

УДК 621.372

МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ЧМ КОЛЕБАНИЙ В РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЧАСТОТНО-СЕЛЕКТИВНЫХ ЦЕПЯХ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

И. М. Миндлин

Для описания связей между модуляцией входного и выходного сигнала цепи излагается подход, основанный на использовании передаточных матриц. Получены формулы, выражающие элементы передаточной матрицы цепи через ее коэффициент передачи, а также формулы, связывающие коэффициент нелинейных искажений модуляции с элементами передаточной матрицы. На основе этих формул проводится анализ фильтрующих свойств частотных детекторов двух типов.

Анализу ЧМ колебаний в селективных цепях посвящено много работ (см. библиографию, например, в [1]). Основными при анализе колебаний являются методы, представляющие колебания в виде тех или иных рядов, члены которых являются функциями времени; таковыми являются метод мгновенной частоты [1], представление рядами Вольterra [2-4], представление функциональным рядом, полученным Бедросяном и Райсом [5].

Ниже излагается подход, согласно которому селективная цепь рассматривается как четырехполюсник по отношению к частотной и амплитудной модуляции входного сигнала; фильтрующие свойства четырехполюсника в линеаризованном режиме описываются матрицей размера 2×2 , элементы которой явно выражаются через коэффициент передачи цепи; учет нелинейности четырехполюсника также построен на использовании элементов упомянутой матрицы. Элементы передаточной матрицы могут использоваться в основном для оценки фильтрации угловой модуляции и для оценки преобразования угловой модуляции в амплитудную. Что касается оценки фильтрации угловой модуляции, то получаемые результаты в принципе эквивалентны результатам, полученным в [5], и отличаются от них так же, как спектральное представление отличается от временного. В [5], по существу, получен один из четырех элементов передаточной матрицы.

1. АНАЛИЗ МОДУЛЯЦИИ В СЕЛЕКТИВНОЙ ЦЕПИ

Здесь цепь называется селективной, если ее коэффициент передачи $K(p)$ обладает следующими свойствами: значения амплитудной характеристики $|K(j\omega)|$ в полюсе $|\omega - \omega_0| < h$ значительно превосходят ее значения в области $|\omega - \omega_0| > \Delta$ ($\Delta > h > 0$, $j^2 = -1$) и $\Delta \ll \omega_0$; частота $\omega_0/2\pi$ — круговая частота настройки цепи, h/π — ее полоса пропускания (полоса прозрачности — для полосовых фильтров).

Пусть на вход линейной селективной цепи подается сигнал $u(t) = [1 + \beta a(t, \beta)] \cos \varphi(t)$, $\varphi(t) = \omega_0 t + \Delta \varphi(t, \beta)$, у которого частотная модуляция $\frac{d\Delta \varphi}{dt} = \Delta \omega(t)$ и амплитудная модуляция $\beta a(t, \beta)$ являются

медленно меняющимися (по сравнению с $\sin \omega_0 t$) функциями времени, $|\Delta\omega| \ll \omega_0$, $|\omega_{c0} - \omega_0| < h$, $|\beta a(t, \beta)| \ll 1$, β — некоторый параметр. При этих условиях установившийся выходной сигнал представляется в виде $v(t) = V_0 [1 + \beta A(t, \beta)] \cos \psi(t)$, $\psi = \omega_{c0} t + \Delta\psi(t, \beta)$, где $A(t, \beta)$ и $\frac{d\Delta\psi}{dt}$ — медленно меняющиеся функции времени.

Пусть $\bar{f}(p)$ обозначает преобразование Лапласа от некоторой функции $f(t)$, причем вместо $f(0)$ поставлен нуль; p — комплексная переменная. В этих обозначениях связь между входным и выходным сигналами представится в виде

$$\bar{v}(p) = K(p) \bar{u}(p). \quad (1)$$

Исходя из этого уравнения, нужно выразить амплитуду $V_0[1 + \beta A]$ и фазу ψ выходного сигнала через амплитуду $1 + \beta a$ и фазу φ входного сигнала.

