

УДК 533.951

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

А. М. Калмыков, Н. Я. Коцаренко

Рассмотрена параметрическая неустойчивость электронной плазмы в поле сильной электромагнитной волны круговой поляризации. Получено и проанализировано точное дисперсионное уравнение для малых колебаний, развивающихся на фоне волны накачки. Определен характер возникающих неустойчивостей. Показано, что при параметрическом возбуждении поперечной электромагнитной волной непотенциальных колебаний плазмы релятивистский характер движения электронов существен при любых амплитудах волны накачки.

Неустойчивость плазмы в поле плоской электромагнитной волны исследовалась в работах [1-3]. Было обнаружено, что, если частота электромагнитной волны равна или больше удвоенной плазменной частоты, имеет место раскачка связанных продольно-поперечных электромагнитных волн с плазменной частотой.

Неустойчивость плазмы в высокочастотном электрическом поле круговой поляризации рассматривалась в работах [4, 5]. Авторы [4, 5] исследовали низкочастотную аperiodическую неустойчивость плазмы с учетом релятивистского характера движения электронов.

В настоящей работе изучена неустойчивость плазмы в поле сильной электромагнитной волны круговой поляризации. Выбор круговой поляризации волны накачки обусловлен, во-первых, возможностью рассмотрения произвольных амплитуд электромагнитной волны накачки (так как для волн круговой поляризации можно найти точное решение нелинейных уравнений Максвелла [6]), во-вторых, возможностью получения точного дисперсионного уравнения для волн, распространяющихся в том же направлении, что и волна накачки.

1. ПОЛУЧЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

В качестве исходной системы уравнений используем уравнения Максвелла и релятивистское гидродинамическое уравнение движения для электронов:

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} n v, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} E = -4\pi e (n - n_0), \quad \operatorname{div} H = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ E + \frac{1}{c} v \times H - \frac{v}{c^2} (v, E) \right\},$$

где n_0 — плотность компенсирующих ионов, которые считаются неподвижными.

Нетрудно убедиться, что поперечная электромагнитная волна круговой поляризации

$$\begin{aligned}
 E_{x0} &= E_0 \cos \psi_0, & E_{y0} &= E_0 \sin \psi_0, & E_{z0} &= 0, \\
 H_{x0} &= -\frac{ck_0}{\omega_0} E_0 \sin \psi_0, & H_{y0} &= \frac{ck_0}{\omega_0} E_0 \cos \psi_0, & H_{z0} &= 0, \\
 v_{x0} &= -c \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2}} \sin \psi_0, & v_{y0} &= c \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2}} \cos \psi_0, & v_{z0} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $\psi_0 = \omega_0 t - k_0 z$, $v_0 = eE_0/m\omega_0 c$ является точным решением системы (1), причем частота ω_0 , волновой вектор k_0 и амплитуда волны E_0 связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned}
 k_0 &= \frac{\omega_0}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2/\omega_0^2}{\sqrt{1+v_0^2}}} \\
 (\omega_p &= \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим далее малые колебания плазмы на фоне волны (2), т. е. все величины представим в виде $f = f_0 + f'$, где f_0 определяется формулами (2). Линеаризуя систему (1) относительно переменных f' , получаем следующую систему уравнений для малых колебаний плазмы:

$$\begin{aligned}
 \text{rot } H' &= \frac{1}{c} \frac{\partial E'}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} (n_0 v' + n' v_0), & \text{rot } E' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H'}{\partial t}, \\
 \text{div } E' &= -4\pi e n', & \text{div } H' &= 0, \\
 \frac{\partial v'}{\partial t} + (v_0 \nabla) v' + (v' \nabla) v_0 &= -\frac{e}{m\kappa} \left\{ E' + \frac{v_0}{c} \times H' + \right. \\
 \left. + \frac{v'}{c} \times H_0 - \frac{v_0}{c^2} (v_0 E' + v' E_0) \right\} + \frac{e\kappa}{mc^2} (v', v_0) \left(E_0 + \frac{1}{c} v_0 \times H_0 \right),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $\kappa = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-1/2} = (1 + v_0^2)^{1/2}$, $v_0 = c v_0/\kappa$. Ограничимся случаем распространения волны вдоль оси z . Система (4) является системой уравнений в частных производных с периодическими коэффициентами относительно переменной $z - \frac{\omega_0}{k_0} t$. Обычно в теории параметрической неустойчивости [7] путем выделения синхронных членов получается приближенное дисперсионное уравнение (роль малого параметра играет величина v_0/c). В данном случае оказывается возможным получить точное дисперсионное уравнение, пригодное как для нерелятивистского случая $\frac{v_0}{c} \ll 1$, так и для ультрарелятивистского $\frac{v_0}{c} \leq 1$. Для этого в системе (4) вместо x -х и y -х компонент полей необходимо перейти к переменным

