Отсюда, в частности, вытекает следующая связь между важной в теории турбулентной диффузии лагранжевой корреляционной функцией компонент вектора скорости одной фиксированной частицы в моменты t_1, t_2, $B^L_{ij}(t_1, t_2)$ со статистическими свойствами эйлеровых характеристик жидкости:

$$B^L_{ij}(t_1, t_2) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{10}{\cdots} \int \rho_1 \rho_2 v_{1i} v_{2j} w_2 [v_{1i}, v_{2j}, \rho_1, \rho_2; x_1, x_2,$$

$$t_1, t_2 \mid \delta(x - x_0)]\, dx_1\, dx_2\, dv_{1i}\, dv_{2j}\, d\rho_1\, d\rho_2.$$

6. Особенно наглядные связи существуют между одноточечными вероятностными эйлеровыми распределениями и статистическими свойствами жидкой частицы. Так, при $m = 1$ тождество (3) принимает вид

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1 [v, \rho, x; t \mid x_0]\, \rho_0(x_0)\, dx_0 \equiv \rho\, w_1 [v, \rho; x, t \mid \rho_0(x)].$$

Для несжимаемой жидкости, приняв здесь $\rho_0 \equiv 1$, получим:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1 [v, x; t \mid x_0]\, dx_0 \equiv w_1 [v; x, t]. \tag{5}$$

Аналогичное соотношение для n-точечных распределений найдено в [3]. Отсюда, как частный случай, следует известный [2, 3] вывод о том, что вероятностное распределение поля скоростей несжимаемой статистически однородной жидкости совпадает с распределением скорости жидкой частицы.

Отметим, что все найденные выше соотношения легко обобщаются на случай жидкости, текущей в трубах или других ограниченных системах. При этом областью интегрирования в них является занятый жидкостью объем.

Приведем в заключение еще одно, вытекающее из (5), симметричное соотношение между вероятностными распределениями скорости жидкой частицы и поля скоростей в фиксированной точке:

$$\lim_{V \to V_0} \frac{1}{V} \iiint\limits_{V} f_1 [v; t \mid x_0]\, dx_0 \equiv \lim_{V \to V_0} \frac{1}{V} \iiint\limits_{V} w_1 [v; x, t]\, dx.$$

Здесь V_0 — объем, занятый жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, Докл. АН СССР, 134, № 2, 304 (1960).
2. J. L. Lumley, J. Math. Phys., 3, № 2, 309 (1962).
3. Б. Я. Любимов, Докл. АН СССР, 184, № 5, 1069 (1968).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 9 сентября 1975 г.

УДК 538.56

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ПЛОСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Н. Н. Домиловская

Известно, что при асимптотически медленном изменении коэффициента при возвращающей силе в одномерном гармоническом осцилляторе отношение энергии колеблющейся частицы к частоте колебаний есть адиабатический инвариант, притом бесконечного порядка. Если учесть, что отношение энергии колебания к его частоте в квантовомеханическом случае есть просто номер состояния, то можно сказать, что при асимптотически медленном изменении указанного коэффициента сохраняется номер состояния, в котором находится частица. В данной работе получены аналогичные результаты (по необходимости более слабые, так как нельзя было надеяться, что соответствующие величины будут асимптотическими инвариантами бесконечного порядка) для классического плоского электромагнитного резонатора. При этом асимптотически медленному изменению коэффициента в гармоническом осцилляторе между заданными начальным и конечным значениями соответствует асимптотически медленное перемещение границы резонатора между заданными начальным и конечным положениями.

Надо отметить, что динамика электромагнитного поля в плоском резонаторе с подвижной границей рассматривалась в ряде работ (см. [2, 3]). Однако цели и методы этих работ отличны от целей и методов данной статьи.

Пусть в плоском резонаторе без потерь левая граница ($x = 0$) неподвижна, а правая движется по произвольному закону: $x = a(t)$, $v = \dot{a}(t)$.

