

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Наумов А. П., Зиничева М. Б., Муратов Н. Н. К оценке возможного содержания аммиака в атмосфере Венеры . . . . .	5
Бсляев П. П., Гетманцев Г. Г., Зиничев В. А., Рахлин А. В., Тарасов А. Ф., Токарев Ю. В. Об угловых вариациях спектра космического радиофона в метровом диапазоне волн вдоль склонения $\delta = 15^{\circ}30'$ . . . . .	12
Еремин И. М., Шкелев Е. И. Потенциальные колебания изолированного слоя плазмы . . . . .	19
Лебский Ю. В., Наумов А. П., Плечков В. М., Сизьмина Л. К., Троицкий А. В., Штанюк А. М. Радиометр для наземных исследований атмосферы в 5-миллиметровой области спектра . . . . .	25
Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. Экспериментальные исследования нелинейных эффектов в F-слое ионосферы . . . . .	33
Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Рассеяние радиоволн в ионосферных волновых каналах . . . . .	43
Глушнев В. Г., Слуцкер Б. Д., Финкельштейн М. И. Об измерении некоторых электрофизических характеристик при радиолокационном зондировании мерзлых почв . . . . .	59
Зернов Н. Н., Макаров Г. И. Построение решения эталонного уравнения для задачи о распространении плоской волны вертикальной поляризации в бесконечном слое с максимумом электронной концентрации при малых потерях . . . . .	64
Малахов А. Н. Кинетические уравнения кумулянтов произвольного марковского процесса . . . . .	71
Апресян Л. О временных изменениях некоторых характеристик импульсов, распространяющихся в безграничной рассеивающей среде . . . . .	82
Шишов В. И. Зависимость вида спектра мерцаний от вида спектра неоднородностей показателя преломления. II. Статистически однородная среда . . . . .	91
Камышан А. В., Камышан В. В. Открытый резонатор с тороидальными зеркалами	100
Турчин В. И. К теории зондового метода измерения диаграмм направленности антенн . . . . .	110
Класс В. А., Красильников В. Н. Исследование интегродифференциальных уравнений, возникающих в задачах дифракции волн на сферах и цилиндрах с изменяющимися во времени радиусами . . . . .	116
Курин В. Г., Скрынник Б. К., Шестопалов В. П. Оптимизация связи генератора дифракционного излучения с нагрузкой . . . . .	128
Капилевич Б. Ю., Симин Н. С. Отражение от диэлектрического клина в прямоугольном волноводе . . . . .	135
Воскресенский Г. В., Курдюмов В. Н. О характеристиках взаимодействия движущегося кольцевого тока с неоднородной волноводной структурой . . . . .	141
Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л., Титаренко А. Ю. Дифракционное излучение модулированного электронного пучка, движущегося вблизи тонкой металлической ленты . . . . .	149
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Сорокина В. М., Тиманюк В. А., Ткаченко В. М. Исследование низкочастотных регулярных колебаний в тлеющем разряде с цилиндрическим полым катодом в гелии . . . . .	156
Волков Н. В. Общее отрицательное свечение тлеющих разрядов . . . . .	158

УДК 523 164.42

## К ОЦЕНКЕ ВОЗМОЖНОГО СОДЕРЖАНИЯ АММИАКА В АТМОСФЕРЕ ВЕНЕРЫ

*А. П. Наумов, М. Б. Зиничева, Н. Н. Муратов*

Проведены расчеты спектра усредненной по диску яркостной температуры теплового радиоизлучения Венеры в диапазоне длин волн  $\lambda \approx 0,3 \div 20$  см для ряда моделей атмосферы, различающихся содержанием газообразного аммиака. Из сопоставления результатов расчета с радиометрическими измерениями получены оценки возможного содержания  $\text{NH}_3$  в атмосфере Венеры, которые сравниваются с результатами прямых исследований АМС «Венера-8» и с данными радиолокационных измерений.

Сведения о физических условиях в атмосферах планет и их химическом составе получаются как прямыми космическими методами, так и по характеристикам отражения, поляризации и уходящего излучения в различных спектральных участках [1]. Среди дистанционных методов исследований важное место принадлежит радиоастрономическим методам, позволяющим получать информацию об интегральных свойствах атмосферы и о вертикальном распределении ряда параметров, включая подоблачные слои [2, 3]. Космические и радиоастрономические методы взаимно дополняют друг друга, при этом необходимо отметить высокую чувствительность (эффективность) радиоастрономических методов к количественному определению малых газовых составляющих атмосфер, молекулы которых обладают дипольными моментами. Количественное определение этих компонент осуществляется обычно по особенностям излучения (поглощения) электромагнитной энергии в резонансных областях соответствующих газов, либо по их влиянию на спектр радиоизлучения планеты в более широком диапазоне.

В последнее время интерес исследователей привлекает вопрос о количественном содержании аммиака в атмосфере Венеры. С помощью прямых измерений, проведенных АМС «Венера-8», было получено относительное содержание  $\text{NH}_3$  на уровнях с давлением  $P = 2$  атм и  $P = 8$  атм в венерианской атмосфере в количестве, равном  $0,01 \div 0,1\%$  [4]. В работе [5] выполнены оценки возможного содержания аммиака в нижней части атмосферы по радиолокационным измерениям эффективного сечения отражения на волне  $\lambda = 3,8$  см [6] и определено относительное содержание аммиака в атмосфере Венеры  $f_{\text{NH}_3} \leq (8 \div 16) \cdot 10^{-6}$ , что на порядок и более оказывается меньше нижней границы  $f_{\text{NH}_3}$ , приведенной в [4]\*. Поэтому дополнительный интерес представляет проведение расчетов спектра радиоизлучения планеты при различных содержаниях аммиака в более широком диапазоне волн, включая и резонансную область инверсионного спектра поглощения  $\text{NH}_3$   $\lambda \sim 1,25$  см.

В данной статье оценивается влияние  $\text{NH}_3$  на спектр радиоизлуче-

\* Максимальная величина  $f_{\text{NH}_3} = 1,6 \cdot 10^{-5}$  получена в [5] для сухой атмосферы ( $f_{\text{H}_2\text{O}} = 0$ ).

ния планеты в области  $\lambda \approx 0,3 \div 20$  см, и количественное содержание аммиака определяется из сравнения экспериментального радиоспектра Венеры в том же диапазоне с рассчитанными спектрами при различных экстрополирующих (измерения АМС «Венера-8») предположениях о содержании аммиака в верхней ( $P < 2$  атм) и нижней ( $P > 8$  атм) частях атмосферы.

Расчеты спектра радиоизлучения Венеры выполнялись по формуле [2]

$$T_{\text{яв}} = T_0 I_1(\epsilon, \tau_m) + 2 \int_0^1 \int_0^{\tau_m} T(\tau) e^{-\tau/\mu} d\tau d\mu \quad (1)$$

для моделей атмосферы с определенным высотным распределением давления и температуры, но при различных распределениях аммиака. На высотах  $h < 54$  км использовались распределения давления  $P$  и температуры  $T$ , полученные по результатам прямых измерений АМС «Венера-8» [7], а на высотах  $h \approx 54 \div 100$  км\* — распределения  $P(h)$  и  $T(h)$ , взятые из расчетов [8], выполненных с учетом измерений атмосферных параметров АМС «Венера-4» — «Венера-7». В формуле (1)  $T_0$  — температура поверхности,  $I_1(\epsilon, \tau_m)$  — усредненная по видимому диску излучательная способность поверхности планеты с учетом ослабления атмос-

феры (см. табл. 2 в [2]),  $\tau = \int_0^h \gamma(h) dh$  — оптическая толщина атмос-

феры,  $\gamma$  — коэффициент поглощения радиоволн,  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  — сферическая координата на поверхности планеты. При расчетах использовались значения  $I_1$ , соответствующие диэлектрической проницаемости материала поверхности  $\epsilon = 4,7^{**}$ .

На основании результатов космических исследований химический состав атмосферы Венеры принимался следующим (по числу частиц):  $f_{\text{CO}_2} \approx 97\%$ ,  $f_{\text{N}_2} \approx 2\%$  [8]. Из согласования космических [4, 7, 8] и радионастрономических [9] данных по содержанию водяного пара была принята в ненасыщенных слоях атмосферы относительная концентрация  $f_{\text{H}_2\text{O}} \approx 0,1\%$ , совпадающая с нижним пределом прямых измерений [8]. Указанная величина была вновь подтверждена в работе [5] в качестве наиболее вероятного значения  $f_{\text{H}_2\text{O}}$ . В верхних слоях атмосферы концентрация водяного пара  $f_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{нас}}$  рассчитывалась нами из условия насыщения по эмпирической формуле Магнуса (см. (2.31) в [10]). Относительная концентрация аммиака  $f_{\text{NH}_3}$  в данной задаче являлась параметром, и рассматривались модели ( $f_{\text{NH}_3} < f_{\text{NH}_3}^{\text{нас}}$ ) как с постоянным ( $f_{\text{NH}_3} = 0 \div 0,1\%$ ), так и с переменным содержанием  $\text{NH}_3$  по высоте (см. табл. 1). При этом в слое атмосферы между уровнями  $P = 2$  атм и  $P = 8$  атм значение  $f_{\text{NH}_3}$  не превышало  $0,01$ — $0,1\%$  согласно [4].

Если облачный слой Венеры состоит из конденсата водяного пара, то для принятых модели атмосферы и концентрации  $\text{H}_2\text{O}$  капельная фракция в облаках должна отсутствовать (см., например, расчеты [11]) и облака, следовательно, будут только ледяными. Расчет облачного слоя планеты, состоящего из кристаллов аммиака, выполнен в [12]. Оптические толщины ледяных облаков, как правило, не превышают долей процента от оптической толщины слоев, дающих основной вклад

\* На высоте  $h \sim 100$  км температура атмосферы составляет уже около  $150^\circ\text{K}$  [8], и концентрация дипольных компонент Венеры ( $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{NH}_3$ ) заметно уменьшается. На больших высотах существенны процессы фотодиссоциации газов.

\*\* Принятое значение  $\epsilon$  в пределах точности определения ( $\pm 0,5$ ) совпадает со значением, полученным и в [5].

в излучение атмосферы. Поэтому коэффициент поглощения  $\gamma$  в (1) полагался равным

$$\dot{\gamma} = \gamma_{\text{CO}_2, \text{N}_2} + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} + \gamma_{\text{NH}_3}. \quad (2)$$

Расчеты коэффициентов поглощения углекислого газа и азота ( $\gamma_{\text{CO}_2, \text{N}_2}$ ), а также водяного пара ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ ) выполнялись по формулам, приведенным в [9, 13]. Величина  $\gamma_{\text{NH}_3}$  вычислялась по формулам, аналогичным тем, которые приведены в работах [14-16] для атмосфер планет-гигантов (Юпитера, Сатурна) и которые, естественно, корректировались на химический состав атмосферы Венеры. При этом квантовомеханическая формула для расчета  $\gamma_{\text{NH}_3}$  (см. (1) в [14]) использовалась при давлениях  $P \leq 250 \left( \frac{\sigma_{\text{CO}_2-\text{NH}_3}}{\sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3}} f_{\text{CO}_2} + \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3}}{\sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3}} f_{\text{H}_2\text{O}} + \frac{\sigma_{\text{N}_2-\text{NH}_3}}{\sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3}} f_{\text{N}_2} + f_{\text{NH}_3} \right)^{-1} = 250(0,303 \cdot 0,97 + 0,75 \cdot 0,001 + 0,159 \cdot 0,02 + f_{\text{NH}_3})^{-1} \approx 840 \text{ мм рт. ст.}$ , а формула Бен-Ривена (см. (3) и (4) в [14]) — при давлениях  $P > 840 \text{ мм рт. ст.}$  Сечения молекулярных соударений  $\text{NH}_3$  заимствовались из табл. 55 монографии [17].

Таблица 1

Модели атмосферы Венеры (по высотному распределению $\text{NH}_3$ )	$f_{\text{NH}_3}$		
	$P < 2 \text{ атм}$	$2 \text{ атм} \leq P \leq 8 \text{ атм}$	$P > 8 \text{ атм}$
1	0	0	0
2	0,0001%	0,0001%	0,0001%
3	0,0005%	0,0005%	0,0005%
4	0,001%	0,001%	0,001%
5	0	0,01%	0
6	0,01%	0,01%	0,01%
7	0,01%	0,01%	0,01% $\div$ 0,1%*
8	0,001% $\div$ 0,01%*	0,01% $\div$ 0,1%*	0,1%
9	0	0,1%	0
10	0,1%	0,1%	0,1%

\* В этих слоях атмосферы полагалось, что концентрация аммиака возрастает линейно с увеличением давления. Для модели 7 возрастание  $f_{\text{NH}_3}$  было принято до поверхностного давления.

Результаты расчетов спектра теплового радиоизлучения Венеры при различных высотных распределениях  $\text{NH}_3$  сопоставлены на рис. 1 с радиоастрономическими наблюдениями на волнах  $\lambda = 0,32 \div 21 \text{ см}$  [2, 18-64] (см. табл. 2)\*. На рисунке видно влияние аммиака на спектр радиоизлучения планеты. Для перемешанных моделей атмосферы ( $f_{\text{NH}_3} = \text{const}$ ) концентрации  $f_{\text{NH}_3} \leq 0,0001\%$  приводят к весьма незначительным ( $\Delta T_{\text{ЯВ}} \approx 2 \div 15^\circ\text{K}$ ) изменениям яркостной температуры (по сравнению с атмосферой, в которой отсутствует аммиак) во всем рассмотренном диапазоне волн, включая и область инверсионного резонанса  $\lambda \sim 1,25 \text{ см}$  (кривые 1, 2). По мере увеличения концентрации аммиака в перемешанных моделях атмосферы соответствующая разность яркостных температур ( $\Delta T_{\text{ЯВ}}$ ) возрастает и в большей степени начинает проявляться в спектре инверсионная полоса  $\text{NH}_3$ \*\*.

\* Нумерация кривых на рисунке соответствует нумерации моделей атмосферы

\*\* Отметим, что провалы в спектральной зависимости  $T_{\text{ЯВ}}(\lambda)$  на кривых 1, 2, 5, 9 приходятся на длину волны  $\lambda = 1,35 \text{ см}$  и обусловлены, следовательно, вращательным переходом  $5_{-1} - 6_{-5}$  водяного пара, в то время как аналогичная особенность в излучении планеты для моделей 3, 4, 6, 7, 10 центрирована к  $\lambda \approx 1,25 \text{ см}$  и обусловлена уже полосой  $\text{NH}_2$  (кривая 7 в области  $\lambda < 2 \text{ см}$  практически совпадает с кривой 6).



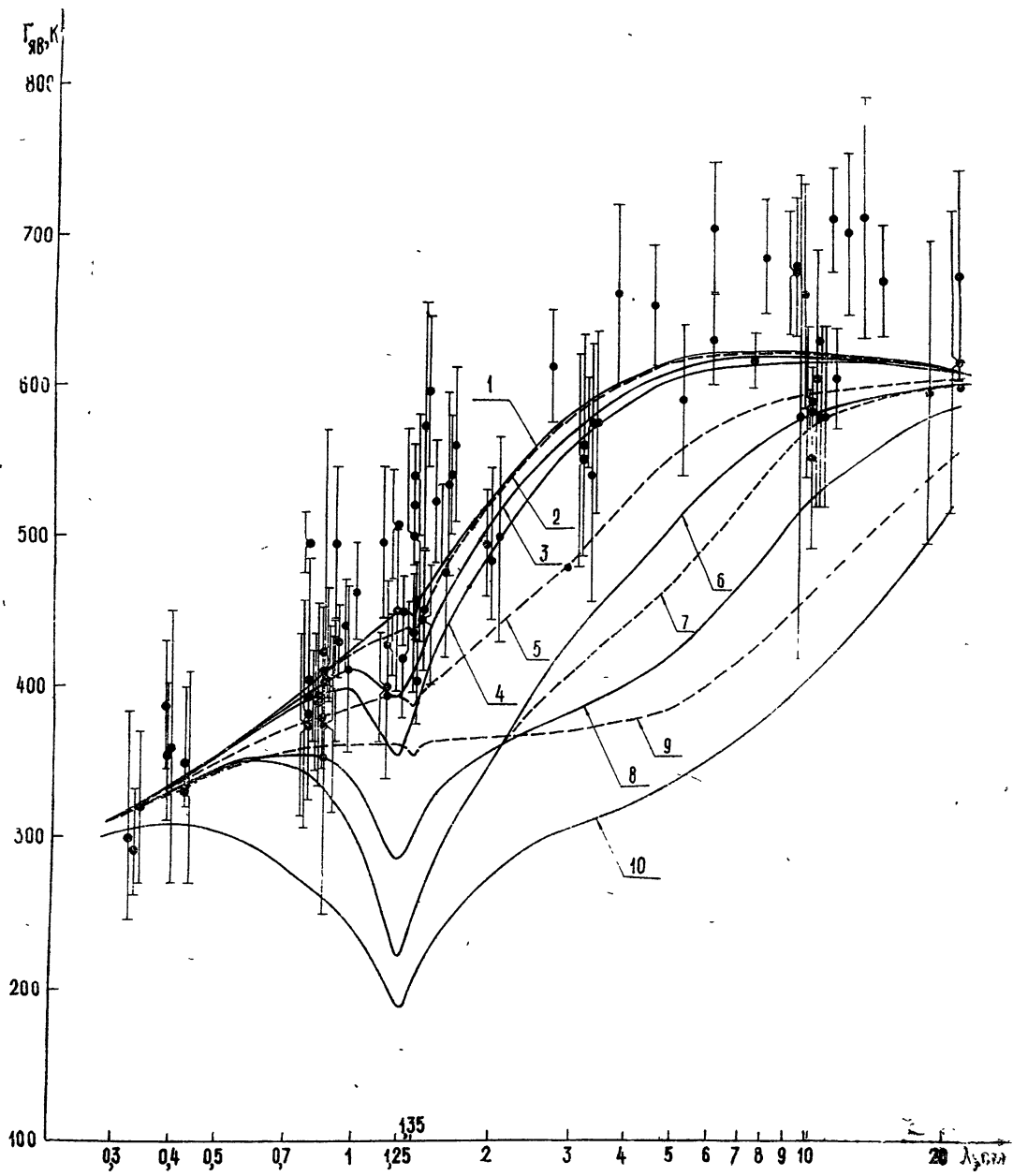


Рис. 1.

Таблица 2

## Результаты радиоастрономических измерений спектра радиозлучения Венеры

№	$\lambda$ , см	$T_{\text{яв}}$ , К	Литература	№	$\lambda$ , см	$T_{\text{яв}}$ , К	Литература	№	$\lambda$ , см	$T_{\text{яв}}$ , К	Литература
1	0,32	300 ± 54	[18]	27	1,16	495 ± 50	[20]	57	3,15	550 ± 70	[50]
2	0,33	292 ± 30	[19]	28	1,18	395 ± 75	[36, 37]	58	3,3	542 ± 85	[61]
3	0,34	320 ± 50	[20]	29	1,18	428 ± 20	[40]	59	3,3	575 ± 30	[52]
4	0,387	388 ± 42	[21]	30	1,18	400 ± 36	[28]	60	3,37	575 ± 60	[53]
5	0,39	354 ± 40	[22]	31	1,24	451 ± 53	[41]	61	3,75	660 ± 60	[54]
6	0,4	360 ± 90	[23]	32	1,25	507 ± 36	[36, 37]	62	4,5	653 ± 40	[2]
7	0,43	350 ± 30	[24]	33	1,28	450 ± 23	[40]	63	5,2	590 ± 50	[45]
8	0,43	330 ± 60	[18]	34	1,28	418 ± 38	[42]	64	6,0	706 ± 45	[55]
9	0,8	405 ± 80	[25]	35	1,35	520 ± 40	[43]	65	7,5	630 ± 30	[45]
10	0,8	382 ± 75	[26]	36	1,35	435	[42]	66	7,5	617 ± 18	[45]
11	0,8	394 ± 30	[26]	37	1,35	540 ± 40	[29]	67	7,89	686 ± 38	[45]
12	0,8	405 ± 20	[27]	38	1,35	500 ± 70	[43]	68	9,26	679 ± 46	[45]
13	0,8	376 ± 60	[28]	39	1,35	436 ± 39	[43]	69	9,26	675 ± 41	[45]
14	0,835	395 ± 60	[29]	40	1,35	457 ± 26	[44]	70	9,4	580 ± 160	[56]
15	0,835	390 ± 45	[30]	41	1,37	404 ± 28	[36, 37]	71	9,6	660 ± 75	[56]
16	0,85	380 ± 34	[30]	42	1,40	444 ± 36	[41]	72	10,0	553 ± 60	[2]
17	0,86	410 ± 160	[31]	43	1,42	572 ± 82	[37]	73	10,0	590 ± 50	[57]
18	0,86	410 ± 20	[32]	44	1,43	595 ± 50	[40]	74	10,0	584 ± 14	[57]
19	0,86	353	[33]	45	1,45	522 ± 40	[28]	75	10,2	605 ± 85	[58]
20	0,86	375 ± 58	[18]	46	1,5	477 ± 57	[41]	76	10,3	630	[2]
21	0,86	423 ± 42	[34]	47	1,58	534 ± 60	[40]	77	10,6	580 ± 60	[59]
22	0,86	404 ± 40	[35]	48	1,6	477 ± 57	[40]	78	10,7	580 ± 60	[60]
23	0,925	430 ± 24	[36, 37]	49	1,62	540 ± 39	[20]	79	11,1	710 ± 35	[61]
24	0,955	441 ± 30	[38]	50	1,65	560 ± 51	[41]	80	11,3	605 ± 33	[62]
25	0,97	412 ± 55	[39]	51	1,94	495 ± 35	[45]	81	12,0	701 ± 54	[45]
26	1,01	463 ± 32	[36, 37]	52	2,0	485 ± 60	[46]	82	13,0	712 ± 80	[63]
				53	2,07	500 ± 70	[47]	83	14,3	670 ± 37	[45]
				54	2,7	612 ± 37	[48]	84	18,0	596 ± 100	[60]
				55	3,0	475	[49]	85	21,0	600	[64]
				56	3,15	560 ± 73	[50]	86	21,0	674 ± 70	[63]
								87	21,0	616 ± 100	[60]

концентрации  $f_{\text{NH}_3} \sim 0,0005\%$  в области резонанса  $\Delta T_{\text{ЯВ}}$  составляет  $\sim 50 - 60 \text{ К}$ , но вдали от этого резонанса  $\Delta T_{\text{ЯВ}} \leq 10 \div 15 \text{ К}$ . При значении  $f_{\text{NH}_3} = \text{const} = 0,001\%$  (кривая 4) ухудшается согласие расчетного спектра планеты с радиоастрономическими измерениями в области инверсионного резонанса  $\text{NH}_3$ , а кривая 6, соответствующая модели с  $f_{\text{NH}_3} = 0,01\%$ , обнаруживает уже существенное расхождение между расчетами и измерениями в более широкой области  $\lambda \approx 0,8 \div 8 \text{ см}$ . В еще большей степени это расхождение проявляется для модели с  $f_{\text{NH}_3} = 0,1\%$  (см. кривую 10).

При содержании аммиака с концентрацией  $f_{\text{NH}_3} = 0,01\%$  в слое  $P = 2 \div 8 \text{ атм}$  (кривая 5) наибольшие изменения яркостной температуры ( $\Delta T_{\text{ЯВ}} \sim 100 \text{ К}$ ) имеют место в диапазоне  $\lambda = 2 \div 4 \text{ см}$  (кр. кривые 1 и 5), но резонанс  $\text{NH}_3$  еще не разрешается. Кривая 9, соответствующая содержанию аммиака в слое  $P = 2 \div 8 \text{ атм}$  с концентрацией  $0,1\%$ , не согласуется с радиоастрономическими данными в диапазоне  $\lambda \gtrsim 1 \text{ см}$ . Модели Венеры с возрастанием концентрации аммиака по высоте в верхних слоях атмосферы ( $P < 2 \text{ атм}$ ) при постоянном его относительном содержании в слое  $P = 2 \div 8 \text{ атм}$  или в более глубоких слоях, естественно, не могут улучшить согласия расчетного радиоспектра с результатами радиоастрономических измерений.

Из проведенного рассмотрения можно сделать вывод, что модели атмосферы Венеры с постоянным относительным содержанием аммиака по высоте (по крайней мере, при  $h \leq 100 \text{ км}$ ) не противоречат совокупности радиоастрономических наблюдений планеты [2, 18-64] при значениях  $f_{\text{NH}_3} \leq 0,0005\%$  ( $f_{\text{NH}_3} \leq 5 \cdot 10^{-6}$ ). Это значение находится в хорошем согласии с величиной  $f_{\text{NH}_3} \leq 8 \cdot 10^{-6}$  (при  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 0,1\%$ ), определенной из радиолокационных измерений в [5]. Из сравнения экспериментальных данных с расчетными значениями яркостной температуры также следует, что предпочтительное содержание  $\text{NH}_3$  в слое  $P = 2 \div 8 \text{ атм}$  (при значении  $f_{\text{NH}_3} = 0$  вне этого слоя; модели 5, 9) находится ближе к нижнему ( $\leq 0,01\%$ ), чем к верхнему пределу измерений, выполненных АМС «Венера-8». Однако в последнем случае остается открытым вопрос о причинах возможного содержания аммиака лишь в некотором слое. В моделях атмосферы Венеры с содержанием  $f_{\text{H}_2\text{O}} > 0,1\%$  и при наличии водных облаков полученные оценки  $f_{\text{NH}_3}$  могут быть понижены.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Мороз, Физика планет, изд. Наука, М., 1967.
2. А. Д. Кузьмин, Радиофизические исследования Венеры, ВИНТИ АН СССР М., 1967.
3. Yu. M. Timofeev, M. A. Gruzdeva, O. M. Pokrovsky, Radiation Transfer in the Atmosphere, изд. ЛГУ, 1972, стр. 108.
4. Ю. А. Сурков, Б. М. Андрейчиков, О. М. Калинин, Докл. АН СССР, 213, № 2, 296 (1973).
5. Т. В. Смирнова, А. Д. Кузьмин, Астрон. ж., 51, № 3, 607 (1974)
6. J. V. Evans, R. P. Ingalls, J. Atm. Sci., 25, 555 (1968).
7. М. Я. Маров, V. S. Avduevsky, N. F. Borodin, A. P. Ekonomov, V. V. Kerzhanovich, V. P. Lysov, B. Ye. Moshkin, M. K. Rozhdestvensky, O. L. Ryabov, Icarus, 20, № 4, 407 (1973).
8. М. Я. Маров, О. Л. Рябов, Модель атмосферы Венеры, Препринт № 39, ИИМ АН СССР, 1972.
9. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, Астрон. ж., 48, № 1, 146 (1971).
10. Л. Т. Матвеев, Основы общей метеорологии, Физика атмосферы, Гидрометеоздат, Л., 1965.
11. А. М. Обухов, Г. С. Голицын, Космические исследования, 6, № 5, 759 (1968).
12. Ю. А. Сурков, Б. М. Андрейчиков, О. М. Калинин, И. М. Грецишева, сб. Очерки современной геохимии и аналитической химии, изд. Наука, М., 1972, стр. 17.

13. W. Ho, I. A. Kaufman, P. Thaddeus, J. Geophys. Res., 71, № 21, 5091 (1966).
14. А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, Астрон. вестник, 6, № 1, 13 (1972).
15. А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 12, 1755 (1974).
16. А. Д. Кузьмин, Т. В. Смирнова, Астрон. вестник, 7, № 3, 139 (1973).
17. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
18. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Nature, 204, № 4965, 1242 (1964).
19. E. E. Epstein, Astron. J., 70, № 9, 721 (1965).
20. E. E. Epstein, Astron. J., 71, № 3, 161 (1966).
21. В. Н. Воронов, А. Г. Кисляков, А. В. Троицкий, Астрон. вестник, 8, № 1, 17 (1974).
22. И. И. Зинченко, А. Г. Кисляков, В. Н. Воронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 4, 501 (1975).
23. А. Г. Кисляков, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 39, № 3, 410 (1962).
24. C. R. Grant, H. H. Corbett, J. E. Gibson, Astrophys. J., 137, № 2, 620 (1963).
25. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 37, № 2, 297 (1960); 39, № 4, 660 (1962).
26. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутуза, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 5, 1054 (1963).
27. В. А. Ефанов, А. Г. Кисляков, И. Г. Моисеев, А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 219 (1970).
28. В. А. Ефанов, А. Г. Кисляков, И. Г. Моисеев, А. И. Наумов, Астрон. ж., 46, № 1, 147 (1969).
28. D. D. Thornton, W. J. Welch, Astron. J., 69, № 1, 71 (1964); 70, № 2, 149 (1965).
30. V. L. Lynn, M. L. Meeks, M. D. Sohighian, Astron. J., 69, № 1, 65 (1964).
31. J. E. Gibson, R. J. McEwan, Paris Symposium on Radio Astronomy, 1959.
32. J. E. Gibson, Astrophys. J., 137, № 2, 611 (1963).
33. J. Copeland, W. C. Tyler, Astrophys. J., 139, № 1, 409 (1964).
34. P. M. Kalaghan, K. N. Wulfsberg, Astrophys. J., 154, № 2, 771 (1968).
35. L. D. Braun, J. L. Yen, Astron. J., 73, № 10, 168 (1968).
36. A. H. Barrett, Rad. Sci., 69-D, № 12, 1565 (1965).
37. D. H. Staelin, A. H. Barrett, Astron. J., 70, № 5, 330 (1965).
38. R. W. Hobbs, S. L. Knapp, Icarus, 14, № 2, 204 (1971).
39. D. H. Staelin, A. H. Barrett, B. R. Kusse, Astron. J., 69, № 1, 69 (1964).
40. S. E. Law, D. H. Staelin, Astrophys. J., 154, № 3, 1077 (1968).
41. D. E. Gones, D. M. Wrathall, Publ. Astron. Soc. Pacif., 84, № 499, 435 (1972).
42. J. E. Gibson, H. H. Corbett, Astron. J., 68, № 2, 74 (1963); Radio Sci., 69-D, № 12, 1577 (1965).
43. P. H. Griffith, D. D. Thornton, W. J. Welch, Icarus, 6, № 2, 175 (1967).
44. В. А. Ефанов, В. И. Загатын, А. Г. Кисляков, И. Г. Моисеев, Н. С. Нестеров, В. Б. Штейншлегер, Астрон. вестник (в печати).
45. W. W. Warnock, J. R. Dickel, Icarus, 17, № 3, 682 (1973).
46. D. Morrison, Science, 163, № 3869, 815 (1969).
47. T. P. McCullough, J. W. Boland, Astron. J., 69, № 1, 68 (1964).
48. T. P. McCullough, Icarus, 16, № 2, 310 (1972).
49. V. Letfus, Nature, 211, № 5045, 176 (1966).
50. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, Astrophys. J., 127, № 1, 1 (1958); La physique des planetes, Univ. Liege, 1963.
51. П. В. Бибинова, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, И. В. Шавловский, Астрон. ж., 39, № 6, 1083 (1962).
52. L. E. Alson, J. A. Giordmaine, C. H. Mayer, C. H. Townes, Astron. J., 63, № 8, 301 (1958).
53. А. Д. Кузьмин, У. Дент, Астрон. ж., 43, № 3, 692 (1966).
54. J. R. Dickel, W. J. Medd, Astron. J., 73, № 5, 91 (1968).
55. M. P. Hughes, Planet. Space Sci., 14, № 10, 1017 (1966).
56. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 38, № 6, 1115 (1961).
57. F. D. Drake, Publ. Nation. Radio Astron. Obs., 1, № 11, 165 (1962); Astron. J., 69, № 1, 62 (1964).
58. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, Astron. J., 65, № 6, 349 (1963).
59. А. Д. Кузьмин, Б. Дж. Кларк, Астрон. ж., 42, № 3, 595 (1965).
60. B. Clark, C. L. Spencer, Astron. J., 69, № 1, 59 (1964).

61. K. S. Stankevich, Austral. J. Phys., 23, № 1, 111 (1970).
62. K. I. Kellerman, Radio Sci., 69-D, № 12, 1574 (1965).
63. A. Boischot, M. Ginat, I. Kazes, Ann. Astrophys., 26, № 4, 385 (1963).
64. A. E. Lilley, Astron. J., 66, № 7, 290 (1961).

Научно-исследовательский радиотехнический институт

Поступила в редакцию  
12 июня 1974 г.

## ESTIMATION OF POSSIBLE AMMONIA CONTENT IN THE VENUS ATMOSPHERE

*A. P. Naumov, M. B. Zinicheva, N. N. Muratov*

The spectra of the disc-averaged brightness temperature of thermal radio emission of Venus at  $\lambda \approx 0,3 - 20$  cm are calculated for some models of the atmosphere which differ in the gaseous ammonia content. Estimations of possible  $\text{NH}_3$  content in the Venus atmosphere are obtained from the comparison of the results of calculations with radio astronomical measurements. Estimations are compared with the results of direct investigations of AIS "Venus-8" and with radar measurements.