$$E^\pm = E'_x \pm iE'_y, \quad H^\pm = H'_x \pm iH'_y, \quad W^\pm = v'_x \pm iv'_y.$$

Далее, считая величины E^\pm , H^\pm , W^\pm меняющимися по закону

$$E^\pm, H^\pm, W^\pm \sim e^{i[(\omega \pm \omega_0)t - (k \pm k_0)z]}, \tag{5a}$$

а E'_z , v'_z , n' по закону

$$E'_z, v'_z, n' \sim e^{i(\omega t - kz)}, \tag{5b}$$

система с периодическими коэффициентами (4) переходит в алгебраическую однородную систему уравнений, детерминант которой, приравненный нулю, и дает точное дисперсионное уравнение для малых колебаний. В окончательном виде дисперсионное уравнение имеет вид

$$(x^2 - 1) [1 - (x + \sigma)^2 + (y + \tau)^2] [1 - (x - \sigma)^2 + (y - \tau)^2] + \beta^2 (y^2 - x^2) (y^2 - x^2 + 1) = 0, \quad (6)$$

где $x = \frac{\omega}{\omega_L}$, $y = \frac{ck}{\omega_L}$, $\sigma = \frac{\omega_0}{\omega_L}$, $\tau = \frac{ck_0}{\omega_L}$, $\omega_L = \frac{\omega_p}{\sqrt{\kappa}}$, $\beta = \frac{v_0}{c}$, причем σ и τ связаны между собой соотношением $\sigma^2 - \tau^2 = 1$, следующим из формулы (3).

2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

При $\tau = 0$ (случай бесконечной длины волны накачки) дисперсионное уравнение (6) совпадает с полученным в работах [4, 5]. Дисперсионное уравнение (6) является уравнением шестой степени относительно частоты x , и общий анализ его возможен только с помощью численных методов. Рассмотрим вначале случай $\beta \ll 1$, когда применимо приближение слабосвязанных волн. При $\beta = 0$ из (6) получаем решения

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1; \quad (7a)$$

$$x_3 = \sigma + \sqrt{1 + (y - \tau)^2}, \quad x_4 = \sigma - \sqrt{1 + (y - \tau)^2}, \quad (7b)$$

$$x_5 = -\sigma + \sqrt{1 + (y + \tau)^2}, \quad x_6 = -\sigma - \sqrt{1 + (y + \tau)^2}.$$

Решения $x_{1,2} = \pm 1$ соответствуют потенциальным плазменным колебаниям ($\omega = \pm \omega_p$), а x_{3-6} — поперечным электромагнитным волнам. При $\beta \ll 1$ (слабая связь между волнами) неустойчивость следует ожидать в области синхронизма волн. Из (7a), (7b) видно, что можно рассматривать синхронизм электромагнитных волн x_4 и x_5 между собой, а также каждой из этих волн с плазменными волнами.

При $\sigma < 2$ явление неустойчивости имеет место лишь при синхронизме электромагнитных волн x_4 и x_5 между собой (точка синхронизма находится в начале координат: $x_0 = y_0 = 0$). Дисперсионное уравнение в окрестности синхронизма волн x_4 и x_5 получим, полагая в (6) $x \ll 1$, $y \ll 1$. Тогда (6) сводится к квадратному уравнению относительно x и y :

$$x^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{4\sigma^2}\right) - 2xy \frac{\tau}{\sigma} + y^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\beta^2}{4\sigma^2}\right) = 0,$$

откуда находим частоту и инкремент нарастающих колебаний:

$$x' = y \frac{\tau}{\sigma}, \quad -x'' = y \frac{\beta}{2\sigma^2}. \quad (8)$$

На рис. 1 эта неустойчивость обозначена через I.