Электрическое поле в резонаторе представим в виде

$$E_0(x, t) = E_+(x - ct) + E_-(x + ct).$$

Перейдем к «резонатору» с границами в точках $x = a(t)$, $x = -a(t)$, переопределив поле E:

$$E(x, t) = \begin{cases} E_+(x - ct) & (a(t) \geqslant x > 0) \\ -E_-(-x + ct) & (0 \geqslant x \geqslant -a(t)) \end{cases}.$$

Разложим $E(x, t)$ в ряд Фурье:

$$E(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(t) \exp(ik_m x) \qquad (k_m = \pi m/a(t)).$$

В силу линейности и однородности уравнений электромагнитного поля и граничных условий изменение амплитуд $C_m(t)$ описывается системой уравнений:

$$\frac{dC_n}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{nm}(t)\, C_m. \tag{1}$$

Учитывая закон отражения на подвижной границе [1]:

$$E_{\text{отр}}(t, a(t)) = \frac{c - v(t)}{c + v(t)} E(t, a(t)),$$

после несложных вычислений имеем:

$$A_{mm} = \frac{n}{m - n} \frac{v(t)}{a(t)} (-1)^{m-n} \qquad (m \neq n),$$

$$A_{mm} = -i \frac{\pi mc}{a(t)} - \frac{v(t)}{a(t)}.$$

Проведя в уравнении (1) замену

$$B_n(t) = (-1)^n C_n(t) \frac{a(t)}{a(0)} \exp\left(i \int_0^t \omega_m(t')\, dt'\right),$$

$$z \equiv \pi \int_0^y \frac{dy}{\tilde{v}(y)}, \qquad y \equiv \ln \frac{a(t)}{a(0)}, \qquad \tilde{v}(y) = \frac{v(y)}{v_0},$$

$$v_0 = \max_y v(y),$$

получим:

$$\frac{dB_n}{dz} = \frac{\tilde{v}(z)}{\pi} \sum_m{}' \frac{n}{m - n} B_m \exp\left(-i \frac{m - n}{\beta_0} z\right), \tag{2}$$

где $\beta_0 = v_0/c$.

Заранее очевидно, что при $\beta_0 \to 0$ разность $B_n(t) - B_n(0)$ не может стремиться к нулю быстрее, чем первая степень β_0. Ниже мы докажем, что $B_n(t) - B_n(0) \to 0$ по крайней мере так же, как $\text{const}\, \beta_0 \ln \frac{1}{\beta_0}$ при $\beta_0 \to 0$, но сначала сделаем одно замечание.

Замена $t \to z$ неоднозначна, если $v(t)$ меняет знак Однако, если за время движения $v(t)$ меняет знак N раз ($N < \infty$) и на каждом из $N+1$ интервалов, где скорость знакопостоянна, для всякого m выполняется соотношение

$$| B_m(t_n) - B_m(t_{n-1}) | \leqslant Q_n \beta_0 \ln \frac{1}{\beta_0}$$

(t_n — момент n-го изменения знака $v(t)$), то

$$| B_m(t_{N+1}) - B_m(t_0) | \leqslant \mathrm{const}\ \beta_0 \ln \frac{1}{\beta_0},$$

где

$$\mathrm{const} = \sum_{n=1}^{N+1} Q_n, \quad \text{а} \quad \beta_0 = \max_t \frac{v(t)}{c} \qquad (t_{N+1} \geqslant t \geqslant t_0).$$

Вследствие обратимости процесса во времени достаточно рассмотреть случай $v(t) > 0$. Далее всюду считаем $v(t) > 0$.

Из убывания энергии электромагнитного поля при $v(t) > 0$ следует, что $\| B \| \equiv \sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} | B |^2}$ ограничена, если движение стенки финитно.

Из системы (2), пользуясь неравенством Шварца, легко получить для произвольного z_0 и $z \in [z_0, z_0 + \beta_0]$ оценку

$$| B_n(z) - B_n(z_0) | \leqslant \frac{\beta_0 K}{\pi},$$

где

$$K \equiv \frac{n\pi}{\sqrt{3}} \max_z | \tilde{v}(z) | \max_z \| B \| .$$

Кроме того, из неравенства треугольника

$$\| B(z) - B(z_0) \| \leqslant 2 \max_z \| B \| .$$

Далее предположим, что $\tilde{v}(z)$ удовлетворяет условию Липшица

$$| \tilde{v}(z_1) - \tilde{v}(z_2) | \leqslant L | z_1 - z_2 | .$$

Используя неравенство

$$\left| \sum_n{}' \frac{B_n}{n} \right| < 2PJ \ln \frac{R}{2J^2},$$

верное для любой последовательности чисел B_n, такое, что

$$\sum_n | B_n |^2 \leqslant R < \infty \quad \text{и} \quad | B_n | \leqslant J = \mathrm{const},$$

причем $P \to 1 + 0$, когда $J \to 0$, и неравенство Шварца для векторов

$$\left\{ B_n \exp\left(-i \frac{m-n}{\beta_0} z \right) \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{1}{m-n} \right\},$$

из системы (2) легко получить оценку

$$| B_n(z_0 + \beta_0) - B_n(z_0) | \leqslant \beta_0^2 \max_z \| B(z) \| \left| \frac{2(\delta + 1) u^2}{\sqrt{3}\pi} \ln\left(\frac{6}{u^2 \beta_0^2} \right) + \frac{nL}{\sqrt{3}} \right|, \qquad (3)$$

где $\delta > 0$ ($\delta \to 0$, когда $\beta_0 \to 0$),

$$u \equiv n \max_z | \tilde{v}(z) | .$$

Если за время движения стенки z изменяется от 0 до z_1, то

$$| B_n(z_1) - B_n(0) | \leqslant \beta_0 z_1 H, \qquad (4)$$

где H — множитель при β_0^2 в правой части (3).

