

УДК 535.2

## СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СВЕРХСВЕТОВОГО ИСТОЧНИКА

*С. В. Афанасьев*

Рассмотрено синхротронное излучение воображаемого источника (точки пересечения равномерно заряженной нити с поверхностью экрана), движущегося как с досветовой ( $v_* < c$ ), так и со сверхсветовой ( $v_* > c$ ) скоростью. Показано, что при  $v_* > c$  максимум интенсивности приходится на частоты порядка критической частоты  $\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{a} \frac{\beta_*}{[\beta_* - 1]^{3/2}}$  ( $\beta_* = v_*/c$ ,  $a$  — радиус окружности).

1. В работах [1, 2] указывалось на принципиальную возможность создания источников электромагнитного излучения, движущихся со скоростями, превосходящими скорость света в вакууме. В [3, 4] рассматривалось сверхсветовое излучение электромагнитных волн пучком частиц, испускаемых направленным и вращающимся источником. Излучение возникло за счет взаимодействия пучка частиц со сферическим слоем среды, расположенным на определенном расстоянии от источника. Позднее [5] тем же автором было рассмотрено излучение направленного вращающегося источника в непрерывной среде или в вакууме.

Ниже рассматривается иная модель сверхсветового источника, дающего излучение, аналогичное [3-5]. Такая модель источника создается следующим образом: узкий пучок заряженных частиц под действием отклоняющего устройства вычерчивает по поверхности экрана окружность некоторого радиуса. Если  $\Psi$  — угол наклона фронта частиц к поверхности экрана в точке касания, то скорость пятна («зайчика») равна

$$v_* = v \operatorname{ctg} \Psi, \quad (1)$$

где  $v$  — скорость частиц. Из (1) в свою очередь следует, что при уменьшении угла наклона  $\Psi$  (что можно сделать, меняя параметры установки) скорость источника может принимать любые значения, также и больше  $c$ . При пересечении частицами поверхности экрана возникает переходное излучение, тогда вследствие интерференции волн возможно возникновение излучения, аналогичного по свойствам синхротронному [6].

Предлагаемая в работе модель сверхсветового источника позволяет рассмотреть характерные черты возникающего излучения в предположении больших расстояний до источника. Вначале будем считать источником излучения заряженную нить, как бы состоящую из бесконечного числа зарядов.

Из полупространства  $z > 0$  на идеально проводящую плоскость (см. рис. 1) падает со скоростью  $v \{0, 0, v_z\}$  заряженная с линейной плотностью  $q$  нить, имеющая форму винтовой линии. При пересечении нитью экрана возникает переходное излучение, т. е. поле в полупространстве  $z > 0$  генерируется током нити и ее изображения. Фурье-компонента полного тока запишется следующим образом:

$$j_{\omega, z} = \frac{q}{2\pi} \int d\alpha \delta(x - a \cos \alpha) \delta(y - a \sin \alpha) \exp\left(i \frac{\omega}{\omega_0} \alpha\right) \times \\ \times \left[ \exp\left(i \frac{\omega}{v} z\right) + \exp\left(-i \frac{\omega}{v} z\right) \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\omega_0 = \frac{2\pi}{h} v$  — круговая частота

вращения воображаемого источника (точки пересечения нити с экраном),  $h$  — шаг винтовой линии,  $v$  — скорость нити,  $\alpha$  — параметр, изменяющийся от  $-\infty$  до  $+\infty$  для бесконечной нити. Далее, в приближении волновой зоны находим выражение для векторного потенциала излучаемых волн частоты  $\omega$ :

$$A_{\omega, z} = \frac{e^{ikr}}{cr} \int j_{\omega, z}(r') \exp(-ikr') dr'. \quad (3)$$

В (3) интегрирование проводится по всему пространству, причем, плотность тока нити отлична от нуля в полупространстве  $z > 0$ , а ее изображения в полупространстве  $z < 0$ . В результате для  $A_{\omega, z}$  получаем выражение

$$A_{\omega, z} = i \frac{2q\beta e^{ikr}}{\omega r (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(a \frac{\omega}{c} \sin \theta\right) \times \\ \times \exp\left[-in\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \delta\left(n - \frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (4)$$

