - \frac{\pi}{4} \right], \quad (7)$$

$$G_{21}^I = -G_{12}^I \approx \sqrt{\frac{k_0}{2\pi z}} \sin \left[\frac{k_0 x^2}{2z} \left(1 + \frac{1}{\varphi^2} \right) - \frac{\pi}{4} \right].$$

При достаточно больших φ выражения (7) переходят в выражения для функции Грина в линейной среде. Схематический вид зависимости $G^I(\varphi)$ приведен на рис. 1.

б) *Самодефокусирующая среда ($\epsilon_2 < 0$).* В самодефокусирующей среде наглядные рассуждения приводят к очевидному выводу о том, что

локальные возмущения должны рассасываться (затухать). И действительно, вычисление методом перевала дает три области существенно различного поведения функции Грина:

$$\varphi < 1/\sqrt{2}, \quad \left| \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \ll 1, \quad \varphi > 1/\sqrt{2}.$$

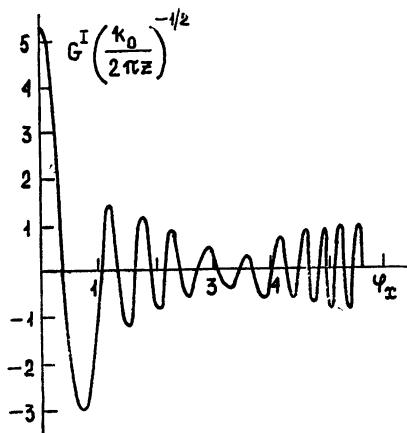
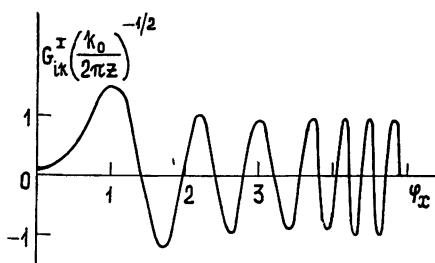


Рис. 1. Схематический вид функции Грина G^I в самофокусирующей недиспергирующей среде ($hz = 2$).

Схематический график функции Грина для самодефокусирующей среды представлен на рис. 2. Величины $G^I(z, 0)$ и $G^{II}(z, 0)$ меньше значений G в линейной среде соответственно в $e^{hz}\sqrt{2}$ и $h^2 z$ раз, это и есть некоторая характеристика «замывания» возмущений.

Асимптотические выражения для функций Грина в среде с $\epsilon_2 < 0$ приведены в [5].

Рис. 2. Схематический вид функции Грина G^I в самодефокусирующей недиспергирующей среде ($h^2 = 2$).



4. НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Характер эволюции немонохроматических возмущений определяется дисперсионным параметром $A = \left(\frac{d^2 k}{d \omega^2} \right)_{\omega_0}$. При $A = 0$ функция Грина имеет вид

$$G_{ik}(z, r, t) = \delta\left(t - \frac{z}{u}\right) G_{ik}^{(\text{монохр})}(z, r) \quad (8)$$

и соответствует распространению возмущений с z -компонентой групповой скорости, равной величине $u = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1}$.

При $A \neq 0$ уже без нелинейного взаимодействия при распространении происходит дисперсионное расплывание локализованных во времени пакетов. Это может быть описано также в терминах зависимости групповой скорости $v_z(\omega)$ от частоты $\omega = \omega_0 + \Omega$: $v_z(\omega_0 + \Omega) = u - u^2 A \Omega$.

В дальнейшем для задачи о взаимодействии волн в нелинейной среде нам потребуется величина «оптимального» сдвига частоты $|\Omega_m^2|$, определяемого как

$$\Omega_m^2 = -\frac{q_m^2}{k_0 A} = -\frac{\epsilon_2 |E_0|^2 \omega_0^2}{2 k_0 A c^2}.$$

Волны с фиксированным частотным сдвигом $\pm |\Omega_m|$, отвечающим определенному значению ϵ_2 , в формальной задаче с выключенной нелинейностью имели бы групповую скорость распространения $v_z = u \mp \Delta v_m$, где $\Delta v_m = u^2 A |\Omega_m|$. Это выражение для групповой скорости можно записать в виде $v_z = u(1 + \psi_t)$, где формально введенный «временной угол» ψ_t характеризует отличие групповой скорости от величины u . Распространение возмущения со скоростью $v_z = u(1 + \psi_t)$ приводит к следующей связи между расстоянием z и временем $\tau = t - z/u$ в бегущей системе координат:

$$\tau = -\frac{z}{u} \frac{\psi_t}{1 + \psi_t} \approx -\frac{z}{u} \psi_t.$$

(здесь мы считаем $\psi_t \ll 1$). В этой связи зависимость функции Грина $G(z, r, \tau)$ от переменной τ при $A \neq 0$ удобно выразить, вводя формальную «временную» угловую координату ψ_t . Мы будем использовать отношение ψ_t к значению ψ_t^{opt} , а именно, введем следующее обозначение:

$$\varphi_t = \left(t - \frac{z}{u} \right) (z |A\Omega_m|)^{-1}. \quad (9)$$

Именно в переменных φ_x из (5 б) и φ_t из (9) наиболее отчетливо проявляется симметрия между временным и пространственным поведением возмущений.

a) Распространение немонохроматических возмущений, не зависящих от поперечных координат. Развитие чисто временных (т. е. однородных по поперечной пространственной координате) возмущений плоской монохроматической волны существенно зависит от знака произведения $\varepsilon_2 A = \varepsilon_2 \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0}$. Временная (или модуляционная) неустойчивость имеет место лишь в случае $\varepsilon_2 A < 0$, что формально соответствует условию $\Omega_m^2 > 0$. Если $\varepsilon_2 A > 0$, то «временные» возмущения самодефокусируются. То же условие может быть отнесено и к временной эволюции импульса как целого в нелинейной диспергирующей среде (см. [9–12]). Для возмущений, зависящих только от времени t , функция Грина принимает вид

$$G_{ik}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\Omega e^{-i\Omega t} \tilde{G}_{ik}(z, q_{\perp}=0, \Omega).$$

Имеется полная аналогия между функцией $G_{ik}(z, \tau)$ и одномерной по поперечной координате функцией Грина для монохроматических возмущений $G_{ik}^I(z, x)$. Именно, одна получается из другой с помощью замены

$q \rightarrow \Omega V - Ak_0$, $x \rightarrow \frac{\tau}{\sqrt{k_0 |A|}}$, $\varphi_x \rightarrow \varphi_t$; поэтому все высказанные в разд. 3 утверждения относительно $G_{ik}^I(z, x)$ прямо переносятся на $G_{ik}(z, \tau)$.

б) Развитие немонохроматических возмущений, локализованных по поперечной координате. Обсудим вначале эволюцию возмущений вида $v_{1,2} \sim \cos \Omega \tau \cos q_{\perp} \tau$ для различных значений $|q_{\perp}|$ и Ω . Развитие синфазных и квадратурных возмущений указанного вида описывается функциями \tilde{G}_{ik} из (4 а).

Функции $\tilde{G}_{ik}(z, q_{\perp}, \Omega)$ зависят от поперечного волнового вектора q_{\perp} и сдвига частоты Ω лишь в комбинации $(q_{\perp})^2 - k_0 A \Omega^2$, причем область неустойчивости заключена в пределах $0 < (q_{\perp})^2 - k_0 A \Omega^2 < 2q_m^2$. Для случаев различных знаков ε_2 и A эти области на плоскости $|q_{\perp}|$ и Ω на рис. 3 отмечены штриховкой. Поскольку расположение областей неустойчивости симметрично относительно замены $\Omega \rightarrow -\Omega$ или $q_{\perp} \rightarrow -q_{\perp}$, на рисунке изображен лишь один квадрант.

Чисто временные возмущения на приведенных графиках могут быть исследованы по значениям $\tilde{G}(q_{\perp}=0, \Omega, z)$ на прямой $|q_{\perp}|=0$, а монохроматические возмущения—по значениям $\tilde{G}(z, q_{\perp}, \Omega=0)$ на горизонтальной оси на плоскости $(|q_{\perp}|, \Omega)$. Имеющиеся области неустойчивости для таких возмущений отмечены жирной чертой вдоль координатных осей.

На границах заштрихованных областей, отмеченных тонкими линиями, инкремент нарастания неустойчивости обращается в нуль. Максимум инкремента достигается внутри этих областей на линиях, отмеченных пунктиром; на этих линиях инкремент равен значению h , т. е. $\tilde{G}_{ik} \propto e^{hz}$.

Отметим, что в случае неменохроматических возмущений в нелинейной диспергирующей среде оптимальный поперечный волновой вектор зависит от сдвига частоты $q_{\perp}^{\text{opt}}(\Omega)$. Именно эта зависимость и изображена пунктирными кривыми.

В среде $\epsilon_2 > 0$ выполняется $|q_{\perp}^{\text{opt}}(\Omega)| > q_m$, если $A > 0$, и $|q_{\perp}^{\text{opt}}(\Omega)| \leq q_m$ в случае $A < 0$. В среде с $\epsilon_2 < 0$, в которой чисто пространственные возмущения самодефокусируются, наличие частотного сдвига Ω по отношению к несущей частоте ω_0 может привести к появлению экспоненциального роста пространственно-временных возмущений. При этом быстрее всего нарастают выбросы с некоторым поперечным волновым вектором, который, в зависимости от величины Ω , может принимать все возможные значения: $0 < |q_{\perp}^{\text{opt}}(\Omega)| < \infty$.

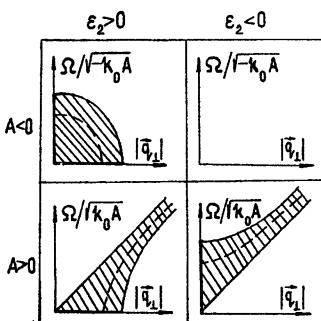


Рис. 3.

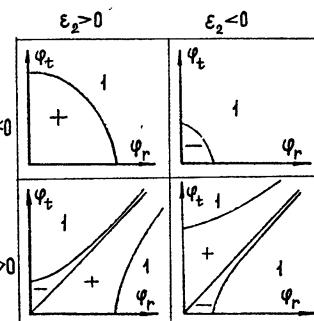


Рис. 4.

Рис. 3. Области неустойчивости гармонических пространственно-временных возмущений на плоскости поперечного волнового вектора $|q_{\perp}|$ и сдвига частоты Ω для различных наборов знаков ϵ_2 и A .

Рис. 4. Области характерного поведения функции Грина на плоскости φ_r и φ_t для различных наборов знаков ϵ_2 и A :
+ — G экспоненциально велика; „1“ — G порядка функции Грина в линейной среде; — — области экспоненциальной или степенной малости G .

Выражения для функции $G_{ik}(z, r, \tau)$ при различных наборах знаков параметров ϵ_2 и A приведены в [6]. Здесь мы обсудим их структуру, отметив области значений переменных (r, τ) , в которых $G_{ik}(z, r, \tau)$ обладает тем или иным характерным поведением. Области экспоненциально больших значений функций G соответствуют пространственно-временной самофокусировке (нарастанию) возмущений и на рис. 4 отмечены знаком (+). Области значений G порядка значений функций Грина для линейной задачи на рис. 4 отмечены знаком (1). Области малых значений соответствуют самодефокусировке (размыванию) возмущений и на рис. 4 отмечены знаком (—). Границы областей описываются следующими уравнениями:

$$|\varphi_t| = |\varphi_r|, \quad \varphi_t^2 - \varphi_r^2 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_t^2 - \varphi_r^2 = -4 \quad \text{при } A > 0, \epsilon_2 > 0,$$

$$|\varphi_t| = |\varphi_r|, \quad \varphi_t^2 - \varphi_r^2 = -\frac{1}{2}, \quad \varphi_t^2 - \varphi_r^2 = 4 \quad \text{при } A > 0, \epsilon_2 < 0,$$

$$\varphi_t^2 + \varphi_r^2 = 4 \quad \text{при } A < 0, \epsilon_2 > 0,$$

$$\varphi_t^2 + \varphi_r^2 = \frac{1}{2} \quad \text{при } A < 0, \epsilon_2 < 0.$$

В областях ($|r|, \tau$), отмеченных знаком (+), функция Грина принимает экспоненциально большие значения, $G(z, r, \tau) \propto \exp(hz)$. В областях ($|r|, \tau$), отмеченных знаком минус, функция Грина в зависимости от знаков ϵ_0 , A и типа задачи (одномерная, двумерная) может принимать как экспоненциально малые значения, $G \propto \exp(-hz)$; так и значения лишь со степенной малостью.

Проведенное в настоящей работе рассмотрение позволяет классифицировать различные среды с реактивной нелинейностью с точки зрения неустойчивости распространения плоской монохроматической волны. Найдены области неустойчивости как в пространстве частот и волновых векторов ($|q_\perp|, \Omega$), так и в координатно-временном пространстве ($|r|, \tau$). Знание структуры этих областей полезно при интерпретации экспериментально наблюдаемых эффектов самофокусировки и самомодуляции (ср., например, [3, 4, 6, 7, 13]).

Авторы благодарят Ю. В. Сенатского за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 3, 471 (1966).
2. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, в сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, стр. 428.
3. П. Г. Крюков, Ю. А. Матвеев, Ю. В. Сенатский, А. И. Федосимов, С. В. Чекалин, О. Б. Шатберашвили, Квантовая электроника, 1, 102 (1974).
4. Н. Б. Баранова, Б. Я. Зельдович, Ю. В. Сенатский, Препринт ФИАН № 24, 1974; Н. Б. Баранова, Н. Е. Быковский, Б. Я. Зельдович, Ю. В. Сенатский, Квантовая электроника, 1, 2435 (1974).
5. Н. Б. Баранова, Б. Я. Зельдович, Препринт ФИАН № 18, 1976.
6. I. A. Fleck, Jr., C. Layne, UCRL-74305, Preprint (1972); Appl. Phys. Lett., 22, 467 (1973).
7. A. J. Campillo, S. L. Shapiro, B. R. Suydam, Appl. Phys. Lett., 23, 628 (1973); Appl. Phys. Lett., 24, 178 (1974); B. R. Suydam, IEEE J., QE-10, 837 (1974).
8. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения радиоволн, изд. Сов. радио, 1970.
9. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 51, 1189 (1966).
10. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 4, 539 (1967).
11. Л. А. Островский, в сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968, стр. 301.
12. Б. Я. Зельдович, И. И. Собельман, Письма в ЖЭТФ, 13, 182 (1971).
13. О. П. Варновский, А. П. Ведута, Б. П. Кирсанов, Квантовая электроника, 1, 309 (1974).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
15 июля 1975 г.

DEVELOPMENT OF LOCAL WAVE PERTURBATIONS IN SELF-FOCUSING MEDIA

N. B. Baranova, B. Ya. Zel'dovich

The space-time evolution of local amplitude and phase perturbations of a plane monochromatic wave in a nonlinear dispersive medium has been considered in the framework of the linearized approximation. Asymptotic expressions are obtained for Green functions characterizing a response to monochromatic as well as localized in time (over transverse-coordinate one-and two-dimensional) perturbations. The instability regions of a wave have been found both in space of transverse wave vectors and perturbation frequency shifts ($|q_\perp|, \Omega$) and in space of transverse coordinates and time ($|r|, \tau$) for self-focusing and self-defocusing media with different signs of dispersion.

УДК 534.26 : 535.36

ФЛУКТУАЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЛЯВА И РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ФОТОУПРУГИХ ПЛЕНКАХ

Г. Н. Бурлак, Н. Я. Коцаренко, Г. Л. Фалько

На основе флюктуационно-диссипативной теоремы вычислены корреляционные функции смещений волн Лява $\langle u(Q, \omega)u^*(Q', \omega') \rangle$, а также изучено рассеяние света, обусловленное как флюктуационной, так и возбужденной внешним источником волнами Лява. Для обоих случаев вычислен коэффициент рассеяния света, рассмотрен предельный случай тонких пленок.

Рассеяние электромагнитных волн акустическими волнами является в настоящее время объектом интенсивных исследований, что связано с широкой сферой применения эффектов, возникающих при взаимодействии света с акустическими волнами. Рассеяние света тепловыми волнами успешно используется для определения некоторых параметров твердых тел (упругих модулей второго и более высоких порядков, параметров вязкости и т. д.). Спектр рассеянного света с частотным сдвигом воспроизводит спектр акустических флюктуаций среды, что позволяет изучать термодинамику упругих возбуждений.

Рассеяние света когерентной волной может характеризоваться значительно большими интенсивностями по сравнению с рассеянием на флюктуациях и широко применяется в устройствах модуляции, дефлексии, сканирования лазерного излучения, детектирования СВЧ сигналов, а также в системах обработки информации.

Существует достаточно полная теория взаимодействия света с акустическими волнами в неограниченных твердых телах [1]. Однако реальные эксперименты проводятся с образцами, на оптико-акустические свойства и на дисперсию акустических волн в которых влияние границы может быть существенным.

Рассеяние света поверхностными тепловыми волнами рассмотрено в работе [2], нормальными волнами в пластинках в работе [3].

В настоящей работе получены корреляционные функции тепловых волн Лява и изучено рассеяние света флюктуационными и когерентными волнами Лява, распространяющимися в пленках, имеющих акустический контакт с упругой полуограниченной средой.

1. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ФЛУКТУАЦИИ ВОЛН ЛЯВА

Пусть упругая пленка $0 < z < L$ (среда I) примыкает к упругому полупространству $z \geq L$ (среда II). Уравнения движения в этих средах имеют вид

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где $p_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda \delta_{ij} u_{ll} + 2\eta \dot{u}_{ij} + (\xi - \eta) \delta_{ij} \dot{u}_{ll} + G_{ij}$, $\lambda = \lambda_{1,2}$ и $\mu = \mu_{1,2}$ — модули упругости, $\xi = \xi_{1,2}$ и $\eta = \eta_{1,2}$ — коэффициенты вязкости

соответственно в средах I, II, G_{ij} — тензор сторонних напряжений, коррелятор которых описывается формулой [4]

$$\langle G_{ij}(r, t)G_{kl}^*(r', t') \rangle = 2T [\eta(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + (\xi - \eta)\delta_{ij}\delta_{kl}] \delta(r - r')\delta(t - t'). \quad (2)$$

Систему (1) будем решать при помощи фурье-преобразования по поперечным координатам r_\perp и времени t :

$$u(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega dQ \exp[i(\omega t - Qr_\perp)] u(\omega, Q, z). \quad (3)$$

Выберем орты системы координат в виде $e_1 = \frac{Q \times n}{Q}$, $e_2 = \frac{Q}{Q}$, $e_3 =$

$= n$ (n — орт оси z), после чего потребуем, чтобы решения уравнения (1) для фурье-компонент поперечных смещений $u_1(Q, \omega, z)$ удовлетворяли граничным условиям, соответствующим отсутствию механических напряжений при $z = 0$ и равенству механических напряжений и смещений при $z = L$:

$$p_{13}^I|_{z=0} = 0, \quad p_{13}^I|_{z=L} = p_{13}^{II}|_{z=L}, \quad u_1^I|_{z=L} = u_1^{II}|_{z=L}.$$

Это позволяет выразить фурье-амплитуды волн через сторонние напряжения. Составим затем квадратичные выражения по смещениям и усредним их по равновесному состоянию с учетом формул (2). После этого в случае малой вязкости $\omega\eta/\mu \ll 1$ (именно при таком условии флюктуации волн Лява не связаны с другим типом акустических волн в рассматриваемой системе — волнами Сезава) получим корреляционные функции волн Лява в виде

$$\begin{aligned} \langle u_1(Q, \omega, z)u_1^*(Q', \omega', z') \rangle &= 4 \cos s_1 z \cos s_1 z' \times \\ &\times \langle u^{+2} \rangle_{Q, \omega} \delta(\omega - \omega')\delta(Q - Q') \quad (0 \leq z \leq L), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle u_1(Q, \omega, z)u_1^*(Q', \omega', z') \rangle &= 4 \cos^2 s_1 L \exp[2s_2 L - s_2(z + z')] \langle u^{+2} \rangle_{Q, \omega} \times \\ &\times \delta(\omega - \omega')\delta(Q - Q') \quad (z \geq L), \end{aligned}$$

где

$$\langle u^{+2} \rangle_{Q, \omega} = \frac{(2\pi)^3 \hbar \operatorname{ctg} \frac{\hbar\omega}{2T}}{4\mu_1 s_1 \cos^2 s_1 L} \frac{\left| \eta_1 \frac{\partial D}{\partial \eta_1} + \eta_2 \frac{\partial D}{\partial \eta_2} \right|}{|D(Q, \omega)|^2}; \quad (5)$$

$$D(Q, \omega) = \operatorname{tg} s_1 L - \mu'_2 s_2 / \mu'_1 s_1, \quad \mu' = \mu + i\omega\eta,$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{\mu'_1} - Q^2}, \quad s_2 = \sqrt{Q^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu'_2}}, \quad v_{1,2} = \sqrt{\frac{\mu_{1,2}}{\rho_{1,2}}}.$$

Уравнение

$$D(Q, \omega) = 0 \quad (6)$$

является дисперсионным уравнением волн Лява в среде с диссипацией.

Поскольку мы интересуемся флюктуациями волн Лява, при получении формул (4) и (5) учитываем лишь члены, содержащие множитель $1/D(Q, \omega)$. При этом оказывается

$$u_1(Q, \omega, z) = 2u^+ \begin{cases} \cos s_1 z & (0 \leq z \leq L) \\ \cos s_1 L \exp[-s_2(z - L)] & (z \geq L) \end{cases}.$$

Из вида корреляторов (4) и (5) следует, что спектральное распределение тепловых волн содержит максимумы вблизи собственных частот ω_m волн Лява (m — номер моды), определяемых соотношением $D(Q, \omega_m) = 0$. В случае отсутствия диссипации ($\eta \rightarrow 0$) спектр содержит лишь собственные частоты волн Лява:

$$\langle u^{+2} \rangle_{Q, \omega} = \frac{(2\pi)^3 \hbar \operatorname{cth}(\hbar \omega / 2T)}{4\mu_1 s_1 \cos^2 s_1 L} \pi \delta [D(Q, \omega)]. \quad (7)$$

Для механически свободной пластиинки формулы (4) и (7) переходят в корреляторы нормальных поперечных волн [3].

Как показывает анализ дисперсионного уравнения (6), для распространения волн Лява необходимо выполнение соотношения $v_1 < v_2$, причем фазовая скорость волн может принимать значения $v_1 < v_\phi < v_2$.

Частоты и волновые векторы в точке рождения мод выражаются формулой

$$\omega_m = \frac{m \pi v_1 v_2}{L \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}, \quad Q_m = \frac{m \pi v_1}{L \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}.$$

2. РАССЕЯНИЕ СВЕТА ВОЛНАМИ ЛЯВА

Взаимодействие между акустической и электромагнитной волной в кристалле возникает вследствие зависимости тензора диэлектрической проницаемости от акустических смещений [5]:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} + \delta \epsilon_{ij}, \quad \delta \epsilon_{ij} = au_{ij} + bu_{ii} \delta_{ij}, \quad (8)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость кристалла, a и b — фотоупругие константы. В рассматриваемом случае последнее слагаемое в $\delta \epsilon_{ij}$ равно нулю из-за поперечности смещений в волне Лява ($\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$).

Кроме фотоупругости в ограниченных средах рассеяние света может быть также обусловлено колебаниями границы полем акустической волны [6]. Однако волны Лява характеризуются смещениями в плоскости пленки, не возмущая границы, и этот механизм здесь не существует.

Пусть на пленку $0 < z < L$ нормально падает электромагнитная волна с частотой ω_0 :

$$E(r, t) = E^0 \exp[i\omega_0(t - z/c)] + \text{к. с.}$$

Прошедшая волна в пленке имеет вид

$$E^s(r, t) = E^0 \exp(i\omega_0 t) [\alpha^+ \exp(-ik_0 z) + \alpha^- \exp(ik_0 z)] + \text{к. с.}, \quad (9)$$

где $k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_1^0}$, а α^\pm определяются формулами Френеля:

$$\alpha^\pm = \frac{2(\sqrt{\epsilon_1^0} \pm \sqrt{\epsilon_2^0}) \exp(\pm ik_0 L)}{(\sqrt{\epsilon_1^0} + \sqrt{\epsilon_2^0})(\sqrt{\epsilon_1^0} + 1) \exp(ik_0 L) - (\sqrt{\epsilon_1^0} - \sqrt{\epsilon_2^0})(\sqrt{\epsilon_1^0} - 1) \exp(-ik_0 L)},$$

— диэлектрическая проницаемость соответственно I и II сред.

Взаимодействие электромагнитной волны (9) с акустической волной приводит к появлению рассеянного излучения, поле которого определяется системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (10)$$

где δD_i — отлично от нуля и равно $\delta D_i = a u_{ij} E_j^s$ лишь в среде I (для простоты среду II мы считаем нефотоупругой).

Представляя акустическую волну Лява в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega d\mathbf{Q} \exp[i(\omega t - \mathbf{Q}\mathbf{r}_\perp)] 2u(\mathbf{Q}, \omega) e_1 \cos s_1 z,$$

можно написать решение неоднородной системы (10) по аналогии с системой (1). Затем, учитывая, что найденное решение должно удовлетворять граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих E_t и H_t при $z = 0$ и $z = L$, выразим компоненты Фурье поля в вакуме через амплитуду падающей волны и акустические смещения в пленке:

$$\begin{aligned} E(Q, \omega, z) &= E(Q, \omega) \exp(i\sigma_0 z), \\ E_1(\omega, Q) &= i \frac{a \omega^2 Q E_2^0 L}{2c^2 \sigma_1 B_1(\omega)} [F_1^1(\omega) u(\Delta\omega) + F_1^2(\omega) u(\widetilde{\Delta\omega})], \\ E_2(\omega, Q) &= i \frac{a Q \sigma_1 E_1^0 L}{2\epsilon_1 B_2(\omega)} [F_2^1(\omega) u(\Delta\omega) + F_2^2(\omega) u(\widetilde{\Delta\omega})], \\ E_3(\omega, Q) &= \frac{Q}{\sigma_0} E_2(\omega, Q), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - c^2 Q^2 / \omega^2}, \quad \sigma_{1,2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{1,2} - c^2 Q^2 / \omega^2},$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0, \quad \tilde{\Delta\omega} = \omega + \omega_0,$$

$$B_1(\omega) = \sum_{p=1}^2 \left[1 - (-1)^p \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right] \left[1 - (-1)^p \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \exp[-i(-1)^p \sigma_1 L] (-1)^{p+1},$$

$$B_2(\omega) = \sum_{p=1}^2 \left[1 - (-1)^p \frac{\sigma_1}{\epsilon_1 \sigma_0} \right] \left[1 - (-1)^p \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 \epsilon_1} \right] \exp[-i(-1)^p \sigma_1 L] (-1)^{p+1},$$

$$F_1^{1,2}(\omega) = \sum_{t,m,n=1}^2 \left[1 - (-1)^t \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] W_{tmn}^{1,2},$$

$$F_2^{1,2}(\omega) = \sum_{t,m,n=1}^2 \left[1 - (-1)^t \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 \epsilon_1} \right] \left[1 - (-1)^{t+n} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right] W_{tmn}^{1,2},$$

$$W_{tmn}^{1,2} = \alpha_m^{1,2} \frac{\exp(i\chi_{tmn} L) - 1}{\chi_{tmn} L} \exp[-i(-1)^t \sigma_1 L],$$

$$\chi_{tmn} = (-1)^t \sigma_1 + (-1)^m k_0 - (-1)^n s_1,$$

$$\alpha_1^1 = \alpha^+, \quad \alpha_2^1 = \alpha^-, \quad \alpha_1^2 = \alpha^{-*}, \quad \alpha_2^2 = \alpha^{+*}.$$

Фурье-амплитуды магнитного поля выражаются с помощью формул (11) следующим образом:

$$\mathbf{H}(\omega, Q) = \frac{c}{\omega} \left[\mathbf{e}_1 \frac{\omega^2}{c^2 \sigma_0} E_2(\omega, Q) - (\mathbf{e}_2 \sigma_0 + Q \mathbf{n}) E_1(\omega, Q) \right]. \quad (12)$$

Формулы (11) и (12) дают возможность записать усредненный поток вектора Умова—Пойнтинга рассеянной волны:

$$\begin{aligned} \langle \overline{S} \rangle^t &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\omega dQ \frac{c}{\omega} (\mathbf{Q} - \sigma_0 \mathbf{n}) \langle E^0(\omega, Q) \rangle = \\ &= \int_0^\infty d\omega \int d\Omega \mathbf{e}(\theta, \varphi) I_{\omega, \Omega}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $I_{\omega, \Omega}$ — интенсивность рассеянного излучения в единичном интервале частот в единицу телесного угла, $\mathbf{e}(\theta, \varphi) = \frac{c}{\omega} (\mathbf{Q} - \sigma_0 \mathbf{n})$ — орт рассеянного излучения, φ — угол между векторами \mathbf{e}_2 и E^0 , Q и θ связаны соотношением $Q = \frac{\omega}{c} \sin \theta$, $dQ = \frac{\omega^2}{c^2} \cos \theta d\Omega$, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$.

Определив коэффициент рассеяния как отношение

$$R_{\omega, \Omega} = \frac{I_{\omega, \Omega}}{I_0},$$

где $I_0 = \frac{c}{4\pi} |E^0|^2$ — полная интенсивность первичного излучения, получим для $R_{\omega, \Omega}$ следующее выражение:

$$R_{\omega, \Omega} = \Phi(\varphi, \theta, \omega) \langle u^2 \rangle_{Q, \Delta\omega}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi, \theta, \omega) &= \frac{\alpha^2 \omega^6 L^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{4(2\pi)^6 c^6} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{\epsilon_1 - \sin^2 \theta} \left| \frac{F_1^1(\omega)}{B_1(\omega)} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \varphi (\epsilon_1 - \sin^2 \theta)}{\epsilon_1^2 \cos^2 \theta} \left| \frac{F_2^1(\omega)}{B_2(\omega)} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

При рассеянии света тепловой волной выражение $\langle u^2 \rangle_{Q, \Delta\omega}$ в формуле (14) следует заменить корреляторы $\langle u^{+2} \rangle_{Q, \Delta\omega}$ (4) или (7). Если учесть, что δ -функция в (7) может быть преобразована следующим образом:

$$\delta[D(Q, \omega)] = \sum_{m=0}^N \left| \frac{\partial D(Q, \omega)}{\partial(\omega^2)} \right|_{\omega^2 = \omega_m^2(Q)}^{-1} \delta[\omega^2 - \omega_m^2(Q)],$$

где $N + 1$ — число возбуждаемых на частоте ω_m мод, то

$$\langle u^{+2} \rangle_{Q, \Delta\omega} \sim \delta[\Delta\omega^2 - \omega_m^2(Q)].$$

В этом случае коэффициент рассеяния (14) имеет вид

$$R_{\omega, \Omega} = \frac{(2\pi)^3 \hbar \operatorname{cth}(\hbar \omega / 2T)}{4\mu_1 s_1 \cos^2 s_1 L} \pi \Phi(\varphi, \theta, \omega) \times \\ \times \sum_{m=0}^N \left| \frac{\partial D(Q, \omega)}{\partial (\omega^2)} \right|^{-1} \delta(\Delta\omega^2 - \omega_m^2) \quad (15)$$

и в спектре рассеяния содержатся частоты $\omega = \omega_0 \pm \omega_m(Q)$. При ненулевом затухании акустических волн ($\eta \neq 0$) эти частоты определяют положения спектральных максимумов рассеянного света.

Поскольку $\omega_m \ll \omega_0$, при фиксированном m интенсивность стоксовой и антистоксовой компонент практически одинакова.