Правая часть (4) при $\beta_0 \to 0$ ведет себя как $\mathrm{const}\ \beta_0 \ln \frac{1}{\beta_0}$.

Очевиден физический смысл полученного результата: при сделанных выше пред-

положениях величина $\frac{\mathcal{E}_n}{\omega_n}$ ($\mathcal{E}_n$ — энергия в n-й моде, ω_n — частота n-й моды) является адиабатическим инвариантом по крайней мере порядка $\frac{v}{c}\ln\frac{c}{v}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1968.
2. В. Н. Красильников, А. М. Панкратов, Электромагнитные поля в резонаторах с колеблющейся границей, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, ЛГУ, вып. 8 (1968).
3. В. Н. Красильников, Т. А. Магомадова, О параметрической генерации электромагнитных колебаний в сферическом резонаторе с меняющимся во времени радиусом, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, ЛГУ, вып. 13 (1974).

Поступила в редакцию
12 августа 1974 г.,
после доработки
15 марта 1976 г.

УДК 621.371

О КАНАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ СО СТРУЙНЫМ ТЕЧЕНИЕМ

В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов

Известно, что в движущейся среде неоднородность скорости дрейфа приводит к преломлению и отражению электромагнитных волн, даже если остальные параметры среды (плотность, температура и др.) постоянны [1, 2]. В результате в области струйных течений могут образоваться волноводные каналы, причем при определенных условиях собственные волны такого волновода оказываются неустойчивыми. В работах [3, 4] этот вопрос рассмотрен для струи с резкими границами. Ввиду гидродинамической неустойчивости тангенциального разрыва, однако, более реальной представляется струя с плавным профилем скорости по поперечному сечению. В связи с этим в настоящем сообщении кратко рассматривается случай «гладкого» плоскослоистого течения диэлектрической среды.

Пусть среда с постоянной диэлектрической проницаемостью движется вдоль оси x со скоростью $V(z)$; поля будем искать в виде $f(z)\,e^{i(\omega t-hx)}$. В слаборелятивистском приближении ($\beta^2 \gg 1$, $\varepsilon\beta^2 \ll 1$, где $\beta = V/c$) задача сводится к решению следующего уравнения для $f(z)$ [2]:

$$\frac{d^2 f}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_{\text{эфф}}(z)-n_x^2\right)f=0, \tag{1}$$

где*

$$n_x=\frac{ch}{\omega}, \qquad \varepsilon_{\text{эфф}}(z)=\varepsilon-2n_x(\varepsilon-1)\beta(z). \tag{2}$$

Здесь функция $f(z)$ соответствует величине E_y для ТЕ-волн и H_y — для ТМ Уравнение (1), как уже отмечалось [2], совпадает с соответствующим уравнением для неподвижного диэлектрика с проницаемостью, равной $\varepsilon_{\text{эфф}}(z)$. Пусть $\beta(0)=\beta_0>0$, а при $z\to\pm\infty$ $\beta\to\beta_{1,2}$. Как известно, в неподвижной непоглощающей среде (при вещественной и положительной ε) волноводные решения возможны, лишь если внутри слоя величина $\varepsilon_{\text{эфф}}$ больше, чем вне его. Согласно (2), это соответствует $n_x(\varepsilon-1)\times\times(\beta_0-\beta_{1,2})<0$, т. е., например, при $\varepsilon>1$ и $\beta_0>\beta_{1,2}$ струя оказывает фокусирующее действие на обратные волны ($n_x<0$), а прямые волны ($n_x>0$), наоборот, расфокусируются, и канализация для них невозможна. В среде с $\varepsilon<1$ ситуация в этом смысле противоположная — фокусируются прямые волны**.

---

* Можно показать, что для магнитной среды с $\mu\neq 1$ вместо ε в (2) входит величина $\varepsilon\mu$

** Строго говоря, в последнем случае нужно учесть дисперсию среды (см. ниже).