где  $\beta = v/c$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  — углы в сферической системе координат (рис. 1),  $J_n(z)$  — функции Бесселя. Из (4) следует, что излучение будет происходить на частотах, кратных частоте основного тона  $\omega_0$ . Таким образом, в результате интерференции волн, излучаемых при пересечении каждым элементарным участком нити экрана, возникает синхротронное излучение воображаемого источника, движущегося по круговой орбите радиуса  $a$  со скоростью

$$v_* = \frac{2\pi a}{h} v. \quad (5)$$

Далее находим магнитное поле  $H_{\omega} = i[kA_{\omega}]$  и потери энергии источником на излучение в единицу времени и в телесный угол  $d\Omega$ :

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\omega, \theta, \varphi} = \frac{c}{T} |H_{\omega}|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\omega, \quad (6)$$

где  $T$  — время движения нити. Из (4) следует, что в (6) будут содержаться члены, пропорциональные квадрату дельта-функции. Поэтому для устранения расходимости в интеграле (6) поступим следующим образом:

$$\delta^2\left(n - \frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{2\pi} \delta\left(n - \frac{\omega}{\omega_0}\right) \int \exp[i(\omega - n\omega_0)t] dt = T \frac{\omega_0}{2\pi} \delta\left(n - \frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

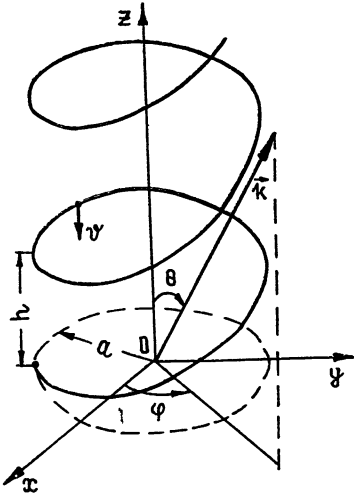


Рис. 1.

т. е. энергия излучения пропорциональна времени движения нити. Подставляя (4) в (6) и проводя несложные вычисления, окончательно получим

$$W_n = \frac{4q^2\beta^2\omega_0^2}{c} \frac{\sin^3\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} J_n^2(n\beta_*\sin\theta) d\theta, \quad (7)$$

где  $\beta_* = \frac{v_*}{c}$ . Выражение (7) определяет спектральную интенсивность излучения в единицу времени в интервал углов  $d\theta$ . Полагая интенсивность определяется суммированием по всем частотам (номерам гармоник  $n$ ):

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n. \quad (8)$$

2. Угловое распределение излучения. Используя (7) и (8), а также формулу Шотта для рядов Каптейна [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(nz) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} - 1 \right) \quad (z < 1),$$

получаем выражение, определяющее зависимость интенсивности излучения от угла  $\theta$ ,

$$W_0 = \frac{2q^2\beta^2\omega_0^2}{c} \frac{\sin^3\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta_*^2\sin^2\theta}} - 1 \right). \quad (9)$$

Таким образом, для  $\beta_* \ll 1$  распределение интенсивности по углам  $\theta$  в основном определяется множителем  $\sin^3\theta(1-\beta^2\cos^2\theta)^{-2}$ . Но этот множитель дает характерное для переходного излучения распределение интенсивности (см. [3]). При  $\beta, \beta_* \ll 1$  максимум интенсивности лежит вблизи плоскости экрана ( $\varphi \sim \pi/2$ ). Если  $\beta \sim 1$ , то максимум смещается в малые углы  $\theta$ . Интересен случай  $\beta_* > 1$ . Здесь мы наблюдаем сочетание синхротронного излучения сверхсветового источника с черенковским, характеризуемым направленностью излучения согласно выражению

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\beta_*}, \quad \beta_* > 1. \quad (10)$$

Наконец, если  $\beta_* \ll 1$ , то глобальная интенсивность излучения имеет следующее значение:

$$W = \frac{8}{3} \frac{q^2\beta^2\omega_0^2}{c}. \quad (11)$$

Или, полагая  $h = 2\pi a$  вместо (11), получаем

$$W = \frac{8}{3} \frac{q^2 v^4}{a^2 c^3}, \quad (12)$$

что находится в согласии (с точностью до множителя 4) с результатом работы [6].