---

УДК 523.164.4

**ОБ УГЛОВЫХ ВАРИАЦИЯХ СПЕКТРА КОСМИЧЕСКОГО РАДИОФОНА В МЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН ВДОЛЬ СКЛОНЕНИЯ  $\delta = 15^\circ 30'$** 

*П. П. Беляев, Г. Г. Гетманцев, В. А. Зиничев, А. В. Рахлин, А. Ф. Тарасов, Ю. В. Токарев*

Приводятся результаты измерений эффективной температуры распределенного космического радиоизлучения на частотах 79 и 115 МГц вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$ , выполненные с помощью параболического зеркала радиотелескопа РТ УКВД с размерами  $30 \times 50$  м<sup>2</sup>. На обеих рабочих частотах применялись идентичные, геометрически подобные облучатели. Произведен учет радиоизлучения, попадающего в боковые лепестки диаграммы направленности антенны: вычислен температурный спектральный индекс тотального космического радиоизлучения в главном луче антенны  $\beta_{\text{гл}}$ . Отмечено уменьшение  $\beta_{\text{гл}}$  от значения 2,55 в холодной области небосвода с прямым восхождением  $\alpha \approx 12^{\text{h}}$  до 2,42 в области Северного полярного шпура ( $\alpha \approx 16^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ ) и до 2,35 в плоскости Галактики ( $\alpha \approx 19^{\text{h}}$ ).

В настоящее время частотный спектр космического радиоизлучения, усредненного по большим участкам небосвода с площадью в несколько стерадиан, изучен достаточно хорошо [1–6]. Все большее внимание уделяется детальному исследованию угловых вариаций радиоспектра по небосводу и, в частности, исследованию спектра различных особенностей распределенного радиоизлучения — шпуров, выступов, областей поляризованного излучения и т. д. [7–10]. Чтобы получить необходимое для этого угловое разрешение порядка нескольких градусов в метровом диапазоне волн, наиболее удобном для излучения нетепловой составляющей радиоизлучения Галактики, нужны большие антенные системы. Сооружение специально для спектральных измерений двух или более антенн, геометрически подобных на каждой из рабочих частот, сопряжено с известными трудностями. Поэтому на практике частотная зависимость эффективных температур космического радиопфона нередко изучается с помощью одного радиотелескопа [9, 11]. Основная сложность интерпретации полученных при этом результатов связана с учетом неидентичности антенны по угловому разрешению и с оценкой интенсивности радиоизлучения, попадающего в боковые лепестки антенны, на разных частотах. Вместе с тем использование единой методики измерений и обработки экспериментальных данных позволяет получить более низкую погрешность величины угловых вариаций спектрального индекса, чем, например, при сравнении радиозофот, полученных разными авторами. В настоящей работе приводятся предварительные результаты измерений угловых вариаций спектра распределенного космического радиоизлучения, проводившихся в НИРФИ в 1972—1973 гг. с помощью радиотелескопа РТ УКВД на частотах 79 и 115 МГц.

**1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ**

Измерения спектра распределенного космического радиоизлучения вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$  проводились в январе—марте 1973 г. вбли-

зи г. Горького на радиотелескопе РТ УКВД  $30 \times 50 \text{ м}^2$ . Зеркало радиотелескопа могло свободно вращаться в горизонтальной плоскости. На обеих рабочих частотах 79 и 115 МГц использовались сменные идентичные, геометрически подобные облучатели, состоящие из двух синфазно запитываемых полуволновых горизонтальных шлейф-вибраторов. Интенсивность облучения зеркала спадала к краям на 10 дБ. Электрическая ось антенны была наклонена под углом  $16^\circ 30'$  к горизонту на частоте 79 МГц и  $19^\circ 30'$  на частоте 115 МГц.

В пределах полосы пропускания радиометров по высокой частоте ( $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-2}$ ) КСВ антенны и калибровочного шумового генератора был не хуже 1,05 на обеих рабочих частотах. Для измерения интенсивностей радиоизлучения использовались радиометры модуляционного типа. Шумовой генератор, использовавшийся для калибровки радиометров в процессе измерений, был градуирован по тепловому эталону [5]. Измерения проводились с постоянной времени порядка 1 с. Дополнительное усреднение записей, приводившее к фактическому росту постоянной времени, производилось при обработке записей.

Методика измерений заключалась в непрерывной записи уровней космического радиоизлучения вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$  при фиксированном положении антенны. Каждая область небосвода из-за суточного вращения Земли дважды пересекала высоту главного луча антенны и могла наблюдаться при восточной и западной ориентации антенны. В отсутствие помех суточная повторяемость записей была не хуже  $\pm 2\%$  на обеих рабочих частотах. Для уменьшения ошибок измерений было получено не менее 4—5 хороших записей уровней космического радиодинамики во всем интервале часовых углов  $\alpha = 00^{\text{h}} \div 24^{\text{h}}$  склонения  $\delta = 15^\circ 30'$  для обеих зеркальных (восточной и западной) ориентаций антенны. Кроме основной программы наблюдений вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$  были получены также изофорты антенной температуры на частоте 115 МГц в области  $\delta = 5^\circ \div 25^\circ 30'$ .

## 2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ ИНДЕКС КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Как известно, антенная температура  $T_{\text{в}}$  зависит от распределения яркостных температур во всем окружающем антенну пространстве. Для спектральных исследований космического радиодинамики наибольший интерес представляет интенсивность излучения, попадающего в главный лепесток диаграммы направленности антенны. Чтобы выделить это излучение из общего фона шумов на выходе антенны, необходимо оценить вклад в  $T_{\text{в}}$  излучения, усредненного по боковым лепесткам антенны.

Пусть  $(1 - k_{\text{в,гл}})$  есть коэффициент рассеяния антенны по главному лучу, а  $k_{\text{в,в}}$  — интегральный коэффициент рассеяния по боковым лепесткам в верхнем полупространстве с учетом переотражения радиоволн от поверхности Земли. Тогда в отсутствие потерь в антенно-фидерном тракте антенную температуру можно представить в виде

$$T_{\text{в}} = (1 - k_{\text{в,гл}}) T_{\text{в,гл}} + k_{\text{в,в}} T_{\text{в,в}} + k_{\text{в,н}} T_0, \quad (1)$$

где  $T_{\text{в,гл}}$  и  $T_{\text{в,в}}$  — яркостные температуры небосвода, усредненные соответственно по главному лучу и верхним боковым лепесткам диаграммы направленности антенны,  $T_0$  — температура поверхности Земли,  $k_{\text{в,н}} = k_{\text{в,гл}} - k_{\text{в,в}}$  — доля излучения, поглощенного в Земле, от общего излучения антенны.

В настоящей работе наблюдения радиодинамики проводились с неподвижной антенной. При этом фигурирующие в соотношении (1) коэффи-

коэффициенты рассеяния антенны  $k_{\nu_B}$  и  $k_{\nu_H}$  являются постоянными величинами. Без больших погрешностей можно считать также, что  $T_0 \approx \approx 260 \text{ K} = \text{const}$ . Таким образом, для нахождения  $T_{\nu_{ГЛ}}$  по измеренным антенным температурам  $T_{\nu_A}$  в нашем случае нужно знать коэффициенты рассеяния антенны  $1 - k_{\nu_{ГЛ}}$  и  $k_{\nu_B}$ , а также фоновую температуру  $T_{\nu_B}$  при фиксированном положении антенны.

Измерения диаграммы направленности антенны производились с помощью передатчика, установленного на вертолете, и были дополнены наблюдениями Солнца и дискретных источников Дева-А, Лебедь-А и Телец-А. При оценке эффективной площади антенны использовались значения потоков радиоисточников из каталога [12], увеличенные на 15% в соответствии с [13].

На обеих рабочих частотах главный луч диаграммы направленности имел эллиптическое сечение и хорошо описывался гауссовой кривой вплоть до уровня 18 дБ. Ширина луча по двум ортогональным направлениям (по азимуту и углу места) по уровню половинной мощности равнялась  $5,4 \times 9^\circ$  на частоте 79 МГц и  $3,8 \times 6^\circ,3$  на частоте 115 МГц. Эффективная площадь антенны  $\sigma_{\text{эфф}} = 570 \pm 20 \text{ м}^2$  и в пределах ошибок измерений была одинакова на обеих рабочих частотах. В большей части верхнего полупространства боковые лепестки диаграммы направленности были распределены практически изотропно. Коэффициенты рассеяния антенны по области главного луча  $1 - k_{\nu_{ГЛ}}$  и по верхним боковым лепесткам  $k_{\nu_B}$  равнялись соответственно  $0,69 \pm 0,03$  и  $0,22 \pm 0,03$ . При расчетах  $1 - k_{\nu_{ГЛ}}$  и  $k_{\nu_B}$  область главного луча не сколько условно ограничивалась эллипсом с размерами полуосей  $12^\circ$  по азимуту и  $20^\circ$  по углу места. Сколько-нибудь заметного различия коэффициентов рассеяния антенны  $1 - k_{\nu_{ГЛ}}$  и  $k_{\nu_B}$  на частотах 79 и 115 МГц, а также зависимости  $k_{\nu_B}$  от ориентации антенны не обнаружено.

В метровом диапазоне волн излучение атмосферы пренебрежимо мало и фоновая температура  $T_{\nu_B}$  целиком определяется космическим радиоизлучением. Для оценок  $T_{\nu_B}$  были использованы радиоизофоты на частоте 85 МГц [14]. Приведенные в этой работе значения яркостных температур усреднялись по небесной полусфере, отвечающей широте места наблюдения  $\varphi = 56^\circ$  для каждого значения звездного времени  $s$ . Пересчет полученных значений средней яркостной температуры небосвода  $T_{85 \text{ в}}(s)$  на частоту 79 МГц производился умножением  $T_{85 \text{ в}}(s)$  на коэффициент 1,1, отвечающий среднему отношению измеренных антенных температур  $T_{79 \text{ а}}$  и эффективных температур по радиоизофотам вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$ . Для вычисления фоновой температуры  $T_{115 \text{ в}}(s)$  по известной температуре  $T_{85 \text{ в}}(s)$  необходимо знать спектральный индекс интегрального излучения небосвода  $\beta_{\nu}(s)$ . Как показали спектральные измерения [1, 3-5], выполненные с простыми антенными системами, на частотах  $\nu \approx 100 \text{ МГц}$  спектральный индекс космического радифона, усредненного по областям  $\sim 1 \div 2 \text{ стерад}$ , слабо зависит от галактических координат, причем его значения заключены в пределах от  $2,6 \pm 0,1$  для холодных областей небосвода до  $2,5 \pm 0,1$  в участках, примыкающих к плоскости Галактики. Поэтому при пересчете фоновой температуры на частоту 115 МГц по формуле  $T_{115 \text{ в}} = (115/79)^{-\beta_{\nu}} T_{79 \text{ в}}$  можно без больших погрешностей принять  $\beta_{\nu}(s) = \text{const}(s) = 2,5$ .

Температурный спектральный индекс космического радиоизлучения, усредненного по главному лучу антенны,  $\beta_{\nu_{ГЛ}}$  для масштабированных подобных антенн вводится обычно с помощью соотношения

$$T_{\nu_{ГЛ}}/T_{\nu_{ГЛ}} = (\nu_1/\nu_2)^{\beta_{\nu_{ГЛ}}}, \quad (2)$$



где  $T_{\nu, \text{гл}}$  и  $T_{\nu, \text{агл}}$  — эффективные температуры в главном луче антенны на частотах  $\nu_1$  и  $\nu_2$ .

В настоящих измерениях, однако, угловое разрешение антенны на частотах 79 и 115 МГц было различным. Использование соотношения (2) в этом случае может, вообще говоря, привести к зависимости  $\beta_{\text{гл}}$  от температурных градиентов космического радиофона. Необходимо поэтому предварительно обработать данные наблюдений с тем, чтобы ликвидировать указанное различие в угловом разрешении антенны.

С этой целью произведено дополнительное усреднение по небосводу значений антенной температуры  $T_{115 \text{ а}}$  вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$  с помощью радиоизотоп, полученных в настоящем эксперименте на частоте 115 МГц в области  $\delta = 5 \div 25^\circ$ . Свертка изотоп производилась с гауссовой диаграммой направленности, с шириной на уровне половинной мощности по азимуту и углу места  $\theta_{\text{а}} \times \theta_{\text{в}} = (\theta_{79 \text{ а}}^2 - \theta_{115 \text{ а}}^2)^{1/2} \times (\theta_{79 \text{ в}}^2 - \theta_{115 \text{ в}}^2)^{1/2}$ , где  $\theta_{79 \text{ а, в}}$  и  $\theta_{115 \text{ а, в}}$  — соответствующие размеры главного луча антенны на частотах 79 и 115 МГц. Можно показать, учитывая гауссову форму и малые угловые размеры основного лепестка антенны на обеих рабочих частотах, что полученная в результате такого усреднения эффективная температура  $\tilde{T}_{115 \text{ а}}$  эквивалентна антенной температуре, измеренной с угловым разрешением  $\theta_{79 \text{ а}} \times \theta_{79 \text{ в}}$ .

Внося соответствующие коррективы в определение температурного спектрального индекса в главном луче антенны  $\beta_{\text{гл}}$ , имеем

$$\beta_{\text{гл}} = \lg (T_{79 \text{ гл}} / \tilde{T}_{115 \text{ гл}}) \lg^{-1} (115/79), \quad (3)$$

где  $\tilde{T}_{115 \text{ гл}}$  — средневзвешенная по диаграмме в области главного луча антенны яркостная температура на частоте 115 МГц, связанная с  $\tilde{T}_{115 \text{ а}}$  соотношением, аналогичным соотношению (1). С учетом сказанного значения  $\beta_{\text{гл}}$  отвечают угловому разрешению  $\theta_{79 \text{ а}} \times \theta_{79 \text{ в}} = 5^\circ, 4 \times 9$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫВОДЫ

Значения антенных температур на частотах 79 и 115 МГц были получены усреднением 4—5 наиболее качественных записей уровня космического излучения, отвечающих разным суткам. Результирующая случайная ошибка  $T_{79 \text{ а}}$  и  $T_{115 \text{ а}}$  равна  $\pm 1\%$  для большинства прямых восхождений. Исключение составляет область  $\alpha = 2 \div 5^{\text{h}}$ , где на частоте 79 МГц случайная ошибка  $T_{79 \text{ а}} = \pm 2\%$ . Систематическая ошибка отношения измеренных антенных температур на частотах 79 и 115 МГц не превышает  $\pm 3\%$ .

Температурный спектральный индекс космического радиоизлучения в главном луче антенны  $\beta_{\text{гл}}$  вычислялся с помощью (1), (3) для численных значений  $1 - k_{79 \text{ гл}} = 1 - k_{115 \text{ гл}} = 0,69$ ,  $k_{79 \text{ в}} = k_{115 \text{ в}} = 0,22$  и  $k_{79 \text{ н}} T_{79 \text{ н}} = k_{115 \text{ н}} T_{115 \text{ н}} = 25 \text{ К}$ .

Результаты вычислений  $\beta_{\text{гл}}$ , обозначенные кружками для восточной и крестиками для западной ориентации антенны, представлены на рис. 1 (соответственно сплошные и пунктирные кривые) вместе со значениями эффективной температуры в главном луче антенны на частоте 79 МГц  $T_{79 \text{ гл}}$  (штрих-пунктирная кривая).

Погрешность  $\beta_{\text{гл}}$  зависит от точности измерения антенных температур, коэффициентов рассеяния антенны и оценок фоновых температур, усредненных по боковым лепесткам, на обеих рабочих частотах. При этом систематическая ошибка отношения  $T_{79 \text{ а}} / T_{115 \text{ а}}$  и различие коэффициентов рассеяния по главному лучу антенны  $1 - k_{79 \text{ гл}}$  и  $1 - k_{115 \text{ а}}$  приводят к ошибке  $\beta_{\text{гл}}$ , одинаковой для всех значений прямого восхожде-

ния  $\alpha$ , т. е. к сдвигу всей кривой  $\beta_{г.л.}$  на рис. 1 по оси ординат. Соответствующая ошибка выбора нулевого уровня отсчета равна  $\pm 0,15$ .

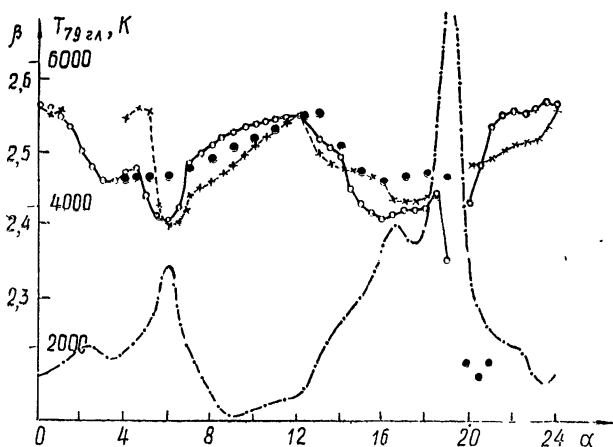


Рис. 1.

Все другие источники ошибок приводят к деформации кривой  $\beta_{г.л.}(\alpha)$ , т. е. к погрешности угловых вариаций вдоль выбранного склонения  $\delta$ . Основным источником паразитных угловых вариаций  $\beta_{г.л.}$  является различие (в пределах ошибок измерений) коэффициентов рассеяния антенны по боковым лепесткам в верхнем полупространстве  $k_{79 \text{ в}}$  и  $k_{115 \text{ в}}$ . Для оценки влияния этого эффекта на вариации  $\beta_{г.л.}$  целесообразно воспользоваться экспериментальными данными для зеркальных (восточного и западного) положений антенны. Как нетрудно показать, поправки  $\beta_{г.л.}$ , связанные с различием коэффициентов  $k_{79 \text{ в}}$  и  $k_{115 \text{ в}}$ , пропорциональны отношению  $T_{\text{в}}/T_{\text{а}}$ . При наблюдении заданной области Галактики на востоке и на западе ориентация боковых лепестков в пространстве и расположение на небосводе источников космического радиоизлучения существенно меняются. Соответственно меняются фоновые температуры  $T_{\text{в}}$  и отношения  $T_{\text{в}}/T_{\text{а}}$ , отвечающие одним и тем же значениям прямого восхождения  $\alpha$ . Вместе с тем, как видно из рис. 1, соответствующее различие значений  $\beta_{г.л.}$ , отвечающих восточной и западной ориентации антенны, невелико. Это свидетельствует о слабом влиянии паразитных эффектов, связанных с приемом космического радиоизлучения по боковым лепесткам антенны, на результаты спектральных измерений в настоящем эксперименте. С помощью формул (1), (3) можно показать, что ошибка при нахождении разности значений  $\beta_{г.л.}$  по сплошным или пунктирным кривым рис. 1 между двумя любыми направлениями главного луча из-за различия коэффициентов  $k_{79 \text{ в}}$  и  $k_{115 \text{ в}}$  не превышает  $\pm 0,03$ . Подчеркнем, что величина этой ошибки пропорциональна разности  $T_{\text{в}}/T_{\text{а}}$  в выбранных точках небосвода при фиксированном положении антенны и уменьшается для близких значений  $\alpha$ . Суммарная ошибка угловых вариаций  $\beta_{г.л.}$  вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$ , включая случайную ошибку отношения антенных температур  $T_{79 \text{ а}}/T_{115 \text{ а}}$  и неточность оценки вклада радиоизлучения Земли  $k_{\text{н}} T_0$  в антенную температуру  $T_{\text{а}}$ , равна  $\pm 0,05$ .

В соответствии со сказанным выше, для каждого значения  $\alpha$  меньшей погрешностью обладает та из двух кривых спектрального индекса, приведенных на рис. 1, для которой меньше величина фоновой температуры  $T_{\text{а}}$ .

Как видно из рис. 1, температурный спектральный индекс космического радиоизлучения в главном луче антенны  $\beta_{\text{гл}}$  меняется вдоль склонения  $\delta = 15^\circ 30'$  в пределах от 2,35 до 2,55. В целом наблюдается тенденция уменьшения  $\beta_{\text{гл}}$  с ростом яркостной температуры небосвода. Характерно, однако, что локальный максимум  $\beta_{\text{гл}} \approx 2,56$  в области  $\alpha = 11 \div 12^{\text{h}}$  сдвинут относительно минимума  $T_{79 \text{ гл}}$  в области  $\alpha \approx 9^{\text{h}}$  (галактические координаты  $l^{\text{II}} \approx 214^\circ$ ,  $b^{\text{II}} \approx 37^\circ$ ). Вблизи точек пересечения главным лучом галактического экватора  $\alpha \approx 6^{\text{h}}$  ( $l^{\text{II}} \approx 194^\circ$ ) и  $\alpha \approx 19^{\text{h}}$  ( $l^{\text{II}} \approx 47^\circ$ ) спектральный индекс уменьшается до значений 2,4 и 2,35 соответственно. Хорошо прослеживается также уменьшение  $\beta_{\text{гл}}$  с ростом  $\alpha$  в области Северного полярного шпура ( $\alpha = 13 \div 17^{\text{h}}$ ), причем в максимуме шпура  $\alpha \approx 16^{\text{h}} 30^{\text{m}}$  ( $l^{\text{II}} \approx 32^\circ$ ,  $b^{\text{II}} \approx 24^\circ$ )  $\beta_{\text{гл}}$  достигает значения 2,42. Один из локальных максимумов спектрального индекса с координатами  $\alpha \approx 24^{\text{h}}$  ( $l^{\text{II}} \approx 107^\circ$ ,  $b^{\text{II}} \approx -48^\circ$ ) находится недалеко от центра известной особенности галактического радиоизлучения — Петли II.

Для сравнения на рис. 1 точками нанесены значения спектрального индекса космического радиоизлучения вдоль склонения  $\delta = 16^\circ$  на частотах 17,5 и 81,5 МГц по данным [7], полученным при помощи идентичных антенн с угловым разрешением  $12 \times 17^\circ$ . В большей части исследованной в [7] области прямых восхождений  $\alpha$  наблюдается качественное совпадение хода угловых вариаций спектрального индекса с результатами настоящего эксперимента. Численные различия результатов в областях  $\alpha = 05 \div 07^{\text{h}}$  и  $\alpha = 14 \div 19^{\text{h}}$  можно объяснить различием углового разрешения использовавшихся антенн. Более низкое значение спектрального индекса в интервале  $\alpha = 20 \div 21^{\text{h}}$  по данным [7] связано, по-видимому, с поглощением радиоволн в межзвездном ионизированном газе вблизи плоскости Галактики.

В заключение авторы приносят благодарность Р. П. Курочкину и В. А. Рыжову, принявшим участие в наблюдениях, а также Е. Д. Пятовой за помощь в обработке результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. J. Turtle, J. F. Pugh, S. Kenderdine, I. I. K. Pauliny-Toth, M. N. R. A. S., 124, 297 (1962).
2. В. Н. Andrew, M. N. R. A. S., 132, 79 (1966).
3. C. R. Purton, M. N. R. A. S., 133, 463 (1966).
4. K. W. Yates, R. Wielebinski, Austral. J. Phys., 19, 389 (1966).
5. Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. А. Сазонов, А. Ф. Тарасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 2, 191 (1968).
6. В. Д. Крымкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 199 (1971).
7. A. H. Bridle, M. N. R. A. S., 136, 219 (1967).
8. Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. С. Коробков, А. Ф. Тарасов, Астрон. ж., 45, 936 (1968).
9. R. Wielebinski, D. H. Smith, X. R. Cardenas, Austral. J. Phys., 21, 185 (1968).
10. E. M. Berkhuijen, Astron. Astrophys., 14, 359 (1971).
11. И. Н. Жук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 5, 754 (1973).
12. K. I. Kellerman, I. I. K. Pauliny-Toth, P. J. S. Williams, Astrophys. J., 157, 1 (1969).
13. К. С. Станкевич, В. П. Иванов, С. А. Пелюшенко, В. А. Торхов, А. Н. Иванникова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 5, 786 (1973).
14. K. W. Yates, Austral. J. Phys., 21, 167 (1968).

---

ANGULAR VARIATIONS OF COSMIC BACKGROUND SPECTRA IN METER  
WAVE RANGE ALONG DECLINATION  $\delta = 15^{\circ}30'$

*P. P. Belyaev, G. G. Getmantsev, V. A. Zinichev, A. V. Rakhlin,  
A. F. Tarasov, Yu. V. Tokarev*

The results of measurement of the effective temperature of the cosmic background radiation at 79 and 115 MHz along declination angle  $\delta = 15^{\circ}30'$  using a parabolic mirror of  $30 \times 50 \text{ m}^2$  RT UKWD radio telescope are presented. Identical, geometrically similar feeds are employed at both operating frequencies. The side lobe radiation is taken into account. The temperature spectral index of the total cosmic radio emission in the main lobe of the antenna  $\beta_m$  is calculated. A decrease in  $\beta_m$  is noted from 2.55 in the cold part of the sky at right ascension  $\alpha \approx 12^{\text{h}}$  to 2.42 in the region of the North auroral spur ( $\alpha \approx 16^{\text{h}}30^{\text{m}}$ ) and up to 2.35 in the Galaxy plane ( $\alpha \approx 19^{\text{h}}$ ).

---

УДК 550 383 : 523.165

## ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО СЛОЯ ПЛАЗМЫ

*И. М. Еремин, Е. И. Шкелев*

В гидродинамическом приближении рассматриваются потенциальные колебания изолированного плоскопараллельного слоя плазмы в условиях, имеющих место вблизи головной части границы магнитосферы Земли или нейтрального слоя ее «хвоста». В пренебрежении влиянием магнитного поля получено дисперсионное уравнение этих колебаний при произвольном соотношении длины волны и ширины слоя и проведен его анализ.

Исследованию электромагнитных колебаний в ограниченных плазменных образованиях и, в частности, плазменных слоях лабораторной плазмы посвящено большое количество работ. Подобного рода конфигурации нередко встречаются и в природе. К ним можно отнести, например, радиационные пояса Земли, области вблизи границы магнитосферы (магнитопаузы) и нейтрального слоя ее «хвоста».

Целью настоящей работы является исследование одного из возможных видов колебательного движения в плазменных слоях типа магнитопаузы или нейтрального слоя. Процессы, происходящие в них, в значительной мере, как известно, определяют возникновение и развитие возмущений геомагнитного поля. Однако в настоящее время отсутствует достаточно полное их рассмотрение из-за трудностей в решении самосогласованной задачи о детальной структуре магнитного поля в таких слоях и распределении плотности и скорости направленного движения частиц. Вместе с тем в ряде работ (см., например, [1-5]) рассматриваются некоторые частные задачи колебательного движения нейтрального слоя и магнитопаузы, полученные для той или иной идеализации.

Ниже рассматриваются потенциальные колебания изолированного нейтрального плоскопараллельного слоя двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов ( $\alpha = e$ ) и протонов ( $\alpha = i$ ), с однородным профилем скорости направленного движения  $V_{0\alpha}$  носителей тока и распределением их концентрации  $N_{\alpha}$ , близким к реальным в головной части магнитопаузы (при наличии южной компоненты межпланетного магнитного поля) и нейтральном слое «хвоста» магнитосферы. Полагая, что свойства среды меняются только в направлении оси  $x$  (рис. 1), принимаем согласно [6],

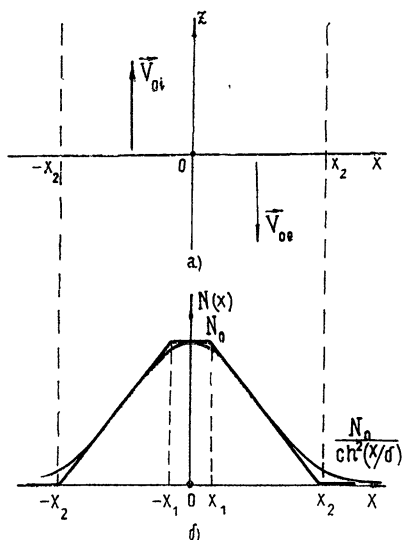


Рис. 1.

$$N_e = N_i = N(x) = N_0 / \text{ch}^2(x/\delta). \quad (1)$$

Исходными в гидродинамическом приближении будут уравнения движения частиц, непрерывности и уравнения Максвелла с самосогласованным электромагнитным полем. Ограничимся рассмотрением высокочастотных потенциальных колебаний, когда влиянием магнитного поля в первом приближении можно пренебречь. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные [7], получим для потенциала электрического поля  $\varphi$  ( $E = -\nabla\varphi$ ) в линейном приближении уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - k^2 \varepsilon \varphi = 0, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{\alpha}^2(x)}{(\omega - kV_{0\alpha})^2},$$

$$\omega_{\alpha}^2 = \frac{4\pi e^2 N_{\alpha}(x)}{m_{\alpha}}, \quad (3)$$

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2.$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний,  $e$  — заряд электрона,  $m_{\alpha}$  — масса частиц сорта  $\alpha$ ,  $k$  — волновой вектор, лежащий в плоскости  $yz$ .

При выбранной зависимости  $N(x)$  в виде (1) уравнение (2) можно свести к уравнению Гойна. Однако из его решения, получающегося в виде бесконечного ряда, не представляется возможным получить поддающееся исследованию дисперсионное уравнение, связывающее  $\omega$  и  $k$ . Поэтому с целью упрощения задачи примем кусочно-линейную аппроксимацию функции  $N(x)$ , как это показано на рис. 1 б.

В этом случае, если перейти к безразмерной переменной  $\zeta = x/\delta$ , зависимость  $N(\zeta)$  будет иметь следующий вид:

$$N(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < -\zeta_2 \\ \frac{2}{3} N_0 \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} (c + \zeta) + 1 \right], & -\zeta_2 < \zeta < -\zeta_1 \\ N_0, & -\zeta_1 < \zeta < \zeta_1 \\ \frac{2}{3} N_0 \left[ \frac{2}{\sqrt{3}} (c - \zeta) + 1 \right], & \zeta_1 < \zeta < \zeta_2 \\ 0, & \zeta > \zeta_2 \end{cases} \quad (4)$$

В (4)

$$\zeta_1 = c - \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \zeta_2 = c + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$c = \ln \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{и} \quad N_0 = N(0). \quad (5)$$

Тогда вместо уравнения (2) получим

$$\varphi'' + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \varphi' - k^2 \delta^2 \varphi = 0, \quad (6)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\zeta$ , а

$$\varepsilon = 1 - a \frac{N'(\zeta)}{N_0}. \quad (7)$$

В последнем равенстве

$$a = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{(\omega - kV_{0\alpha})^2}, \quad (8)$$

где  $\omega_{0\alpha}^2 = 4\pi e^2 N_0/m_{\alpha}$ .

Решение уравнения (6) в значительной степени зависит от того, какова величина  $a$ . Если  $a > 1$ , то в точке

$$\zeta = \pm \zeta_0 = \pm \left( \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4a} + c \right) \quad (9)$$

величина  $\varepsilon$  обращается в нуль и уравнение (6) имеет особенность. При  $a < 1$  этой особенности нет, однако, как показывает анализ, этот случай не реализуем, поскольку получающееся дисперсионное уравнение не имеет решения. Поэтому ниже будет рассмотрен только случай, когда  $a > 1$ .

Распределение потенциала  $\varphi(\zeta)$  получается следующим образом. Сначала находится решение (6) вне особых точек:  $|\zeta - \zeta_0| > \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — малая окрестность вблизи  $\zeta = \pm \zeta_0$ . Затем определяется  $\varphi(\zeta)$  вблизи  $\zeta = \pm \zeta_0$  ( $|\zeta - \zeta_0| < \varepsilon_0$ ) и вычисляется изменение потенциала  $\varphi$  и его производной  $\varphi'$  при переходе через каждую из особых точек. Последнее позволяет сшить решения уравнения (6) в областях, не содержащих точки  $\pm \zeta_0$ , и тем самым найти его общее решение.

Учитывая (4), решение (6) при  $\varepsilon \neq 0$  ( $\zeta \neq \pm \zeta_0$ ) можно записать в виде

$$\varphi = \begin{cases} C_1 e^{k\delta\zeta}, & \zeta < -\zeta_2 \\ C_2 I_0(-k\delta(\zeta + \zeta_0)) + C_3 K_0(-k\delta(\zeta + \zeta_0)), & -\zeta_2 < \zeta < -\zeta_0 \\ C_4 I_0(k\delta(\zeta + \zeta_0)) + C_5 K_0(k\delta(\zeta + \zeta_0)), & -\zeta_0 < \zeta < -\zeta_1 \\ C_6 e^{k\delta\zeta} + C_7 e^{-k\delta\zeta}, & -\zeta_1 < \zeta < \zeta_1 \\ C_8 I_0(-k\delta(\zeta - \zeta_0)) + C_9 K_0(-k\delta(\zeta - \zeta_0)), & \zeta_1 < \zeta < \zeta_0 \\ C_{10} I_0(k\delta(\zeta - \zeta_0)) + C_{11} K_0(k\delta(\zeta - \zeta_0)), & \zeta_0 < \zeta < \zeta_2 \\ C_{12} e^{-k\delta\zeta}, & \zeta_2 < \zeta \end{cases} \quad (10)$$

где  $I_n$  и  $K_n$  — соответственно модифицированные функции Бесселя и Ганкеля  $n$ -го порядка, а  $C_n$  — произвольные постоянные.