Согласно (5a), (5b) решение (8) соответствует продольным колебаниям плазмы с частотой ω' ($\omega' \ll \omega_0$) и поперечным колебаниям плазмы с частотами $\omega_0 \pm \omega' \approx \omega_0$. При этом соотношение между амплитудами продольных и поперечных колебаний имеет вид

$$\left| \frac{E_z}{E_{\pm}} \right| \sim \beta/2\sigma y.$$

При $\tau = 0$ для продольных волн неустойчивость является апериио-

дической (апериодический характер неустойчивости продольных волн при $\tau = 0$ сохраняется при любых β вплоть до значений $\beta \leq 1$). При $\sigma > 2$ ($\omega_0 > 2\omega_p$), кроме рассмотренной неустойчивости появляются неустойчивости в области синхронизма электромагнитных волн x_4 и x_5 с плазменными волнами (рис. 1, области II и III).

Для примера рассмотрим синхронизм волны x_4 с плазменной волной $x_1 = 1$, который имеет место в точках x_{0II}, y_{0II} и x_{0III}, y_{0III} , где

$$x_{0II} = 1, \quad y_{0II} = \sqrt{\sigma^2 - 1} - \sqrt{\sigma(\sigma - 2)}; \quad (9a)$$

$$x_{0III} = 1, \quad y_{0III} = \sqrt{\sigma^2 - 1} + \sqrt{\sigma(\sigma - 2)}. \quad (9b)$$

Дисперсионное уравнение (6) в окрестности точек синхронизма (9a) и (9b) может быть представлено в виде

$$[x - \sigma + \sqrt{1 + (y - \tau)^2}] (x - 1) = -\frac{\beta^2}{8} \frac{y_0^2}{\sigma - 1} = Q(y_0), \quad (10)$$

где коэффициент связи $Q(y_0)$ вычисляется в точке синхронизма.

Из (10) следует, что ширина области неустойчивости Δy и максимальный инкремент неустойчивости $-x''_{\max}$ в областях II и III определяется формулами

$$\Delta y = \beta \sqrt{2} y_0 \sqrt{\frac{\sigma - 1}{\sigma(\sigma - 2)}}, \quad -x''_{\max} = \frac{\beta}{2\sqrt{2}} \frac{y_0}{\sqrt{\sigma - 1}}. \quad (11)$$

Так как $y_{0III} > y_{0II}$, неустойчивость в области III характеризуется

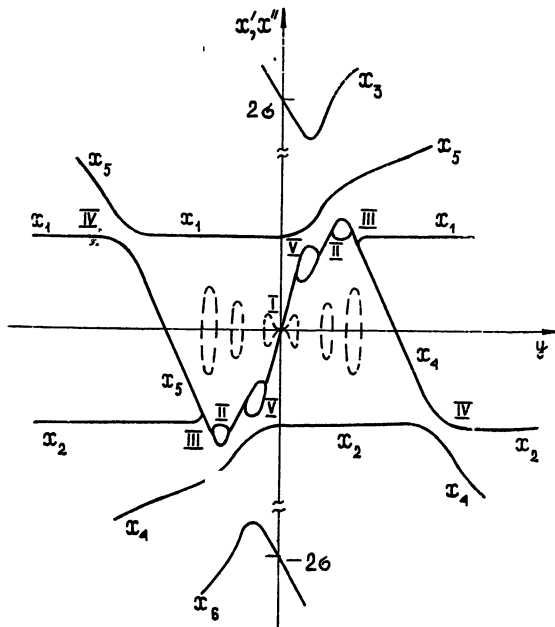


Рис. 1. Типичная картина дисперсионных кривых для $\beta \ll 1$ и $\sigma > 2$. В областях I, II—конвективная неустойчивость, в области III—абсолютная, области IV, V—снятие вырождения волн.

большими инкрементами и более широкой полосой неустойчивости по сравнению с областью II.

На рис. 1 приведен типичный вид дисперсионных кривых при $\sigma > 2$. Из рис. 1 можно сделать вывод о характере возникающих неустойчивостей. Применение критериев абсолютной и конвективной неустойчивостей для параметрически связанных волн [8] показывает, что в областях I и II (синхронизм двух попутных волн) неустойчивость носит конвективный характер, а в области III (синхронизм попутной и встречной волн) неустойчивость носит абсолютный характер.

