ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIX, № 10 РАДИОФИЗИКА 1976

УДК 517.948.5 : 517.512.2

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ФИЗИКЕ

(Обзор)

А. С. Рошаль

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Гармонический анализ (преобразование Фурье) является эффективным методом исследования функций (сигналов, процессов) в современной математике и физике. При использовании гармонического анализа в различных разделах теории удобно предполагать, что областью задания изучаемых функций является некоторый континуум («непрерывные функции»). В противоположность этому, в вычислительной физике, как правило, приходится оперировать с конечными числовыми последовательностями, которые можно рассматривать как функции одного или нескольких дискретных аргументов, принимающих конечное число значений. Таковы, например, различные таблицы теоретических или экспериментальных величин, коэффициенты (правые части) и решения конечно-разностных уравнений, результаты физического или математического эксперимента, полученные в дискретные моменты времени и т. п. Все такие функции являются, по существу, дискретными (сеточными) функциями, заданными в узлах некоторой одномерной или многомерной сетки. Значения дискретных аргументов сеточных функций (узлы) часто выбираются равноотстоящими в некоторой области определения (сетки с равноотстоящими узлами, т. е. с постоянными шагами по каждому аргументу, называются регулярными). Преобразование Фурье (ПФ) дискретных функций с равноотстоящими значениями аргумента называют дискретным преобразованием Фурье (ДПФ), а если, как обычно, число этих значений к тому же конечно,—конечным преобразованием Фурье (КПФ). Получаемые при этом ряды называют соответственно дискретными или конечными рядами Фурье. (Впрочем, в литературе понятие ДПФ часто используется в смысле КПФ.) Для дискретных функций ДПФ (КПФ) имеет такое же значение и применение как обычное (интегральное или непрерывное) ПФ для непрерывных функций.

Для комплексной функции, заданной в N равноотстоящих узлах, с помощью КПФ можно вычислить N коэффициентов Фурье. При непосредственном выполнении КПФ для вычисления каждого коэффициента требуется около N арифметических операций (под операцией здесь понимается комплексное умножение в совокупности с комплексным сложением), а для всех N коэффициентов — N^2 операций. (При этом не учитываются операции, необходимые для вычисления тригонометрических функций.) Квадратичная зависимость количества операций от числа значений функции или, что то же самое, от числа коэффициентов Фурье обусловлена тем, что каждый коэффициент вычисляется независимо от всех остальных и соответствующие количества операций складываются. Для современной физики типичными являются задачи, в которых исследуемая функция представлена достаточно протяженным отрезком реализации, содержащим до нескольких тысяч значений (узлов). При таком количестве значений функции непосредственное вычисление всех коэффициентов Фурье требует слишком большого времени даже на лучших ЭВМ и приходится ограничиваться вычислением относительно небольшого числа наиболее интересующих исследователя коэффициентов.

Теория, вычислительные алгоритмы и методы применения КПФ интенсивно разрабатываются, главным образом, в последнее десятилетие (начиная с 1965 г.), что связано с созданием в эти годы и широким внедрением в вычислительную практику методики быстрого преобразования Фурье (БПФ). БПФ представляет собой метод эффективного выполнения конечного преобразования Фурье, позволяющий сократить необходимое для этого количество арифметических операций на один-два порядка. Метод применим в тех случаях, когда число шагов N между равноотстоящими значениями аргумента, укладывающихся в интервале его изменения, можно представить в виде произведения многих сомножителей. Поскольку этому условию легко удовлетворить, оно не составляет серьезного ограничения. БПФ основано на том, что преобразование ряда из N-членов циклически сводится к преобразованию нескольких более коротких рядов с кратным числом членов. При этом все коэффициенты Фурье вычисляются одновременно, что дает большую экономию операций. С другой стороны, это означает, что БПФ не позволяет вычислить лишь отдельные, избранные коэффициенты, не вычисляя все остальные.

Благодаря высокой эффективности БПФ многие задачи вычислительной физики могут сейчас решаться значительно быстрее, чем раньше, а кроме того, стал возможным новый подход к ряду проблем Сюда относятся некоторые распространенные краевые задачи для уравнений в частных производных, разностные уравнения, спектральный и корреляционный анализ, вычисление интегралов типа свертки и разложение свернутых функций (т. е. решение интегральных уравнений типа свертки), опознавание образов, математическое моделирование случайных процессов, сжатие полосы частот, цифровые фильтры и другие приложения, типичные для прикладной математической физики, радиофизики, геофизики, кристаллофизики, биофизики и других областей физики. БПФ успешно выполняется на любых универсальных ЭВМ с помощью соответствующих средств математического обеспечения, причем создано большое количество различных вычислительных алгоритмов и программ.

Дальнейшее ускорение БПФ на порядок и более достигается с помощью специализированных ЭВМ, допускающих параллельное выполнение операций. Использование таких ЭВМ необходимо при обработке очень протяженных реализаций физических процессов, а также при оперативной работе ЭВМ «на линии», в реальном масштабе времени. В настоящее время за рубежом создан ряд специализированных ЭВМ различной мощности, предназначенных исключительно для выполнения БПФ.

Помимо БПФ, возможно быстрое z-преобразование, а также быстрое преобразование по некоторым другим системам функций, в частности быстрое преобразование Уолша (БПУ), т. е. разложение по функциям Уолша, которое также может успешно применяться при исследовании физических процессов.

Данный обзор посвящен программным и схемным методам и средствам выполнения БПФ и их применению в прикладных задачах физики; описаны также особенности некоторых других типов быстрых преобразований. Указанные проблемы исследуются во многих публикациях. Для удобства использования библиографические ссылки разбиты на несколько разделов: общие работы [1–12], теория [13–27], методы и алгоритмы [28–72], применение [73–141], специализированные вычислительные устройства [142–165], другие типы быстрых преобразований [166–185]. В каждом из разделов ссылки расположены в алфавитном порядке.

2. КОНЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Рассмотрим комплексную функцию $u(x)$ и ее интеграл Фурье $\bar{u}(f)$, связанные парой взаимно обратных преобразований:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(f)\, e^{i2\pi fx}\, df \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{-i2\pi fx}\, dx = \bar{u}(f) \quad (i \equiv \sqrt{-1}). \quad (1)$$

Последовательность значений функции $u(x_j)$ в дискретных точках $x_j = jh$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, расположенных на расстоянии h друг от друга, удобно считать функцией $u(j)$ индекса j. Представляя в (1) левый интеграл в виде бесконечной суммы интегралов по последовательным интервалам протяженностью $2F = 1/h$, находим

$$u(x_j) \equiv u(j) = \int_0^{2F} \bar{u}_p(f)\, e^{i2\pi jf/(2F)}\, df \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \quad (2)$$

$$\bar{u}_p(f) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{u}(f + 2Fk), \quad F = 1/(2h), \quad (3)$$

где F — частота Найквиста, $\bar{u}_p(f)$ — периодическая функция с периодом $2F = 1/h$, полученная в результате наложения гармоник $\bar{u}(f + 2Fk)$ с $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Как видно из (2), функция $\bar{u}_p(f)$ имеет коэффициенты Фурье $u(j)/(2F)$ и, следовательно, определяется рядом Фурье:

$$\bar{u}_p(f) = \frac{1}{2F} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(j)\, e^{-i2\pi jf/(2F)}. \quad (4)$$

На частотах $f_n = 2Fn/N$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$

$$\bar{u}_p(f_n) \equiv \bar{u}_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_p(j)\, W_N^{-jn}, \quad W_N \equiv e^{i2\pi/N}; \quad (5)$$

$$u_p(j) \equiv u_p(x_j) \equiv l \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(j + Nm) \quad (j, n = 0, 1, \ldots, N-1), \quad (6)$$

где W_N — корень степени N из -1, $u_p(x_j)$ — периодическая функция с периодом $l = Nh = N/(2F)$, полученная суммированием значений $u(j)$ в узлах $j + Nm$ при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Формула (5) описывает конечный анализ Фурье функции $u_p(j)$. Используя соотношения ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} W_N^{-nj} W_N^{mj} = \begin{cases} N, & n = m \pmod N \\ 0, & n \neq m \pmod N \end{cases}, \tag{7}$$

находим для конечного синтеза Фурье:

$$u_p(j) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{u}_p(n) W_N^{jn} \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{8}$$

т. е. (5) и (8) — пара взаимно обратных КПФ [7]:

$$u_p(j) = l \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(j + Nm) \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{u}(n + Nk) = \bar{u}_p(n), \tag{9}$$

соответствующая паре (1) интегральных преобразований. (В целях симметрии в формулах анализа (5) и синтеза (8) иногда используется одинаковый множитель $N^{-1/2}$.)

Предположим, что функция $u(x)$ обладает ограниченным спектром, т. е. спектр функции $u(x)$ содержит лишь частоты, не превышающие частоты F. Как известно, функция $u(x)$, имеющая ограниченный спектр, полностью определяется своими значениями в дискретных точках, расположенных на расстоянии $h = 1/(2F)$ друг от друга:

$$u(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(j)\, s(x - x_j), \quad s(x) \equiv \frac{\sin(\pi x/h)}{(\pi x/h)}, \tag{10}$$

$$x_j = jh.$$

Формула (10) составляет содержание теоремы Котельникова [15] и представляет собой интерполяционную формулу, которая дает точные значения $u(x)$ для всех $-\infty < x < \infty$. Заметим, что $u(x)$ представляется суперпозицией функций $s(x - x_j)$ (10), которые получаются смещением по x на интервал (шаг) отсчета h. При этом каждая из функций в точке отсчета $x_j = jh$ равна 1, а во всех остальных точках $j'h$, $j' \neq j$ она равна 0.

Предположим далее, что функция $u(x)$, кроме того, периодическая с периодом $l = Nh$, т. е. на одном периоде укладывается ровно N интервалов отсчета h. Благодаря свойству периодичности, значения $u(x)$ при x, расположенных вне интервала $0 \leqslant x < l$, всегда можно преобразовать к этому интервалу. Для этого достаточно в формулах определять j по модулю N, т. е. если $j < 0$ $(j \geqslant N)$, увеличивать (уменьшать) значение j на N. Представляя j в (10) в виде

$$j = j' + Nk \quad (j' = 0, 1, \ldots, N-1; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и учитывая, что $u(j) = u(j')$, находим:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} u(j)\, s(x - x_j - kNh). \tag{11}$$

Таким образом, для представления периодической функции $u(x)$ с ограниченным спектром в виде точной интерполяционной формулы достаточно иметь $N = 2Fl$ ее значений (отсчетов), взятых с интервалом $h = l/N$, где F — верхняя частота спектра функции $u(x)$, l — ее период.

Разложим комплексную периодическую функцию $u(x)$ с ограниченным спектром в ряд Фурье:

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{u}(n)\, e^{i2\pi nx/l}; \tag{12}$$

$$\bar{u}(n) = \frac{1}{l}\int_0^l u(x) e^{-i2\pi nx/l} \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1). \tag{13}$$

Подстановка (11) в формулу (13) для коэффициентов Фурье $\bar{u}(n)$ дает:

$$\bar{u}(n) = \frac{1}{l}\sum_{j=0}^{N-1} u(j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^l s(x - x_j - kNh)\, e^{-i2\pi nx/l}\, dx. \tag{14}$$

Вводя новую переменную интегрирования

$$x' = x - kNh = x - kl \tag{15}$$

и преобразуя в (14) внутреннюю сумму, получаем:

$$\bar{u}(n) = \frac{1}{l}\sum_{j=0}^{N-1} u(j) \int_{-\infty}^{\infty} s(x - x_j) \exp\left(-i\,\frac{2\pi nx}{l}\right) dx. \tag{16}$$

Учитывая, что $h/l = 1/N$, а

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x - x_j)\, e^{-i2\pi nx/l}\, dx = h\, W_N^{-nj},$$

находим из (16) формулу конечного анализа Фурье:

$$\bar{u}(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u(j)\; W_N^{-nj}, \tag{17}$$

а затем, используя соотношения ортогональности (7), формулу конечного синтеза Фурье:

$$u(j) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{u}(n) W_N^{nj}, \tag{18}$$

образующие пару взаимно обратных преобразований:

$$u(j) \longleftrightarrow \bar{u}(n). \tag{19}$$

Поскольку формула (17) получена из формулы (13), то, следовательно, КПФ (17), которое вычисляется по N равноотстоящим значениям функции $u(x)$, дает точные значения первых N коэффициентов Фурье $\bar{u}(n)$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$. Наоборот, если известно, что отличны от 0 не более N первых гармоник с комплексными амплитудами $\bar{u}(n)$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$, то формула (12) дает точные значения $u(x)$ при любых x. Подставляя (15) в (12), находим, что на периоде $(0 \leqslant x \leqslant l)$ функция

$$u(x)=\sum_{n=0}^{N-1}\bar{u}(n)\,e^{i2\pi nx/l},\tag{20}$$

где $\bar{u}(n)$ определяется интегральной формулой (13) или тождественной ей конечной суммой (17). Таким образом, периодическая функция $u(x)$ с ограниченным спектром вполне определяется своими $N=2Fl$ первыми коэффициентами Фурье.