В окрестности точек, где  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в выражении (8)  $\omega$  следует заменить на  $\omega + i\nu$ , считая  $|\nu| \ll |\omega|$ , и в полученном после такой замены решении сделать предельный переход при  $\nu \rightarrow 0$ . Принимая во внимание малость  $|\nu|$  в сравнении с  $|\omega|$ ,  $\varepsilon(\omega + i\nu)$  можно разложить в ряд по степеням  $i\nu$ . Ограничимся двумя первыми членами в этом разложении.

Тогда  $\varepsilon(\omega + i\nu) \approx \varepsilon + i\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}$ . Вблизи  $\zeta = \zeta_0$  решением (6) будет

$$\varphi = C_{13} I_0(s) + C_{14} K_0(s),$$

$$s = k\delta \left( \zeta - \zeta_0 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{1 - \varepsilon - i\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}} \right).$$

из которого следует, что при  $\nu \rightarrow 0$   $\varphi(\zeta_0 - \varepsilon_0) = \varphi(\zeta_0 + \varepsilon_0)$ , а  $\varphi'(\varepsilon_0 + \zeta_0) = -\varphi'(\zeta_0 - \varepsilon_0)$ . Поскольку  $\varepsilon(\zeta_0 - \varepsilon_0) = -\varepsilon(\zeta_0 + \varepsilon_0)$ , то величина  $\varepsilon\varphi'$ , так же как и  $\varphi$ , будет иметь одинаковые значения по обе стороны от  $\zeta = \zeta_0$ .

Все сказанное здесь в равной степени можно отнести и к поведению потенциала вблизи  $\zeta = -\zeta_0$ . Следовательно, при переходе через особые точки  $\zeta = \pm \zeta_0$  функции  $\varphi$  и  $\varepsilon\varphi'$  непрерывны. К этому необходимо добавить граничные условия, заключающиеся в непрерывности  $\varphi$  и  $\varepsilon\varphi'$  на границах раздела областей  $\zeta = \pm \zeta_1, \pm \zeta_2$ . Совместно с решением (10) (из условия его нетривиальности) это позволяет получить дисперсионное уравнение рассматриваемых колебаний:

$$\frac{K_1(k\delta(\zeta_2 - \zeta_0)) - K_0(k\delta(\zeta_2 - \zeta_0))}{I_1(k\delta(\zeta_2 - \zeta_0)) + I_0(k\delta(\zeta_2 - \zeta_0))} = \frac{K_1(k\delta(\zeta_0 - \zeta_1)) - K_0(k\delta(\zeta_0 - \zeta_1)) \operatorname{th}(k\delta\zeta_1)}{I_1(k\delta(\zeta_0 - \zeta_1)) + I_0(k\delta(\zeta_0 - \zeta_1)) \operatorname{cth}(k\delta\zeta_1)} \quad (11)$$

Как естественный результат при этом получается, что потенциальные колебания симметричного относительно некоторой плоскости (в нашем случае это плоскость  $x = 0$ ) слоя плазмы можно разделить на две ветви. Для одной из них (назовем ее «симметричной») значение потенциала  $\varphi(\zeta)$  равно  $\varphi(-\zeta)$ . Для другой («антисимметричной») —  $\varphi(\zeta) = -\varphi(-\zeta)$ . Это отражено и в дисперсионном уравнении (11), в котором первой соответствуют множители  $\operatorname{th}(k\delta\zeta_1)$ , а второй — множители  $\operatorname{cth}(k\delta\zeta_1)$  в его правой части.

Решение уравнения (11) позволяет получить величину  $a$  как функцию отношения длины волны  $\lambda$  к ширине слоя  $\delta$ . На рис. 2 представлена зависимость  $a$  от  $k\delta$  для  $\zeta_0, \zeta_1$  и  $\zeta_2$ , определяемых равенствами (5) и (9).

Пунктирная линия ( $a = a_1(k\delta)$ ) соответствует «симметричной», а сплошная ( $a = a_2(k\delta)$ ) — «антисимметричной» ветвям колебаний. Таким образом, вместо дисперсионного уравнения (11) получаем два значительно более простых — в виде

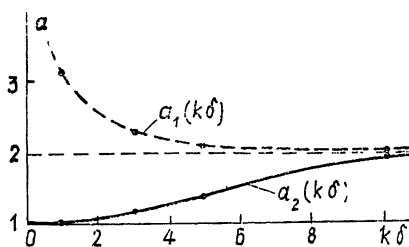


Рис. 2.

$$\frac{\omega_{0e}^2}{(\omega - kV_{0e})^2} + \frac{\omega_{0i}^2}{(\omega - kV_{0i})^2} - a_{1,2}(k\delta) = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что потенциальные колебания изолированного слоя плазмы, состоящего из двух взаимопроникающих и равных по плотности заряда потоков электронов и ионов, являются неустойчивыми, если  $|k(V_{0e} - V_{0i})| < \omega_{0e}/\sqrt{a_{1,2}}$ . Однако в отличие, например, от однородной плазмы частота колебаний  $\omega$  и линейный инкремент нарастания  $\mu = \operatorname{Im} \omega$  зависят от соотношения между длиной волны  $\lambda$  и шириной слоя  $\delta$  в силу того, что величины  $a_1$  и  $a_2$  являются функциями  $k\delta$ . Ограничение поперечных размеров слоя приводит к уменьшению значений  $\omega$  и  $\mu$ . В частности, максимальный инкремент нарастания, равный



$$\mu_{1,2} = \omega_{0e} \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} a_{1,2}^{-1/2},$$

имеют колебания, у которых

$$\omega_{1,2} - k_{1,2} V_{0e} \approx k_{1,2} (V_{0e} - V_{0i}) \approx \frac{\omega_{0e}}{\sqrt{a_{1,2}}},$$

где индексы «1» и «2» относятся соответственно к «симметричной» и «антисимметричной» ветвям. Поскольку всегда  $a_1 > a_2$ , то инкремент  $\mu$  и частота  $\omega$  «симметричных» колебаний ниже соответствующих величин, относящихся к «антисимметричным».

В случае коротковолновых колебаний, когда  $k\delta$  достаточно велико ( $k\delta \gg 10$ ), обе ветви описываются фактически одним дисперсионным уравнением, так как  $a_1 \approx a_2 \approx 2$ . Однако их поведение различное, если  $k\delta \ll 10$ . В этом случае величина  $a_1$  возрастает, в то время как  $a_2 \rightarrow 1$ , причем для «антисимметричных» колебаний детальная структура распределения  $N(x)$  не имеет принципиального значения.

Таким образом, в слоях типа магнитопаузы на дневной стороне при наличии южной компоненты межпланетного магнитного поля (ситуация, обычно имеющая место во время суббурь) и нейтрального слоя хвоста магнитосферы могут генерироваться потенциальные колебания вследствие описываемой уравнением (12) гидродинамической неустойчивости. Последняя будет преобладающей, если ширина слоя  $\delta$  меньше некоторой  $\delta^*$ , такой, что при  $\delta < \delta^*$   $V_0 = |V_{0e} - V_{0i}| > v_{Te}$  ( $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов). В частности, в переходной области перед головной частью магнитосферы, где  $v_{Te} \approx 5 \cdot 10^8$  см/с (температура электронной и протонной компонент плазмы составляет примерно  $2 \cdot 10^6$  К),  $\omega_{0e} \approx 2 \cdot 10^5$  с<sup>-1</sup> ( $N_0 \approx 10$  см<sup>-3</sup>) [8], величина  $\delta^* \approx 2$  с/ $\omega_{0e} \approx 3 \cdot 10^5$  см. В условиях хвоста магнитосферы концентрация частиц в среднем на порядок ниже [9]. Поэтому при той же температуре компонент плазмы  $\delta^* \approx 10^6$  см.

По мере уменьшения  $k\delta$  частота колебаний может стать сравнимой с электронной циклотронной частотой  $\omega_{He}$ . Это, в свою очередь, ведет к необходимости учета магнитного поля, создаваемого равновесным током в слое плазмы. Вблизи головной части магнитопаузы  $\omega_{He} \approx 2 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup> (магнитное поле  $H \approx 10^{-4}$  Э). При ширине  $\delta \sim 10^5$  см в системе координат, связанной с Землей,  $V_{0e} \sim 1,5 \cdot 10^9$  см/с,  $V_{0i} \ll V_{0e}$  и влияние магнитного поля существенно, если  $kV_{0e} \leq 2 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>, а  $k\delta \leq 10$ . Для нейтрального слоя хвоста с  $\delta \sim 10^6$  см,  $V_{0e} \approx V_{0i}$  и  $H \approx 1,6 \cdot 10^4$  Э ( $\omega_{He} \approx 3,2 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>) магнитное поле необходимо учитывать при  $k\delta \leq 2$ .

В заключение авторы выражают благодарность М. С. Ковнеру за интерес к работе и дискуссию результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. S. B. Ong, N. Roderick, Planet Space Sci., **20**, 1 (1972).
2. H. P. Furth, J. Killen, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids, **6**, 459 (1960).
3. M. N. Rosenbluth, D. B. Chang, J. Geophys. Res., **72**, 143 (1967).
4. М. С. Ковнер, сб. Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца, изд. Наука, М., 23, 262 (1972).
5. М. С. Ковнер, Е. И. Шкелев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
6. G. Laval, R. Pellat, M. Vuillemin, Paper CN-21/71 in Proc. Conf. Plasma Phys. Control. Nucl. Fusion, Culham 1965, v. 11, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1966.
7. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, Атомиздат, М., 1970.

8. М. С. Ковнер, Е. И. Шкелев, Исследования по геомагнетизму, аэронавигации и физике Солнца, изд. Наука, М., 24, 37 (1972).
9. Н. Ф. Несс, Физика магнитосферы, М., изд. Мир, 1972.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
24 мая 1971 г.

## POTENTIAL OSCILLATIONS OF ISOLATED PLASMA LAYER

*I. M. Eremin, E. I. Shkelev*

The potential oscillations of the isolated plane-parallel plasma layer under the conditions taking place near the head part of the Earth magnetosphere boundary or neutral layer of its "tail" are considered in the hydrodynamic approximation. Neglecting the influence of the magnetic field the dispersion equation of these oscillations is obtained for an arbitrary relation between the wavelength and the layer width. The analysis of this equation has been made.

---

УДК 535.8 : 535.214.4

**РАДИОМЕТР ДЛЯ НАЗЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ АТМОСФЕРЫ  
В 5-МИЛЛИМЕТРОВОЙ ОБЛАСТИ СПЕКТРА**

*Ю. В. Лебский, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Л. К. Сизьмина,  
А. В. Троицкий, А. М. Штанюк*

Сообщаются основные параметры и конструктивные особенности изготовленного радиометра, который может быть использован для радиотеплолокации атмосферы в области резонанса поглощения  $O_2$   $\lambda \approx 5,6 \div 5,7$  мм. Приводятся предварительные результаты радиотеплолокационных наблюдений.

В настоящее время весьма актуальной является проблема получения данных об основных метеопараметрах атмосферы радиометрическими методами с летательных аппаратов (со спутников, аэростатов и т. д.) и с поверхности Земли [1-10]. При радиометрических измерениях теплового излучения атмосферы получают сведения как об интегральных свойствах некоторых атмосферных параметров, так и об их высотных распределениях. Для реализации соответствующих радиометрических измерений обычно требуется приемная аппаратура, работающая в резонансных областях поглощения атмосферных газов ( $O_2$  и  $H_2O$ ).

Основные требования к приемной аппаратуре для термического зондирования атмосферы в области спин-вращательного резонанса поглощения  $O_2$ , центрированного к длине волны  $\lambda \approx 5$  мм ( $\nu \approx 60$  ГГц), рассмотрены в ряде работ (см., например, [11-13]). В [13], в частности, показано, что для решения данной задачи измерения яркостной температуры  $T_n$  атмосферы в различных климатических районах земного шара при наземных наблюдениях могут выполняться с несколько различающейся точностью. Например, в континентальных районах даже при ошибках измерений  $T_n$  примерно в 1—1,5 К использование восстановленного профиля вместо среднеклиматического заметно уменьшает неопределенность в определении истинного профиля. Можно ожидать [13], что профили температуры, восстановленные в нижних слоях атмосферы из радиометрических измерений с указанной погрешностью, будут в общем предпочтительнее (точнее), и профилей, которые рассчитываются методом оптимальной экстраполяции с использованием приземных значений температуры [11, 14]. В свою очередь, измерения с погрешностью приблизительно 1—1,5 К могут быть выполнены с помощью приемной радиометрической аппаратуры средней чувствительности. При проведении упомянутых исследований немаловажное значение имеют и такие характеристики используемых приборов, как простота и надежность эксплуатации, транспортабельность их и т. д., которые сравнительно легко реализуются в последнем случае.

Ниже приводятся основные характеристики и конструктивные особенности радиометра средней чувствительности, разработанного и изготовленного в НИРФИ для радиотеплолокационных наблюдений атмосферного излучения с поверхности Земли в области  $\lambda \approx 5,6 \div 5,7$  мм.

Здесь же кратко сообщаются результаты испытания радиометра в лабораторных условиях и приводятся предварительные результаты наблюдения атмосферного радиоизлучения.

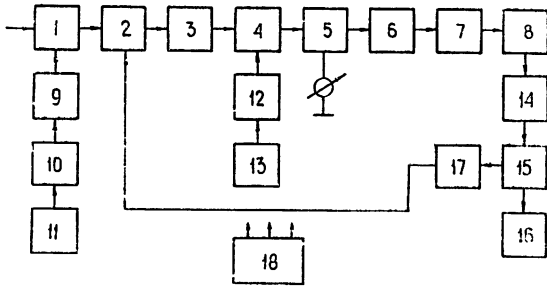


Рис. 1. Функциональная схема радиометра: 1—направленный ответвитель, 2—модулятор, 3—вентиль, 4—направленный ответвитель, 5—смеситель, 6—УПЧ, 7—квадратичный детектор, 8—ПУНЧ, 9—аттенюатор, 10—генератор шума, 11—блок питания, 12—аттенюатор, 13—лампа обратной волны, 14—селективный усилитель, 15—синхронный детектор, 16—самописец, 17—низкочастотный генератор, 18—источники питания.

1. Функциональная схема радиометра показана на рис. 1. На входе установлен конический рупор, ширина, диаграммы направленности которого по уровню половинной мощности в первых измерениях составляла примерно  $4^\circ$ . Для подачи калибровочного сигнала от газоразрядного генератора шума в волноводный тракт введен направленный ответвитель. За ответвителем следуют ферритовый модулятор, вентиль и одноконтурный смеситель, в котором использован серийный кремниевый диод 8-миллиметрового диапазона в коаксиальном оформлении. Суммарные потери тракта составляют  $3 \text{ дБ}$ . Колебания гетеродина, в качестве которого использована лампа ОВ-12 [15], подводятся к смесителю при помощи второго направленного ответвителя.

Для уменьшения влияния паразитных параметров выходная часть смесителя конструктивно совмещена со входом усилителя промежуточной частоты, как в работе [16], однако в данном случае дополнительно используется согласующий трансформатор. Усилитель промежуточной частоты выполнен на 8 транзисторах 1Т329А и имеет коэффициенты шума и усиления соответственно 2,2 ед. и  $60 \text{ дБ}$  в полосе от 50 до  $175 \text{ МГц}$ .

Таким образом, общая полоса приема радиометра (с учетом прямого и зеркального каналов) не превышает  $350 \text{ МГц}$ , что вполне приемлемо для решения поставленной задачи. Результаты расчетов яркостной температуры атмосферы, выполненных для идеализированной «монохроматической» приемной системы по формуле\*

$$T_{\text{я}}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^H T(h) \gamma_v(h) \exp\left(-\frac{1}{\cos \theta} \int_0^h \gamma_v(h') dh'\right) dh, \quad (1)$$

отличаются от аналогичных расчетов с учетом модели реализованной полосы пропускания  $\delta\nu$  радиометра,

\* В формулах (1) и (2) использовано обычное приближение для элемента пути  $dl$  электромагнитной волны  $dl = \frac{dh}{\sqrt{1 - (n_0 r_0 / nr)^2 \sin^2 \theta}} \approx \frac{dh}{\cos \theta}$ , которое справедливо при не очень больших зенитных углах ( $\theta \lesssim 80^\circ$ ) [17]. Обозначения величин в формулах (1) и (2) — стандартные ( $T$  — температура,  $\gamma_v$  — коэффициент поглощения радиоволн,  $dh$  — элемент высоты).

$$T_{\text{яв}}(\theta) = \frac{1}{\delta\nu \cos \theta} \int_{\delta\nu}^H \int_0^H T(h) \gamma_\nu(h) \exp\left(-\frac{1}{\cos \theta} \int_0^h \gamma_\nu(h') dh'\right) dh d\nu, \quad (2)$$

не более чем на 0,2—0,5 К при перестройке рабочей частоты в пределах  $\nu = 53 \div 54$  ГГц. При этом, в случае приема атмосферного излучения на концах указанного диапазона, в полосу радиометра попадают резонансные частоты  $\nu_{27-} = 53,0695$  ГГц и  $\nu_{23-} = 54,130$  ГГц. Если же прием излучения осуществляется в середине диапазона  $\nu \approx 53,3 \div 53,4$  ГГц (радиометр в основном предназначен для исследования возможностей восстановления профилей температуры по измерениям яркостной температуры атмосферы на фиксированной частоте  $\nu$  при различных зенитных углах), то на полосу радиометра не приходится резонансные частоты молекулярного кислорода.

Аналогичные оценки по формулам (1) и (2) необходимой частотной стабильности  $\Delta\nu/\nu$  радиометра показали, что при расстройках  $\Delta\nu/\nu \sim 10^{-4}$  соответствующие вариации измеряемой яркостной температуры составляют сотые доли градуса. Интегрирование исходного сигнала, по диаграмме направленности антенны (в пределах  $\pm 2^\circ$  от направления наблюдения при  $\theta < 80^\circ$ ) с последующей его нормировкой на величину диаграммы приводит к эффектам, не превышающим  $\sim 0,1$  К.

Уменьшение вклада шумов от гетеродина в данном приемнике достигается путем существенного уменьшения уровня мощности, подводимой к кристаллу. Как и в [16], для улучшения параметров преобразования на диод подается постоянное положительное смещение, подбираемое экспериментально. Практически оптимальный ток диода, обусловленный воздействием мощности гетеродина, составляет 0,05—0,08 мА, за счет смещения он доводится до 0,3 мА. На выходе УПЧ установлен полупроводниковый квадратичный детектор и интегральный предварительный усилитель низкой частоты. Затем следуют стандартные низкочастотные блоки.

Конструктивно высокочастотная часть радиометра выполнена в виде герметизированного блока с габаритами  $380 \times 300 \times 415$  мм<sup>3</sup>. Для температурной стабилизации электрических характеристик используемых твердотельных усилителей последние помещаются в камеру активного термостага. Регулировка уровня мощности гетеродина, необходимая при перестройке частоты, а также включение и отключение генератора шума при калибровке осуществляется дистанционно.

Экспериментальное определение флуктуационного порога чувствительности  $\delta T_p$  радиометра осуществлялась путем поочередного подключения к его входу двух согласованных нагрузок, одна из которых находилась при комнатной температуре, а другая — при температуре кипящего азота. Результаты измерения чувствительности при перестройке радиометра по частоте в пределах 1 ГГц для постоянных времен интегрирования  $\tau = 1$  с и  $\tau = 4$  с (измерения атмосферного излучения проводились при  $\tau \geq 4$  с) приведены в табл. 1. Динамический диапазон радиометра оценивался с помощью внешнего калибровочного генератора шума и составляет 30 дБ.

Таблица 1

$\nu$ , ГГц	$\delta T_p$ , К при $\tau = 1$ с	$\delta T_p$ , К при $\tau = 4$ с	Примечание
53	3,6	1,8	При подстройке уровня мощности гетеродина при ( $\nu =$ $= 54$ ГГц)
53,4	2,2	1,1	
54	3,1	~1,6	

При определении временной стабильности радиометра в лабораторных условиях величина изменения его коэффициента усиления не превышала 2% за 7 часов работы после 1 часа прогрева. Климатические испытания ВЧ блока, помещенного в камеру, показали, что он работоспособен в интервале температур от  $-20$  до  $+40^\circ\text{C}$  при относительной влажности до 90%; нестабильность коэффициента усиления при этом не превышала 10%.

2. Описанный радиометр был использован в аппаратурном комплексе для абсолютных измерений яркостной температуры атмосферы. Антенна и калибровочная установка комплекса размещались на поворотном устройстве с дистанционным управлением по углу места. Основные методические аспекты проведения абсолютных радиоизмерений в миллиметровом диапазоне волн были заимствованы нами из опыта работы [18]. Калибровка принимаемого радиоизлучения осуществлялась с помощью эталонных излучателей, в качестве которых использовались «черные» диски, располагающиеся в дальней зоне антенны и имеющие температуру либо окружающего воздуха, либо жидкого азота\*. Для обеспечения постоянства фона излучения рупор помещался в черную полость с окном для приема радиоизлучения атмосферы. Аналогичная схема калибровочной установки приведена на рис. 2 работы [18]. Отношение размеров квадратного окна и таких же размеров эталонного диска к рабочей длине волны в данной работе составляло примерно 40.

Эталонные излучатели находились в идентичных пенопластовых кюветах, в одну из которых помещался жидкий азот. При расчетах яркостной температуры эталонов, находящихся в пенопластовой кювете с жидким азотом и без азота, принимались во внимание полученные в [18] значения коэффициентов отражения излучения на границах воздух — пенопласт, пенопласт — азот и воздух — эталон, а также измеренные значения оптической толщины стенки кюветы  $\tau_k$  и слоя азота в кювете  $\tau_a$  на длине волны  $\lambda = 3,58$  мм, достаточно близко прилегающей к рабочей длине волны. Экспериментальные [18] значения коэффициентов отражения и оптических толщин  $\tau_k$ ,  $\tau_a$  пересчитывались затем для рабочей длины волны описанного радиометра по формулам для коэффициента отражения многослойной среды [19] по данным о диэлектрических проницаемостях соответствующих материалов и с использованием зависимостей коэффициентов поглощения диэлектриков от  $\lambda$  (см., например, [20]).

Значения яркостных температур эталона  $T_{к.а.}$ , находящегося в пенопластовой кювете с жидким азотом, которые использовались для абсолютной калибровки атмосферного излучения (см. формулу (4)), корректировались также в соответствии с изменениями температуры воздуха  $T_0$  и с учетом зависимости температуры кипения азота от давления атмосферы в месте расположения приемной аппаратуры. При учете всех перечисленных факторов величина  $T_{к.а.}$  отличается от температуры кипения жидкого азота ( $T_{аз} = 77,36$  К)\*\* при нормальном атмосферном давлении на несколько градусов, и ее вариации при изменениях давления и температуры соответственно в пределах  $\pm 10$  мм рт. ст. и  $\pm 20$  градусов составляют  $\sim 2$  К.

\* Авторы благодарят В. И. Чернышеву за любезно предоставленные для измерений атмосферного излучения эталоны, которые были изготовлены и использовались в процессе выполнения работы [18].

\*\* Температура кипения жидкого азота с учетом квантовой поправки  $T_{аз}^* = 2\pi\hbar\nu \times \left\{ k \left[ \exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{kT_{аз}}\right) - 1 \right] \right\}^{-1} \approx 76,2$  К на средней частоте рабочего диапазона  $\nu = 53,5$  ГГц.

При калибровке изложенным способом из общего выражения для измеряемой антенной температуры  $[^{18, 21}]^*$

$$T_a = (1 - \beta) \eta T_{\theta} + \beta \eta T_{\text{бок}}^* + (1 - \eta) T_0^* + \Delta T \quad (3)$$

( $T_{\theta}$  — яркостная температура небосвода в направлении  $\theta$ ,  $T_{\text{бок}}^*$  — усредненная по боковым и задним лепесткам антенны яркостная температура окружающего рупор пространства,  $\beta$  — коэффициент рассеяния антенны вне главного лепестка,  $\eta$  — коэффициент полезного действия,  $\Delta T$  — приращение температуры антенны, связанное с дифракцией излучения на отверстии; знак \* в обозначениях температуры  $T_{\text{бок}}^*$ ,  $T_0^*$ , как и ранее в обозначении  $T_{\text{аз}}^*$ , указывает на то, что соответствующие значения должны браться с квантовыми поправками) получается следующее выражение для яркостной температуры атмосферы:

$$T_{\theta} = T_{\text{к. а}} + \frac{m}{m_{\text{к}}} (T_0^* - T_{\text{к. а}}). \quad (4)$$

В (4)  $m$  — разность показаний регистрирующего прибора при приеме радиоизлучения атмосферы и черного тела при температуре жидкого азота,  $m_{\text{к}}$  — разность показаний регистрирующего прибора при приеме радиоизлучения от черных тел, находящихся при температурах соответственно окружающего воздуха и жидкого азота. Дифракционная поправка  $\Delta T$  при выбранных условиях измерений (параметры окна и углы наблюдения) не превышала по оценкам сотых долей процента от измеряемой величины  $T_{\theta}$ .

Априорная оценка суммарной погрешности измерений яркостной температуры атмосферы вблизи оптимальной рабочей частоты радиометра ( $\nu \sim 53,4$  ГГц), определяющейся флуктуационной чувствительностью (при  $\tau = 4$  с) и другими параметрами радиометра, а также точностью описанных абсолютной калибровки и общей методики измерений, приводит к величине  $\delta T_{\theta} \approx 1,5$  К.

3. Радиометрические измерения атмосферного излучения выполнялись на полигоне НИРФИ «Зименки» в Горьковской области. Примеры измерений яркостной температуры атмосферы на фиксированных частотах при различных зенитных углах для ряда безоблачных и весьма стабильных осенних (1973 г.), а также весенних и летних (1974 г.) дней приведены в табл. 2. Зависимость ядер интегрального уравнения (1) на фиксированной частоте в области  $\lambda \approx 5$  мм при различных зенитных углах от высоты (давления) для среднеклиматических осенних условий в умеренных широтах изображена на рис. 2. Отметим, что вид этой зависимости в выбранном участке спектра весьма близок к аналогичной зависимости ядер от давления для случая наземного зондирования атмосферы на ряде частот в зенитном направлении (см. рис. 2 в  $[^{13}]$ ). Часть абсолютных радиометрических измерений в области  $\lambda \approx 5,6$  мм проводилась одновременно с относительными измерениями атмосферного излучения (поглощения) радиоволн в области резонанса  $\text{H}_2\text{O}$   $\lambda \approx 1,35$  см. Эти последние измерения выполнялись с помощью аппаратуры и по методике, описанной в  $[^{22}]$ . Примеры одновременных измерений яркостной температуры атмосферы в области кислородного резо-

\* Влияние на яркостную температуру небосвода ослабленного атмосферой реликтового излучения  $T_{\text{ф}}$  в рабочем диапазоне волн оценивается примерно в  $1,3 \exp[-(1,5 \div 2,2)] \approx 0,3 \div 0,15$  К ( $T_{\text{ф}} = 2,4$  К  $[^{18}]$ ,  $T_{\text{ф}}^* \approx 1,3$  К на частоте  $\nu = 53,5$  ГГц, оптическая толщина атмосферы во время измерений (см. табл. 2) равнялась  $\sim 1,5 - 2,2$ ).

нанса и вертикального поглощения  $\Gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ , радиоволн в парах  $\text{H}_2\text{O}$  на склонах резонанса  $\lambda = 1,35 \text{ см}$  также приведены в табл. 2.

Таблица 2

Дата	$\nu$ , ГГц	$\theta$	$T_{\text{эксп}}$ , К	$T_{\text{расч}}$ , К	$\Gamma_{\text{эксп}}$ $\text{H}_2\text{O}$ , дБ	$\Gamma_{\text{расч}}$ $\text{H}_2\text{O}$ , дБ
6.IX. 73 г.	53,36	0°	208	209,7		
		50°	243	245,6		
		60°	258	259,8		
		70°30'	271	272,8		
		75°30'	279	277,0		
		80°30'	282	280,9		
26.IX.73 г.	20,69 21,74 23,08 53,26	0°			0,088	0,111
		0°			0,21	0,172
		0°			0,14	0,151
		0°	199	199,7		
		50°	236	236,2		
		60°	250	251,3		
		70°30'	266	265,7		
		80°30'	273	270,5		
29.XI.73 г.	20,69 21,74 23,08 53,5	0°			0,073	0,0708
		0°			0,092	0,102
		0°			0,090	0,0921
		0°	211	208,3		
		60°	252	250,2		
		75°30'	259	260,2		
12.IV.74 г.	20,69 21,74 23,08 53,4	0°			0,32	0,288
		0°			0,39	0,446
		0°			0,38	0,392
		0°	208	208,9		
		50°	245,6	245,3		
		75°30'	278	279,0		
11.VI.74 г.	53,4	0°	216	218,9		
		29°	230,5	231,0		
		44°	245,5	246,7		
		59°	265,5	267,0		
		69°30'	279,5	280,1		
		74°30'	283	284,5		
		77°30'	287,5	286,6		
		79°30'	289	287,7		
12.VI.74 г.	53,4	0°	216,6	215,0		
		29°	228,8	227,3		
		44°	245	243,5		
		59°	265,6	264,9		
		69°30'	279,6	279,8		
		74°30'	284,7	286,0		

Измеренные значения  $T_{\text{я}}(\theta)$  и  $\Gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ , сопоставлены с соответствующими расчетными значениями. Расчеты величин  $T_{\text{я}}(\theta)$  и  $\Gamma_{\text{H}_2\text{O}}$  выполнялись по формулам работ [23, 24] с использованием аэрологического материала Гидрометслужбы Горьковской области. При этом ширины линий  $\text{O}_2$  вычислялись согласно [25]. Измеренные значения яркостной



температуры атмосферы отличаются от соответствующих расчетных величин, как правило, на 1—2 К (сравни с оценкой аппаратурной точности  $\delta T_{я} \approx 1,5$  К). Для отдельных измерений отличие величин  $T_{я}$  от вычисленных по аэрологическим данным достигает  $\sim 2,5$  К. Оценка точности аэрологических данных содержится в [26].

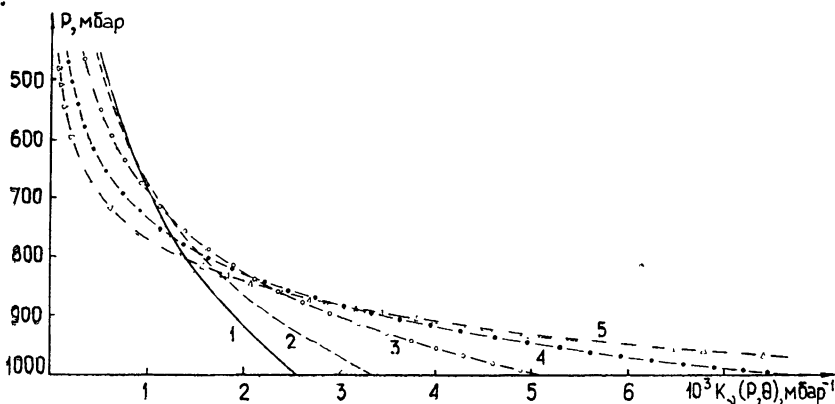


Рис. 2. Ядра интегрального уравнения (1) для среднеклиматических осенних условий в умеренных широтах ЕТ СССР на частоте  $\nu = 53,4$  ГГц при зенитных углах  $\theta = 0^\circ$ —кривая 1,  $\theta = 40^\circ$ —2,  $\theta = 60^\circ$ —3,  $\theta = 70^\circ 30'$ —4,  $\theta = 75^\circ 30'$ —5.

Дополнительно проводились последовательные измерения яркостной температуры атмосферы на ряде частот в зенитном направлении. В качестве примера приведем результаты таких измерений для 26 сентября 1973 г.:  $\nu = 52,96$  ГГц,  $T_{я} = 182$  К;  $\nu = 53,26$  ГГц,  $T_{я} = 199$  К;  $\nu = 54,08$  ГГц,  $T_{я} = 250$  К.