Дисперсионное уравнение (6) может быть также приближенно решено при $\sigma \gg 1$ ($\omega_0 \gg \omega_p$). Полагая в (6) $y \gg 1$, $x \ll y, \sigma \gg 1$ и сохраняя лишь члены порядка y^4 , для x^2 :

$y^2 \sigma^2$, получаем приближенное уравнение

$$x^2 y^3 (y^3 - 4 \tau^2) - y^4 (1 - \beta^2) + 4 y^2 \tau^2 = 0,$$

решение которого,

$$x^2 = (1 - \beta^2) \frac{y^2 - 4 \tau^2}{y^3 - 4 \tau^2}, \tag{12}$$

показывает, что неустойчивость в этом случае имеет место в области волновых векторов

$$2 \tau < |y| < \frac{2 \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{13}$$

Из формулы (12) следует, что при приближении $|y|$ к значению $|y| \leq 2 \tau$ инкремент неустойчивости возрастает (однако в окрестности $|y| \approx 2 \tau$ нарушается исходное допущение $x \ll y$ и формула (12) становится неприменимой).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА

Дисперсионное уравнение (6) инвариантно относительно замены $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$. Поэтому результаты численного счета на рис. 2—6 приведены лишь для $y > 0$. На рисунках действительная часть частоты изображена сплошной линией, мнимая — пунктирной. Из результатов численного счета дисперсионного уравнения (6) для ряда значений параметров σ и β можно сделать ряд выводов, из которых особо отметим следующие.

1) При $\sigma = 1$ неустойчивость продольных волн является аперодической ($x' = 0$) при любых β , вплоть до ультрарелятивистского случая (рис. 2).

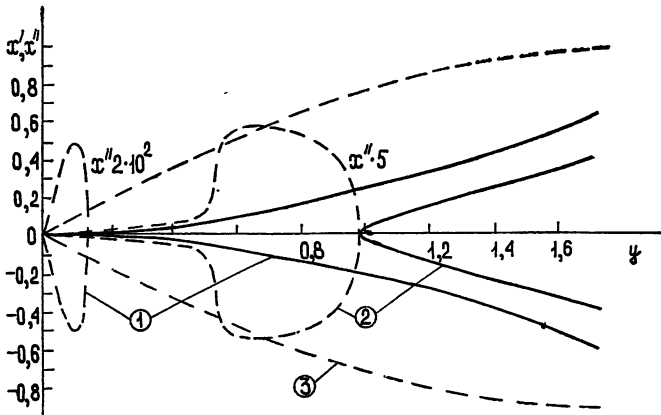


Рис. 2. $\sigma = 1$; 1— $\beta = 0,1$; 2— $\beta = 0,6$; 3— $\beta = 0,99995$ ($v_0 = 100$).

2) При $\sigma > 2$ и $\beta \ll 1$ имеют место три области неустойчивости (рис. 3), соответствующие областям I, II, III рис. 1.

3) При фиксированном значении σ с увеличением β инкременты и полосы неустойчивостей I, II, III возрастают, а при достаточно больших β все три области неустойчивости I, II, III рис. 1 сливаются (рис. 3, 4), что обусловлено увеличением связи между волнами. Однако, при $\beta \leq 1$ и $\sigma \gg 1$ область неустойчивости снова расщепляется на две: коротковолновую и длинноволновую (рис. 5, 6), причем вели-

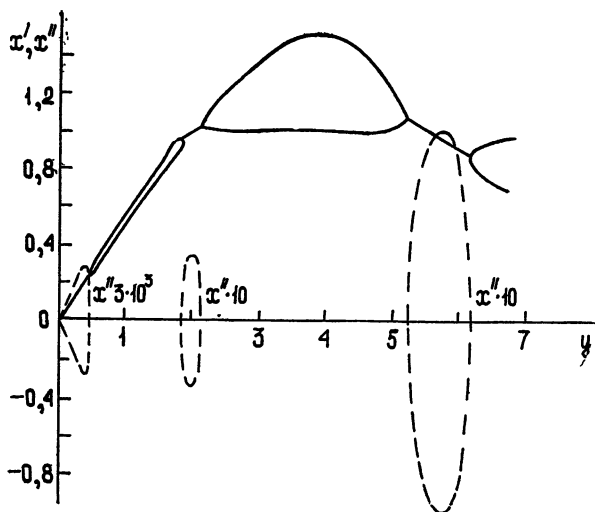


Рис. 3. $\beta = 0,1$; $\sigma = 2,5$.