3. Зависимость интенсивности излучения от частоты. Проинтегрируем выражение для спектральной интенсивности (7) по углам  $\theta$ , используя разложение

$$J_n^2(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\Gamma(2n+2s+1) z^{2(n+s)}}{\Gamma(s+1) \Gamma(2n+s+1) [\Gamma(n+s+1)]^2}$$

и значение определенного интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2(n+s)+3} \theta}{(1-\beta^2 \cos^2 \theta)^2} d\theta = \frac{1}{2} B\left(n+s+2, \frac{1}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, 2, n+s+\frac{5}{2}, \beta^2\right).$$

Тогда получим точную формулу, определяющую зависимость спектральной интенсивности излучения от номера гармоник  $n$ :

$$W_n = \frac{4q^2 \beta^2 \omega_0^2}{c(n\beta_*)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{\beta}{n\beta_*}\right)^{2k} (k+1)(2k-1)!! \Phi_k(n\beta_*), \quad (13)$$

$$\alpha_k = \begin{cases} -1, & \alpha = 0; \\ 1, & \alpha \neq 0; \end{cases}$$

$$\Phi_0(n\beta_*) = \int_0^{n\beta_*} y \left\{ \int_0^{2y} \left[ J_{2n}(x) + \frac{x}{2} J'_{2n}(x) \right] dx \right\} dy, \quad (14)$$

причем, каждая последующая функция  $\Phi_k(n\beta_*)$  в разложении (13) вычисляется через предыдущую по формуле

$$\Phi_k(n\beta_*) = \int_0^{n\beta_*} y \Phi_{k-1}(y) dy. \quad (15)$$

В итоге задача сводится к вычислению зависимости интегралов

$$J_1 = \int_0^{2n\beta_*} J_{2n}(x) dx, \quad J_2 = \int_0^{2n\beta_*} x J'_{2n}(x) dx \quad (16)$$

от номера гармоники  $n$  и параметра  $\beta_*$ , далее элементарным интегрированием находятся  $\Phi_0(y)$  по (14) и  $\Phi_k(y)$  по (15). Конечный результат может быть представлен в виде

$$W_n = \frac{4q^2 \beta^2 \omega_0^2}{c} \varphi(n) \sum_k \alpha_k \beta^{2k}, \quad (17)$$

т. е. спектральная интенсивность зависит от номера гармоники посредством функции  $\varphi(n)$ , а сумма в (17) определяет зависимость интенсивности от скорости движения нити. Коэффициенты  $\alpha_k$  есть постоянные величины для данных значений интегралов  $J_1$  и  $J_2$ . Поскольку нас интересует зависимость интенсивности излучения главным образом от параметра  $\beta_*$ , определяющего скорость движения источника (точки пересечения нити с экраном) в плоскости экрана, а значения этого параметра могут меняться произвольно (из (5) следует, что при значении  $\beta$  соответствующим подбором величин  $h$  и  $a$  мы достигаем различных значений  $\beta_*$ , также и больших единицы), то можно ограничиться первым членом (13), считая  $\beta^4 \ll 1$ . Однако, когда коэффициенты  $\alpha_k$  вычисляются просто, то мы будем приводить значение суммы в (17).

Рассмотрим три случая: нерелятивистский источник  $\beta_* \ll 1$ , релятивистский  $\beta_* \sim 1$ , сверхсветовой  $\beta_* > 1$ .

1)  $\beta_* \ll 1$ . В этом случае ограничимся первым членом разложения функций Бесселя в ряд в (13) и получим

$$W_n = \frac{8 q^2 \beta_*^2 \omega_0^2}{c} (n \beta_*)^{2n} \frac{(n+1)}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{(k+1)(2k-1)!! \beta_*^{2k}}{\prod_{m=0}^k (2n+2m+3)}. \quad (18)$$

Энергия излучения на  $n$ -й гармонике имеет порядок  $\beta_*^{2n}$ , значит максимум интенсивности приходится на основной тон  $n = 1$ .