Авторы признательны И. Ф. Гусеву, М. Б. Зиничевой, А. Н. Иванниковой, Е. А. Любимову, Н. Н. Матчинскому, И. А. Раковой, В. И. Чернышеву за оказанную помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Обухов, А. Е. Башаринов, Ю. В. Васильев, А. С. Гурвич, В. В. Демин, С. Т. Егоров, Б. Г. Кутуза, Л. И. Малафеев, Д. Т. Матвеев, Л. М. Митник, Н. К. Федоров, Космические исследования, 9, № 1, 66 (1971).
2. А. С. Гурвич, А. Т. Ершов, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Метеорология и гидрология, № 5, 22 (1972).
3. А. Е. Башаринов, А. С. Гурвич, С. Т. Егоров, Радиоизлучение Земли как планеты, изд. Наука, М, 1974.
4. D. H. Staelin, F. T. Barath, A. H. Barrett, J. C. Blinn, N. E. Gaut, E. J. Johnston, K. Kunzi, W. B. Leonir, W. Nordberg, R. Pettyjohn, R. K. L. Poon, P. W. Rosenkranz, J. W. Waters, Transactions American Geophysical Union, 54, № 4, 277 (1973).
5. А. Е. Башаринов, Б. Г. Кутуза, Труды ГГО, вып. 222, 100 (1968).
6. Ю. И. Рабинович, Г. Г. Щукин, Труды ГГО, вып. 222, 62 (1968).
7. А. Г. Горелик, В. В. Калашников, Ю. А. Фролов, Труды ЦАО, вып. 103, 5 (1972).
8. D. H. Staelin, Rept. XV General Assambley IUGG, Abstr. № 31—26, USSR, p. 33, July—August, 1971.
9. E. R. Westwater, Proc. 7-th internat. symposium on remote sensing of environment, USA, p. 585, May 17—21, 1971.
10. G. F. Miner, D. D. Thornton, W. J. Welch, J. Geophys. Res., 77, № 6, 975 (1972).
11. E. R. Westwater, O. N. Strand, J. Atmosph. Sci., 25, № 5, 750 (1968).

12. К. С. Шифрин, Л. П. Мамырина, Труды ГГО, вып. 291, 40 (1972).
13. А. Т. Ершов, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11 (1974).
14. Л. С. Гандин, Труды ГГО, вып. 114, 75 (1960)
15. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлипа, З. Ф. Каплин, А. А. Негирев, В. А. Париллов, Г. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 4, 136 (1965)
16. Н. Р. Хачатрян, А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, В. Л. Рахлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 477 (1973)
17. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, № 1, 21 (1959).
18. А. Г. Кисляков, В. И. Чернышев, Ю. В. Лебский, В. А. Мальцев, Н. В. Серов, Астрон. ж., 48, вып. 1, 39 (1971)
19. А. Е. Башаринов, Л. Т. Тучков, В. М. Поляков, Н. И. Ананов, Изменение радиотепловых и плазменных излучений, изд. Сов. радио, М., 1968.
20. В. Браун, Диэлектрики, ИЛ, М., 1961
21. А. Д. Кузьмин, А. Е. Салодонович, Радиоастрономические методы измерений параметров антенн, изд. Сов. Радио, М., 1964.
22. В. М. Плечков, Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 4, № 2, 182 (1968).
23. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 4, 674 (1963).
24. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, № 6, 987 (1965).
25. E. E. Reber, J. Geophys. Res., 77, № 21, 3831 (1972).
26. М. С. Татарская, Труды ГГО, вып. 308, 110 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
14 мая 1974 г.

#### RADIOMETER FOR BASED-GROUND INVESTIGATION OF THE ATMOSPHERE IN 5 mm SPECTRAL REGION

*Yu. V. Lebskii, A. P. Naumov, V. M. Plechkov, L. K. Stiz'mina,  
A. V. Troitskii, A. M. Shtanyuk*

The basic parameters and design peculiarities of the developed radiometer which can be used for atmosphere radio thermal location in the absorption resonance region  $O_2 \lambda \approx 5.6-5.7$  mm are reported. Preliminary results of observations are given.

УДК 551.510.535

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ В F-СЛОЕ ИОНОСФЕРЫ

*Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц*

Суммируются результаты экспериментальных работ по диагностике искусственных ионосферных возмущений, возникающих при воздействии на F-слой ионосферы мощным КВ излучением. Искусственный нагрев F-области сопровождается рождением неоднородностей различных масштабов ( $l = 1 + 10^7$  см), существенно влияющих на распространение радиоволн КВ диапазона.

15 лет назад Гинзбург и Гуревич [1], а позднее Фарли [2] предсказали возможность нагрева мощным электромагнитным излучением КВ диапазона ионосферной плазмы F-слоя. При этом вследствие сильной диффузии давление плазмы  $NT$  стремится быть постоянным, и рост температуры сопровождается уменьшением электронной концентрации  $N$ . Возмущения концентрации в нагретой области могут радикально влиять на распространение радиоволн различных диапазонов, поэтому появились работы, где обсуждалась возможность создания громадной ионосферной линзы — радиоастрономической антенны для приема радиоизлучения дискретных источников [3]. В других работах [4] предлагалось использовать нагрев F-слоя для увеличения эффективности запитки скользящей ионосферной моды. В 1973 г. вышла монография Гуревича и Шварцбурга, где детально рассмотрены эффекты, возникающие в ионосфере в результате нагревной нелинейности: возмущение среды, самовоздействие и кросс-модуляция волн, эффекты самофокусировки и дефокусировки и др. [5].

Первые успешные эксперименты по воздействию на F-слой мощным радиоизлучением были проведены в Боулдере (США) в 1970 г. [6–12]. В дальнейшем были опубликованы результаты других экспериментов, проведенных в Аресибо [13–15], в Горьком [16–18] и в Москве [19–21]. Широкая программа исследований искусственных ионосферных возмущений и их практического использования для радиосвязи была осуществлена в последнее время в США. Этим вопросам посвящен специальный выпуск *Radio Science* [24]. Все указанные эксперименты проводились при вертикальном падении на ионосферу мощного радиоизлучения. В настоящем обзоре суммированы результаты экспериментальных работ по диагностике искусственных ионосферных возмущений и обсуждается модель возмущенной области. Сразу же следует отметить, что при сравнительно небольших мощностях передатчиков, используемых в экспериментах ( $P \leq 1$  МВт), четко наблюдаются возмущения электронной концентрации (от десятых до десятков процентов) различных масштабов (от дебаевского радиуса до размеров освещенной области).

В табл. 1 приведены сравнительные характеристики мощных передатчиков в различных исследовательских центрах (мощность  $P$ , эквивалентная — с учетом коэффициента усиления антенны — мощность  $P_G$ , среднее поле волны  $E$ , для высоты 250 км, рассчитанное без учета

ионосферы, частота передатчика  $f$ , а также наличие (+) или отсутствие (—) тех или иных средств диагностики).

Таблица 1

	Боулдер	Аресибо	Горький	Москва
$P$ , МВт	1	0,1	0,13	0,2
$PG$ , МВт	100	25	20	20
$E$ , В/м	0,4	0,19	0,17	0,17
$f$ , МГц	5—10	5,62	5,75 4,61	1,4
Ионозонд	+	—	+	+
Оптика	+	—	—	—
Некогерентное рассеяние	—	+	—	—
Радиоастрономические методы	+	—	+	—
Радиолокация	+	—	—	—
Метод пробных волн	+	—	+	+
Измерения на комбинационных частотах	—	—	+	—

**Нагрев  $F$ -слоя.** Оптические наблюдения в Боулдере за свечением линии  $6300 \text{ \AA}$  показали уменьшение интенсивности свечения при облучении волной с необыкновенной поляризацией. Это уменьшение согласуется с теорией и отвечает повышению температуры электронов на 35% [8]. С другой стороны, при возмущении ионосферы волной обыкновенной поляризации на частоте ниже критической частоты  $F$ -слоя свечение линии  $6300 \text{ \AA}$  усиливалось с характерным временем  $\sim 1 \text{ мин}$ , что можно объяснить лишь присутствием надтепловых электронов с энергией  $> 2 \text{ эВ}$  [15]. Эффекты исчезали, когда частота передатчика была выше  $f_0F_2$ . При облучении ионосферы необыкновенной волной зарегистрировано усиление инфракрасной линии  $1,27 \text{ мк}$  [7]. Механизм возбуждения такого свечения пока не ясен.

В Аресибо методом некогерентного рассеяния были получены сведения об увеличении электронной температуры на 30% вблизи области отражения мощной волны с временем нагрева 40 с и временем охлаждения 10 с, причем это имело место как на обыкновенной, так и на необыкновенной волнах [15]. Изменения температуры на высоте  $307 \text{ км}$  иллюстрируются рис. 1, где 1 и 2 — соответственно экспериментальная и теоретическая кривые. (Заштрихованный интервал — время работы передатчика.) Очевидно количественное соответствие величины нагрева с теоретическими оценками.

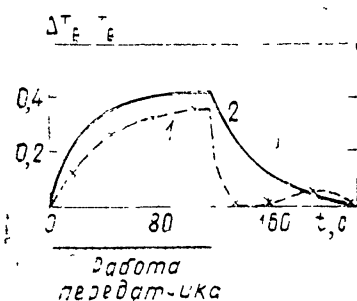


Рис. 1.

**Глобальные возмущения электронной концентрации.** Деформация ионограмм в возмущенной области наблюдалась в Боулдере и Горьком. Через 10—15 минут после включения мощного передатчика (в условиях, когда его частота была ниже  $f_0F_2$ ) наблюдалось появление дополнитель-

ных ветвей на ионограммах [12]. Авторы [12] объясняют деформацию ионограмм перераспределением электронов в возмущенной области, точнее уменьшением электронной концентрации, которое распространяется вверх вдоль силовых линий магнитного поля Земли. К аналогичному заключению приводят результаты экспериментов в Горьком [18], где измерялись критические частоты в возмущенной области и на расстоянии 100 км от нее. При этом в возмущенной области значения критических частот были на 0,2—0,4 МГц ниже, чем невозмущенные значения, что соответствует уменьшению электронной концентрации в максимуме F-слоя на 10—15%. Уменьшение концентрации электронов вследствие амбиполярной диффузии должно составлять согласно [5] 
$$-\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T} \approx 15\%.$$

Этот процесс должен проходить с характерным временем  $\tau_N = L^2/D_a \approx 10 \div 30$  мин, где  $L \sim 50$  км — размер напрятой области,  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии. По-видимому, именно такие возмущения  $\Delta N/N$  в центре возмущенной области регистрировались в Боулдере и в Горьком по данным ионосферных станций. Модель возмущенной области, заимствованная из [12], приведена на рис. 2, где в плоскости магнитного поля Земли показаны линии равной электронной концентрации. Обедненная электронами область вытянута вдоль магнитного поля Земли. Дополнительные ветви на ионограммах можно интерпретировать как результат боковых отражений от края возмущенной области.

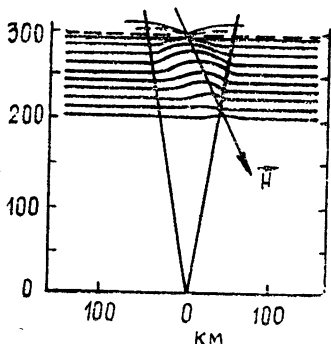


Рис. 2.

**Неоднородности электронной концентрации.** Под воздействием мощного радиоизлучения плазма в F-слое турбулизуется, т. е. появляются неоднородности различного масштаба. В естественных условиях крупномасштабные неоднородности ( $l > 1$  км) вызывают явления  $F_{\text{spread}}$  и мерцания дискретных источников радиоизлучения. Аналогичные эффекты возникают и при воздействии на ионосферу мощным радиоизлучением. По данным [12, 15] наиболее сильный эффект искажения ионограмм заключается в появлении рассеянных отражений. Явление связано с рассеянием радиоволн на ионосферных неоднородностях, начинается вблизи точки отражения мощной волны и через 1,5 минуты охватывает область высот на 50—100 км ниже максимума F-слоя. После выключения передатчика  $F_{\text{spread}}$  исчезает через несколько минут в дневное время и через десятки минут ночью. Расчеты показывают, что искусственные  $F_{\text{spread}}$  можно объяснить рассеянием радиоволн на искусственных ионосферных неоднородностях с размерами  $l \sim 1 \div 3$  км и величиной 
$$\frac{\Delta N}{N} \approx 10^{-2} \div 10^{-3}.$$
 Интересные результаты по искусственным  $F_{\text{spread}}$

были получены в Боулдере [22] по наблюдениям  $F_{\text{spread}}$  на разнесенных антеннах (32 приемника, расположенные по кругу с радиусом 300 м). Корреляционный анализ позволил получить «изображение» возмущенной области на разных высотах, на рис. 3 приведен пример записи, полученный 5 мая 1972 г. На этом рисунке *a* — ионограмма возмущенной ионосферы ( $f_D$  — частоты волны, на которой получено радиоизображение,  $f_H$  — частота мощного передатчика), *б* — радиоизображение невозмущенной ионосферы, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж* — радиоизображение возмущенной

области на 5 высотах. Размер изображения —  $40 \times 40^\circ$  с центром в зените. На малых высотах (352 км) изображение смещено к северу, а на больших (442 км) — к югу от вертикали.

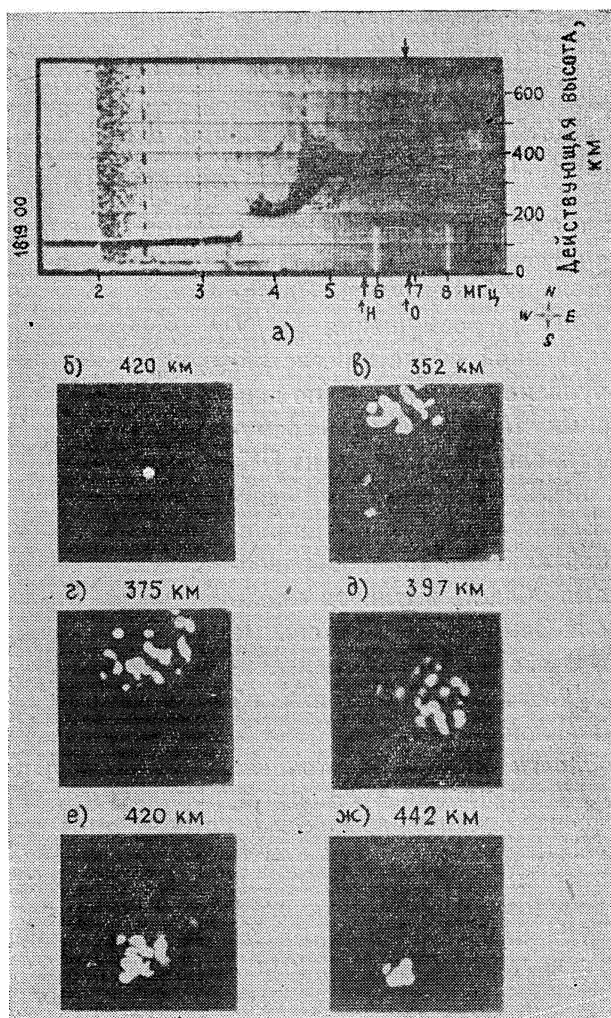


Рис. 3.

Сведения о развитии ионосферных неоднородностей были получены при просвечивании возмущенной области радиоизлучением дискретных источников Лебедь-А и Кассиопея-А в Горьком [18] и Боулдере [10]. В экспериментах использовалась радиоастрономическая аппаратура на частоте 24 МГц в Боулдере и на двух частотах — 9 и 25 МГц — в Горьком. Примеры записей интенсивности радиоизлучения дискретного источника Кассиопея-А в Горьком приведены на рис. 4 (время местное, декретное). Штриховкой на оси времени указаны периоды работы мощного передатчика (излучалась волна обыкновенной поляризации на частоте, меньшей критической частоты  $f_0F_2$ ). Верхняя запись соответствует приему дискретного источника на антенну с шириной ( $18 \times 18^\circ$ ) диаграммой направленности. Запись б соответствует приему на интер-

ферометр с базой  $d = 200$  м. Наконiec, нижняя запись (в) получена на частоте 9 МГц с антенной, имеющей диаграмму направленности  $6 \times 9^\circ$ . На частоте 25 МГц (записи а, б) после включения мощного передатчика ( $P = 130$  кВт) наблюдается появление (или усиление) флуктуаций

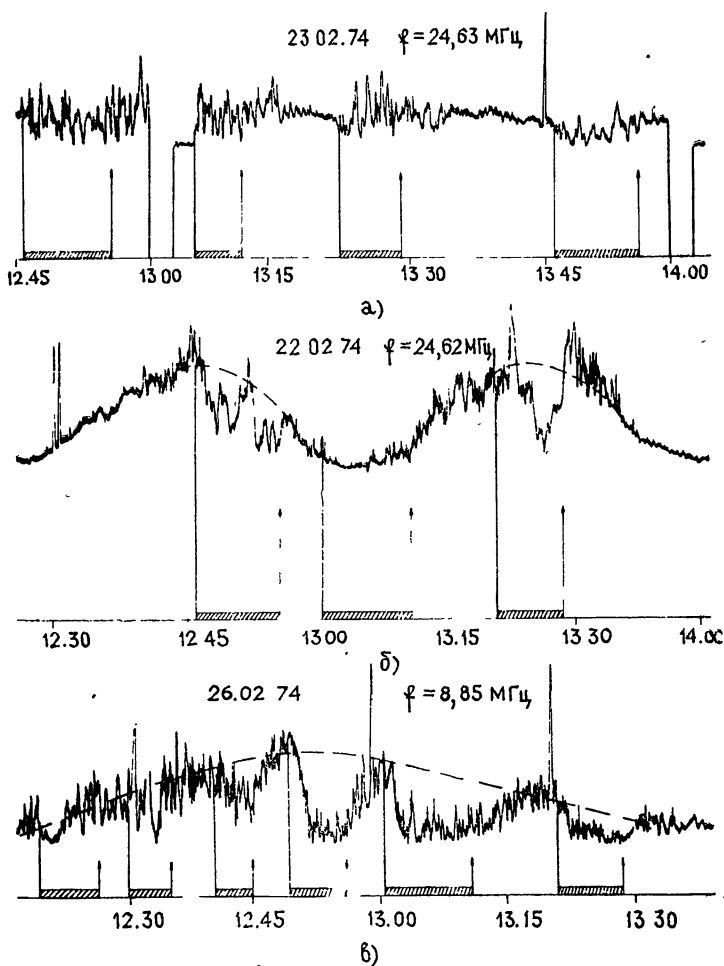


Рис. 4.

интенсивности источника. Характерная величина индекса мерцаний

$$F = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} \quad \text{составляет } 0,4 - 0,5. \text{ Время нарастания флуктуаций не превышает } 1 - 2 \text{ минут, а время релаксации после выключения передатчика изменяется от 1 минуты (на краях возмущенной области) до 10 минут (в центре области). Квазипериод флуктуаций изменяется от } 20 \text{ с до } 5 \text{ мин и не отличается от периода естественных мерцаний. При понижении мощности передатчика до } 60 \text{ кВт эффекты уменьшаются, а при } P = 30 \text{ кВт полностью исчезают.}$$

В условиях естественных ионосферных возмущений (когда имеется большой уровень естественных мерцаний) эффекты воздействия мощным радиоизлучением выражены менее четко. По наблюдениям в Боулдере [10] мерцания дискретных источников Лебедь-А и Кассиопея-А при воздействии на ионосферу мощным радиоизлучением сопровождались

появлением рассеянных отражений на ионограммах типа  $F_{\text{spread}}$ . Несколько другой характер имеют записи источника на частоте 9 МГц (рис. 4в). После включения мощного передатчика интенсивность дискретного источника падает на 2—6 дБ и восстанавливается после его выключения. Характерные времена развития и релаксации эффекта падения интенсивности составляют соответственно  $\tau_1 = 1,5 \div 2$  мин и  $\tau_2 = 0,5 \div 5$  мин. Следует отметить, что все эффекты, обнаруженные радиоастрономическим методом, были резко ослаблены или полностью отсутствовали при излучении волны с необыкновенной поляризацией или в условиях, когда критическая частота ионосферы была ниже частоты мощного передатчика.

О возможной интерпретации радиоастрономических измерений. Резкое увеличение индекса флуктуаций дискретного источника на частоте 25 МГц, так же как и появление  $F_{\text{spread}}$  при импульсном зондировании ионосферы, можно объяснить возникновением неоднородностей с размерами  $l \sim 1 \div 3$  км и  $\Delta N/N \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ . Для объяснения наблюдавшегося на эксперименте индекса мерцаний  $F \sim 0,5$  нужно, чтобы такие неоднородности занимали область высот  $\Delta z \sim 100$  км. Это подтверждается прямыми измерениями области высот, где присутствуют явления  $F_{\text{spread}}$  [12]. Для того, чтобы неоднородности с размерами  $l \sim 1 \div 3$  км обеспечивали наблюдаемые на эксперименте квазипериоды флуктуаций  $\tau_f \sim 30$  с, необходимо, чтобы скорость их перемещения была меньше 100 м/с. Возникновение неоднородностей с масштабами  $l \sim 1 \div 3$  км может быть обусловлено усилением естественных неоднородностей вследствие эффектов самофокусировки мощной волны [5]. Падение интенсивности дискретного источника на частоте 9 МГц (без увеличения флуктуаций интенсивности) наиболее правдоподобно объясняется рассеянием радиоволн на неоднородностях  $l \leq 100$  м и  $\Delta N/N \sim (1 \div 5) \cdot 10^{-3}$ . Исследования флуктуаций радиоизлучения передатчика, установленного на ИСЗ (частота  $f = 136$  МГц) показали, что неоднородности таких масштабов действительно возникают в результате взаимодействия мощного радиоизлучения с ионосферной плазмой [25].

В Горьком и Боулдере проводились исследования влияния искусственных возмущений на интенсивность отраженных от ионосферы пробных волн при вертикальном [16, 18] и наклонном [9] падении пробных сигналов. При включении мощного передатчика, излучающего волну с обыкновенной поляризацией, интенсивность пробных волн обыкновенной поляризации уменьшалась на 10—15 дБ с характерным временем от 5 до 40 с в зависимости от мощности передатчика. Время релаксации интенсивности пробных волн составляло 20—30 с. Максимальное ослабление (15 дБ) интенсивности наблюдалось на частотах выше частоты мощного передатчика и уменьшалось до 3—5 дБ с уменьшением частоты пробной волны на 1 МГц.

На рис. 5 приведена зависимость от мощности передатчика коэффициента ослабления средней амплитуды пробной волны на трех фиксированных частотах. На пробных волнах с необыкновенной поляризацией максимальное ослабление не превышало 3 дБ. Аналогичные наблюдения были проведены также в Москве [21]. При этом максимальное ослабление пробной волны с обыкновенной поляризацией не превышало 3 дБ. Отсутствие сильных эффектов может быть связано с низкой

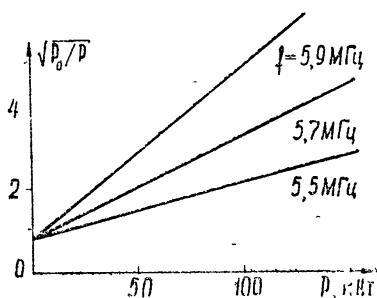


Рис. 5.



рабочей частотой и импульсной работой передатчика. Так же, как и в случае падения интенсивности дискретного источника на частоте 9 МГц, аномальное ослабление импульсных сигналов можно объяснить рассеянием радиоволн на мелкомасштабных неоднородностях с  $l \leq 100$  м и  $\Delta N/N \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ . При этом наиболее сильным эффектом является трансформация обыкновенной моды в необыкновенную ( $z$ -моду) с последующим поглощением этой моды или выходом ее за пределы ионосферы [26].

**Обнаружение плазменных и ионно-звуковых волн.** Процессы параметрической неустойчивости при взаимодействии мощного радиоизлучения с плазмой приводят к появлению плазменной турбулентности, т. е. к рождению плазменных и ионно-звуковых волн. Резкое увеличение (на 3—4 порядка) интенсивности плазменной линии на станции некогерентного рассеяния наблюдалось в Аресибо [13, 14, 23]. На рис. 6 приведена форма спектра плазменной линии, заимствованная из [23] (нулевая расстройка соответствует разности частот локалатора и возмущающего передатчика  $f_x - f_0 = 430$  МГц — 8,195 МГц). Характерным является острый пик на  $\Delta\omega \sim kv_{Ti}$  и плавный максимум шириной  $\Delta f \sim 20$  кГц. Интенсивность линии меняется в зависимости от мощности передатчика по степенному закону  $I \propto P^\alpha$ ,  $\alpha = 1,5 \div 4$  ( $\langle \alpha \rangle = 2$ ), хотя сама форма спектра не зависит от мощности.

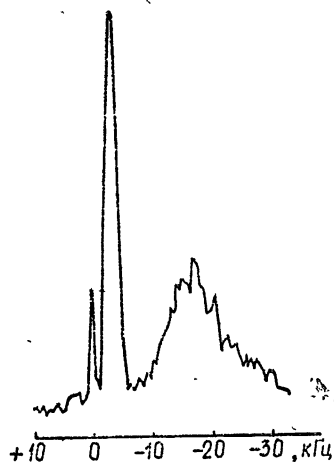


Рис. 6.

На рис. 7 показана интенсивность низкочастотной линии в зависимости от высоты ( $H$ ). Видно, что низкочастотные возмущения имеют

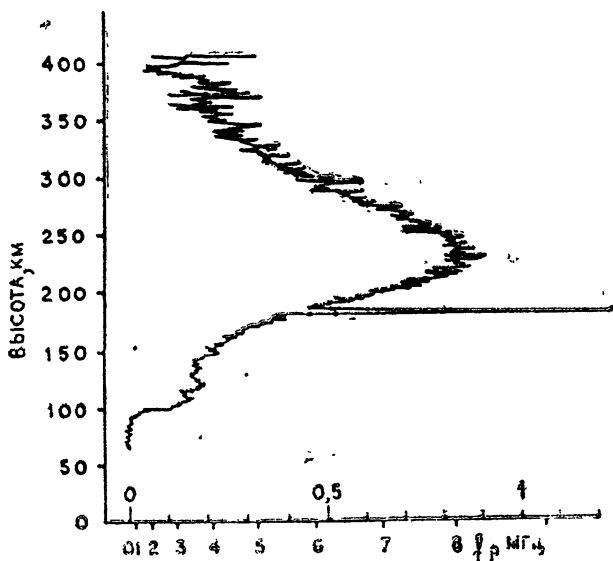


Рис. 7.

резкий пик на высоте, соответствующей высоте отражения мощного КВ сигнала. Интенсивность этого пика пропорциональна квадрату интенсивности плазменной линии или четвертой степени мощности КВ передатчика. Таким образом, измерения методом некогерентного рассеяния показывают резкое возрастание естественного уровня плазменных и низкочастотных колебаний при воздействии на ионосферу мощным радиоизлучением.

*Радиолокация искусственных ионосферных возмущений. Эксперименты по радиосвязи через возмущенную область.* Всесторонние исследования по рассеянию радиоволн КВ и УКВ диапазонов искусственными ионосферными возмущениями были проведены в Боулдере [24]. Для анализа эффективных поперечников, частотного и углового спектров рассеяния использовалось шесть разнесенных пунктов, оборудованных радарными со свипированием частоты в диапазоне 5—210 МГц, а также приемно-передающими установками на фиксированных частотах в диапазоне 30—435 МГц. Измерения показали, что эффективный поперечник рассеяния возмущенной области достигает  $\sigma \sim 10^8 \text{ м}^2$ , если выполняются так называемые условия «ракурсной чувствительности». Дело в том, что неоднородности вытянуты вдоль магнитного поля Земли  $H_0$ . Волны, рассеянные такими неоднородностями, образуют в пространстве конус волновых векторов  $K_s$ , ось которого совпадает с направлением  $H_0$ , а угол в вершине равен углу между волновым вектором падающей волны  $K_0$  и  $H_0$ . Прием рассеянных сигналов возможен лишь вблизи линии пересечения ракурсного конуса с поверхностью Земли. Плотность энергии рассеянных волн падает больше чем на 20 дБ, если углы рассеяния отличаются от ракурсного угла больше чем на 3°. Поперечник рассеяния слабо убывает с ростом частоты до 80 МГц; в диапазоне частот 80—150 МГц имеет место быстрое уменьшение  $\sigma$  на 20—30 дБ, а на более высоких частотах (по крайней мере до 435 МГц)  $\sigma$  снова слабо убывает с ростом частоты. Сечение рассеяния  $\sigma$  зависит от мощности возмущающего передатчика, как  $\sigma \sim P^\alpha$ , где  $\alpha$  лежит в пределах  $1/2 - 1$ . Радиус частотной корреляции рассеянных сигналов составляет днем несколько килогерц, а ночью меньше 1 кГц. Ширина спектра рассеянного сигнала пропорциональна его частоте и ночью в 2—3 раза шире, чем днем. Коэффициент пространственной корреляции падает до 0,1 при разнесении приемных антенн на 10λ.

Для исследований возможностей радиосвязи на УКВ через возмущенную область ионосферы проводились эксперименты, включающие передачу однополосных модулированных по амплитуде сигналов ( $\Delta f \sim 3 \text{ кГц}$ ), телетайп с использованием частотной модуляции ( $\Delta f \sim 1,6 \text{ кГц}$ ), передачу речи с частотной модуляцией ( $\Delta f \sim 30 \text{ кГц}$ ) и передачу изображения с частотной модуляцией ( $\Delta f \sim 3 \text{ кГц}$ ). Была хорошо принята информация с достаточно узкой полосой ( $\Delta f \sim 3 \text{ кГц}$ ) и очень плохо различалась речь при передаче с частотной модуляцией ( $\Delta f \sim 30 \text{ кГц}$ ). Эти эксперименты продемонстрировали, что рассеяние на неоднородностях, искусственно возбуждаемых мощными радиоволнами, может служить новым каналом связи.

*Модель искусственных ионосферных возмущений, возникающих при нормальном падении мощной волны [18].* Совокупность экспериментальных данных свидетельствует о том, что при воздействии на ионосферу мощным радиоизлучением возникают вытянутые вдоль магнитного поля Земли неоднородности различных масштабов, радикально влияющие на распространение радиоволн КВ диапазона. Особенно ярко это проявляется, когда возмущающая волна является обыкновенной нормальной волной, вблизи точки отражения которой возможно возбуждение параметрической неустойчивости, аномальный напрев плазмы, ускорение тепловых электронов и пр.

На рис. 8 обобщены все приведенные выше сведения об искусственных ионосферных возмущениях. Размеры неоднородностей ограничены снизу дебаевским радиусом  $d_e = \frac{v_{Te}}{\omega_{oe}} \sim 1$  см, а сверху — размерами

возмущенной области  $l \sim 100$  км.

Возмущения электронной концентрации  $\Delta N/N$  растут с ростом размеров от  $10^{-3}$  до  $10^{-1}$ . Величина возмущений и спектр их размеров определяется мощностью КВ передатчика (рисунок относится к потенциалу установок  $PG \approx 30$  Мвт). По-видимому, зависимость возмущений от мощности передатчика отличается от прямой пропорциональности (см. плазменные и ионно-звуковые колебания).

*Некоторые другие эффекты.* При работе мощной станции в Горьком наблюдались эффекты генерации низкочастотных волн с частотой, равной частоте модуляции мощного радиоизлучения. Эксперименты по обнаружению сигналов на комбинационных частотах проводились в Горьком на частотах от 1 до 7 кГц (частота модуляции КВ передатчика). Приемник находился в 100 км севернее Горького. В дневное время отчетливо регистрировался сигнал на частоте модуляции с напряженностью поля  $E \sim 0,01$  мкВ/м [17]. Скорее всего, эти эффекты нелинейного детектирования связаны с модуляцией ионосферных токовых систем при искусственном нагреве ионосферы.

При работе московского передатчика в импульсном режиме наблюдался эффект «дробления» отраженных от ионосферы мощных импульсных сигналов, заключающийся в появлении хаотической амплитудной и фазовой модуляции исходных импульсов с квазипериодом  $\tau \sim 100$  мкс [19]. Кроме того, в ряде случаев имел место эффект «резонатора» — расширение длительности импульса с сохранением квазипостоянной фазы [20]. Последние эффекты могут быть обусловлены параметрической неустойчивостью, возникающей при взаимодействии мощного излучения обыкновенной поляризации с ионосферной плазмой.