Рассмотрим теперь периодическую функцию $u(x)$ с неограниченным спектром. Преобразование Фурье для такой функции описывается формулами (12) и (13). Выберем на периоде $[0,\ l]$ функции N равноотстоящих узлов $x_j=jh$, $h=l/N$ $(j=0,1,\dots,N-1)$ и вычислим коэффициенты $\tilde{u}(n)$ с помощью конечной системы:

$$\tilde{u}(n)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}u(j)\,e^{-i2\pi jn/N}\qquad(n=0,\ 1,\ \dots,\ N-1),\tag{21}$$

где $u(j)$—по-прежнему дается формулой (12) при $x=x_j=jh$. Меняя в (12) индекс суммирования n на n', подставляя затем (12) в (21) и учитывая свойство ортогональности (7), находим, что каждый из вычисляемых таким образом коэффициентов $\tilde{u}(n)$ $(n=0,1,\dots,N-1)$ представляет собой сумму амплитуд гармоник

$$\tilde{u}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{u}(n+mN)\tag{22}$$

с номерами $n+mN$ $(m=0,\pm1,\pm2,\dots)$, т. е. имеет место аналогичное (3) свойство наложения частот [7, 76]. Вследствие этого по N отсчетам $u(j)$ дискретизованной функции $u(x)$ с неограниченным спектром коэффициенты Фурье не могут быть определены раздельно. Коэффициент Фурье $\tilde{u}(n)$ на частоте

$$f_n=2Fn/N\quad(F=0{,}5N/l)\tag{23}$$

будет состоять из вкладов коэффициентов Фурье $\bar{u}(n)$ на частотах

$$f_{n+mN}=f_n+2Fm\quad(m=0,\ \pm\ 1,\ \pm\ 2,\ \dots).\tag{24}$$

Для периодической функции с ограниченным спектром по теореме Котельникова можно выбрать N так, что $\bar{u}(n+mN)=0$ для всех $m\neq0$; при этом $\tilde{u}(n)=\bar{u}(n)$ и наложения частот нет.

Несмотря на наложение частот коэффициенты $\tilde{u}(n)$ (см. (21)) позволяют точно восстановить исходную функцию в узлах:

$$u(j)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{u}(n)\,e^{i2\pi jn/N}.\tag{25}$$

Соотношение (25) легко получить, умножая (21) на $\exp(i2\pi j'n/N)$ и суммируя затем по n с учетом свойства ортогональности (7). Следовательно, интерполяционная кривая

$$u(x)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{u}(n)\,e^{i2\pi nx/N}\tag{26}$$

с коэффициентами $\tilde{u}(n)$ проходит через узлы $x_j=jh=jl/N$, $u(jh)=u(j)$. Но в отличие от формулы (20), дающей точные значения $u(x)$ для любых x; формула (26) вне узлов интерполяции дает значения, вообще говоря, отличные [13] от значений исходной функции (12). Отсюда, в частности, следует, что производные функции (26) отличны от значений производных функции (12), в том числе и в узлах интерполирования. Поскольку погрешность производной n-й гармоники $u(x)$ (26) пропорциональна n, для уменьшения погрешности производной иногда рекомендуется [13] в формулах (21)—(26) выбирать интервал изменения $-N/2 \leqslant n < (N/2)-1$.

Аналогичные результаты могут быть получены для вещественной функции $u(x)$ с ограниченным или неограниченным спектром. КПФ вещественной функции определяется формулами [16]:

$$u(j)=\frac{1}{2}\left[\overline{u}^{(c)}(0)+(-1)^{j}\,\overline{u}^{(c)}(N/2)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{N/2-1}\left[\overline{u}^{(c)}(n)\cos\frac{2\pi jn}{N}+\overline{u}^{(s)}(n)\sin\frac{2\pi jn}{N}\right] \tag{27}$$

$$(j=0,\,1,\,\ldots,\,N-1);$$

$$\overline{u}^{(c)}_{(n)}=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}u(j)\cos\frac{2\pi jn}{N}\qquad (n=0,\,1,\,\ldots,\,N/2),$$

$$\overline{u}^{(s)}_{(n)}=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1}u(j)\sin\frac{2\pi jn}{N}\qquad \left(n=1,\,2,\ldots\,.\,\frac{N}{2}-1\right). \tag{28}$$

Иногда из соображений нечетности (четности) возможно разложение функции $u(x)$ только по синусам (косинусам). Формулы КПФ для этих случаев имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned} u(j)&=\sum_{n=1}^{N-1}\overline{u}(n)\sin\frac{\pi nj}{N},\\ \overline{u}(n)&=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}u(j)\sin\frac{\pi nj}{N}; \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} u(j)&=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_n\overline{u}(n)\cos\frac{\pi nj}{N},\\ \overline{u}(n)&=\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon_j u(j)\cos\frac{\pi nj}{N}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\varepsilon_k=\begin{cases}1/2, & k=0\quad \text{или}\quad k=N\\ 1, & k\neq 0,\quad k\neq N\end{cases}.$$

Во всех случаях, если количество отличных от нуля гармоник ограничено, КПФ дает точные значения всех коэффициентов, а следовательно, и самой периодической функции во всех точках при правильном выборе шага дискретизации. Для функций с неограниченным спектром шаг h (или число значений N) следует выбирать таким образом, чтобы возникающая вследствие наложения частот погрешность коэффициентов имела приемлемую величину [7].

Теоретической основой КПФ является общая теория конечных абелевых групп [8, 18, 20]. Отметим важнейшие свойства КПФ, используемые в дальнейшем. Благодаря периодичности функции W_N^{nj} с периодом N как по n, так и по j функции $u(j)$ и $\overline{u}(n)$ также являются периодическими с периодом N:

$$\begin{gathered} u(j) = u(j+kN), \\ \overline{u}(n) = \overline{u}(n+kN) \quad (j, n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{gathered} \tag{31}$$

КПФ является линейным, т. е. для любых комплексных постоянных a и b

$$a u_1(j) + b u_2(j) \longleftrightarrow a\overline{u}_1(n) + b\overline{u}_2(n). \tag{32}$$

Используя (17)—(19), нетрудно также установить, что имеют место пары преобразований:

$$\begin{gathered} u(-j) \longleftrightarrow \overline{u}(-n), \quad u^*(j) \longleftrightarrow \overline{u}^*(-n), \\ u^*(-j) \longleftrightarrow \overline{u}^*(n); \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} u(j-k) \longleftrightarrow W_N^{-nk}\,\overline{u}(n), \\ W_N^{mj}\,u(j) \longleftrightarrow \overline{u}(n-m), \end{gathered} \tag{34}$$

где звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина. Заметим, что сдвиг последовательности $u(j)$ изменяет лишь фазы, но не амплитуды ее гармоник Фурье.

Предположим, что имеются вещественные преобразования:

$$u_1(j) \longleftrightarrow \overline{u}_1(n), \quad u_2(j) \longleftrightarrow \overline{u}_2(n) \tag{35}$$

(u_1, $\overline{u}_1$, u_2, $\overline{u}_2$ — вещественные функции). Образуя комплексную функцию $u(j) = u_1(j) + iu_2(j)$, находим из условия линейности (32), что

$$u_1(j) + iu_2(j) = u(j) \longleftrightarrow \overline{u}(n) = \overline{u}_1(n) + i\,\overline{u}_2(n), \tag{36}$$

а используя (31) и (33), получаем соотношения

$$\begin{gathered} \overline{u}_1(n) = 0{,}5\,[\overline{u}(n) + \overline{u}^*(N-n)], \\ \overline{u}_2(n) = 0{,}5\,i\,[\overline{u}^*(N-n) - \overline{u}(n)], \end{gathered} \tag{37}$$

указывающие способ одновременного выполнения КПФ двух вещественных функций с помощью алгоритмов КПФ комплексных функций. Для дискретной δ-функции, определяемой

$$\delta(j) = \begin{cases} 1, & j = 0 \pmod N \\ 0, & j \neq 0 \pmod N \end{cases}, \tag{38}$$

пары преобразований Фурье имеют вид

$$\delta(j) \longleftrightarrow 1/N, \quad 1 \longleftrightarrow \delta(n). \tag{39}$$

Соотношения (39) могут использоваться, например, при КПФ суммы $u(j) + a$, где a — некоторая константа.

Как и для интегрального преобразования Фурье, для КПФ двух функций

$$u_1(j) \longleftrightarrow \overline{u}_1(n), \quad u_2(j) \longleftrightarrow \overline{u}_2(n) \tag{40}$$

имеют место формулы свертки:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_1(k)\,u_2(j-k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_1(j-k)\,u_2(k) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \bar{u}_1(n)\,\bar{u}_2(n); \tag{41}$$

$$u_1(j)\,u_2(j) \longleftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1}\bar{u}_1(m)\,\bar{u}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1}\bar{u}_1(n-m)\,\bar{u}_2(m), \tag{42}$$

или

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_1(k+j)\,u_2(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_1(k)\,u_2(k-j) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \bar{u}_1(n)\,\bar{u}_2(-n) = \bar{u}_1(n)\,\bar{u}_2^*(n); \tag{43}$$

$$u_1(j)\,u_2(-j) \longleftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1}\bar{u}_1(m+n)\,\bar{u}_2(m) = \sum_{m=0}^{N-1}\bar{u}_1(m)\,\bar{u}_2(m-n), \tag{44}$$

используемые при вычислении дискретных корреляционных функций с помощью БПФ. В силу периодичности (31) функций u_1, $\bar{u}_1$, u_2 и $\bar{u}_2$ индексы в (41)—(44) следует определять по модулю N. Справедливо также соотношение Парсеваля

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}|u(j)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}|\bar{u}(n)|^2 \tag{45а}$$

для комплексных функций и аналогичное соотношение

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}u^2(j) = \frac{[\bar{u}^{(c)}(0)]^2+[\bar{u}^{(c)}(N/2)]^2}{2} +$$
$$+\sum_{n=1}^{N/2-1}\left\{[\bar{u}^{(c)}(n)]^2+[\bar{u}^{(s)}(n)]^2\right\} \tag{45б}$$

— для вещественных. Более детально свойства КПФ изложены в работах [2, 7–9].

Для функций двух (трех) переменных могут быть построены двойные (тройные) дискретные (конечные) ряды Фурье, которые можно рассматривать как результат последовательного применения рассмотренного выше однократного КПФ по каждой переменной. При этом имеют место аналогичные соотношения между интегральным и конечным ПФ, свойство наложения частот и т. п.

3. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

История БПФ восходит к 1942 г., когда идеи этого метода были предложены в прикладной работе Даниельсона и Ланцоша [6, 104]. Однако известность метод приобрел лишь через 23 года после его повторного открытия Кули и Тьюки [43].