Законы сохранения энергии $\omega = \omega_0 + \omega_m$ и тангенциальной составляющей импульса в процессе рассеяния дают возможность найти зависимость угла рассеяния θ от частоты ω рассеянного света:

$$\theta(\omega) = \arcsin \frac{Q_m(\omega - \omega_0)c}{\omega}, \quad (16)$$

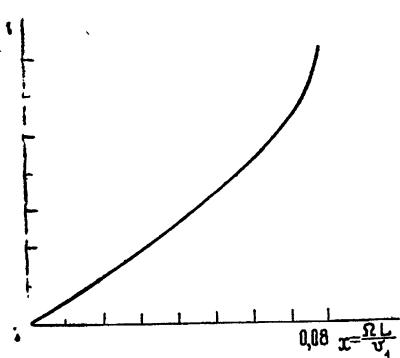


Рис. 1. Зависимость угла рассеяния θ от нормированной частоты акустической волны $\frac{\Omega L}{v_1}$ при $\frac{\omega_0 L}{c} \ll 1$ (пленка InSb, подложка стекло — твердый крон).

где $Q_m(\omega)$ определяется законом дисперсии волн Лява (6), а m номерует акустические моды при фиксированном значении волнового вектора. Типичный вид зависимости $\theta(\omega)$ приведен на рис. 1 для InSb. Как следует из (16) и (6), участки дисперсионных кривых волн Лява, ответственные за рассеяние света, ограничены и лежат ниже прямой $Q = \frac{|\omega_0 + \omega_m|}{c}$. Это дает возмож-

ность указать высший номер акустической моды, которая взаимодействует со светом частоты ω_0 :

$$N_{\max} \leq \frac{\omega_0 L}{\pi c} \sqrt{\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1}. \quad (17)$$

При рассеянии света заданной монохроматической ультразвуковой волной Лява с амплитудой $u_0^{(m)}$ смещение $u(r, t)$ можно записать в виде

$$u(r, t) = u_0^{(m)} 2 \cos s_1 z \exp[i(\Omega_0^{(m)} t - Q_0 r_\perp)] + \text{к.с.}, \quad (18)$$

$$u_0^{(m)} \perp Q_0,$$

где m — номер моды, $\Omega_0^{(m)}$ и Q_0 связаны дисперсионным уравнением (6).

В этом случае коэффициент рассеяния света (14) принимает вид $R_{\omega, \Omega} = \Phi(\varphi, \theta, \omega)(2\pi)^6 [\delta(\Delta\omega - \Omega_0) \delta(Q - Q_0) + \delta(\Delta\omega + \Omega_0) \delta(Q + Q_0)]$, (19) т. е. спектр рассеянного света содержит две линии: стоксову и антистоксову, интенсивность которых при $\Omega_0^{(m)}/\omega_0 \ll 1$ практически одинакова.

Рассмотрим важный с точки зрения приложений случай тонких пленок, когда $L\omega_0/c \ll 1$. В этом случае согласно (17) свет взаимодействует лишь с нулевой акустической модой ($m = 0$). При этом в выражении для коэффициента рассеяния (15) функцию $\Phi(\varphi, \theta, \omega)$ можно переписать в виде

$$\Phi(\varphi, \theta, \omega) = \frac{4a^2 \omega^6 L^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{(2\pi)^6 c^6 (\sqrt{\epsilon_2} + 1)} \times \\ \times \left[\frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \theta + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta})^2} + \frac{(\epsilon_2 - \sin^2 \theta) \sin^2 \varphi}{(\sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta} + \epsilon_2 \cos \theta)^2} \right], \quad (20)$$

откуда следует, что при мандельштам-брюллюэновском рассеянии в тонких пленках коэффициент рассеяния примерно в $(L\omega_0/c)^2$ раз меньше, чем при рассеянии на объемных волнах [5].

При рассеянии света заданной акустической волной (18) полный коэффициент рассеяния $R = \int R_{\omega, \Omega} d\omega d\Omega$ с учетом (20) при $\omega_m \ll \omega_0$ принимает вид

$$R = \frac{8a^2 Q_0^2 L^2 \omega_0^2 u_0^{m^2}}{c^2 (\sqrt{\epsilon_2} + 1)^2} \left[\frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta_0})^2} + \right. \\ \left. + \frac{(\epsilon_2 - \sin^2 \theta_0) \sin^2 \varphi}{(\epsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\epsilon_2 - \sin^2 \theta_0})^2} \right], \quad (21)$$

здесь $\theta_0 = \arcsin \frac{Q_0 c}{\omega_0}$ — угол рассеяния.

При потоке акустической мощности 1 Bt/cm^2 , $\omega_0 \sim 10^{13} \text{ Гц}$, $L = 10^{-4} \text{ см}$, $\rho_1 = 5,8 \text{ г/cm}^3$, $v_2 = 3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$, $a \sim 1$, $\epsilon_1 \sim 17,7$ (пленка InSb, подложка стекло — твердый крон) коэффициент рассеяния (21) имеет порядок 10^{-9} .

Рассеяние света на тепловых волнах Лява можно идентифицировать по зависимости угла рассеяния от частоты рассеянной волны (см. (16)).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Фабелинский, Молекулярное рассеяние света, изд. Наука, М., 1965; W. R. Klein, B. D. Cook, IEEE Trans., SU-14, 123 (1967).
2. Л. Г. Гречко, Н. Я. Коцаренко, А. М. Федорченко, Препринт ИТФ АН УССР, 72-78Р, Киев, 1972.
3. Н. Я. Коцаренко, Г. Л. Фалько, А. М. Федорченко, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 17, № 8, 1158 (1974).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, 32, 618 (1957).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
6. Н. Я. Коцаренко, Г. Л. Фалько, УФЖ, 19, 2051 (1974).

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
7 июля 1975 г.

FLUCTUATIONS OF ACOUSTIC LOVE WAVES AND LIGHT SCATTERING IN PHOTO-ELASTIC FILMS

G. N. Burlak, N. Ya. Kotsarenko, G. L. Fal'ko

Based upon fluctuation-dissipative theorem the correlation functions of Love wave displacement $\langle u(Q, \omega)u^*(Q', \omega') \rangle$ are calculated. The light scattering both due to fluctuation and excited by an external source Love waves is also studied. The light scattering coefficient is calculated for both cases. The limit case of thin films is considered.

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИЯ НА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ, ОБРАЗОВАННОЙ ПРОВОДЯЩИМИ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

С. М. Журав

Рассматривается задача об излучении линейно сферизованных ТЕМ волн из бесконечной периодической структуры, образованной проводящими полуплоскостями конечной толщины, пространство между которыми заполнено однородной диэлектрической средой. Способ решения основан на методе Винера—Хопфа и выделении дополнительных областей. Задача сводится к решению одной бесконечной системы линейных уравнений, которая решается приближенно методом редукции.

Задача о дифракции на бесконечной периодической структуре, образованной проводящими полуплоскостями конечной толщины, линейно сферизованных собственных волн плоского волновода имеет важное теоретическое и практическое значение. Однако ее исследование является достаточно сложным. Так, решения указанной задачи в работах [1, 2], где, соответственно, численно решалось интегральное уравнение и использовался аппарат матриц рассеяния, являются сложными и трудоемкими. В настоящей работе решение, основанное на методе Винера—Хопфа [3], сводится к решению одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

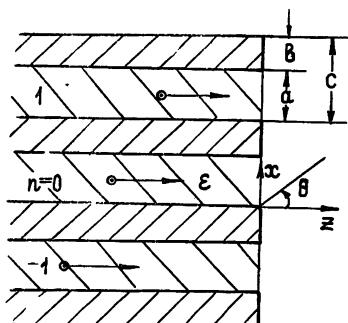


Рис. 1.

амплитудой и с фазой $\chi c n$, где $c = a + b$ — период структуры, $\chi = k \sin \theta$ ($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число в пустоте), θ — направление распространения основной плоской волны в свободном пространстве, а n — номер волноводной ячейки ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Так как структура и возбуждение периодические, то достаточно определить поле $H_y(x, z)$ в одной, например в центральной, ячейке ($n = 0, 0 < x < c$), которую разобъем на три области: 1 — $0 < x < a, z < 0$; 2 — $0 < x < a, z > 0$; 3 — $a < x < c, z > 0$.

Поле в области 1 представим в виде разложения по собственным волнам E_{0n} :

$$H_y^{(1)} = e^{i\chi z} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n x}{a} \exp(-i \hat{a}_n z), \quad (1)$$

где $\alpha_n^{\wedge} = \sqrt{\varepsilon k^2 - (\pi n/a)^2}$ — константы распространения ($h = \alpha_n^{\wedge}$; зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$); в областях 2, 3 введем фурье-преобразование:

$$\varphi_{+}^{(2,3)}(x, \alpha) = \int_0^{\infty} H_y^{(2,3)}(x, z) e^{iz} dz. \quad (2)$$

Здесь и ниже индексы + и — будут присваиваться функциям, регулярным соответственно в верхней ($\text{Im}(\alpha) > 0$) и нижней ($\text{Im}(\alpha) < 0$) полуплоскостях комплексной переменной α , а верхний индекс в круглых скобках определяет область.

Применив фурье-преобразование (2) к волновому уравнению и решив его, имеем

$$\varphi_{+}^{(2)}(x, \alpha) = A \operatorname{ch} \gamma x + B \operatorname{sh} \gamma x + i \left[\frac{\alpha - h/\varepsilon}{\alpha^2 - k^2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\alpha + \alpha_n^{\wedge}/\varepsilon}{\alpha^2 - \alpha_n^2} \cos \frac{\pi n x}{a} \right]; \quad (3)$$

$$\varphi_{+}^{(3)}(x, \alpha) + \varphi_{+}^{(3)}(x, -\alpha) = C \operatorname{ch} \gamma x + D \operatorname{sh} \gamma x, \quad (4)$$

где $\alpha_n = \sqrt{k^2 - (\pi n/a)^2}$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$.

Подставляя в соотношения (3), (4) и в их производные по x значения $x = 0, a, c$ и исключая неизвестные $A, B, C, D, \varphi_{+}^{(3)}(a, \alpha)$ и $\varphi_{+}^{(3)}(c, \alpha)$, приходим к системе функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\begin{aligned} \varphi_{+}^{(3)'}(c, \alpha) + \varphi_{+}^{(3)'}(c, -\alpha) \\ \varphi_{+}^{(3)'}(a, \alpha) + \varphi_{+}^{(3)'}(a, -\alpha) \end{aligned} \right] &= \frac{i}{\varepsilon} \left\{ \begin{aligned} \left[K_0(\alpha) - e^{i\chi c} L_0(\alpha) \right] ha - \\ \left[L_0(\alpha) - e^{i\chi c} M_0(\alpha) \right] \alpha_n^{\wedge} a A_n \end{aligned} \right\} \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} (-1)^n K_n(\alpha) - e^{i\chi c} L_n(\alpha) \\ (-1)^n L_n(\alpha) - e^{i\chi c} M_n(\alpha) \end{aligned} \right] \alpha_n^{\wedge} a A_n \}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{bmatrix} K_n(\alpha) \\ L_n(\alpha) \\ M_n(\alpha) \end{bmatrix} = \frac{\gamma}{a(\alpha^2 - \alpha_n^2)} \begin{bmatrix} \operatorname{sh} \gamma a + e^{i\chi c} \operatorname{sh} \gamma b \\ \operatorname{sh} \gamma c \\ \operatorname{sh} \gamma a + e^{-i\chi c} \operatorname{sh} \gamma b \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\varphi_{+}^{(2,3)'}(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{+}^{(2,3)}(x, \alpha).$$

При выводе (5) учитывались следующие равенства:

$$\varphi_{+}^{(2)}(a, \alpha) = \varphi_{+}^{(3)}(a, \alpha), \quad \varphi_{+}^{(2)'}(a, \alpha) = \varphi_{+}^{(3)'}(a, \alpha),$$

$$\varphi_{+}^{(2)}(0, \alpha) = e^{-i\chi c} \varphi_{+}^{(3)}(c, \alpha), \quad \varphi_{+}^{(2)'}(0, \alpha) = e^{-i\chi c} \varphi_{+}^{(3)'}(c, \alpha).$$

Разлагая мероморфные функции (6) на суммы $N_n = N_{n+} + N_{n-}$, $N_{n-}(\alpha) = N_{n+}(-\alpha)$ ($N = K, L, M$), где

$$\begin{bmatrix} K_{n+}(\alpha) \\ L_{n+}(\alpha) \\ M_{n+}(\alpha) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2 \alpha_n a} \frac{\gamma_n \operatorname{sh} \gamma_n b}{(-1)^n \operatorname{ch} \gamma_n b - \cos \chi c} \begin{bmatrix} e^{i\chi c} \\ (-1)^n \\ e^{-i\chi c} \end{bmatrix} - \frac{1}{\alpha + \alpha_n} -$$

$$-\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\gamma}_l^2}{c w_l \alpha (\bar{\gamma}_l^2 - \gamma_n^2)} \left[\frac{\exp(\bar{\gamma}_l b)}{\exp(-\bar{\gamma}_l b)} \right] \frac{1}{\alpha + w_l},$$

$$\bar{\gamma}_l = i \left(\frac{2\pi l}{c} + \chi \right), \quad w_l = \sqrt{k^2 + \bar{\gamma}_l^2} \quad (l = 0, \pm 1, \dots), \quad \gamma_n = i \frac{\pi n}{a},$$

представим уравнения (5) в виде

$$\varphi_+^{(3)'}(x, \alpha) + \varphi_+^{(3)'}(x, -\alpha) = T_+(\alpha) + T_-(\alpha).$$

Из этого представления, учитывая, что $\varphi_+^{(3)'}(x, \alpha) \sim \alpha^{-\tau}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и $A_n \sim n^{-(1+\tau)}$ при $n \rightarrow \infty$, где $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{1+2\epsilon}{2(1+\epsilon)} \right)^{1/2}$, применяя теорему Литувилля [3], находим решение уравнений (5): $\varphi_+^{(3)'}(x, \alpha) = T_+(\alpha)$.

При исключении из (3) неизвестных функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ были найдены выражения для $\varphi_+^{(2)}(0, \alpha)$ и $\varphi_+^{(2)}(\alpha, \alpha)$, которые не должны иметь особенностей $\text{Im } \alpha > 0$. Это требование приводит к соотношению

$$(-1)^m \varphi_+^{(3)'}(a, \alpha_m) - e^{-i\chi c} \varphi_+^{(3)'}(c, \alpha_m) = \\ = -i \left[(\epsilon_m - 1) \left(k - \frac{h}{\epsilon} \right) a + \frac{\epsilon_m}{2} \left(\alpha_m + \frac{\hat{\alpha}_m}{\epsilon} \right) a A_m \right],$$

где

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m \geq 1 \end{cases}.$$

Подставляя в это соотношение решение уравнений (5), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд A_n :

$$-\epsilon \frac{\epsilon_m}{2} \left(\alpha_m + \frac{\hat{\alpha}_m}{\epsilon} \right) a A_m + \sum_{n=0}^{\infty} [((-1)^{n+m} + 1) L_{nm} - \\ - (-1)^m e^{i\chi c} M_{nm} - (-1)^n e^{-i\chi c} K_{nm}] \frac{\hat{\alpha}_n}{\alpha_n} a A_n = \\ = \epsilon (\epsilon_m - 1) \left(k - \frac{h}{\epsilon} \right) a + h a [((-1)^m + 1) L_{0m} - \\ - (-1)^m e^{i\chi c} M_{0m} - e^{-i\chi c} K_{0m}], \quad (7)$$

где $N_{nm} = N_{n+}(\alpha_m)$ ($N = K, L, M$), причем при $n \neq m$ справедливо рекуррентное соотношение

$$N_{nm} = \frac{1}{m^2 - n^2} \left(m^2 N_{0m} - n^2 \frac{\alpha_m}{\alpha_n} N_{0n} \right).$$

Вычисление полей в свободном пространстве сводится к вычислению вычетов после нахождения явных выражений для A, B, C, D и использования обратного фурье-преобразования. Для $0 < x < c, z > 0$ имеем

$$H_y^{(2,3)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega_l z + \bar{\gamma}_l x)}{\epsilon c w_l \bar{\gamma}_l} \left[(1 - \exp(-a \bar{\gamma}_l)) h - \right.$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n \exp(-a\bar{\gamma}_n)) \frac{\bar{\gamma}_n^2}{\bar{\gamma}_n^2 - \gamma_n^2} \wedge A_n \Big].$$

Система (7) решалась приближенно методом редукции. Сходимость решения находилась при последовательном увеличении числа неизвестных и из сравнения решения усеченной системы (7) при $b = 0$, $\epsilon = 1$ с точным решением [4]. Для определения коэффициента отражения A_0 с точностью не хуже одного процента при рассмотренных значениях a/λ и b/a достаточно решать систему с пятнадцатью неизвестными. При решении проверялось удовлетворение соотношению энергетического баланса и выполнение асимптотической оценки для A_n .

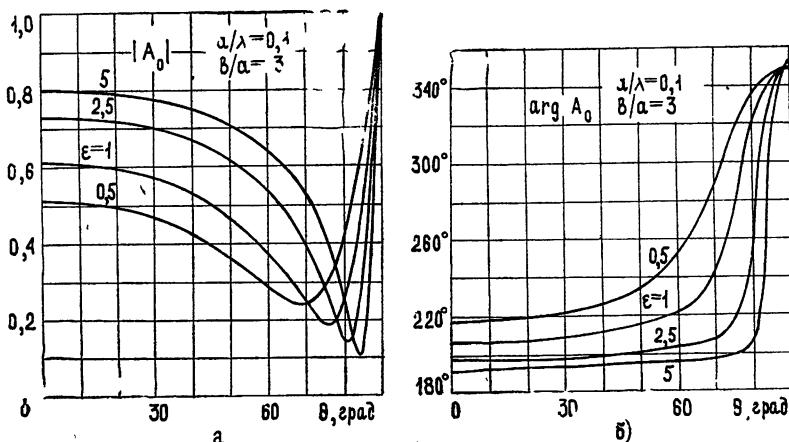


Рис. 2.

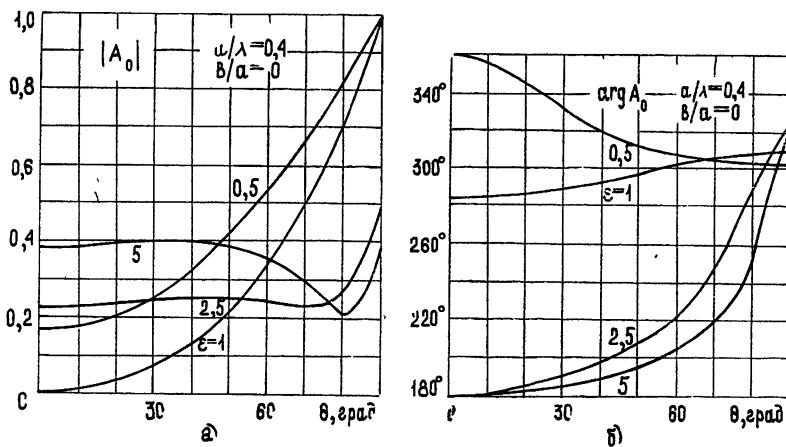


Рис. 3.

На рис. 2—5 представлены графически значения модуля а) и фазы, б) коэффициента отражения A_0 в функции угла θ , полученные при решении системы пятнадцатого порядка. Величина ϵ выбрана в качестве параметра и указана возле кривых. На каждом рисунке указаны также высота волновода (a/λ) и толщина стенок (b/a). На рис. 5 изломы кривых объясняются появлением второй распространяющейся плоской волны в свободном пространстве.

Из рисунков следует, что как увеличение толщины стенок волноводов, так и диэлектрическое заполнение приводят в основном к увеличению модуля коэффициента отражения. При $a/\lambda = 0,4$, $b/a = 0; 0,1$ и $\epsilon = 2,5; 5$ (рис. 3, 4) кривая, соответствующая модулю коэффициента отражения, имеет пологий характер при увеличении угла θ от нуля до некоторой большой величины. При $b = 0$ и $\theta = 0$ вычисленное значение коэффициента отражения совпадает с френелевским коэффициентом отражения плоской электромагнитной волны, нормально падающей на плоскую границу раздела двух сред: $A_0 = (1 - \sqrt{\epsilon})/(1 + \sqrt{\epsilon})$.

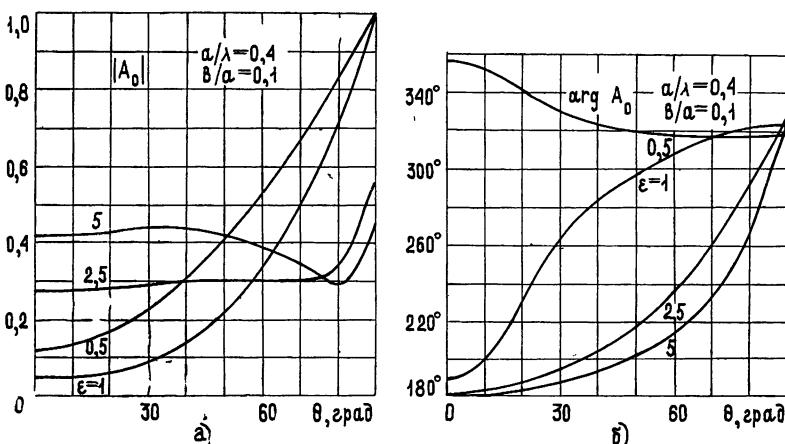


Рис. 4.

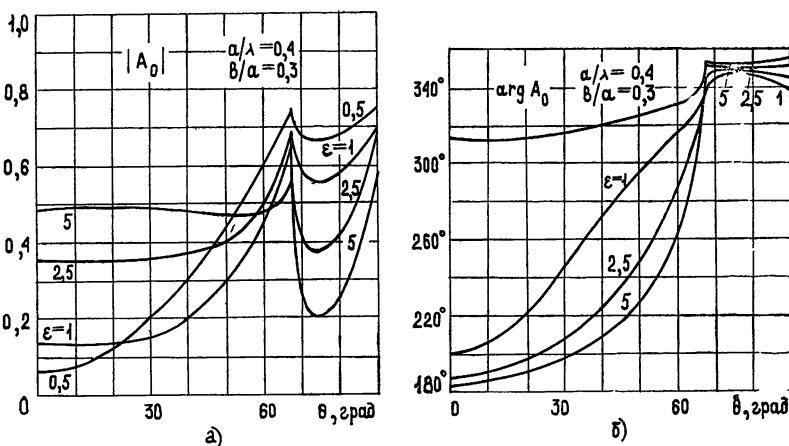


Рис. 5.

В заключение автор пользуется возможностью выразить глубокую благодарность Г. В. Воскресенскому за обсуждение результатов и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Амитей, В. Гаминдо, Ч. Ву, Теория и анализ фазированных антенных решеток, изд. Мир, М., 1974.
2. G. F. Van Blaricum, R. Mittra, Jr., IEEE Trans. Microwave Theory and Techn., 17, № 6, 302 (1969),

3. Б. Нобл, Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962.
4. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
20 ноября 1975 г.

DIFFRACTION OF A PERIODIC STRUCTURE FORMED BY CONDUCTING SEMIPLANES OF THE FINITE THICKNESS

S. M. Zhurav

We consider the problem of radiation of linearly phased TEM waves from an infinitely periodic structure formed by conducting finite-thickness semi-planes the space between which is filled with a uniform dielectric medium. The solution procedure is based on Wiener—Hopf method and separation of additional regions. The problem is reduced to one infinite system of linear equations which is approximately solved by the reduction method.

УДК 538.574.6

О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

B. I. Шевернев

Выписаны векторы магнитного и электрического полей дифрагированной волны. Проанализировано асимптотическое поведение решения. Данные расчета поля магнитной волны вблизи плоскости для различных степеней затухания сравнивались с результатами вычислений для дифракции однородной волны.

В настоящей заметке вновь обращено внимание на классическую задачу, решение которой дано Зоммерфельдом [1] для плоских однородных волн. В последнее время появилось несколько работ, касающихся особенностей распространения неоднородных волн [2, 3], которые появляются при полном внутреннем отражении, преломлении на поглощающем клине, рефракции в поглощающей среде [10]. Существуют предложения [11, 12] использовать зависимость направления вектора Пойнтинга плоской неоднородной волны от состояния поляризации для разложения пучка в пространственный спектр по этим состояниям. Возникает вопрос, не связан ли ожидаемый эффект с нарушением условий излучения. В связи с этим представляется интересным решение упомянутой в заглавии задачи.

Сформулируем задачу. Пусть на идеально проводящую полуплоскость Π ($z = 0, y \geq 0$) (рис. 1) в среде с $\epsilon = \mu = 1$ из полупространства $z < 0$ падает монохроматическая действительной частоты ω плоская неоднородная волна

$$E = E_0 e^{ik(r, t) - i\omega t},$$

$$H = H_0 e^{ik(r, t) - i\omega t},$$

где

$$\mathbf{l} = a \operatorname{ch} q + ib \operatorname{sh} q, \quad a^2 = b^2 = 1$$

и, как следует из уравнений Максвелла,

$$(a, b) = 0, \quad k = \omega/c.$$

Здесь a, b, q — действительные. Будем полагать, что $l_x = 0$. Тогда

$$\mathbf{l} = \{0, \cos \beta, \sin \beta\},$$

где $\beta = \alpha + iq$, $\alpha \in [0, \pi]$.

На плоскости Π магнитная волна возбуждает ток плотности

$$J_x = -\frac{c}{2\pi} H_{0y} e^{-ihy},$$

$$J_y = \frac{c}{2\pi} H_{0x} e^{-ihy},$$

где $h = -k \cos \beta$, $\operatorname{Im} h > 0$. Временной множитель здесь и далее опущен. Таким образом, задача сводится к задаче, решенной в [4], где предполагалось наличие $\operatorname{Im} h \geq 0$ из-за существования $\operatorname{Im} k \neq 0$. Можно убедиться, что приведенное в [4] для случая $\operatorname{Im} h = 0$ выражение поля через интегралы Френеля справедливо и при $\operatorname{Im} h \neq 0$.

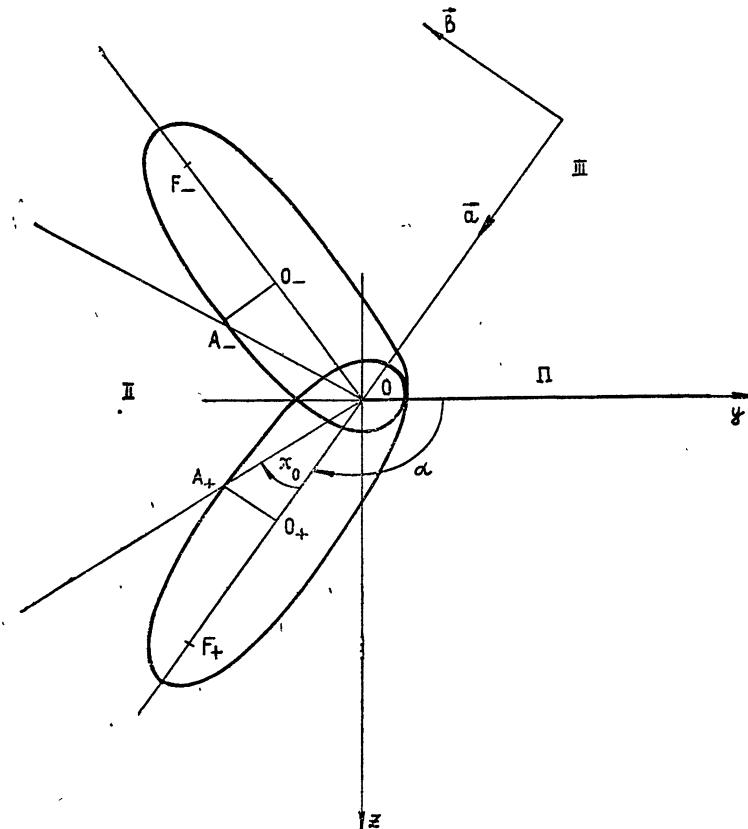


Рис. 1. Геометрия задачи и области различного поведения решения.

В результате нетрудно получить, что поле может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E &= e^{ikr} P E_0 / V^\pi, \\ H &= e^{ikr} Q H_0 / V^\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где P и Q — диагональные матрицы с элементами

$$\begin{aligned} p_{11} &= Q^-, \\ p_{22} &= Q^- + e^{i\pi/4} \frac{\sin \varphi/2}{\sqrt{2kr} \cos \beta/2}, \\ p_{33} &= Q^+ + e^{i\pi/4} \frac{2 \sin \beta/2 \cos \varphi/2}{\sqrt{2kr} \cos \beta}, \\ q_{11} &= Q^+, \\ q_{22} &= Q^+ - e^{i\pi/4} \frac{\cos \varphi/2}{\sqrt{2kr} \sin \beta/2}, \end{aligned}$$

$$q_{33} = Q^- + e^{i\pi/4} \frac{2\cos\beta/2 \sin\varphi/2}{\sqrt{2kr} \cos\beta}.$$

Здесь r и φ — полярные координаты точки наблюдения и

$$Q^\pm = F(-u_+) \pm F(u_-),$$

где

$$u_\pm = \sqrt{2kr} e^{-i\pi/4} \sin \frac{\varphi \mp \beta}{2},$$

а $F(z)$ — функция, исследованная в [5]. Она связана с интегралом вероятностей $\Phi(z)$ соотношением

$$F(z) = e^{z^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(z)],$$

которым удобно пользоваться для расчетов.

Понятно, что в оптике большой интерес представляет вопрос об асимптотике полученного решения при больших значениях $|u_\pm|$. Определим области, где возможно асимптотическое разложение, т. е. области, где

$$|u_\pm| = C \quad (2)$$

и $C \gg 1$. Уравнение (2) определяет эллипсы (рис. 1), вне которых возможно асимптотическое разложение. Отметим, что при $q=0$ они вырождаются в параболы. Пометив далее величины, относящиеся к аргументу u_+ значком (+), а к u_- — значком (—), укажем полярные координаты параметров эллипсов:

центры —

$$O_+ = \{d, \alpha\},$$

$$O_- = \{d, 2\pi - \alpha\};$$

фокусы, дальние от плоскости, —

$$F_+ = \{2d, \alpha\},$$

$$F_- = \{2d, 2\pi - \alpha\},$$

где $d = C^2/(k \sinh^2 q)$. Вторые фокусы эллипсов совпадают с началом координат. Эксцентриситет эллипсов равен $e_q = \tanh q$, а большая и меньшая полуоси соответственно равны

$$l_b = d \cosh q,$$

$$l_a = d \sinh q.$$

Точки пересечения эллипсов D_1 и D_2 имеют координаты

$$D_1 = \left\{ \frac{C^2}{k(\cosh q - \cos \alpha)}, 0 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ \frac{C^2}{k(\cosh q + \cos \alpha)}, \pi \right\}.$$

Известно [5], что асимптотическое разложение $F(z)$ различно в зависимости от знака $\operatorname{Re} z$. Лучи OA_+ и OA_- и Π делят плоскость YOZ на три части (I, II, III). Асимптотика в этих областях имеет вид

I. $\operatorname{Re} u_+ < 0, \operatorname{Re} u_- > 0,$

$$Q^- \sim -S_n^-/2\sqrt{\pi},$$

$$Q^+ \sim -S_n^+/2\sqrt{\pi};$$

II. $\operatorname{Re} u_+ > 0, \operatorname{Re} u_- > 0,$

$$Q^- \sim \sqrt{\pi} \exp(u_+^2) - S_n^-/2\sqrt{\pi},$$

$$Q^+ \sim \sqrt{\pi} \exp(u_-^2) - S_n^+/2\sqrt{\pi};$$

III. $\operatorname{Re} u_+ > 0, \operatorname{Re} u_- < 0,$

$$Q^- \sim \sqrt{\pi} (\exp(u_+^2) - \exp(u_-^2)) - S_n^-/2\sqrt{\pi},$$

$$Q^+ \sim \sqrt{\pi} (\exp(u_+^2) + \exp(u_-^2)) - S_n^+/2\sqrt{\pi}.$$

Выше обозначено $S_n^\pm = s_n(u_+) \mp s_n(u_-)$, где

$$s_n(u) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(\sqrt{2}u)^{2k+1}}.$$

По аналогии со случаем $q = 0$ назовем область I — областью тени, II — областью света, III — областью отражения. Это естественно, поскольку в двух последних случаях первые слагаемые в разложениях Q^\pm описывают падающую или отраженную от бесконечной плоскости волну.