В двух оставшихся случаях будем использовать асимптотические формулы функций Бесселя большого индекса [9], пригодные в интервале  $0 \leq \beta_* < \infty$ , а именно

$$J_n(nx) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z_1}{-xz_1'}} K_{1/3}(nz_1) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (19)$$

$$z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2};$$

$$J_n(nx) = \sqrt{\frac{z_2}{3xz_2'}} [J_{-1/3}(nz_2) + J_{1/3}(nz_2)] \quad (1 \leq x < \infty), \quad (20)$$

$$z_2 = \sqrt{x^2 - 1} - \arctg \sqrt{x^2 - 1}.$$

2) Пусть  $\beta_*$  близко к единице, но меньше ее, т. е.  $1 - \beta_* = \xi$ ,  $\xi \rightarrow 0$ . Тогда, используя (19), в интегралах  $J_1$  и  $J_2$  получаются значения

$$J_1 = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_{\frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2}}^{\infty} K_{1/3}(z) dz, \quad J_2 = \frac{3^{1/3} (2n)^{2/3}}{\pi \sqrt{3}} \int_{\frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2}}^{\infty} z^{1/3} K_{2/3}(z) dz, \quad (21)$$

где верхний предел для больших  $n$  можно считать бесконечным. Далее, если воспользоваться величиной

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{a} \frac{\beta_*}{[2(1 - \beta_*)]^{3/2}}, \quad (22)$$

которую будем называть по аналогии с [6] критической частотой, то нижний предел в интегралах  $J_1$  и  $J_2$  будет равен отношению круговой частоты излучаемой гармоники к критической частоте. Если это отношение много меньше единицы, то нижний предел можно считать нулем. В этом случае, воспользовавшись значением определенного интеграла

$$\int_0^{\infty} x^\mu K_\nu(x) dx = 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right),$$

получим для  $J_1$  и  $J_2$  следующие значения:

$$J_1 = \frac{1}{3}, \quad J_2 = \frac{3^{1/3} \Gamma(1/3)}{\pi \sqrt{3}} n^{2/3}.$$

Проводя дальнейшие вычисления, нетрудно показать, что в этом случае спектральная интенсивность будет обратно пропорциональна номеру гармоники  $n$ :

$$W_n = \frac{4 q^2 \beta_*^2 \omega_0^2}{c \beta_*} \left( \frac{1}{6n} + \frac{3^{1/3} \Gamma(1/3)}{8 \pi \sqrt{3} n^{1/3}} \right) \left( 1 + \frac{\beta_*^2}{2} + \frac{3 \beta_*^4}{2 \cdot 4} + \frac{5 \beta_*^6}{2 \cdot 4 \cdot 8} + \dots \right). \quad (23)$$

Для значений частот много больше критической используем асимптотическое представление функций Макдональда

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

а также значение интеграла

$$\int_z^\infty \frac{e^{-x}}{x^\nu} dx = z^{-\nu/2} e^{-z/2} W_{-\nu/2, (1-\nu)/2}(z) \quad (z > 0),$$

где  $W_{\nu, \mu}(z)$  — функция Уиттеккера, равная  $e^{-z/2} z^{-\nu/2}$  для больших значений  $z$ . Таким образом находим, что спектральная интенсивность уменьшается по экспоненциальному закону. Итак, в досветовом режиме максимум интенсивности излучения приходится на частоту основного тона.

3)  $\beta_* > 1$  (сверхсветовой источник). Будем рассматривать  $\beta_*$ , близкие к единице, т. е.  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\beta_* = 1 + \xi$ . В этом случае можно воспользоваться формулами (20), получив для  $J_1$  и  $J_2$  значения:

$$\int_{2n}^{2n\beta_*} J_{2n}(x) dx = \frac{2n}{\sqrt{3}} \int_0^\xi \sqrt{2\xi} [J_{1/3}(t) + J_{-1/3}(t)] d\xi, \quad (24)$$

$$\int_{2n}^{2n\beta_*} x J'_{2n}(x) dx = \frac{(2n)^2}{\sqrt{3}} \int_0^\xi (2\xi) [J_{-2/3}(t) - J_{2/3}(t)] d\xi, \quad t = \left[ \frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2} \right],$$

причем нижний предел в (14) и (15) не будет уже нулем, так как  $\beta_*$  принимает значения от 1 до  $\infty$ . Сделаем замену переменных в (24) и введем критическую частоту:

$$z = \frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2}, \quad \omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{a} \frac{\beta_*}{[2(\beta_* - 1)]^{3/2}}. \quad (25)$$

Тогда

$$\Phi_0(n\xi) = \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \int_0^{(2n/3)(2\xi)^{3/2}} \left[ J_{1/3}(z) + J_{-1/3}(z) + \frac{3^{1/3} n^{2/3}}{\sqrt{3} 2^{4/3}} z^{1/3} (J_{-2/3}(z) - J_{2/3}(z)) \right] dz \right\} d\xi. \quad (26)$$

