этом положение минимума (для монотонных профилей ε) определяет в случае малых потерь критическое значение концентрации электронов на поверхности сферы. По ширине области минимума, исходя из строгого решения задачи для эталонных законов ε, можно оценить частоту соударений в плазме.

4. Аналогичные закономерности поведения СОР следует ожидать и для гладких тел несферической формы, при более общем виде неоднородности плазмы. Для количественного анализа в этих случаях может быть использован аналог метода физической оптики для неоднородных сред [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Марьин, Радиотехника и электроника, 9, 235 (1968).
2. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 531 (1968).
3. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
4. Ю. И. Орлов, Труды МЭИ, вып. 119, 82 (1972).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
17 сентября 1975 г.

УДК 538.59 : 519.25

О СВЯЗИ ЛАГРАНЖЕВЫХ И ЭЙЛЕРОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

А. Н. Малахов, А. И. Саичев

1. Во многих физических задачах представляет интерес исследование статистических свойств как эйлеровых, так и лагранжевых характеристик случайных полей, а также связи между ними. Некоторые из этих связей были рассмотрены в работах [1—3]. Данная статья посвящена установлению новых соотношений между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками случайных полей, дополняющих связи, найденные в [1—3].

2. Рассмотрим для определенности поле скоростей турбулентной жидкости $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$. Введем связанное с ним поле концентрации пассивной примеси $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, которое рассмотрим, пренебрегая молекулярной диффузией Будем считать концентрацию примеси в начальный момент известной: $\rho(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_0(\boldsymbol{x})$. Лагранжево распределение скорости, концентрации примеси и координат m фиксированных жидких частиц по определению равно:

$$f_m[\boldsymbol{v}_1,\ldots, \boldsymbol{v}_m, \rho_1,\ldots, \rho_m, \boldsymbol{x}_1,\ldots, \boldsymbol{x}_m; t_1,\ldots, t_m \mid \boldsymbol{x}_{10},\ldots, \boldsymbol{x}_{m0}] \equiv$$
$$\equiv \left\langle \prod_{l=1}^{m} \delta[\boldsymbol{v}_l - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_l, t_l)]\, \delta[\rho_l - \rho(\boldsymbol{x}_l, t_l)]\, \delta[\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}(t_l \mid \boldsymbol{x}_{l0})] \right\rangle. \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{x}_{10},\ldots, \boldsymbol{x}_{m0}$ — координаты рассматриваемых жидких частиц в начальный момент t_0, $\boldsymbol{x}(t_1 \mid \boldsymbol{x}_{10}),\ldots, \boldsymbol{x}(t_m \mid \boldsymbol{x}_{m0})$ — их координаты в моменты $t_1,\ldots, t_m$. Статистическое усреднение $\langle\cdots\rangle$ здесь идет по ансамблю случайных полей $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$, $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{x}(t \mid \boldsymbol{x}_0)$.

Домножим (1) на $\prod_{l=1}^{m} \rho_0(\boldsymbol{x}_{l0})$, проинтегрируем по $\boldsymbol{x}_{10},\ldots, \boldsymbol{x}_{m0}$ и учтем, что

$$\prod_{l=1}^{m} \iiint_{-\infty}^{\infty} \rho_0(\boldsymbol{x}_{l0})\, \delta[\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}(t_l \mid \boldsymbol{x}_{l0})]\, d\boldsymbol{x}_{l0} = \prod_{l=1}^{m} \rho(\boldsymbol{x}_l, t_l). \qquad (2)$$

В результате получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overset{3m}{\cdots} \int f_m[\boldsymbol{v}_1,\ldots, \boldsymbol{v}_m, \rho_1,\ldots, \rho_m, \boldsymbol{x}_1,\ldots, \boldsymbol{x}_m; t_1,\ldots, t_m \mid \boldsymbol{x}_{10},\ldots, \boldsymbol{x}_{m0}] \prod_{l=1}^{m} \rho_0(\boldsymbol{x}_{l0})\, d\boldsymbol{x}_{l0} \equiv$$

$$\equiv w_m[v_1,\ldots,v_m,\ \rho_1,\ldots,\rho_m;\ x_1,\ldots,x_m;\ t_1,\ldots,t_m \mid \rho_0(x)] \prod_{i=1}^{m} \rho_i, \tag{3}$$

где w_m — совместное m-точечное вероятностное распределение эйлеровых полей $v(x, t)$, $\rho(x, t)$ в m фиксированных точках $x_1, t_1, \ldots, x_m, t_m$.