Лучи $0A_+$ и $0A_-$ составляют с $0F_+$ и $0F_-$ угол

$$\chi_0 = 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{th} q/2). \quad (4)$$

Возможна ситуация, когда эти лучи совпадают и область света перестает существовать, а область тени непосредственно переходит в область отражения. Более того, при достаточно больших значениях α может случиться так, что область тени перейдет в область, которую назовем областью аномального света, и она, в свою очередь, переходит в область отражения. В области аномального света асимптотические разложения содержат слагаемое $\exp(u_-^2)$, что соответствует освещению волной, падающей из комплексного направления $(-\beta)$. Т. е. в этой области распространяется волна с комплексным вектором направления, симметричным ℓ относительно оси OY .

Нетрудно найти зависимость между α и q , при которых происходит исчезновение области света. Это случается, если

$$\alpha + \chi_0 = \pi$$

или при

$$\operatorname{th} q/2 = \operatorname{ctg} \alpha/2. \quad (5)$$

Из (5) сразу же следует, что описанные выше явления возможны лишь при $\alpha > \pi/2$. Если $\operatorname{th} q/2 > \operatorname{ctg} \alpha/2$, то в этом случае возникает область аномального света. Асимптотика в ней имеет вид

$$Q^- \sim -\sqrt{\pi} \exp(u_-^2) - S_n^-/2\sqrt{\pi},$$

$$Q^+ \sim \sqrt{\pi} \exp(u_-^2) - S_n^+/2\sqrt{\pi}.$$

Отметим, что все рассмотренные особенности поведения решения существуют лишь при $q \neq 0$.

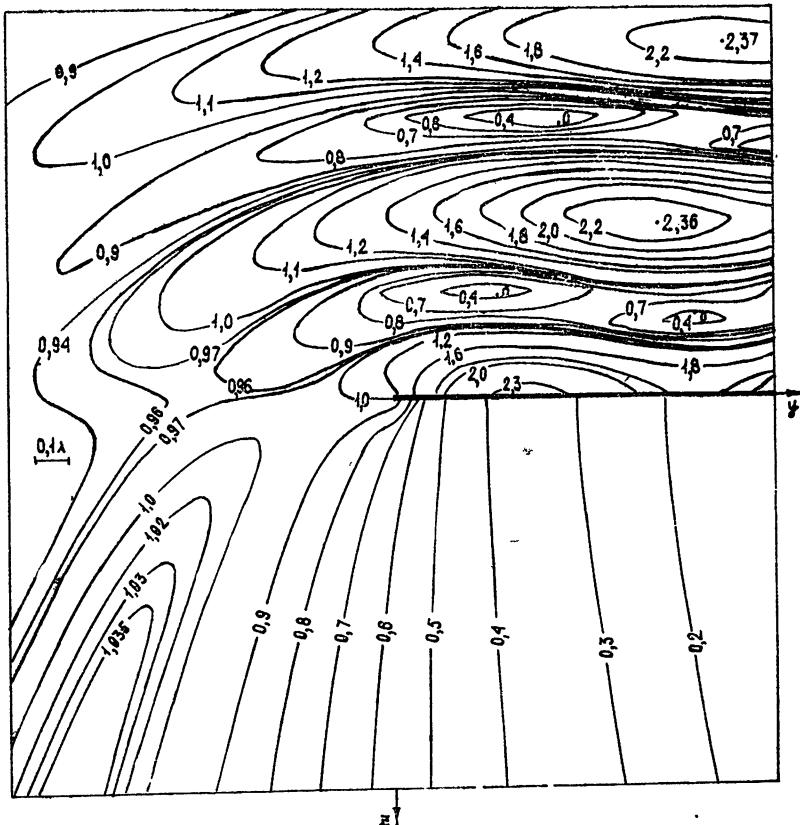


Рис. 2. Изолинии амплитуды H_x при дифракции H -поляризованной волны
 $c = q = 0,01$, $\lambda = 2\pi/k_z$.

Интересно сравнить поведение полей при различных значениях q с известными расчетами [6], выполненными для случая нормального падения однородной волны с $\mathbf{H}_0 = \{1, 0, 0\}$ (иллюстрации воспроизведены в [7]). На рис. 2—5 изображены изолинии амплитуд и фаз полей вблизи края плоскости при нормальном падении на плоскость неоднородной волны. Заметим, что при малом q поведение изолиний фазы и амплитуды поля примерно то же, что и при нулевом q . А при большем q оно меняется. Прежде всего, обращает на себя внимание увеличение числа узлов изолиний фазы. Примечательно увеличение градиента фазы вдоль оси OZ в окрестности значений y , где расположены узлы, и существенное уменьшение градиента между этими значениями величины y . Соответственно этому различию поведения фазы происходит сгущение или разрежение изолиний амплитуды.

Известно [6, 7], что усредненный вектор Пойнтинга в рассматриваемых случаях ортогонален изолиниям фазы. Нетрудно представить, что при малом q поведение линий среднего потока энергии то же, что и при $q = 0$. При $q = 1$ и $y < 0$ оно существенно отлично от предыдущего случая. Вид этих линий таков, будто бы край плоскости является источником. При нулевом q такой вывод справедлив лишь в областях, где возможно асимптотическое разложение поля [7].

Можно показать [8], что для плоской неоднородной волны направление вектора Пойнтинга не совпадает с направлением фазового вектора и зависит от состояния поляризации волны. Для падающей волны

в рассматриваемом случае это означает существование ненулевой x -компоненты вектора Пойнティングа, равной

$$S_0 = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{sh} 2q \operatorname{Im} (H_{0x} E_{0x}^*) e^{-2k\operatorname{sh} q(b, r)}.$$

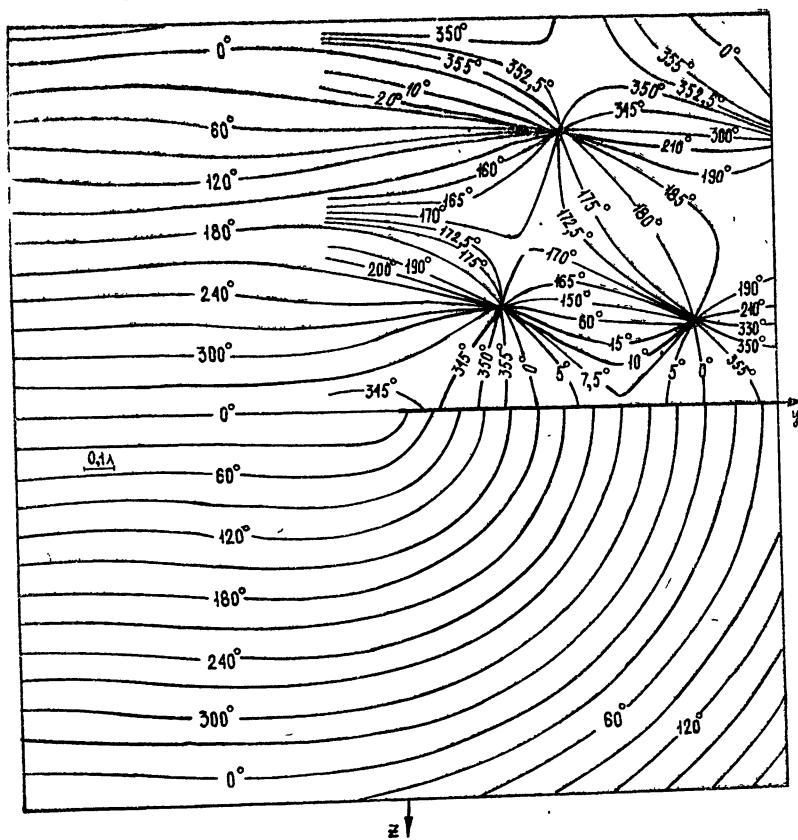


Рис. 3. Изолинии фазы H_x при дифракции H -поляризованной волны с $q = 0,01$, $\lambda = 2\pi/k$.

В дифрагированном поле в области света та же компонента может быть представлена в виде

$$S_x = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{8\pi}{c} S_0 + S_1 + S_2 \right).$$

Порядок второго слагаемого в сумме $\exp[-k \operatorname{sh} q(b, r)] |E_{0x}| |H_{0x}| / \sqrt{kr}$ а третьего — $(kr)^{-1} |E_{0x}| |H_{0x}|$. Поэтому ясно, что, во-первых, существование эффекта изменения направления вектора Пойнтинга при изменении состояния поляризации волны не связано с ростом волны на бесконечности, поскольку за плоскостью поле стремится к 0 при $y \rightarrow +\infty$, во-вторых, приближение плоских волн в дифрагированном поле можно использовать лишь только тогда, когда

$$\sqrt{kr} e^{-k\text{sh}q(b,r)} \gg 1. \quad (6)$$

Последнее замечание целиком относится и к рассмотренным ранее соотношениям (3). Это обстоятельство следует иметь в виду при описании

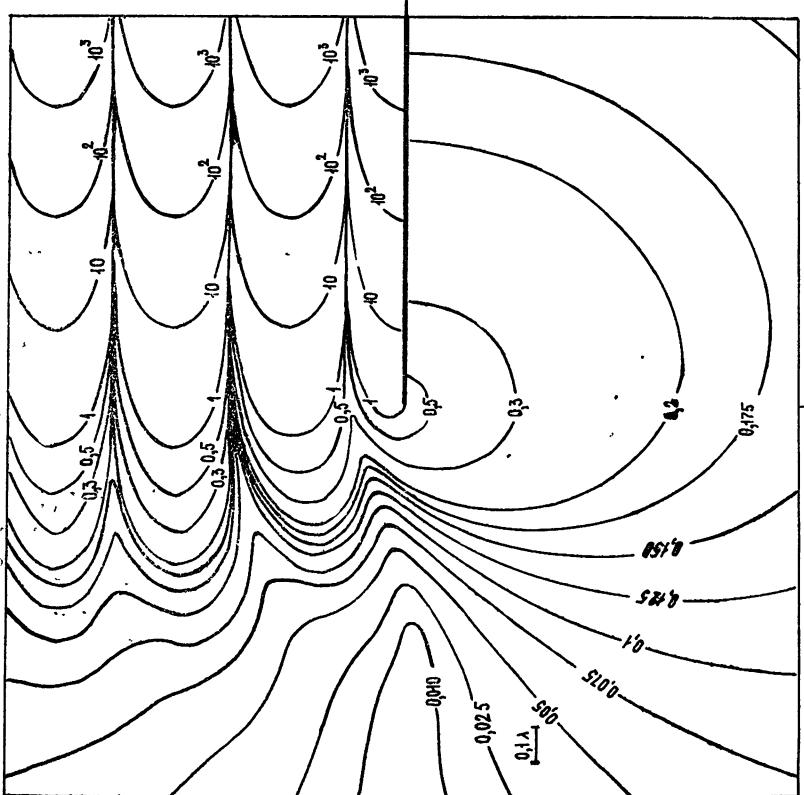


Рис. 4. Изолинии амплитуды H_x при дифракции H -поляризованной волны с $q = 1$, $\lambda = 2\pi/k$.

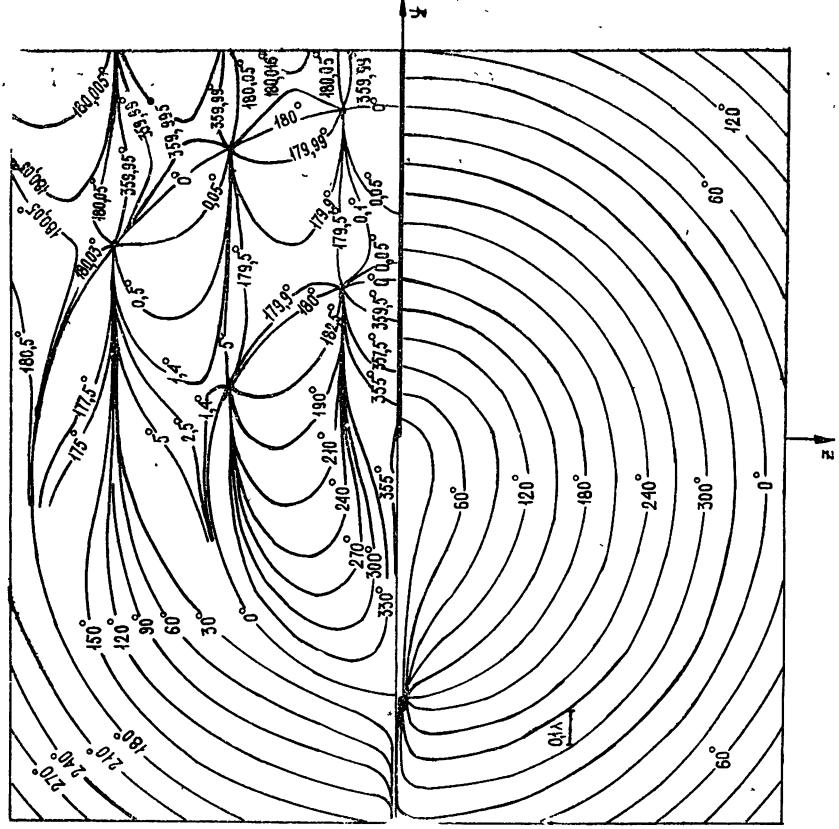


Рис. 5. Изолинии фазы H_x при дифракции H -поляризованной волны с $q = 1$, $\lambda = 2\pi/k$.

пучков волн неоднородной плоской волной. Выражение (6) связывает величину затухания поперек пучка с расстоянием, на котором этот пучок рассматривается. На существование подобного ограничения в лу-
чевой оптике обращено внимание в [9].

Автор весьма признателен Г. В. Розенбергу, который обратил внимание на эту задачу, и благодарен В. М. Пономареву за помощь в проведении расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, Math. Ann., **47**, 317 (1896).
2. O. Costade Beauregard, Com. Ren., **274B**, 433 (1972).
3. S. Choudhary and L. B. Felsen, IEEE Trans., AP-21, 827 (1973).
4. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966, Приложение А.
5. J. B. Rosser, Theory and Application of $\int_0^z e^{-x^2} dx$ and $\int_0^z e^{-p^2 y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx$, I: Methods of Computation, Brooklin, New York, 1948.
6. W. Braubek and G. Laukin, Optik, **9**, 174 (1952).
7. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
8. Ф. И. Федоров, Оптика анизотропных сред, изд. АН БССР, Минск, 1958.
9. Г. В. Розенберг, Оптика и спектроскопия, **28**, вып. 2, 392 (1970).
10. Г. В. Розенберг, И. Г. Мельникова, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **7**, № 10, 1053 (1971).
11. Г. В. Розенберг, Способ разложения оптического излучения в спектр по состояниям поляризации, М. Кл. G 01 d 1/14, Авт. свид. № 434259 от 7 марта 1974 г., Опубл. 30.06.1974, Бюллетень № 24, по заявке № 1814189 с приоритетом от 28 июля 1972 г.
12. Г. В. Розенберг, Оптический спин-спектрометр, М. Кл. G 01 n 21/42, Авт. свид. № 451000 от 26 июля 1974 г., Опубл. 25.11.1974, Бюллетень № 43, по заявке № 1837756 с приоритетом от 19 октября 1972 г.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
14 января 1976 г.

DIFFRACTION OF A PLANE INHOMOGENEOUS WAVE BY A SEMI-PLANE

V. I. Shevernev

The vectors of magnetic and electric fields of a diffracted wave are out-written. An asymptotic behaviour of the solution has been analysed. The estimated data on the magnetic wave field near the plane for different attenuations are compared with the results of calculations for diffraction of a homogeneous wave.

УДК 538.3

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ, РАСПРЕДЕЛЕННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

B. B. Борисов

Получено мультипольное разложение поля. Рассмотрено n -е слагаемое в общем случае, при быстром и медленном изменении тока. Обсуждаются примеры: поле вращающейся заряженной сферы и кругового контура тока.

Электромагнитное поле, создаваемое распределенным током, как правило, рассматривают при гармонической зависимости от времени. Общая схема построения решения — разложение по сферическим функциям. Конечный результат — представление составляющих векторов поля в виде ряда по мультипольным моментам источника [1, 2]. Так как возможности анализа непериодических электромагнитных полей по решению монохроматической задачи ограничены, то требуется располагать решением во временной области.

Обратное преобразование Лапласа позволяет обобщить результат, справедливый для одной спектральной компоненты на случай произвольной временной зависимости. Однако строить решение с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа (Фурье) сложно [3] и реально осуществимо только в простых случаях. Методы построения мультипольного разложения непосредственно во временных функциях предлагаются [4–7]. Именно подобный подход и соответствует физическим представлениям при исследовании непериодических волновых явлений (см. [8]). При рассмотрении электромагнитного поля токов произвольной временной зависимости, распределенных на поверхности сферы, будем следовать работе [7], предлагаемая в которой схема построения решения наиболее проста и формально обоснована.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Исходные уравнения задачи — система уравнений Максвелла. Границы раздела отсутствуют на конечном расстоянии от источников поля. Полагаем, что задача имеет азимутальную симметрию. В сферической системе координат с началом на оси симметрии решение задачи зависит от t , r и полярного угла ϑ . Ограничимся рассмотрением источников магнитного типа, когда вектор плотности тока $j = e_\varphi j_\varphi(r, t, \vartheta)$. Для составляющих вектора индукции магнитного поля B_ϑ , B_r и вектора напряженности электрического E_φ начальные данные нулевые. Используем гауссову систему единиц: $\epsilon = \mu = 1$.

Приходим к уравнениям

$$-\frac{\partial B_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta E_\varphi), \quad \frac{\partial B_\vartheta}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi), \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} B_r \right] = \frac{\partial E_\varphi}{\partial \tau} + \frac{4\pi}{c} j_\varphi.$$

Здесь $\tau = ct$, c — скорость света.

Момент включения распределенного тока примем за начало отсчета времени $t = 0$, тогда

$$j_\varphi = E_\varphi = B_r = B_\vartheta = 0 \quad (\tau < 0). \quad (2)$$

Введем однокомпонентный вектор $\pi = e_\tau \pi(r, \vartheta, \tau)$:

$$E = \text{rot} \frac{\partial \pi}{\partial \tau}, \quad B = -\text{rot rot} \pi. \quad (3)$$

Функцию $\pi(r, \vartheta, \tau)$ ищем в виде

$$\pi(r, \vartheta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(r, \tau) P_n(\cos \vartheta), \quad (4)$$

где $P_n(\cos \vartheta)$ — полиномы Лежандра.

Для определения $\pi_n(r, \tau)$ получим неоднородное уравнение, правая часть которого — коэффициенты разложения функции $-\frac{4\pi}{c} r j_\varphi$ в ряд по присоединенным полиномам Лежандра первого рода $P_n^1(\cos \vartheta)$:

$$-\frac{4\pi}{c} r j_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r, \tau) P_n^1(\cos \vartheta).$$

Уравнение для $\pi_n(r, \tau)$ сводится к уравнению Дарбу—Эйлера, и решение выражается через его функцию Римана [7]:

$$\begin{aligned} \pi_n(r, \tau) &= \frac{1}{2} \iint_D dr' d\tau' F_n(r', \tau') P_n(\cos \psi(r', \tau', r, \tau)), \\ \cos \psi(r', \tau', r, \tau) &= \frac{r'^2 + r^2 - (\tau - \tau')^2}{2rr'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Область интегрирования D на плоскости r', τ' ограничена характеристиками, проходящими через точку наблюдения r, τ , характеристикой $\tau' - r' = \tau - r$ и прямой $\tau' = 0$.

Электромагнитные поля аксиально-симметричного распределения источников магнитного типа произвольной временной зависимости определяются соотношениями (3), (4) и (5).

Рассмотрим составляющие векторов E, B при следующих предположениях:

- 1) ток распределен на сферической поверхности радиуса $r = r_0$;
- 2) составляющую вектора плотности тока можно представить в виде произведения углового множителя $f(\vartheta)$ на функцию, зависящую от τ, r , т. е.

$$j_\varphi = f(\vartheta) j(r, \tau) = f(\vartheta) \sigma(r, \tau) \delta(r - r_0).$$

Сделанные предположения справедливы в ряде прикладных задач [1, 2] и позволяют получить обозримые результаты для слагаемых мультипольного разложения. При этом

$$\pi_n(\tau, r) = -\frac{2\pi}{c} f(n) \Psi_n(\tau, r), \quad f(n) = \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} \int_{-1}^1 dx f(x) P_n^1(x).$$

Коэффициент $f(n)$ определяется только угловой зависимостью источника, $x = \cos \vartheta$.

Функция $\Psi_n(\tau, r)$ для точки наблюдения, расположенной вне сферы ($r > r_0$), равна:

$$\Psi_{n>r_0}(\tau, r) = r_0 \int_{\varphi}^{\tau-r+r_0} d\tau' \sigma(r_0, \tau') P_n(\cos \psi(r_0, r, \tau', \tau)),$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & (r - r_0 < \tau < r_0 + r), \\ \tau - (r + r_0) & (\tau > r_0 + r) \end{cases}; \quad (6)$$

для точки наблюдения внутри сферы ($r < r_0$):

$$\Psi_{n<r_0}(\tau, r) = r_0 \int_{\varphi}^{\tau+r-r_0} d\tau' \sigma(r_0, \tau') P_n(\cos \psi(r_0, r, \tau', \tau)),$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & (r_0 - r < \tau < r_0 + r), \\ \tau - (r + r_0) & (\tau > r_0 + r) \end{cases}. \quad (7)$$

Формулы мультипольного разложения составляющих векторов электромагнитного поля при сделанных предположениях:

$$E_{\varphi} = -\frac{2\pi}{c} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^1(\cos \vartheta) f(n) \frac{\partial \Psi_n(\tau, r, r_0)}{\partial \tau},$$

$$B_{\vartheta} = -\frac{2\pi}{c} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^1(\cos \vartheta) f(n) \frac{\partial \Psi_n(\tau, r, r_0)}{\partial r},$$

$$B_r = \frac{2\pi}{c} \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) P_n(\cos \vartheta) f(n) \Psi_n(\tau, r, r_0). \quad (8)$$

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ n -ГО СЛАГАЕМОГО МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Временное и пространственное поведение n -го мультиполя определяется функцией $\Psi_n(\tau, r)$ и коэффициентом $f(n)$. Согласно соотношениям (6), (7) приходим к различному представлению решения в области $r > r_0$ и $r < r_0$. Перейдем в (6) (точка наблюдения — вне сферы радиуса $r_0 < r$) к переменной $\tau_1 = \tau - (r - r_0)$, τ_1/c — время, отсчитываемое с момента прихода фронта электромагнитного сигнала в точку наблюдения. Получим, что каждое слагаемое мультипольного разложения формируется двумя расходящимися волнами, уравнение фронта которых $\tau_1 = 0$, $\tau_1 - 2r_0 = 0$. Для точки наблюдения внутри сферы, $r_0 > r$, функцию $\Psi_n(\tau, r)$ (7) можно представить в виде двух слагаемых, выделив вклад в формирование поля n -го мультиполя сходящейся волны, уравнение фронта которой $\tau_2 = \tau + r - r_0 = 0$, и расходящейся волны, уравнение фронта которой $\tau_3 = \tau - r - r_0 = 0$. Сходящаяся волна, пройдя через центр сферы $r = 0$, трансформируется в расходящуюся, что и приводит к появлению второго слагаемого при $\tau_2 > 2r_0$.

Из формул (6), (7) следует решение статической задачи. Пусть $r > r_0$ и с момента времени $\tau/c = \tau_0/c$ ток, распределенный на сфере, не изменяется и равен постоянной величине $u_0 = r_0 \sigma(r_0, \tau_0)$. Перейдем в формуле (6) при $\frac{\tau_1}{c} > \frac{\tau_{01} + 2r_0}{c}$ ($\tau_{01} = \tau_0 - (r - r_0)$) к переменной

интегрирования $\cos \psi(\tau', \tau, r_0, r)$. Сомножитель $\left(1 - 2 \frac{r_0}{r} \cos \psi + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, входящий в подынтегральное выражение,—производящая функция полиномов Лежандра. Используя ее разложение при $r > r_0$ и интегральные свойства $P_n(\cos \psi)$ [9], получим $\Psi_n(r, r_0) = u_0 \frac{2}{2n+1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n$, что и приводит к результату статической задачи. Аналогичное рассмотрение можно провести и при $r < r_0$.

Поле излучения соответствует для каждого мультиполя слагаемым, пропорциональным $1/r$, основным при $r \gg r_0$. При этом общие формулы упрощаются. Исходя из соотношения (6), найдем часть функций $\Psi_n(r, \tau)$, соответствующую полю излучения. Ограничимся симметричным относительно плоскости $\vartheta = \pi/2$ распределением тока. Тогда, обозначив $U(r, \tau) = r_0 \circ(r_0, \tau)$, $n = 2m - 1$,

$$E_\varphi \approx -\frac{2\pi}{c} \frac{1}{r} \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m-1}^1(\cos \vartheta) f(2m-1) \int_{\varphi}^{\tau_1} d\tau' P_{2m-1} \left\{ -\frac{1}{r_0} (\tau_0 - \tau' - r_0) \right\} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \tau'} U\left(r_0, \frac{\tau'}{c}\right),$$

$$E_\varphi \approx -B_\vartheta, \quad \varphi = \begin{cases} 0 & (0 < \tau_1 < 2r_0) \\ \tau_1 - 2r_0 & (\tau_1 > 2r_0) \end{cases}$$

Функции $\Psi_n(\tau, r)$ определяют зависимость от времени слагаемых мультипольного разложения. Пусть точка наблюдения находится вне сферы, на которой распределен ток. Замена переменной интегрирования приводит выражение для $\Psi_n(\tau, r)$ (6) к виду

$$\Psi_n(\tau, r) = \int_0^\varphi ds U\left(r_0, \frac{\tau_1 - s}{c}\right) P_n \left\{ -\frac{1}{r_0} \left[s - r_0 + \frac{(s - r_0)^2 - r_0^2}{2r} \right] \right\}, \\ \varphi = \begin{cases} \tau_1 & (0 < \tau_1 < 2r_0) \\ 2r_0 & (\tau_1 > 2r_0) \end{cases}. \quad (9)$$

Электромагнитное поле в момент τ_1/c согласно (9) зависит от изменения тока за интервал длительностью $2r_0/c$ ($\tau_1 > 2r_0$). Величина $2r_0/c$ равна максимальному запаздыванию сигналов, излученных в один момент времени. Изменения тока, мало меняющиеся за время $2r_0/c$, медленные.

Если плотность распределенного тока достигает постоянного значения за время многое меньшее $2r_0/c$, то для нескольких первых слагаемых мультипольного разложения $U\left(r_0, \frac{\tau}{c}\right)$ можно аппроксимировать функцией включения. Изменения тока быстрые для $n \sim 1$.

Временной масштаб мультиполей с большим номером ($n \gg 1$) оценим по значению первого нуля полинома $P_n(\cos \psi)$, $\cos \psi \approx 1 - \frac{\psi^2}{2}$. Используя асимптотическое разложение [10]

$$P_n(\cos \psi) = \sqrt{\frac{\psi}{\sin \psi}} J_0 \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi \right] + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя, $0 \leq \psi \leq \pi - \varepsilon$, получим уравнение для $\tau_1 = \tau_1^0$ (τ_1^0 — время, при котором $P_n(\cos \psi_0) = 0$), откуда следует

временной масштаб быстрого нарастания тока: $\tau_1^0 \approx -(r - r_0) + \sqrt{(r - r_0)^2 + \left(\frac{x_0}{n}\right)^2} rr_0$, $x_0 \approx 2,4$, $n \gg 1$. Величина τ_1^0 зависит от номера мультиполя, координат источника и точки наблюдения. При $r \rightarrow r_0$ $\tau_1^0 \approx \frac{x_0}{n} r_0$, при $r \gg r_0$ $\tau_1^0 \approx \frac{1}{2} r_0 \left(\frac{x_0}{n}\right)^2$, n — конечное число. Для оценки можно ограничиться значением первого нуля, что следует из разложения $J_0(z)$ при $n \psi \gg 1$.

Для точки наблюдения внутри сферы согласно (7)

$$\Psi_n(r, r) = \int_{\tau_1=2r}^{\tau_2} d\tau' U\left(r_0, \frac{\tau'}{c}\right) P_n \left\{ \frac{1}{r_0} \left[\tau_2 - \tau' + r_0 - \frac{(\tau_2 - \tau' + r_0)^2 - r_0^2}{2r} \right] \right\}. \quad (10)$$

Нижний предел интегрирования при $\tau_1 < 2r$ равен нулю. Таким образом, электромагнитное поле в момент τ/c определяется временной зависимостью тока за интервал, равный $2r/c$ ($\tau_2 > 2r$). Величина $2r/c$ — масштаб задачи, определяющий медленные изменения тока для всех n и быстрые при $n \sim 1$. Временной масштаб быстрого нарастания тока τ_2^0 при $n \gg 1$ — первый нуль функции $P_n(\cos \tau_2^0) = - (r_0 - r) + \sqrt{(x_0 - r)^2 + \left(\frac{x_0}{n}\right)^2} rr_0$. При $r \rightarrow r_0$ $\tau_2^0 \rightarrow \frac{x_0}{n} r_0$, при $r \rightarrow 0$ $\tau_2^0 \rightarrow 0$ ($n \gg 1$ — конечное число). Всегда найдется такое расстояние от центра сферы, на котором рассматривается зависимость от времени — медленный процесс.

Полученные временные масштабы определяют возможность перехода к упрощенным выражениям для соответствующих векторов поля.

Пусть функция $U\left(\frac{\tau}{c}\right) = r_0 \delta(r_0, \tau)$ за промежуток времени, много меньший характерного масштаба задачи, достигает постоянного значения u_0 . Представляя временную зависимость тока в виде $U\left(\frac{\tau}{c}\right) = h(\tau) u_0(r_0)$ ($h(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$), согласно формуле (6) получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_n(\tau_1, r) = \begin{cases} u_0 P_n \left\{ -\frac{1}{r_0} \left[r_1 - r_0 + \frac{(\tau_1 - r_0)^2 - r_0^2}{2r} \right] \right\} & (0 < \tau_1 < 2r_0) \\ 0 & (\tau_1 > 2r_0) \end{cases}. \quad (11)$$

Составляющая вектора напряженности электрического поля n -го мультиполя при $r > r_0$ — $n + 1$ -полярный импульс длительностью $2r_0/c$. Значения E_φ на фронте $\tau_1 = 0$ и $\tau_1 = 2r_0$ равны по величине, но отличаются знаком. При $\tau_1 < 2r_0$ составляющие вектора магнитной индукции B меняются со временем. После окончания переходного процесса ($\tau_1 > 2r_0$) устанавливается статическое магнитное поле.

Для точки наблюдения внутри сферы ($r_0 > r$)

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau} = \begin{cases} u_0 P_n \left\{ \frac{1}{r_0} \left[\tau_2 + r_0 - \frac{(\tau_2 + r_0)^2 - r_0^2}{2r} \right] \right\} & (0 < \tau_2 < r) \\ 0 & (\tau_2 > r) \end{cases}. \quad (12)$$

Производная $\frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau}$ отлична от нуля на интервале $2r$, и, следовательно,

длительность импульса E_0 определяется координатой точки наблюдения. При $\tau_2 > 2r$ устанавливается статическое магнитное поле.

Для получения приближенных выражений при медленных временных изменениях плотности распределенных токов следует рассматривать слагаемые n -го мультиполя, пропорциональные различным степеням $1/r$, отдельно. Действительно, рассмотрим $\Psi_n(\tau, r)$ при $\tau_1 > 2r_0, r > r_0$.

Пусть $U\left(r_0, \frac{\tau}{c}\right)$ — медленно меняющаяся на интервале $2r_0/c$ функция.

Разложим ее в ряд Тейлора. Ограничивааясь двумя слагаемыми разложения, после вычисления получим

$$\Psi_n \approx \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{2}{n+1} r_0 \left\{ U\left(r_0, \frac{\tau_1}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau_1} U\left(r_0, \frac{\tau_1}{c}\right) (r - r_0) + \dots \right\}, \quad U(r_0, 0) = 0.$$

Таким образом, при любом малом $\frac{\partial}{\partial \tau_1} U\left(\frac{\tau_1}{c}\right)$ найдется такое расстояние от начала координат (центра сферы r_0), что второе слагаемое разложения будет больше первого. Результат связан с тем, что меняющийся со временем ток приводит к появлению в формуле для составляющих поля n -го мультиполя слагаемых, пропорциональных $1/r^k$ ($k < n$), и, в частности, поля излучения для E_φ, B_ϑ .