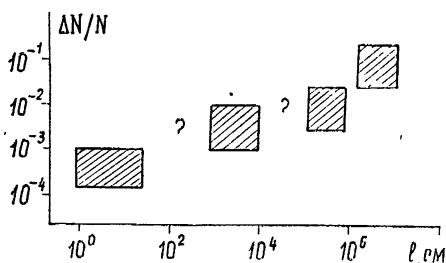


Рис. 8.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, **70**, 201, 393 (1960).
2. D. T. Farley, J. Geophys. Res., **68**, 401 (1963).
3. П. В. Блиох, А. С. Брюховецкий, Геомагнетизм и аэронавигация, **9**, 545 (1969).
4. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация, **12**, 24 (1972).
5. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
6. W. F. Utlaut, J. Geophys. Res., **75**, 6402 (1970).
7. W. F. J. Evans, E. J. Llewellyn, J. C. Haslett, L. R. McGill, J. Geophys. Res., **75**, 6425 (1970).
8. A. A. Biondi, D. P. Sipler, R. D. Hake, J. Geophys. Res., **75**, 6421 (1970).
9. P. Cohen, J. D. Whitehead, J. Geophys. Res., **75**, 6439 (1970).
10. C. L. Rufenach, J. Geophys. Res., **78**, 5611 (1973).
11. W. Wright, J. Geophys. Res., **78**, 5622 (1973).
12. W. F. Utlaut, E. J. Violette, J. Geophys. Res., **77**, 6804 (1972).
13. A. Y. Wong, R. J. Taylor, Phys. Rev. Lett., **27**, 644 (1971).
14. H. C. Carlson, W. E. Gordon, R. L. Showen, J. Geophys. Res., **77**, 1242 (1972).
15. У. Ютло, Р. Коэн, УФН, **109**, 371 (1973).

16. Г. Г. Гетманцев, Г. П. Комраков, Ю. С. Коробков, Л. Ф. Мироненко, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, В. Л. Фролов, В. А. Череповицкий, Письма в ЖЭТФ, 18, 621 (1973).
17. Г. Г. Гетманцев, Н. А. Зуйков, Д. С. Котик, и др., Письма в ЖЭТФ, 19 (1974).
18. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и др., УФН, 113, 732 (1974); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 4, 516 (1975).
19. И. С. Шлюгер, Письма в ЖЭТФ, 19, 247 (1974).
20. В. В. Васьюков, Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. А. Рыжов, В. Ю. Трахтенгерц, И. С. Шлюгер, К. И. Юрин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 10, 1426 (1975).
21. С. М. Грач, Ю. С. Коробков, К. И. Юрин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 7, 1064 (1975).
22. G. D. Thome, F. W. Perkins, Phys. Rev. Lett., 32, № 22, 1238 (1974).
23. I. J. Kantor, J. Geophys. Res., 79, № 1, 199 (1974).
24. W. F. Utlaut et al., Radio Science, 9, № 11, 881 (1974).
25. Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, Н. М. Прытков, В. О. Рапопорт, В. А. Череповицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
26. Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 9, 1273 (1975).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию  
26 декабря 1974 г.,  
после доработки  
25 июля 1975 г.

#### EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF NONLINEAR EFFECTS IN THE IONOSPHERIC *F*-REGION

*N. A. Mityakov, V. O. Rapoport, V. Yu. Trakhtengerts*

The results of experimental works on diagnostics of artificial ionospheric disturbances arising when the ionospheric *F*-region is affected by a powerful SW radiation. An artificial heating of *F*-region is accompanied by formation of different scale ( $l = 1 \div 10^7$  cm) inhomogeneities which influence essentially on SW radio wave propagation.

УДК 621.371.25

## РАССЕЯНИЕ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ КАНАЛАХ

*А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина*

Исследуется влияние рассеяния на распространение радиоволн в ионосферных волновых каналах. Получено уравнение диффузионного типа, описывающее изменение из-за рассеяния распределения интенсивности поля по адиабатическим инвариантам (т. е. по волновым модам канала). На примере параболического канала исследовано распределение интенсивности по волновым модам, захват, поглощение и выход излучения из канала.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим распространение пучка радиоволн в ионосферном волноводном канале. Распределение интенсивности в пучке можно описывать уравнением переноса излучения [1]. Учтем, что захваченные в ионосферный канал радиоволны распространяются, в основном, в горизонтальном направлении  $\theta$  вдоль поверхности Земли. Их отклонения в направлении вертикали  $z$  малы ( $k_z \ll k_\theta$ ). Примем, что в горизонтальном направлении  $\varphi$  отклонения от оси пучка также невелики ( $k_\varphi \ll k_\theta$ ). Тогда можно воспользоваться приближением малых углов [2, 3]. Учтем, кроме того, что для рассматриваемых здесь радиоволн высокой частоты в ионосфере диэлектрическая проницаемость  $\epsilon \approx 1$ . Уравнение переноса излучения принимает при этом вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_0} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\alpha}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon'}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{1}{2R_0} \frac{\partial \epsilon'}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \\ = -\alpha^* f + \iint G(\alpha - \alpha', \beta - \beta') f(\theta, z, \varphi, \alpha', \beta') d\alpha' d\beta'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $f(\theta, z, \varphi; \alpha, \beta)$  — функция распределения интенсивности излучения,  $z$  — высота,  $\theta$  — угол в направлении оси пучка ( $R_0 \theta$  — расстояние, пройденное пучком в горизонтальном направлении, т. е. вдоль поверхности Земли),  $\varphi$  — азимутальный угол, в направлении, ортогональном оси пучка,  $\beta$  — угол с горизонталью  $z = \text{const}$ ,  $\alpha$  — угол с направлением  $\theta$  в горизонтальной плоскости. Плотность энергии излучения в точке  $\{z, \theta, \varphi\}$  связана с интенсивностью  $f$  соотношением

$$W(z, \theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f d\alpha d\beta, \quad (2)$$

где интегрирование ведется по всем углам  $\alpha, \beta$  (формально от  $-\infty$  до  $+\infty$ ).

Уравнение (1) эквивалентно двумерному кинетическому уравнению: роль времени играет координата вдоль оси пучка  $\theta$ , роль скоростей — углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Уравнения характеристик для (1):

$$\frac{dz}{R_0 d\theta} = \beta, \quad \frac{d\beta}{R_0 d\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon'}{\partial z}, \quad \frac{d^2 z}{d\theta^2} = \frac{R_0^2}{2} \frac{\partial \epsilon'}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\alpha}{\sin\theta}, \quad \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi}. \quad (4)$$

Здесь

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{2z}{R_0} \quad (5)$$

— эффективная диэлектрическая проницаемость.

Уравнения (3)—(5) совпадают с уравнениями геометрической оптики в приближении малых углов. Из (3) следует, что захваченный в капал луч совершает осцилляцию по  $z$ , подобные осцилляциям частицы в поле с потенциалом  $U(z) = -\varepsilon'(z)$  [4]. В правой части уравнения (1)  $\alpha^*$  — коэффициент полного ослабления волны,  $G(\gamma)$  — функция рассеяния.

В [2, 3] показано, что преобразованием Фурье по переменным  $\alpha, \beta$  уравнение (1) сводится к уравнению для функции  $\Gamma$ ,

$$\Gamma(\theta, \mathbf{R}, \rho) = \iint f(\theta, \mathbf{R}, \mathbf{l}) e^{i\rho \mathbf{l}} d^2 \mathbf{l} \quad (\mathbf{l} = (\alpha, \beta)), \quad (6)$$

являющейся функцией когерентности случайного поля  $E(\theta, \rho)$ :

$$\Gamma(\theta, \mathbf{R}, \rho) = \langle E(\theta, \rho_1) E^*(\theta, \rho_2) \rangle.$$

Здесь  $\mathbf{R} = (z, R_0, \varphi) = (\rho_1 + \rho_2)/2$ ,  $\rho = k(\rho_1 - \rho_2)$ . То же уравнение для функции  $\Gamma$  может быть получено и непосредственно из рассмотрения электрического поля волны  $E(\theta, \rho)$  в среде с непрерывными случайными неоднородностями  $\varepsilon_1$ , если поле  $E(\theta, \rho)$  описывается в приближении параболического уравнения [5, 6]. При этом коэффициент  $\alpha^*$  и функция  $G$  в (1) выражаются через функцию корреляции неоднородностей среды  $A(\rho)$  соотношениями

$$\alpha^* = k \operatorname{Im} \varepsilon + \frac{k^2}{4} A(0), \quad (7)$$

$$G(\gamma) = \frac{k^2}{4} \iint e^{-i\gamma \rho k} A(\rho) d\rho,$$

где

$$A(\rho_1 - \rho_2) = R_0 \int \langle \varepsilon_1(\theta_1, \rho_1) \varepsilon_1(\theta_2, \rho_2) \rangle d(\theta_1 - \theta_2). \quad (8)$$

При рассмотрении распространения радиоволн в ионосферных каналах нам будет удобнее пользоваться уравнением (1) для интенсивности излучения, а не эквивалентным уравнением для функции когерентности  $\Gamma(\theta, \mathbf{R}, \rho)$ . Следует, однако, иметь в виду, что функция когерентности учитывает в параболическом приближении эффекты дифракции. При рассмотрении ограниченных по  $\rho$  каналов из граничных условий для поля  $E(\theta, \rho_1)$  и  $E^*(\theta, \rho_2)$  вытекают условия на обе переменных  $\mathbf{R}$  и  $\rho$  функции  $\Gamma$ . Отсюда следует, что для правильного учета тех же эффектов в уравнении (1) соответствующие граничные условия должны быть наложены как на  $\mathbf{R}$  (т. е.  $z, \varphi$ ), так и на  $\mathbf{l}$  (т. е.  $\alpha, \beta$ ) переменные. Начальное условие для  $f$  также следует, вообще говоря, выбирать, используя фурье-трансформанту от начальной функции когерентности  $\Gamma(\theta, \mathbf{R}, \rho)$  [5].

Перейдем теперь к упрощению уравнения (1). Примем прежде всего, что на протяжении одной осцилляции захваченного луча рассеяние невелико, так что распределение интенсивности по вертикальным переменным  $z, \beta$  в первом приближении зависит лишь от адиабатического инварианта  $I$  (или, что то же, от номера волновой моды канала), т. е.

$$f = f(\theta, I; \varphi, \alpha). \quad (9)$$

В ионосфере такие условия обычно хорошо выполнены. Удобно рассматривать при этом уровни  $E$  и  $I(E)$  согласно [4, 7]:

$$I(E) = \frac{4}{R_0} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sqrt{E - U(z)} dz; \quad (10)$$

$$\frac{dI}{dE} = \frac{2}{R_0} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{E - U(z)}} = \Theta(E) = \Theta(I). \quad (11)$$

Здесь  $U(z) = -\varepsilon'(z)$  — эффективный потенциал,  $\Theta(E)$  — период колебаний по  $\theta$ . Учитывая (9), можно усреднить уравнение (1) по поверхностям  $I = \text{const}$ . Для этого умножим (1) на  $\delta(I - I(E)) \delta(E - \beta^2 - U(z))$  и проинтегрируем его по фазовому объему  $d\beta dz dE$  (уравнение  $E = \beta^2 + U(z)$  следует из уравнений характеристик (3)). Имеем

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial f}{\partial \theta} A_1 + \frac{\alpha}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} A_1 + \frac{1}{2R_0} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \bar{\varepsilon}^-}{\partial \varphi} A_1 = -\bar{\alpha}^* A_1 f + \bar{J} A_1. \quad (12)$$

Члены, пропорциональные  $\frac{\partial f}{\partial z}$  и  $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ , в левой части уравнения (1) исчезают в силу того, что инвариант  $I$  является интегралом уравнений для характеристик (3) (см. [3]). Далее,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int \delta(I - I(E)) \delta(E - \beta^2 - U(z)) dE d\beta dz = - \int \delta(I - I(E)) dE \int \frac{dz}{2\sqrt{E - U}} = \\ &= -\frac{R_0}{4} \int \delta(I - I(E)) \Theta(E) dE = \frac{R_0}{4} \frac{\Theta(E)}{\frac{dI}{dE}} = \frac{R_0}{4}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}^-}{\partial \varphi} = \frac{1}{A_1} \int \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} \delta(I - I(E)) \delta(E - \beta^2 - U(z)) dE d\beta dz = \quad (13)$$

$$= \frac{2}{R_0 \Theta(I)} \left( \int \frac{\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} dz}{\sqrt{E - U(z)}} \right)_{E = E(I)},$$

$$\bar{\alpha}^* = \frac{2}{R_0 \Theta(I)} \left( \int \frac{\alpha^* dz}{\sqrt{E - U(z)}} \right)_{E = E(I)};$$

$$\begin{aligned} \bar{J} &= -\frac{4}{\Theta(I) R_0} \int \delta(E(I) - \beta^2 - U(z)) G(\beta - \beta', \alpha - \alpha') f(\theta, I', \varphi, \alpha') \times \\ &\quad \times d\beta d\beta' d\alpha' dz = \int \bar{G}(\alpha - \alpha', I, I') f(\theta, \alpha', I') d\alpha' dI', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}(\alpha - \alpha', I, I') &= -\frac{4}{\Theta(I) R_0} \int G(\beta - \beta', \alpha - \alpha') \delta[E(I) - \beta^2 - U(z)] \times \\ &\quad \times \delta(I' - I'(E')) \delta(E' - \beta'^2 - U(z)) d\beta' d\beta dz dE' = \quad (14) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R_0 \Theta(I) \Theta(I')} \int \frac{dz G(\sqrt{E(I) - U(z)} - \sqrt{E(I') - U(z)}, \alpha - \alpha', z)}{\sqrt{E(I') - U(z)} \sqrt{E(I) - U(z)}}.$$

Учтем, что начальное распределение пучка по горизонтальному

углу  $\alpha$  определяется свойствами излучателя. Оно может быть плавным с характерной шириной  $\alpha_0$ . Если при этом рассеяние в ионосфере достаточно слабое, так что

$$R_0 A''(0) \ll \alpha_0, \quad (15)$$

то рассеяние по  $\alpha$  не окажет существенного влияния на распределение интенсивности даже на сверхдальней трассе. В этом случае

$$f(\theta, I; \alpha, \varphi) \approx f(\theta, I; \alpha_0, \varphi(\alpha_0, \varphi_0)), \quad (16)$$

где функция  $\varphi(\alpha_0, \varphi_0)$  определяется уравнением характеристик (4):

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} \right\rangle_I. \quad (17)$$

Здесь принято, что  $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi}$  слабо зависит от  $I$ :

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} \approx \left\langle \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} \right\rangle_I,$$

где  $\left\langle \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} \right\rangle_I$  — усредненная по  $I$  величина  $\left( \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} \right)$ . В частности, если  $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi} \approx 0$ , то из (17) вытекает

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha_0 \ln \left( \frac{\sin \theta}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right).$$

Следует подчеркнуть, что рассеянием по  $\alpha$ , разумеется, далеко не всегда можно пренебрегать. Прежде всего, оно может быть существенным в областях фокусировки  $\theta = \pi$  и  $\theta = 2\pi$ . С рассеянием по  $\alpha$  и рефракцией  $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varphi}$  связана значительная дисперсия времени запаздывания кругосветных сигналов и т. д. Однако в настоящей работе мы сосредоточим внимание лишь на эффектах вертикального рассеяния, которые играют основную роль. Поэтому для распределения по  $\alpha$  и  $\varphi$  в дальнейшем примем приближение слабого рассеяния (15) — (17). В этом случае оказывается существенным лишь распределение по  $I$  и уравнение (12) после подстановки (16) принимает вид

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\bar{\alpha}^* f + \int \bar{G}(I, I') f(I', \theta) dI'. \quad (18)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (18) связано с возможностью использования диффузионного приближения для оператора рассеяния. Действительно, характерные размеры неоднородностей в верхней ионосфере велики,

$$ka \gg 1, \quad (19)$$

и в силу этого главный вклад вносит рассеяние на малые углы. Оператор рассеяния по  $\beta$  в (1) и далее можно поэтому записать в дифференциальной форме:

$$J_\beta = \frac{k^2}{4} A(0) f + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( D \frac{\partial f}{\partial \beta} \right), \quad D = \frac{1}{8} A''(0), \quad (20)$$



Усредним теперь  $J_\beta$  согласно (12). Учтем, что  $f = f(I)$ , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \beta} &= \frac{\partial f}{\partial I} \frac{dI}{dE} \frac{\partial E}{\partial \beta} = 2\beta \frac{\partial f}{\partial I} \Theta, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} &= 2\Theta \frac{\partial f}{\partial I} + 4\beta^2 \frac{\partial \Theta}{\partial E} \frac{\partial f}{\partial I} + 4\beta^2 \Theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial I^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя теперь (21) в (12) и произведя усреднение, находим

$$\bar{J}_\beta = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \frac{8}{R_0} \frac{\partial f}{\partial I} \int D \Theta(E) \delta(I - I(E)) \delta(E - \beta^2 - U) d\beta dz dE = \bar{D}(I) \frac{\partial f}{\partial I},$$

$$\bar{D} = \frac{4}{R_0} \int \frac{D(z, \theta) dz}{\sqrt{E(I) - U}},$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{16}{R_0} \int \left( \frac{d\Theta}{dE} \frac{\partial f}{\partial I} + \Theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial I^2} \right) \beta^2 \delta(I - I(E)) \delta(E - \beta^2 - U) d\beta dz dE = \\ &= 2D_1(I) \left[ \frac{d\Theta}{dI} \frac{\partial f}{\partial I} + \Theta \frac{\partial^2 f}{\partial I^2} \right], \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{4}{R_0} \left[ \int D(z, \theta) \sqrt{E - U(z)} dz \right]_{E=E(I)}, \quad \frac{d\Theta}{dI} = \frac{d\Theta}{dE} \frac{1}{\Theta} = \left( \frac{d \ln \Theta}{dE} \right)_{E=E(I)}.$$

Учитывая, что

$$\frac{dD_1}{dE} = \frac{1}{2} \bar{D}$$

и, следовательно,

$$\frac{dD_1}{dI} = \frac{1}{2} \frac{\bar{D}}{\Theta},$$

можно представить  $\bar{J}_\beta = J_1 + J_2$  в виде

$$\bar{J}_\beta = 2 \frac{\partial}{\partial I} \left( D_1 \Theta \frac{\partial f}{\partial I} \right). \quad (22)$$

Итак, соединяя (22) и (18), имеем окончательно:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial I} \left[ D \Theta \frac{\partial f}{\partial I} \right] - K(I) f; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} D(I, \theta) &= 8 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} D(z, \theta) \sqrt{E(I) - U(z)} dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} A''(0, z, \theta) \times \\ &\times \sqrt{E(I) - U(z)} dz, \end{aligned}$$

$$K(I) = \frac{4\pi e^2}{mc \omega^2 \Theta} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{N(z) \nu(z) dz}{\sqrt{E(I) - U(z)}}. \quad (24)$$

Здесь  $K(I)$  — усредненное поглощение волны.

Отметим, что возможность использования в условиях ионосферы уравнения рассеяния в дифференциальной форме (23) связана также

с тем, что волновые каналы имеют здесь очень большое число мод — порядка  $10^2 - 10^3$  [4]. Эффективное рассеяние на длине порядка периода осцилляций  $\Theta$  фактически всегда превосходит расстояние между модами. Поэтому распределение интенсивности по модам должно носить сглаженный характер, что и позволяет использовать диффузионное приближение.

Граничные условия к уравнению (23) задаются на дне канала (при  $I = 0$ ) и на его границе  $I = I_0$ . На дне канала отсутствует поток энергии, т. е. при  $I \rightarrow 0$

$$\left( D \Theta \frac{\partial f}{\partial I} \right)_{I \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (25)$$

Поскольку вблизи дна яма параболическая, т. е.  $D\Theta \rightarrow CI$  (см. ниже), то условие (25) переписывается в виде

$$\left( I \frac{\partial f}{\partial I} \right)_{I \rightarrow 0} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Условия на границе канала  $I = I_0$  различны для зоны распространения и зоны захвата. В зоне распространения излучением вне канала можно пренебречь (вследствие его усиленного поглощения в нижних слоях ионосферы или рассеяния). Поэтому здесь

$$f|_{I=I_0} = 0, \quad (27)$$

так как за границей канала  $f \rightarrow 0$ , а уравнение диффузии (23) не допускает разрыва  $f$ .

В зоне захвата в начальный момент  $\theta = 0$

$$f|_{\theta=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } I < I_0 \\ f_0(I) & \text{при } I > I_0 \end{cases}, \quad (28)$$

где  $f_0(I)$  — значение  $f$  в области вне канала, определяющееся диаграммой направленности антенны излучателя\*. Подчеркнем, что рассматриваемое здесь диффузионное уравнение с условием (28) описывает лишь захват излучения в межслоевой канал  $FE$  при условии  $f < f_{\text{мпч}}$ . Захват в противоположном случае  $f > f_{\text{мпч}}$  рассматривался в [9].

Подчеркнем, что граница канала, вообще говоря, не постоянна, а меняется с изменением  $\theta$ :

$$I_0 = I_0(\theta). \quad (29)$$

При этом  $I_0$  может как нарастать, так и убывать по трассе пучка, что оказывается весьма существенным для условий захвата излучения в канал и выхода из него.

## 2. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ КАНАЛ

Вблизи дна канала, т. е. в окрестности точки «скольжения»  $z_c$ , потенциальная яма всегда параболическая:

$$U(z) = U(z_c) + \frac{1}{2} U''(z_c)(z - z_c)^2. \quad (30)$$

\* Удобно нормировать  $f$  на интегральную по высоте плотность энергии волны:

$$P = \int W dz = \int f dl.$$

Инвариант  $I$  вне канала ( $I > I_0$ ) вычисляется по формуле (10), где  $z_{\text{min}} = z_{\text{min}}(I_0)$ , а  $z_{\text{max}}$  — точка отражения волны.

В этом случае, согласно (10), (11), (24),

$$I = \frac{4}{R_0} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \sqrt{E - U(z_c) - \frac{1}{2} U''(z - z_c)^2} dz = \frac{2\sqrt{2}\pi}{R_0 \sqrt{U''(z_c)}} (E - U_c),$$

$$\Theta_0 = \frac{\partial I}{\partial E} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{R_0 \sqrt{U''(z_c)}}, \quad D = \frac{8\pi}{\sqrt{2} U''_c} (E - U_c) D_0 = 2R_0 D_0 I,$$

$$D_0 = D(z_c) = \frac{1}{8} A''(0, z_c)$$

и уравнение (23) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial I} \left( I \frac{\partial f}{\partial I} \right) - K(I, \tau) f. \quad (32)$$

Здесь введена переменная  $\tau$ ,

$$\tau = 2R_0 \int_0^\theta D_0(\theta') \Theta_0(\theta') d\theta', \quad (33)$$

учитывающая, что коэффициент  $D_0$  и период  $\Theta_0$  могут, вообще говоря, изменяться вдоль трассы пучка  $D_0 = D_0(\theta)$ ,  $\Theta_0 = \Theta_0(\theta)$ . Если  $D_0 \neq D_0(\theta)$ ,  $\Theta_0 \neq \Theta_0(\theta)$ , то  $\tau \sim \theta$ .

Поглощение равно

$$K(I, \tau) = \frac{K(I, \theta)}{2D_0\Theta_0R_0}, \quad (34)$$

где  $\theta = \theta(\tau)$  согласно (33).

Уравнение параболического канала является точным вблизи дна ямы. Его, однако, можно использовать и для всего канала в качестве модельного уравнения, позволяющего изучить характерные особенности диффузии лучей и выявить основные параметры задачи.

а) *Распределение интенсивности по волновым модам канала.* Рассмотрим зону распространения (27). Пренебрежем вначале поглощением и примем, что граница  $I_0$  постоянна:

$$I_0 = I_0(\theta) = \text{const}. \quad (35)$$

Решение уравнения (32) можно представить тогда в виде ряда

$$f(\tau, I) = \sum_k C_k e^{-\lambda_k \tau} f_k(I). \quad (36)$$

Для функций  $f_k(I)$  из (32) следует уравнение

$$\frac{d^2 f_k}{dI^2} + \frac{1}{I} \frac{\partial f_k}{\partial I} + \frac{\lambda_k}{I} f_k = 0. \quad (37)$$

Его решение, удовлетворяющее условию (26), —

$$f_k = J_0(2\sqrt{\lambda_k I}), \quad (38)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка,  $\lambda_k$  — константы. Они определяются граничным условием (27):

$$2\sqrt{\lambda_k I_0} = \beta_k, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k^2}{4I_0}, \quad \lambda_k \approx \frac{\pi^2}{4I_0} \left(k - \frac{1}{4}\right)^2. \quad (39)$$

Здесь  $\beta_k$  — нули функции  $J_0(z)$ :  $\beta_1 = 2,4048$ ;  $\beta_2 = 5,5201$  и т. д. Значения  $\lambda_k$  резко нарастают с номером  $k$ . Это означает, что при распростра-

нении волны в канале высокие гармоники ( $k \gg 1$ ) быстро диссипируют, так что главную роль играют первые гармоники:  $f_1, f_2, \dots$

Основная гармоника

$$f_1 = C_1 J_0(\beta_1 \sqrt{I/I_0}) \quad (40)$$

дает наиболее устойчивое («квазистационарное») распределение энергии волны по адиабатическим инвариантам, или же относительную интенсивность возбуждения мод ионосферного волновода. Квазистационарное распределение (40) показано на рис. 1.

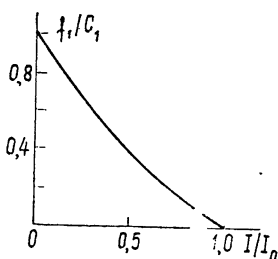


Рис. 1.

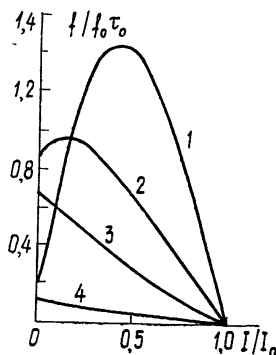


Рис. 2.

Энергия волны, захваченной в канал, диссипирует вследствие высыпания лучей из канала. Поток энергии, вытекающей из канала,

$$S = -2 \left( I \frac{\partial f}{\partial I} \right)_{I_0} D_0 \Theta_0 c / R_0. \quad (41)$$

Для основной гармоники (40)

$$S = 1,25 C_1 D_0 \Theta_0 c / R_0. \quad (42)$$

Уменьшение энергии волны в канале, обусловленное высыпанием, описывается множителями  $e^{-\lambda_k \tau}$ . Это уменьшение существенно для  $k$ -й гармоники, если

$$\lambda_k \tau \approx \frac{\beta_k^2 D_0 \Theta_0 R_0 \theta}{2 I_0} \gg 1. \quad (43)$$

В условиях ионосферы

$$D_0 \approx (2 \cdot 10^{-11} \div 10^{-14}) \text{ см}^{-1}, \quad R_0 \approx 6,4 \cdot 10^8 \text{ см}, \quad (44)$$

$$I_0 \approx 0,1, \quad \Theta_0 \approx 0,5,$$

так что на кругосветном пути ( $\theta = 2\pi$ ) возможно значительное затухание даже основной гармоники\*.

б) *Захват излучения в канал.* Вначале излучения в канале нет, т. е. начальное условие при  $\tau = 0$  имеет вид (28)

$$f|_{\tau=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } I < I_0 \\ f_0 & \text{при } I > I_0 \end{cases}. \quad (45)$$

Здесь принято  $f_0(I) \approx f_0(I_0)$ . Будем считать по-прежнему, что поглоще-

\* При численной оценке  $D_0$  учтено, что  $D_0 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4a} (\Delta\epsilon)^2$  [10], и принято, что размер неоднородностей  $a \sim (200 \div 1000) \text{ м}$ , а флуктуации диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$ .

ние отсутствует и граница канала  $I_0$  постоянна (35). Зона захвата — один период  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , т.е.

$$0 \leq \tau \leq \tau_0 \approx 2 D_0 R_0 \theta_0^2. \quad (46)$$

Найдем решение уравнения (32) ( $K(I) = 0$ ) при начальном условии (45) и граничном условии (26). Перейдем для этого к новой переменной

$$x = I - I_0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = (I_0 + x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Считая, что за малое «время»  $\tau \leq \tau_0$  канал заполняется главным образом на верхних уровнях  $I \approx I_0$ , можем в (47) пренебречь  $x$  в сравнении с  $I_0$  и, кроме того, заменить граничное условие (26) при  $I \rightarrow 0$  условием регулярности решения при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$f \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty. \quad (48)$$

Одновременно следует пренебречь и последним членом в (47), так как  $\frac{\partial f}{\partial x}$  одного порядка с  $\frac{x \partial^2 f}{\partial x^2}$ . Тогда граничное условие (48), начальное условие (45) и само уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = I_0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (49)$$

не содержат характерных размеров по  $x$  и  $\tau$ . Поэтому решение задачи должно носить автомодельный характер:

$$f = f(p), \quad p = x/2 \sqrt{I_0 \tau}. \quad (50)$$

Подставляя (50) в (49), находим

$$-p \frac{df}{dp} = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dp^2}.$$

Отсюда, учитывая условия (55), (48), имеем

$$f = \frac{f_0}{2} [1 - \Phi(p)], \quad (51)$$

$$\Phi(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-t^2} dt.$$

Формула (51) с учетом (50), (47) описывает изменение интенсивности в канале и вне его при  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ .

В конце зоны захвата при  $\tau = \tau_0$  для распределения интенсивности в канале согласно (51) имеем

$$f = \frac{f_0}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{I_0 - I}{2 \sqrt{I_0 \tau_0}} \right) \right]. \quad (52)$$

Эта формула справедлива, лишь если аргумент функции  $\Phi$  при  $I \approx 0$  достаточно велик,  $p_0 > 1$ , т.е. если

$$\tau_0 < I_0/4. \quad (53)$$

В противном случае условие (48) не выполнено.

Полная мощность, захваченная в канал,

$$P = \int_0^{I_0} f dI = \frac{f_0}{2} \left\{ I_0 \left( 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{I_0}{4\tau_0}} \right) \right) + \frac{2\sqrt{I_0\tau_0}}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{-I_0/4\tau_0}) \right\} \approx \approx f_0 \sqrt{I_0\tau_0} / \sqrt{\pi}. \quad (54)$$

Если выполнено условие, обратное (53), то в канале при всех  $I$

$$f \approx f_0, \quad P \approx f_0 I_0. \quad (55)$$

В этом случае имеет место максимальное заполнение канала.

Значение параметра  $\tau_0$  в условиях ионосферы согласно (44)

$$\tau_0 \approx 3 \cdot 10^{-2} \div 3 \cdot 10^{-4}. \quad (56)$$

Следовательно, условие (53) не выполняется лишь в случае весьма узких каналов. Подчеркнем, что в области вблизи границы  $I_0$  профиль канала всегда сильно отличается от параболического. Поэтому для исследования реальной ситуации в области захвата требуется дополнительный анализ точного уравнения (23) (см. разд. 3).

в) *Изменение распределения интенсивности при распространении волны в канале.* В процессе захвата в канале устанавливается распределение (52) в условиях  $f < f_{\text{мпч } E}$  или аналогичное распределение в условиях  $f > f_{\text{мпч } [9]}$ . Захваченное излучение сосредоточено при этом, в основном, на верхних уровнях  $I \approx I_0$ . Рассмотрим, как происходит трансформация распределения  $f(I)$  при последующем распространении волны в канале ( $\tau \geq \tau_0$ ). Оно описывается решением уравнения (32) ( $K = 0$ ) с граничными условиями (26), (27), т. е. имеет вид (36) — (39):

$$f(\tau, I) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0 \left( \beta_k \sqrt{\frac{I}{I_0}} \right) \exp \left[ -\frac{\beta_k^2}{4I_0} (\tau - \tau_0) \right]. \quad (57)$$

Здесь  $\tau_0$  — момент окончания захвата (46). Нужно, таким образом, лишь найти коэффициенты  $C_k$ :

$$C_k = \frac{1}{q} \int_0^{I_0} f_0(I) J_0(\beta_k \sqrt{I/I_0}) dI = \frac{2I_0}{q} \int_0^1 f_0(x^2) J_0(\beta_k x) x dx, \quad (58)$$

$$q = \int_0^1 J_0^2(\beta_k x) x dx = J_1^2(\beta_k)/2, \quad x = \sqrt{I/I_0}.$$

Здесь  $f_0(I)$  — начальное распределение:  $f_0(I) = f(\tau_0, I)$ .