Предположим, что имеют место разложения в степенные ряды по параметру:

$$\beta a(t, \beta) = \beta a_1(t) + \beta^2 a_2(t) + \dots, \quad \Delta\varphi = \beta\varphi_1(t) + \beta^2\varphi_2(t) + \dots; \quad (2)$$

$$\beta A(t, \beta) = \beta A_1(t) + \beta^2 A_2(t) + \dots, \quad \Delta\psi = \psi_0 + \beta\psi_1(t) + \beta^2\psi_2(t) + \dots \quad (3)$$

Из (1), являющегося тождеством по β , при $\beta = 0$ следует

$$V_0 = |K(j\omega_{c0})|, \quad \psi_0 = \arg K(j\omega_{c0}). \quad (4)$$

Связь между другими членами рядов (2) и (3) дается, как показано в Приложении, формулами

$$\bar{\psi}_k = K_{11}(p) (\bar{\varphi}_k + \bar{r}_{1k}) + K_{12}(p) (\bar{a}_k + \bar{r}_{2k}) - \bar{S}_{1k}, \quad (5)$$

$$\bar{A}_k = K_{21}(p) (\bar{\varphi}_k + \bar{r}_{1k}) + K_{22}(p) (\bar{a}_k + \bar{r}_{2k}) - \bar{S}_{2k},$$

где

$$K_{11}(p) = K_{22}(p) = \frac{1}{2} \left[\frac{K(p + j\omega_{c0})}{K(j\omega_{c0})} + \frac{K(p - j\omega_{c0})}{K(-j\omega_{c0})} \right], \quad (6)$$

$$K_{21}(p) = -K_{12}(p) = \frac{j}{2} \left[\frac{K(p + j\omega_{c0})}{K(j\omega_{c0})} - \frac{K(p - j\omega_{c0})}{K(-j\omega_{c0})} \right];$$

$$r_{11} = 0, \quad r_{12} = a_1 \varphi_1, \quad r_{13} = -\frac{1}{6} \varphi_1^3 + a_1 \varphi_2 + a_2 \varphi_1, \dots, \quad (7)$$

$$r_{21} = 0, \quad r_{22} = -\frac{1}{2} \varphi_1^2, \quad r_{23} = -\frac{1}{2} a_1 \varphi_1^2 - \varphi_1 \varphi_2, \dots,$$

r_{1k}, r_{2k} — многочлены порядка k от переменных $a_1, \dots, a_{k-1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$,

$$S_{11} = 0, \quad S_{12} = A_1 \psi_1, \quad S_{13} = -\frac{1}{6} \psi_1^3 + A_1 \psi_2 + A_2 \psi_1, \dots, \quad (8)$$

$$S_{21} = 0, \quad S_{22} = -\frac{1}{2} \psi_1^2, \quad S_{23} = -\frac{1}{2} A_1 \psi_1^2 - \psi_1 \psi_2, \dots,$$

S_{1k}, S_{2k} — многочлены порядка k от переменных $A_1, \dots, A_{k-1}, \psi_1, \dots, \psi_{-1}$.

Конкретные выражения для функций $r_{1k}, r_{2k}, S_{1k}, S_{2k}$ получаются путем, указанным в Приложении.

В формулах (5) слагаемые, зависящие от φ_k, a_k , определяют линейное преобразование угловой и амплитудной модуляции входного сигнала, осуществляемое селективной цепью, а остальные слагаемые (зависящие от $r_{1k}, r_{2k}, S_{1k}, S_{2k}$) определяют нелинейные искажения.

Матрица $\begin{pmatrix} K_{11}(p) & pK_{12}(p) \\ \frac{1}{p}K_{21}(p) & K_{22}(p) \end{pmatrix}$ есть введенная в [6] передаточная мат-

рица цепи, описывающая линейное преобразование амплитудной и частотной модуляции входного сигнала. Здесь, в отличие от [6], для построения передаточной матрицы не требуется вычисления полюсов коэффициента $K(p)$. Соотношением

$$K(j(\Omega + \omega_{c0})) = |K(j\omega_{c0})| M(\Omega) \exp \{j[\Phi(\Omega) + \psi_0]\} \quad (9)$$

определим функции $M(\Omega) > 0$ и $\Phi(\Omega)$; очевидно, $M(0) = 1, \Phi(0) = 0$. Из (6) при этом следует:

$$2K_{11}(j\Omega) = M(\Omega) e^{j\Phi(\Omega)} + M(-\Omega) e^{-j\Phi(-\Omega)}, \quad (10)$$

$$2K_{21}(j\Omega) = j[M(\Omega) e^{j\Phi(\Omega)} - M(-\Omega) e^{-j\Phi(-\Omega)}].$$