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть сфера, полный заряд которой Q равномерно распределен на поверхности, вращается с угловой скоростью, произвольно зависящей от времени $\Omega(t)$. Радиус сферы равен b . Начало координат совместим с центром сферы, тогда $r_0 = b$ и вектор плотности тока будет

$$\mathbf{j} = e_\varphi \frac{Q}{4\pi r} \Omega \left(\frac{\tau}{c} \right) \delta(r - b) \sin \vartheta.$$

В силу равномерного распределения заряда в формулах (8) отличны от нуля только слагаемые с номером $n = 1$. Источник поля — магнитный диполь. Найдем явное выражение электромагнитного поля, его зависимость от угловой скорости и радиуса сферы.

Для точки наблюдения вне заряженной поверхности ($r > b$), переходя к переменной $\tau_1 = \tau - r + b$ и выделяя слагаемые, пропорциональные обратным степеням r , согласно (6), (8), получим

$$E_{\varphi} = (-1) \frac{Q \sin \vartheta}{2bc} \left\{ b \left[\Omega \left(\frac{\tau_1}{c} \right) + \begin{cases} 0 & (\tau_1 < 2b) \\ \Omega \left(\frac{\tau_1 - 2b}{c} \right) & (\tau_1 > 2b) \end{cases} \right] - \int_{\varphi}^{\tau_1} d\tau' \Omega \left(\frac{\tau'}{c} \right) - \frac{1}{r} \int_{\varphi}^{\tau_1} d\tau' \Omega \left(\frac{\tau'}{c} \right) (\tau_1 - b + \tau') \right\}, \quad \varphi = \begin{cases} 0 & (0 < \tau_1 < 2b) \\ \tau_1 - 2b & (\tau_1 > 2b) \end{cases}$$

Дипольный момент системы $M(\tau_1) =$

$$M(\tau_1) = \frac{Q}{2bc} \int_{\varphi}^{\tau_1} d\tau' \Omega \left(\frac{\tau'}{c} \right) \left[b(\tau_1 - \tau') - \frac{(\tau' - \tau_1)^2}{2} \right].$$

Здесь сохранено обозначение τ_1 .

Если угловая скорость достигает постоянной величины Ω_0 за интер-

валом времени, много меньшим характерного масштаба $2b/c$, справедливы простые формулы:

$$M(\tau_1) = \frac{Q\Omega_0}{2bc} \begin{cases} \frac{\tau_1^2}{2} \left(b - \frac{\tau_1}{3} \right) & (0 < \tau_1 < 2b) \\ \frac{2}{3} b^3 & (\tau_1 > 2b) \end{cases}$$

$$E_\varphi = \begin{cases} \frac{Q\Omega_0 \sin \vartheta}{2rbc} \left[(\tau_1 - b) + \frac{(\tau_1 - b)^2 - b^2}{2r} \right] & (0 < \tau_1 < 2b) \\ 0 & (\tau_1 > 2b) \end{cases}$$

Составляющие вектора магнитной индукции определяются обычным образом по функции $M(\tau_1)$. Поле излучения — симметричный двухполлярный импульс с резкими фронтами. При $\tau_1 = b$ поле излучения меняет знак.

Для точки наблюдения, расположенной внутри заряженной сферы, структура поля сложнее. Выделяя слагаемые, пропорциональные обратным степеням r , получим (см. (7), (8)), что электромагнитное поле внутри равномерно заряженной сферической поверхности — суперпозиция полей, создаваемых диполем — с током с моментом

$$M_1(\tau_2) = (-1) \frac{Q}{2bc} \int_0^{\tau_2} d\tau' \Omega \left(\frac{\tau'}{c} \right) \left[b(\tau_2 - \tau') + \frac{(\tau_2 - \tau')^2}{2} \right]$$

и диполем — источником, момент которого

$$M_2(\tau_3) = \frac{Q}{2bc} \int_0^{\tau_3} d\tau' \Omega \left(\frac{\tau'}{c} \right) \left[b(\tau_3 - \tau') + \frac{(\tau_3 - \tau')^2}{2} \right].$$

Для удобства вычислений составляющих поля M_1 и M_2 записаны как функции $\tau_2 = \tau + r - b$ и $\tau_3 = \tau - r - b$.

При быстром нарастании угловой скорости вращения составляющая вектора напряженности электрического поля согласно (8), (12) :

$$E_\varphi = \begin{cases} -\frac{Q\Omega_0}{2bcr} \sin \vartheta \left[\tau_2 + b - \frac{1}{r} \left(\frac{\tau_2^2}{2} + \tau_2 b \right) \right] & (0 < \tau_2 < 2r) \\ 0 & (\tau_2 > 2r) \end{cases}$$

Для полного описания поля, создаваемого заряженной сферической поверхностью при $r > b$ к составляющим $E_\varphi, B_\vartheta, B_r$, следует добавить радиальное электростатическое поле заряда Q , расположенного в центре сферы.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ КРУГОВОГО КОНТУРА ТОКА

Бесконечно тонкое кольцо тока радиуса d лежит в плоскости, перпендикулярной оси $\vartheta = 0$. Координаты кольца $r = r_0, \vartheta = \vartheta_0$. Вектор плотности тока

$$\mathbf{j} = e_\varphi U \left(\frac{\tau}{c} \right) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(r - r_0) \frac{1}{r_0}$$

Функция $U \left(\frac{\tau}{c} \right)$ определяется временной зависимостью и амплитудой полного тока.

Угловой множитель $f(\vartheta) = \delta(\vartheta - \vartheta_0)$. Все слагаемые мультипольного разложения ($n \geq 1$) отличны от нуля: $f(n) = \frac{n + 1/2}{n(n+1)} \sin \vartheta_0 P_n^1(\cos \vartheta_0)$.

Закономерности поведения $\Psi_n(\tau, r)$ для n -го слагаемого мультипольного разложения рассмотрены в разд. 2. Остановимся на некоторых особенностях электромагнитного поля кругового тока.

Используя общие формулы решения задачи (8), получим

$$\begin{aligned} E_\varphi &= -\frac{2\pi}{c} \frac{d}{r_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n^1(\cos \vartheta_0) P_n^1(\cos \vartheta) \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_n(\tau, r, r_0), \\ B_\vartheta &= -\frac{2\pi}{c} \frac{d}{r_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{2}}{n(n+1)} P_n^1(\cos \vartheta_0) P_n^1(\cos \vartheta) \frac{\partial}{\partial r} \Psi_n(\tau, r, r_0), \\ B_r &= \frac{2\pi}{c} \frac{d}{r_0 r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n^1(\cos \vartheta_0) P_n(\cos \vartheta) \Psi_n(\tau, r, r_0). \end{aligned} \quad (13)$$

В формулах (6), (7), (9) и (10) для функции $\Psi_n(\tau, r, r_0)$ следует положить $r_0 \sigma(r_0, \tau) = U(\tau/c, r_0) = U(\tau/c)$.

Рассмотрим решение задачи (13). При замене $r \rightarrow r_0$, $r_0 \rightarrow r$ аргумент полинома $P_n(\cos \psi)$, входящего в подынтегральное выражение формул (6), (7), не меняется, а пределы интегрирования соотношения (6) переходят в пределы формулы (7) (и соответственно (7) — в (6)). Так как функция $U(\tau/c)$ зависит только от времени, то выражения для $\Psi_n(\tau, r, r_0)$ и $\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_n$, справедливые при $r > r_0$, после замены приводят к формулам, определяющим решение в области $r < r_0$ и наоборот.

Таким образом, если для данной временной зависимости полного тока нашли составляющую вектора напряженности электрического поля E_φ при $r > r_0$, то решение, справедливое внутри сферы ($r < r_0$), получим после замены индекса (0): $r_0 \rightarrow r$ и т. д. Для составляющей вектора магнитной индукции B_r верно аналогичное правило, однако при этом следует фиксировать множитель $1/r$. Преобразование следует проводить в решении, записанном в переменных r , τ .

Для n -го слагаемого мультипольного разложения составляющей вектора E выполняется условие взаимности: напряженность поля, создаваемого кольцом с током радиуса d , расположенным на сфере $r_0 = d/\sin \vartheta_0$, для точки наблюдения r , ϑ ($r > r_0$) — есть решение для кругового контура радиуса d , на сфере радиуса $r = d/\sin \vartheta$ — для точки наблюдения r_0 , ϑ_0 при $r_0 < r$.

Для источника поля — кругового контура тока — выбор r_0 определяется требованиями к слагаемым мультипольного разложения. При фиксированном расположении контура и точке наблюдения можно представить решение (13) в виде разложения на систему расходящихся ($r > r_0$) или сходящихся и расходящихся ($r < r_0$) волн. Исключение составляет точка наблюдения, лежащая в плоскости кольца. В статической задаче для лучшей сходимости ряда по обратным степеням r ($r > r_0$) контур с током помещают на сфере $r_0 = d$ [1, 2]. Для решения, зависящего от времени, выбор r_0 определяет также временной масштаб задачи и, тем самым, возможность приближенного описания слагаемых разложений.

Рассмотрим поле излучения кругового тока, расположенного на плоскости $\vartheta = \pi/2$. Тогда $r_0 = d$, $P_n^1(0) = 0$ для четных n . Представим временную зависимость полного тока в виде $U\left(\frac{\tau}{c}\right) = h(\tau) u\left(\frac{\tau}{c}\right)$, $u\left(\frac{\tau}{c}\right)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Для поля излучения n -го мультиполя, согласно формуле разд. 2, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau_1} &= (-1) \int_0^\varphi ds P_n \left\{ -\frac{1}{d} (s-d) \right\} \frac{\partial}{\partial s} u\left(\frac{\tau_1-s}{c}\right) + \\ &+ \begin{cases} u(0) P_n \left\{ \frac{d-\tau_1}{d} \right\} & (0 < \tau_1 < 2d) \\ 0 & (\tau_1 > 2d) \end{cases} \end{aligned}$$

Верхний предел интегрирования $\varphi = \begin{cases} \tau_1 & (0 < \tau_1 < 2d) \\ 2d & (\tau_1 > 2d) \end{cases}$.

Пусть $u\left(\frac{\tau}{c}\right)$ медленно меняется на промежутке $0, 2d$. Разложим $\frac{\partial}{\partial s} u\left(\frac{\tau-s}{c}\right)$ в ряд Тейлора. Вне переходной области ($\tau_1 > 2d$), ограничиваясь первым слагаемым разложения, отличным от нуля, получим

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial \tau_1} = \frac{n!}{(2n+1)!} (2d)^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \tau_1^n} u\left(\frac{\tau_1}{c}\right), \quad (14)$$

что совместно с формулами (13) определяет поле излучения кругового контура. Единого приближенного выражения для поля излучения при быстром нарастании тока получить нельзя, так как временной масштаб зависит от номера мультиполя.

Соотношение (14) справедливо для мультиполя с любым нечетным номером после замены $d \rightarrow r_0$ при медленном изменении тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1960.
2. Дж. Джексон, Классическая электродинамика, изд. Мир, М., 1965.
3. Кеннет D. Гранц, J. Math. Phys., 7, № 4, 634 (1966).
4. Roger E. Clapp, Luc Huang and H. Tung Li, J. Math. Phys., 11, № 1, 9 (1970).
5. Roger E. Clapp and Luc Huang, J. Math. Phys., 11, № 1, 14 (1970).
6. Roger E. Clapp, Luc Huang and H. Tung Li, J. Math. Phys., 1, 16 (1970).
7. А. В. Манакова, И. И. Кононов, Проблемы дифракции и распространения волн, 12, изд. ЛГУ, 1973, стр. 208.
8. А. А. Харкевич, Неуставновившиеся волновые явления, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
9. И. С. Градштейн, М. И. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.
10. Г. Сегё, Ортогональные многочлены, Физматгиз, М., 1962, стр. 203.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
15 июля 1975 г.

ELECTROMAGNETIC FIELD OF THE CURRENT OF ARBITRARY TIME DEPENDENCE DISTRIBUTED ON THE SPHERE SURFACE

V. V. Borisov

The multipole field expansion is obtained. The addend is considered in a general case, at rapid and slow change in the current. Examples are discussed: the field of rotating charged sphere and circular contour of the current.

УДК 621.396.67

СИНТЕЗ НЕСИММЕТРИЧНО ВОЗБУЖДЕННОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

A. F. Чаплин, B. A. Лобачев

Рассматривается задача синтеза импедансной антенны в виде полосы по образующей идеально проводящего цилиндра. Возбуждение производится кольцевой щелью с бегущей волной тока. Реализация поверхностного импеданса предполагается в виде ребристой структуры малого периода, что требует условия реактивности. Это условие записывается в виде интегрального уравнения в свертках, которое решается численно путем сведения его к переопределенной системе квадратных уравнений и использования численных методов оптимизации. Для выполнения условия реактивности используются свободные высшие гармоники вторичного поля. Задача доведена до численных результатов, которые показывают распределение поверхностного импеданса для получения заданной диаграммы направленности.

В настоящей работе решается задача синтеза цилиндрической антенны в виде полосы импеданса, расположенной по образующей идеально проводящего кругового цилиндра. Возбуждение антенны производится кольцом магнитного тока с первой гармоникой, т. е. щелью с бегущей волной тока. По заданному полю в дальней зоне находится распределение поверхностного импеданса, который подчиняется условию реактивности. Это условие приводит к нелинейному интегральному уравнению в свертках. Интегральное уравнение решается приближенно, путем сведения его к переопределенной нелинейной системе уравнений и использования численных методов минимизации невязок такой системы.

Возбуждающий сторонний ток для системы, представленной на рис. 1, можно записать в следующем виде:

$$j^{ct} = j_{\varphi}^{m, ct} = I_0^m \delta(z' - 0) \delta(r' - a) e^{-i\varphi'}, \quad (1)$$

где I_0^m — амплитуда тока, δ — дельта-функция.

Импедансные граничные условия определяют связь между тангенциальными составляющими электрического E_{tg} - и магнитного H_{tg} -полей на некоторой поверхности. Такая связь может быть установлена для любой поверхности, и импеданс Z в общем случае будет тензорной величиной [1]. Для цилиндрической системы координат при $r = a$

$$E_{\varphi} = -Z_{\varphi\varphi} H_z + Z_{\varphi z} H_{\varphi}, \quad (2)$$

$$E_z = -Z_{z\varphi} H_z + Z_{zz} H_{\varphi}.$$

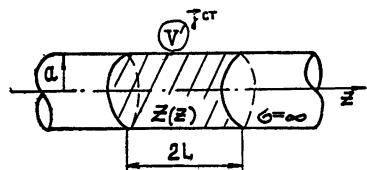


Рис. 1.

Мы будем считать, что импедансная структура реализуется в виде ребристого цилиндра, причем ширина канавок много меньше длины

волны. Пусть глубина канавок меняется только вдоль координаты z , а по периметру цилиндра остается постоянной. Это соответствует изменению импеданса только по одной координате z . Такая импедансная поверхность будет анизотропной [2, 3], для которой $Z_{\varphi z} = Z_{z\varphi} = 0$, также $E_\varphi = 0$ при $r = a$. Отсюда из формул (2) следует, что $Z_{\varphi\varphi} = 0$, т. е. ребристый цилиндр для магнитных волн представляет собой идеально проводящую структуру. Поэтому импедансные граничные условия на отрезке $-L \leq z \leq L$ запишем следующим образом:

$$Z(z) = \frac{E_z(z)}{H_\varphi(z)} \Big|_{r=a}, \quad (3)$$

а вне этого интервала импеданс и $E_z(z)$ равны нулю. Для электрического и магнитного полей воспользуемся соотношениями из [1], где поля записаны в виде интеграла Фурье и представлены суммой первичного и вторичного полей:

$$Z(z)|_{r=a} = \frac{i}{\omega e} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [F(h)J_1(\nu a) + f(h)H_1^{(2)}(\nu a)] e^{-ihz} dh}{\int_{-\infty}^{\infty} [F(h)J'_1(\nu a) + f(h)H_1^{(2)'}(\nu a)] \left[1 - \left(\frac{h}{\nu ka} \right)^2 \left(\frac{H_1^{(2)}(\nu a)}{H_1^{(2)'}(\nu a)} \right)^2 \right] \frac{e^{-ihz} dh}{\nu}}. \quad (4)$$

Зависимость по угловой координате φ в числителе и знаменателе дроби (4) одинакова и сокращается. В формуле (4) $F(h)$ — спектральная плотность первичного электрического поля — поля источника, $\nu = -i\sqrt{h^2 - k^2}$, $k = 2\pi/\lambda$, $f(h)$ — спектральная плотность вторичного электрического поля. Если выделить действительные и мнимые части в подынтегральных выражениях дроби (4):

$$Z(z) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [a(h) + ib(h)] e^{-ihz} dh}{\int_{-\infty}^{\infty} [c(h) + id(h)] e^{-ihz} dh},$$

то условие реактивности импеданса с помощью теоремы о свертке для преобразования Фурье записывается в четном случае так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [a(h - \tau)c(\tau) + b(h - \tau)d(\tau)] d\tau = 0. \quad (5)$$

Для выполнения условия реактивности воспользуемся тем, что диаграмма направленности антенны формируется только низшими гармониками поля. Следовательно, задавая диаграмму направленности, тем самым определяем спектральную плотность вторичного поля $f(h)$ при $|h| \leq k$. Оставшиеся свободными высшие гармоники $f(h)$, $|h| > k$ могут быть использованы для выполнения условия (5). Относительно высших гармоник вторичного поля условие реактивности (5) представляет собой интегральное уравнение второго порядка в свертках. Из-за невозможности аналитического решения такого уравнения был использован численный подход для отыскания решения. Для перехода к численному решению можно использовать дискретное преобразование Фурье. Шаг такого преобразования Δh определяет соотношение $\Delta h \leq \pi/L$, если диаграмма направленности аппроксимируется рядом Котельникова.

Отсюда получаем минимально необходимое число низших гармоник для описания поля в дальней зоне: $N \geq k/\Delta h$. Ограничим число учитываемых высших гармоник поля величиной M , т. е. общее число рассматриваемых гармоник будет $N + M$. Это приводит к тому, что ограничивается область изменения параметра h . Как показали расчеты, для вычисления с удовлетворительной степенью точности вполне достаточен интервал значений $|h| \leq 2k$. Вне этого интервала функции Макдональда, в которые перейдут функции Ганкеля в выражении (4), убывают настолько, что делают вклад от более высоких номеров гармоник вторичного поля незначительным. Переход к дискрету на ограниченном отрезке дает ограниченные последовательности: $a(h_n)$, $b(h_n)$, $c(h_n)$, $d(h_n)$, $n = 1, \dots, N + M$. Свертка этих последовательностей в уравнении (5) при условии четности спектральной плотности вторичного поля приводит к новой последовательности длиной $2(N + M) + 1$. Относительно высших гармоник спектральной плотности вторичного поля эта последовательность представляет собой переопределенную систему квадратных уравнений, где на $2(N + M) + 1$ уравнение приходится N неизвестных (действительные и мнимые части гармоник $f(h)$ при $k < h \leq 2k$). Для отыскания решения системы строится положительно определенный функционал вида

$$F = \sum_{n=1}^{2(N+M)+1} B_n^2, \quad (6)$$

где B_n — невязка n -го уравнения. Минимизация функционала F на множестве значений высших гармоник спектральной плотности вторичного поля производилась алгоритмами Полака—Рибьера, Флетчера—Паузэлла [4], а также алгоритмом Бремерманна [5]. Практические расчеты показали, что наилучшие результаты по скорости сходимости и затратам машинного времени дает алгоритм Бремерманна.

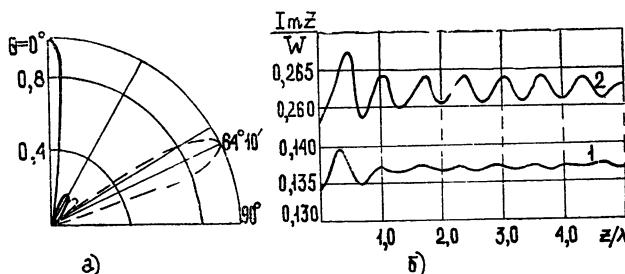


Рис. 2.

На рис. 2 а приведены синтезируемые воронкообразные диаграммы направленности (сплошная линия — $2\theta_{0.5} = 5^\circ$, штриховая — $2\theta_{0.5} = 12^\circ$), а на рис. 2 б — реализующие их распределения чисто реактивного импеданса при $a = \lambda$, $\lambda = 3,2$ см. Низшие гармоники вторичного поля заданы таким образом, что результирующая диаграмма направленности образована одной гармоникой. Поэтому раскрыв воронки и ширина основного лепестка определяются как номером отличной от нуля низшей гармоники, так и общим числом низших гармоник, т. е. размером импедансной полосы. Для случаев, приведенных на рис. 2, $N+M=20$, т. е. $2L=10\lambda$. Показателем выполнения условия реактивности может служить нормированная величина действительной части импеданса $|\operatorname{Re} Z|/W$, где $W = 120\pi$ [Ом]. Для серии расчетов, проведенных при $N+M=8$ или 20,

ее значение не превышало 10^{-4} , что дает десятые доли ома, по порядку равные потерям при физическом исполнении антенны. В силу четности задачи на рис. 2 приведены половина распределения импеданса и четвертая часть диаграммы направленности в сечении $\varphi = 0$.

В заключение следует отметить, что предложенный метод синтеза может быть использован и для других источников возбуждения и типов антенн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М.—Л., 1967.
2. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1966.
3. С. Рамо, Дж. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, ОГИЗ, М.—Л., 1948.
4. Э. Полак, Численные методы оптимизации (единий подход), изд. Мир, М., 1974.
5. Н. Времепапп, Math. Biosciences, 9, complete, 1 (1970).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
15 декабря 1975 г.

THE SYNTHESIS OF AN ASYMMETRICALLY EXCITED IMPEDANCE ANTENNA

A. F. Chaplin, V. A. Lobachev

The problem of synthesis of an impedance antenna in the form of a strip on the envelope of a perfectly conducting cylinder is considered. The excitation is made by a ring slot with a traveling current wave. The realization of the surface impedance is suggested in the form of a ribbed small-period structure that is needed for reactance conditions. This condition is written as the integral convolution equation which is solved numerically by reducing it to re-determined system of quadratic equations and using numerical optimization methods. To satisfy the reactance condition, free highest harmonics of the secondary field are used. The problem is solved up to numerical results which show the surface impedance distribution to obtain the given radiation pattern.

УДК 621.385.6

О МНОГОМОДОВЫХ РЕЖИМАХ В МЦР-ГЕНЕРАТОРАХ

Г. С. Нусинович

Существенное неоднородное уширение линии активного вещества в МЦР и других СВЧ приборах, использующих индуцированное излучение возбужденных осцилляторов с квазиэквидистантным энергетическим спектром, невозможно. В МЦР-генераторе с широким электронным потоком многомодовые колебания могут устанавливаться вследствие пространственной неоднородности высокочастотных сил, действующих на электроны со стороны каждой моды. КПД многомодового режима в таком генераторе превышает КПД одной моды.

1. Взаимодействие мод в электронных СВЧ генераторах является следствием нелинейных свойств электронного потока. При «сильной» связи между модами устанавливаются одномодовые колебания, при «слабой» — многомодовый режим [1, 2]. Обычно интерес представляют генераторы одномодовых колебаний, однако для ряда прикладных задач спектральный состав СВЧ излучения может быть несущественным — требуется генератор, обеспечивающий необходимый интегральный уровень СВЧ мощности в определенном диапазоне частот. Спектр собственных частот системы в этом случае может быть сколь угодно густым, и, следовательно, ее размеры могут существенно превышать размеры одномодового генератора. Но для того, чтобы устанавливался многомодовый режим вместо нежелательной генерации какой-либо одной мало-мощной моды, возбудившейся при малых токах и имеющей при больших токах низкий КПД вследствие эффектов насыщения, колебания мод должны быть «слабо» связаны друг с другом*.

Целью настоящей работы является изучение влияния параметров МЦР-генератора на межмодовую связь и, соответственно, определение условий, при которых многомодовые колебания являются устойчивыми и имеют достаточно высокий КПД.

2. В МЦР-генераторе с аксиально-симметричным рабочим пространством (гиромонotronе) собственными модами являются врачающиеся по азимуту волны $\sim \exp[i(\omega_s t - m_s \varphi)]$. Эти волны взаимодействуют со всеми электронами пучка, в котором отсутствует разброс скоростей и радиусов ведущих центров, одинаково эффективно [3], что обуславливает «сильную» межмодовую связь [4].

Разделение электронного потока на фракции, каждая из которых преимущественно взаимодействует со «своей» модой, может происходить в МЦР-генераторах вследствие:

- поперечной неоднородности магнитостатического поля,
- разброса электронов по скоростям и энергиям,

в) поперечной неоднородности модуля высокочастотной силы, действующей на электроны со стороны каждой моды.

* Здесь и ниже речь идет о взаимодействии мод, фазы которых не зависят друг от друга (что, как правило, имеет место [4–6]). Возбуждение в многомодовом генераторе таких мод со «слабой» связью ведет к установлению стохастических режимов [2].

Две первые причины вызывают разделение пучка на фракции, у которых зоны отрицательной реабсорбции циклотронного излучения смещены по частоте (в случае разброса поступательных скоростей смещение происходит вследствие эффекта Допплера). В лазерах и молекулярных генераторах аналогичные причины вызывают неоднородное уширение линий активного вещества, потому что эти системы имеют существенно неэквидистантный энергетический спектр и, следовательно, существенно разнесенные по частоте зоны отрицательной и положительной реабсорбции когерентного излучения.

Электронный поток в МЦР и других «электронных мазерах», принцип действия которых основан на эффекте фазовой группировки, можно представить как ансамбль возбужденных осцилляторов с квазиэквидистантным энергетическим спектром [3]. В такой среде зоны отрицательной и положительной реабсорбции когерентного излучения близки по частоте (кривая поглощения показана на рис. 1 а, взятом из [3], σ' — активная часть линейной проводимости пучка). Поэтому разделение пучка на фракции со смещенными по частоте кривыми поглощения вызовет наложение зоны положительного поглощения одной фракции на зону отрицательного поглощения другой (рис. 1 б). Следовательно, указанные причины не могут привести к существенному неоднородному уширению зоны отрицательного поглощения в МЦР (суммарная кривая показана на рис. 1 б штриховой линией), однако разделение пучка на фракции, различающиеся циклотронными частотами или поступательными скоростями, может явиться причиной того, что одна из мод попадет в зону отрицательного поглощения одной фракции, в то время как другая мода будет возбуждаться за счет электронов второй фракции (рис. 1 б).

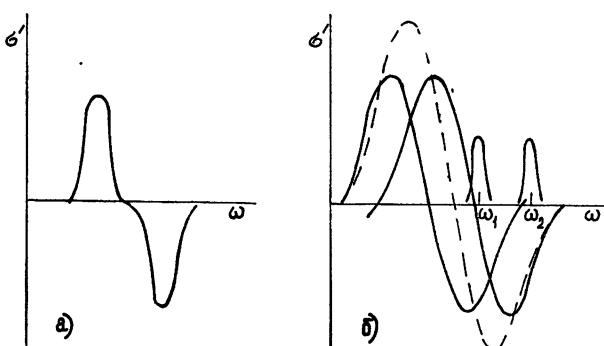


Рис. 1.

Таким образом, основной причиной ослабления связи мод МЦР-генератора является поперечная неоднородность модулей высокочастотных сил F_s , действующих на электроны со стороны каждой моды.

3. Предположим, что время пролета электронов через резонатор $T_{\text{пр}}$ существенно меньше характерного времени установления колебаний $\sim Q_s / \omega_s$, и азимутальные индексы m_s мод, резонансных с одной гармоникой n_s гирочастоты ω_H , не одинаковы. Тогда конкуренция двух мод гиромонотрона с «мягким» самовозбуждением описывается уравнениями для квадратов амплитуд M_s (ср. [4, 5]):

$$\dot{M}_s = M_s \left[\iint_{S_\perp} W(\beta, R_\perp) I_s u_s (\alpha_s - \beta_s u_s M_s - \gamma_s u_{s'} M_{s'}) d\beta ds_\perp - \frac{n_s}{2Q_s} \right], \quad (1)$$

в которых $s \neq s'$, $s, s' = 1, 2$, функция $W(\beta, R_{\perp})$ описывает распределение электронов по скоростям $\beta = v/c$ и поперечным координатам R_{\perp} ведущих центров электронов, безразмерный параметр I_s пропорционален току пучка*, $I_s = J_{m_s - n_s}^2 \left(\frac{\omega_s}{c} R \right)$ — структурный коэффициент, характеризующий пространственное распределение модуля высокочастотной силы F_s , действующей на электроны со стороны s -й моды, коэффициенты α_s , β_s определяются углами пролета $\theta_s = (\omega_s - n_s \omega_H) T_{\text{пр}}$ и продольной структурой мод, коэффициенты γ_s зависят не только от этих величин, но и от разноса собственных частот мод [4]; при одинаковой продольной структуре мод $\lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \gamma_s = 2 \beta_s$ [4—6].

Уравнения (1) аналогичны полученным Лэмбом [1] при исследовании оптического мазера. «Слабой» связи мод, согласно [1], соответствует условие

$$\Psi = \left\{ \left[\int_{S_{\perp}} I_1 \int W(\beta, R_{\perp}) u_1 u_2 \gamma_1 ds_{\perp} d\beta \right] \left[\int_{S_{\perp}} I_2 \int W(\beta, R_{\perp}) u_1 u_2 \gamma_2 ds_{\perp} d\beta \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ \left[\int_{S_{\perp}} I_1 \int W(\beta, R_{\perp}) u_1^2 \beta_1 ds_{\perp} d\beta \right] \left[\int_{S_{\perp}} I_2 \int W(\beta, R_{\perp}) u_2^2 \beta_2 ds_{\perp} d\beta \right] \right\}^{-1} \right\} < 1. \quad (2)$$

4. В гиромонотроне — системе с аксиальной симметрией — модуль высокочастотной силы F_s не зависит от азимутальной координаты [3]. Для оценки влияния радиальной неоднородности F_s на межмодовую связь предположим, что электронный поток состоит из двух фракций, различающихся радиусами ведущих центров $R_{\varphi 1}, R_{\varphi 2}$ (число электронов в обеих фракциях здесь и ниже полагаем одинаковым), разброс скоростей отсутствует, магнитостатическое поле H_0 однородно (рис. 2).

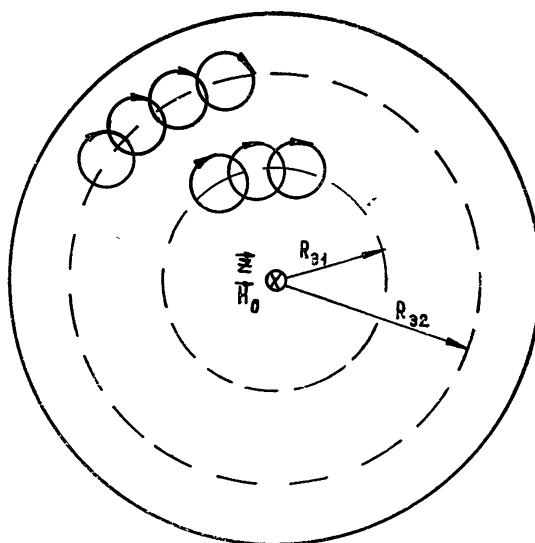


Рис. 2.

* Квадрат амплитуды s -й моды M_s и параметр I_s не зависят от положения электронного потока и связаны с введенными в [4, 5] величинами M_s^*, I_s^* соотношениями $M_s^* = F_s^2 = M_s u_s$, $I_s^* = I_s u_s$.