В случае, рассмотренном в предыдущем разделе, функция  $f_0(I)$  определена формулой (52), т. е.

$$f_0(x^2) \approx \frac{f_0}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{1-x^2}{a} \right) \right], \quad a = 2\sqrt{\tau_0/I_0}.$$

При выполнении условия (53)  $a \ll 1$ . Учитывая это, можно вычислить интеграл (58). Действительно, при  $a \ll 1$

$$f_0(x^2) \approx \frac{f_0}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{2(1-x)}{a} \right) \right] = \frac{f_0}{2} [1 - \Phi(\xi)],$$

$$\xi = 2(1-x)/a.$$

Переходим в (58) вместо  $x$  к переменной  $\xi$ . Имеем

$$x = 1 - \frac{a}{2}\xi, \quad dx = -\frac{a}{2}d\xi,$$

$$C_k = \frac{af_0 I_0}{2q} \int_0^{2/a} J_0 \left( \beta_k - \frac{\beta_k a}{2} \xi \right) \left( 1 - \frac{a}{2} \xi \right) [1 - \Phi(\xi)] d\xi \approx$$

$$\approx \frac{a^2 \beta_k f_0 I_0}{4q} J_1(\beta_k) \int_0^{2/a} \xi [1 - \Phi(\xi)] d\xi \approx \frac{a^2 \beta_k I_0 f_0}{16q} J_1(\beta_k).$$

Здесь учтено, что при  $a \ll 1$

$$J_0 \left( \beta_k - \frac{\beta_k a}{2} \xi \right) \approx J_0(\beta_k) + \frac{\beta_k a}{2} \xi J_1(\beta_k) = \frac{\beta_k a}{2} \xi J_1(\beta_k).$$

Учитывая, наконец, конкретные выражения для  $q$  и  $a$ , имеем окончательно:

$$C_k = C_{k0} \tau_0 f_0, \quad C_{k0} = \beta_k / 2 J_1(\beta_k). \quad (59)$$

Значения первых коэффициентов  $C_{k0}$  представлены в табл. 1.

Таблица 1

$k$	1	2	3	4	5
$C_{k0}$	2,23	-8,14	16,0	-25,4	36,2

Распределение  $f(I)/f_0 \tau_0$  при различных значениях параметра  $(\tau - \tau_0)/4I_0$ , определенное согласно (57), (59), представлено на рис. 2 (кривые 1, 2, 3, 4 построены для значений  $\frac{\tau - \tau_0}{4I_0}$ , равных 0,05; 0,1; 0,2; 0,5). Из

рисунка видно, что начальное распределение  $f_0(I) = f(I)|_{\tau=\tau_0}$  быстро диссипирует и вырождается, приближаясь к «квазистационарному» распределению (40). Амплитуда «квазистационарного» распределения

$$C_1 = 2,23 f_0 \tau_0.$$

г) *Изменение границы канала.* Ранее всегда предполагалось, что границы канала  $I_0$  постоянны (35). Рассмотрим теперь более общий случай (29), когда  $I_0 = I_0(\theta)$ . Естественно, что если  $\frac{dI_0}{d\theta}$  достаточно мало, то решение уравнения (32) по-прежнему имеет вид (36) — (39), где  $I_0 = I_0(\theta)$ . Однако при быстром изменении  $I_0(\theta)$  вид функции  $f(I, \theta)$  должен существенно исказиться.

Здесь мы рассмотрим только вопрос о влиянии изменения границы  $I_0(\theta)$  на захват волн. Уравнение (32) в этом случае имеет по-прежнему вид (47), (49). Начальное условие (45) ставится при  $\tau = 0$ , т. е. при  $I_0 = I_0(0)$ . Поэтому решение уравнения (49) в условиях (53) определено формулой (51), где теперь  $I_0 = I_0(0)$ . Этот результат вполне естествен, так как решение (51) непрерывно описывает функцию  $f(I)$  как внутри, так и вне канала. Граница  $I_0$  выделена при этом только в силу начального условия (45).

Таким образом, распределение (52) в зоне захвата справедливо и в условиях переменной границы  $I_0(\tau)$  при замене  $I_0$  на  $I_0(0)$ . Полное же количество захваченной энергии  $P$  определяется положением границы  $I_0$  в момент окончания захвата  $I_0(\tau_0)$ , так как захвачены все волны с  $I \leq I_0(\tau_0)$ :

$$P = \int_0^{I_0(\tau_0)} f dI = \frac{f_0}{2} \left\{ I_0(\tau_0) - I_0(0) \Phi \left( \frac{I_0(0)}{2\sqrt{I_0(0)\tau_0}} \right) + (I_0(\tau_0) - I_0(0)) \times \right.$$

$$\times \Phi \left( \frac{I_0(\tau_0) - I_0(0)}{2 \sqrt{I_0(0) \tau_0}} \right) - \frac{2 \sqrt{I_0(0) \tau_0}}{\sqrt{\pi}} \left[ \exp \left( -\frac{I_0^2(0)}{4 I_0(0) \tau_0} \right) - \exp \left( -\frac{(I_0(\tau_0) - I_0(0))^2}{4 I_0(0) \tau_0} \right) \right] \Bigg\}.$$

Учитывая условие (53), получаем

$$P \approx \frac{f_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{I_0(0) \tau_0} \exp \left( -\frac{(I_0(\tau_0) - I_0(0))^2}{4 I_0(0) \tau_0} \right) + \frac{f_0}{2} (I_0(\tau_0) - I_0(0)) \times \left[ 1 + \Phi \left( \frac{I_0(\tau_0) - I_0(0)}{2 \sqrt{I_0(0) \tau_0}} \right) \right]. \quad (60)$$

Отсюда видно, что если граница канала изменяется достаточно медленно,

$$|I_0(\tau_0) - I_0(0)| \approx \left| \tau_0 \left( \frac{dI_0}{d\tau} \right)_0 \right| \ll 2 \sqrt{I_0 \tau_0}, \quad (61)$$

то этот процесс слабо сказывается на захвате: фактически захваченная энергия определяется по-прежнему формулой (54). Если же выполнено условие, обратное (61),

$$\left| \frac{dI_0}{d\theta} \right| \gg 2 \sqrt{2} \sqrt{R_0 D_0 I_0}, \quad (62)$$

то изменение границы канала оказывается, напротив, определяющим. При этом если  $\frac{dI_0}{d\theta} > 0$ , т. е. если объем канала увеличивается по трассе луча, то

$$P \approx f_0 [I(\tau_0) - I_0]. \quad (63)$$

Если же  $\frac{dI_0}{d\theta} < 0$ , то захват в условиях (62) экспоненциально мал.

Таким образом, при наличии значительного градиента  $\frac{dI_0}{d\theta}$  (или же при слабом рассеянии  $D_0 \rightarrow 0$  (62)) захват носит фактически «динамический» характер, т. е. связан лишь с изменением границы канала и почти не зависит от рассеяния (63). Этот случай и рассматривался ранее [7]. В условиях же (61) более существенным для захвата оказывается рассеяние. В ионосфере могут быть существенными оба эти случая.

д) *Влияние поглощения на распределение интенсивности.* Примем вначале поглощение волны постоянным:  $K \neq K(I)$ . Уравнение (32) переписывается в этом случае в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = I \frac{\partial^2 f}{\partial I^2} + \frac{\partial f}{\partial I} - Kf. \quad (64)$$

Его решение в зоне распространения (26), (35) определится рядом (36), причем для функций  $f_k(I)$  имеем

$$\frac{d^2 f_k}{dI^2} + \frac{1}{I} \frac{df_k}{dI} + \frac{\lambda_k - K}{I} f_k = 0.$$



Решение этого уравнения имеет вид (38). Изменяется лишь значение константы  $\lambda_k$ :

$$\lambda_k = K + \beta_k^2 / 4 I_0. \quad (65)$$

Таким образом, постоянное поглощение не влияет на распределение интенсивности по модам; изменяется только их общее затухание: вместо  $\exp(-\beta_k^2 \tau / 4 I_0)$  имеем теперь  $\exp\left[-\left(\frac{\beta_k^2}{4 I_0} + K\right) \tau\right]$ .

Аналогично, если  $K_0$  — затухание у границы  $K_0 = K(I_0)$ , то для распределения захваченных волн вместо (52) получаем

$$f(I, \tau_0) = \frac{f_0}{2} \exp(-K_0 \tau_0) \left[ 1 - \Phi\left(\frac{I_0 - I}{2 \sqrt{I_0 \tau_0}}\right) \right]$$

и точно так же в  $\exp(-K_0 \tau_0)$  раз уменьшается полная захваченная мощность  $P$  (54).

Рассмотрим теперь случай, когда  $K$  изменяется с изменением  $I$ . Обычно  $K$  растет с ростом  $I$ , примем поэтому, что

$$K = K_0 + bI, \quad (66)$$

где  $K_0$  и  $b$  — произвольные постоянные ( $K_0 > 0, b > 0$ ). Отыскивая по-прежнему решение в виде ряда (36), имеем для  $f_k$ :

$$\frac{d^2 f_k}{dI^2} + \frac{1}{I} \frac{df_k}{dI} + \left(\frac{\lambda_k - K_0}{I} - b\right) f_k = 0. \quad (67)$$

Подстановкой

$$f_k = y/\sqrt{I}, \quad I = x/2\sqrt{b} \quad (68)$$

это уравнение приводится к каноническому виду:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\lambda^*}{x} + \frac{1}{4x^2} \right] = 0, \quad \lambda^* = \frac{\lambda_k - K_0}{2\sqrt{b}}. \quad (69)$$

Его решение — функция Уиттекера (см. [11], стр. 430):

$$y = W_{\lambda^*, 0}(x) = M\left(\frac{1}{2} - \lambda^*, 1; x\right). \quad (70)$$

Последнее соотношение выражает функцию Уиттекера через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию  $M(\alpha, \gamma; x)$  (см. [12], стр. 373).

Условие (27)

$$y(2\sqrt{b}I_0) = M\left(\frac{1}{2} - \lambda^*, 1; 2\sqrt{b}I_0\right) = 0 \quad (71)$$

определяет спектр значений  $\lambda_k^*$ . Следовательно,

$$\lambda_k = K_0 + 2\sqrt{b}\lambda_k^*. \quad (72)$$

Найдем значения  $\lambda_k$  в случае больших и малых  $b$ . При  $b \rightarrow 0$   $\lambda^* \rightarrow \infty$  (см. (69)). Тогда из ряда ([12], стр. 373)

$$M(\alpha, 1; x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(2!)^2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(3!)^2} x^3 + \dots \quad (73)$$

следует, что при  $\lambda^* \rightarrow \infty$  (т. е.  $\alpha \rightarrow -\infty$ ) корень уравнения (71) —  $x_k = -d_k/\alpha$ , где  $d_k$  — константа. Из (73), (71) вытекает, что

$$1 - d_k + \frac{d_k^2}{(2!)^2} - \frac{d_k^3}{(3!)^2} + \frac{d_k^4}{(4!)^2} - \dots = 0, \quad (74)$$

т. е.

$$J_0(2\sqrt{d_k}) = 0,$$

так как ряд (74) есть просто разложение функции  $J_0(2\sqrt{d_k})$  ([11], стр. 352). Отсюда

$$2\sqrt{d_k} = \beta_k, \quad 2\sqrt{b}I_0 = \frac{\beta_k}{\lambda_k^*} = \frac{\beta_k^2}{4\lambda_k^*}, \quad \lambda_k^* = \beta_k^2/8\sqrt{b}I_0, \quad (75)$$

$$\lambda_k = \frac{\beta_k^2}{4I_0} + K_0,$$

где  $\beta_k$  — корень функции Бесселя  $J_0(z)$ . Это выражение тождественно совпадает с (65), что и должно быть при  $2\sqrt{b}I_0 \rightarrow 0$ . Итак, если в (66)  $b \ll 1/4I_0^2$ , то вклад неоднородности поглощения мало существен: распределение интенсивности, по-прежнему, имеет вид (38), (40).

В противоположном случае  $2\sqrt{b}I_0 \gg 1$  параметр  $\lambda_1^* \rightarrow 1/2$ ,  $|\alpha| \rightarrow 0$ ,  $\alpha < 0$ , и из разложения (73) имеем

$$M(\alpha, 1; x) \approx 1 - \alpha \left\{ -x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots \right\} =$$

$$= 1 - \alpha [Ei(-x) - C - \ln x], \quad (76)$$

где  $C = 0,577$  (см. [11], стр. 324, формула 6.214,1). При  $|\alpha| \rightarrow 0$  функция  $M(x)$  может обратиться в нуль лишь при  $x \gg 1$ . Тогда  $Ei(-x) \rightarrow 0$  и мы имеем для первого корня  $x_1 = 2\sqrt{b}I_0$

$$\alpha \approx -\frac{1}{C + \ln x_1}, \quad \lambda_1^* = \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{C + \ln(2\sqrt{b}I_0)}, \quad (77)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{b} + \frac{2\sqrt{b}}{C + \ln(2\sqrt{b}I_0)} + K_0.$$

Видно, что затухание волны в этом случае существенно увеличивается в сравнении с (75), так как  $\sqrt{b} \gg \beta_1^2/4I_0$ . Таким образом, распределение (76) для основной гармоники

$$f_1(I) \approx 1 - \frac{C + \ln(2\sqrt{b}I) - Ei(-2\sqrt{b}I)}{C + \ln(2\sqrt{b}I_0) - Ei(-2\sqrt{b}I_0)} \quad (78)$$

показано на рис. 3 а. Кривые 1, 2, 3 построены при значениях параметра  $2\sqrt{b}I_0$ , равных соответственно 5, 10, 50.

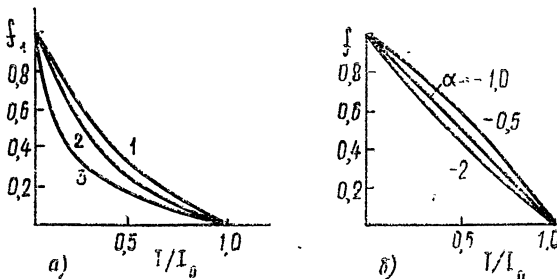


Рис. 3.

Значения корня  $\lambda_1$  для промежуточных значений  $b(2\sqrt{b}I_0 \sim 1)$  даны в табл. 2.

Таблица 2

$2\sqrt{b}I_0$	0,28	0,40	0,58	0,72	0,97	1,565
$\alpha$	-4	-3	-2	-1,5	-1,0	-0,5
$(\lambda_1 - K_0)I_0$	1,445	1,445	1,446	1,45	1,46	1,56

Соответствующие им функции  $f_1(I)$  показаны на рис. 3 б, взятом из [11] (см. в [11], стр. 376, рис. 155 —  $M(\alpha, 1; x)$ ). Видно, что при  $2\sqrt{b}I_0 \leq 1$  изменения распределения  $f_1(I)$  невелики. Они значительны только при  $2\sqrt{b}I_0 \gg 1$  (рис. 3 а).

Смысл критерия  $2\sqrt{b}I_0 \sim 1$  вполне ясен. Дело в том, что рассеяние приводит к диссипативному множителю в основной гармонике  $\lambda_1 = \beta_1^2/4I_0$ . Оно сильнее, чем поглощение, если  $\lambda_1 > K$ . Однако постоянная часть поглощения  $K_0$  на форме распределения  $f(I)$  никак не сказывается. Поэтому влияние поглощения на  $f(I)$  определяется соотношением между  $\beta_1^2/4I_0$  и  $bI_0$ , откуда и следует указанный критерий. Отметим, что при произвольной зависимости  $K(I)$  условие определяющей роли поглощения имеет вид

$$I_0 |K(I_0) - K(0)| \gg 1. \tag{79}$$

В ионосфере это условие часто бывает выполненным.

### 3. ГРАНИЦА ВОЛНОВОДНОГО КАНАЛА

Приближение параболического профиля канала неприменимо вблизи его границы  $I \approx I_0$ , где период  $\Theta(I)$  имеет логарифмическую особенность:

$$\Theta|_{I \rightarrow I_0} \sim \ln \left( \frac{I_0}{I_0 - I} \right). \tag{80}$$

Обсудим поэтому некоторые особенности поведения  $f(I)$  вблизи границы  $I_0$  с учетом (80).

Решение уравнения (23) вблизи границы есть

$$D\Theta \frac{\partial f}{\partial I} = S_0, \tag{81}$$

где  $S_0$  — постоянная. Отсюда, учитывая (80), находим

$$f \approx C_0 \frac{I_0 - I}{\ln \left( \frac{I}{I_0} - 1 \right)^{-1}}. \tag{82}$$

Таким образом, распределение интенсивности у границы нарастает медленнее, чем в случае параболического канала, когда  $f \sim (I - I_0)$ .

Уравнение (49), описывающее захват в канал, принимает теперь вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = I_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \frac{C_0}{|x|} \frac{\partial f}{\partial x} \right). \tag{83}$$

Его решение с логарифмической точностью совпадает с (51), только аргумент функции  $\Phi(p)$  равен

$$p = \frac{x}{2\sqrt{\tau I_0} \sqrt{\ln [C_0/(I_0 - I)]}} = \frac{I_0 - I}{2\sqrt{\tau I_0} \sqrt{\ln [C_0/(I_0 - I)]}}. \quad (84)$$

Видно, что благодаря особенности (80) захват несколько усиливается. Авторы признательны В. И. Татарскому за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
3. В. В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1283 (1971).
4. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрномия, 11, 961 (1971).
5. В. И. Татарский, Препринт ИФА, М., 1970.
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, 498 (1973).
7. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрномия, 13, 283 (1973).
8. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 57, 963 (1967).
9. А. В. Гуревич, Л. М. Ерухимов, В. Ю. Ким, В. П. Урядов, Е. Е. Цедилина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 9, 1317 (1975).
10. Л. П. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1968.
11. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
12. Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

Институт земного магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию  
7 октября 1974 г.

#### RADIO WAVE SCATTERING IN IONOSPHERIC WAVE CHANNELS

*A. V. Gurevich, E. E. Tsedilina*

The influence of scattering on radio wave propagation in ionospheric wave channels is investigated. The diffusion equation is derived which describes a change due to scattering of the field intensity distribution over adiabatic invariants (i. e. over channel wave modes). By the example of a parabolic channel, the wave mode intensity distribution, trapping, absorption and escaping of radiation from channel are investigated.

УДК 621 396.96

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РАДИОЛОКАЦИОННОМ ЗОНДИРОВАНИИ МЕРЗЛЫХ ПОЧВ

В. Г. Глушнев, Б. Д. Слуцкер, М. И. Финкельштейн

Изложены результаты зондирования мерзлых грунтов и болот радиопульсами наносекундной длительности на частоте 440 МГц с борта вертолета, свидетельствующие о практической возможности дистанционного измерения характеристик мерзлых почв методами активной радиолокации.

Использование методов радиолокации для дистанционного исследования электрических характеристик и определения толщины морских льдов, обладающих большим затуханием радиоволн [1, 2], свидетельствует о принципиальной возможности применения этих методов для зондирования и других слоистых сред, в частности, мерзлых почв. Электрические характеристики мерзлых почв исследованы недостаточно полно. Ориентировочные значения некоторых параметров имеются в работах [3, 4], согласно которым значение вещественной части комплексной диэлектрической проницаемости мерзлых почв  $\text{Re } \epsilon_{\text{сл}} = 3,3 - 9$  в диапазоне частот ( $10^6 - 10^8$ ) Гц.

Радиолокационное зондирование может оказаться эффективным средством дистанционного определения электрических параметров мерзлых почв и, что особенно важно, глубин промерзания. В связи с этим нами был осуществлен эксперимент с борта вертолета при проведении радиолокационного зондирования различных типов пресноводных льдов в районе городов Печора и Инта в марте—апреле 1974 г.

Использованная в данном эксперименте установка обеспечивала формирование зондирующих радиопульсов методом ударного возбуждения антенны [5] на несущей частоте  $f = 440$  МГц длительностью  $\tau_{\text{и}} = (5-6)$  нс на уровне 0,5 от амплитудного значения. Энергетический потенциал установки обеспечивал работу до высот 30 м. Регистрация отраженных сигналов производилась на экране стробоскопического осциллографа, который фотографировался с помощью специальной фотоприставки с частотой 1 кадр/с при времени экспозиции около 0,5 с.

Зондированию подвергался мерзлый грунт на речной песчаной косе и промерзшее болото. Мерзлый грунт представлял собой смерзшуюся смесь кристаллов льда и песка, покрытую слоем снега средней толщиной 52 см. Для эксперимента на болоте выбирались участки, лишенные деревьев и кустарников и покрытые лишь слоем мха. Рельеф участка был неоднородным с чередованием кочек и западин. Поверхность болота была покрыта слоем снега толщиной (70—150) см. Структура подстилающего слоя определялась бурением, однако из-за несовершенства использованных буров достичь границ промерзания не удалось.

Район проведения эксперимента находился в зоне сезонно-промерзающих почв [6]. В период проведения эксперимента температура воздуха была равна ( $-10 \div -19$ )°С. Зондирование мерзлого грунта про-

водилось в режиме «висения» вертолета на высоте 20 м над заранее размеченной площадкой. Площадка выбиралась из условия однородности рельефа и толщины снежного покрова. В связи с тем, что на поверхности болота подобных площадок найти не удалось, зондирование болота проводилось в режиме горизонтального полета на высоте 20 м.

Анализ отраженных сигналов проводился путем их сравнения с сигналами, отраженными от поверхностей открытой воды и пресноводного льда. При сравнении амплитуд отраженных сигналов учитывалось положение входного аттенюатора приемника.

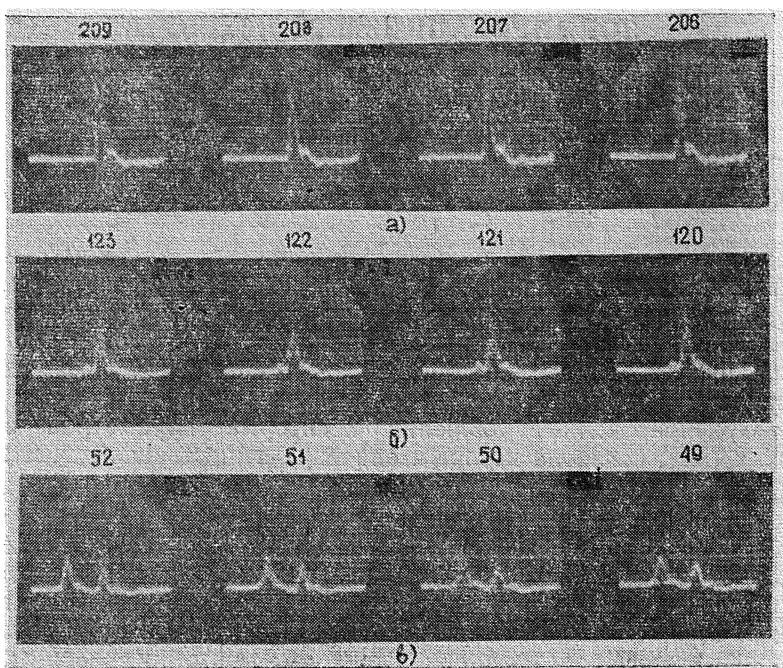


Рис. 1.

Огибающие радиоимпульсов, отраженных от поверхностей открытой воды и пресноводного льда толщиной 89 см, покрытого снегом толщиной 59 см (после стробоскопической обработки), представлены соответственно на рис. 1 а и рис. 1 б. (1 клетка—4,8 нс). На рис. 1 б левый импульс соответствует отражению от верхней границы льда, а правый от границы лед—вода. Как следует из рисунка, амплитуда импульсов, отраженных от верхней границы льда,  $U_{\text{в}}$ , значительно меньше амплитуды импульсов от нижней границы  $U_{\text{н}}$  (которая соизмерима с импульсом, отраженным от водной поверхности), что объясняется «согласующим» действием снега на границе воздух—лед. При этом среднестатистическое значение коэффициента  $r = U_{\text{н}}/U_{\text{в}}$  для пресноводного льда, покрытого снегом, составляет 5,5.

На рис. 1 в представлены огибающие радиоимпульсов, отраженных от границ промерзшего грунта, покрытого снегом толщиной 52 см (1 клетка—4,8 нс). Для промерзшего грунта  $r = 1,14$ . Амплитуда сигнала, отраженного от нижней границы промерзания, гораздо меньше, чем в случае отражения от воды, что объясняется прежде всего различием френелевских коэффициентов отражения.

На рис. 2 а представлена гистограмма величины  $r$  для мерзлого грунта ( $r = 1,1$ ), а на рис. 2 б для сравнения — для пресноводного льда ( $r = 5,5$ ) (гистограмма величины  $r$  для мерзлого грунта построена по 89 фотокадрам из 95 полученных при эксперименте). В обоих случаях толщина снежного покрова практически одинаковая. Сравнение гистограмм показывает зависимость закона распределения  $r$  от характера подстилающей поверхности. Аналогичные результаты были получены и над промерзшим болотом. Одна из характерных осциллограмм (огибающие радиопульсов, отраженных от промерзшего болота, 1 клетка — 4,8 нс), представлена на рис. 3.

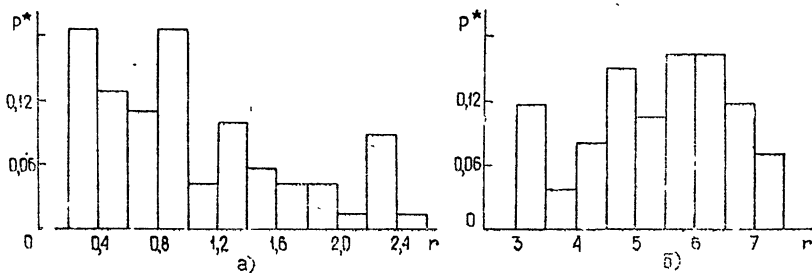


Рис. 2.

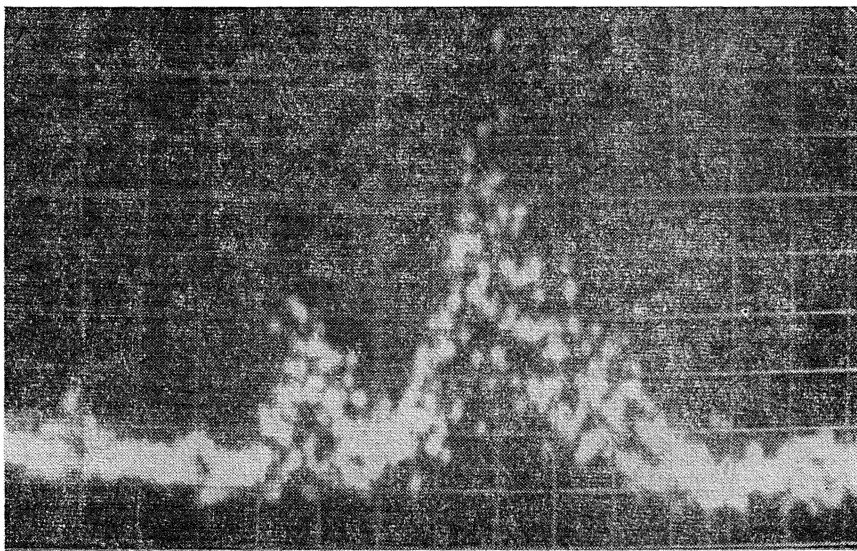


Рис. 3.

Полагая, что  $\epsilon_{сл}$  для мерзлого грунта постоянно по глубине промерзания и что  $\epsilon_{сл} \approx \text{Re } \epsilon_{сл} = 3,3 \div 9$  [3, 4], можно определить по известному выражению глубину промерзшего слоя:

$$h_{сл} = \frac{\Delta t_{сл} c}{2 \text{Re } \sqrt{\epsilon_{сл}}}, \quad (1)$$

где  $\Delta t_{сл}$  — временной интервал между импульсами, отраженными от границ слоя,  $c$  — скорость света.

Полученному при зондировании среднестатистическому значению  $\Delta t_{\text{сл}} = 23,7$  нс соответствует  $h_{\text{сл}} = (1,9 \div 1,2)$  м.

Полученные экспериментальные результаты позволяют произвести также ориентировочную оценку значения коэффициента затухания зондируемого мерзлого прунта  $\Gamma_{\text{сл}}$  (дБ/м). Для этого воспользуемся электродинамической моделью в виде двух однородных слоев — снега (слой 2) и мерзлого прунта (слой 3), ограниченных полубесконечными средами — воздухом (среда 1) и влажным грунтом (среда 4). Затуханием в снегу на частоте 440 МГц можно пренебречь, так что для предлагаемой модели имеет место соотношение [7]

$$2h_{\text{сл}}\Gamma_{\text{сл}} = 20 \lg |R_{3-4}| + 20 \lg |1 - R_{1-2}^2| + \\ + 20 \lg |1 - R_{2-3}^2| + \Pi_{\text{в}} - r^*, \quad (2)$$

где  $h_{\text{сл}}$  — толщина мерзлого грунта,  $\Gamma_{\text{сл}}$  — коэффициент затухания в мерзлом грунте в дБ/м,  $r^* = 20 \lg r$ ,  $R_{1-2}$ ,  $R_{2-3}$ ,  $R_{3-4}$  — соответственно френелевские коэффициенты отражения от границ воздух—снег, снег—мерзлый грунт, мерзлый прунт—влажный грунт,  $\Pi_{\text{в}}$  — потери на отражение и прохождение границ раздела для «верхнего» сигнала. Так как по результатам данного эксперимента точные сведения о фазовом набеге в снегу не могут быть определены, рассмотрим два крайних случая — когерентное и некогерентное сложение сигналов, отраженных от границ снега.

Для когерентного сложения:

$$\Pi_{\text{в}} \approx -20 \lg |R_{1-2} + R_{2-3}(1 - R_{1-2}^2)|.$$

При некогерентном сложении:

$$\Pi_{\text{в}} \approx -10 \lg [|R_{1-2}|^2 + |R_{2-3}|^2 |1 - R_{1-2}^2|^2].$$

В дальнейшем без заметной погрешности можно принять  $\epsilon_i = \text{Re } \epsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$  — номер слоя). Так как при проведении эксперимента снежный покров был достаточно сухим со средней плотностью  $0,32$  г/см<sup>3</sup>, то этому соответствует значение относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_2 = 1,6$  [8]. Можно предположить, что исследуемый мерзлый грунт граничит снизу с влажным песчаным грунтом (влажностью около 20%), для которого на частоте 440 МГц  $\text{Re } \epsilon_4 = 20$  [9]. Примем, кроме того, согласно сказанному выше,

$$\text{Re } \epsilon_{\text{сл}} = \text{Re } \epsilon_3 \approx 3,3 \text{ и } h_{\text{сл}} = 1,9.$$

Пользуясь принятыми значениями величин и экспериментально определенным значением  $r^* = 1,14$ , находим из уравнения (2), что для когерентного сложения  $\Gamma_{\text{сл. ког}} = 0,4$  дБ/м, а для некогерентного  $\Gamma_{\text{сл. некг}} = 1,2$  дБ/м. Для ориентировочной оценки затухания можно принять среднее значение  $\Gamma_{\text{сл. ср}} = 0,8$  дБ/м.

Кроме того, из условия  $\Gamma_{\text{сл}} > 0$  по уравнению (2) для принятой модели определим максимальную величину  $(\text{Re } \epsilon_3)_{\text{max}}$ , при которой обеспечивается наблюдаемое отношение  $r^*$ . Она оказывается равной  $(\text{Re } \epsilon_3)_{\text{ког. max}} = 3,9$ ,  $(\text{Re } \epsilon_3)_{\text{некг. max}} = 4,9$ .

Полученные результаты подтверждают принципиальную возможность дистанционного измерения характеристик мерзлых почв методами активной радиолокации.

В настоящее время проводится эксперимент по зондированию мерзлых почв с помощью более низкочастотных сигналов при условии



сохранения достаточной разрешающей способности по дальности. При этом нами используется опыт проведения экспериментов по зондированию грунтовых вод под слоем песка с борта самолета радиоимпульсами со средней частотой около 65 МГц и длительностью порядка 60 нс, полученными методом ударного возбуждения несимметричных широкополосных вибраторов [10]. Для этих целей целесообразно также использовать еще более низкочастотный видеоимпульсный сигнал с очень высокой разрешающей способностью, применявшийся нами при зондировании морского льда [2].

Авторы выражают благодарность А. Н. Чижову, осуществившему организацию летного эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Финкельштейн, В. Г. Глушнев, Докл. АН СССР, 203, № 3, 579 (1972).
2. М. И. Финкельштейн, Радиотехника и электроника, 19, № 3, 528 (1974).
3. В. В. Богородский и др., Изв. АН СССР, Физика Земли, № 6, 86 (1971).
4. J. C. Cook, J. Geophys. Res., 65, № 6, 1767 (1960).
5. В. Г. Глушнев, Труды РКИИГА, вып. 228, 88 (1972).
6. А. И. Попов, Г. К. Тушинский, Мерзлотоведение и гляциология, изд. Высшая школа, М., 1973, стр. 46.
7. В. Л. Мендельсон, А. И. Козлов, М. И. Финкельштейн, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 8, № 4, 396 (1972).
8. R. S. Vickers, G. C. Rose, Proceedings of the Eighth International Symposium on Remote Sensing of Environment, Oct. 1972, 1, p. 261.
9. Ю. И. Лещанский, Г. Н. Лебедева, В. Д. Шумилин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 562 (1971).
10. М. И. Финкельштейн, В. А. Кутев, О. П. Власов, Докл. АН СССР, 219, № 6, 1427 (1974).