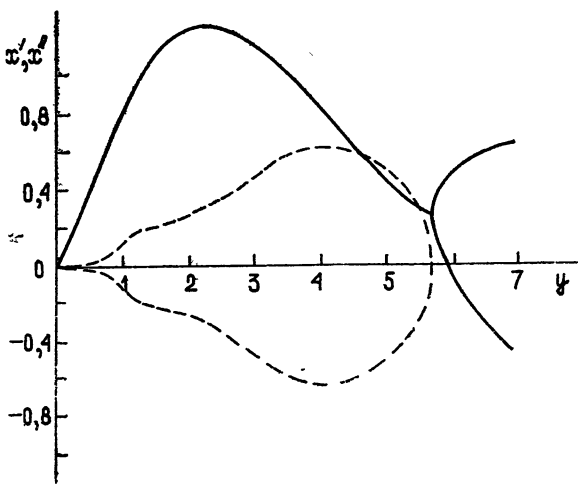


Рис. 4. $\beta = 0,6$; $\sigma = 2,5$.

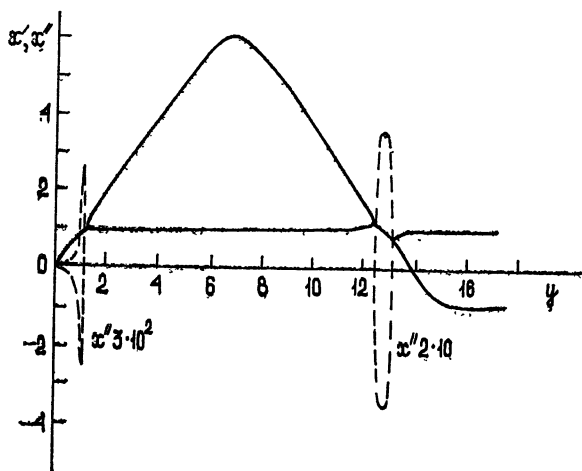


Рис. 5. $\beta = 0,1$; $\sigma = 7,0$.

чины инкремента и полоса неустойчивости в коротковолновой области хорошо описываются формулами (12), (13). В длинноволновой области линейный ход инкремента при малых y описывается выражением (8), однако максимальные значения инкремента достигаются на нелинейном участке, где значения инкремента могут на порядок превышать значения инкремента на линейном участке и где формулы (8) уже не справедливы.

4) Интересным является результат, что с увеличением σ (т. е. с увеличением частоты волны накачки) при фиксированном β инкременты неустойчивости возрастают (рис. 3—5).

В настоящей работе диссипативные процессы не учитывались, т. е. полученные результаты справедливы для случаев $-x'' > \frac{1}{2}\gamma$, где γ — декремент затухания колебаний, обусловленный электронными столкновениями и затуханием Ландау.

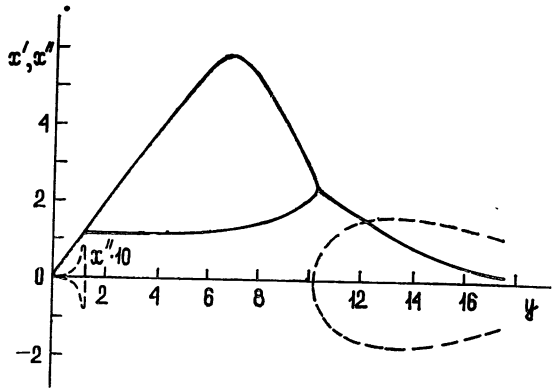


Рис. 6. $\beta = 0,99995$ ($\nu_0 = 100$); $\sigma = 7,0$.