В этом случае величина межмодовой связи определяется выражением

$$\Psi = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\beta_1 \beta_2} \frac{(u_{11} u_{21} + u_{12} u_{22})^2}{(u_{11}^2 + u_{12}^2)(u_{21}^2 + u_{22}^2)}, \quad (2a)$$

где $u_{s1,2} = J_{m_s-n_s}^2 \left(\frac{\omega_s}{c} R_{s1,2} \right)$. Если предположить расположение фракций электронного потока таким, что одна фракция взаимодействует только с первой модой ($u_{12} = 0$), а другая—только со второй модой ($u_{21} = 0$), то связь между модами отсутствует ($\Psi = 0$, см. (2a)); при этом устойчивы двухмодовые бигармонические режимы*.

В гиромонотронах повышенной мощности рабочими типами колебаний, как правило, являются моды шепчущей галереи H_{mpq} с большими азимутальными ($m \gg 1$) и малыми радиальными ($p \sim 1$) индексами. Поля этих мод сосредоточены вблизи стенок резонатора. При конкуренции таких мод с разными радиальными индексами (пусть $p_1 = 1$, $p_2 = 2$) возможна ситуация, когда внутренняя фракция пучка не взаимодействует с первой модой ($u_{11} = 0$), в то время как эта же фракция со второй модой и другая фракция с обеими модами взаимодействуют равно эффективно ($u_{21} = u_{12} = u_{22}$). В этом случае связь между модами оказывается вдвое меньшей ($\Psi = \gamma_1 \gamma_2 / 2 \beta_1 \beta_2$), чем в гиромонотроне с пучком без позиционного разброса радиусов ведущих центров, однако, поскольку $\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\beta_1 \beta_2} \geq 4$ [4], связь остается «сильной».

5. Нарушение аксиальной симметрии рабочего пространства гиромонотрона приводит к тому, что собственными модами системы становятся стоячие волны с азимутальным распределением $\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$, воздействие которых на электронный поток является азимутально неоднородным. Связь двух мод с одинаковым азимутальным индексом ($\sim \cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$) вследствие азимутальной неоднородности модулей высокочастотных сил F_s может быть «слабой» [8]. Исследуем взаимодействие двух пар мод $J_{m_1} \left(\frac{\omega_1}{c} R \right) \frac{\cos m_1 \varphi}{\sin m_1 \varphi}$, $J_{m_2} \left(\frac{\omega_2}{c} R \right) \frac{\cos m_2 \varphi}{\sin m_2 \varphi}$, различающихся азимутальными индексами ($m_1 \neq m_2$).

Уравнения, описывающие временные изменения квадратов амплитуд собственных мод такой системы, получаются путем соответствующего сложения уравнений (1) для вращающихся волн $\left(J_m \left(\frac{\omega}{c} R \right) \frac{\cos m\varphi e^{i\omega t}}{\sin m\varphi} \sim J_m \left(\frac{\omega}{c} R \right) (e^{i(\omega t+m\varphi)} \pm e^{i(\omega t-m\varphi)}) \right)$. Когда в пучке отсутствует разброс скоростей и радиусов ведущих центров и магнитостатическое поле однородно, эти уравнения имеют вид

$$M_{1,2}^{c,s} = M_{1,2}^{c,s} I_{1,2} [\sigma_{1,2} - \beta_{1,2} (\Gamma_{1,2}^{(1)} M_{1,2}^{c,s} + \Gamma_{1,2}^{(2)} M_{1,2}^{s,c}) - \gamma_{1,2} \Gamma^{(3)} (M_{2,1}^c + M_{2,1}^s)]. \quad (3)$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к модам с азимутальными индексами m_1 и m_2 , индексы c, s отмечены моды с азимутальным распределением $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$, $\sigma_s = \frac{a_s}{2} (u_s^+ + u_s^-) - \frac{n_s}{I_s Q_s}$, коэффициенты Γ равны

* Режим генерации СВЧ колебаний с двумя близкими частотами представляет интерес в связи с возможностью непосредственного нагрева ионов магнитоактивной плазмы высокочастотным полем при $\omega_1 \approx \omega_2 \gg \omega_{Hi}$, $|\omega_1 - \omega_2| \approx \omega_{Hi}$ [7].

Таблица

M_1^c	\tilde{M}_1^s	M_2^c	M_2^s	p_1	p_2	p_3	p_4
0	0	0	0	σ_1	σ_1	σ_2	σ_2
$\frac{\sigma_1}{\beta_1 \Gamma_1^{(1)}}$	0	0	0	$-\sigma_1$	$\sigma_1 \left(1 - \frac{\Gamma_1^{(2)}}{\Gamma_1^{(1)}} \right)$	$\sigma_2 \left(1 - \frac{\sigma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)}}{\sigma_2 \beta_1 \Gamma_1^{(1)}} \right)$	
$\frac{\sigma_1}{\beta_1 (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)})}$	0	0	0	$\sigma_1 \frac{-\Gamma_1^{(1)} \pm \Gamma_1^{(2)}}{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}}$	$\sigma_2 \left(1 - \frac{\sigma_1 \gamma_2}{\sigma_2 \beta_1} \frac{2 \Gamma^{(3)}}{\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}} \right)$	$p_{3,4} < 0$ при $\beta_1 \beta_2 \Gamma_1^{(1)} \Gamma_2^{(1)} > \gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}$	
$\frac{\sigma_1 \beta_2 \Gamma_2^{(1)} - \sigma_2 \gamma_1 \Gamma^{(3)}}{\beta_1 \beta_2 \Gamma_1^{(1)} \Gamma_2^{(1)} - \gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}}$	0	$\frac{\sigma_2 \beta_1 \Gamma_1^{(1)} - \sigma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)}}{\beta_1 \beta_2 \Gamma_1^{(1)} \Gamma_2^{(1)} - \gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}}$	0	$\beta_1 M_1^c (\Gamma_1^{(1)} - \Gamma_1^{(2)})$	$\beta_2 M_2^c (\Gamma_2^{(1)} - \Gamma_2^{(2)})$	$\beta_1 \beta_2 \Gamma_1^{(1)} \Gamma_2^{(1)} > \gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}$	
$\frac{\sigma_1 \beta_2 \Gamma_2^{(1)} - \sigma_2 \gamma_1 \Gamma^{(3)}}{\beta_1 \beta_2 \Gamma_1^{(1)} \Gamma_2^{(1)} - 2\gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}}$	0	$\frac{\beta_1 \sigma_2 (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}) - 2\sigma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)}}{\beta_1 \beta_2 \Gamma_2^{(1)} (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}) - 2\gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}}$	0	$-\beta_1 M_1^c (\Gamma_1^{(1)} - \Gamma_1^{(2)})$	$\beta_2 M_2^c (\Gamma_2^{(1)} - \Gamma_2^{(2)})$	$\beta_1 \beta_2 \Gamma_2^{(1)} (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}) > 2\gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}$	
$\frac{\sigma_1 \beta_2 (\Gamma_2^{(1)} + \Gamma_2^{(2)}) - 2\sigma_2 \gamma_1 \Gamma^{(3)}}{\beta_1 \beta_2 (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}) (\Gamma_2^{(1)} + \Gamma_2^{(2)}) - 4\gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}}$	0	0	0	$-\beta_1 M_1 (\Gamma_1^{(1)} - \Gamma_1^{(2)})$	$-\beta_2 M_2 (\Gamma_2^{(1)} - \Gamma_2^{(2)})$	$p_{3,4} < 0$ при $\beta_1 \beta_2 (\Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)}) (\Gamma_2^{(1)} + \Gamma_2^{(2)}) > 4\gamma_1 \gamma_2 \Gamma^{(3)2}$	
				$1 \rightleftharpoons 2$			
				В выражении для $M_1^{c,s}$ нужно поменять местами индексы			

$$\begin{aligned}\Gamma_s^{(1)} &= u_s^{+2} + 4u_s^+u_s^- + u_s^{-2}, \quad \Gamma_s^{(2)} = 2(u_s^{+2} + u_s^{-2}), \\ \Gamma^{(3)} &= (u_1^+ + u_1^-)(u_2^+ + u_2^-),\end{aligned}\quad (4)$$

где $u_s^\pm = J_{m_s \pm n_s}^2 \left(\frac{\omega_s}{c} R_s \right)$.

Система уравнений (3) имеет шесть типов состояний равновесия. Устойчивость этих состояний определяется характеристическим уравнением четвертого порядка. Стационарные значения квадратов амплитуд $(M_{1,2}^{c,s})_{\text{стаци}}$ и корни характеристического уравнения p_i приведены в таблице*. Условия существования и устойчивости различных типов состояний равновесия очевидным образом следуют из приведенных в таблице выражений для $(M_{1,2}^{c,s})_{\text{стаци}}$, p_i .

В простейшем случае близких частот всех четырех мод (при $|\omega_s - \omega_s'| T_{\text{пр}} \ll 1$, $\gamma = 2\beta$) и одинаково эффективного взаимодействия электронного потока со всеми врачающимися в азимутальном направлении волнами, на которые можно разложить поля собственных мод (т. е. при условии $u_{1,2}^\pm \approx u$), устойчива только двухчастотная генерация пары мод с одинаковым азимутальным индексом. Здесь возможен своеобразный пистерезис: в зависимости от начальных условий устанавливаются двухчастотные колебания (ω_1, ω_2) мод с азимутальным индексом m_1 либо также двухчастотные (но с частотами ω_3, ω_4) колебания мод с азимутальным индексом m_2 . В случае преимущественного взаимодействия электронов с бегущими в одном направлении волнами (например, $u_{1,2}^+ \approx 0, u_{1,2}^- \approx u$) устойчивы только одномодовые колебания.

Таким образом, азимутальная неоднородность модулей высокочастотных сил F_s может привести к «слабой» связи между модами, у которых максимум азимутального распределения модуля F одной моды ($\sim \cos m \varphi$) приходится на минимум F другой ($\sim \sin m \varphi$), т. е. «степень азимутального перекрытия» мала. Однако у мод с разными азимутальными индексами «степень азимутального перекрытия» распределений F_s больше, вследствие чего эти моды оказываются «сильно» связанными.

6. Ослабление связи между модами МЦР-генератора может произойти вследствие одновременного влияния перечисленных выше причин. Например, в гиромонotronе с электронным потоком, состоящим из двух фракций с радиусами ведущих центров R_{e1} и R_{e2} (рис. 2), циклотронные частоты электронов одной фракции могут быть не равны циклотронным частотам электронов другой фракции как из-за провисания потенциала, уменьшающего энергию электронов внутренней фракции, так и из-за поперечной неоднородности магнитостатического поля**. В такой системе связь ослабляется как из-за разброса циклотронных частот, так и вследствие радиальной неоднородности модулей высокочастотных сил F_s и характеризуется величиной

$$\Psi = \frac{(\gamma_{11} u_{11} u_{21} + \gamma_{12} u_{12} u_{22})(\gamma_{21} u_{11} u_{21} + \gamma_{22} u_{12} u_{22})}{(\beta_{11} u_{11}^2 + \beta_{12} u_{12}^2)(\beta_{21} u_{21}^2 + \beta_{22} u_{22}^2)}, \quad (26)$$

* Первая строка в таблице определяет невозбужденное состояние генератора, вторая—одномодовый режим, третья—колебания двух мод с одинаковым азимутальным индексом, четвертая—колебания двух мод с разными азимутальными индексами, пятая—трехмодовые и шестая—четырехмодовые режимы.

** Следует иметь в виду, что поперечная неоднородность магнитостатического поля, вообще говоря, связана с его продольной неоднородностью, слишком большая величина которой может преждевременно вывести электроны из резонанса с высокочастотным полем.

где, как и в (2 а), вторые индексы соответствуют радиусу электронного слоя, коэффициенты $\beta_{s,t}$, $\gamma_{s,t}$ зависят от углов пролета $\theta_{s,t} = (\omega_s - n_s \omega_{H,t}) T_{\text{пр}}$.

Когда частоты мод близки ($| \omega_1 - \omega_2 | T_{\text{пр}} \ll 1$) и мода, имеющая меньший радикальный индекс, не взаимодействует с внутренним слоем электронов (пусть, как и в п. 4, $u_{11} = 0$, $u_{21} = u_{12} = u_{22}$), связь между модами является «слабой», если коэффициенты $\beta_{s,t}$ вследствие разброса циклотронных частот удовлетворяют условию $\beta_{s1} > 3 \beta_{s2}$. Нарушение аксиальной симметрии рабочего пространства гиромонотрона приводит к дополнительному ослаблению связи мод (п. 5). В такой системе при прочих равных условиях ($\omega_2 \approx \omega_1$, $u_{11}^{\pm} = 0$, $u_{21}^{\pm} = u_{12}^{\pm} = u_{22}^{\pm}$) связь между модами становится «слабой», если для коэффициентов $\beta_{s,t}$ выполняется соотношение $\beta_{s1} > 1,56 \beta_{s2}$.

Таким образом, азимутальная неоднородность модулей высокочастотных сил F_s понижает требования к необходимому для установления многомодовых режимов разбросу циклотронных частот почти вдвое.

7. Сравним КПД многомодового режима в генераторе со «слабой» связью мод с КПД одной моды, подавляющей в генераторе с «сильной» связью прочие типы колебаний. Рассмотрим двухмодовый генератор, предполагая, что разброс скоростей электронов отсутствует, а конфигурация электронного потока и структура мод обеспечивают «слабую», межмодовую связь, вследствие чего

$$\begin{aligned} \iint_{s_{\perp}} W(\beta, R_{\perp}) I_s u_s (\alpha_s - \beta_s u_s M_s - \gamma_s u_s M_{s'}) d\beta ds_{\perp} = \\ = I_s \left(a - b M_s - \frac{b}{2} M_{s'} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

величины a , b , у обеих мод для простоты считаем одинаковыми: $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. При этом «поперечный» электронный КПД двухмодового режима определяется выражением, аналогичным приведенному в [9] для одной моды:

$$\eta_{\perp} = 2 \left[M_1 \left(a - b M_1 - \frac{b}{2} M_2 \right) + M_2 \left(a - b M_2 - \frac{b}{2} M_1 \right) \right]. \quad (6)$$

Интенсивности мод M_s в стационарном режиме определяются следующими из (1) и (5) уравнениями баланса активных мощностей пучка и полей мод:

$$a - b M_s - \frac{b}{2} M_{s'} = \frac{n_s}{2 I_s Q_s} \quad (s = 1, 2). \quad (7)$$

Система уравнений (6) и (7) определяет зависимость КПД многомодового режима от тока пучка I (обобщение на случай большого числа $N > 2$ мод представляется очевидным):

$$\eta_{\perp} = \frac{4}{3 b I^2} \left[a I \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) - 2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1 k_2} \right) \right]. \quad (8)$$

Здесь введено обозначение $k_s = \frac{2 I_s Q_s}{I n_s}$. Оптимальная по КПД величина тока и соответствующее значение КПД равны

$$I_{\text{opt}} = \frac{4}{a} \frac{k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2}{k_1 k_2 (k_1 + k_2)}, \quad \eta_{\perp \max} = \frac{a^2}{6 b} \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2}.$$

Аналогичным образом можно определить КПД и оптимальный ток одномодового режима. Предположим, что параметры генератора обеспечивают «сильную» связь мод, сохраняя прежними значения a и b (см. (5), где коэффициент при M_s на этот раз больше b). КПД определяется выражением, аналогичным (6),

$$\eta_{\perp}^1 = 2M_1(a - bM_1) \quad (6a)$$

(считаем, что возбуждается первая мода). Интенсивность M_1 определяется уравнением баланса

$$M_1 = \frac{1}{b} \left(a - \frac{1}{k_1 I} \right). \quad (7a)$$

Из (6a) и (7a) следует зависимость КПД одномодового режима от тока:

$$\eta_{\perp}^1 = \frac{2}{bI^2 k_1^2} (k_1 a I - 1). \quad (8a)$$

Соответственно оптимальный ток и максимальное значение КПД равны

$$I_{\text{opt}}^1 = \frac{2}{k_1 a}, \quad \eta_{\perp \max}^1 = \frac{a^2}{2b}.$$

Зависимость отношений $\eta_{\perp \max}^1 / \eta_{\perp \max}^1$ и $I_{\text{opt}}^1 / I_{\text{opt}}^1$ от отношения k_2/k_1 , характеризующего различия в стартовых токах мод, приведена на рис. 3. Как следует из рис. 3, возбуждение моды, имеющей более

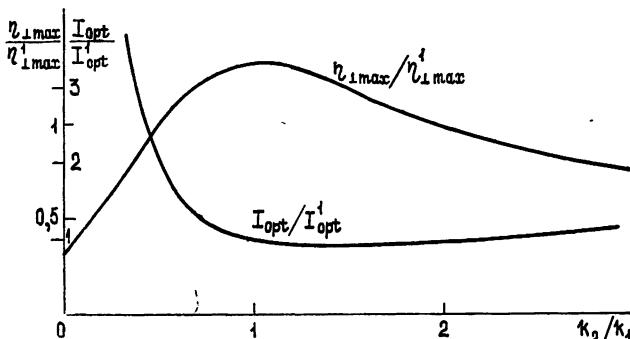


Рис. 3.

высокий стартовый ток ($k_2 < k_1$), позволяет существенно повысить оптимальную величину тока, оставляя достаточно большим максимальное значение КПД, в результате чего, в конечном счете, возрастает предельный уровень СВЧ мощности. Так, например, при $k_2 = \frac{1}{2} k_1$ максимальное значение КПД то же, что и в одномодовом режиме, а соответствующие значения тока вдвое превышают I_{opt}^1 . При одновременной генерации двух мод с близкими стартовыми ($\frac{1}{2} < \frac{k_2}{k_1} < 2$) и, соответственно, оптимальными значениями тока КПД $\eta_{\perp \max}^1$ превышает (рис. 3) КПД $\eta_{\perp \max}^1$ одномодового режима.

Автор благодарен В. Л. Братману, А. В. Гапонову, М. И. Петелину и М. И. Рабиновичу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. E. Lamb, Phys. Rev., **134**, № 6a, 1429 (1964).
2. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 4, 477 (1974).
3. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967).
4. И. Г. Заринцина, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 2, 303 (1975).
5. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 11, 1709 (1974).
6. Л. А. Вайнштейн, сб Электроника больших мощностей, вып. 6 (1969).
7. A. J. Wong, D. R. Baker, N. Booth, Phys. Rev. Lett., **24**, № 15, 804 (1970).
8. Г. С. Нусинович, Радиотехника и электроника, **19**, № 8, 1796 (1974).
9. А. Г. Лучинин, Г. С. Нусинович, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 11, 1975, стр. 26.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 июня 1975 г.

MULTI-MODE REGIMES IN CYCLOTRON-RESONANCE MASERS

G. S. Nusinovich

An essential inhomogeneous line broadening of the active medium in cyclotron-resonance masers (CRM) and other microwave devices using induced radiation of excited oscillators with a quasi-equidistant energetic spectrum is impossible. In CRM-oscillators with a wide electron beam, multi-mode oscillations may occur due to a spatial inhomogeneity of high-frequency forces acting upon the electrons on the part of each mode. The efficiency of the multi-mode regime in such an oscillator exceeds that of one mode.

УДК 537.529.9

О РОЛИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИОНИЗАЦИИ ГАЗА ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ В ОБЛАСТИ КАТОДНОГО ПАДЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА С ПОЛЫМ КАТОДОМ

A. С. Метель, А. И. Настюха

Получены характеристики тлеющего разряда с полым катодом, образованным двумя плоскопараллельными дисками, в водороде и аргоне при давлении $p = 1 - 5 \text{ mm rt. st.}$ и плотностях разрядного тока j_0 на катоде до $0,02 \text{ A/cm}^2$. Обнаружена двухслойная структура темного катодного пространства. Большая интенсивность свечения в слое, примыкающем к границе плазмы, объясняется возбуждением атомов газа осциллирующими в полости быстрыми электронами.

Модель механизма эффекта полого катода, основанная на дополнительной ионизации в области катодного падения осциллирующими электронами, позволяет объяснить специфические свойства тлеющего разряда с полым катодом (ТРПК). Сравнение характеристик ТРПК и разряда, в котором отсутствуют осцилляции электронов, показывает, что дополнительная ионизация существенно влияет на свойства ТРПК. При этом с увеличением плотности тока возрастает роль вторичных электронов.

Тлеющий разряд с полым катодом (ТРПК) при низких давлениях газа обладает рядом интересных свойств [1-4]. Характерной для ТРПК является слабая зависимость ширины области катодного падения потенциала d от давления газа p при постоянной величине разрядного тока I . В случае двух плоскопараллельных катодных пластин величина d изменяется пропорционально расстоянию a между катодами [2]. Исследование распределения потенциала в области катодного падения [3] показало, что напряженность электрического поля, как и в случае тлеющего разряда с плоским катодом [5, 6], линейно возрастает с увеличением расстояния до границы отрицательного свечения. Поэтому плотность положительного объемного заряда постоянна во всей области темного катодного пространства. Напряженность электрического поля в плазме ТРПК меньше, чем в положительном столбе разряда [7].

При развитии эффекта полого катода рост тока сопровождается увеличением интенсивности свечения в полости. Поэтому вопрос о механизме эффекта полого катода (ЭПК) вызвал дискуссию о сравнительной роли потока быстрых электронов из области катодного падения, пронизывающих плазму разряда, и квантов ультрафиолетового излучения, вызывающих дополнительную эмиссию электронов с катода [3]. В работе [4] обсуждается вопрос о роли плазменно-пучковых взаимодействий в механизме ЭПК. Одним из процессов, обусловливающих ЭПК, является дополнительная ионизация атомов в области катодного падения осциллирующими в полости быстрыми электронами [8].

В настоящей работе исследовались характеристики ТРПК между плоскопараллельными катодными дисками диаметром 4,0 см и стальным анодным кольцом в водороде и аргоне. На рис. 1 представлен снимок центральной части полости при разряде в водороде с разнопотен-

циальными катодами. Давление газа $p = 1,0 \text{ мм рт. ст.}$, расстояние между катодами $a = 1,0 \text{ см}$, величины катодного падения потенциала $V_1 = 720 \text{ В}$ и $V_2 = 280 \text{ В}$. Область большего катодного падения шириной l_1 резкой границей на расстоянии $l_1 - l_3$ от поверхности катода разделена на части с разной интенсивностью свечения. Большая интенсивность свечения в области, примыкающей к плазме разряда, обусловлена возбуждением атомов газа быстрыми электронами, поступающими в область падения потенциала из плазмы. При этом электроны, эмиттированные с поверхности второго катода, после прохождения через плазму имеют точку поворота в непосредственной близости от точки с координатой $x = l_1 - l_3$ (рис. 1). Наряду с возбуждением атомов быстрые электроны из плазмы производят дополнительную ионизацию атомов газа.

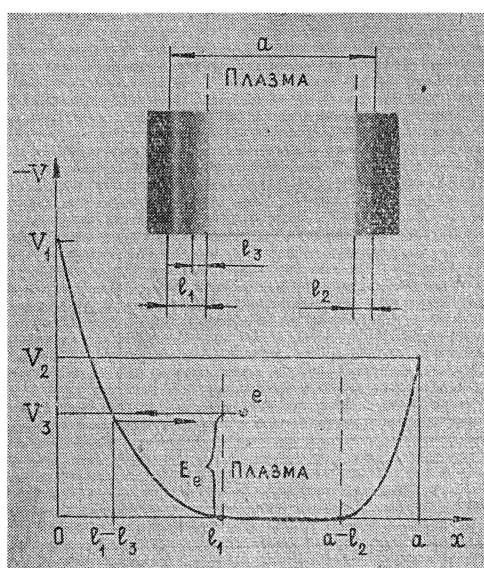


Рис. 1.

Если катоды эквипотенциальны, эмиттированные с катодной поверхности электроны и вторичные электроны, образованные в области падения потенциала, теряя энергию при неупругих соударениях, многократно проходят через плазму разряда. Когда кинетическая энергия быстрых электронов становится меньше пороговых значений энергии неупругих процессов, они переходят в группу медленных электронов. Так как поле в плазме ТРПК мало, распределение медленных электронов по энергии характеризуется низкими значениями температуры T_e [9].

При низких давлениях газа первичные электроны, покинувшие катодную поверхность, многократно проходят через плазму разряда, отражаясь в области катодного падения. При давлении гелия $p = 1 \text{ мм рт. ст.}$ длина свободного пробега быстрого электрона с энергией порядка 200 эВ составляет величину порядка 0,8 см. Если расстояние между плоскопараллельными катодными пластинами равно 1 см, первичный электрон при однократном прохождении через плазму производит не более одного акта ионизации. В исследованном в настоящей работе диапазоне изменения параметров разряда суммарная ширина

двух противолежащих областей катодного падения составляла не менее 25—30% расстояния между катодными пластинами. Поэтому значительная доля актов ионизации газа осциллирующими в полости первичными электронами происходит в области падения. Если энергия вторичных электронов при ионизации в плазме, где напряженность электрического поля близка к нулю, не превышает 10 эВ, то вторичные электроны, образованные в области катодного падения, ускоряются в сильном электрическом поле. Их энергия в плазме разряда определяется разностью потенциалов между плазмой и точкой, где произошла ионизация.

В рассматриваемых условиях первичный электрон, покинувший катодную поверхность, приобретает энергию, соответствующую величине катодного падения потенциала. Эта энергия расходуется как на ионизацию, так и на возбуждение атомов, а величина энергетических потерь зависит от давления и состава газовой среды. Рассмотрим ионизацию, производимую только первичными электронами в гелии в условиях, когда при прохождении расстояния между катодами происходит не более одного акта ионизации. При этом величина энергетических потерь с учетом возбуждения атомов при однократном прохождении расстояния между катодами ΔE составляет около 40 эВ. На рис. 2 приведена зависимость сечения ионизации гелия от энергии электрона $\sigma_i(E)$.

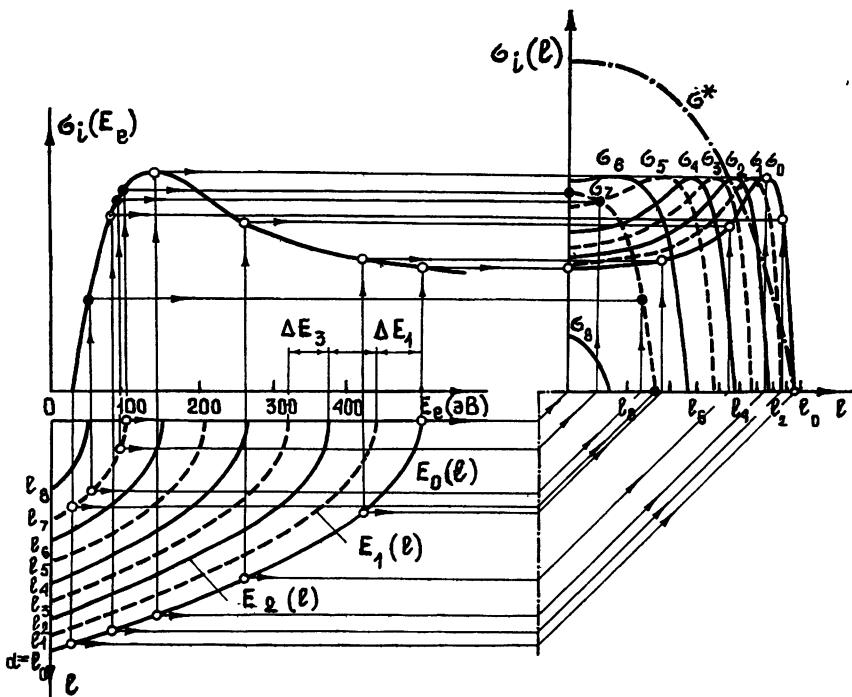


Рис. 2. Зависимости сечения ионизации от энергии электрона $\sigma(E)$ и энергии электрона в области катодного падения от расстояния l до границы плазмы $E_j(l)$, а также зависимость от l сечения ионизации $\sigma_j(l)$ электроном после j -кратного прохождения через плазму.

Если напряженность электрического поля пропорциональна расстоянию l до границы плазмы, зависимость кинетической энергии первичного электрона от l описывается выражением

$$E_0 = eV \left(1 - \frac{l^2}{d^2} \right), \quad (1)$$

где V — величина катодного падения. Это справедливо при низких давлениях газа, когда средняя длина свободного пробега быстрых электронов $\lambda_e \gg d$. Если после прохождения через плазму энергия электрона уменьшается на величину ΔE_1 , ее зависимость от l описывается выражением

$$E_1 = eV \left(1 - \frac{l^2}{d^2} \right) - \Delta E_1. \quad (2)$$

Если известна зависимость $\sigma_i(E)$ и величина потерь энергии после j -кратного прохождения через плазму $\sum_{i=1}^j \Delta E_i$, можно из выражения зависимости энергии электрона в области катодного падения

$$E_j = eV \left(1 - \frac{l^2}{d^2} \right) - \sum_{i=1}^j \Delta E_i \quad (3)$$

и выражения зависимости $\sigma(E)$ исключить энергию электрона. При этом получаем зависимость сечения ионизации от l : $\sigma_j(l)$ (рис. 2). Если энергия первичного электрона после k -кратного прохождения через полость становится меньше энергии ионизации, полное число актов ионизации, производимых первичным электроном в области катодного падения, описывается выражениями

$$Z_i = n \int_0^d \sigma_0(l) dl + 2n \int_0^d \sigma_1(l) dl + \dots + 2n \int_0^d \sigma_k(l) dl; \quad (4)$$

$$Z_i = n \int_0^d \sigma_0(l) dl + nk \int_0^d \sigma^+(l) dl, \quad (5)$$

где $\sigma^+(l) = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k \sigma_i(l)$, а n — плотность атомов газа в полости.

С уменьшением плотности газа увеличивается число осцилляций электрона в полости и число членов в сумме $\sum_{i=1}^k \sigma_i(l)$, а мало изменяющаяся при этом зависимость $\sigma^+(l)$ (рис. 2) стремится к некоторой предельной функции $\sigma^*(l)$. Поскольку последняя определяет энергетический спектр в плазме разряда быстрых электронов, образованных в области падения, а общее число ионов, образующихся в катодной полости, определяется в основном ионизацией электронами с энергией, превышающей 40 эВ, то скорость образования носителей заряда, и, следовательно, разрядный ток определяются величиной Z_i . При низких давлениях k обратно пропорционально плотности газа n , а первым членом в (5) можно пренебречь. Поэтому при постоянном числе ионизации Z_i ширина области падения потенциала d , определяемая выражением

$$nk \int_0^d \sigma^*(l) dl = \text{const}, \quad (6)$$

не зависит от давления газа. При уменьшении в несколько раз расстояния между катодами a во столько же раз увеличивается k и в выражении (6) необходимо изменить масштаб интегрирования;

$$nk \int_0^d \sigma^*(l) dl = nk' \int_0^{k' d} \sigma^*\left(\frac{k'}{k} l\right) dl.$$

Это соответствует уменьшению в k'/k раз ширины области падения потенциала. Таким образом, при постоянной величине разрядного тока ширина области падения пропорциональна расстоянию между катодными пластинами и не зависит от давления.

Роль дополнительной ионизации в развитии ЭПК можно проследить в системе катодов, выполненных из разных материалов. На рис. 3 представлены зависимости токов на алюминиевый и стальной электроды, расположенные на расстоянии $a = 1,0 \text{ см}$, при разряде в аргоне ($1 - p = 4 \text{ мм рт. ст.}, 2 - p = 3, 3 - p = 2$).

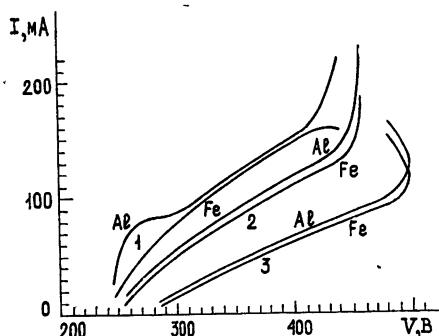
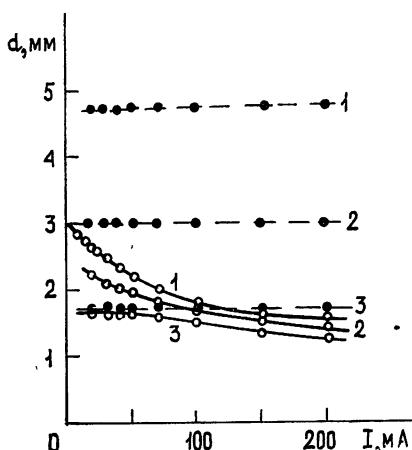


Рис. 3.