Рижский институт инженеров гражданской авиации

Поступила в редакцию  
10 марта 1975 г.,

#### MEASUREMENT OF SOME ELECTRO-PHYSICAL CHARACTERISTICS BY RADAR PROBING OF FROZEN SOILS

*V. G. Glushnev, B. D. Slutsker, M. I. Finkel'shtein*

We set forth the results of probing frozen soils and bogs by radar nanosecond pulses from a helicopter board at the frequency 440 MHz which testify to a practical possibility of distant measurement of frozen soil characteristics by echo methods.

УДК 538.56

## ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ С МАКСИМУМОМ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИ МАЛЫХ ПОТЕРЯХ

*Н. Н. Зернов, Г. И. Макаров*

Рассмотрена задача о распространении электромагнитного поля вертикальной поляризации в среде, вещественная часть диэлектрической проницаемости которой меняется в пространстве по параболическому закону, а мнимая часть постоянна. Построено решение, описывающее поле во всем пространстве при условиях малости потерь и близости к нулю значения вещественной части диэлектрической проницаемости в вершине параболы.

Реальная зависимость концентрации электронов в ионосфере от высоты является гладкой функцией. Естественно поэтому при рассмотрении задач распространения электромагнитных волн в ионосферных слоях аппроксимировать высотную зависимость аналитическими функциями. Как показывает исследование [1], уравнения Максвелла для поля вертикальной поляризации в гладком слое с максимумом электронной концентрации не могут быть сведены ни к одному из хорошо изученных дифференциальных уравнений. Даже использование элементарной аппроксимации в виде параболической зависимости концентрации от координаты приводит к неизученному уравнению. Коэффициенты этого уравнения содержат все особенности, характерные для уравнений, описывающих распространение электромагнитных волн вертикальной поляризации в гладких слоях с максимумом электронной концентрации при наличии потерь. Это дает возможность использовать подобное уравнение в качестве эталонного. Мы построим решение эталонного уравнения на всей оси (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). При построении решения обратим внимание на эффект экранирования, известный для слоев конечной толщины [2, 3]. Он состоит в том, что на частоте поля, равной критической частоте слоя, в отсутствие потерь наклонно падающая плоская волна вертикальной поляризации не проходит за точку с максимальной концентрацией электронов.

Перейдем непосредственно к постановке и решению задачи. Будем считать, что концентрация электронов меняется по параболическому закону вдоль некоторого направления. Совместим это направление с осью  $z$  декартовой системы координат. Мнимую часть комплексной диэлектрической проницаемости считаем постоянной.

При зависимости от времени вида  $e^{-i\omega t}$  относительная комплексная диэлектрическая проницаемость слоя  $\epsilon'_m(z)$  имеет вид

$$\epsilon'_m(z) = 1 + \Omega^2 \frac{z^2 - a^2}{a^2} + i\sigma \quad (-\infty < z < +\infty),$$

$\Omega^2 = \omega_{кр}^2/\omega^2$ ,  $\omega_{кр}$  — критическая частота слоя,  $\omega$  — частота поля,  $a$  — полутолщина слоя по уровню  $\text{Re } \epsilon'_m(a) = 1$ ,  $\sigma \geq 0$  — проводимость.

В среде, характеризуемой величиной  $\epsilon'_m(z)$ , рассмотрим распространение электромагнитного поля, имеющего при  $z \rightarrow -\infty$  характер плоской волны с компонентами  $E_x$ ,  $E_z$ ,  $H_y$ , направленной под углом  $\psi$  к оси  $z$ .

Для составляющей  $H_y$  из уравнений Максвелла получим уравнение

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} - \frac{1}{\epsilon'_m(z)} \frac{d\epsilon'_m(z)}{dz} \frac{dH_y}{dz} + k_0^2 (\epsilon'_m(z) - \sin^2 \psi) H_y = 0.$$

Последнее с помощью замены переменной

$$\omega = \sqrt{2ik_0a\Omega} \frac{z}{a} \quad (1)$$

( $k_0$  — волновое число вакуума) преобразуем к виду

$$\frac{d^2 H_y}{d\omega^2} - \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_1^2} \frac{dH_y}{d\omega} + \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \omega^2 \right) H_y = 0, \quad (2)$$

где

$$n + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \omega_1^2 + \frac{ik_0a}{2\Omega} \sin^2 \psi,$$

$$\omega_1 = \sqrt{2ik_0a\Omega} \sqrt{\frac{\Omega^2 - 1 - i\sigma}{\Omega^2}}, \quad |\Omega^2 - 1| \ll \sigma.$$

Будем искать то решение уравнения (2), которое с учетом (1) дает при  $z \rightarrow +\infty$  уходящую волну.

Сведем уравнение (2) к интегральному, перенеся вправо член  $\left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \omega^2 \right) H_y$ . В результате получим уравнение Вольтерра:

$$\varphi(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\left( \frac{1}{4} t^2 - n - \frac{1}{2} \right)}{t^2 - \omega_1^2} [\dot{\Phi}(t) - \Phi(t)] \varphi(t) dt + C_1 \Phi(\omega) + C_2, \quad (3)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega^3 - 3\omega_1^2 \omega}{3}. \quad \text{Постоянные } \omega_0, C_1, C_2 \text{ будут определены ниже.}$$

Мы интересуемся решением уравнения (2) или соответствующего ему уравнения (3) с заданным поведением на бесконечности при малых «потерях»:  $|\omega_1| \rightarrow 0$ . Если выполняется условие  $|\omega| \gg |\omega_1|$ , справедливо разложение

$$\frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2} = \frac{1}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{\omega^2} + \frac{\omega_1^4}{\omega^4} + \dots \right). \quad (4)$$

При этом естественно искать решение (2) и (3) в виде ряда по степеням  $\omega_1$ . Поскольку параметр  $\omega_1$  входит в уравнения четным образом, могут существовать два типа рядов — по четным и нечетным степеням  $\omega_1$ . Как будет видно из дальнейшего, интересующий нас ряд при  $\omega$ ,

соответствующих  $z > 0$ , должен начинаться с первой степени  $\omega_1$ . Таким образом, ряд должен иметь вид

$$\varphi(\omega, \omega_1) = C [\omega_1 \varphi_1(\omega) + \omega_1^3 \varphi_3(\omega) + \omega_1^5 \varphi_5(\omega) + \dots], \quad (5)$$

$C$  — произвольная постоянная, определяемая амплитудой падающей волны.

Нетрудно написать систему уравнений для  $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \dots$ , из которой видно, что функции  $\varphi_1, \varphi_3, \dots$  растут с  $\omega$  одинаковым образом, поэтому малость последующих членов ряда (5) по отношению к предыдущим полностью определяется степенью  $\omega_1$ . В дальнейшем мы будем пренебрегать величинами  $O(\omega_1^3)$  для  $z > 0$  ( $O(\omega_1^2)$  для  $z < 0$ ). В связи с этим рассмотрим лишь уравнение для  $\varphi_1(\omega)$ :

$$\frac{d^2 \varphi_1}{d\omega^2} - \frac{2}{\omega} \frac{d\varphi_1}{d\omega} + \left( n_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \omega^2 \right) \varphi_1 = 0, \quad (6)$$

$$n_0 + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} \Big|_{\omega_1=0}.$$

С помощью замен  $\varphi(\omega) = \omega^{1/2} f(\omega)$ ,  $\omega^2 = 2t$  оно может быть сведено к уравнению Уиттекера. В качестве решения этого уравнения следует взять ту функцию, которая дает уходящую волну при  $z \rightarrow +\infty$ . С учетом сказанного находим главный член ряда (5):

$$\varphi_1(\omega) = \sqrt{\omega} W_{-\frac{1}{2}n_0 - \frac{1}{4}, \frac{3}{4}} \left( -\frac{\omega^2}{2} \right). \quad (7)$$

Определим теперь неизвестные постоянные в уравнении (3). Будем считать, что  $\omega_0$  — некоторая произвольная точка, такая, что  $|\omega_0| \gg |\omega_1|$  и что при  $|\omega| > |\omega_0|$  наша задача имеет решение вида (7). Коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  определим из условия непрерывного перехода  $\varphi(\omega)$  и  $\varphi'(\omega)$  в точке  $\omega_0$  в функцию  $\omega_1 C \varphi_1(\omega)$  и ее производную:

$$C_1 = \omega_1 C \frac{\varphi_1'(\omega_0)}{\Phi'(\omega_0)}, \quad C_2 = \omega_1 C \left[ \varphi_1(\omega_0) - \varphi_1'(\omega_0) \frac{\varphi_1'(\omega_0)}{\Phi'(\omega_0)} \right]. \quad (8)$$

Ниже мы убедимся, что такие условия непрерывности в нашем случае приводят к аналитическому продолжению функции (7) в главный член решения (3) для области  $|\omega| < |\omega_0|$ .

Перейдем непосредственно к решению интегрального уравнения, в котором  $C_1$  и  $C_2$  имеют вид (8). Разобьем область изменения  $\omega$  на три:  $(-e^{i(\pi/4)} \infty, -\alpha\omega_1)$ ,  $(-\alpha\omega_1, \alpha\omega_1)$ ,  $(\alpha\omega_1, \omega_0)$ ,  $|\alpha| > 1$ .

В области  $(\alpha\omega_1, \omega_0)$  справедливо разложение (4), соответственно решение в этой области ищем в виде

$$\varphi(\omega, \omega_1) = C [\omega_1 \psi_1(\omega) + \omega_1^3 \psi_3(\omega) + \dots].$$

Отбрасывая член  $O(\omega_1^3)$ , получаем интегральное уравнение для  $\psi_1(\omega)$ :

$$\psi_1(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{4} \frac{t^2 - n_0 - \frac{1}{2}}{t^2} \left( \frac{\omega^3 - t^3}{3} \right) \psi_1(t) dt + \varphi_1'(\omega_0) \frac{\omega^3 - \omega_0^3}{3\omega_0^2} + \varphi_1(\omega_0).$$

Оно эквивалентно уравнению (6) с начальными условиями

$$\psi_1(\omega_0) = \varphi_1(\omega_0), \quad \psi_1'(\omega_0) = \varphi_1'(\omega_0).$$

Поскольку  $\varphi_1(\omega)$  удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, имеем очевидное равенство:

$$\psi_1(\omega) = \varphi_1(\omega).$$

Таким образом, в области  $(\alpha\omega_1, e^{i(\pi/4)}\infty)$  решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(\omega) = \omega_1 C \varphi_1(\omega) + O(\omega_1^2). \quad (9)$$

Функция  $\varphi_1(\omega)$  определяется формулой (7). В дальнейшем нам потребуется также соотношение

$$\begin{aligned} W_{-k, m}(-x) &= \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + k\right)} M_{-k, m}(-x) + \\ &+ \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + k\right)} M_{-k, -m}(-x), \end{aligned}$$

связывающее различные решения уравнения Уиттёкера [4].

Рассмотрим уравнение (3) в области  $(-\alpha\omega_1, \alpha\omega_1)$ . Разобьем интервал интегрирования на два интервала:  $(\omega, \alpha\omega_1)$  и  $(\alpha\omega_1, \omega_0)$ . В результате довольно сложных выкладок интеграл по последнему интервалу может быть вычислен с использованием функции (7), тогда уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \int_{\alpha\omega_1}^{\omega} \frac{\left(\frac{1}{4}t^2 - n - \frac{1}{2}\right)}{t^2 - \omega_1^2} [\Phi(\omega) - \Phi(t)] \varphi(t) dt + \\ &+ (-2)^{1/4} \omega_1 C \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} + O(\omega_1^2). \end{aligned}$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, находим

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= (-2)^{1/4} \frac{\omega_1 C \Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} \left(1 + \omega_1 \frac{n_0 + \frac{1}{2}}{2} \omega \ln \frac{\omega - \omega_1}{\omega + \omega_1}\right) + \\ &+ O(\omega_1^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим теперь область  $(-e^{i(\pi/4)}\infty, -\alpha\omega_1)$ . Разобьем интервал интегрирования на три:  $(\omega, -\alpha\omega_1)$ ,  $(-\alpha\omega_1, \alpha\omega_1)$ ,  $(\alpha\omega_1, \omega_0)$ . Интегралы по двум последним интервалам могут быть вычислены с использованием функций (7), (10). В результате интегрирования по интервалу  $(-\alpha\omega_1, \alpha\omega_1)$  появляется член, пропорциональный нулевой степени  $\omega_1$ . Само уравнение принимает вид

$$\varphi(\omega) = \int_{-\alpha\omega_1}^{\omega} \frac{\frac{1}{4}t^2 - n - \frac{1}{2}}{t^2 - \omega_1^2} [\Phi(\omega) - \Phi(t)] \varphi(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + w_1 C \frac{(-2)^{1/4} \Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} + w_1 C \frac{(-2)^{-5/4} \Gamma(-3/2)}{\Gamma(n_0/2)} - \\
 & - \frac{i\pi(n_0 + 1/2) C}{3} \frac{w^3 (-2)^{1/4} \Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} - \frac{C w^3 (n_0 + 1/2) (-2)^{1/4} \Gamma(3/2)}{3\alpha \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} + \\
 & + O(w_1^3). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Внеинтегральный член уравнения содержит члены нулевой степени по потерям  $w_1$ . Учитывая это, а также тот факт, что в рассматриваемой области применимо разложение (4), ищем решение в виде

$$\varphi(w) = \psi_0(w) + w_1 \psi_1(w) + O(w_1^2).$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что функция

$$\begin{aligned}
 \varphi(w) = & - \frac{iC\pi(n_0 + 1/2)}{3} (-2)^{3/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} \sqrt{w} M_{-\frac{1}{2}n_0 - \frac{1}{4}, \frac{3}{4}}\left(-\frac{w^2}{2}\right) + \\
 & + w_1 C \varphi_1(w) + O(w_1^2), \tag{12}
 \end{aligned}$$

где  $\varphi_1(w)$  представляется формулой (7), удовлетворяет уравнению (11).

Теперь решение уравнения (3) построено на всей оси  $w$  ( $-\infty < z < +\infty$ ). Оно представляется формулами (9), (10), (12). Используя разложения функций  $M_{-k, m}(-x)$ ,  $W_{-k, m}(-x)$  в ряды, можно убедиться в том, что формулы (9) и (12) в области ( $-\alpha w_1, \alpha w_1$ ) переходят в (10). Таким образом, для описания поля можно использовать лишь две формулы:

(12) — при  $w$ , соответствующих  $z \leq 0$ ,

(9) — при  $w$ , соответствующих  $z \geq 0$ .

Постоянные  $\alpha$  и  $w_0$  в решении не фигурируют.

Рассмотрим некоторые следствия.

В случае  $w_1 = 0$ .

$$\varphi(w)|_{w_1=0} = \varphi_0(w),$$

где

$$\begin{aligned}
 & \varphi_0(w) = \\
 = & \begin{cases} C \frac{\pi k_0 a}{6} \sin^2 \psi \frac{(-2)^{3/2} \Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{i k_0 a}{4} \sin^2 \psi\right)} M_{-\frac{i k_0 a}{4} \sin^2 \psi, \frac{3}{4}}\left(-\frac{i k_0 z^2}{a}\right) & (z \leq 0) \\ 0 & (z \geq 0) \end{cases} \tag{13}
 \end{aligned}$$

Условие  $w_1 = 0$  выполняется, когда  $\text{Re } \epsilon'_m(z)$  имеет нуль второго порядка и в слое отсутствуют потери на поглощение. Функция  $\varphi_0(w)$  описывает эффект экранирования. При выполнении условий экранирования магнитное поле тождественно равно нулю за точкой  $z = 0$ . Поле до точки  $z = 0$  в случае наклонного падения ( $\sin^2 \psi \neq 0$ ) описывается приведенной в (13) функцией.

При наличии в задаче большого параметра

$$k_0 a \sin^2 \psi > 1 \tag{14}$$

можно использовать асимптотические представления функции  $M$ , дающие более наглядное представление о поле. Так, коэффициент отражения от точки  $z = 0$  в области  $z < 0$ ,  $|z| \gg a$  имеет вид

$$R_0(z) = \exp \left\{ \frac{ik_0 a}{2} \sin^2 \psi - \frac{ik_0 a}{2} \sin^2 \psi \ln \frac{k_0 a}{4} \sin^2 \psi + \right. \\ \left. + \frac{ik_0 a}{2} \sin^2 \psi \ln \frac{k_0 z^2}{a} - \frac{ik_0 z^2}{a} \right\}. \quad (15)$$

Естественно, что модуль коэффициента отражения при полном экранировании равен единице.

Если вместе с (14) выполняется неравенство

$$\frac{k_0 |z|^2}{a} \gg \frac{1}{2} \sqrt{5},$$

асимптотика функции  $M$  носит характер стоячей волны. При выполнении неравенства

$$\frac{k_0 |z|^2}{a} \ll k_0 a \sin^2 \psi$$

поле не имеет волнового характера и убывает экспоненциально.

Смена характера поведения функции соответствует отражению поля от точки

$$z_0 = -a \sin \psi,$$

в которой обращается в нуль эффективная диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon_{m \text{эфф}}(z) = \epsilon'_m(z) - \sin^2 \psi.$$

Вблизи точки  $z = 0$  ( $z < 0$ ) поле стремится к нулю по закону  $z^2$  и обращается в нуль при  $z = 0$ .

Явление полного экранирования нарушается, если  $\omega_1 \neq 0$ . Появляется поле просачивания, описываемое формулами (7), (9). Как видно, например, из выражения (9), значение поля  $H_y$  непосредственно в точке  $z = 0$  определяется величиной «потерь»  $\omega_1$  при заданных амплитуде и угле падения.

Составляющая электромагнитного поля  $E_x(z)$  выражается через  $H_y(z)$  по формуле

$$E_x(z) = - \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_m} \frac{\partial H_y(z)}{\partial z} \sim - \frac{i}{\omega \epsilon_0 \epsilon_m} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \frac{d\omega}{dz}. \quad (16)$$

Вне области  $(-a \omega_1, a \omega_1)$  ее можно вычислить, непосредственно дифференцируя формулы (9), (12). При нахождении  $E_x(z)$  внутри указанной области, в частности в точке  $z = 0$ , следует пользоваться более точной формулой (10), которая для главного члена производной  $\varphi'_\omega$  даст выражение

$$(-2)^{1/4} \omega_1^2 \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} - \frac{n_0 + 1/2}{2} \ln \frac{\omega - \omega_1}{\omega + \omega_1}, \quad (17)$$

переходящее на границах области  $-\omega \sim -a \omega_1$  и  $\omega \sim a \omega_1$  — в главные члены производных функций (12) и (9).

С помощью выражения (17) для значения поля  $E_x$  в точке  $z = 0$  найдем

$$E_x(0) \sim e^{-i(\pi/4)} (-2)^{1/4} \frac{C\Gamma(3/2)\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{n_0}{2}\right)} \left(n_0 + \frac{1}{2}\right) \times \\ \times \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{2k_0 a}. \quad (18)$$

В отличие от поля  $H_y$ , амплитуда которого в плоскости  $z = 0$  пропорциональна  $\omega_1$  (см. 9), (12) или (10)), амплитуда поля  $E_x$  в этой плоскости пропорциональна  $\omega_1^0$ , что соответствует результатам работы [2].

Нетрудно вычислить среднее за период значение вектора Пойнтинга в плоскости  $z = 0$ :

$$S_z(0) \sim \sqrt{\sigma} \sin^2 \psi > 0.$$

Последняя формула, как и все остальные, справедлива при  $\psi \neq 0$ . Видно, что  $S_z(0) \neq 0$  при  $\sigma \neq 0$  (напомним, что  $\omega_1 \sim \sqrt{\sigma}$ ), т. е. при существовании условий просачивания за плоскость  $z = 0$ . В соответствии с неравенством  $S_z(0) > 0$  в области  $z > 0$  имеется уходящая волна, описываемая на достаточном удалении от точки  $z = 0$  формулой (9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. B. S. Westcott, Proc. Cambridge Philos. Soc., 66, № 3, 675 (1969).
2. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 885 (1968).
3. В. А. Живулин, Г. И. Макаров, Об отражательных характеристиках неоднородных изотропных плазменных слоев; Депонировано в ВИНТИ, Регистр. № 7636-73, 20 декабря 1973 г.
4. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, Гостехиздат. М., 1934, стр. 467.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
12 августа 1974 г.

#### CONSTRUCTION OF SOLUTION OF ETALON EQUATION FOR THE PROBLEM OF PROPAGATION OF A PLANE VERTICAL-POLARIZATION WAVE IN AN INFINITE LAYER WITH MAXIMUM ELECTRON DENSITY AT SMALL LOSSES

*N. N. Zernov, G. I. Makarov*

We consider the problem of propagation of the electromagnetic vertical-polarization field in a medium the real part of the dielectric permittivity of which changes in space according to the parabolic law and the imaginary part is constant. The solution is constructed which describes the field in the whole space on the assumption of the smallness of losses and that the real part of the dielectric permittivity at the parabola apex is close to zero.



УДК 538.56 : 519.217

## КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КУМУЛЯНТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

*А. Н. Малахов*

Для произвольных марковских процессов на основе введения специальных кумулянтных скобок выводятся уравнения эволюции кумулянтов любого порядка, имеющие простой вид. Рассмотрен конкретный пример инерционной системы с кубической нелинейностью. Оценено время установления стационарного вероятностного распределения негауссова марковского процесса и показано, что оно зависит от параметра нелинейности системы и интенсивности воздействующего шума.

### ВВЕДЕНИЕ

Во многих статистических задачах радиофизики и радиотехники, имеющих дело с нелинейными инерционными преобразованиями случайных процессов, часто приходят к бесконечной цепочке зацепляющихся нелинейных уравнений для моментов распределения. При этом для получения конечной системы уравнений иногда полагают равными нулю все высшие моменты, начиная с какого-либо. Этот прием, получивший известное распространение, тем не менее не может быть сколько-нибудь строго обоснован, поскольку не существует какой-либо несингулярной функции, все высшие моменты которой равнялись бы нулю. Это означает, в частности, что невозможно изобразить графически плотность вероятности  $W(x)$  в виде функции от  $x$ , имеющей ненулевую «ширину» и обладающей при этом лишь конечным числом отличных от нуля моментов.

Помимо совокупности моментов столь же полное статистическое описание случайных процессов дается и совокупностью кумулянтов, обладающих вместе с тем весьма существенным преимуществом перед моментами: конечному набору кумулянтов всегда соответствует некоторая вещественная функция, имеющая конечную ширину и аппроксимирующая искомое вероятностное распределение. По этой причине существенно более обоснованным приемом является обрывание кумулянтов, а не моментов, т. е. целесообразен переход от уравнений моментов к уравнениям кумулянтов распределения. Кумулянтный анализ случайных процессов имеет перед моментным анализом еще и те преимущества, что кумулянтами элементарно учитывается и любая степень негауссовости распределения, причем для выяснения роли негауссовости вовсе не обязательно принимать во внимание все высшие кумулянты. Так, если, например, ограничиться только первыми четырьмя кумулянтами, то уже для многих задач можно существенно учесть негауссовость случайных процессов и, определяя, например, процесс установления этих кумулянтов, можно оценить и стационарные значения кумулянтов негауссовых распределений и их времена релаксации.

Попытки перехода от уравнений для моментов к уравнениям кумулянтов уже предпринимались для частного случая непрерывного марковского процесса (см., например, [1-5]). Однако полученные в этих работах уравнения записываются весьма промоздким образом и в ос-

новном лишь для низших порядков. Распространение приема, предложенного в [1], на высшие порядки кумулянтов вряд ли практически целесообразно [4]. Использование приближенной записи уравнений, основанной на аппроксимации неизвестной плотности вероятностей первыми членами ряда Эджворта [2-4], по-видимому, не имеет особой ценности ввиду плохой сходимости этого ряда. Что же касается многомерного непрерывного марковского процесса, то для него лишь указана промоздкая процедура получения уравнений для высших кумулянтов [2, 4].

Таким образом, для эффективной реализации кумулянтного подхода к исследованию негауссовых марковских процессов необходима разработка специальной техники кумулянтного анализа. В работах [6, 7] предложены кумулянтные уравнения, позволяющие выражать средние значения широкого класса функций и функционалов от негауссовых случайных переменных через совместные кумулянты этих переменных. В данной работе для произвольных марковских процессов на основе введения специальных кумулянтных скобок выводятся уравнения эволюции кумулянтов любого порядка, имеющие простой и ясный вид. Затем следует конкретный пример, в котором на основании полученных уравнений оценивается время установления стационарного вероятностного распределения негауссова случайного процесса.

## 1. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МОМЕНТОВ

1. Рассмотрим произвольный марковский процесс  $x = x(t)$ , заданный набором кинетических коэффициентов  $K_n(x, t)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), определяющих основное уравнение марковского процесса [8]:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \hat{L}(x, t)W(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} K_n(x, t)W(x, t).$$

Эволюция среднего значения произвольной функции  $f(x, t)$  от марковской переменной  $x$  определяется выражением:

$$\frac{d \langle f(x, t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) \hat{L}(x, t)W(x, t) dx,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{d \langle f(x, t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right\rangle + \langle \hat{L}^+(x, t) f(x, t) \rangle,$$

если ввести транспонированный кинетический оператор

$$\hat{L}^+(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(x, t)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}$$

и учесть обращение в нуль плотности вероятности  $W(x, t)$  со всеми ее производными на границах интегрирования. Тем самым,

$$\frac{d \langle f(x, t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle K_n(x, t) \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \right\rangle. \quad (1)$$

2. Полагая в (1)  $f(x, t) = x^s$ , элементарно получаем следующие уравнения для  $\alpha_s(t) \equiv \langle x^s(t) \rangle$  — моментов произвольного марковского процесса ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\frac{d\alpha_s(t)}{dt} = \sum_{l=1}^s C_s^l \langle x^{s-l} K_l(x, t) \rangle. \quad (2)$$

Если марковский процесс является непрерывным ( $K_3(x, t) \equiv \equiv K_4(x, t) \equiv \dots \equiv 0$ ), то (2) принимает вид

$$\frac{d\alpha_s(t)}{dt} = s \langle x^{s-1} K_1(x, t) \rangle + \frac{s(s-1)}{2} \langle x^{s-2} K_2(x, t) \rangle. \quad (3)$$

Выражая правые части (2), (3) через  $\alpha_k(t)$ , получаем бесконечную зацепляющуюся цепочку нелинейных кинетических уравнений для моментов марковского процесса.

3. Не представляет труда обобщить полученные результаты и на случай многомерного марковского процесса  $x$ , обладающего компонентами  $x_i = x_i(t)$  и кинетическими коэффициентами

$$K_i(x, t), K_{ij}(x, t), K_{ijl}(x, t), K_{ijlm}(x, t), \dots,$$

где индексы  $i, j, l, m = 1, 2, \dots, N$  указывают, к каким компонентам относятся коэффициенты.

Уравнения моментов многомерного марковского процесса имеют следующий вид:

$$\frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \langle K_i(x, t) \rangle,$$

$$\frac{d\langle x_i x_j \rangle}{dt} = 2 \{ \langle x_i \cdot K_j(x, t) \rangle \}_s + \langle K_{ij}(x, t) \rangle, \quad (4)$$

$$\frac{d\langle x_i x_j x_l \rangle}{dt} = 3 \{ \langle x_i x_j \cdot K_l(x, t) \rangle \}_s + 3 \{ \langle x_i \cdot K_{jl}(x, t) \rangle \}_s + \langle K_{ijl}(x, t) \rangle,$$

.....

$$\frac{d\langle x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_s} \rangle}{dt} = \sum_{l=1}^s C_s^l \{ \langle x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_{s-l}} \cdot K_{i_{s-l+1} i_{s-l+2} \dots i_s}(x, t) \rangle \}_s.$$

Здесь вслед за [8] для краткости записи введены скобки симметризации  $\{ \dots \}_s$ . В уравнениях (4) симметризация идет по индексам, так что, например (кинетические коэффициенты являются симметрическими функциями индексов),

$$3 \{ \langle x_i \cdot K_{jl} \rangle \}_s = \langle x_i \cdot K_{jl} \rangle + \langle x_j \cdot K_{il} \rangle + \langle x_l \cdot K_{ij} \rangle.$$

Для непрерывного марковского процесса

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_s} \rangle}{dt} &= s \{ \langle x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_{s-1}} \cdot K_{i_s}(x, t) \rangle \}_s + \\ &+ \frac{s(s-1)}{2} \{ \langle x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_{s-2}} \cdot K_{i_{s-1} i_s}(x, t) \rangle \}_s. \end{aligned}$$

## 2. КУМУЛЯНТНЫЕ СКОБКИ

1. Рассмотрим совместное вероятностное распределение  $N$  случайных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , обладающее характеристической функцией  $\theta(u_1, u_2, \dots, u_N)$ . Как известно (см., например, [8]), кумулянты этого распределения равны

$$x_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N} = j^{-m} \left[ \frac{\partial^m \ln \theta(u_1, u_2, \dots, u_N)}{\partial u_1^{p_1} \partial u_2^{p_2} \dots \partial u_N^{p_N}} \right]_{u_i=0}$$

Сумма  $p_1 + p_2 + \dots + p_N = m$  является порядком кумулянта. Введем теперь следующее специальное обозначение для кумулянтов:

$$x_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N} \equiv \langle \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{p_1}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{p_2}, \dots, \underbrace{x_N, x_N, \dots, x_N}_{p_N} \rangle \equiv \langle x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \dots, x_N^{(p_N)} \rangle.$$

Скобку  $\langle x, y, \dots, w \rangle$ , внутри которой имеется хотя бы одна запятая, будем называть *кумулянтной скобкой*. Обычное среднее значение, т. е. момент совместного распределения,

$$x_{p_1, p_2, \dots, p_N}^{x_1, x_2, \dots, x_N} \equiv \langle x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_N^{p_N} \rangle$$

целесообразно называть при этом *моментной скобкой*. Таким образом, «графическое» отличие кумулянтных скобок от моментных заключается в замене в последних точек, означающих произведения, на запятые.

Кумулянтные скобки всегда могут быть выражены через моментные в полном соответствии с выражением кумулянтов многомерного распределения через его моменты:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle, \\ \langle x, y, z \rangle &= \langle x \cdot y \cdot z \rangle - 3 \{ \langle x \rangle \langle y \cdot z \rangle \}_s + 2 \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z \rangle, \\ \langle x, y, z, w \rangle &= \langle x \cdot y \cdot z \cdot w \rangle - 4 \{ \langle x \rangle \langle y \cdot z \cdot w \rangle \}_s - 3 \{ \langle x \cdot y \rangle \langle z \cdot w \rangle \}_s + \\ &+ 2 \cdot 6 \{ \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z \cdot w \rangle \}_s - 6 \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z \rangle \langle w \rangle \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно записать и обратные соотношения:

$$\begin{aligned} \langle x \cdot y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle, \\ \langle x \cdot y \cdot z \rangle &= \langle x, y, z \rangle + 3 \{ \langle x \rangle \langle y, z \rangle \}_s + \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z \rangle, \\ \langle x \cdot y \cdot z \cdot w \rangle &= \langle x, y, z, w \rangle + 4 \{ \langle x \rangle \langle y, z, w \rangle \}_s + \\ &+ 3 \{ \langle x, y \rangle \langle z, w \rangle \}_s + 6 \{ \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z, w \rangle \}_s + \langle x \rangle \langle y \rangle \langle z \rangle \langle w \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

и т. д.

Здесь также использованы скобки симметризации  $\{ \dots \}_s$ , обозначающие, например,

$$3 \{ \langle x, y \rangle \langle z, w \rangle \}_s \equiv \langle x, y \rangle \langle z, w \rangle + \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle + \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle.$$

Введение кумулянтных скобок позволяет рассматривать выражения типа  $\langle \psi(x), f(y) \rangle$ ,  $\langle x, \psi(y), f(z) \rangle$ , которые не могут быть непосредственно выражены через кумулянты совместного распределения  $W(x, y, z)$  и в то же время, согласно (5), всегда могут быть записаны через соответствующие средние значения.

Общая взаимосвязь моментных и кумулянтных скобок дается соотношением

$$\langle x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1}^k \{ \langle x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \rangle \langle x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_N \rangle \}, \quad (7)$$

которое легко доказывается с помощью уравнений, взаимосвязывающих средние значения с кумулянтами многомерных распределений [6]. В формуле (7) симметризация идет по  $N - 1$  первым аргументом.

