ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIX, № 10 *РАДИОФИЗИКА* *1976*

УДК 539.293.4

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ИОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Э. М. Эпштейн

Вычислена высокочастотная (ВЧ) проводимость полупроводника при рассеянии электронов на оптических фононах, когда $\hbar\omega_0 \gg kT$ (ω_0—частота оптического фонона, T — температура). Показано, что даже в классической области частот ($\hbar\Omega \ll kT$, Ω — частота поля) формула Друде может привести как к неверной частотной зависимости, так и к неправильному порядку величины ВЧ проводимости.

1. Кинетическая теория статической проводимости ионных полупроводников при низких температурах, когда преобладает рассеяние на оптических фононах и $\hbar\omega_0 \gg kT$ (ω_0 — частота оптического фонона, T — температура), была построена Давыдовым и Шмушкевичем [1]. Было показано, что, несмотря на сильную неупругость рассеяния, для электронов можно ввести время релаксации, притом не зависящее от энергии.

В работе Гуревича, Ланг и Фирсова [2] построена квантовая теория высокочастотной (ВЧ) проводимости таких полупроводников, относящаяся к случаю $\hbar\Omega \gtrless kT$, $\Omega\tau \gg 1$, где Ω — частота ВЧ поля, τ — характерное время релаксации электрона.

Что касается промежуточной области классической ВЧ проводимости ($\hbar\Omega \ll kT$, $\Omega\tau \gtrless 1$), то здесь, считается, можно пользоваться известной формулой Друде, в которую в данном случае даже не нужно вводить поправочный множитель на энергетическую зависимость времени релаксации (см., например, [3]).

В настоящей работе мы покажем, что при указанном выше механизме рассеяния формула Друде может не выполняться даже по порядку величины.

2. Сначала дадим качественное объяснение этому эффекту. Процесс рассеяния электрона на оптических фононах при $\hbar\omega_0 \gg kT$ носит «двухступенчатый» характер: электрон поглощает оптический фонон и тут же его испускает; при этом энергия электрона меняется мало (в меру дисперсии оптических фононов), а импульс — значительно, что и позволяет ввести время релаксации [4, 5]. В области энергий $0 < \varepsilon < \hbar\omega_0$ (область 1) рассеяние сопровождается поглощением оптического фонона, а в области $\hbar\omega_0 < \varepsilon < 2\hbar\omega_0$ (область 2) — испусканием фонона, поскольку в области 2 отношение вероятностей поглощения и испускания $\sim N_q/(N_q+1) \approx N_q \approx \exp(-\hbar\omega_0/kT) \ll 1$ (N_q — числа заполнения фононных состояний, q — волновой вектор фонона). Отсюда следует, что отношение времен релаксации τ_2/τ_1, соответствующих указанным энергетическим областям, будет экспоненциально мало. Если добавить к этому, что отношение концентраций носителей в указанных областях также мало, $n_2/n_1 \sim \exp(-\hbar\omega_0/kT)$, то становится ясно, что носители в области 2 не дают вклада в процессы переноса, и упомянутый выше

двухфононный процесс можно рассматривать как единый акт рассеяния. Это приводит к статической проводимости $\sigma(0)=\dfrac{e^2n\,\tau_1}{m}$, где n — концентрация электронов, m — эффективная масса. Такая же проводимость будет и в переменном поле частоты Ω при $\Omega\tau_1\ll 1$ (здесь и в дальнейшем речь идет о вещественной части проводимости). Однако при более высоких частотах ситуация меняется. При $\Omega\tau_2\ll 1\ll\Omega\tau_1$ вклад области 1 в проводимость, согласно формуле Друде, равен $\sigma_1(\Omega)=\dfrac{e^2n_1}{m\Omega^2\tau_1}$, т. е. он убывает с частотой, а экспоненциально большие (по сравнению с соответствующими величинами для области 2) величины n_1 и τ_1 взаимно компенсируются. С другой стороны, вклад области 2 $\sigma_2(\Omega)\sim e^2n_2\tau_2/m$, т. е. не зависит от частоты*. В результате при достаточно большой (не удовлетворяющей условиям $\Omega\tau_2\ll 1\ll\Omega\tau_1$) частоте основной вклад в полную ВЧ проводимость $\sigma(\Omega)=\sigma_1(\Omega)+\sigma_2(\Omega)$ дает область 2 (причиной является то, что в области 2 примерно в $(\hbar\omega_0/kT)^{3/2}$ раз больше плотность то́ковых состояний). Так же обстоит дело при $\Omega\tau_1\gg\Omega\tau_2\gg 1$.

На основании сказанного можно ожидать, что формула Друде, в которой фигурирует то же время релаксации τ_1, что и в статической проводимости, при достаточно высоких частотах (но, разумеется, в классической области частот) будет существенно нарушаться.