Остановимся подробнее на важном случае, когда

$$M(\Omega) = M(-\Omega), \quad \Phi(-\Omega) = -\Phi(\Omega), \quad \omega_{c0} = \omega_0, \quad (11)$$

т. е. амплитудная и фазовая характеристики цепи обладают соответствующими свойствами симметрии и частота несущего колебания равна частоте настройки. В этом случае, как следует из (10),

$$K_{11}(j\Omega) = K_{22}(j\Omega) = M(\Omega) e^{j\Phi(\Omega)}, \quad K_{21}(j\Omega) = K_{12}(j\Omega) = 0. \quad (12)$$

Предположим также, что в (2) $\beta a(t, \beta)$ является четной функцией β (не исключается $a = 0$), $\Delta\varphi$ — нечетной функцией β , т. е.

$$a_{2k-1} = 0, \quad \varphi_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что при условиях (11) и (13) $r_{1k} = S_{1k} = 0$ при четном k , $r_{2k} = S_{2k} = 0$ при нечетном k и, следовательно, $\psi_k = 0$ при четном k , $A_k = 0$ при нечетном k . Таким образом, при условиях (11) и (13)

$$\Delta\psi = \psi_0 + \beta\psi_1(t) + \beta^3\psi_3(t) + \beta^5\psi_5(t) + \dots, \quad \beta A = \beta^2 A_2(t) + \beta^4 A_4(t) + \dots \quad (14)$$

Пусть в (2) $a(t, \beta) \equiv 0$, $\varphi_1 = \gamma \cos \Omega t$, $\varphi_k = 0$ для $k = 2, 3, \dots$ и выполняется (11). Тогда выполняется (14), и из уравнений (5) следует:

$$\beta\psi_1 = \beta\gamma \operatorname{Re} \{K_{11}(j\Omega) e^{j\Omega t}\}, \quad \beta^3\psi_3 = \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^3 \operatorname{Re} \{N_{33} e^{3j\Omega t} + N_{31} e^{j\Omega t}\}, \quad (15)$$

$$N_{33}(j\Omega) = -\frac{2}{3} K_{11}^2(j\Omega) - \frac{1}{3} K_{11}(3j\Omega) + K_{11}(j\Omega) K_{11}(2j\Omega),$$

$$N_{31}(j\Omega) = -2K_{11}^2(j\Omega) K_{11}(-j\Omega) + K_{11}(j\Omega) + K_{11}(2j\Omega) K_{11}(-j\Omega);$$

$$\beta^5\psi_5 = \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^5 \operatorname{Re} \{N_{55} e^{5j\Omega t} + N_{53} e^{3j\Omega t} + N_{51} e^{j\Omega t}\},$$

$$N_{55}(j\Omega) = -N_{33} K_{11}^2(j\Omega) - \frac{4}{15} K_{11}^5(j\Omega) + \frac{1}{60} K_{11}(5j\Omega) -$$

$$- \frac{1}{6} K_{11}(3j\Omega) K_{11}(2j\Omega) - \frac{1}{12} K_{11}(j\Omega) K_{11}(4j\Omega) + \frac{1}{2} K_{11}(j\Omega) K_{11}^2(2j\Omega), \quad (16)$$

$$N_{53}(j\Omega) = -2|K_{11}(j\Omega)|^2 N_{33} - N_{31} K_{11}^2(j\Omega) - \frac{4}{3} K_{11}^4(j\Omega) \times$$

$$\times K_{11}(-j\Omega) - \frac{1}{4} K_{11}(3j\Omega) + \frac{7}{6} K_{11}(j\Omega) K_{11}(2j\Omega) -$$

$$- \frac{1}{12} K_{11}(-j\Omega) K_{11}(4j\Omega) + \frac{1}{2} K_{11}(-j\Omega) K_{11}^2(2j\Omega);$$

$$\beta^7 \psi_7 = \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^7 \operatorname{Re} \{N_{75} e^{5j\Omega t} + \text{другие гармоники}\},$$

$$N_{75}(j\Omega) = -2|K_{11}(j\Omega)|^2 N_{55} - N_{53} K_{11}^2(j\Omega) - \frac{1}{2} N_{33} K_{11}(-j\Omega) -$$

$$- N_{33} N_{31} K_{11}(j\Omega) - \frac{2}{3} [K_{11}^4(j\Omega) N_{31} + 4K_{11}^3(j\Omega) K_{11}(-j\Omega) N_{33}] -$$