Из (3) видно, что m-точечное вероятностное распределение эйлеровых полей полностью определяется видом совместного вероятностного распределения соответствующих характеристик m фиксированных жидких частиц.

3. Во многих физических системах возможно образование многопотоковости. В любую точку пространства может приходить при этом не одна, а сразу несколько жидких частиц, имевших в начальный момент разные координаты. Соответственно эйлеровы поля становятся неоднозначными функциями координат. Пусть в точки $x_1, t_1, \ldots, x_m, t_m$ с вероятностью $P(N_1, x_1, t_1; \ldots; N_m, x_m, t_m)$ приходит соответственно $N_1, \ldots, N_m$ жидких частиц Тогда, если в начальный момент многопотоковость отсутствовала, будет справедливо следующее тождество, обобщающее (3) на случай многопотоковых систем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{3m}{\cdots} \int f_m \prod_{i=1}^{m} \rho_0(x_{i0})\, dx_{i0} \equiv \sum_{N_1,\ldots,N_m=1}^{\infty} P(N_1, x_1, t_1, \ldots, N_m, x_m, t_m) \sum_{n_1=1}^{N_1} \cdots$$
$$\cdots \sum_{n_m=1}^{N_m} w_m[v_1,\ldots,v_m,\ \rho_1,\ldots,\rho_m;\ x_1,\ldots,x_m,\ t_1,\ldots,t_m \mid \rho_0(x);\ N_1, n_1, \ldots, N_m, n_m]; \tag{4}$$

здесь $w_m[\ldots \mid \rho_0(x), N_1, n_1, \ldots, N_m, n_m]$ — совместное m-точечное эйлерово вероятностное распределение эйлеровых полей в $n_1, \ldots, n_m$ потоках, приходящих соответственно в точки $x_1, t_1, \ldots, x_m, t_m$ при условии, что в эти точки приходят $N_1, \ldots, N_m$ потоков.

4. Приведем несколько следствий соотношений (3) и (4). Разделив (4) на $\prod_{i=1}^{m} \rho_i$ и проинтегрировав по $v_1, \ldots, v_m, \rho_1, \ldots, \rho_m$, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{7m}{\cdots} \int f_m \prod_{i=1}^{m} \rho_0(x_{i0})/\rho_i\, dx_{i0}\, dv_i\, d\rho_i \equiv$$
$$\equiv \sum_{N_1,\ldots,N_m=1}^{\infty} P(N_1, x_1, t_1, \ldots, N_m, x_m, t_m) \prod_{i=1}^{m} N_i \equiv \left\langle \prod_{i=1}^{m} N(x_i, t_i) \right\rangle$$

— среднее от произведения чисел потоков, приходящих в точки $x_1, t_1, \ldots, x_m, t_m$.

Проинтегрировав (3) или (4) по тем же переменным, придем к тождеству

$$\left\langle \prod_{i=1}^{m} \rho(x_i, t_i) \right\rangle \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{3m}{\cdots} \int F_m(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_m \mid x_{10}, \ldots, x_{m0}) \prod_{i=1}^{m} \rho_0(x_{i0})\, dx_{i0},$$

выражающему m-точечный эйлеров момент концентрации пассивной примеси через F_m-вероятностное распределение координат m фиксированных жидких частиц. Это тождество очевидным образом обобщает известную в теории турбулентной диффузии формулу для средней концентрации пассивной примеси [1].