Ситуация здесь аналогична той, которая была рассмотрена в работе Гуревича и Фирсова [6], где изучалась зависимость статической проводимости от поперечного к току магнитного поля. Эта аналогия прослеживается довольно далеко: если при рассмотрении поперечной проводимости в магнитном поле ввести комплексные координаты в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю (как это сделано в [6]), то кинетические уравнения, описывающие зависимость электронной функции распределения от магнитного поля и от частоты синусоидального электрического поля, будут совпадать, только величина Ω в одном случае будет иметь смысл циклотронной частоты, в другом — частоты переменного электрического поля.

3. Подтвердим изложенные выше качественные соображения количественным расчетом. Кинетическое уравнение для электронов в однородном ВЧ электрическом поле $\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_0\exp(-i\Omega t)$ при рассеянии на оптических фононах имеет вид

$$\frac{\partial n_p}{\partial t}-e\boldsymbol{E}(t)\frac{\partial n_p}{\partial \boldsymbol{p}}=2\pi\sum_q|C_q|^2\{[n_{p+\hbar q}(N_q+1)-n_pN_q]\,\delta(\varepsilon_{p+\hbar q}-\varepsilon_p-\hbar\omega_0)+[n_{p-\hbar q}N_q-n_p(N_q+1)]\,\delta(\varepsilon_{p-\hbar q}-\varepsilon_p+\hbar\omega_0)\},\tag{1}$$

где n_p — числа заполнения электронных состояний, ε_p — энергия электрона с квазиимпульсом $\boldsymbol{p}$,

$$|C_q|^2=\frac{2\pi\alpha\hbar^2\omega_0v_0}{Vq^2},\quad v_0=\left(\frac{2\hbar\omega_0}{m}\right)^{1/2},$$

V — нормировочный объем, $\alpha=\dfrac{e^2}{\hbar v_0}(\chi_\infty^{-1}-\chi_0^{-1})$ — константа электрон-фононного взаимодействия [7] (предполагается $\alpha\ll 1$), χ_0 и χ_∞ — соответ-

* Мы не пишем здесь знака точного равенства, поскольку, как будет видно из дальнейшего, время релаксации τ_2 зависит от энергии электрона.

ственно статическая и оптическая диэлектрические проницаемости. Электронный газ предполагается невырожденным, закон дисперсии — квадратичным ($\varepsilon_p = p^2/2m$), дисперсией оптических фононов пренебрегаем. Переменное поле $E(t)$ предполагается слабым и учитывается в линейном приближении.

Умножим уравнение (1) на $-\frac{e}{m}p\delta(\varepsilon-\varepsilon_p)$ и просуммируем по всем p. Используя условие $\hbar\omega_0 \gg kT$, получим

$$\frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial t} = -\frac{J(\varepsilon)}{\tau_1} + \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\hbar\omega_0}\frac{J(\varepsilon+\hbar\omega_0)}{\tau_2(\varepsilon)} - \frac{J(\varepsilon)}{\tau_2(\varepsilon-\hbar\omega_0)}\vartheta(\varepsilon-\hbar\omega_0) + \tag{2}$$
$$+\frac{2}{3}\frac{J(\varepsilon-\hbar\omega_0)}{\tau_1}\vartheta(\varepsilon-\hbar\omega_0) - \frac{e^2E}{3\pi^2\hbar^3 m}(2m\varepsilon)^{3/2}f_0'(\varepsilon),$$

где $\vartheta(x)$ — ступенчатая функция, $f_0(\varepsilon)$ — равновесная функция распределения электронов, $\tau_1 = t_0\exp(\hbar\omega_0/kT)$, $\tau_2(\varepsilon) = t_0(\hbar\omega_0/\varepsilon)^{1/2}$, $t_0 = (2\alpha\omega_0)^{-1}$, $J(\varepsilon) = -\frac{e}{m}\sum_p p\, n_p\,\delta(\varepsilon-\varepsilon_p)$ имеет смысл «парциальной» плотности тока, переносимой электронами с данной энергией ε. Первый член в правой части (2) описывает уход электронов из области 1, второй — приход в область 1, третий — уход из области 2, четвертый — приход в область 2. Времена τ_1 и $\tau_2(\varepsilon)$ имеют смысл времен релаксации электронов в областях 1 и 2.

Пренебрегая маловероятной возможностью поглощения фонона электроном, находящимся в области 2, получаем из (2) систему уравнений для областей 1 и 2:

$$\left(-i\Omega+\frac{1}{\tau_1}\right)J_1 - \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\hbar\omega_0}\frac{J_2}{\tau_2} = -\frac{e^2E}{3\pi^2\hbar^3 m}(2m\varepsilon)^{3/2}f_0'(\varepsilon); \tag{3}$$

$$\left(-i\Omega+\frac{1}{\tau_2}\right)J_2 - \frac{2}{3}\frac{J_1}{\tau_1} = -\frac{e^2E}{3\pi^2\hbar^3 m}(2m\hbar\omega_0)^{3/2}f_0'(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right), \tag{4}$$

где $\varepsilon \ll \hbar\omega_0$, $J_1 \equiv J(\varepsilon)$, $J_2 \equiv J(\varepsilon+\hbar\omega_0)$, $\tau_2 \equiv \tau_2(\varepsilon)$.