Если одна из катодных пластин находится под плавающим потенциалом, первичные электроны лишь однократно проходят область катодного падения. На рис. 4 представлены зависимости ширины области падения d от тока I разряда в водороде (алюминиевые катоды). При токе на один из катодов, равном нулю (пунктирные кривые), d не изменяется с ростом тока и быстро возрастает с уменьшением давления. Если катоды эквипотенциальны и через второй катод протекает ток равной величины (сплошные кривые), наблюдается уменьшение d с ростом тока. При давлении $p = 4 \text{ мм рт. ст.}$ значения d при $I < 70 \text{ mA}$ соответствуют случаю, когда отсутствуют осцилляции электронов. Однако с дальнейшим ростом тока d уменьшается. Точка, в которой начинают расходиться сплошная и пунктирная кривые, определяет нижнюю границу по току обнаружения ЭПК при $p = 4 \text{ мм рт. ст.}$ При меньших давлениях разница значений d на сплошной и пунктирной кривой увеличивается. На рис. 5 представлены зависимости катодного падения потенциала V от давления p для ряда значений тока. Если работает только один катод (пунктирные кривые), V резко возрастает с увеличением тока I и уменьшением

Рис. 4. $a = 1,0 \text{ см}$, $1 - p = 1 \text{ мм рт. ст.}$, $2 - p = 2 \text{ мм рт. ст.}$, $3 - p = 4 \text{ мм рт. ст.}$

давления p . В случае эквипотенциальных катодов зависимость V от I и p выражена слабо.

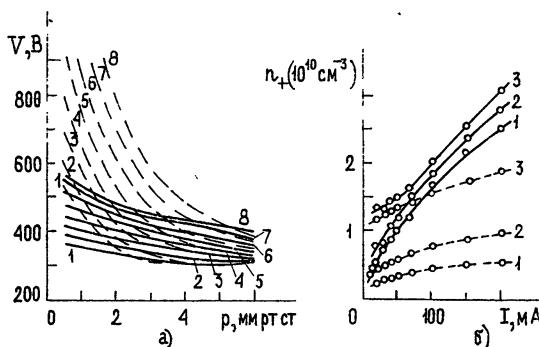


Рис. 5. Зависимости падения потенциала от давления $V(p)$ и зависимости плотности объемного заряда n_+ от тока I разряда в водороде с алюминиевыми катодами, $a = 1,0 \text{ см}$.

Пунктирные кривые — ток на один из катодов равен нулю.
а) $1-I=20 \text{ mA}$, $2-I=30 \text{ mA}$, $3-I=40 \text{ mA}$, $4-I=50 \text{ mA}$, $5-I=70 \text{ mA}$,
 $6-I=100 \text{ mA}$, $7-I=150 \text{ mA}$, $8-I=200 \text{ mA}$; б) $1-p=1,0 \text{ mm rt. ст.}$,
 $2-p=2,0 \text{ mm rt. ст.}$, $3-p=4,0 \text{ mm rt. ст.}$

Концентрация положительных ионов в области катодного падения потенциала n_+ определяется эффективностью ионизации газа. На рис. 5 представлены зависимости $n_+ = \frac{1}{2\pi e} \frac{V}{d^2}$ от параметров разряда. Дополнительная ионизация осциллирующими быстрыми электронами в случае эквипотенциальных катодов (сплошные кривые) обусловливает быстрый рост n_+ с током. В отсутствие осцилляций (пунктирные кривые) n_+ при постоянной плотности тока первичных электронов пропорциональна давлению газа. При этом значительная доля энергии первичного электрона расходуется за границей области падения потенциала. Дополнительная ионизация увеличивает долю энергии, расходуемой в темном катодном пространстве.

Анализ полученных характеристик показывает, что дополнительная ионизация в области катодного падения потенциала осциллирующими в полости быстрыми электронами существенно влияет на свойства разряда. С увеличением тока возрастает роль ионизации атомов вторичными электронами, образованными в области падения потенциала. Модель, основанная на дополнительной ионизации, дает объяснения таким специфическим свойствам тлеющего разряда с полым катодом, как независимость ширины области падения потенциала d от давления и пропорциональность d расстоянию между катодами a . Увеличение интенсивности ионизации в области катодного падения повышает эффективность использования энергии первичных электронов при неупругих соударениях в плазме разряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Paschen, Ann. der Phys., 50, 901 (1916).
2. E. Badareu and I. Popescu, J. Electr. Control, 4, 503 (1958).
3. P. F. Little and A. Engel, Proc. Roy. Soc., A224, 209 (1954).
4. C. Popovici, M. Somesan and V. Nistor, Ann. der Phys., 19, 225 (1967).
5. W. Roger and Warren, Rev. Sient. Instr., 26, 765 (1955).
6. J. Lucas, Brit. J. Appl. Phys., 14, 714 (1963).

7. H. Schüler, Phys. Zeitschr., 22, 264 (1921).
8. H. Schüler, Zeitschr. für Phys., 35, 323 (1926).
9. J. M. Anderson, J. Appl. Phys., 31, 511 (1960).

Поступила в редакцию
3 июня 1975 г.,
после доработки
3 мая 1976 г.

THE ROLE OF ADDITIONAL GAS IONIZATION BY OSCILLATING ELECTRONS IN THE REGION OF CATHODE FALL OF A GLOW WITH A HOLLOW CATHODE DISCHARGE

A. S. Metel', A. I. Nastyukha

The characteristics are obtained of a glow discharge with a hollow cathode formed by two plane-parallel discs in hydrogen and argon at the pressure $p = 1-5$ mm Hg and densities of the discharged current j_0 on the cathode up to 0.02 cm^2 . A two-layer structure of a dark cathode space is discovered. A large intensity of glowing in the layer adjacent the plasma boundary is due to excitation of gas atoms by fast electrons oscillating in the cavity.

The model of the hollow-cathode mechanism, based on additional ionization by oscillating electrons in the region of the cathode incidence, allows to explain specific properties of a glowing discharge with a hollow cathode (GDHC). Comparison of the characteristics of GDHC and discharge in which the electron oscillations are absent shows that the additional ionization has an essential effect on GDHC properties. The role of secondary electrons increases with the growth of the current density.

УДК 537.525

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОДОВ С РАЗНОПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ КАТОДАМИ

A. C. Метель, A. I. Настюха

В диапазоне давлений газа $p = 0,2 - 4,0$ мм рт. ст. исследован тлеющий разряд в системе электродов с разнопотенциальными плоскокапараллельными катодными пластинами в гелии и аргоне. Полученные характеристики показывают, что дополнительная ионизация газа в области падения потенциала электронами, осциллирующими в пространстве между катодами, играет первичную роль в развитии эффекта полого катода. Вторичными процессами, роль которых увеличивается с ростом плотности тока и уменьшением давления, являются энергообмен в области падения потенциала между электронами с разными энергиями и возбуждение колебаний в плазме разряда.

Роль различных элементарных процессов в механизме тлеющего разряда с полым катодом (ТРПК) обсуждалась в ряде работ [1-5]. Результаты исследований показывают [6, 7], что высокие значения плотности разрядного тока на катоде обусловлены осцилляциями в катодной полости высокоэнергетичных электронов. Введение в полость постоянного тела, прерывающего осцилляции, приводит к переходу в режим аномального разряда [6]. Наличие в полости электрода, поглощающего первичные электроны, приводит к переходу плотного импульсного тлеющего разряда в дугу [7]. В системе электродов с двумя плоскокапараллельными катодными пластинами плотный импульсный разряд переходит в дуговой режим при подаче на одну из пластин положительного импульса напряжения, равного потенциалу анода.

Однако в настоящее время не существует единого мнения о роли осцилляций в увеличении эффективности образования в полости носителей заряда. В работе [5] уменьшение катодного падения потенциала при сближении катодных пластин объясняется компенсацией положительного объема заряда проникающими в область падения быстрыми электронами. В [4] предложена модель, объясняющая эффект полого катода (ЭПК) взаимодействием пучка первичных электронов с плазмой. При этом в результате нагрева низкоэнергетичных электронов должна увеличиваться доля электронов с энергиями, соответствующими максимуму сечения ионизации. Модель механизма разряда, учитывающая лишь эмиссию электронов с катода под действием квантов ультрафиолетового излучения [1], вызвала дискуссию [2, 3] о сравнительной роли фотoeffекта и потоков, пронизывающих плазму разряда быстрых электронов.

В настоящей работе исследовались процессы ионизации газа в области катодного падения потенциала разряда с разнопотенциальными катодами.

Развитие ЭПК можно наблюдать в системе электродов с разнопотенциальными катодными пластинами [8, 12], позволяющей с уменьшением разности потенциалов ΔV осуществлять непрерывный переход от режима аномального тлеющего разряда к разряду с полым катодом.

В настоящей работе исследовался разряд в гелии и аргоне с плоско-параллельными катодными дисками диаметром 4,0 см, выполненными из стали и алюминия, и кольцевым стальным анодом. На рис. 1 представлены характеристики разряда в аргоне при давлении $p = 0,2$ мм рт. ст. и расстоянии между алюминиевыми катодами $a = 1,0$ см. При постоянной величине суммы токов через оба катода $I = I_1 + I_2 = 100$ мА увеличение потенциала второго катода по отношению к первому ΔV приводит к уменьшению тока через второй катод I_2 и возрастанию падения потенциала первого катода V_1 . При этом наблюдается уменьшение ширины темного катодного пространства второго катода l_2 и значительное увеличение I_1 . При переходе с уменьшением ΔV к режиму ТРПК в темном катодном пространстве первого катода наблюдается образование слоя с большей интенсивностью свечения, прилегающего к границе отрицательного свечения. Ширина слоя $l_3 < l_2$ и увеличивается с уменьшением ΔV . Интенсивность свечения определяется здесь возбуждением атомов быстрыми электронами из области падения потенциала (ОПП) второго катода. Дополнительная ионизация атомов в слое приводит к уменьшению V_1 и I_1 .

Если ток через второй катод $I_2 = 0$, осуществляется режим аномального разряда. Известно, что в этом случае образование ионов, приходящих на катод, происходит преимущественно в отрицательном свечении [9]. Исследование системы при $I_2 = 0$ показывает, что в широком диапазоне изменения разрядного тока при постоянном расстоянии между катодами величина I_1 не зависит от I_2 , а определяется давлением газа. Образование ионов происходит в ограниченном пространстве шириной

$a - l_1$, причем значительная доля заряженных частиц рекомбинирует на поверхности второго катода. С увеличением тока доля энергии пучка первичных электронов, поглощаемая вторым катодом, возрастает. Это приводит к резкому увеличению напряжения. Зависимость от ΔV мощности W , расходуемой на поддержание постоянной величины тока $I = 100$ мА в системе разнопотенциальных катодов (рис. 1), показывает, что потери на втором катоде более чем в три раза превышают затраты энергии при $\Delta V = 0$.

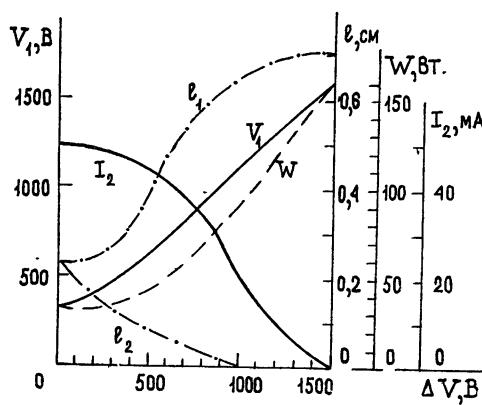


Рис. 1.

Взаимодействие быстрых электронов с поверхностью катода можно исключить из рассмотрения, если при прохождении расстояния между катодами расходуется большая часть их энергии. При давлении $p = 1,0$ мм рт. ст. электроны с энергией $E_e \sim 500$ эВ на отрезке длиной 1,0 см совершают в аргоне около десяти ионизаций и теряют около двух третей своей энергии. На рис. 2 представлены зависимости от разности потенциалов ΔV токов через первый (I_1) и второй (I_2) стальные катоды при постоянной величине падения потенциала V_1 первого катода. (Кривые 1 — $V_1 = 560$ В, кривые 2 — $V_1 = 520$ В.) Небольшие величины ΔV приводят к резкому уменьшению I_1 и I_2 . При $\Delta V > \Delta V^* = 100$ В ток I_1 изменяется незначительно. Это объясняется тем, что электроны из ОПП второго катода после прохож-

дения через полость в ОПП первого катода имеют энергию, недостаточную для эффективной ионизации газа. Важно отметить, что при $\Delta V > \Delta V^*$ I_1 не зависит от I_2 и, следовательно, от интенсивности ионизации атомов в отрицательном свечении. При $\Delta V = 150$ В, когда первичные электроны не достигают поверхности противолежащего катода и вся их энергия расходуется в объеме полости, увеличение V_1 от 520 до 560 В приводит к возрастанию I_1 на 9 мА. Такое же изменение V_1 при $\Delta V = 0$ сопровождается увеличением I_1 и I_2 на 36 мА. Эффективность дополнительной ионизации в ОПП первого катода, вызывающей рост тока с уменьшением ΔV , возрастает с увеличением V_1 , так как при этом растет число электронов, способных ионизовать газ в ОПП после прохождения расстояния между катодами.

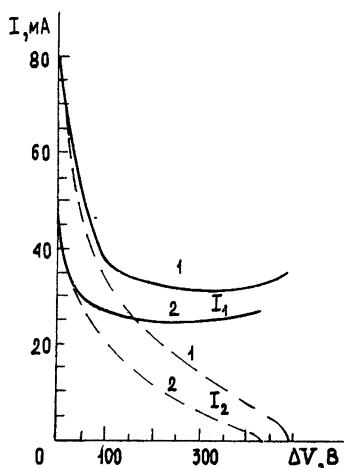


Рис. 2.

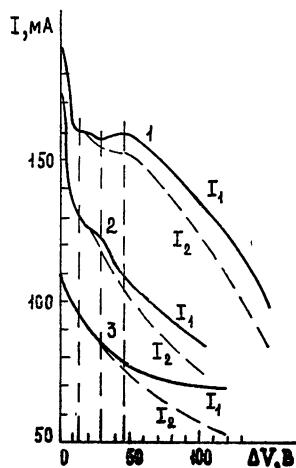


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимости I_1 и I_2 от разности потенциалов ΔV при $V_1 = 560$ В (1), $V_1 = 600$ В (2) и $V_1 = 640$ В (3). Разряд в аргоне со стальными катодами $a = 1,0$ см, $p = 2,0$ мм рт. ст.

С ростом тока увеличивается концентрация заряженных частиц в полости и коэффициент эффективности плазмы разряда. В этих условиях обнаруживается немонотонный характер зависимостей $I_{1,2}(\Delta V)$. Так, при $V_1 = 560$ В и давлении аргона $p = 2,0$ мм рт. ст. дополнительная ионизация существенна лишь при $\Delta V < 60$ В (рис. 3). Зависимость $I_1(\Delta V)$ при $V_1 = 640$ В обнаруживает колебания с периодом, равным удвоенному потенциальному ионизацию газа, и имеет максимум при $\Delta V \sim 50$ В. С увеличением плотности тока формируется участок кривой $I_1(\Delta V)$, где I_1 слабо зависит от ΔV , резко уменьшаясь с дальнейшим увеличением ΔV . Такое поведение характеристик особенно ярко проявляется в случае, если длина свободного пробега первичного электрона λ_e соизмерима с шириной полости a . На рис. 4 представлены зависимости токов разряда в гелии с алюминиевыми катодами от величины падения потенциала второго катода V_2 при постоянной величине $V_1 = 400$ В и давлении $p = 1,0$ мм рт. ст. С уменьшением V_2 наблюдается резкое падение величины тока при $V_2 = 260$ В и $V_2 = 235$ В, хотя в рассматриваемых условиях первичные электроны с соответствующими энергиями должны были бы эффективно производить дополнительную ионизацию в ОПП первого катода. Это свидетельствует о существовании дополнительного канала диссипации энергии пучка первичных электронов в плазме, не связанного с затратами на ионизацию.

Исследование распределения потенциала в ОПП разряда с полым катодом [1] обнаруживает линейную зависимость напряженности электрического поля E от расстояния до границы отрицательного свечения x . В этом случае все быстрые электроны в ОПП с плотностью положительного объемного заряда n совершают колебания с частотой $\omega = \sqrt{4\pi en/m_e}$, где e и m_e — заряд и масса электрона [10]. На рис. 4 представлены зависимости от падения потенциала V_2 величин n_1 и n_2 , вычисленных по формуле $n = \frac{1}{2\pi e} \frac{V}{l^2}$, где l — ширина области падения потенциала. Так, частота колебаний выше в области с меньшим падением потенциала V_2 . СВЧ колебания в области падения могут способствовать эффективному энергообмену между первичными и потерявшими в плазме частью энергии электронами [10]. Такой энергообмен представляется вероятным объяснением образования пологого участка характеристик $I_{1,2}(\Delta V)$. При прохождении пучка электронов могут возникать плазменные колебания в широком диапазоне частот. В работе [11] измерены частоты ионных колебаний в разряде с полым катодом. Возбуждение колебаний является дополнительным каналом диссипации энергии быстрых электронов.

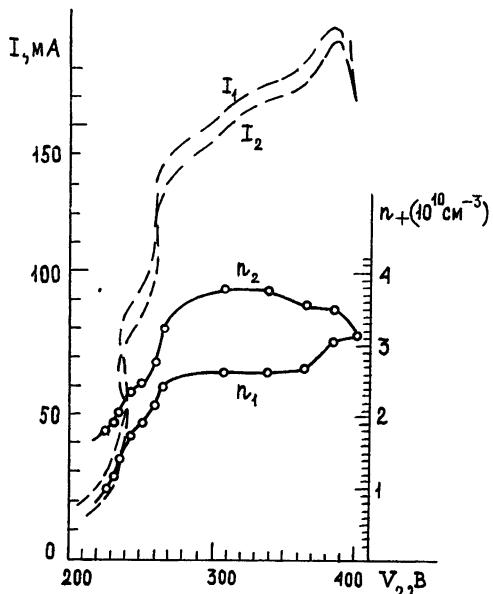


Рис. 4. Зависимости токов I_1 и I_2 (пунктирные кривые) и плотности положительного объемного заряда n_1 и n_2 (сплошные кривые) от величины падения потенциала второго катода V_2 при $V_1 = 400$ В. Разряд в гелии с алюминиевыми катодами $a = 1,0$ см, $p = 1,0$ мм рт. ст.

Результаты исследования тлеющего разряда с разнопотенциальными катодами свидетельствуют о первичной роли в развитии эффекта полого катода дополнительной ионизации газа в области падения потенциала осциллирующими в полости быстрыми электронами. При этом значительно сокращается ширина области падения потенциала, увеличивается разрядный ток и возрастает эффективность плазмы разряда. Увеличение плотности тока и уменьшение давления приводят к возрастианию эффективности энергообмена в области падения потенциала между электронами различных энергий. В результате плазма разряда, пронизываемая пучками первичных электронов с разными энергиями, сохраняет симметрию относительно разнопотенциальных катодов: токи через оба катода имеют одинаковую величину в широком диапазоне изменения разности потенциалов ΔV и величины разрядного тока. При низких давлениях с ростом тока обнаруживаются дополнительные потери энергии быстрых электронов, связанные с возбуждением плазменных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. F. Little and A. von Engel, Proc. Roy. Soc., A224, 209 (1954).
2. H. Neu, Z. Phys., 155, 77 (1959).
3. E. Badareu and F. Wächter, Ann. Phys., 7, 418 (1961).
4. C. Popovici, M. Somesan and V. Nistor, Ann. Phys., 19, 225 (1967).
5. A. Gunterschulze, Z. Phys., 19, 313 (1923).
6. А. С. Метель, А. И. Настюха, Proc. 12th Intern. Conf. on Phen in Ioniz. Gases, Eindhoven, 1975.
7. Ю. Настюч, Импульсный тлеющий разряд с полым катодом при большой плотности тока, Диссертация, 1973.
8. E. Badareu and I. Popescu, J. Electr. Control., 4, 503 (1958).
9. А. В. Бондаренко, ЖТФ, 45, 308 (1975).
10. А. Габор, в сб. Колебания сверхвысоких частот в плазме, ИИП, М., 1961.
11. R. Raguap and I. Baupu, Rev. Roum. Phys., 16, 521 (1971).
12. И. И. Бакалейник, в сб. Вопросы физики низкотемпературной плазмы, Наука и техника, Минск, 1970.

Поступила в редакцию
6 ноября 1975 г.

**INVESTIGATION OF A GLOW DISCHARGE IN A SYSTEM OF
ELECTRODES WITH DIFFERENT-POTENTIAL CATHODES**

A. S. Metel', A. I. Nastyukha

A glow discharge in a system of electrodes with different-potential plane-parallel cathode plates in argon and helium has been investigated within the region of gas pressure $p = 0.2\text{--}4.0$ mm Hg. The characteristics obtained show that in a region of the potential fall an additional gas ionization by electrons oscillating in space between cathodes is of primary importance in the development of the hollow-type cathode effect. The secondary processes the role of which increases with the growth of the current density and the decrease of the pressure are the energy exchange in the region of the potential decrease between electrons with different energies and the excitation of oscillations in the discharge plasma.

УДК 539.293

ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ

Л. К. Орлов

Рассмотрена нелинейная высокочастотная проводимость полупроводников со сверхрешеткой, описывающая генерацию третьей гармоники в ИК области спектра. Показано, что основной вклад в механизм нелинейности в рассматриваемом диапазоне частот дают виртуальные межминизонные переходы электронов. Частотная зависимость нелинейной восприимчивости характеризуется наличием одномерных особенностей и существенно превосходит аналогичные величины в однородных кристаллах.

Исследование электромагнитных свойств периодических полупроводниковых структур (ППС), или полупроводников со сверхрешеткой, в последнее время уделяется большое внимание [1–8]. Это связано, с одной стороны, с возможностью создания на основе специфических свойств таких полупроводников новых полупроводниковых приборов, а также с необходимостью разработки методов диагностики зонной структуры ППС.

Нелинейные высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешеткой, обусловленные сильной непарabolicностью закона дисперсий, возникающей вследствие узости одномерных разрешенных минизон, рассматривались ранее в работах [7, 8]. В этих работах было показано, что введение в кристалл дополнительного периодического потенциала с периодом $d \ll l$ (l — длина свободного пробега носителей заряда) приводит к появлению внутреннего электрического поля, значительно меньшего по величине характерных атомных полей. Это позволяет ожидать, что для наблюдения нелинейных явлений в сверхрешетках потребуются более слабые внешние поля, чем в однородных кристаллах.

В оптической области частот основным механизмом нелинейностей в кристаллах, как хорошо известно, является механизм, связанный с межзонными виртуальными переходами электронов [9, 10]. Разбиение зоны проводимости (валентной зоны) полупроводника со сверхрешеткой на совокупность узких разрешенных и запрещенных одномерных минизон приводит, как легко видеть, к сильным нелинейностям в инфракрасной области спектра. Механизм нелинейности в этом случае связан с межминизонными виртуальными переходами.

В настоящей работе рассмотрена нелинейная высокочастотная проводимость полупроводника со сверхрешеткой, обусловленная межминизонными виртуальными переходами электронов и описывающая генерацию третьей гармоники.

Рассмотрим одномерную сверхрешетку, спектр электронов в которой имеет следующий вид:

$$\epsilon_a(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{k_1^2}{m_1^{(n)}} + \frac{k_2^2}{m_2^{(n)}} \right) + \epsilon_{n, v}(k_3), \quad (1)$$

где n — номер зоны, v — номер минизоны, $\alpha = \{n, v\}$, $\varepsilon_{n, v}(\mathbf{k}_3)$ — энергия продольного движения электрона с компонентой квазимпульса $\hbar k_3$, $\hbar k_{1, 2}$ и $m_{1, 2}^{(n)}$ — соответственно компоненты поперечного квазимпульса и компоненты тензора эффективной массы. Собственным значениям (1) соответствуют собственные функции

$$\Psi_{n, k}(r) = e^{ikr} U_{n, k_\perp}(r) V_{n, v, k_3}(x_3). \quad (2)$$

Здесь $U_{n, k_\perp}(r)$ — периодическая функция с периодом основного кристалла, $V_{n, v, k_3}(x_3)$ — периодическая функция с одномерным периодом ППС.

В присутствии внешнего однородного электромагнитного поля, которое мы будем описывать векторным потенциалом $\mathbf{A}(t)$, считая его зависящим только от времени, гамильтониан системы имеет следующий вид:

$$\hat{H}(r, t) = \frac{1}{2m_0} (\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(t))^2 + U(r) + V(x_3). \quad (3)$$

Здесь $U(r)$ — потенциал, создаваемый кристаллической решеткой, $V(x_3) = V(x_3 + d)$ — периодический потенциал сверхрешетки.

Раскладывая решение нестационарного уравнения Шредингера в ряд по модифицированным функциям Хаустона [10], для коэффициентов разложения $c_\alpha(\mathbf{k}, t)$ получим следующую систему уравнений:

$$i\hbar \frac{\partial c_\alpha(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \sum_{\alpha'} [\varepsilon_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}) \delta_{\alpha\alpha'} + ie \Omega_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}) E(t)] c_{\alpha'}(\mathbf{k}, t), \quad (4)$$

где $\varepsilon_\alpha(\mathbf{k})$ — собственные значения гамильтониана (3) в отсутствие электромагнитного поля, $\mathbf{x} = \mathbf{k} + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(t)$,

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{\Omega_0} \int_{\mathbb{B}_0} U_{n, \mathbf{x}_\perp}^*(r) \nabla_{\mathbf{k}} U_{n', \mathbf{x}_\perp}(r) dr \eta(\alpha, \alpha', x_3) + \\ & + \frac{1}{d} \int_0^d V_{\alpha, x_3}^*(x_3) \nabla^k V_{\alpha', x_3}(x_3) dx_3 \delta_{nn'}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta(\alpha, \alpha', x_3) = \frac{1}{d} \int_0^d V_{\alpha, x_3}^*(x_3) V_{\alpha', x_3}(x_3) dx_3$$

— интеграл перекрытия, подробно исследованный в [5]. Матричные элементы $\Omega_{vv'}(\mathbf{k}_3)$, соответствующие межминизонным переходам, могут быть легко вычислены для конкретного вида потенциала. В частности, для потенциала сверхрешетки

$$V(x_3) = V_0 \cos^2 \left(\frac{\pi x_3}{d} \right)$$

вид матричных элементов $\Omega_{vv'}(\mathbf{k}_3)$ для нескольких значений v и v' при $V_0 = 8E_0 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{m_3 d^2}$ представлен на рис. 1.

Общее выражение для плотности тока, как хорошо известно (см., например, [11, 12]), можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{j} = -\frac{2e}{\hbar} \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f_{\alpha}(\mathbf{k}) \frac{\partial \epsilon_2^*(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{k}} + \mathbf{P}, \quad (6)$$

где поляризация \mathbf{P} равна

$$\mathbf{P} = -2ie \sum_{\alpha, \alpha', \alpha''} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f_{\alpha}(\mathbf{k}) S_{\alpha\alpha'}^{+}(\mathbf{x}, t) [\Omega_{\alpha'\alpha''}(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha'\alpha''} \nabla_{\mathbf{k}}] S_{\alpha''\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (7)$$

Здесь $S_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x}, t)$ — унитарная матрица, диагонализующая систему уравнений (4).

Раскладывая выражения (6) и (7) в ряд по степеням электрического поля, нетрудно получить общее выражение для плотности тока в любом порядке по полю. Последнее выражение, однако, из-за его громоздкости мы здесь не приводим. Поскольку в кристаллах с центром симметрии, которые мы будем в дальнейшем рассматривать, поправка к току второго порядка по полю равна нулю, нас будет интересовать в основном поправка к току третьего порядка по полю, ответственная за генерацию третьей гармоники в ИК диапазоне.

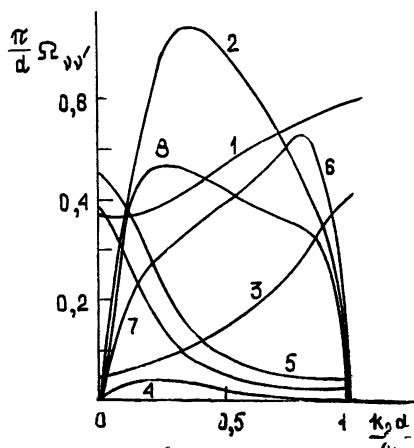


Рис. 1. Матричные элементы $\Omega_{yy}(k_3)$ для сверхрешетки с $V_0 = 8E_0$:
1 — Ω_{12} ; 2 — $10\Omega_{31}$; 3 — $10\Omega_{41}$; 4 — $10\Omega_{15}$;
5 — $0,2\Omega_{32}$; 6 — $5\Omega_{24}$; 7 — $10\Omega_{25}$; 8 — $10\Omega_{53}$.

В инфракрасной области спектра $\omega \ll \omega_m^*$, $\omega \gg \tau_a^{-1}$ (τ_a — характерное время межэлектронных соударений в α -зоне) основным механизмом нелинейности в полупроводниках со сверхрешеткой является механизм, связанный с межминизонными виртуальными переходами. Поскольку внутреннее поле, связанное с потенциалом сверхрешетки $E_{cb}^* \sim \frac{\hbar \omega_{B3}^*}{ed}$, значительно меньше атомных полей $E_a^* \sim \frac{\hbar \omega_m^*}{ea}$ (здесь ω_m^* — характерная частота межзонных переходов, ω_{B3}^* — характерная частота межминизонных переходов), в выражении для плотности тока

$$j_i(3\omega) = \sigma_{ijkl}(\omega, \omega, \omega) E_j(\omega) E_k(\omega) E_l(\omega) \quad (8)$$

слагаемыми, содержащими межзонные переходы, можно пренебречь в рассматриваемом диапазоне частот.

Как и в линейной теории [4], наибольший интерес представляет поведение высокочастотной нелинейной проводимости, обусловленной межминизонными виртуальными переходами, $\sigma_{3333}(\omega, \omega, \omega)$ вблизи одномерных точек Ван-Хова, удовлетворяющих условию

$$[\nabla_{k_3} \omega_{yy}(k_3)]_{\omega_{yy}(k_3)=l\omega} = 0 \quad (9)$$

и соответствующих разрешенным переходам.

Используя общее выражение для плотности тока и уравнение (9), легко получить, что указанные области частот при $T = 0$

и $\varepsilon_1\left(\frac{\pi}{d}\right) < \mu < \varepsilon_2\left(\frac{\pi}{d}\right)$ удовлетворяют следующему равенству $\hbar\omega \approx \approx \frac{1}{e}(\varepsilon_{vv'})_{\text{экстр}} \text{ с } (vv') = (1n), (1m) \text{ для } l=3, (vv') = (1m), (nn') \text{ для } l=2$ и $(vv') = (1m), (nm), (mn), (nn') \text{ для } l=1$. Здесь n — номер четной минизоны, m — номер нечетной минизоны. В других экстремальных точках прямые переходы запрещены правилами отбора и особенности носят не столь ярко выраженный характер.