5. Выведенные выше соотношения (3) и (4) определяют эйлеровы вероятностные распределения через некоторые интегралы от лагранжевых распределений характеристик фиксированных жидких частиц. Решается и обратная задача определения лагранжевых вероятностных распределений по известным эйлеровым распределениям. В дальнейшем рассмотрим для простоты однопотоковую жидкость. Положив в (3) $\rho_0(x) = \delta(x - x_0)$, получим

$$f_m[v_1,\ldots,v_m,\ \rho_1,\ldots,\rho_m,\ x_1,\ldots,x_m;\ t_1,\ldots,t_m \mid x_0] \equiv$$
$$\equiv \prod_{i=1}^{m} \rho_i\, w_m[v_1,\ldots,v_m,\ \rho_1,\ldots,\rho_m;\ x_1,\ldots,x_m,\ t_1,\ldots,t_m \mid \delta(x - x_0)].$$

Отсюда, в частности, вытекает следующая связь между важной в теории турбулентной диффузии лагранжевой корреляционной функцией компонент вектора скорости одной фиксированной частицы в моменты t_1, t_2, $B_{ij}^L(t_1, t_2)$ со статистическими свойствами эйлеровых характеристик жидкости:

$$B_{ij}^L(t_1, t_2) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{10}{\cdots} \int \rho_1 \rho_2 v_{1i} v_{2j} w_2 [v_{1i}, v_{2j}, \rho_1, \rho_2; x_1, x_2,$$
$$t_1, t_2 \mid \delta(x - x_0)]\, dx_1\, dx_2\, dv_{1i}\, dv_{2j}\, d\rho_1\, d\rho_2.$$

6. Особенно наглядные связи существуют между одноточечными вероятностными эйлеровыми распределениями и статистическими свойствами жидкой частицы. Так, при $m = 1$ тождество (3) принимает вид

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1[v, \rho, x; t \mid x_0]\, \rho_0(x_0)\, dx_0 \equiv \rho\, w_1[v, \rho; x, t \mid \rho_0(x)].$$

Для несжимаемой жидкости, приняв здесь $\rho_0 \equiv 1$, получим:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1[v, x; t \mid x_0]\, dx_0 \equiv w_1[v; x, t]. \tag{5}$$

Аналогичное соотношение для n-точечных распределений найдено в [3]. Отсюда, как частный случай, следует известный [2, 3] вывод о том, что вероятностное распределение поля скоростей несжимаемой статистически однородной жидкости совпадает с распределением скорости жидкой частицы.

Отметим, что все найденные выше соотношения легко обобщаются на случай жидкости, текущей в трубах или других ограниченных системах. При этом областью интегрирования в них является занятый жидкостью объем.

Приведем в заключение еще одно, вытекающее из (5), симметричное соотношение между вероятностными распределениями скорости жидкой частицы и поля скоростей в фиксированной точке:

$$\lim_{V \to V_0} \frac{1}{V} \iiint\limits_{V} f_1[v; t \mid x_0]\, dx_0 \equiv \lim_{V \to V_0} \frac{1}{V} \iiint\limits_{V} w_1[v; x, t]\, dx.$$

Здесь V_0 — объем, занятый жидкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, Докл. АН СССР, 134, № 2, 304 (1960).
2. J. L. Lumley, J. Math. Phys., 3, № 2, 309 (1962).
3. Б. Я. Любимов, Докл. АН СССР, 184, № 5, 1069 (1968).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 9 сентября 1975 г.

УДК 538.56

АДИАБАТИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ПЛОСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Н. Н. Домиловская

Известно, что при асимптотически медленном изменении коэффициента при возвращающей силе в одномерном гармоническом осцилляторе отношение энергии колеблющейся частицы к частоте колебаний есть адиабатический инвариант, притом бесконечного порядка. Если учесть, что отношение энергии колебания к его частоте в квантовомеханическом случае есть просто номер состояния, то можно сказать, что при асимптотически медленном изменении указанного коэффициента сохраняется номер состояния, в котором находится частица. В данной работе получены аналогичные результаты (по необходимости более слабые, так как нельзя было надеяться, что