Принцип БПФ поясним на примере быстрого анализа Фурье (БАФ). Представим в формуле анализа (17) N, j, n в виде

$$N = N_1 N_2,\quad j = j_1 + j_2 N_1,\quad n = n_1 N_2 + n_2,$$
$$j_1, n_1 = 0, 1, \ldots, N_1-1;\quad j_2, n_2 = 0, 1, \ldots, N_2-1, \tag{46}$$

где N_1, N_2 — множители N. После этого (17) преобразуется к виду

$$N\bar{u}(n) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} W_N^{-nj_1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} u(j_1 + j_2 N_1)\, W_{N_2}^{-n_2 j_2}. \qquad (47)$$

В (47) внутренняя сумма при фиксированном $j_1 = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$ описывает независимые разложения Фурье для N_1 различных функций, каждая из которых составлена из значений $u(j_1 + j_2 N_1)$ исходной функции в N_2 узлах: j_1, $j_1 + N_1, \ldots, j_1 + N - N_1$, выбранных с шагом N_1, начиная с узла j_1. Для вычисления каждой внутренней суммы требуется N_2^2 операций, а для всех N_1 внутренних сумм — $N_1 N_2^2$ операций (операцией по-прежнему считается комплексное умножение в совокупности с комплексным сложением). Для вычисления внешней суммы требуется N_1 операций, а для всех N внешних сумм — $NN_1 = N_1^2 N_2$ операций. Общее количество операций по формуле (47) составляет $N(N_1 + N_2)$ операций (здесь, как и раньше, не учитываются операции, расходуемые на вычисление тригонометрических функций).

Далее редукцию типа (47) можно применить к вычислению каждой из N_1 независимых внутренних сумм, т. е. КПФ функций, имеющих $N_2 = N/N_1$ значений и т. д. Разлагая таким образом N на простые множители,

$$N = N_1 N_2 \ldots N_s \ldots N_m, \qquad (48)$$

получим, что общее число арифметических операций составляет

$$N(N_1 + N_2 + \ldots + N_s + \ldots + N_m) \ll N^2,$$

где N^2 — число операций, необходимое для КПФ непосредственно по формуле (17). В частном случае, когда

$$N = q^m, \qquad (49)$$

где m — целое число, количество операций

$$N(N_1 + N_2 + \ldots + N_m) = mqN = qN \log_q N. \qquad (50)$$

При этом выигрыш в числе операций благодаря БПФ равен

$$N^2/(qN \log_q N) = N/(q \log_q N). \qquad (51)$$

Для заданной длины реализации N выигрыш (51) максимален при $q = e$; ближайшие к e целые значения q — 2 и 3. Так, при $N = 1024 = 2^{10}$ число арифметических операций согласно (51) сокращается в 50 раз. Более тщательный анализ [4] алгоритма (47) показывает, что выигрыш в количестве арифметических операций получается еще бо́льшим, так как многие множители вида W_N^{-nj} имеют в (47) значения ± 1, $\pm i$, благодаря чему исключаются соответствующие умножения. В [51] доказано, что при $q = 2$ в любом алгоритме БПФ количество сложений должно превышать $0{,}5\, N \log_2 N$.

С другой стороны, в данных выше оценках не учитываются операции вычисления тригонометрических функций. Поэтому они дают лишь правильный порядок числа операций, и более точные оценки следует производить для каждого конкретного алгоритма в отдельности, как сделано, например, в работах [28, 29, 87, 114]. Благодаря меньшему числу операций при использовании БПФ также резко уменьшается эффект накопления погрешностей округления («вычислительных шумов»), обусловленных конечным числом разрядов ЭВМ [48, 49, 53, 67, 70].

Аналогичным образом может выполняться быстрый синтез Фурье (БСФ). Действительно, заменяя в формуле синтеза (18) индекс суммирования n на $N-n$ и учитывая, что $\bar{u}(0)=\bar{u}(N)$, находим

$$u(j)=\sum_{n=1}^{N}\bar{u}(N-n)\,W_N^{(N-n)j}=\sum_{n=0}^{N-1}\bar{u}(N-n)\,W_N^{-nj},$$

т. е. синтез сводится к анализу последовательности коэффициентов $\bar{u}(n)$, взятой в обратном порядке, с последующим умножением на N.

В зарубежной литературе метод БПФ, основанный на циклическом использовании редукции (47), часто называют децимацией (прореживанием) по времени (учитывая, что аргумент j функции u обычно представляет собой номер временного шага).

Альтернативой этого метода является так называемая децимация (прореживание) по частоте, которую также поясним на примере анализа (17). Представляя N, j, n в виде

$$\begin{gathered}N=N_1N_2,\quad j=j_1N_2+j_2,\quad n=n_1+n_2N_1,\\ j_1,n_1=0,1,\dots,N_1-1;\quad j_2,n_2=0,1,\dots,N_2-1,\end{gathered}\tag{52}$$

преобразуем (17) к виду

$$N\bar{u}(n)=\sum_{j_2=0}^{N_2-1}W_{N_2}^{-n_2j_2}\sum_{j_1=0}^{N_1-1}u(j_1N_2+j_2)\,W_N^{-n_1j}.\tag{53}$$

В (53) внешняя сумма при фиксированном $n_1=0,1,\dots,N_1-1$ описывает независимые разложения Фурье для N_1 различных функций, N_2 значений каждой из которых (внутренние суммы) являются линейными комбинациями значений $u(j_1N_2+j_2)$ исходной функции в N_1 узлах $j_2, j_2+N_2,\dots,j_2+N-N_2$ $(j_2=0,1,\dots,N_2-1)$, выбранных с шагом N_2, начиная с узла j_2. Для вычислений по формуле (53) требуется столько же операций, сколько для вычислений по формуле (47). Далее редукция типа (53) применяется к вычислению каждой из N_1 независимых внешних сумм и т. д. В итоге количество арифметических операций оказывается таким же, как при децимации по времени.

Формула КПФ (17) представляет собой произведение матрицы W размерности $N\times N$ с элементами W_N^{-nj} $(n, j=0,1,\dots,N-1)$ на вектор $u(j)$. В таком матричном представлении методика БПФ сводится [22, 25, 27] к разложению матрицы W в произведение

$$W=W^{(1)}W^{(2)}\dots W^{(s)}\dots W^{(m)}\tag{54}$$

матриц $W^{(s)}$ $(s=1,2,\dots,m)$ той же размерности $N\times N$, причем матрица $W^{(s)}$ имеет в каждой строке лишь $N_s\ll N$ отличных от нуля элементов, где N_s — множители N, определяемые из (48). Благодаря преобладанию нулевых элементов в матрицах разложения достигается большая экономия арифметических операций.

Хотя принцип БПФ, как видно, достаточно простой, разработанные алгоритмы разнообразны и иногда являются довольно сложными. Разнообразие алгоритмов объясняется тем, что при их составлении учитываются многие обстоятельства, а именно: 1) количество и величина различных множителей, на которые разлагается N, 2) комплексность или вещественность преобразуемой функции (реализации), 3) экономия ресурсов ЭВМ (времени счета и памяти), 4) возможности размещения всей реализации и рабочих ячеек в оперативной памяти ЭВМ, 5) особенности ЭВМ, 6) особенности преобразуемой функции (например, наличие большого количества нулевых исходных значений), 7) возможности уменьшения ошибок округления. Возможности учета указанных обстоятельств обсуждаются ниже.

Преобладающее количество алгоритмов БПФ составлено для случая, когда N является целой степенью 2, поскольку при этом алгоритмы оказываются наиболее простыми и достаточно быстрыми. Несколько сложнее алгоритмы для

$$N = q \cdot 2^R, \tag{55}$$

где q — простое число, R — целое число [28, 29]. Наиболее сложными являются, естественно, алгоритмы [64, 66] для общего случая, когда N_s в разложении N (см. (48)) — произвольные простые числа. Разработан также эффективный алгоритм для $N = 2^{3R} = 8^R$ [37], поскольку согласно сделанным оценкам при этом число арифметических операций минимально.

БПФ вещественных функций можно выполнять с помощью алгоритмов для комплексных функций, используя, по меньшей мере, три способа [97]. Первый заключается в пополнении вещественных значений функции нулевыми мнимыми частями и приводит к излишним затратам машинного времени и памяти. Второй способ — одновременное ПФ двух вещественных функций с использованием формул (37). Третий способ основан на преобразовании формулы КПФ (17) к виду

$$2\bar{u}(n) = \left[\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N/2-1} u(2j)\, W_{N/2}^{-nj}\right] + W_N^{-n}\left[\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N/2-1} u(2j+1)\, W_{N/2}^{-nj}\right]. \tag{56}$$

Здесь первая и вторая суммы представляют собой, соответственно, КПФ четных и нечетных значений исходной функции, имеют период $N/2$ и могут быть вычислены одновременно с помощью формул (37), как во втором способе. После этого вещественные и мнимые части (56) при $n = 0, 1, \ldots, N/2$ дают, соответственно, косинусные и синусные коэффициенты искомого ПФ. Помимо этого разработаны различные алгоритмы БПФ специально для вещественных функций, обычно в этих алгоритмах предусматриваются также возможности разложения только по косинусам или только по синусам [28, 29, 36, 37, 40, 42, 63, 72].

Для сокращения затрат памяти ЭВМ желательно промежуточные и окончательные результаты БПФ хранить в ячейках, первоначально занятых исходными данными. При этом, если исходные данные располагаются в естественном порядке, т. е. в порядке возрастания j (или n), то результаты получаются в специальном порядке, переставленными. Так, в случае $N = 2^R$ коэффициент $\bar{u}(n)$ оказывается в ячейке памяти, адрес которой находится с помощью поразрядного логического отрицания (инверсии) номера n, записанного в двоичном виде — так называемый двоично-обратный порядок. Для быстрого вычисления двоично-обратных адресов созданы специальные алгоритмы [55]. Наоборот, если исходные данные предварительно расположить в специальном порядке (при $N = 2^R$ — в двоично-обратном), результаты будут расположены в естественном порядке. Если требуется как исходные данные, так и результаты иметь в естественном порядке, для хранения промежуточных результатов следует выделить по крайней мере еще одну дополнительную область памяти объемом N ячеек. В расчетах используются все указанные варианты, соответственно имеются три разновидности алгоритмов БПФ. При этом две первые разновидности обычно являются более быстрыми, так как на преобразование к естественному порядку расходуется машинное время [57, 68]; их удобно, в частности, использовать в специализированных вычислительных устройствах, где преобразование порядка легко выполняется схемным путем.

Для очень длинных реализаций предложены алгоритмы [30, 39, 61] БПФ, которые предусматривают расположение части данных во внешних запоминающих устройствах и уменьшают потери времени, вызванные обменом с этими устройствами. Имеются также специальные алгоритмы БПФ для малых ЭВМ [46]. Как известно, в ЭВМ с фиксированной запятой арифметические операции выполняются быстрее, чем в ЭВМ с плавающей запятой, благодаря отсутствию выравнивания порядков, однако возникает проблема масштабирования данных. Для БПФ эту проблему удается просто решить, и на ЭВМ с фиксированной запятой БПФ может выполняться примерно в 10 раз быстрее, чем на сопоставимых ЭВМ с плавающей запятой [62, 71], однако погрешности округления могут оказаться несколько бо́льшими [53].

Для функций, большинство элементов которых — нулевые, можно ускорить БПФ с помощью специальных алгоритмов, исключающих лишние операции [50]. Большое внимание в алгоритмах БПФ уделяется приемам, уменьшающим ошибки округления, особенно при вычислении тригонометрических функций вида W_N^{nj} [62, 63]. Погрешности округления устраняются при выполнении быстрого преобразования в конечных полях [44, 56, 174]. При выполнении двойного (тройного) КПФ для функций двух (трех) переменных наиболее просто применять имеющиеся алгоритмы одномерного БПФ последовательно по каждой переменной. Представляет интерес указанная в [31] возможность многомерного БПФ функций, заданных не в прямоугольной, а в более сложной (например в двумерной шестиугольной) области.

Рассмотренные выше методы БПФ применимы к последовательностям, выбранным с постоянным шагом, причем частоты преобразования также оказываются равноотстоящими. Это является недостатком в тех случаях, когда желательно рассчитать большее количество гармоник в некотором участке спектра (сгущение частот спектра). В [83] указаны возможности преодоления указанного недостатка путем сочетания БПФ с z-преобразованием (разд. 7). С помощью предварительного преобразования типа свертки удается также применять методы БПФ в случаях, когда число значений последовательности N произвольное [95] и не является произведением многих сомножителей, например, представляет собой простое число [58]. Погрешность КПФ функции $u(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, у которой $u(0) \neq u(l)$, можно снизить на 1—2 порядка с помощью преобразования

$$v(x) = u(x) - [u(0) + (u(l) - u(0))(x/l)],$$

т. е. вычитанием линейного тренда [33].

4. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ЧИСЛЕННОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

При исследовании физических процессов методом численного эксперимента на ЭВМ значительное время часто занимает решение уравнений в частных производных, описывающих процессы. Во многих практически важных случаях для решения уравнений может эффективно использоваться БПФ. Принцип применения БПФ удобно рассмотреть на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x, y), \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad u|_\Gamma = \varphi, \tag{57}$$

где u, f — вещественные функции в прямоугольнике

$$D = \{0 \leqslant x \leqslant l_x, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_y\} \tag{58}$$

с границей Г. Неоднородные краевые условия в (57) можно преобразовать к однородным, полагая $u = u^0 + v$, $f^0 = f + \Delta v$, где функция v принимает на границе Г значение φ. Тогда (57) сводится к задаче

$$\Delta u^0 = -f^0, \quad u^0|_\Gamma = 0. \tag{59}$$

Функцию v можно выбрать различным образом, например, в виде

$$\begin{aligned} v = {} & \varphi(x, 0) + \varphi(0, y) - \varphi(0, 0) + \\ & + [\varphi(l_x, y) - \varphi(0, y) - \varphi(l_x, 0) + \varphi(0, 0)] \frac{x}{l_x} + \\ & + [\varphi(x, l_y) - \varphi(x, 0) - \varphi(0, l_y) + \varphi(0, 0)] \frac{y}{l_y} - \\ & - [\varphi(l_x, l_y) - \varphi(0, l_y) + \varphi(0, 0) - \varphi(l_x, 0)] \frac{xy}{l_x l_y}. \end{aligned} \tag{60}$$

Таким образом, без ограничения общности можно полагать $\varphi \equiv 0$.

Решение (59) можно представить в виде двойного ряда Фурье (значок «0» опущен):

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}(n, m) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}; \tag{61}$$

$$\bar{u}(n, m) = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} u(x, y) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \, dx \, dy, \tag{62}$$

аналогичные выражения записываются для $f(x, y)$. Благодаря ортогональности тригонометрических функций из (59) следует, что коэффициенты Фурье $\bar{u}(n, m)$ и $\bar{f}(n, m)$ связаны соотношением

$$\bar{u}(n, m) = \bar{f}(n, m) \left[\left(\frac{\pi n}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_y} \right)^2 \right]^{-1}. \tag{63}$$

Переходя от бесконечных рядов (61) к конечным

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{u}(n, m) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} \tag{64}$$

(аналогично для f), получаем приближенное решение краевой задачи. Коэффициенты $\bar{f}(n, m)$ определим так, чтобы конечный ряд Фурье совпадал с функцией $f(x, y)$ в $(M-1)(N-1)$ точках. Точки выберем таким образом, чтобы воспользоваться БПФ, а именно: определим $\bar{f}(n, m)$ из системы уравнений

$$f(j, i) \equiv f(x_j, y_i) = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{f}(n, m) \sin \frac{\pi n x_j}{l_x} \sin \frac{\pi m y_i}{l_y} \tag{65}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N-1; \quad i = 1, 2, \ldots, M-1),$$

где x_j, y_i — узлы сетки:

$$\begin{aligned} x_j &= j h_x, \quad h_x = l_x/N \quad (j = 0, 1, \ldots, N), \\ y_i &= i h_y, \quad h_y = l_y/M \quad (i = 0, 1, \ldots, M). \end{aligned} \tag{66}$$

Используя ортогональность тригонометрических функций, из формулы конечного синтеза Фурье (65) получаем формулу конечного анализа Фурье:

$$\bar{f}(n, m) = \frac{4}{MN} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} f(j, i) \sin \frac{\pi n j}{N} \sin \frac{\pi m i}{M}. \qquad (67)$$

Таким образом, алгоритм решения следующий. Вначале выполняется БАФ (67) правой части уравнения $f(x, y)$ по обеим переменным, затем вычисляются коэффициенты Фурье (63), после чего с помощью БСФ по обеим переменным находятся значения функции

$$u(j, i) \equiv u(x_j, y_i) = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{u}(n, m) \sin \frac{\pi n j}{N} \sin \frac{\pi m i}{M}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, N-1; \quad i = 1, 2, \ldots, M-1) \qquad (68)$$

во всех узлах. Значения $u(j, i)$ получаются в ячейках, прежде занятых правой частью $f(j, i)$, так что достоинством алгоритма является экономное использование памяти ЭВМ. При сравнительном определении числа операций здесь и в дальнейшем будем использовать оценки, данные в [90] для случая, когда БПФ выполняется только по синусам, $h_x = h_y$, N и M—целые степени числа 2 (эти оценки являются несколько заниженными). Количество арифметических операций в описанном алгоритме согласно [90] составляет в этом случае

$$5MN\,(2 \log_2 MN + 0{,}8). \qquad (69)$$

В промежуточных точках можно находить $u(x, y)$ по формуле (64), однако это требует значительного времени, и практически используется интерполирование сеточной функции $u(j, i)$. Если нужно найти производную функции $u(x, y)$ или интеграл от нее, то эти действия можно выполнить над рядом (64), а затем с помощью БСФ найти соответствующую сеточную функцию. Например,

$$u_x(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{u}_x(n, m) \cos \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y}; \qquad (70)$$

$$u_x(j, i) = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \bar{u}_x(n, m) \cos \frac{\pi n j}{N} \sin \frac{\pi m i}{M}, \qquad (71)$$

где коэффициенты Фурье производной —

$$\bar{u}_x(n, m) = \pi n \bar{u}(n, m)/l_x, \qquad (72)$$

а вычисления по формуле (71) выполнимы с помощью БСФ. При большом количестве узлов сетки трудно одновременно хранить в памяти ЭВМ u, u_x и u_y, поэтому обычно приходится численно дифференцировать сеточную функцию $u(j, i)$.

Если все гармоники Фурье $\bar{f}(n, m)$ функции $f(x, y)$ с номерами $n > N$ и $m > M$ равны 0 (функция с ограниченным спектром), то полученная таким образом функция $u(x, y)$ (64) является по теореме Котельникова точным решением краевой задачи. Если же функция $f(x, y)$ имеет гармоники с номерами $n > N$ или $m > M$, то происходит наложение частот, и решение (64) является приближенным.

Заметим, что применение двойного анализа Фурье не к дифференциальному уравнению Пуассона, а к его конечно-разностному аналогу

$$\frac{u(j-1, i) - 2u(j, i) + u(j+1, i)}{h_x^2} + \frac{u(j, i-1) - 2u(j, i) + u(j, i+1)}{h_y^2} =$$

$$= -f, (j, i),$$

$$u(0, i) \equiv u(N, i) \equiv u(j, 0) \equiv u(j, M) = 0 \tag{73}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N-1; \quad i = 1, 2, \ldots, M-1)$$

приводит к соотношению между коэффициентами Фурье:

$$\bar{u}(n, m) = \bar{f}(n, m) \left[\left(\frac{2N}{l_x} \sin \frac{\pi n}{2N} \right)^2 + \left(\frac{2M}{l_y} \sin \frac{\pi m}{2M} \right)^2 \right]^{-1}. \tag{74}$$

Для низших гармоник с номерами $n \ll N$, $m \ll M$ формулы (63) и (74) дают близкие значения коэффициентов Фурье, тогда как для высших гармоник с номерами $n \sim N$, $m \sim M$ формула (74) завышает амплитуды в $\pi^2/4 \approx 2{,}5$ раза по сравнению со значениями (63) вследствие различия в спектрах дифференциального оператора и разностного оператора [85]. В численном эксперименте высшие гармоники зачастую обусловлены не особенностями исследуемой функции, а вычислительными погрешностями — «шумами счета». Таким образом, переход к разностному уравнению (73) и, следовательно, использование соотношений типа (74) приводят к возрастанию вычислительного шума.

Описанный алгоритм является сравнительно медленным, так как в нем используется двойное БПФ. Наименьшее количество арифметических операций достигается при использовании следующего алгоритма [41, 79, 87, 90, 114] решения системы конечно-разностных уравнений (73). Вначале исключаются конечно-разностные уравнения для всех нечетных линий сетки $i = 1, 3, \ldots, M-1$. Далее выполняется БАФ правых частей оставшихся уравнений по j и вычисляются коэффициенты Фурье $\bar{f}(n, i)$ $(i = 2, 4, \ldots, M-2;\ n = 1, 2, \ldots, N-1)$. С помощью так называемой двойной циклической редукции [87, 114] или прогонки [14] находятся коэффициенты Фурье $\bar{u}(n, i)$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ искомой функции, а затем с помощью БСФ и сами значения функции $u(j, i)$ на четных линиях $i = 2, 4, \ldots, M-2$. Наконец, с помощью двойной циклической редукции или прогонки вычисляются значения $u(j, i)$ в узлах нечетных линий $i = 1, 3, \ldots, M-1$. В направлении, по которому ПФ не выполняется, сетка может иметь переменный шаг [88]. Количество узлов, привлекаемых при построении разностной схемы, может быть различным, что позволяет при необходимости использовать схемы повышенной точности.

Для такого алгоритма, сочетающего БПФ с циклической редукцией, требуется около

$$5\,MN(\log_2 N + 0{,}3) \tag{75}$$

арифметических операций. При $N = 32$, $M = 128$ оценка (69) дает $124\,MN$ операций, а оценка (75) — всего $26{,}5\,MN$ операций, т. е. в 4,7 раза меньше. Однако в тех случаях, когда шаг сетки относительно велик (например, в некоторых трехмерных задачах) или решение краевой задачи занимает меньшую часть общего времени счета (как, например, при моделировании плазмы), иногда целесообразнее использовать БПФ для непосредственного решения дифференциального уравнения, с тем, чтобы получить более точные значения функции и (или) ее производных в узлах сетки. Кроме того, в численном эксперименте часто можно по определенным правилам уменьшить (опустить) амплитуды гармоник Фурье, имеющие относительно большую дисперсию по сравнению с их среднеквадратичным значением, полагая, что эти гармоники обусловлены погрешностями счета. Если количество таких гармоник окажется велико, можно сократить время БСФ искомой функции, используя алгоритм [50]. Тем самым проигрыш во времени из-за двойного БПФ будет снижен.

В [79, 87, 88] приводятся алгоритмы решения методом БПФ конечно-разностного аналога более общего уравнения

$$Lu = -f, \quad L = a(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c(y)\frac{\partial}{\partial y} + d(y) \tag{76}$$

в области (58). Оператором L может быть, например, оператор Лапласа в цилиндрической системе координат z, r [47] или φ, r. Здесь также можно отыскивать решение непосредственно дифференциального уравнения (76) в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N-1} \bar{u}(n, y) \sin\frac{\pi n x}{l_x}, \qquad \bar{u}(n, y) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1} u(j, y) \sin\frac{\pi n j}{N} \tag{77}$$

$$(n = 1, 2, \ldots, N-1);$$

$$u(j, y) \equiv u(x_j, y), \ x_j = jh_x \ (j = 0, 1, \ldots, N), \ h_x = l_x/N. \tag{78}$$

Благодаря ортогональности тригонометрических функций уравнение (76) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{b(y)\frac{d^2}{dy^2} + c(y)\frac{d}{dy} + \left[d(y) - a(y)\left(\frac{\pi n}{l_x}\right)^2\right]\right\}\bar{u}(n, y) = -\bar{f}(n, y) \tag{79}$$

для коэффициентов Фурье $\bar{u}(n, y)$, каждое из которых решается независимо от остальных, например методом прогонки; шаг по y может быть переменным.

Таким образом, алгоритм решения складывается из БАФ правой части $f(x, y)$ по x, прогонки по y и БСФ функции $u(x, y)$ по x. Для реализации алгоритма требуется около

$$5\,MN\,(2\log_2 N + 1{,}6) \tag{80}$$

арифметических операций. Этот метод представляет собой сочетание метода Фурье с методом прямых.