Решая систему уравнений (3) и (4) и вычисляя плотность тока

$$j = \int_0^\infty (J_1+J_2)d\varepsilon,$$

получаем следующее выражение для проводимости $\sigma(\Omega) = j/E$:

$$\frac{\sigma(\Omega)}{\sigma(0)} = \frac{1}{1+\xi^2}\left\{1 - \frac{8}{9\sqrt{\pi}}\frac{\eta^3}{\xi}\left[1-\sqrt{\pi}\,\xi\eta\left(1-\frac{1}{2\eta^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\eta^2\exp(\eta^2)(\mathrm{Ei}(-\eta^2)+\pi\xi\,\mathrm{erfc}\,\eta)\right]\right\}+ \tag{5}$$
$$+\frac{4}{3}\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2\left[1-\sqrt{\pi}\,\eta\exp(\eta^2)\,\mathrm{erfc}\,\eta\right],$$

где $\xi = \Omega\tau_1$, $\eta = \Omega\tau_2(kT)$ ($\eta \ll \xi$), $\mathrm{erfc}\,\eta = 1-\mathrm{erf}\,\eta$, $\mathrm{erf}\,\eta$ — функция ошибок, $\mathrm{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция.

4. Рассмотрим предельные случаи. При $\eta \ll (kT/\hbar\omega_0)^{1/2}$ из (5) получается формула Друде:

$$\sigma(\Omega) = \frac{\sigma(0)}{1+\xi^2} = \frac{e^2 n t_0}{m}\left[\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)+(\Omega t_0)^2 \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\right]^{-1}. \tag{6}$$

При $(kT/\hbar\omega_0)^{1/2} < \eta \ll 1 \ll \xi$ основной вклад дает последний член в (5). В этом случае

$$\sigma(\Omega) = \frac{4}{3}\sigma(0)\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 = \frac{4}{3}\frac{e^2 n t_0}{m}\left(\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)^2 \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right), \tag{7}$$

т. е. проводимость перестает зависеть от частоты.

В этом диапазоне частот дисперсия проводимости $\sigma_1(\Omega)$, обусловленной электронами в области 1, уже настолько велика, что $\sigma_1(\Omega) < \sigma_2(\Omega)$ и основной вклад в проводимость дает область 2, а, с другой стороны, дисперсией проводимости $\sigma_2(\Omega)$ еще можно пренебречь. С этим и связано отсутствие дисперсии в указанной области частот.

Наконец, при дальнейшем увеличении частоты, когда $1 \ll \eta \ll \xi$ и становится существенной дисперсия $\sigma_2(\Omega)$, имеем

$$\sigma(\Omega) = \frac{2}{3}\sigma(0)\frac{\hbar\omega_0}{kT}\frac{1}{\xi^2} = \frac{2}{3}\frac{e^2 n}{m\Omega^2 t_0}\frac{\hbar\omega_0}{kT}\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right). \tag{8}$$

В этой области частот проводимость, как и в теории Друде, обратно пропорциональна квадрату частоты, однако ее величина в $\frac{2}{3}\frac{\hbar\omega_0}{kT} \gg 1$ раз больше, чем следует из формулы Друде.

Таким образом, из-за сложного характера низкотемпературного рассеяния электронов на оптических фононах формулой Друде можно пользоваться лишь в области частот, где $\Omega t_0 \ll \frac{kT}{\hbar\omega_0}$. Это условие можно переписать в виде $\hbar\Omega \ll 2\alpha kT$, что означает нарушение теории Друде задолго до достижения квантовой области частот $\Omega \gtrsim kT/\hbar$ (поскольку $\alpha \ll 1$). При $\Omega \gtrsim 2\alpha kT/\hbar$ формула Друде может привести как к неверной частотной зависимости, так и к неправильному порядку величины ВЧ проводимости.

Автор признателен В. Л. Бонч-Бруевичу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ, **10**, 1043 (1940).
2. В. Л. Гуревич, И. Г. Ланг, Ю. А. Фирсов, ФТТ, **4**, 1252 (1962).
3. Р. Смит, Полупроводники, ИЛ, М., 1962
4. H. Fröhlich, N. F. Mott, Proc. Roy. Soc., **A171**, 496 (1939).
5. Б. И. Давыдов, И М. Шмушкевич, УФН, **24**, 21 (1940).
6. В. Л. Гуревич, Ю. А Фирсов, ЖЭТФ, **40**, 199 (1961).
7. М. А. Кривоглаз, С. И. Пекар, Изв. АН СССР, серия физическая, **21**, 3 (1957).

Поступила в редакцию
27 июня 1975 г.

HIGH-FREQUENCY CONDUCTIVITY OF POLAR SEMICONDUCTORS AT LOW TEMPERATURES

E. M. Epshtein

A high-frequency (HF) conductivity of a semiconductor with electron scattering by optical phonons when $\hbar\omega_0 \gg kT$ (ω_0 is the frequency of an optical phonon, T is the temperature) is calculated. It is shown that even in the classical frequency region ($\hbar\Omega \ll kT$, Ω is the field frequency) the Drude formula may lead both to the incorrect frequency dependence and the incorrect order of magnitude of HF conductivity.