4. О ВЛИЯНИИ РЕЛЯТИВИЗМА

Исходя из (6) можно оценить роль релятивистских эффектов при параметрическом возбуждении колебаний плазмы. Если использовать нерелятивистское уравнение движения электронов, то дисперсионное уравнение имеет вид

$$(x^2 - 1) [1 - (x + \sigma)^2 + (y + \tau)^2] [1 - (x - \sigma)^2 + (y - \tau)^2] + \nu_0^2 (y^2 - x^2) y^2 = 0. \quad (14)$$

(Дисперсионное уравнение (14) совпадает с приведенным в работе [1] с точностью до множителя 2, обусловленного иной нормировкой амплитуды волны накачки.)

Релятивистское уравнение (6) переходит в нерелятивистское уравнение (14) при выполнении естественного условия $\nu_0^2 \ll 1$ и дополнительного условия

$$|x^2 - 1| \ll y^2. \quad (15)$$

При нарушении условия (15) даже при $\nu_0^2 \ll 1$ релятивистские эффекты дают такой же вклад в дисперсионное уравнение, как и связь между продольными и поперечными волнами за счет поперечной волны накачки. Условие (15) выполняется для продольных волн (7 а) и может нарушаться для поперечных волн (7 б), особенно в длинноволновой части ($|y| \ll 1$) области синхронизма волн x_4 и x_5 (область I). Это приводит к тому, что неустойчивость в области I при нерелятивистском рассмотрении отсутствует, т. е. неустойчивость, описываемая формулами (8), — чисто релятивистского происхождения.

Таким образом, при параметрическом возбуждении непотенциальных колебаний плазмы релятивистские эффекты могут быть весьма существенными. Этот результат аналогичен ситуации в теории взаимодействия криволинейных электронных потоков с быстрыми электромаг-

нитными волнами (теория МЦР), где, как известно, релятивизм существен при любых скоростях электронов [9]. Отличие заключается лишь в том, что в МЦР поперечное движение электронов создается внешними статическими электрическими и магнитными полями, а в рассматриваемом случае — поперечной электромагнитной волной накачки.

Изучена параметрическая неустойчивость холодной электронной плазмы в поле сильной электромагнитной волны круговой поляризации с учетом релятивистского характера движения электронов. Показано, что неустойчивость продольных волн имеет место на частотах $\omega' \ll \frac{\omega_p}{\chi}$ и

$\omega' \approx \frac{\omega_p}{\chi}$, а неустойчивость поперечных волн — на частотах $\omega_0 \pm \omega' \approx \omega_0$

и $\omega_0 \pm \frac{\omega_p}{\chi}$. Из результатов численного счета дисперсионного уравнения

для больших амплитуд волны накачки, когда приближение слабой связи между волнами неприменимо, следует, что с увеличением амплитуды волны накачки происходит увеличение инкрементов и расширение областей неустойчивостей. Обнаружено, что в случае возбуждения непотенциальных колебаний плазмы даже при малых амплитудах волны накачки релятивистский характер движения электронов может быть определяющим для рассматриваемого эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Андреев, ЖЭТФ, 59, 2105 (1970).
2. А. Ю. Кирий, ЖЭТФ, 58, 1002 (1970).
3. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, ЖТФ, 42, 1648 (1972); 45, 219 (1975).
4. С. Мах, F. Perkins, Phys. Rev. Lett., 29, 1731 (1972).
5. Н. Л. Цинцадзе, Д. Д. Цхакая, Препринт, 19—В1, октябрь, 1974.
6. А. И. Ахнезер, Р. В. Половин, ЖЭТФ, 30, 915 (1956).
7. В. П. Силян, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973.
8. Н. Я. Коцаренко, А. М. Федорченко, ЖТФ, 39, 179 (1969).
9. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступила в редакцию
14 апреля 1975 г.

INSTABILITY OF PLASMA IN A FIELD OF A STRONG ELECTROMAGNETIC WAVE OF CIRCULAR POLARIZATION

A. M. Kalmykov, N. Ya. Kotsarenko

The parametric instability of an electron plasma in a field of a strong electromagnetic wave of circular polarization is considered. An exact dispersion equation is obtained and analysed for small oscillations developed against the background of the pump wave. The character of instabilities occurred is determined. It is shown that when nonpotential plasma oscillations are parametrically excited by a transverse electromagnetic wave, a nonrelativistic character of electron motion is essential for any amplitudes of the pump wave.