Для уравнения (76) на границах $y = 0$, $y = l_y$ допускаются краевые условия общего вида (3-я краевая задача), а на границах $x=0$, $x=l_x$ — условия симметрии $u_x = 0$, условия периодичности $u(0, y) = u(l_x, y)$, условия Дирихле $u(0, y) = u(l_x, y) = 0$, а также сочетание условия Дирихле на одной из этих границ с условием симметрии на другой. (Следует также иметь в виду указанную ранее возможность преобразования неоднородных краевых условий к однородным.) В зависимости от типа краевых условий используются различные алгоритмы БПФ, соответственно меняется и число операций [41, 87, 88, 90, 99, 114].

В [90] показана применимость БПФ в прямых методах решения конечно-разностного уравнения Пуассона в прямоугольной области с внутренними границами (электордами), а также в открытой области. Такие области взаимодействия часто встречаются в электронных и плазменных приборах и устройствах, а также в электрофизических установках.

Рассмотрим решение уравнения (76) в прямоугольнике D (58), который имеет, помимо внешней границы Г, внутреннюю границу (разрез) Γ^l с граничными условиями

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{\Gamma^l} = \varphi. \tag{81}$$

Решение будем отыскивать в виде $u = w + v$, причем

$$Lw = -f, \quad w|_\Gamma = 0 \quad (w = u - v), \tag{82}$$

а для функции v имеем краевую задачу:

$$Lv = 0, \quad v|_\Gamma = 0, \; v|_{\Gamma^l} = \varphi - w|_{\Gamma^l} . \tag{83}$$

Решение (82) находится в прямоугольнике D без учета внутренней границы, как описано выше, а для функции v приближенное решение представляется в виде

$$v \approx \sum_{j'=1}^{J} e_{j'} G^{j'}. \tag{84}$$

Здесь j' — номера совокупности точек, выбранных на границе Γ^l, $e_{j'}$ — неизвестные пока коэффициенты, которые можно трактовать как «заряды», наведенные в этих точках, а $G^{j'}$ — система фундаментальных решений в прямоугольнике D, т. е. сеточные функции Грина первого рода, также получаемые без учета краевого условия на Γ^l. Таким образом, $LG^{j'} = 0$ всюду в D, кроме точки с номером j' на Γ^l, где $LG^{j'} = -1$, причем $G^{j'}|_\Gamma = 0$.

Величины $e_{j'}$ определяются так, чтобы краевое условие (83) выполнялось во всех точках $j = 1, 2, \ldots, J$, выбранных на Γ^l, т. е.

$$v(j) = \delta\varphi(j), \quad \delta\varphi(j) \equiv \varphi(j) - w(j) \quad (j = 1, 2, \ldots, J). \tag{85}$$

Учитывая (84), находим

$$\begin{gathered} Se = \delta\varphi, \quad e = C\delta\varphi, \quad C \equiv S^{-1}, \\ S = (S_{jj'}), \; S_{jj'} = G^{j'}(j), \quad S_{jj'} = S_{j'j}, \quad C_{jj'} = C_{j'j}, \end{gathered} \tag{86}$$

где векторы $e = (e_1, e_2, \ldots, e_J)'$, $\delta\varphi = (\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \ldots, \delta\varphi_J)'$, матрица фундаментальных решений S и обратная ей, так называемая матрица емкости C, имеют размерность, определяемую числом J точек, взятых на границе Γ^l; $G^{j'}(j)$ — значение, которое функция $G^{j'}$ принимает в точке номер j. Симметрия матриц S, C является следствием симметрии сеточных функций Грина:

$$G^{j'}(j) = G^{j}(j').$$

Поскольку в ходе численного эксперимента уравнение (76) решается в каждый момент времени, для сокращения счета матрицу C следует вычислить заранее и сохранить в памяти ЭВМ, выделив для этого $J(J+1)/2$ ячеек. В предположении, что матрица C уже вычислена, с помощью БАФ по x вычисляются коэффициенты Фурье $\overline{f}(n, i)$ на всех горизонтальных линиях сетки. Затем из уравнений вида (79), записанных для коэффициентов Фурье $\overline{w}(n, i)$, с помощью прогонки находятся эти коэффициенты на горизонтальных линиях сетки, пересекающих Γ^l. Выполняя по этим линиям БСФ, находим на них w, значения $w(j)$ на Γ^l (по интерполяционным формулам), а затем «заряды» e_j (86). После этого вычисляется создаваемая «зарядами» e_j плотность «заряда» в узлах сетки, прилегающих к Γ^l, и с помощью БАФ—их гармоники

Фурье, которые следует добавить к уже вычисленным ранее соответствующим гармоникам правой части f. Теперь можно считать границу Γ^l удаленной, и решение завершается как обычно, т. е. из уравнений (79) с помощью прогонки находятся коэффициенты Фурье $\underline{u}(n, i)$ на горизонтальных линиях сетки и, наконец, после БСФ—значения искомой функции u во всех узлах сетки. Количество арифметических операций зависит от числа горизонтальных линий сетки, пересекающих Γ^l, и числа точек J, взятых на Γ^l, и может более чем вдвое превышать количество операций для такой же области без внутренней границы.

В случае протяженных границ Γ^l, когда матрица фундаментальных решений не помещается в памяти ЭВМ, целесообразно сочетать метод БПФ с тем или иным итерационным процессом. При этом матрица C не используется, а «заряды» e_j, наведенные на границе Γ^l, вычисляются по формуле

$$e_j^{(\mu)} = -L^{(h)} u^{(\mu-1)}(j) - f(j),$$

где $L^{(h)}$—аппроксимирующий L конечно-разностный оператор, $\mu = 1, 2, \ldots$— номер итерации. В остальном решение строится, как и раньше. В качестве нулевой итерации $u^{(0)}$ удобно принять решение, полученное на предыдущем шаге численного эксперимента. Поскольку в итерационном процессе вся невязка сосредоточена на границе Γ^l, следует ожидать, что он быстро сходится [90].

Такая методика может, например, использоваться при решении уравнения Пуассона в периодических системах (гребенка, диафрагмированный волновод и др.). Однако в периодических системах возможно использование и прямых методов с предварительным вычислением и сохранением в памяти ЭВМ элементов матрицы емкости C, если учесть свойства симметрии систем, их периодичность и ограниченность радиуса влияния R_ρ единичного заряда при вычислении функций Грина. Если при вычислении системы фундаментальных решений на периоде Λ берется J точек, а радиус $R_\rho = (2—4)\ \Lambda$, то для полного восстановления матрицы C или C^{-1} в памяти ЭВМ достаточно сохранить $(2—4)\ J^2$ ее элементов, что является вполне приемлемой величиной. При вычислении зарядов в каждой из точек $j = 1, 2, \ldots, J$ учитываются лишь заряды в точках j', отстоящих от точки номер j не далее R_ρ.

Для решения уравнения Пуассона в открытой области с помощью функции Грина для неограниченного пространства предварительно вычисляются значения потенциала u, создаваемого объемным зарядом в узлах сетки на границе Γ некоторого прямоугольника D, внутри которого содержатся все частицы. Далее уравнение Пуассона решается с помощью БПФ в этом прямоугольнике с известными граничными условиями [90]. Здесь также может быть целесообразно решать методом Фурье непосредственно дифференциальное уравнение, не переходя «преждевременно» к конечно-разностным уравнениям.

В [86] дан основанный на использовании БПФ прямой метод решения уравнения Пуассона методом Фурье в областях, составленных из прямоугольников; при этом на части границы области может быть задано условие Дирихле, а на другой части — условие симметрии, т. е. однородное условие Неймана. (Такие смешанные граничные условия встречаются при моделировании процессов переноса зарядов в полупроводниковых приборах.) Краевая задача для составной области сводится к нескольким краевым задачам для составляющих прямоугольников с помощью предварительного вычисления приближенных значений искомой функции на линии раздела. При построении решения используются сеточные функции Грина 2-го рода, вычисляемые с помощью

БПФ. При выполнении численных экспериментов количество арифметических операций в алгоритме [86] для составной области незначительно превышает их количество для прямоугольника с тем же числом узлов сетки.

Метод БПФ применим и в трехмерных областях. Уравнение Пуассона в цилиндрических координатах z, φ, r может решаться с помощью двойного БПФ по z, φ и прогонки по r. В декартовых координатах БПФ может выполняться по всем трем переменным. Комбинируя описанные методы, можно численно решать уравнение Пуассона во всех практически важных областях, встречающихся в физических установках и приборах.

БПФ применимо при вычислении не только электрического потенциала, но также потенциала любой системы «зарядов», зависящего лишь от расстояния между «зарядами» и точкой наблюдения [90]. Предположим, например, что рассматриваемая область [69] может быть периодически продолжена в обоих направлениях, а потенциал в узле (j, i) сетки (66):

$$u(j, i) = \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{M-1} q(r, s)\, G(j-r, i-s). \tag{87}$$

Здесь $q(r, s)$ — величина «заряда» в узле (r, s), а $G(x, y)$ — функция Грина (иногда называемая функцией влияния «зарядов»), т. е. потенциал, создаваемый в точке (x, y) единичным «зарядом», расположенным в начале координат $(0, 0)$, с учетом свойства периодичности. По формулам свертки (разд. 2) коэффициенты Фурье связаны соотношением

$$\bar{u}\,(n, m) = \bar{q}(n, m)\bar{G}\,(n, m), \tag{88}$$

из которого можно определить $\bar{u}(n, m)$ по известным $\bar{q}(n, m)$, $\bar{G}(n, m)$, причем коэффициенты $\bar{G}(n, m)$ целесообразно постоянно сохранять в памяти ЭВМ в течение численного эксперимента. Значения потенциала $u(j, i)$ в узлах сетки находятся затем с помощью двойного БСФ. Эта методика может быть распространена также на случай изолированной системы «зарядов» [90] и полезна, например, при расчете сглаженного потенциала, создаваемого «крупными частицами» конечных размеров [119].

Применение БПФ позволяет резко ускорить вычисление электрического поля объемного заряда в задачах математического моделирования электронных и плазменных процессов [75, 80, 87, 90, 91, 105, 114, 115, 117, 118, 124, 141]. С помощью БПФ легко вычисляется также поле тяготения в задачах космогонии и динамики звездных скоплений, галактик, спиральных образований и т. п. [90, 116, 118–120, 127, 128].

Из рассмотренного выше видно, что БПФ можно аналогично использовать и при численном решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Хотя время решения при этом возрастает, погрешность искомой функции (и ее производной) оказывается, как правило, меньшей, чем при численном решении конечно-разностных уравнений с тем же шагом сетки. Значительно сложнее решение с помощью БПФ общего разностного уравнения [112]

$$\sum_{s=0}^{S-1} c_s y_{l-s} = \sum_{r=0}^{R-1} a_r x_{j-r} \quad (c_0 \neq 0), \tag{89}$$

которое обычно используется при моделировании цифровых фильтров. В (89) a_r, c_s — константы; x_j $(j = 0, 1, \ldots, M-1)$ — заданные входные значения и $x_j = 0$ при $j \geqslant M$; $y_j (j = 0, 1, \ldots, \infty)$ — неизвестные (выходные значения). Основной трудностью при этом является одновременное ПФ левой и правой частей уравнения (89). Не останавливаясь на деталях решения [112], отметим лишь, что оно требует многократного применения БПФ и формул свертки.

При численном анализе радиотехнических устройств часто возникает необходимость моделирования на некотором интервале l с шагом $h = l/N$ реализации дискретного случайного процесса $u(j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ с заданной корреляционной функцией $K(j)$. Из формул свертки следует, что коэффициенты Фурье корреляционной функции связаны с коэффициентами Фурье реализации процесса соотношениями

$$\overline{K}(n) = |\overline{u}(n)|^2, \quad |\overline{u}(n)| = \sqrt{\overline{K}(n)} \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1). \tag{90}$$

Определяя с помощью БАФ $\overline{K}(n)$ и полагая

$$\overline{u}(n) = \overline{K}(n) \exp(i\varphi(n)),$$

где $\varphi(n)$ — случайные фазы, равновероятные в интервале $[0, 2\pi]$, можно путем БАФ получить одну из реализаций процесса $u(j)$. Этот метод легко реализуется с помощью стандартных алгоритмов БПФ и отличается высокой скоростью, однако требуется отвести в памяти ЭВМ область для хранения всей реализации $u(j)$ в целом. БПФ применимо также для быстрого моделирования совокупности нескольких взаимно коррелированных случайных процессов [140].

5. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Одной из основных областей применения БПФ является спектральный и корреляционный анализ процесса и сигналов [74, 76, 78, 83, 97–99, 110, 111, 121, 137, 138] и его приложения к задачам обработки экспериментальных результатов, получаемых в радиофизике [75, 93, 94, 96, 101, 103, 139], в том числе квантовой [123], физической акустике [50, 102, 108, 125, 130, 136], радиотехнике [76, 96, 142], оптике [109, 148], геофизике [81, 113], биофизике [106], физике реакторов [122] и других исследованиях [104, 134]. Хотя продолжают разрабатываться усовершенствованные методы непосредственного вычисления коэффициентов Фурье, например, методом Гертцля (Ватта) [23] или методом цифрового фильтра [151], лишь благодаря БПФ достигнуты радикальные улучшения в оперативной корреляционной и спектральной обработке результатов физического эксперимента.

Пусть $u(j) \equiv u(j\Delta t)$ — стационарная (в широком смысле) случайная последовательность значений комплексного процесса $u(t)$, выбранных в моменты времени $j\Delta t (j = 0, 1, \ldots, N-1)$, с нулевым средним значением и с ограниченным спектром частот, не превышающим частоты $F = (2\Delta t)^{-1}$. В дальнейшем для простоты шаг Δt считается единичным. Корреляционная функция последовательности $K(j)$ вычисляется путем БСФ по коэффициентам $\overline{K}(n)$, определяемым формулой (90).

Если в качестве оценки $\widetilde{P}(n)$ спектра мощности процесса принять $\overline{K}(n)$, то полученная оценка, как известно, является несостоятельной вследствие ограниченной длины реализации. Чтобы сделать оценку $\widetilde{P}(n)$ состоятельной, до выполнения БАФ значения $K(j)$ домножаются на корреляционное окно $h(j)$, которое выбирается таким образом, что $h(0) = 1$ и более или менее плавно спадает к 0 с ростом j. Из формулы свертки

$$h(j)\,K(j) \longleftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1} \overline{h}(m)\,\overline{K}(n-m) = \widetilde{P}(n)$$

следует также, что сглаженный спектр $\widetilde{P}(n)$ можно получить сверткой спектрального окна $\overline{h}(n)$ с $\overline{K}(n)$. Правильный выбор окна представляет самостоятельную задачу [76, 97, 107, 138]. Отметим лишь, что, если корреляционное окно узкое, спектр получается сильно сглаженным. По мере расширения окна тонкая структура спектра проявляется полнее. При очень широком окне спектр приобретает случайный характер из-за несостоятельности оценки.

Современная техника оценки спектра мощности стационарного случайного процесса обычно основана на усреднении коротких модифицированных периодограмм [97, 138]. Для этого последовательность равноотстоящих значений процесса разбивается на некоторое число S сегментов

$$u_s(j) = u(j + (s-1)M) \quad (s = 1, 2, \ldots, S; \;\; j = 0, 1, \ldots, N-1) \quad (91)$$

длины N, причем начала соседних сегментов сдвинуты на величину $M \leqslant N$, так что сегменты могут частично перекрываться и в целом покрывают всю последовательность, т. е. $(S-1)M + N = J$. После этого выполняется БАФ:

$$A_s(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u_s(j)\,H(j)\,W_N^{-nj} \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1), \qquad (92)$$

где $H(j)$ — временное окно, причем $H(j) = 1$ в середине и спадает к краям сегмента.

В качестве оценки $\widetilde{P}(n)$ спектра мощности принимают среднее модифицированных периодограмм $I_s(n)$:

$$\widetilde{P}(n) = \sum_{s=1}^{S} I_s(n)/S, \quad I_s(n) = N\,|A_s(n)|^2/= \|H\|\,; \qquad (93)$$

$$\|H\| = \sum_{j=0}^{N-1} |H(j)|^2/N \quad (n = 0, 1, \ldots, N/2). \qquad (94)$$

Обычная периодограмма получается отсюда, когда $H(j) \equiv 1$. Можно показать [138], что математическое ожидание оценки

$$\mathrm{M}\,[\widetilde{P}(n)] = \int_{-1/2}^{1/2} h(f)\,P(f - f_n)\,df \qquad (n = 0, 1, \ldots, N/2), \qquad (95)$$

где $P(f)$ — оцениваемый спектр мощности, $h(f)$ — спектральное окно,

$$h(f) \equiv \frac{N}{\|H\|}\,|\overline{H}(f)|^2, \quad \overline{H}(f) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} H(j)\,e^{i2\pi fj}\,, \quad f_n = \frac{n}{N}\,, \qquad (96)$$

имеющее ширину порядка $1/J$ и единичную площадь

$$\int_{-1/2}^{1/2} h(f)\,df = 1. \qquad (97)$$

Аналогично вычисляются взаимная корреляционная функция и спектр взаимной мощности двух стационарных случайных процессов

[94, 97, 101, 102, 113, 121, 138]. Применение БПФ настолько ускоряет вычисления, что с помощью специализированных вычислительных устройств (разд. 6) становится возможным цифровой спектральный анализ сигналов в реальном масштабе времени [96]. Близкой задачей является вычисление функций распределения случайных величин по их характеристическим функциям с помощью БПФ [84].

Среди других полезных приложений БПФ отметим также вычисление коэффициентов некоторых разложений [77, 82] и решение интегральных уравнений типа свертки [7, 135]. Последняя задача (которая, как известно, относится к некорректно поставленным) возникает, когда по известным выходному сигналу (процессу) $v(j)$ и функции отклика $h(j)$ радиотехнического звена (ядро интегрального уравнения) требуется определить вид входного сигнала $u(j)$ или по выходному $v(j)$ и входному $u(j)$ сигналам определить функцию отклика (ядро) $h(j)$. Формально задача решается достаточно просто путем БСФ функции с коэффициентами, соответственно,

$$\bar{u}(n) = \bar{v}(n)\,/\,\bar{h}(n), \quad \bar{h}(n) = \bar{v}(n)\,/\,\bar{u}(n). \tag{98}$$

Однако из-за экспериментальных и вычислительных погрешностей функции имеют неограниченный спектр и вследствие наложения частот (разд. 2) возможно возникновение больших ошибок (при делении в (98) на величины, близкие к 0) в спектре искомой функции; функция будет восстанавливаться с большой погрешностью. Для устранения погрешности восстановления искомой функции строится некоторый итерационный процесс, соответствующий регуляризации решения задачи [135].

6. СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

Многие прикладные задачи (например, анализ акустических сигналов, сжатие полосы частот, цифровая фильтрация, обработка данных РЛС, диагностика реакторов, анализ кардиограмм и др.) требуют выполнения БПФ в реальном масштабе времени (работа ЭВМ «на линии»). Естественно, БПФ при этом должно выполняться быстрее поступления информации. Однако и при расчете БПФ не «на линии» существуют задачи (в радиоастрономии, кристаллографии) с очень большим объемом информации, для обработки которой требуется около месяца работы универсальной ЭВМ [145]. Применение в этих случаях специализированных аналого-цифровых или цифровых вычислительных устройств и ЭВМ снижает стоимость обработки в 100 раз, благодаря тому, что специализированная ЭВМ примерно в 5 раз дешевле универсальной, а выполняет БПФ в 20 раз быстрее [156].

Помимо многочисленных возможностей схемного ускорения счета (простота управления операциями, использование фиксированной запятой, отсутствие перестановки результатов и др.) ускорение счета достигается благодаря одновременному выполнению операций несколькими параллельно работающими процессорами. Возможность такой параллельной работы основана на главной особенности алгоритмов БПФ—сведении ПФ ряда к независимым ПФ нескольких более коротких рядов. Скорость счета возрастает практически пропорционально количеству процессоров. Созданы также специальные алгоритмы БПФ для ЭВМ с параллельным выполнением операций [146, 159, 162, 163], а также алгоритмы и устройства ускоренного вычисления используемых при ПФ тригонометрических функций [150, 161] и сжатия информации [158, 164].

Разработанные специализированные ЭВМ [143, 147–149, 152, 154–156, 157, 160] различаются характером работы («на линии», «вне линии»), архитектурой и структурой (последовательные, поточные, каскадные, параллельные и др.), типом и числом используемых арифметических устройств, представлением чисел (комплексные, вещественные, с фиксированной или плавающей запятой) и их разрядностью, длиной N обрабатываемой реализации и множителями, на которые разлагается N, типом и алгоритмом обработки (прямое или обратное БПФ, быстрый корреляционный анализ, децимация по времени и т. п.), типом используемой весовой функции, техническими, эксплуатационными и технологическими характеристиками и др. [143, 145].

В литературе [142–145, 155, 160] имеются сведения более чем о 30 специализированных ЭВМ для выполнения БПФ стоимостью от нескольких десятков до нескольких сотен тысяч долларов. Применение этих ЭВМ обеспечивает дополнительный выигрыш в скорости выполнения КПФ тожо же порядка, что и указанный в разд. 3 выигрыш, благодаря использованию БПФ. Так, например, обработка радиоастрономических и кристаллографических экспериментов на специализированных ЭВМ занимает менее одного дня [145]. Недостатком рассматриваемых ЭВМ, как и большинства специализированных машин, является строгая заданность типа и алгоритма выполняемой обработки. Попыткой преодоления этого недостатка является разработка универсальной ЭВМ [153], конструктивные и схемные особенности которой предусматривают ускоренное выполнение БПФ.

Отметим еще указанную в [144] возможность реализации БПФ на многозначных структурах.

7. ДРУГИЕ ТИПЫ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Помимо указанного в разд. 5 способа вычисления свертки (корреляционной функции)

$$v(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(i-j)\, u(j) \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1)$$

с помощью БПФ предложен [170, 180, 181] другой способ, основанный на преобразовании с помощью чисел Мерсенна или Ферма. При этом одномерная свертка рассматривается как двумерная или трехмерная. Этот новый способ не имеет никаких ошибок округления, резко сокращает количество умножений и с ростом N становится значительно более эффективным, чем метод, основанный на БПФ (уже при $N = 1024$ — на порядок и более). Однако количество двоичных разрядов в машинных числах должно быть пропорционально длине N свертываемой последовательности или $\sqrt{N}$. Преобразование Ферма можно успешно комбинировать с БПФ в различных задачах или в специализированных ЭВМ [170]. От погрешностей округления свободна также быстрая свертка в конечных полях [174].

Рассмотрим теперь конечное z-преобразование:

$$\bar{u}(n) = \sum_{j=0}^{N-1} u(j)\, z_n^{-j} \quad (z \neq 0) \tag{99}$$

(u, z — комплексные величины), которое, как известно, [178, 179], является дискретным аналогом преобразования Лапласа. Будем полагать, что точки z_n выбраны на некоторой спирали:

$$z_n = AW^{-n} \quad (n = 0, 1, \ldots, M-1), \tag{100}$$

где A, W — комплексные константы, причем число точек M не обязательно равно N. ДПФ является частным случаем (100), когда $A = 1$,

$M = N$, $W = \exp(-i2\pi/N)$, т. е. точки z_n выбраны на единичной окружности. Непосредственное вычисление (99) требует NM операций (комплексных умножений и сложений).