Считая разрешенные минизоны узкими, так что справедлив закон дисперсии в приближении сильной связи,

$$\varepsilon_v(k_3) = \varepsilon_v^0 + (-1)^v \frac{\Delta\varepsilon_v}{2} \cos k_3 d, \quad (10)$$

вблизи критических точек (9) для разрешенных переходов получаем

$$c_{3333}(w, w, w) = \frac{ie^4 m_\perp}{\pi d \hbar^3 \sqrt{|\Delta\varepsilon_{vv'}|}} A_{vv'}^\pm(l w) B_{vv'}^\pm(l w), \quad (11)$$

где при $v = m$

$$A_{vv'}^+(l w) = \frac{\alpha_{vv'}^+(l w)(\mu - \varepsilon_1(0))}{\sqrt{|\varepsilon_{vv'}(0) + l \hbar w|}}, \quad A_{vv'}^-(l w) = \frac{\alpha_{vv'}^-(l w)(\mu - \varepsilon_1(\pi/d))}{\sqrt{|\varepsilon_{vv'}(\pi/d) + l \hbar w|}} \quad (12a)$$

и при $v = n$

$$A_{vv'}^+(l w) = \frac{\alpha_{vv'}^+(l w)(\mu - \varepsilon_1(0))}{\sqrt{|\varepsilon_{vv'}(\pi/d) + l \hbar w|}}, \quad A_{vv'}^-(l w) = \frac{\alpha_{vv'}^-(l w)(\mu - \varepsilon_1(\pi/d))}{\sqrt{|\varepsilon_{vv'}(0) + l \hbar w|}}, \quad (12b)$$

$$\alpha_{vv'}^\pm(l w) = \begin{cases} \pm 1 & \text{при } [a_{vv'}(l w)]^2 \geqslant 1 \\ -i & \text{при } [a_{vv'}(l w)]^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

В формулах (11) и (12) знак (+) соответствует случаю $a_{vv'}(l w) \approx 1$, знак (-) — случаю $a_{vv'}(l w) \approx -1$, $a_{vv'}(l w) = \frac{2}{\Delta\varepsilon_{vv'}} (\varepsilon_{vv'}^0 + l \hbar w)$, $\varepsilon_{vv'}(k_3) = \varepsilon_v(k_3) - \varepsilon_{v'}(k_3)$, $\varepsilon_{vv'}^0 = \varepsilon_v^0 - \varepsilon_{v'}^0$, $\Delta\varepsilon_{vv'} = \Delta\varepsilon_v - (-1)\Delta\varepsilon_{v'}$. Из коэффициентов $B_{vv'}^\pm(l w)$ вышлишем только те, которым соответствует $l = 2, 3$:

$$B_{1n}^\pm(3w) = \mp \frac{3d^2 |\tilde{\Omega}_{1n}|^2 \Delta\varepsilon_{1n}}{8\hbar^2 w^2} - \frac{3 |\tilde{\Omega}_{1n}|^4}{4\hbar w} - 12\hbar w \times \\ \times \left\{ \sum_{m \neq 1} \frac{(\nabla \tilde{\Omega}_{1m}) \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{n1}}{(\Delta\varepsilon_{1m})^2 [a_{1m}(w) \mp 1] [a_{1m}(2w) \mp 1]} - \frac{|\tilde{\Omega}_{1n}|^2}{4\hbar w} \sum_{n' \neq n} \frac{|\tilde{\Omega}_{1n'}|^2}{\Delta\varepsilon_{1n'} [a_{1n'}(w) \mp 1]} - \right. \\ \left. - \sum_{m \neq 1} \sum_{n'} \frac{\tilde{\Omega}_{1n} \tilde{\Omega}_{nm} \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{n'1}}{\Delta\varepsilon_{1n} \Delta\varepsilon_{1m} [a_{1n'}(w) \mp 1] [a_{1m}(2w) \mp 1]} \right\}; \quad (13)$$

$$B_{1m}^\pm(3w) = - \frac{3(\nabla \tilde{\Omega}_{1m})^2}{2\hbar w} - 6 \sum_n \frac{(\nabla \tilde{\Omega}_{1m}) \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{n1}}{\Delta\varepsilon_{1n} [a_{1n}(w) \mp 1]}, \quad (14)$$

$$B_{1m}^{\pm}(2\omega) = \frac{2(\nabla \tilde{\Omega}_{1m})^2}{\hbar \omega} + 12 \sum_n \frac{(\nabla \tilde{\Omega}_{1m}) \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{n1}}{\Delta \epsilon_{1n}} \left\{ \frac{-[a_{1n}(\omega) \mp 1]}{[a_{1n}(3\omega) \mp 1][a_{1n}(-\omega) \mp 1]} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3[a_{1n}(\omega) \mp 1]} \right\} - 24\hbar\omega \sum_{n,n'} \frac{[a_{1n}(\omega) \mp 1] \tilde{\Omega}_{1n} \tilde{\Omega}_{nm} \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{n'1}}{\Delta \epsilon_{1n} \Delta \epsilon_{1n'} [a_{1n'}(\omega) \mp 1][a_{1n}(3\omega) \mp 1][a_{1n}(-\omega) \mp 1]}, \quad (15)$$

$$B_{n'n}^{\pm}(2\omega) = \left\{ 6 \tilde{\Omega}_{1n} (\nabla \tilde{\Omega}_{nn'}) \tilde{\Omega}_{n'1} + 12\hbar\omega \sum_m \frac{\tilde{\Omega}_{1n} \tilde{\Omega}_{nm} \tilde{\Omega}_{mn} \tilde{\Omega}_{n'1}}{\Delta \epsilon_{mn} [a_{mn}(-\omega) \mp 1]} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\Delta \epsilon_{1n'} [a_{1n'}(-3\omega) \mp 1]} - \frac{1}{\Delta \epsilon_{1n} [a_{1n}(-\omega) \mp 1]} \right\}. \quad (16)$$

Здесь $\tilde{\Omega}_{vv}$ и $\nabla \tilde{\Omega}_{vv}$ — значения матричного элемента и его градиента в соответствующей особой точке. Сравнивая выражение для нелинейной высокочастотной проводимости (11) и (12) с выражением для концентрации электронов в полупроводнике со сверхрешеткой [3], легко видеть, что зависимость $\sigma_{3333}(n)$ в области $\epsilon_1(\pi/d) \ll \mu \ll \epsilon_2(\pi/d)$ носит линейный характер.

В качестве примера рассмотрим сверхрешетку с синусоидальным потенциалом с параметрами $V_0 = 8 E_0$, $d = 10^{-6}$ см, $m_3 = m_\perp = 0,1 m_0$, $\mu = 6 E_0$. Нелинейная восприимчивость $\chi_{3333}(\omega, \omega, \omega) = \frac{i}{\omega} \sigma_{3333}(\omega, \omega, \omega)$ в окрестности особых точек по порядку величины равна $10^{-5} - 10^{-6}$ ед. CGSE. Наличие корневой особенности в знаменателе позволяет увеличить нелинейные коэффициенты еще не более как на порядок, вследствие размытия резонанса столкновениями.

Из полученных выражений видно, что нелинейные восприимчивости в полупроводниках со сверхрешеткой существенно превосходят аналогичные величины в однородных кристаллах (последние $\sim 10^{-12}$ ед. CGSE) и имеют иную частотную зависимость.

Для выяснения эффективности преобразования первой гармоники в третью, кроме нелинейной восприимчивости, необходимо знать длину когерентности, определяемую по формуле

$$l_{\text{kog}} = 2\pi \frac{c}{\omega} [\epsilon(\omega)^{1/2} - \epsilon(3\omega)^{1/2}]^{-1},$$

где $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \Delta\epsilon(\omega)$, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость однородного кристалла, $\Delta\epsilon$ — поправка, связанная с межминизонными виртуальными переходами.

Простые оценки показывают, что для небольших концентраций носителей в полупроводнике со сверхрешеткой поправкой $\Delta\epsilon(\omega)$ можно пренебречь и длина когерентности совпадает с соответствующей величиной в однородном кристалле.

Из всего вышесказанного следует, что полупроводники со сверхрешеткой, обладая большими нелинейными восприимчивостями, могут быть эффективно использованы в качестве преобразователей электромагнитных сигналов в ИК области спектра.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Ю. А. Романову за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Esaki, R. Tsu, IBM, J. Res. Dev., **14**, 61 (1970).
2. L. Esaki, L. L. Chang, Phys. Rev. Lett., **33**, 495 (1974).
3. Ю. А. Романов, ФТП, **5**, 1434 (1971).
4. Р. Ф. Казаринов, Ю. В. Шмарцев, ФТП, **5**, 800 (1971).
5. Ю. А. Романов, Л. К. Орлов, ФТП, **7**, 253 (1973).
6. А. Я. Шик, ФТП, **6**, 1268, (1972).
7. R. Tsu, L. Esaki, Appl. Phys. Lett., **19**, 246 (1971).
8. Ю. А. Романов, Оптика и спектроскопия, **33**, (1972).
9. S. Jha, N. Bloembergen, Phys. Rev., **171**, 891 (1968).
10. Л. В. Келдыш, Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1968.
11. В. М. Файн, Квантовая радиофизика, **1**, М., 1972.
12. В. Н. Генкин, П. М. Медник, ЖЭТФ, **54**, 1137 (1968).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 октября 1975 г.

GENERATION OF THE THIRD HARMONIC IN SEMICONDUCTORS WITH
A SUPERLATTICE

L. K. Orlov

The nonlinear high-frequency conductivity of semiconductors with a superlattice is considered which describes the third harmonic generation in IR spectral region. It is shown that the main contribution to the nonlinearity mechanism in the considered frequency range is made by virtual interminizon electron transitions. The frequency dependence of the nonlinear susceptibility is characterized by the presence of one-dimensional peculiarities and exceeds considerably the analogous values in uniform crystals.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.4

**ДИФРАКЦИЯ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА КАССИОПЕЯ-А
НА ИСКУССТВЕННЫХ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ**

*В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Н. А. Митяков
В. А. Разин, А. И. Теплыkh, П. Б. Шавин, А. М. Томчинский*

Неоднородности электронной концентрации, возникающие в F -области ионосферы под воздействием мощного коротковолнового радиоизлучения, вызывают, как известно, появление (или усиление) флюктуаций интенсивности радиоизлучения дискретных радиоисточников [1-3]. Ниже изложены результаты наблюдений радиоисточника Кассиопея-А в околополуденные часы в феврале — апреле 1975 г. в районе г. Горького. Наблюдения проводились на частоте 25 MHz в двух пространственно-разнесенных пунктах, один из которых (P_1) находился в непосредственной близости от возмущающего передатчика, а другой (P_2) был удален в юго-западном направлении на расстояние 65 км. Передатчик работал в феврале на частоте $f_1 = 5,75 MHz$ с эффективной мощностью излучения $PG = 20 MW$ (G — коэффициент усиления антенны), а в марте — апреле на частоте $f_2 = 4,6 MHz$ с $PG = 12 MW$. Геометрические условия эксперимента показаны в плане на рис. 1. Контурами 3 и 4 на рис. 1 представлены

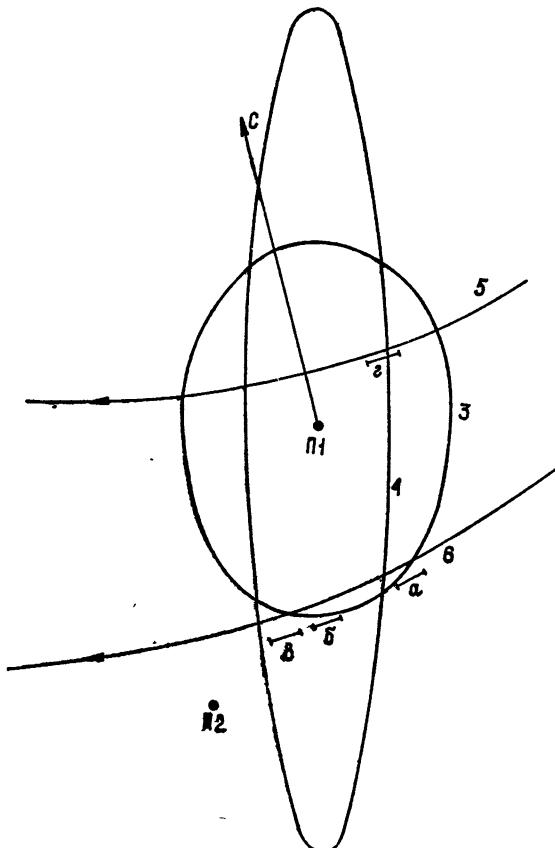


Рис. 1.

границы зон облучения ионосферы в горизонтальной плоскости соответственно на частотах f_1 и f_2 . Они определены для высоты 300 км и соответствуют двукратному уменьшению потока мощного радиоизлучения по сравнению с потоком в центре диаграммы направленности антенн передатчика. Кривыми 5 и 6 показаны траектории точек пересечения лучей, идущих от источника в пункты наблюдений, с плоскостью в ионосфере на высоте 300 км. Направление на север указано стрелкой.

Сеансы нагрева состояли из 13 минут непрерывной работы передатчика и последующей 17-минутной паузы. Они проводились в часы прохождения источника через диаграммы направленности приемных антенн в те дни, когда критические частоты ионосферы f_0F_2 превышали рабочую частоту передатчика. Сведения о состоянии ионосферы получались с помощью ионосферной станции вертикального зондирования АИС, расположенной в пункте П₁. В феврале, когда передатчик работал на $f_1 = 5,75 \text{ МГц}$, число сеансов нагрева было невелико; в марте и апреле, в связи с переходом на более низкую рабочую частоту $f_2 = 4,6 \text{ МГц}$ эксперименты велись в общей сложности в течение двадцати дней.

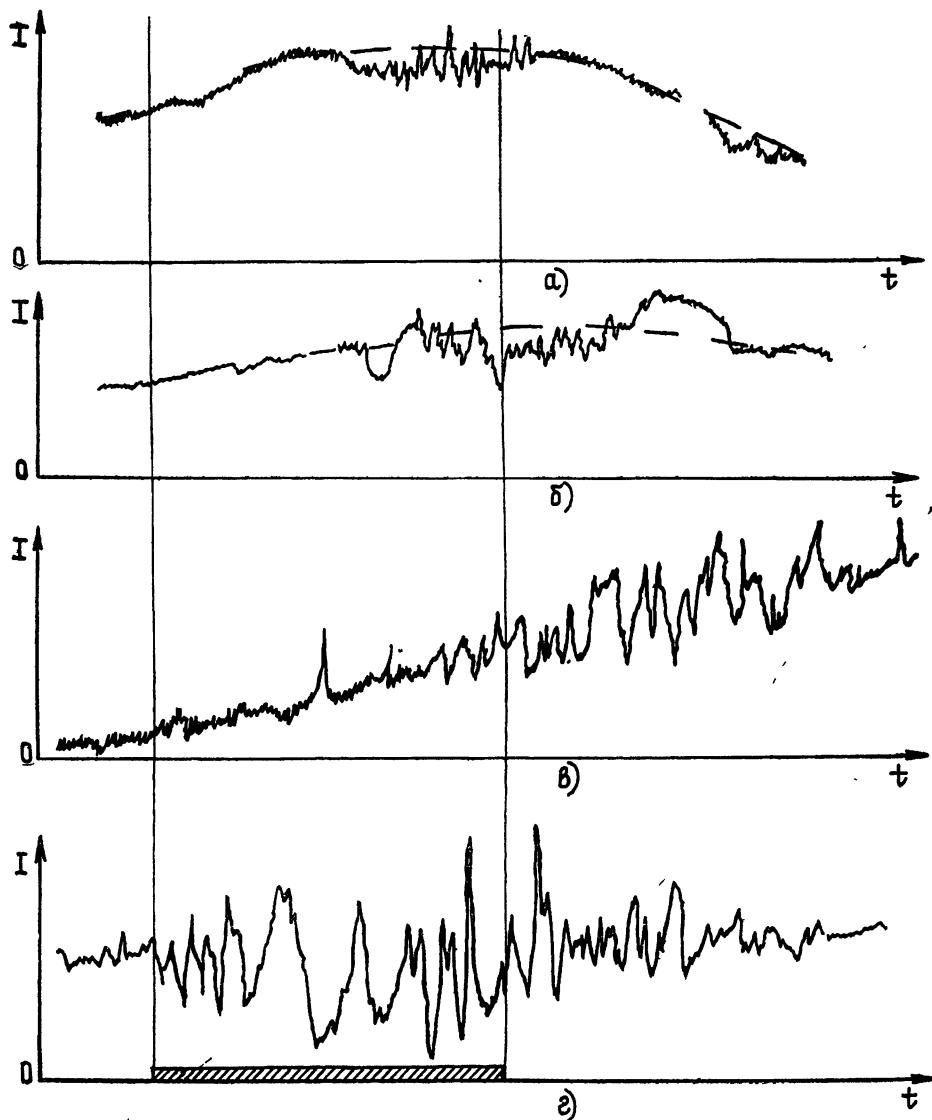


Рис. 2.

В первом пункте, находящемся вблизи передатчика, влияние воздействия мощного радиоизлучения на ионосферу четко регистрировалось во всех сеансах, проведенных на частоте 5,75 МГц, по появлению флюктуаций интенсивности дискретного источ-

ника в пределах контура 3 рис. 1 Однако при работе на частоте $f_2 = 4,6 \text{ МГц}$ эффект возмущения был обнаружен лишь примерно в половине сеансов нагрева. Во втором, вынесенном пункте наблюдений воздействие на ионосферу в пределах контуров 3 и 4 регистрировалось не во всех сеансах даже на частоте $f_1 = 5,75 \text{ МГц}$. Можно предполагать, что отсутствие эффектов появления (или усиления) флюктуаций интенсивности источника в ряде сеансов связано как с уменьшением эффективной мощности излучения при переходе с $f_1 = 5,75 \text{ МГц}$ на $f_2 = 4,6 \text{ МГц}$, так и с вариациями величины поглощения радиоволн в нижних слоях ионосферы.

В вынесенном пункте наблюдений отмечены также некоторые специфические особенности развития флюктуаций по сравнению с центральным пунктом. Они заключаются в том, что в ряде случаев флюктуации источника появлялись (или усиливались) лишь через 5—8 минут после включения передатчика. Несколько примеров такого запаздывания приведено на рис. 2. Две верхние записи интенсивности источника а) и б) получены 25.03.75 г. при работе передатчика на $f_2 = 4,6 \text{ МГц}$, третья в)—11.02.75 г. при работе на $f_1 = 5,75 \text{ МГц}$. Нижняя запись г) получена в пункте П₁ одновременно с третьей в). Пунктиром на верхних записях отмечено обычное прохождение источника через диаграмму направленности приемной антенны в П₂ при отсутствии флюктуаций источника. Периоды работы передатчика отмечены на рис. 1. штриховкой на оси времени и вертикальными линиями. Соответствующие рис. 2 интервалы времени работы передатчика отмечены также на рис. 1 отрезками кривых (а, б, в, г) рядом с траекториями 5 и 6.

На записях рис. 2 а, б, в хорошо заметно, что появление достаточно интенсивных флюктуаций происходило с весьма большой задержкой относительно момента включения передатчика. В то же время флюктуации не сразу исчезали и после выключения передатчика, а регистрировались в течение примерно двух минут в первом случае (рис. 2 а), восьми минут в третьем случае (рис. 2 в). Обратим внимание на то, что максимум флюктуаций в случае в) имел место после выключения передатчика. Все эти примеры позволяют высказать предположения о том, что в рассматриваемых случаях неоднородности электронной концентрации, вызывающие флюктуации источника при наблюдениях в П₂, возникали не в местах, отмеченных отрезками кривых (рис. 1 а, б, в), а вблизи от центра диаграмм направленности антенн передатчика, а затем передвигались к югу от области возмущения. В этом предположении горизонтальная скорость перемещения неоднородностей в направлении с севера на юг должна быть порядка 100 м/с. Этот вывод, разумеется, нуждается в дополнительном уточнении. В частности, были бы весьма полезны прямые измерения скорости ветра, переносящего искусственные неоднородности электронной концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. L. Rufenach, J. Geophys. Res., 78, 6804 (1973).
2. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, Н. А. Зуйков, Г. П. Комраков, Ю. С. Коробков, Д. С. Котик, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Ю. А. Сazonov, В. Ю. Трахтенгерц, В. Л. Фролов, В. А. Череповицкий, УФН, 113, 732 (1974).
3. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, Н. А. Зуйков, Г. Н. Комраков, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, В. Л. Фролов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, № 4, 516 (1975).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 декабря 1975 г.

УДК 550.38

СВОЙСТВА ИСКУССТВЕННЫХ ОНЧ СИГНАЛОВ ПОСЛЕ ДВУКРАТНОГО ПРОХОЖДЕНИЯ МАГНИТОСФЕРЫ

B. O. Rapoport, B. Yu. Trahtengerg, V. A. Cherepovitskij

Наблюдения искусственных ОНЧ сигналов, распространяющихся магнитосферным путем, обнаруживают ряд интересных явлений, существенных для понимания природы взаимодействия свистовых волн с магнитосферной плазмой. В частности, в экспериментах по приему магнитосферного эха квазимонохроматических ОНЧ сигналов в точке магнитосопряженной передающей станции, были обнаружены существенное уширение частотного спектра и амплитудная модуляция сигнала, а также возбуждение различного рода триггерных излучений [1, 2].

Здесь мы приведем результаты эксперимента по наблюдению магнитосферного обратного эха искусственных ОНЧ сигналов в точке передатчика.

Эксперимент был проведен в ноябре—декабре 1970 г. Приемник и передатчик располагались практически в одном месте с $L = 2,6$ (L — параметр Мак-Илвейна). Использовались посылки на частоте 15 кГц длительностью $\tau = 0,4$ и 0,8 с и периодом повторения $T = 3$ с. Каждые сутки проводились четыре 15-минутных сеанса (7, 17, 20 и 23 ч LT), причем первые 10 минут в каждом сеансе длительность увеличивалась в 2 раза. Регистрация сигнала велась с помощью широкополосного приемного устройства с полосой 300 Гц, а также на сетке частот (с шагом в 15 Гц), с использованием узкополосных фильтров ($\Delta f = 7$ Гц).

Магнитосферное эхо сигнала наблюдалось довольно регулярно во время вечерних иочных сеансов в период с 18 по 30 ноября. Примеры записей на узкополосные фильтры приведены на рис. 1.

Из наиболее характерных особенностей обратного эха, как и в случае прямого магнитосферного сигнала [2], следует отметить значительное удлинение спектра с асимметрией в сторону высоких частот и амплитудную модуляцию сигнала. На рис. 2 приведены типичные спектры обратного эха, полученные при усреднении 50 индивидуальных посылок. Мгновенный спектр испытывает значительные флуктуации от посылки к посылке. Средняя ширина спектра составляет $2\Delta f = 50$ Гц.

На амплитудных записях, как правило, наблюдалось дробление отраженного сигнала, который представлял собой группу импульсов длительностью 100—300 мс, расположение и интенсивность которых внутри посылки хаотически менялись на протяжении сеанса. Чаще всего, особенно для посылок с $\tau = 0,4$ с, время задержки обратного эха по отношению к зондирующему сигналу составляло $\sim 1,4$ с, что соответствует времени группового распространения по магнитосферному пути до магнито-сопряженной точки и обратно. Однако в 10% случаев, которые относятся к посылкам с $\tau = 0,8$ с, наблюдались диффузные отражения длительностью порядка 1,5 с с аномально малой задержкой (меньше 1,4 с). Для указанных отражений характерно быстрое нарастание и сравнительно медленный спад интенсивности к концу сигнала. Сравнительно часто до прихода основного сигнала наблюдался своеобразный «предвестник» — короткий (длительностью 0,1 с) импульс, задержка которого по отношению к зондирующему сигналу на протяжении сеанса плавно менялась в пределах $0,2 \div 0,6$ с с характерным временем ~ 2 мин. Пример такого дрейфа «предвестника» приведен на рис. 3.

В ряде сеансов была обнаружена зависимость интенсивности отраженного сигнала с задержкой 1,4 с от длительности посылок (рис. 1). Особенно четко это проявилось в сеансах 21.11.70 г. 23 ч LT и 27.11.70 г. 23 ч LT. В последнем сеансе увеличение амплитуды сигнала сопровождалось сужением его спектра.

Ряд описанных выше свойств обратного эха можно интерпретировать в рамках уже известных механизмов нелинейного взаимодействия ОНЧ волн с энергичными

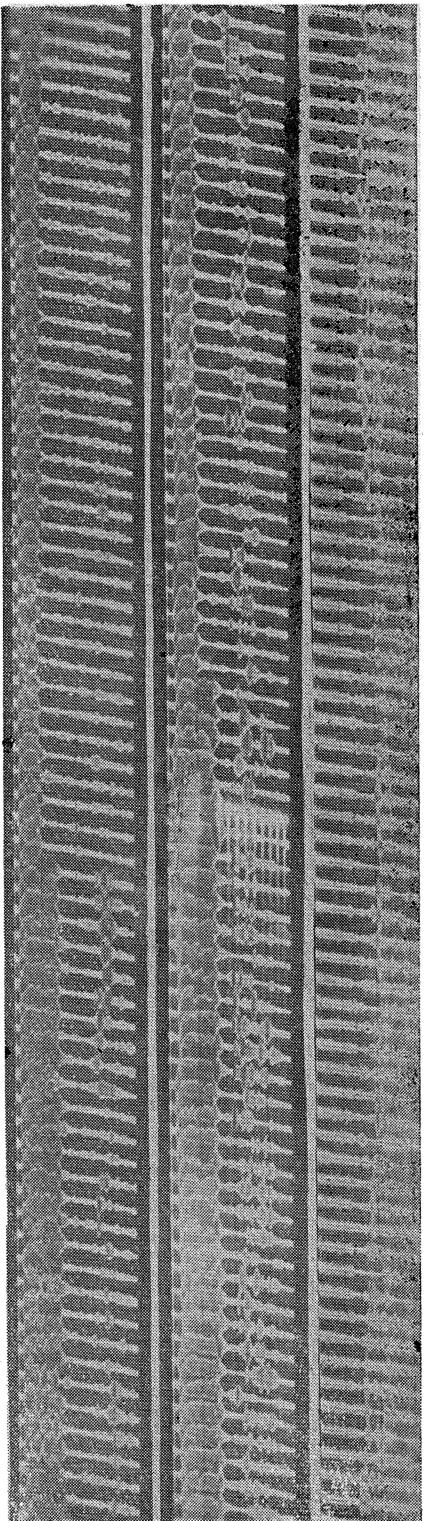


Рис. 1.

электронами радиационных поясов [3—6] или с основной магнитосферной плазмой [7, 8]. Это, в частности, относится к эффектам амплитудной модуляции и уширения частотных спектров ОНЧ сигналов. Труднее объяснить такие явления, как диффузные отражения с аномально малой групповой задержкой, а также зависимость амплитуды эха от длительности посылки. Диффузные отражения, скорее всего, формируются на протяжении всей траектории распространения ОНЧ сигнала. Возможный источник — возбуждение обратной по отношению к зондирующему сигналу волны энергичными

электронами на двойном резонансе, когда выполняется условие $v_z = \frac{\omega_1}{k_{z_1}} = -\frac{\omega_H - \omega_2}{k_{z_2}}$, где v_z — скорость резонансного электрона, ω_H — гирочастота электронов, ω_2 , k_{z_2} и ω_1 , k_{z_1} — частота и волновой вектор прямой и обратной волн. Другим механизмом может служить обратное рассеяние исходного сигнала на естественных мелкомасштабных неоднородностях, либо на неоднородностях, возбуждаемых самой волной.

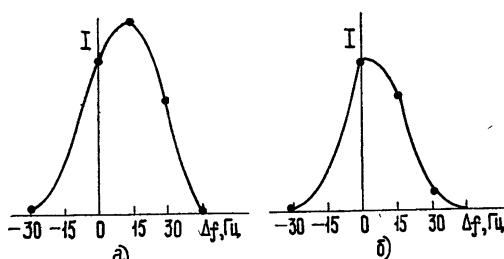


Рис. 2.

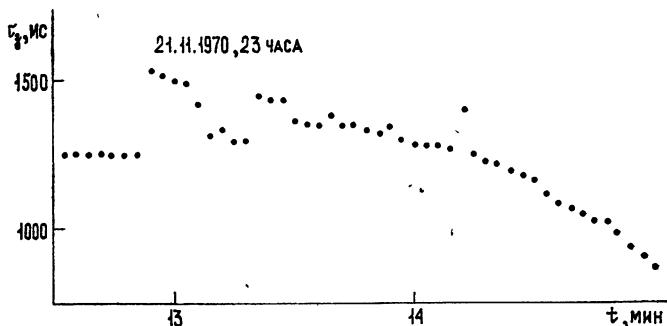


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Helliwell, Whistlers and Related Ionospheric Phenomena, Stanford, 1965.
2. Я. И. Лихтер, О. А. Молчанов, В. М. Чмырев, Письма в ЖЭТФ, 14, 465 (1971).
3. A. S. Das, J. Geophys. Res., 73, 7457 (1968).
4. Н. И. Будько, В. И. Карпман, О. А. Похотов, Cosmic Electrodynamics, 3, 145 (1972).
5. D. Napp, Planet. Space Sci., 19, 1141 (1971).
6. R. N. Sudan and E. Ott, J. Geophys. Res., 76, 4463 (1971).
7. V. Yu. Trakhtengerts, Planet. Space Sci., 21, 359 (1973).
8. О. А. Молчанов, В. Ю. Трахтенгерц, В. М. Чмырев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 3, 327 (1974).

УДК 523.164.32 : 621.317.757.38

КОМПЛЕКС СОЛНЕЧНЫХ РАДИОСПЕКТРОГРАФОВ ДИАПАЗОНА 100—1000 МГц

Ю. Б. Веденеев, В. О. Калошин, Н. М. Прятков

Динамические спектры спорадического солнечного радиоизлучения метрового и дециметрового диапазонов волн содержат важную информацию о физических процессах в активных областях [1]. Для регистрации этих спектров в НИРФИ были разработаны и созданы три широкодиапазонных динамических радиоспектрографа, перекрывающих диапазон 100—1000 МГц. Каждый спектрограф имеет диапазон около октавы; все спектрографы построены по однотипной блок-схеме, приведенной на рис. 1. Применен гетеродинный метод последовательного анализа с «нулевой» промежуточной частотой [2]. К основным узлам каждого спектрографа относятся усилитель высокой частоты с полосой, перекрывающей весь диапазон принимаемых частот, механически перестраиваемый гетеродин, усилитель промежуточной частоты с полосой $\Delta\nu$. Прием ведется по обоим каналам — прямому и зеркальному с полосой анализа $2\Delta\nu$. Нижняя граница полосы УПЧ выбрана равной 50—80 кГц для подавления аномальных шумов гетеродина и смесителя. Применены малошумящие гетеродины с бесконтактной настройкой и малошумящие смесители. В спектрографах осуществляется модуляция ($v_m = 5$ кГц) принимаемых и собственных шумов (прерывание тракта сигнала). В результате применения такого преобразования сигнала в спектрографе устраниены цепи постоянного тока в тракте сигнала, благодаря чему уменьшена величина флюктуаций усиления спектрографа. Примененный способ модуляции не устраняет влияния флюктуаций усиления высокочастотной части спектрографа, и поэтому модулятор может быть помещен в любом месте тракта сигнала до усилителя низкой частоты.

По сравнению с солнечными спектрографами, промежуточная частота которых много больше частот сигналов [3], или спектрографами с перестраиваемым преселектором [4], описываемые спектрографы проще и надежнее. Кроме того, при одинаковых параметрах спектрографов стабильность частотных характеристик отдельных блоков спектрографов [3, 4] должна быть более высокой.

Яркостная запись динамических спектров (на диаграмме «частота—время») производится на высококачественном фототелеграфном аппарате ФПБФ («Нева») на фотопленке размером $24 \times 30 \text{ см}^2$ (плотность записи 5 строк/мм). Второе детектирование осуществляется за счет нелинейности характеристик неоновой модуляторной лампы ТМН-2, излучающей модулированный сигналом световой поток, и фотопленки. Усреднение шума происходит при экспонировании фотопленки. Механизм строчной развертки фототелеграфа синхронно движет механизм перестройки частоты гетеродина.

Все три спектрографа установлены на станции Зименки (НИРФИ) на радиотелескопе с параболическим зеркалом диаметром 15 м^* [5] с системой совмещенных широкодиапазонных дипольных облучателей. Облучатели каждого диапазона представляют собой пары симметрично смешенных из фокуса излучателей (с сохранением их общего фазового центра в фокусе).