Верхний предел в (26) опять можно представить в виде отношения круговой частоты излучаемой гармоники к критической частоте. Пусть  $\omega \ll \omega_c$ , в этом случае воспользуемся первыми членами разложения функций Бесселя в ряд и получим для  $\Phi_0(n\xi)$  следующее значение:  $\Phi_0(n\xi) \sim n^{4/3}$ . Тогда спектральная интенсивность (13) пропорциональна  $n^{1/3}$ , т. е. возрастает с увеличением номера гармоники. Если же  $\omega \gg \omega_c$ , то, заменяя верхний предел на бесконечный и используя формулу

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(x) dx = 2^\mu \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)}, \quad (27)$$

получаем следующую зависимость спектральной интенсивности от частоты:

$$W_n \sim 1/n. \quad (28)$$

Значит, при  $\beta_* > 1$  максимум интенсивности приходится на частоты порядка критической частоты.

Пусть теперь источником излучения будет являться не заряженная нить, падающая на бесконечно проводящий экран, а система частиц, движущихся со скоростью  $v_z$  и расположенных в пространстве по винтовой линии. Тогда в (1) интегрирование по  $\alpha$  заменяется суммированием, что приведет к появлению в выражении для энергии (7) множителя

$$S = \sum_{k, k'=-N}^N \cos [f(\alpha_k - \alpha_{k'})], \quad (29)$$

где  $f = (n - \omega/\omega_0)$ , а  $\alpha_k$  определяет положение  $k$ -й частицы на винтовой линии. Если частицы расположены вдоль траектории на экране неравномерно, то  $S = 2N$ , а в случае равномерного распределения частиц ( $\alpha_k = k\alpha_0$ )

$$S = \sin^2 [(N + 1/2)f\alpha_0] \sin^{-2} \frac{f}{2} \alpha_0,$$

что в пределе  $\alpha_0 \rightarrow 0$  переходит в  $S = 4N^2$ , где  $2N$  — число частиц, участвующих в излучении.

Кроме того, поскольку сврехсветовой источник всегда образуется коллективом частиц, т. е. является протяженным, то существует коротковолновая граница спектра излучаемых источником частот. Поэтому сделанные выводы, в частности формула (25), справедливы для длин волн, значительно превосходящих размеры пятна на экране.

Как указывалось в [11], в длиннофокусных системах получены размеры электронного пучка 1—3 мкм. При радиусе  $a \sim 1$  см и  $\beta_* - 1 = \xi \rightarrow 0$  частота основного тона  $\frac{\omega_0}{2\pi} \sim 10^{10}$  Гц, а предельная

частота, определяемая размером электронного пятна  $\frac{\omega}{2\pi} \sim 10^{14}$  Гц, что соответствует интервалу длин волн от сантиметрового до инфракрасного диапазонов.

В заключение пользуюсь случаем принести благодарность Б. М. Болотовскому за постановку задачи и полезные дискуссии, а также М. Е. Герценштейну, ознакомившемуся с результатами работы в 1973 году и проявившему к ней большой интерес [11].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Письма в ЖЭТФ, 16 (1972).
2. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, 577 (1972).
3. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 4, 634 (1972).
4. В. Я. Эйдман, Астрофизика, 8, 609 (1972).
5. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 631 (1973).
6. Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, Гостехиздат, М., 1949.
7. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949.
8. Д. В. Джелли, Черенковское излучение, ИЛ, М., 1960.
9. В. Н. Цытович, Вестник МГУ, 11, 27 (1951).
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1971.
11. М. Е. Герценштейн, В. В. Кобзев, Письма в ЖЭТФ, 22, 15 (1975).

## SYNCHROTRON RADIATION FROM A SUPERLIGHT SOURCE

S. V. Afanas'ev

The synchrotron radiation of the assumed source (the points of intersection of a uniformly charged filament with the screen surface) moving both with sub-light ( $v_* < c$ ) and superlight ( $v_* > c$ ) velocities is considered. It is shown that for  $v_* > c$  the intensity maximum occurs at the frequencies of the order of the critical frequency

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{c}{a} \frac{\beta_*}{[2(\beta_* - 1)]^{3/2}} \quad \left( \beta_* = v_*/c, a \text{ is the circumference radius} \right).$$

---