$$- \frac{34}{45} K_{11}^6(j\Omega) K_{11}(-j\Omega) + \frac{1}{72} K_{11}(5j\Omega) - \frac{17}{72} K_{11}(3j\Omega) K_{11}(2j\Omega) -$$

$$- \frac{13}{120} K_{11}(4j\Omega) K_{11}(j\Omega) + \frac{11}{12} K_{11}^2(2j\Omega) K_{11}(j\Omega) + \frac{1}{360} K_{11}(6j\Omega) K_{11}(-j\Omega) -$$

$$- \frac{1}{12} K_{11}(4j\Omega) K_{11}(2j\Omega) K_{11}(-j\Omega) + \frac{1}{4} K_{11}^3(2j\Omega) K_{11}(-j\Omega).$$

При анализе угловой модуляции выходного сигнала можно ограничиться суммой $\beta\psi_1 + \beta^3\psi_3$, если «хвост» $\beta^5\psi_5 + \beta^7\psi_7 + \dots$ ряда (3) относительно мал. Поскольку удовлетворительно оценить этот «хвост» не удастся (возможны грубые оценки, не имеющие практического значения), в качестве компромисса обычно требуют, чтобы мощность пятой гармоники в сумме $\beta^5\psi_5 + \beta^7\psi_7$ была много меньше мощности третьей гармоники в сумме $\beta^3\psi_3 + \beta^5\psi_5$, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\left| N_{33} + \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^2 N_{53} \right|^2 \gg \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^4 \left| N_{55} + \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^2 N_{75} \right|^2. \quad (18)$$

Соотношение (18) является условием того, что при гармонической угловой модуляции входного сигнала нелинейные искажения угловой модуляции выходного сигнала определяются третьей гармоникой. При этом из (15) следует коэффициент нелинейных искажений по третьей гармонике.

Пусть частота входного сигнала равна $\varphi = \omega_0 + \Delta\omega_0 \sin \Omega t$, $\frac{\Delta\omega_0}{2\pi}$ — де-

виация частоты (в герцах), $\frac{h}{\pi}$ — полоса фильтра, $\beta\gamma = \frac{\Delta\omega_0}{\Omega}$ — индекс

ЧМ. Положим $\frac{\Delta\omega_0}{2h} = \frac{1}{n}$, $x = \frac{\Omega}{h}$, тогда $\beta\gamma = \frac{2}{nx}$. При фиксированном x

условие (18) выполняется, если n больше некоторого числа n_0 , т. е. девиация частоты меньше полосы фильтра в $n > n_0$ раз. Проводилась численная проверка условия (18) для гауссова фильтра, резонансного контура, пары индуктивно связанных контуров (при связи, несколько большей критической), полосовых фильтров (состоящих из трех и четырех контуров) при $n = 3$ и индексе $\beta\gamma$ в пределах от 0,7 до 33 (x от 0,02 до 1). Выяснилось, что при изменении индекса ЧМ от 0,7 до 11 отношение левой части неравенства (18) к его правой части убывает от нескольких сотен до нескольких десятков (в зависимости от типа фильтра) и остается для всех указанных фильтров больше 20. С уменьшением Ω до нуля индекс $\beta\gamma$ неограниченно растет, но коэффициенты $N_{ik}(j\Omega)$ убывают до нуля. Дифференцируя по Ω в окрестности $\Omega = 0$, обнаружим, что $|N_{33}|$ убывает, как Ω^3 , $|N_{53}|$ и $|N_{55}|$ убывают, как Ω^5 , $|N_{75}|$ убывает, как Ω^7 , так что в пределе при $\Omega \rightarrow 0$ условие (18) принимает вид

$$\left| 1 + \frac{c_1}{n^2} \right|^2 \gg \frac{1}{n^4} \left| c_2 + \frac{c_3}{n^2} \right|^2 \quad (c_1, c_2, c_3 — \text{постоянные}).$$

Таким образом, принципиально можно добиться того, чтобы условие (18) выполнялось во всем диапазоне модулирующих частот вплоть до нуля, но практически на малых частотах этого делать не следует. Невыполнение условия (18) физически означает, что мощность высших гармоник сравнима с мощностью третьей гармоники, но суммарная мощность всех гармоник (начиная с третьей) при фиксированной девиации частоты убывают обратно пропорционально квадрату индекса ЧМ. Как показывают расчеты при $n = 3$ и $\beta\gamma = 30$ для любого из упомянутых фильтров коэффициент третьей гармоники не превосходит 0,4% и коэффициент пятой гармоники не превосходит 0,1%. Хотя (18) при этом не выполняется, но низкий уровень нелинейных искажений обеспечивается за счет малых коэффициентов гармоник.