Подставляя (100) в (99) и используя тождество

$$nj = 0{,}5\,[n^2 + j^2 - (n-j)^2],$$

преобразуем (99) к виду

$$\bar{u}(n) = \sum_{j=0}^{N-1} u(j) A^{-j} W^{j^2/2} W^{n^2/2}\, W^{-(n-j)^2/2} \quad (n = 0, 1, \ldots, M-1). \tag{101}$$

Преобразование (101) можно выполнить следующим образом [178]. Вначале формируются новые последовательности:

$$y(j) = \begin{cases} A^{-j} W^{j^2/2} u(j) & (j = 0, 1, \ldots, N-1) \\ 0 & (j = N, N+1, \ldots, L-1) \end{cases}; \tag{102}$$

$$v(j) = \begin{cases} W^{-j^2/2} & (0 \leqslant j \leqslant M-1) \\ W^{-(L-j)^2/2} & (L-N+1 \leqslant j < L) \end{cases}, \tag{103}$$

где целая постоянная $L \geqslant N + M - 1$ выбирается так, чтобы для последовательности длины L можно было воспользоваться алгоритмами БПФ; в области $M \leqslant j < L - N + 1$ значения $v(j)$ могут быть произвольными. Затем с помощью БПФ, как описано в разд. 5, вычисляется свертка

$$g(n) = \sum_{j=0}^{L-1} y(j)\, v(n-j) \quad (j = 0, 1, \ldots, L-1) \tag{104}$$

и, наконец, находятся коэффициенты преобразования

$$\bar{u}(n) = W^{n^2/2} g(n) \quad (n = 0, 1, \ldots, M-1). \tag{105}$$

Наиболее трудоемким при этом является вычисление свертки, которое требует порядка $4L\log_2 L$ арифметических операций [178, 183].

Описанное быстрое z-преобразование по сравнению с БПФ обладает большей гибкостью, а именно: количество исходных значений N может отличаться от количества M преобразованных, N и M не обязательно должны являться произведением многих сомножителей, точки z_n могут располагаться на спирали (а не на окружности) и не быть равноотстоящими. Это позволяет вычислять большинство коэффициентов в интересующей исследователя области [83, 178].

При анализе и обработке результатов физического эксперимента, помимо ПФ, вызывает большой интерес преобразование Уолша (ПУ), т. е. разложение сигналов по полной системе функций Уолша, которые, как известно, представляют собой «ступенчатые синусоиды» единичной амплитуды. Тригонометрические функции дают описание сигналов в области частот колебаний, тогда как функции Уолша—в области частот следования. Теория функций Уолша изложена в работах [166, 168, 169, 185], а их применению посвящены работы [167, 169, 171, 175, 176, 182]. Широкое использование функций Уолша во многом обусловлено возможностью выполнения БПУ [167, 171, 184]. Благодаря тому, что функции Уолша имеют единичную амплитуду, БПУ совершенно не требует умножений и существенно превосходит по скорости БПФ.

Однако ступенчатый характер функций Уолша обладает и значительными недостатками. В работах [172, 173] показано, что вследствие бо́льших погрешностей дискретизации и округления ПУ длинных реализаций плавных сигналов требует во много раз больше членов, чем ПФ. Даже для разрывных сигналов в ПУ необходимо использовать при той же точности существенно большее число членов, чем в ПФ. Тем самым сводятся на нет преимущества БПУ по сравнению с БПФ [173]. Отметим также, что благодаря свойству дифференцируемости ряды Фурье эффективно используются при численном решении дифференциальных уравнений (разд. 4), тогда как ступенчатые функции Уолша не дифференцируемы. Как указано в [173], удобство практического применения ПУ и БПУ нуждается в дополнительном подтверждении.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из данного обзора, БПФ представляет собой существенный вклад в методику решения многих практически важных задач вычислительной физики и является полезным и доступным методом для специалистов, занимающихся численными расчетами в прикладных задачах. В дальнейшем в этой области целесообразно, очевидно, развивать следующие направления. Во-первых, расширение круга задач, решаемых с помощью БПФ (или других быстрых преобразований). Во-вторых, разработка быстрых и точных методов и алгоритмов решения типичных задач физики, основанных на использовании БПФ, пополнение фонда стандартизованных алгоритмов, составленных на различных языках, и широкое внедрение их в вычислительную практику. В-третьих, создание отечественных специализированных ЭВМ, реализующих те или иные алгоритмы БПФ при работе «на линии» или «вне линии» В-четвертых, повышение эффективности алгоритмов путем сочетания БПФ с другими типами быстрых преобразований.

Разумное использование быстрых преобразований, несомненно, позволит на один-два порядка ускорить и удешевить многие трудоемкие физические и численные эксперименты и соответственно увеличить объем количественных результатов, которыми располагают исследователи.

ЛИТЕРАТУРА

Общие работы

1. G. D. Bergland, IEEE Spectrum, 6, № 7, 41 (1969); см. также Зарубежная радиоэлектроника, № 3, 52 (1971).
2. E. O. Brigham, The fast Fourier transform, Engelwood Cliffs, N. Y., Prentice-Hall, 1974.
3. E. D. Brigham, R. E. Morrow, IEEE Spectrum, 4, № 12, 63 (1967).
4. J. E. Carrol, Intern. J. Electron., 38, № 2, 255 (1975).
5. W. T. Cochran and oth., IEEE Trans., Au-15, № 2, 45 (1967); см. также Proc. IEEE, 55, № 10, 1664 (1967).
6. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch, IEEE Trans., Au-15, № 2, 76 (1967).
7. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch, IEEE Trans., Au-15, № 2, 79 (1967)
8. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch, IEEE Trans., Au-17, № 2, 77 (1969).
9. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch, IEEE Trans., Educ-12, № 1, 27 (1969).
10. W. M. Gentleman, G. Sande, 1966 Fall Joint Computer Conf, AFIPS Proc., 29, Washington, D. C.: Spartan, 1966, p. 563.
11. R. Klahn, R. R. Shively, Electronics, 41, № 8, 124 (1968)
12. R. C. Singleton, IEEE Trans., Au-17, № 2, 166 (1969) (библиогр. 95 наименований).

Теория конечного преобразования Фурье

13. Н. С. Бахвалов, Численные методы, 1, изд. Наука, М., 1973.
14. С. К. Годунов, В. С. Рябенький, Разностные схемы (введение в теорию), изд. Наука, М., 1973.
15. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, 2, изд. Сов. радио, 1968.
16. Р. В. Хемминг, Численные методы для научных работников и инженеров, изд. Наука, М., 1968.
17. L. E. Alsop, A. A. Nowrozi, J. Geophys. Res., 71, № 21, 5482 (1966).
18. G. G. Apple, P. A. Wintz, IEEE Trans., IT-16, № 2, 233 (1970).
19. J. Boothroyd, Computer J., 10, № 1, 14 (1968); Computer J., 10, № 2, 115 (1969).
20. T. W. Cairns, IEEE Trans., C-20, № 5, 569 (1971).
21. D. Fraser, IEEE Trans., C-18, № 1, 74 (1969).
22. W. M. Gentleman, BSTJ, 47, № 7, 1099 (1968).
23. W. M. Gentleman, Computer J., 12, № 2, 160 (1969).
24. B. R. Hunt, IEEE Trans., Au-19, № 4, 284 (1971).
25. D. K. Kahaner, IEEE Trans., Au-18, № 4, 442 (1970).
26. J. H. McClellan, T. W. Parks, IEEE Trans., Au-20, № 1, 66 (1972).
27. F. Theilheimer, IEEE Trans., Au-17, № 2, 158 (1969).

Методы и алгоритмы быстрого преобразования Фурье

28. В. Н. Галимуллин, П. В. Романов, А. С. Рошаль, ЖВМиМФ, 10, № 3, 741 (1970).
29. В. Н. Галимуллин, П. В. Романов, А. С. Рошаль, ЖВМиМФ, 10, № 5, 1287 (1970).
30. И. И. Коршевер, Автометрия, № 2, 73 (1975).
31. Петерсен, ТИИЭР, 58, № 8, 170 (1970).
32. П. М. Чеголин, В. Н. Пойда, Методы, алгоритмы и программы статистического анализа, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
33. F. Abramovici, J. Comput. Phys., 17, № 4, 446 (1975).
34. H. Andrews, IEEE Trans., C-17, № 4, 373 (1968).
35. G. D. Bergland, Math. Comput., 22, № 102, 275 (1968).
36. G. D. Bergland, Communs ACM, 11, № 10, 703 (1968).
37. G. D. Bergland, IEEE Trans., Au-17, № 2, 138 (1969).
38. S. Bertran, IEEE Trans., Au-18, № 1, 55 (1970); IEEE Trans., Au-18, № 3, 319 (1970).
39. N. M. Brenner, IEEE Trans., Au-17, № 2, 128 (1969).
40. J. P. Christiansen, R. W. Hockney, Comput. Phys. Communs, 2, № 3, 127 (1971).
41. J. P. Christiansen, R. W. Hockney, Comput. Phys. Communs, 2, № 3, 139, (1971).
42. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch, J. Sound Vib., 12, № 3, 315 (1970).
43. J. W. Cooley, J. W. Tukey, Math. Comput., 19, № 90, 297 (1965).
44. I. J. Good, IEEE Trans., C-20, № 3, 310 (1971).
45. M. L. Groginsky, C. A. Works, IEEE Trans., C-19, № 11, 1015 (1970).
46. J. W. Hartwell, IBM J. of Res. Develop., 15, № 9, 355 (1971).
47. M. H. Hughes, Comput. Phys. Communs, 2, № 3, 157 (1971).
48. D. V. James, IEEE Trans., ASSP-23, № 3, 277 (1975).
49. T. Kaneko, B. Liu, J. of ACM, 17, № 4, 637 (1970).
50. J. D. Markel, IEEE Trans., Au-19, № 4, 305 (1971).
51. J. Morgenstern, J. of ACM, 20, № 2, 305 (1973).
52. P. M. Neely, Communs ACM, 9, № 7, 496 (1966).
53. A. V. Oppenheim, C. J. Weinstein, Proc. IEEE, 60, № 8, 957 (1972).
54. L. E. Ostrander, IEEE Trans., Au-19, № 1, 103 (1971).
55. R. J. Polge, B. K. Bhagavan, J. M. Carswell, IEEE Trans., C-23, № 1, 1 (1974).
56. J. M. Pollard, Math. Comput., 25, № 114, 365 (1971).
57. J. Prescott, R. L. Jenkins, IEEE Trans., ASSP-22, № 3, 226 (1974).
58. C. M. Rader, Proc. IEEE, 56, № 6, 1107 (1968).
59. C. M. Rader, IEEE Trans., Au-21, № 6, 558 (1973).
60. P. Rudnick, Math. Comput., 20, № 95, 429 (1966).
61. R. C. Singleton, IEEE Trans., Au-15, № 2, 91 (1967).
62. R. C. Singleton, Communs ACM, 10, № 10, 647 (1967).
63. R. C. Singleton, Communs ACM, 11, № 11, 773 (1968).
64. R. C. Singleton, Communs ACM, 11, № 11, 776 (1968); Communs ACM, 12, № 3, 187 (1969).

65. R. C. Singleton, Communs ACM, 12, № 3, 179 (1969).
66. R. C. Singleton, IEEE Trans., Au-17, № 2, 93 (1969).
67. D. W. Tuffts, H. S. Hersey, W. E. Mosier, Proc. IEEE, 60, № 1, 146 (1972).
68. M. L. Uhrich, IEEE Trans., Au-17, № 2, 170 (1969).
69. R. L. Veenkant, IEEE Trans., Au-20, № 3, 180 (1972).
70. C. J. Veinstein, IEEE Trans., Au-17, № 3, 209 (1969).
71. P. D. Welch, IEEE Trans., Au-17, № 2, 151 (1969).
72. H. Ziegler, IEEE Trans., Au-20, № 5, 353 (1972).