Поскольку время «пробега» гетеродином полосы анализа много больше $1/\Delta\nu$, отклик радиотелескопа отражает квазистационарные вариации спектральной плотности потока радиоизлучения Солнца (характерное время этих вариаций значительно больше $1/\Delta\nu$), и выражение для чувствительности ΔT спектрографа аналогично выражению для чувствительности радиометра [6]:

* В данном случае это максимальный допустимый размер зеркала. Действительно, на $\nu = 1000 \text{ МГц}$ ширина диаграммы направленности (по уровню 0,9) $\Delta\theta_{0,9} \approx 40'$, т. е. близка к угловому размеру солнечной атмосферы $\Delta\theta_R$, где могут происходить радиовсплески [1]. При использовании зеркала большего размера $\Delta\theta_{0,9} < \Delta\theta_R$, вследствие этого становятся существенными ошибки из-за уменьшения сигнала от краевых радиоисточников.

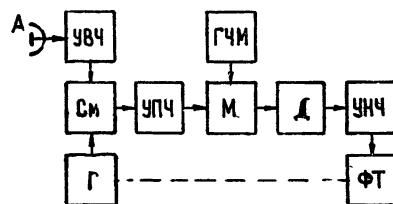


Рис. 1. Блок-схема спектрографа:
А—антenna, УВЧ—усилитель высокой частоты, См—смеситель, Г—гетеродин, УПЧ—усилитель промежуточной частоты, М—модулятор, ГЧМ—генератор частоты модуляции, Д—детектор, УНЧ—усилитель низкой частоты, ФТ—фототелеграф.

$$\Delta T \approx 10[T_a + T_0(N-1)]/\sqrt{\Delta \tau},$$

где ΔT — минимальный прирост антенной температуры в лодосе анализа, который надежно регистрируется спектрографом («ширина шумовой дорожки» учтена коэффициентом, равным шести); T_a — антенная температура при сопровождении Солнца, зависящая от частоты в соответствии с общими выражениями [1, 6]; $T_0 = 290$ К — стандартная температура; N — шум-фактор; τ — постоянная времени (время перемещения светового пятна на фотопленке на расстояние, равное размеру пятна $d = 0,2$ мкм), выбранная в несколько раз меньшей времени «пробега» гетеродином полосы анализа.

Формула отражает принцип неопределенности при аппаратурном анализе спектров [7]: при данной чувствительности необходимо $\Delta \tau = \text{const}$, что накладывает основное ограничение при выборе ширины диапазона спектрографа и разрешающей способности по частоте и времени. Основные параметры спектрографов выбраны таким образом, что при максимально возможной чувствительности обеспечивается неискаженная регистрация солнечных всплесков большинства основных типов (кроме отдельных всплесков I типа и тонкой структуры спектров всплесков, [1]).

Техническое описание отдельных спектрографов приведено в [8-9]. Спектрограф

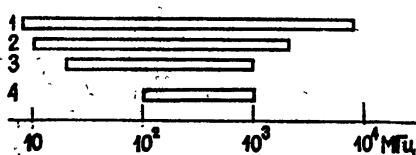


Рис. 2. Частотные диапазоны наблюдений станций:

1—Кулгура (Австралия), 2—Форт Дэвис (США), 3—Вессенай (ФРГ), 4—Зименки (СССР).

в диапазоне 100—1000 МГц основные параметры спектрографов этих станций близки.

На рис. 2 показаны частотные диапазоны наблюдений для наиболее хорошо оснащенных станций радиослужбы Солнца Австралии, США, ФРГ [10] и СССР. Оборудование всех станций позволяет регистрировать общую картину развития солнечной активности в широком диапазоне частот (при сглаживании деталей динамических спектров всплесков). В диапазоне 100—1000 МГц основные параметры спектрографов этих станций близки.

Таблица 1

№	Наименование параметров	Спектрографы		
		I	II	III
1	Диапазон частот, МГц	100—270	260—510	500—1000
2	Полоса УПЧ, МГц	0,5	0,5	1,5
3	Частотное разрешение, МГц	1,0	1,0	3,0
4	Время перестройки по диапазону, с	0,4	0,7	1,1
5	Частота повторения анализа, Гц	1,0	1,3	1,35
6	Постоянная времени, мс	1,0	0,7	0,75
7	Шум-фактор	3,0	3,0	10—15
8	Чувствительность телескопа, 10^{-22} $Bt/m^2 \cdot \text{Гц}$	2—5	5—10	3—5
9	То же в долях потока спокойного Солнца	0,6	0,4	0,25—0,1
10	Длительность непрерывной работы, час	10	10	10

Начиная с 1970 г. на спектрографах ведутся наблюдения в периоды повышенной солнечной активности [11, 12]. Каталог данных наблюдений на спектрографах в 1970—1974 гг. (Solar radio emission, Spectral Observation from 100 to 1000 MHz, Date 1970—1974, Radiophysical Research Institute, Gorky, USSR) находится в библиотеке Международного центра геофизических данных (МЦД Б2, Москва). Результаты анализа спектров некоторых необычных явлений опубликованы в [13, 14].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
2. J. C. Greene and J. F. Lyons, Proc. IRE, 47, 335 (1959).
3. S. Suzuki, C. F. Attwood and K. V. Sheridan, IEEE Trans., AP-14, 91 (1966).
4. А. К. Маркееев, Геомагнетизм и аэрономия, 1, 999 (1961).
5. В. С. Журавлев, А. А. Петровский, Б. П. Погребный, Астрон. ж., 43, 220 (1966).

6. Н. А. Есепкина, Д. В. Корольков, Ю. Н. Парийский, Радиотелескопы и радиометры, изд. Наука, М., 1973.
7. Г. Я. Мирский, Аппаратурное определение характеристик случайных процессов, изд. Энергия, М., 1972.
8. Ю. Б. Веденеев, Н. М. Прятков, ПТЭ, № 5, 122 (1972).
9. Ю. Б. Веденеев, В. О. Калошин, Н. М. Прятков, Солнечные данные, № 8, 75 (1975).
10. Solar-Geophysical Data, № 366 (supplement) (1975).
11. Ю. Б. Веденеев, Н. М. Прятков, К. А. Шмелев, Астрон. циркуляр, 615, 1 (1971).
12. Ю. Б. Веденеев, В. О. Калошин, Н. М. Прятков, Астрон. циркуляр, 875, 1 (1975).
13. Ю. Б. Веденеев, Астрон. ж., 50, 1094 (1973).
14. С. Т. Акиньян, Ю. Б. Веденеев, И. М. Чертов, Солнечные данные, № 11, 88 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 декабря 1975 г.

УДК 621.371.25

РАКУРСНОЕ РАССЕЯНИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫХ РАДИОСИГНАЛОВ НА ИСКУССТВЕННЫХ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, Н. А. Митяков, С. В. Поляков,
В. П. Урядов, В. Л. Фролов

Как показано в [1–5], при воздействии на F-слой ионосферы мощным радиоизлучением в нем возникают неоднородности плазмы с широким спектром масштабов. Сильно вытянутые вдоль магнитного поля Земли мелкомасштабные неоднородности (масштабы l_{\perp} поперек поля порядка 1–30 м) вызывают рассеяние локационных сигналов, обладающее высокой степенью ракурсного чувствительности [2]. В настоящей работе приведены первые результаты изучения ракурсного рассеяния на искусственных ионосферных неоднородностях с помощью приема коротковолновых радиосигналов дальних вещательных станций.

Возмущение ионосферы проводилось в Зименках (Горький) с помощью радиопередатика со средней мощностью около 130 кВт, работающего на частоте 4,62 МГц на антенну с вертикальной диаграммой направленности ($\text{КНД} \sim 100$). Излучалась обыкновенная мода радиоволн. Диагностика возмущенной области (ВО) осуществлялась с помощью излучения (в режиме несущей) дальних станций с азимутов 69° и 75° , работающих соответственно на частотах 13,2 и 18,8 МГц. Прием излучения этих станций осуществлялся в Волгоградской области в пункте, примерно удовлетворяющем условию зеркального рассеяния от вытянутых искусственных неоднородностей (для траекторий сигналов, близких к горизонтальным в окрестности возмущенной области ионосферы). Прием сигналов станций осуществлялся на горизонтальную ромбическую антенну, ориентированную на Горький. При этом сигналы, рассеянные возмущенной областью (ВО), принимались в максимум диаграммы направленности антенны ($\text{КНД} \sim 100$), а прямые сигналы от станций — в боковой лепесток. Для калибровки уровня прямого сигнала проводились измерения на горизонтальные диполи. Эксперимент проводился в период с 16 августа по 7 сентября 1975 года; основной цикл непрерывных измерений был проведен с 28 августа по 7 сентября 1975 г. Возмущающий передатчик (ВП) работал с 08 до 12 час мск и с 16 до 19 час мск циклами по 15 мин (7 мин — излучение, 8 мин — пауза) и по 30 мин (13 мин — излучение, 17 мин — пауза). В тех случаях, когда ВП не работал (или был выключен за несколько минут до этого), принимались только прямые сигналы вещательных станций. Их амплитуда A_0 была подвержена обычным замираниям ионосферного происхождения, а ее средняя величина определялась условиями распространения на трассе. Через 20–60 с после включения ВП в пункт приема, кроме основного, приходило излучение, рассеянное неоднородностями ВО. Из-за движения рассеивающих неоднородностей частота рассеянных волн была сдвинута на величину Ω_s относительно частоты прямой волны. Поэтому рассеянное излучение с амплитудой A_s прежде всего проявлялось в появлении на записи квазисинусоидальных биений с характерным периодом Ω_s^{-1} и глубиной модуляции A_s/A_0 при $A_s/A_0 \ll 1$ и A_0/A_s при $A_s/A_0 \gg 1$. В последнем случае существенно увеличи-

вался и уровень принимаемого сигнала. Через несколько десятков секунд после выключения ВП модуляция исчезала. Указанные характеристики сигналов можно видеть из примеров записей, приведенных на рис. 1 и 2 (рис. 1 а—18,8 МГц, рис. 1 б—запись сигнала ВП на $f = 4,6$ МГц, рис. 2 а—18,8 МГц, рис. 2 б—ВП, рис. 2 в—13,2 МГц). Исчезновение модуляции через 10—20 с после выключения ВП особенно отчетливо видно на рис. 2; на рис. 1 иллюстрируется случай, когда амплитуда рассеянного излучения A_s была больше A_0 .

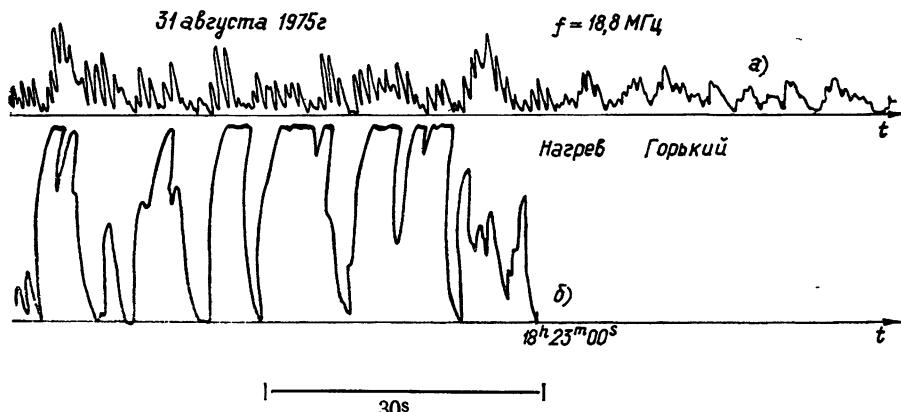


Рис. 1.

На частоте 18,8 МГц среднее значение Ω_s составляло 2,2—3,2 Гц. Отношение $\eta_s = \Omega_{sf_1}/\Omega_{sf_2}$ для частот $f_1 = 18,8$ МГц и $f_2 = 13,2$ МГц было в среднем равно 1,46, что близко к отношению частот $f_1/f_2 = 1,42$ и свидетельствует о допплеровском механизме смещения частоты рассеянных волн*.

За время непрерывных наблюдений рассеянные сигналы регистрировались в основном с 08 до 09 часов мск и с 17 до 19 часов на $f = 18,8$ МГц и с 08 до 09 часов с 16 до 18 часов на $f = 13,2$ МГц. Последнее видно из гистограммы (рис. 3), иллюстрирующей появляемость рассеянных сигналов с амплитудой A_s , равной или большей 1/30 от A_0 . Отсутствие рассеянных сигналов в дневные часы частично связано, по-видимому, с сильным поглощением мощной волны (4,62 МГц) в нижней ионосфере, т. е. с уменьшением эффективности нагрева. Однако сильные вариации A_s наблюдались и в утренние, и вечерние часы от сеанса к сеансу, и их вряд ли можно связать только с вариациями интегрального поперечника рассеяния в ВО без учета изменений условий ракурсной чувствительности за счет вариаций углов падения сигналов станций на рассеивающую область.

На $f = 13,2$ МГц отношение амплитуд рассеянных сигналов в вечерние и утренние часы $A_{s\text{в}}/A_{s\text{у}}$ больше единицы и порядка отношения амплитуд прямых сигналов $A_0\text{в}/A_0\text{у}$. Таким образом, на этой частоте увеличение A_s вечером по сравнению с утренними часами можно связать, преимущественно, с изменением уровня прямого сигнала A_{00} в ВО, вызванного изменением поглощения радиоволн на трассе. На $f = 18,8$ МГц отношение $A_{s\text{в}}/A_{s\text{у}}$ больше отношения $A_0\text{в}/A_0\text{у}$. Как показали оценки, такое отличие частично может быть связано с малой эффективностью ромбической антенны при приеме сигналов под близкими к горизонту углами, что и должно было иметь место в вечерние часы, когда МПЧ на «последнем» скачке была близка к рабочей частоте.

Расчеты показали, что в случаях приема рассеянных возмущенной областью сигналов поперечники рассеяния, определенные в предположении равенства (с учетом поглощения) потоков прямого сигнала в пункте приема P_{c_1} и в возмущенной области P_{c_2} ,

* Отличие η_s от f_1/f_2 частично связано как с отличием показателя преломления среды в рассеивающей области от единицы (на плазменной частоте $f_0 = 4,62$ МГц величина $\eta_s \approx 1,44$), так и с различием углов падения на возмущенную область.

Учитывая значения Ω_s на $f = 18,8$ МГц, по известной формуле $\Omega_s \approx V \lambda^{-1} |\cos \theta_2 - \cos \theta_1|$ (λ — длина волн, θ_1 и θ_2 — углы между вектором скорости неоднородностей и волновыми векторами соответственно падающей и рассеянных волн) получаем для $v |\cos \theta_2 - \cos \theta_1| \sim v \gtrsim 35 \div 50$ м/с, что находится в хорошем соответствии с результатами локационных наблюдений [2].

$f = 16.8 \text{ MHz}$

6 сентября 1975г

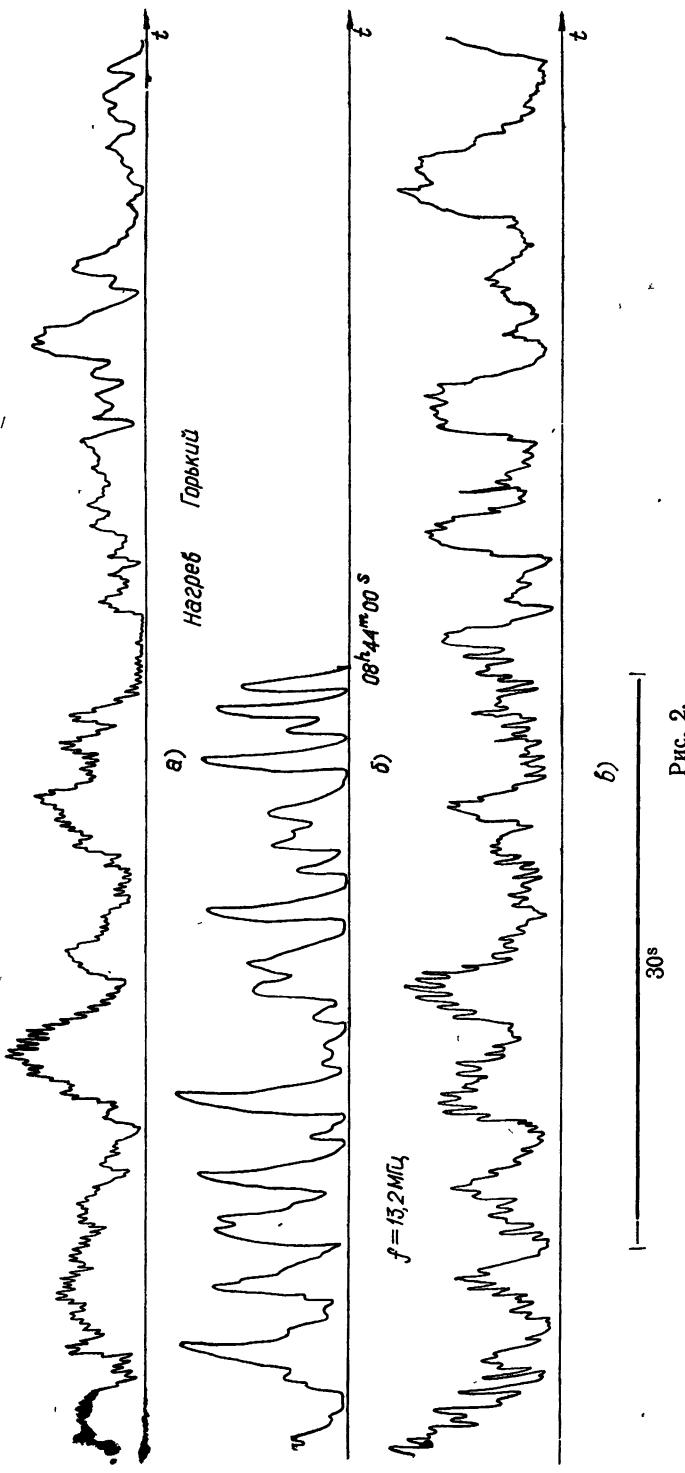


Рис. 2.

составляли величину $\sigma \geq 10^8 \text{ м}^2$. Такие значения согласуются с данными о поперечниках локационного рассеяния, полученных в [2]. В отдельных случаях, особенно в вечерние часы, величины σ превышали 10^8 м^2 . Следует отметить, однако, что могли быть ситуации (особенно в вечерние часы), когда $P_{c_2} > P_{c_1}$ и, следовательно, истинные значения σ могли быть меньше приведенных выше.

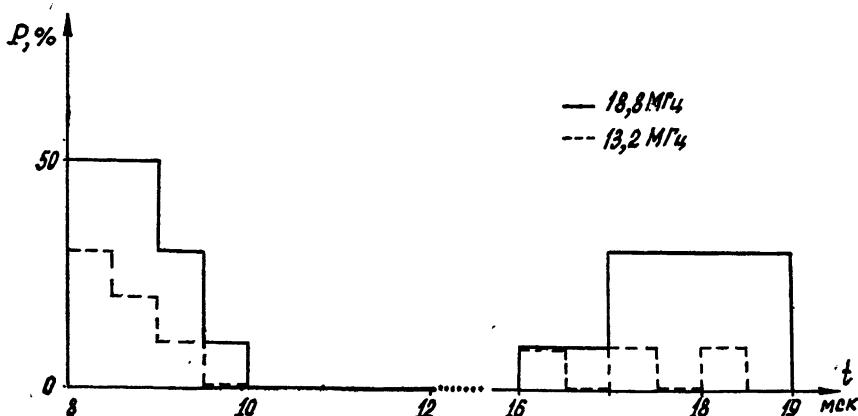


Рис. 3.

Авторы глубоко признательны Н. П. Беньковой за помощь в организации эксперимента и П. П. Беляеву, Ю. Д. Вдовину, В. С. Караванову, А. В. Рахлину за участие в подготовке аппаратуры для экспедиционного пункта.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Carroll, E. J. Violette and W. F. Uttaut, *Radio Sci.*, 9, № 11 (1974).
2. P. A. Fialer, *Radio Sci.*, 9, № 11 (1974).
3. S. A. Bowhill, *Radio Sci.*, 9, № 11 (1974).
4. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов и др., Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 4, 516 (1975).
5. Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков и др., Тезисы докладов VI Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, изд. Казанского университета, 1975; Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 19, № 4, 505 (1976).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 февраля 1976 г.

УДК 538.69

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

A. B. Гребенников, И. Д. Золотарев, Н. Л. Манаков

При исследовании процессов взаимодействия систем спинов с внешними переменными магнитными полями уравнения Блоха для вектора намагниченности $M(t)$ допускают аналитическое решение в важном случае постоянного магнитного поля H_0 плюс монохроматическое возмущение с частотой ω . К задачам такого типа относится случай параметрического резонанса [1] (H_0 параллельно РЧ полю $H_1 \cos \omega t$), эксперименты Белла—Блюма [2], в которых интенсивность пучка света, ориентирующего атомы в направлении, перпендикулярном H_0 , модулируется с частотой ω . Возможны

также другие механизмы модуляции параметров в системе магнитных моментов, приводящие к резонансным параметрическим эффектам [3, 4].

Во всех перечисленных случаях, уравнение для двух составляющих вектора намагниченности, объединенных в одну комплексную функцию $M_+(t) = M_a(t) + iM_b(t)$, можно привести к виду*

$$\frac{dM_+(t)}{dt} + \left(i\omega_0 + \frac{1}{\tau} + \omega_1 \cos \omega t \right) M_+(t) + M_0 \omega_1 \cos \omega t = 0, \quad (1)$$

где величина ω_1 может быть как вещественной (глубина модуляции света накачки при оптической ориентации, эквивалентный коэффициент усиления петли АРУ), так и чисто мнимой (напряженность РЧ поля, глубина модуляции g -фактора [4] и т. д.). Периодическое решение (1) хорошо известно [1]:

$$M_+(t) = M_0 \left(\Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n e^{in\omega t} + \Phi_{-n} e^{-in\omega t} \right). \quad (2)$$

Здесь

$$\Phi_n = (1 + i\omega_0\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k \left(-i \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_{k+n} \left(-i \frac{\omega_1}{\omega} \right)}{1 + i(\omega_0 + k\omega)\tau}, \quad (3)$$

J_m — функция Бесселя. Неудобством решения уравнения (1) в форме (3) является наличие бесконечного ряда в выражении для коэффициентов Фурье, который затрудняет исследование Φ_n , в частности, при больших ω_1/ω , когда аргументы функции Бесселя не малы. В настоящем сообщении получено решение уравнения (1) в более простом виде, свободном от указанного недостатка.

Имея в виду использование решения (1) в САР и системах АРУ, где существенным является и переходный режим, выражение для $M_+(t)$ с начальным условием $M^+(0) = M_+$ после элементарных преобразований запишем в виде

$$M_+(t) = (M_+ + M_0 - M_0 \Phi(0)) \exp \left[- \left(i\omega_0 + \frac{1}{\tau} \right) t - \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t \right] + M_0 (\Phi(t) - 1), \quad (4)$$

$$\text{где } \Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{in\omega t}, \quad \Phi_n = 2iz(-1)^n \int_0^{\infty} dx e^{ix(n-2z)} I_n \left(2 \frac{\omega_1}{\omega} \sin x \right), \quad z = \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{i}{\omega\tau},$$

$I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

Разложим I_n в степенной ряд и используем интеграл

$$\int_0^{\infty} dx e^{ix(n-2z)} (\sin x)^{2k+n} = \frac{(-1)^{(n-1)/2} 2^{-2k-n-1} \pi (2k+n)!}{\sin \pi z \Gamma(k+n+1-z) \Gamma(k+1+z)}, \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} z < 0, \quad 2k+n \geq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

который может быть проверен непосредственно, используя формулы (3.895.1,4) таблиц интегралов [5]. В результате $\Phi_{n>0}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{n>0} &= \frac{(-1)^{n/2} \pi z}{\sin \pi z} \frac{(\omega_1/2\omega)^n}{\Gamma(n+1-z) \Gamma(1+z)} {}_2F_3 \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; n+1, n+1-z, 1+z; \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{\pi z}{\sin \pi z} J_z \left(-i \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_{n-z} \left(-i \frac{\omega_1}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

При этом

$$\Phi_{-n}(z) = [\Phi_n(z^*)]^*.$$

При получении последнего равенства в (6) использовано известное разложение произведения двух функций Бесселя от одинакового аргумента в обобщенный гипергеометрический ряд ${}_2F_3$ [7].

Выражение (6) для Φ_n имеет более простую структуру по сравнению с (3), и удобнее для анализа. Любопытна, в частности, факторизация «резонансного» члена

* Заметим, что уравнение такого типа возникает также в системах автоматического регулирования (САР) и радиотехнических системах с автоматической регулировкой усиления первого порядка (АРУ) при воздействии сигнала с гармонической огибающей; причем резонансные эффекты в этом случае отсутствуют ($\omega_0=0, \operatorname{Im} \omega_1=0$) [6].

$\pi z / \sin \pi z$ и члена, зависящего от напряженности (или глубины модуляции) периодического возмущения, причем «резонансный» член не зависит от номера n гармоник Фурье разложения $M_+(t)$. Вблизи « l -фотонного» резонанса $\left(\frac{\Delta}{\omega} = \frac{\omega_0 - l\omega}{\omega} \gg 1\right)$ имеем

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} \approx \frac{(-1)^l \omega}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{\omega \tau}} \frac{1}{\Delta - l \frac{\omega}{\pi} \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega \tau}}, \quad (7)$$

и для времен релаксации τ , больших по сравнению с $1/\omega$ ($\omega\tau \gg \pi$), получаем обычную лоренцову форму резонанса с шириной $1/\tau$. Таким образом, при быстрой модуляции ($\omega\tau \gg \pi$) происходит сужение линии по сравнению с $1/\tau$. Существенно, что резонансными формально являются все гармоники спектра $M_+(t)$ и «резонансная» l -я гармоника будет максимальной лишь в случае слабого возмущения $\omega_1/\omega \ll 1$, когда $I_{l-z}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \approx I_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \sim 1$. В противном случае возможно подавление l -й гармоники, сателлитами, веса которых определяются величиной $I_{n-l}(\omega_1/\omega)$.

Как следует из (6), увеличение глубины модуляции ω_1 времени релаксации приводит к монотонному возрастанию $\Phi_n \sim I_{n-z}(\omega_1/\omega)$, а при увеличении амплитуды НРЧ поля ($\omega_1 = i\gamma H$) возникают осцилляции в соответствии с поведением функций Бесселя $J_{n-z}(\gamma H/\omega)$.

Отметим, что из сравнения (3) и (6) следует полезная формула суммирования для функций Бесселя:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+z} I_k(x) I_{k+n}(x) = \frac{\pi}{\sin \pi z} I_z(x) I_{n-z}(x), \quad (8)$$

которая представляет собой разложение функции в правой части равенства по полюсам $1/\sin \pi z$, аналогичное разложению Миттаг—Леффлера функции $f(z)$ в теории функции комплексного переменного [8]. Заменяя x на ix , получаем равенство, содержащее функции $J_a(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Б. Александров, О. В. Константинов, В. И. Ходовой, В. И. Перель, ЖЭТФ, 45, № 2, 503 (1963).
2. W. E. Bell and A. L. Bloom, Phys. Rev. Lett., 6, № 6, 280 (1961).
3. Н. М. Померанцев, В. М. Рыжков, Г. В. Скроцкий, Физические основы квантовой магнитометрии, изд. Наука, М., 1972.
4. Л. Г. Малышев, Л. Н. Новиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 18, 1118 (1975); Письма в ЖЭТФ, 20, № 3, 177 (1974).
5. В. В. Крохин, Элементы радиоприемных устройств СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1964.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений, изд. Наука, М., 1971.
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, том 2, изд. Наука, М., 1966.
8. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, изд. Наука, М., 1964.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
23 декабря 1975 г.

X Р О Н И К А**IV. ВСЕСОЮЗНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ЛАЗЕРНОМУ ЗОНДИРОВАНИЮ
АТМОСФЕРЫ**

С 28 по 30 июня 1976 года в Томске проходил IV Всесоюзный симпозиум по лазерному зондированию атмосферы — традиционное совещание советских ученых по вопросам дистанционных измерений параметров атмосферы. Симпозиум был организован Институтом оптики атмосферы СО АН СССР, Научным Советом по комплексной проблеме «Распространение радиоволн» Отделения общей физики и астрономии АН СССР и секцией физической метеорологии научного Совета по метеорологии.

В симпозиуме приняло участие более 160 специалистов, представляющих 52 научно-исследовательских учреждения Академии наук СССР, Гидрометеослужбы СССР и других ведомств. Всего на заседаниях было заслушано 107 докладов. К началу симпозиума были изданы развернутые тезисы докладов [1].

На пленарном заседании, проведенном в день открытия симпозиума, были заслушаны доклады, анализирующие отдельные направления лазерной и акустической локации атмосферы.

В докладе В. Е. Зуева, Г. М. Крекова, И. В. Самохвалова «Лазерное зондирование атмосферных аэрозолей» сделан подробный обзор работ, выполненных в ИОА и направленных на разработку методов дистанционного исследования микрофизических характеристик аэрозолей с использованием лазеров. В последние годы проблема исследования аэрозолей стала еще более острой из-за их значительных выбросов в атмосферу в результате промышленной деятельности. О. К. Костко (Долгопрудный, Моск. обл.) в докладе «Использование лазерных локаторов в глобальном мониторинге» рассмотрел применение лазеров для регулярных наблюдений за состоянием планеты в целом. Большое внимание в докладе также удалено развитию городских лазерных наблюдений с целью прогнозирования и разработки оперативных схем контроля за загрязнением воздуха. В докладе В. Е. Зуева, В. Я. Съедина «Акустические методы зондирования пограничного слоя атмосферы» дан анализ акустических методов диагностики атмосферы, их преимуществ и места среди других дистанционных методов. Как показано в докладе, основным достоинством акустических систем является их сравнительная простота и низкая стоимость.

Секционные заседания были посвящены следующим темам:

1. Лазерные исследования атмосферного аэрозоля, включая индустриальные загрязнения.
2. Лазерное зондирование облаков и туманов, обратные задачи теории светорассеяния.
3. Использование спектроскопических эффектов при лазерном зондировании атмосферы, определение газового загрязнения атмосферы.
4. Использование акустических волн для дистанционного определения параметров атмосферы.

5. Системы лазерной и акустической локации, автоматизация обработки результатов измерений.

6. Определение параметров турбулентности и скорости ветра оптическими методами.

В ряде докладов рассматривались результаты исследования профилей аэрозоля и их пространственных и временных вариаций в тропосфере и стратосфере. В нескольких докладах изучались вопросы влияния метеорологических условий в атмосфере на обратное рассеяние оптических и акустических волн, интерпретации данных зондирования и точности измерений. Значительное число докладов было посвящено исследованию эффектов многократного рассеяния и деполяризации лидарных сигналов при одночастотном зондировании.

Была заслушана серия докладов о различных способах определения газового состава атмосферы и информативности спектроскопических эффектов при лазерном зондировании. Рассмотрение узлов и блоков лазерных и акустических локаторов и автоматизированных систем регистрации, обработки и хранении измерительной информации явилось темой ряда докладов. Несколько докладов было посвящено разработке дистанционных методов определения параметров атмосферной турбулентности и скорости ветра.

На заключительном заседании было принято решение, которое подвело итог выполненных исследований и поставило задачи на будущее: определение потенциальных возможностей систем лазерного зондирования, потенциальных точностей измерения параметров атмосферы, предельно возможных дальностей зондирования; проведение комплексных работ по определению оптических характеристик атмосферного аэрозоля с целью набора статистических данных и создания оптической модели атмосферы; разработка методов решения обратных задач лазерной спектроскопии применительно к дистанционному зондированию атмосферы; разработка систем обработки измерительной информации при зондировании атмосферы. В решении симпозиума отмечено, что лазерное зондирование у нас в стране достигло значительных успехов и в настоящее время ряд разработок лидаров для целей определения наклонной видимости, высоты нижней границы облачности, массовой концентрации индустриального аэрозоля находится в готовности к промышленному внедрению.

ЛИТЕРАТУРА

1. IV Всесоюзный симпозиум по лазерному зондированию атмосферы, Тезисы докладов, Томск, 1976, стр. 374.

В. Е. Зуев
Г. Г. Матвиенко