При гармонической угловой модуляции и условиях (11) из (5) следуют формулы для «паразитной» амплитудной модуляции выходного сигнала:

$$\beta^2 A_2 = \left(\frac{\beta\gamma}{2} \right)^2 [n_{20} + \text{Re}(n_{22} e^{2j\Omega t})], \quad n_{20} = |K_{11}(j\Omega)|^2 - 1, \quad n_{22} = K_{11}^2(j\Omega) -$$

$$- K_{11}(2j\Omega), \quad \beta^4 A_4 = \left(\frac{\beta\gamma}{2} \right)^4 [n_{40} + \text{Re}(n_{44} e^{4j\Omega t} + n_{42} e^{2j\Omega t})],$$

$$n_{42} = \frac{1}{3} K_{11}(2j\Omega) - \frac{1}{3} K_{11}(3j\Omega) K_{11}(-j\Omega) + |K_{11}(j\Omega)|^2 n_{22},$$

$$n_{44} = \frac{1}{12} K_{11}(4j\Omega) - \frac{1}{3} K_{11}(3j\Omega) K_{11}(j\Omega) + \frac{1}{2} K_{11}(2j\Omega) \times \quad (19)$$

$$\times K_{11}^2(j\Omega) - \frac{1}{4} K_{11}^4(j\Omega), \quad \beta^6 A_6 = \left(\frac{\beta\gamma}{2} \right)^6 \text{Re}(n_{64} e^{4j\Omega t} + \text{другие гармоники}),$$

$$n_{64} = -n_{20} n_{44} - \frac{1}{2} n_{22} n_{42} - \frac{1}{10} K_{11}(4j\Omega) - \frac{1}{6} K_{11}^2(2j\Omega) +$$

$$+ \frac{1}{60} K_{11}(5j\Omega) K_{11}(-j\Omega) + \frac{1}{4} K_{11}(3j\Omega) K_{11}(j\Omega).$$

Теперь следует условие того, что «паразитная» амплитудная модуляция практически представляется второй гармоникой (аналог условия (18)):

$$\left| n_{22} + \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^2 n_{42} \right|^2 \gg \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^4 \left| n_{44} + \left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^2 n_{64} \right|^2.$$

2. АНАЛИЗ МОДУЛЯЦИИ В ЧАСТОТНЫХ ДЕТЕКТОРАХ

Рассмотрим детектор, схема которого представлена на рис. 1. Селективные фильтры 1 и 2 с коэффициентами передачи K_{1p} и K_{2p} настроены на частоту ω_0 , $m = \text{const}$ — коэффициент связи между фильтрами; фильтр 2 используется в качестве фазовращателя, так что $\arg K_2(j\omega_0) = -\frac{\pi}{2}(2n-1)$ ($n > 0$ — целое); предполагается, что амплитудные характеристики фильтров являются четными функциями расстройки $\omega - \omega_0$, а фазовые характеристики $\arg \frac{K_1(j\omega)}{K_1(j\omega_0)}$ и $\arg \frac{K_2(j\omega)}{K_2(j\omega_0)}$ являются нечетными функциями расстройки $\omega - \omega_0$.

С выходов фильтров снимаются сигналы $u(t)$ и $v(t)$, из которых формируются сигналы $v_1 = v + \nu u$ и $v_2 = v - \nu u$ ($\nu = \text{const}$). Сигналы v_1 и v_2 подаются на амплитудные детекторы, представленные на рис. 1 нелинейными безынерционными элементами 3 и фильтрами низкой

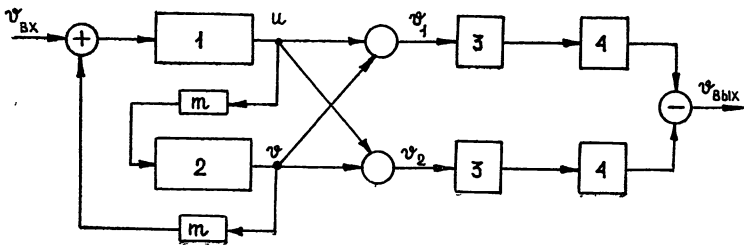


Рис. 1.