Применение быстрого преобразования Фурье

73. Р. Дж. Белл, Введение в фурье-спектроскопию, изд. Мир, М., 1975.
74. Бриллинджер, ТИИЭР, 62, № 12, 15 (1974) (библиогр. 92 наименования).
75. Л. А. Вайнштейн, А. С. Рошаль, Лекции по электронике СВЧ, 2-я зимняя школа-семинар инженеров, 3, изд. Сарат. гос. ун-та, Саратов, 1972.
76. Г. Дженкинс, Д. Ваттс, Спектральный анализ и его приложения, изд. Мир, М., 1—1971, 2—1972.
77. Дидерич, ТИИЭР, 62, № 10, 117 (1974).
78. Б. Ф. Курьянов, Л. Е. Медведева, Статистика и стохастические системы, № 8, изд. МГУ, М., 1970.
79. Г. И. Марчук, Методы вычислительной математики, изд. Наука, Новосибирск, 1973.
80. Метц, Гандхи, ТИИЭР, 62, № 3, 215 (1974).
81. Б. М. Наймарк, Г. А. Погребенский, Е. Л. Резников, Практические методы преобразования Фурье, Теоретическая и прикладная геофизика; изд. Наука, М., 1971.
82. Наттол, ТИИЭР, 62, № 10, 118 (1974).
83. Оппенгейм, Джонсон, Штейглиц, ТИИЭР, 59, № 1, 138 (1971).
84. Рекиша, ТИИЭР, 58, № 8, 136 (1970); ТИИЭР, 62, № 4, 133 (1974).
85. Б. Л. Рождественский, Численные методы механики сплошной среды, 4, № 4, 58 (1973), ВЦ СО АН СССР, Новосибирск.
86. Б. Л. Рождественский, А. С. Рошаль, сб. Инженерно-математические методы в физике и кибернетике, № 5, Атомиздат, М., 1976, стр. 88.
87. П. В Романов, А. С. Рошаль, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 7, 1097 (1971).
88. А. С. Рошаль, сб. Инженерно-математические методы в физике и кибернетике, № 3, Атомиздат, М., 1973, стр. 109.
89. Сиклаш, Сигмен, ТИИЭР, 62, № 3, 161 (1974).
90. Р. Хокни, в кн. Вычислительные методы в физике плазмы, изд. Мир, М., 1974, стр. 143.
91. А. А. Шадрин, А. Г. Шеин, Радиотехника, республиканский межведомственный тематический научно-технический сборник, № 28, 1974, стр. 32.
92. А. А. Шадрин, А. Г. Шеин, Радиотехника, республиканский межведомственный научно-технический сборник, № 29, 1974, стр 95.
93. C. R. Arnold, IEEE Trans., Au-18, № 3, 248 (1970).
94. V. A. Benignus, IEEE Trans., Au-17, № 2, 145 (1969); IEEE Trans., Au-18, № 3, 3'0 (1970).
95. G. D. Bergland, Math. Comput., 21, № 98, 236 (1967).
96. G. D. Bergland, H. W. Hale, IEEE Trans., EC-16, № 2, 180 (1967).
97. C. Bingham, M. D. Godfrey, J. W. Tukey, IEEE Trans., Au-15, № 2, 56 (1967).
98. B. P. Bogert, E. Parzen, IEEE Trans., Au-15, № 2, 74 (1967).
99. T. A. Brubaker, H. Levin, IEEE Trans., Au-20, № 1, 100 (1972).
100. B. Buzbee, G. Golub, E. Nilson, SIAM J. Numer. Anal., 7, № 4, 627 (1970).
101. G. C. Carter, C. H. Knapp, A. H. Nuttall, IEEE Trans., Au-21, № 4, 337 (1973).
102. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch, J. Sound Vib., 12, № 7, 315 (1970).
103. J. W. Cooley, P. A. W. Lewis, P. D. Welch, IEEE Trans., C-20, № 8, 843 (1971).
104. G. C. Danielson, C. Lanczos, J. Franklin Inst., 233, № 4, 365 (1942).
105. J. M. Dawson, Gravitational N-body problem, Proc. of the IAU colloquium № 10, D. Reidel publ. Co, Dordrecht, Holland, 1972, p. 315.
106. G. Dummermuth, H. Fuhler, Med. and Biod. Engrg, 5, № 4, 319 (1967).
107. A. Eberhard, IEEE Trans., Au-21, № 1, 37 (1973).
108. J. L. Flanagan, IEEE Trans., Au-15, № 2, 66 (1967).
109. M. L. Forman, J. Opt. Soc. Am., 56, № 7, 978 (1966).
110. T. H. Glisson, C. I. Black, A. R. Sage, IEEE Trans., Au-17, № 3, 271 (1970).
111. B. Gold, C. M. Rader, Digital processing of signals, McGraw-Hill, N. Y., 1969.

112. H. D. Helms, IEEE Trans, Au-15, № 2, 85 (1967).
113. M. J. Hinich, C. S. Clay, Rev. Geophys., 6, № 8, 347 (1968).
114. R. W. Hockney, J. of ACM, 12, № 1, 95 (1965).
115. R. W. Hockney, Phys. of Fluids, 9, № 9, 1826 (1966).
116. R. W. Hockney, Astrophys. J., 150, № 3, pt 1, 797 (1967).
117. R. W. Hockney, Computing as a language of Physics, IAE Agency, Vienna 1972, p. 119.
118. R. W. Hockney, ibid, p. 95.
119. F. Hohl, Gravitational N-body problem, Proc. of the IAU colloquium № 10, D. Reidel publ. Co, Dordrecht, Holland, 1972, p. 431.
120. F. Hohl, R. W. Hockney, J. Comput. Phys., 4, № 3, 306 (1969).
121. P. J. Huber, B. Kleiner, Z. Gasser, IEEE Trans., Au-19, № 1, 78 (1971).
122. R. C. Kryter, IEEE Trans., NS-16, № 1, 210 (1969).
123. L. B. Lesem, P. M. Hirsch, J. A. Jordan, Communs ACM, 11, № 11, 661 (1968).
124. R. H. Levy, R. W. Hockney, Phys. of Fluids, 11, № 4. 766 (1968).
125. G. C. Maling, W. T. Morrey, W. W. Lang, IEEE Trans., Au-15, № 2, 98 (1967).
126. J. W. Meek, A. Velestos, IEEE Trans, Au-20, № 1, 93 (1972).
127. R. H. Miller, K. H. Prendergast, Astrophys. J., 151, № 2, pt 1, 699 (1968).
128. R. H. Miller, K. H. Prendergast, W. J. Quirk, Astrophys. J. 161, № 3, pt. 1, 903 (1970).
129. G. C. O'Leary, IEEE Trans., Au-18, № 2, 177 (1970).
130. A. V. Oppenheim, IEEE Spectrum, 7, № 8 (1970).
131. A. V. Oppenheim, C. J. Weinstein, IEEE Trans., Au-17, № 2, 120 (1969).
132. R. Ramizer, Electronics, 48, № 13, 98 (1975).
133. R. Read, J. Meek, IEEE Trans., Au-19, № 4, 322 (1971).
134. R. S. Shirley, IEEE Trans., MMS-10, № 4, 140 (1969).
135. H. F. Silverman, A. E. Pearson, IEEE Trans., Au-21, № 2, 112 (1973).
136. R. C. Singleton, T. C. Poulter, IEEE Trans., Au-15, № 2, 104 (1967); IEEE Trans., Au-16, № 4, 523 (1968).
137. E. A. Sloane, IEEE Trans., Au-17, № 2, 133 (1969).
138. P. D. Welch, IEEE Trans., Au-15, № 2, 70 (1967).
139. J. P. Williams, G. G. Ricker, IEEE Trans., Au-20, № 4, 264 (1972).
140. L E. Wittig, A. K. Sinha, J. Acoust. Soc. Amer., 58, № 3, 630 (1975).
141. S. P. Yu, G. P. Kooyers, O. Buneman, J. Appl. Phys, 36, № 8, 2550 (1965).

Специализированные вычислительные устройства

142. В. А. Алексеев и др, Радиотехника и электроника, 17, № 2, 332 (1972).
143. Г. Д Бахтиаров, А. Ю. Тищенко, Зарубежная радиоэлектроника, № 9, 71 (1875)
144. Ю. Л. Иваськив, В М Тузов, Цифровые устройства обработки сигналов на многозначных структурах, изд Наукова думка, Киев, 1975.
145. G. D. Bergland, IEEE Trans, Au-17, № 2, 104 (1969).
146. G. D. Bergland, D. E Wilson, IEEE Trans., Au-17, № 2, 125 (1969).
147. P. E. Blankship, E. M Hafstetter, IEEE Trans., ASSP-23, № 4, 357 (1975).
148. H. L. Bujis, A. Pomerlau, M. Fournier, W. G. Tam, IEEE Trans., ASSP-22, № 6, 420 (1974).
149. M. J. Corinthios, IEEE Trans., C-20, № 6, 617 (1971).
150. A. M. Despain, IEEE Trans, C-23, № 10, 993 (1974).
151. D. E. Dick, H. J. Wertz, IEEE Trans., EC-16, № 1, 8 (1967).
152. B. Gold, T. Bially, IEEE Trans, EC-16, № 1, 8 (1967).
153. B. Gold, I. Lebow, P. G. Mc Hugh, C. M. Rader, IEEE Trans., C-20, № 1, 33 (1971).
154. P. Gottlieb, L. T. DeLorenzo, IEEE Trans., ASSP-22, № 2, 111 (1974).
155 R. Haavind, Electronic Design, 15, № 25, 25 (1967); см. также Зарубежная радиоэлектроника, № 2, 58 (1969).
156. R. Klahn, R. R. Shively, E. Gomez, M. J. Gilmartin, Electronics, 41, № 13, 92 (1968).
157. L. W. Martinson, R. J. Smith, IEEE Trans., ASSP-23, № 2, 222 (1975).
158. L. R Morris, IEEE Trans, ASSP-23, № 3, 297 (1975).
159. M. C Pease, J. of ACM, 15, № 2, 152 (1968).
160. R. R. Shively, IEEE Trans., C-17, № 5, 485 (1968); см. также Зарубежная радиоэлектроника, № 2, 46 (1969).
161. J. E Volder, IEEE Trans., EC-8, № 5, 330 (1959).
162. M. Wesley, IEEE Trans,, Au-17, № 2, 162 (1969).
163. J. E. Whelchel, D. F. Quinn, IEEE Trans., Au-18, № 2, 159 (1970).
164 J. R. Williams, G. G. Ricker, IEEE Trans., ASSP-23, № 4, 357 (1975).
165. S. Zohar, IEEE Trans., C-22, № 5, 433 (1973); IEEE Trans., C-23, № 9, 989 (1974).

Другие типы быстрых преобразований

166. Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн, в кн. Итоги науки, Математический анализ, изд. ВИНИТИ, М., 1971, стр. 147 (библиогр. 140 наименований).
167. Бесветтер, Зарубежная радиоэлектроника, № 5, 18 (1972) (библиогр. 26 наименований).
168. Б И. Голубов, в кн. Итоги науки, Математический анализ, изд. ВИНИТИ, М., 1971, стр. 109 (библиогр. 168 наименований).
169. А. М. Трахтман, В. А. Трахтман, Радиотехника, 28, № 12, 1 (1973).
170. R. C. Agarwal, C. S. Burrus, IEEE Trans., **ASSP-22**, № 1, 1 (1974).
171. Applications of Walsh functions, Symposium Proccedings, IEEE Trans., **EMC-13**, № 3 (special issue) (1971).
172. N. M. Blanchman, IEEE Trans., **AES-7**, № 5, 900 (1971).
173. N. M. Blanchman, Proc. IEEE, **62**, № 3, 346 (1974).
174. J. D. Brule', IEEE Trans., **ASSP-23**, № 2, 240 (1975).
175. J. E. Gibbs, H. A. Gebbie, Nature, **224**, № 5223, 1012 (1969).
176. H. F. Hartmuth, IEEE Trans., **EMC-13**, № 3, 210 (1971); см. также Зарубежная радиоэлектроника, № 6, 25 (1972).
177. J. Pearl, IEEE Trans., **SMC-1**, № 2, 111 (1971).
178. L. R. Rabiner, R. W. Schafer, C. M. Rader, IEEE Trans., **Au-17**, № 2, 86 (1969).
179. L. R. Rabiner, R. W. Schafer, C. M. Rader, BSTJ, 48, № 3, 1249 (1969).
180. C. M. Rader, IEEE Trans., **C-21**, № 12, 1269 (1972).
181. C. M. Rader, IEEE Trans., **CS-22**, № 6, 575 (1975).
182. G. S. Robinson, IEEE Trans., **Au-20**, № 4, 271 (1972).
183. P. N. Robinson, G. S. Robinson, IEEE Trans., **Au-20**, № 1, 98 (1972).
184. J. L. Shanks, IEEE Trans., **EC-12**, № 2, 129 (1963).
185. C. Yen, IEEE Trans., **EMC-13**, № 3, 68 (1971); см. также Зарубежная радиоэлектроника, № 7, 27 (1972).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
23 июля 1975 г.,
после доработки
3 мая 1976 г.