частоты 4 с одинаковыми коэффициентами передачи $K_\Phi(p)$. Выходные сигналы фильтров низкой частоты вычитаются, влиянием амплитудных детекторов на селективные фильтры обычно пренебрегают. Пусть характеристика нелинейного элемента описывается формулой $\frac{1}{2} \alpha(v + |v|)$, т. е. его выходной сигнал пропорционален положительному входному и равен нулю при отрицательном входном. Рассмотренной схемой описывается, в частности, детектор на связанных контурах, если фильтры 1 и 2 — резонансные контуры и $\nu = \frac{1}{2}$.

Пусть на вход детектора подается сигнал $v_{\text{вх}}(t) = V_0 \cos \varphi(t)$, $\varphi = \omega_0 t + \beta \dot{\varphi}_1(t)$. Тогда v_1 и v_2 представляются в виде $v_1 = W_1(t) \cos(\omega_0 t + \Phi_1)$ и $v_2 = W_2(t) \cos(\omega_0 t + \Phi_2)$; на выходе детектора снимается сигнал:

$$\bar{v}_{\text{вых}} = k_d K_\Phi(p) (\bar{W}_1 - \bar{W}_2)$$

($K_\Phi(0) = 1$, k_d — постоянная). Выходные сигналы фильтров 1 и 2 представляются формулами

$$\bar{v} = K_3(p) \bar{v}_{\text{вх}}, \quad \bar{u} = K_4(p) \bar{v}_{\text{вх}},$$

$$K_3(p) = \frac{mK_1(p)K_2(p)}{1 - m^2 K_1(p)K_2(p)}, \quad K_4(p) = \frac{K_1(p)}{1 - m^2 K_1(p)K_2(p)}.$$

При сделанных выше предположениях для $K_3(p)$ и $K_4(p)$ выполняются условия (11) и (13). Пусть $K_{11}^{(3)}(p)$ и $K_{11}^{(4)}(p)$ — элементы передаточных матриц, отвечающих коэффициентам $K_3(p)$ и $K_4(p)$. При помощи этих элементов и формул (14) и (15) определяется угловая и амплитудная модуляция сигналов $u(t)$ и $v(t)$, после чего нетрудно провести анализ сигналов в остальных блоках детектора. Опуская выкладки, приведем окончательные результаты. Выходной сигнал детектора в линейном приближении представляется формулой

$$\bar{v}_{\text{вых}} = k_d \frac{2\nu |K_3(j\omega_0)|}{\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}} V_0 K_4(p) \beta \rho \bar{\varphi}_1,$$

где $\lambda = m |K_2(j\omega_0)|$, $K_4(p) = K_\Phi(p) [K_{11}^{(3)}(p) - K_{11}^{(4)}(p)] \frac{1}{p}$ — эквивалентный коэффициент передачи детектора по частотной модуляции. Если $\varphi_1 = \gamma \cos \Omega t$, то нелинейные искажения представляются третьей гармоникой, коэффициент которой равен

$$k_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\gamma}{2} \right)^2 \left| \frac{N_{33}^{(3)} - N_{33}^{(4)}}{j\Omega K_4(j\Omega)} - \frac{1}{3} \frac{\nu^4 + \nu^2\lambda^2 + \lambda^4}{(\nu^2 + \lambda^2)^2} (j\Omega K_4(j\Omega))^2 + \frac{\nu^2 n_{22}^{(3)} + \lambda^2 n_{22}^{(4)}}{\nu^2 + \lambda^2} \right|.$$

Здесь $N_{33}^{(i)}$, $n_{22}^{(i)}$ определяются формулами (15) и (19), в которых вместо K_{11} ставится $K_{11}^{(i)}$.

Для детектора на связанных контурах $\nu = \frac{1}{2}$, $\lambda \approx 1$ (при критической связи $\lambda = 1$),

$$K_{11}^{(3)}(p) = \frac{1 + \lambda^2}{\left(1 + \frac{p}{h}\right)^2 + \lambda^2}, \quad K_{11}^{(4)}(p) = \left(1 + \frac{p}{h}\right) K_{11}^{(3)}(p),$$

$$K_4(p) = -\frac{1}{h} K_\Phi(p) K_{11}^{(3)}(p),$$

где $\frac{h}{\pi}$ — полоса каждого из контуров.

Аналогично проводится анализ детектора на расстроенных контурах. Здесь приведем только окончательные результаты. Пусть ω_{10} и ω_{20} — частоты настройки контуров, их амплитудные и фазовые характеристики являются одинаковыми функциями расстроек $\omega - \omega_{10}$ и $\omega - \omega_{20}$. Выходные сигналы контуров подаются на амплитудные детекторы (полностью аналогичные рассмотренным выше) и далее вычитаются.

Пусть частота входного ЧМ сигнала равна $\dot{\varphi} = \omega_0 + \beta \dot{\varphi}_1(t)$, $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_{10} + \omega_{20})$.

Тогда выходной сигнал детектора в линейном приближении представляется формулой

$$\bar{v}_{\text{вых}} = k_d |K(j\omega_0)| V_0 K_q(p) \beta p \bar{\varphi}_1,$$

где V_0 — амплитуда входного сигнала, $|K(j\omega_0)|$ — значение амплитудной характеристики контура на частоте ω_0 , $K_q(p) = K_\Phi(p) K_{21}(p) \frac{1}{p}$

— эквивалентный коэффициент передачи детектора. В области $\left| \frac{p}{\omega_0} \right| \ll 1$

для расстроенного контура $\frac{1}{p} K_{21}(p) = -\frac{1}{h} \frac{\varepsilon}{\left(1 + \frac{p}{h}\right)^2 + \varepsilon^2}$, где $\varepsilon = \frac{\omega_{20} - \omega_{10}}{2h}$

— относительная расстройка, $\frac{h}{\pi}$ — полоса контура. При гармонической модуляции $\varphi_1 = \gamma \cos \Omega t$ и нелинейные искажения представляются третьей гармоникой, коэффициент которой равен

$$k_3 = \left(\frac{\beta \gamma}{2} \right)^2 \left| \frac{K_\Phi(3j\Omega)}{K_\Phi(j\Omega)} \right| \left| K_{21}(j\Omega) K_{11}(j\Omega) + K_{21}(2j\Omega) + \frac{1}{3} \frac{K_{21}(3j\Omega)}{K_{21}(j\Omega)} \right|.$$

Для расстроенного контура

$$K_{11}(p) = \frac{1 + \frac{p}{h} + \varepsilon^2}{\left(1 + \frac{p}{h}\right)^2 + \varepsilon^2} \quad (\varepsilon \approx 1).$$

Для детектора на расстроенных контурах близкие оценки искажений получены в [4].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Положим

$$U_1(t) = [1 + \beta a(t, \beta)] \sin \Delta \varphi, \quad (20)$$

$$U_2(t) = [1 + \beta a(t, \beta)] \cos \Delta \varphi;$$

$$u_1(t) = U_1(t) \sin \omega_{c0} t, \quad u_2(t) = U_2(t) \cos \omega_{c0} t. \quad (21)$$

Тогда $u(t) = u_2(t) - u_1(t)$. Пусть $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — выходные сигналы цепи, когда на вход подаются соответственно u_1 и u_2 , т. е.

$$\bar{v}_1(p) = K(p) \bar{u}_1(p), \quad \bar{v}_2(p) = K(p) \bar{u}_2(p). \quad (22)$$

Тогда, в силу линейности цепи,

$$v = v_2 - v_1 = Q_2 \cos \omega_{c0} t - Q_1 \sin \omega_{c0} t, \quad (23)$$

где

$$Q_1 = V_0 [1 + \beta A(t, \beta)] \sin \Delta \varphi, \quad (24)$$

$$Q_2 = V_0 [1 + \beta A(t, \beta)] \cos \Delta \varphi.$$

Из (21) в силу свойств преобразования Лапласа следует:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(p) &= \frac{1}{2j} [\bar{U}_1(p - j\omega_{c0}) - \bar{U}_1(p + j\omega_{c0})], \\ \bar{u}_2(p) &= \frac{1}{2} [\bar{U}_2(p - j\omega_{c0}) + \bar{U}_2(p + j\omega_{c0})].\end{aligned}\quad (25)$$

Из (23) следует:

$$\begin{aligned}2(v_2 - v_1) \cos \omega_{c0}t &= Q_2 + Q_2 \cos 2\omega_{c0}t - Q_1 \sin 2\omega_{c0}t, \\ 2(v_2 - v_1) \sin \omega_{c0}t &= -Q_1 + Q_2 \sin 2\omega_{c0}t + Q_1 \cos 2\omega_{c0}t,\end{aligned}$$

и потому, в силу (22) и (25), изображения для медленно меняющихся функций Q_1 и Q_2 представляются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\bar{Q}_1(p)}{|K(j\omega_{c0})|} &= N_2(p) \bar{U}_1(p) + N_1(p) \bar{U}_2(p), \\ \frac{\bar{Q}_2(p)}{|K(j\omega_{c0})|} &= -N_1(p) \bar{U}_1(p) + N_2(p) \bar{U}_2(p),\end{aligned}\quad (26)$$

где $N_1(p)$ и $N_2(p)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}|K(j\omega_{c0})| N_1(p) &= \frac{1}{2j} [K(p + j\omega_{c0}) - K(p - j\omega_{c0})], \\ |K(j\omega_{c0})| N_2(p) &= \frac{1}{2} [K(p + j\omega_{c0}) + K(p - j\omega_{c0})].\end{aligned}\quad (27)$$

В силу (2)–(4), (20) и (24) для функций U_1 , U_2 , Q_1 , Q_2 следуют разложения в ряды:

$$\begin{aligned}U_1 &= \beta\varphi_1 + \beta^2(\varphi_2 + r_{12}) + \beta^3(\varphi_3 + r_{13}) + \dots, \\ U_2 &= 1 + \beta a_1 + \beta^2(a_2 + r_{22}) + \beta^3(a_3 + r_{23}) + \dots, \\ \frac{Q_1}{|K(j\omega_{c0})|} &= \sin \psi_0 [1 + \beta A_1 + \beta^2(A_2 + S_{22}) + \dots] + \\ &+ \cos \psi_0 [\beta\psi_1 + \beta^2(\psi_2 + S_{12}) + \beta^3(\psi_3 + S_{13}) + \dots], \\ \frac{Q_2}{|K(j\omega_{c0})|} &= \cos \psi_0 [1 + \beta A_1 + \beta^2(A_2 + S_{22}) + \dots] - \\ &- \sin \psi_0 [\beta\psi_1 + \beta^2(\psi_2 + S_{12}) + \beta^3(\psi_3 + S_{13}) + \dots],\end{aligned}\quad (28)$$

где r_{22} , r_{23} , S_{22} , S_{23} выписаны в (7) и (8). Подставляя ряды (28) в уравнения (26) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра β , приходим к цепочке уравнений:

$$\begin{aligned}\cos \psi_0 (\bar{A}_k + \bar{S}_{2k}) - \sin \psi_0 (\bar{\psi}_k + \bar{S}_{1k}) &= -N_1(p) (\bar{\varphi}_k + \bar{r}_{1k}) + \\ &+ N_2(p) (\bar{a}_k + \bar{r}_{2k}),\end{aligned}$$

$$\sin \psi_0 (\bar{A}_k + \bar{S}_{2k}) + \cos \psi_0 (\bar{\psi}_k + \bar{S}_{1k}) = N_2(p) (\bar{\varphi}_k + \bar{r}_{1k}) + N_1(p) (\bar{a}_k + \bar{r}_{2k}).$$

Разрешив эти уравнения относительно A_k и ψ_k и учитывая (4) и (27), приходим к формулам (5) и (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Зенькович, Искажения частотно-модулированных колебаний, изд. Сов. радио, М., 1974.
2. Г. Ван-Трис, Синтез оптимальных нелинейных систем управления, изд. Мир, М., 1964.
3. Э. Бедроян, С. О. Райс, ТИИЭР, № 12, 58 (1971).
4. М. А. Быховский, Труды НИИ радио, № 4, 62 (1974).
5. Э. Бедроян, С. О. Райс, ТИИЭР, № 1, 6 (1968).
6. И. М. Миндлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 8, 1147 (1974).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
14 марта 1975 г.,
после доработки
10 февраля 1976 г.

MATRIX APPROACH TO THE ANALYSIS OF FM OSCILLATIONS IN RADIO
ENGINEERING FREQUENCY-SELECTIVE CIRCUITS AND SOME
APPLICATIONS

M. Mindlin

To describe the relations between modulations of the input and output circuit signals, an approach based on the use of transmission matrices is set forth. Formulas are obtained which express the elements of the transmission matrix of the circuit through its transmission coefficient, as well as the formulas relating the coefficient of nonlinear distortions of modulation with the transmission matrix elements. Based upon these formulas, the analysis is made of the filtering properties of frequency detectors of two types.