2. Можно показать, что кумулянтные скобки обладают следующими важными свойствами:

- 1)  $\langle x, y, z, \dots, w \rangle$  — симметрическая функция всех аргументов,
- 2)  $\langle Ax, By, Cz, \dots, Kw \rangle = ABC \dots K \langle x, y, z, \dots, w \rangle$ , (8)
- 3)  $\langle x, y, \dots, z_1 + z_2, \dots, w \rangle = \langle x, y, \dots, z_1, \dots, w \rangle + \langle x, y, \dots, z_2, \dots, w \rangle$ ,
- 4)  $\langle x, y, \dots, A, \dots, w \rangle = 0$ ,  $\langle x, y, \dots, \xi, \dots, w \rangle = 0$ ,
- 5)  $\langle x + A, y + B, z + C, \dots, w + K \rangle = \langle x, y, z, \dots, w \rangle$ .

Здесь  $A, B, C, \dots, K$  — детерминированные величины,  $\xi$  — случайная переменная, статистически независимая от всех других.

Первые три свойства (8) справедливы, очевидно, и для моментных скобок. Это совпадение свойств имеет далеко идущие последствия. Так, если какое-либо выражение для моментов случайных переменных получено при использовании только первых трех свойств, то в точности то же выражение верно и для кумулянтов, и оно может быть получено простой заменой точек на запятые во всех моментных скобках данного выражения.

Второе и третье свойства означают, что по отношению к отдельному аргументу кумулянтная скобка, как и моментная, является линейным оператором:

$$\langle x, y, \dots, \sum_k A_k z_k, \dots, w \rangle = \sum_k A_k \langle x, y, \dots, z_k, \dots, w \rangle.$$

Четвертое свойство показывает, что совместные кумулянты статистически независимых совокупностей равны нулю. Пятое свойство означает, что кумулянты инвариантны к переносу начала отсчета переменных.

### 3. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КУМУЛЯНТОВ

1. Найдем уравнения эволюции для кумулянтов  $x_s(t) \equiv \langle \underbrace{x(t), x(t), \dots, x(t)}_s \rangle$  рассматриваемого марковского процесса.

Поскольку первый кумулянт  $x_1(t)$  совпадает с первым моментом, то уравнением для него будет уравнение (2) при  $s = 1$ . Дифференцируя второй кумулянт  $\langle x, x \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , получим:

$$\frac{d x_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [a_2(t) - a_1^2(t)] = \frac{d a_2(t)}{dt} - 2a_1(t) \frac{d a_1(t)}{dt}.$$

Учитывая (2) для  $s = 1, 2$ , найдем

$$\frac{d x_2(t)}{dt} = 2 \langle x \cdot K_1(x, t) \rangle - 2 \langle x \rangle \langle K_1(x, t) \rangle + \langle K_2(x, t) \rangle,$$

что при использовании кумулянтных скобок запишется как

$$\frac{d \langle x, x \rangle}{dt} = \frac{d x_2(t)}{dt} = 2 \langle x, K_1(x, t) \rangle + \langle K_2(x, t) \rangle.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2) при  $s = 2$ , видим полную аналогию с той лишь разницей, что и в левой и в правой его частях вместо моментных скобок стоят кумулянтные. Покажем, что та же самая ситуация имеет место и для всех остальных кумулянтов, что, вообще говоря, связано с вышеуказанным совпадением первых трех свойств (8) моментных и кумулянтных скобок.

Итак, нам нужно доказать формулу

$$\frac{d x_s(t)}{dt} = \sum_{i=1}^s C_s^i \langle x^{(s-i)}, K_i(x, t) \rangle, \quad (9)$$

которая получается из (2) заменой в левой и правой частях моментных скобок на кумулянтные. Докажем ее методом индукции, предположив, что она справедлива для  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{s-1}$ .

Поскольку  $\alpha_s(t)$  зависит от всех кумулянтов вплоть до  $x_s(t)$ , то

$$\frac{d \alpha_s}{dt} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i} \frac{d x_i}{dt} = \sum_{i=1}^s C_s^i \alpha_{s-i} \frac{d x_i}{dt}.$$

Здесь для вычисления производной  $\frac{\partial \alpha_s}{\partial x_i}$  мы воспользовались кумулянтным уравнением (см. [6]):

$$\frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial x_k} = \frac{1}{k!} \left\langle \frac{d^k}{d x^k} f(x) \right\rangle.$$

Таким образом,

$$\frac{d x_s}{dt} = \frac{d \alpha_s}{dt} - \sum_{i=1}^{s-1} C_s^i \alpha_{s-i} \frac{d x_i}{dt}.$$

Поскольку в сумму входят кумулянты порядка, меньшего  $s$ , то их производные можем выразить с помощью (9):

$$\frac{d x_s}{dt} = \frac{d \alpha_s}{dt} - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^i C_s^i C_i^j \alpha_{s-i} \langle x^{(i-j)}, K_j \rangle.$$

Меняя порядок суммирования и учитывая свойства биномиальных коэффициентов, получим

$$\frac{d x_s}{dt} = \frac{d \alpha_s}{dt} - \sum_{j=1}^{s-1} C_s^j \sum_{i=1}^{s-j} C_{s-j}^i \alpha_i \langle x^{(s-i-j)}, K_j \rangle.$$

Воспользовавшись формулой

$$\langle x^{(n)}, y \rangle = \langle x^n \cdot y \rangle - \sum_{j=1}^{s-1} C_s^j [\langle x^{s-j} \cdot K_j \rangle - \langle x^{(s-j)}, K_j \rangle],$$

которая элементарно получается из (7), находим

$$\frac{d x_s}{dt} = \frac{d \alpha_s}{dt} - \sum_{j=1}^{s-1} C_s^j [\langle x^{s-j} \cdot K_j \rangle - \langle x^{(s-j)}, K_j \rangle].$$

Подставляя сюда (2), приходим к (9).

Таким образом, формула (9) представляет уравнения эволюции кумулянтов произвольного марковского процесса.

Для непрерывного марковского процесса (9) принимает вид:

$$\frac{d \langle x_s(t) \rangle}{dt} = s \langle x^{(s-1)}, K_1(x, t) \rangle + \frac{s(s-1)}{2} \langle x^{(s-2)}, K_2(x, t) \rangle. \quad (10)$$

Аналогичным образом могут быть получены уравнения и для кумулянтов многомерного марковского процесса. Они имеют следующий вид:

$$\frac{d \langle x_i \rangle}{dt} = \langle K_i(x, t) \rangle,$$

$$\frac{d \langle x_i, x_j \rangle}{dt} = 2 \{ \langle x_i, K_j(x, t) \rangle \}_s + \langle K_{ij}(x, t) \rangle, \quad (11)$$

$$\frac{d \langle x_i, x_j, x_l \rangle}{dt} = 3 \{ \langle x_i, x_j, K_l(x, t) \rangle \}_s +$$

$$+ 3 \{ \langle x_i, K_{jl}(x, t) \rangle \}_s + \langle K_{ijl}(x, t) \rangle,$$

.....

$$\frac{d \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s} \rangle}{dt} = \sum_{l=1}^s C_s^l \{ \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{s-l}}, K_{i_{s-l+1} i_{s-l+2} \dots i_s}(x, t) \rangle \}_s.$$

Если многомерный марковский процесс является непрерывным, то в последней сумме останутся только два слагаемых:

$$\frac{d \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s} \rangle}{dt} = s \{ \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{s-1}}, K_{i_s}(x, t) \rangle \}_s +$$

$$+ \frac{s(s-1)}{2} \{ \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{s-2}}, K_{i_{s-1} i_s}(x, t) \rangle \}_s.$$

2. Выражая правые части (9), (11) через кумулянты, получаем бесконечную, также в общем случае зацепляющуюся, цепочку кинетических уравнений. Если полагать теперь отличными от нуля только первые два кумулянта, то получим два уравнения для них в *гауссовом приближении*. Если предполагать отличными от нуля первые четыре кумулянта, то четыре уравнения для них дадут нам их значения в *эксцессном приближении*. Затем мы получим *приближение шестого* порядка и т. д.

Заметим при этом, что гауссово приближение в точности соответствует известному приему замыкания бесконечной цепочки уравнений для моментов путем вычисления средних, стоящих в их правых частях, с помощью гауссова распределения. С другой стороны, по-видимому, [1], ограничение гауссовым приближением эквивалентно применению так называемого метода статистической линеаризации [9].

#### 4. ПРИМЕР

1. Рассмотрим в качестве конкретного примера марковский одномерный процесс  $x(t)$ , заданный уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -ax^3 + \xi(t),$$

где  $\xi(t)$  — стационарный гауссов дельта-коррелированный процесс:  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D \delta(\tau)$ . Процесс  $x(t)$  является негаус-

совым непрерывным марковским процессом, его кинетические коэффициенты равны  $K_1(x, t) = -ax^3$ ,  $K_2(x, t) = D$ , и он описывает преобразование белого шума инерционным звеном, охваченным отрицательной обратной связью с кубической нелинейностью.

Согласно (10) кумулянты этого марковского процесса подчиняются уравнениям

$$\frac{dx_s}{dt} = -sa \langle \underbrace{x, x, \dots, x}_{s-1}, x^3 \rangle + \begin{cases} D, & s = 2 \\ 0, & s \neq 2 \end{cases}. \quad (12)$$

2. Ограничившись только первыми четырьмя кумулянтами (т. е. положив  $x_5 = x_6 = \dots = 0$ ) и выразив через них правые части первых четырех уравнений (12) с помощью (5), (6), приходим к

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -a[x_3 + 3x_1x_2 + x_1^3], \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2a[x_4 + 3x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_1^2x_2] + D, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -3a[3x_1x_4 + 9x_2x_3 + 3x_1^2x_3 + 6x_1x_2^2], \\ \frac{dx_4}{dt} &= -4a[12x_2x_4 + 3x_1^2x_4 + 9x_3^2 + 18x_1x_2x_3 + 6x_3^3]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из физических соображений следует, что стационарное распределение рассматриваемого марковского процесса  $W(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} W(x, t)$  существует и является симметричным, так что установившиеся значения нечетных кумулянтов  $x_{1\infty}, x_{3\infty}, \dots$  ( $x_{s\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} x_s(t)$ ) обращаются в нуль, а установившиеся значения четных кумулянтов  $x_{2\infty}, x_{4\infty}$  согласно (13) определяются уравнениями

$$x_{4\infty} + 3x_{2\infty}^2 = \frac{D}{2a}, \quad 2x_{2\infty}x_{4\infty} + x_{2\infty}^3 = 0.$$

Отсюда находим

$$x_{2\infty} = \sqrt{\frac{D}{5a}}, \quad x_{4\infty} = -\frac{D}{10a}.$$

Такова дисперсия и эксцесс искомого стационарного распределения  $W(x)$  в эксцессном приближении. Если же с самого начала ограничиться гауссовым приближением, то из второго уравнения (13) легко най-

дем, что  $x_{2\infty} = \sqrt{\frac{D}{6a}}$ , в то время как  $x_{4\infty} = 0$ .

Полученные значения интересно сравнить с точными значениями дисперсии и эксцесса стационарного распределения, которое в данном примере может быть найдено точно, и которое равно

$$W(x) = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2D}{a} \right)^{1/4} \Gamma(1/4) \right]^{-1} \exp \left[ -\frac{ax^4}{2D} \right].$$

Расчет показывает, что точные значения кумулянтов равны



$$x_{2\infty} = \sqrt{\frac{2D}{a}} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}, \quad x_{4\infty} = \frac{2D}{a} \left[ \frac{1}{4} - 3 \frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma^2(1/4)} \right],$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Если обратиться к численным значениям, то получим следующую таблицу:

	Гауссово приближение	Экссесное приближение	Точное значение
$x_{2\infty}$	$0,41 \sqrt{D/a}$	$0,45 \sqrt{D/a}$	$0,48 \sqrt{D/a}$
$x_{4\infty}$	0	$-0,1 D/a$	$-0,19 D/a$

Из этой таблицы видно, что уже эксцесное приближение дает достаточно точное значение дисперсии марковского процесса и правильно показывает знак и порядок четвертого кумулянта.

3. Однако более существенное значение уравнения (13) имеют для описания процесса *установления* стационарного распределения, т. е. для определения характеристик нестационарного распределения  $W(x, t)$ , которое в точном виде найти не удастся.

Если взять, например, гауссово приближение и следующие начальные значения первых двух кумулянтов:  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = x_{20}$ , то  $x_1(t) = 0$  для всех  $t > 0$ , а установление дисперсии будет определяться уравнением

$$\frac{d x_2(t)}{dt} = D - 6a x_2^2(t).$$

Его решение имеет вид

$$x_2(t) = x_{2\infty} \frac{(1 + x_{20}/x_{2\infty}) - (1 - x_{20}/x_{2\infty})e^{-\gamma t}}{(1 + x_{20}/x_{2\infty}) + (1 - x_{20}/x_{2\infty})e^{-\gamma t}},$$

где  $\gamma = \tau_0^{-1} = \sqrt{24 Da}$ .

Если исследовать процесс установления в эксцесном приближении, то, ограничиваясь симметричным эксцесным распределением ( $x_1 = x_3 = 0$ ), согласно (13) получим следующие уравнения установления  $x_2(t)$  и  $x_4(t)$ :

$$\frac{d x_2(t)}{dt} = -2a[x_4(t) + 3x_2^2(t)] + D,$$

$$\frac{d x_4(t)}{dt} = -24a[2x_2(t)x_4(t) + x_2^3(t)].$$

Нетрудно показать, что вблизи установившихся значений  $x_{2\infty}$ ,  $x_{4\infty}$  релаксация  $x_2(t)$  и  $x_4(t)$  происходит по экспоненциальному закону с двумя постоянными времени:

$$\tau_{01} = \frac{1}{\sqrt{18Da}}, \quad \tau_{02} = \frac{1}{\sqrt{510Da}}.$$

Принимая во внимание лишь наибольшее значение времени релаксации, ибо именно оно определяет полное установление кумулянтов, мы видим, что изменение  $\tau_0^{\max}$  при переходе от гауссова приближения к эксцесному незначительно и носит только количественный характер.

Таким образом, имеем следующую таблицу:

	Гауссово приближение	Экссесное приближение	Точное значение
$\tau_a^{\max}$	$\frac{0,204}{\sqrt{Da}}$	$\frac{0,236}{\sqrt{Da}}$	$\frac{b = ?}{\sqrt{Da}}$

Анализируя полную систему уравнений (12), легко обнаружить, что релаксация любого кумулянта  $x_s(t)$  вблизи его установившегося (устойчивого) значения  $x_{s\infty}$  происходит, вообще говоря, с бесконечным числом постоянных времени.

4. Нетрудно найти зависимость величины произвольного кумулянта  $n$  времени его установления от параметра нелинейности системы и интенсивности воздействующего шума. Для этого следует записать уравнения (12) в безразмерном виде при дифференцировании по безразмерному времени. Для этого, в свою очередь, переменную  $x$  необходимо выразить через безразмерную переменную  $u$ :

$$x(t) = \sqrt{\frac{D}{a}} u(\theta).$$

Подставляя это выражение в (12), учитывая свойства кумулянтных скобок, мы найдем безразмерное время  $\theta$ , равное

$$\theta = t/\tau_0, \quad \tau_0 = (aD)^{-1/2},$$

и получим следующий вид уравнений:

$$\frac{d x_s^u(\theta)}{d \theta} = -s \langle u^{(s-1)}, u^3 \rangle + \begin{cases} 1, & s = 2 \\ 0, & s \neq 2 \end{cases}.$$

Сюда входят только численные коэффициенты. Это значит, что времена релаксации кумулянтов  $x_s^u(\theta)$  являются набором чисел  $\theta_k$ .

Итак, кумулянты исследуемого марковского процесса имеют вид

$$x_s^x(t) = \left(\frac{D}{a}\right)^{s/4} x_s^u(t/\tau_0),$$

а их времена релаксации равны  $\theta_k/\sqrt{aD}$ .

5. Мы получили, что время установления стационарного распределения существенно зависит от интенсивности воздействующего шума  $D$ . Чем больше шум, тем быстрее происходит установление. Эта зависимость, очевидно, появляется вследствие нелинейности системы.

Вместе с этим, уменьшение  $\tau_0$  с ростом  $D$  имеет место не для любых нелинейностей. Если, например, вместо кубической взять нелинейность вида  $\sim x \cdot |x|^{p-1}$ , то уменьшение  $\tau_0$  с ростом  $D$  будет иметь место лишь для значений  $p > 1$ , и тем более быстро, чем больше  $p$ . Для  $p < 1$  будет наблюдаться обратная картина: с ростом  $D$  время установления будет возрастать. При  $p = 1$ , очевидно,  $\tau_0$  не будет вовсе зависеть от  $D$ .

Как показывает анализ, это обстоятельство объясняется тем, что с ростом интенсивности шума на время установления  $\tau_0$  влияют два противоборствующих фактора: первый, приводящий к росту  $\tau_0$ , связан с тем, что большему шуму соответствует большее установившееся значение дисперсии и, следовательно, большее «расстояние» до  $x_{\infty}$ ; второй, приводящий к уменьшению  $\tau_0$ , обязан тому, что при большей интенсивности шума быстрее происходит «растаскивание» фазовых точек по

пространству, т. е. увеличивается скорость движения  $x_2(t)$  к  $x_{200}$ . При  $\rho < 1$  преобладает первый фактор, при  $\rho > 1$  — второй, а в случае  $\rho = 1$  (линейная система) оба фактора полностью уравновешивают друг друга.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Дашевский, Р. Ш. Липцер, Автоматика и телемеханика, № 6, 63; № 8, 32 (1967).
2. М. Л. Дашевский, Автоматика и телемеханика, № 11, 62 (1967).
3. М. Л. Дашевский, Автоматика и телемеханика, № 7, 24 (1968)
4. М. Л. Дашевский, Автоматика и телемеханика, № 10, 63, № 11, 24 (1968).
5. Л. Г. Евланов, Автоматика и телемеханика, № 12, 5 (1968).
6. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 8, 1287 (1973).
7. А. А. Дубков, А. Н. Малахов, Докл. АН СССР, 222, № 4, 793 (1975).
8. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
9. И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов, Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1962.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
7 июня 1974 г.

## KINETIC EQUATIONS OF CUMULANTS OF ARBITRARY MARKOV PROCESS

*A. N. Malakhov*

Equations of simple any-order cumulant evolution are derived for arbitrary Markov's processes on the basis of introduction of special cumulant brackets. A particular example of an inertial system with cubic nonlinearity is considered. The time of setting the stationary probable distribution of nongaussian Markov's process is estimated. It is shown that it depends on the system nonlinearity parameter and acting noise intensity.

УДК 538.56 : 519.25

## О ВРЕМЕННЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИМПУЛЬСОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Л. Апресян

Из уравнения переноса излучения выводится система уравнений для пространственных моментов импульсов, рассеивающихся на флуктуациях в статистически однородной и стационарной среде. Низшие пространственные моменты описывают усредненные по объему характеристики импульса, такие, как энергетический спектр, радиус-вектор центра тяжести и средне-квадратичное уширение импульса. Уравнения для моментов решаются в случае рассеяния излучения на мелкомасштабных флуктуациях электронной концентрации в холодной плазме. Приводятся некоторые оценки для частотного спектра импульса в случае рассеяния на крупномасштабных флуктуациях.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается рассеяние импульсов высокочастотного излучения на флуктуациях электронной плотности в статистически однородной и стационарной среде. Излучение описывается скалярным уравнением переноса [1, 2]:

$$\left[ \frac{1}{v(\omega, \mathbf{n})} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \nabla + \alpha(\omega, \mathbf{n}) \right] I(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n}) = \sigma(\omega', \mathbf{n}' \rightarrow \omega, \mathbf{n}) \times \\ \times I(\mathbf{r}, t, \omega', \mathbf{n}') + q(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n}), \quad (1)$$

где  $I(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n})$  — лучевая интенсивность,  $v(\omega, \mathbf{n})$  — модуль групповой скорости рассматриваемых волн,  $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$  — единичный вектор направления  $\mathbf{v}(\omega, \mathbf{n})$ ,  $\sigma(\omega', \mathbf{n}' \rightarrow \omega, \mathbf{n})$  — сечение рассеяния с направления  $\mathbf{n}'$  и частоты  $\omega'$  на направление  $\mathbf{n}$  и частоту  $\omega$ ,  $\alpha(\omega, \mathbf{n})$  — коэффициент ослабления. Функция  $q(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n})$  описывает источники излучения. Далее всюду, за исключением пояснений к формулам, подразумевается интегрирование по штрихованным переменным по всей области их изменения, причем интегрирование по  $\mathbf{n}'$  тождественно интегрированию по телесному углу  $d\Omega_{\mathbf{n}'}$ .

При рассеянии на не зависящих от времени флуктуациях  $\sigma(\omega_1, \mathbf{n}_1 \rightarrow \omega, \mathbf{n}) \sim \delta(\omega - \omega_1)$ . При этом разные частотные компоненты лучевой интенсивности  $I(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n})$  можно рассматривать независимо. В общем случае формально уравнение (1) связывает значения  $I(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n})$  при всех частотах, но, как ясно из физических соображений, это уравнение применимо только в достаточно высокочастотной области спектра, при  $\omega \gg \tau^{-1} \sim v\alpha$ , где  $\tau$  — характерный масштаб изменения лучевой интенсивности по времени.

Для случая рассеяния естественно поляризованной поперечной моды в статистически изотропной холодной плазме при простейшей модели среды [3] сечение рассеяния имеет вид

$$\sigma(\omega_1, n_1 \rightarrow \omega, n) = r_0^2 \frac{1 + (nn_1)^2}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_1)}} \frac{\langle \delta N^2 \rangle(k - k_1)}{2\pi} \Big|_{\substack{k = k_\omega \\ k_1 = k_{\omega_1}}} \quad (2)$$

Здесь  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$  — классический радиус электрона,  $\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2$ ,

$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}$  — плазменная частота,  $k_\omega = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ ,  $k = (\omega, \mathbf{k})$ ,

$\langle \delta N^2 \rangle(k)$  — пространственно-временной спектр флуктуаций электронной концентрации:

$$\langle \delta N^2 \rangle(k) = \langle \delta N(\mathbf{r}, t) \delta N(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + t') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}' + i\omega t') \rangle. \quad (3)$$

Ниже мы будем рассматривать только высокочастотные волны, для которых  $\omega, \omega' \gg \omega_p$ . Для таких волн в (1) и (2) можно положить  $\sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx 1$ ,  $v(\omega) = c \sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx c$ . Кроме того, мы пренебрежем частотным изменением коэффициента ослабления  $\alpha$  в рассматриваемом диапазоне волн, считая  $\alpha \approx \text{const}$ .

Уравнения вида (1) в последнее время интенсивно исследовались, главным образом, в связи с теорией переноса нейтронов [4, 5]. Даже в случае неограниченной среды, когда для решения (1) не нужно задавать граничные условия (не считая тривиального условия исчезновения поля на бесконечности), аналитическое решение удается получить в общем виде только для специальной — факторизованной — формы сечения:

$$\sigma(\omega_1, n_1 \rightarrow \omega, n) = \sum_{i=1}^m a_i(\omega, n) b_i(\omega_1, n_1). \quad (4)$$

Обычно (4) используют как аппроксимацию, пригодную для получения количественных оценок. Например, известное в астрофизике приближение «полного перераспределения частоты» [6] соответствует приближенному представлению сечения в виде (4) с одним членом ( $m = 1$ ).

В случае рассеяния на флуктуациях электронной концентрации сечение рассеяния (2) не сводится к (4), а приближенное представление (2) в виде (4) требует использования большого числа  $m$  членов. При этом аналитическое решение оказывается слишком сложным для получения оценок, и для практического применения этого решения приходится использовать численные методы.

В данной работе для исследования характеристик импульсов, распространяющихся в неограниченной рассеивающей среде, мы используем метод моментов, который является тривиальным обобщением метода, описанного в [5]. Вместо интенсивности  $I(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n})$  мы будем вычислять более грубые интегральные характеристики — пространственные моменты поля:

$$r_{t\omega n}^m = \int r^m I(\mathbf{r}, t, \omega, \mathbf{n}) d\mathbf{r}, \quad (5)$$

где матрица  $r^m$  определяется как

$$r^m = \left\| r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_m} \right\| = \underbrace{r \oplus r \oplus \dots \oplus r}_m, \quad (6)$$

а  $r_1 \oplus r_2$  означает тензорное произведение  $r_1$  на  $r_2$ . Предполагается, что импульсы спадают в пространстве достаточно быстро, так что все моменты существуют.

Определение  $r_{t\omega n}^m$  при всех  $m = 0, 1, 2, \dots$  позволяет, в принципе, восстановить  $I(r, t, \omega, n)$ , но такая процедура получения  $I(r, t, \omega, n)$  громоздка и неудобна. Поэтому метод моментов имеет смысл использовать только тогда, когда по условиям задачи достаточно знать несколько низших моментов, а также для проверки результатов, полученных другими методами. Первый случай может встречаться достаточно часто, поскольку низшие моменты имеют простой физический смысл и довольно полно описывают изменения импульса, вызванные рассеянием на неоднородностях.

Отметим физический смысл простейших моментов. Нулевой момент  $r_{t\omega n}^0$  имеет смысл полной энергии компонент импульса с частотой  $\omega$ , распространяющихся в направлении  $n$  в момент времени  $t$ . Первый и второй моменты позволяют очевидным образом оценить движение центра тяжести импульса и пространственное уширение импульса со временем. В случаях, когда пространственная форма импульса не существенна (например, если регистрирующий прибор воспринимает импульс «как целое», интегрируя поле по пространству), низшие моменты являются основными характеристиками импульса.

В данной работе выводятся рекуррентные соотношения, позволяющие в случае мелкомасштабных флуктуаций вычислять моменты любых порядков, а также приводятся некоторые оценки для спектральной плотности  $I(t, \omega) \equiv r_{t\omega n}^{v_0}$  в случае крупномасштабных флуктуаций. В отличие от приближения (4), приводящего уравнение переноса к интегро-дифференциальному уравнению с вырожденным (факторизованным) ядром, описанный анализ основан на аппроксимации сечения выражением с разностным (по частоте) ядром.

## 2. РАССЕЯНИЕ НА МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ

Умножим обе части уравнения (1) на  $r^m$  и проинтегрируем результат по  $dr$ , считая, что на бесконечности излучение отсутствует:

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right) r_{t\omega n}^m = \sigma(\omega', n' \rightarrow \omega, n) r_{t\omega' n'}^m + \hat{S} n \oplus r_{t\omega n}^{m-1} \quad (7)$$

$$(m \geq 0, r_{t\omega n}^m \equiv 0, m < 0).$$

Здесь  $\hat{S}$  — оператор симметризации по тензорным индексам, определенный так, что

$$\hat{S} n \oplus r \oplus r \oplus \dots \equiv n \oplus r \oplus r \oplus \dots + r \oplus n \oplus r \oplus \dots + r \oplus r \oplus n \oplus \dots + \dots \equiv (n \nabla) r \oplus r \oplus r \oplus \dots \quad (8)$$

Это определение естественно распространяется на любой тензор, симметричный по всем индексам, кроме первого.

При получении (7) мы положили  $q = 0$ . Обобщение результатов на случай наличия в среде источников, когда  $q \neq 0$ , не вызывает затруднений.

Система (7), дополненная начальными условиями

$$\int r^m I(r, t = 0, \omega, n) dr = r_{0\omega n}^m, \quad (9)$$

полностью определяет выбор  $r_{t\omega n}^m$  и, следовательно,  $I(r, t, \omega, n)$ . Эта

рекуррентная система уравнений позволяет выразить  $\overset{V}{r}_{t\omega n}^m$  через  $\overset{V}{r}_{t\omega n}^{m-1}$ , причем уравнение для  $r_{t\omega n}^0$  оказывается замкнутым относительно  $r_{t\omega n}^0$  \*.

Используя (2), запишем (7) для случая рассеяния высокочастотных волн в холодной плазме в виде системы

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right) \overset{V}{r}_{t\omega n}^m = \sigma(k - k') \Big|_{\substack{k = k_\omega \\ k' = k_{\omega'}}} \frac{1 + (nn')^2}{2} \times \\ \times \overset{V}{r}_{t\omega' n'}^m + \hat{S} n \oplus \overset{V}{r}_{t\omega n}^{m-1} \quad (10)$$

для величин

$$\overset{V}{r}_{t\omega n}^m = \omega^{-2} \overset{V}{r}_{t\omega n}^m. \quad (11)$$

В (10)

$$\sigma(k) = r_0^2 \frac{\langle \delta N^2 \rangle(k)}{2\pi}.$$

В случае мелкомасштабных флуктуаций, когда характерный размер неоднородностей  $a$  много меньше характерной длины волны,  $ka \ll 1$ , в правую часть (10) можно подставить  $k_\omega = k_{\omega'} = 0$ , и тогда величина  $\sigma(k - k')$  будет зависеть только от разности  $\omega - \omega'$ . При этом (10) становится интегро-дифференциальным уравнением с разностным ядром, которое легко решается. Более того, в этом случае можно было бы записать аналитическое решение исходного уравнения (1), причем не только для неограниченной среды, но и для всех случаев, когда известно решение аналогичной задачи без учета изменения частоты (например для рассеивающего полупространства [5]). Однако полные выражения для  $I(r, t, \omega, n)$ , являющиеся преобразованиями Фурье от известных аналитических решений уравнения переноса, очень громоздки и неудобны для получения оценок.

Подставим в (1)  $k_\omega = k_{\omega'} = 0$  и решим полученное уравнение. Результат имеет вид

$$\overset{V}{r}_{t\omega n}^m = \hat{G}(t, \omega; 0) \left( \hat{\sigma}_\omega \frac{1 + (nn')^2}{2} \overset{V}{r}_{t\omega n'}^m + \hat{S} n \oplus \overset{V}{r}_{t\omega n}^{m-1} + \frac{\delta(t)}{c} \overset{V}{r}_{0\omega n}^m \right); \quad (12)$$

$$\overset{V}{r}_{t\omega n'}^m = \hat{G}\left(t, \omega; \frac{8\pi}{3}\right) \left( \hat{S} n' \oplus \overset{V}{r}_{t\omega n'}^{m-1} + \frac{\delta(t)}{c} \overset{V}{r}_{0\omega n'}^m \right); \quad (13)$$

$$(nn')^2 \overset{V}{r}_{t\omega n'}^m = \hat{G}\left(t, \omega; \frac{4\pi}{15}\right) \left( \frac{4\pi}{5} \hat{\sigma}_\omega \overset{V}{r}_{t\omega n'}^m + (nn')^2 \hat{S} n' \oplus \overset{V}{r}_{t\omega n'}^{m-1} + \right. \\ \left. + \frac{\delta(t)}{c} (nn')^2 \overset{V}{r}_{0\omega n'}^m \right), \quad (14)$$

\* В случае падения излучения на рассеивающее полупространство уравнение вида (7) при  $m = 0$  оказывается незамкнутым относительно  $r_{t\omega n}^0$  даже при учете соответствующих граничных условий. В этом случае метод моментов неэффективен и нужно рассматривать полное уравнение (1) для  $I(r, t, \omega, n)$ .

где операторы  $\hat{G}(t, \omega; \beta) \equiv \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha - \beta \hat{\sigma}_\omega \right)^{-1}$  и  $\hat{\sigma}_\omega$  определяются соотношениями  $\varphi(t, \omega)$  и  $f(\omega)$  — произвольные функции)

$$\hat{G}(t, \omega; \beta) \varphi(t, \omega) = G(t-t'; \omega-\omega'; \beta) \theta(t') \varphi(t', \omega'); \quad (15)$$

$$G(t, \omega; \beta) = \frac{c}{2\pi} \theta(t) \exp[-(\alpha - \beta\sigma(\tau)) ct + i\omega\tau'], \quad (16)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & (t > -0) \\ 0 & (t < -0) \end{cases};$$

$$\sigma(\tau) = \sigma(\omega') e^{-i\omega'\tau} = r_0^2 \int \langle \delta N(\mathbf{r}, t) \delta N(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle d\rho; \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_\omega f(\omega) = \sigma(\omega - \omega') f(\omega'); \quad (18)$$

$$\sigma(\omega) = r_0^2 \frac{\langle \delta N^2 \rangle(k)}{2\pi} \Big|_{k=0}. \quad (19)$$

Здесь и ниже обозначение переменной является одновременно обозначением представления ( $\sigma(\tau)$  — фурье-образ  $\sigma(\omega)$ ).

Соотношения (12) — (19) позволяют выразить моменты, вообще говоря, любого порядка. Они содержат оператор  $\hat{G}(t, \omega; \beta) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha - \beta \hat{\sigma}_\omega \right)^{-1}$ , ядро которого пропорционально спектральной плотности  $I(t, \omega) \equiv r_{t\omega n}^0$ , импульса, локализованного в начальный момент времени на частоте  $\omega_0$  ( $I(0, \omega) = I_0 \delta(\omega - \omega_0)$ ):

$$I(t, \omega) = \omega^2 \tilde{r}_{t\omega n}^0 = \frac{J_0}{c} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 G\left(t, \omega - \omega_0; \frac{8\pi}{3}\right). \quad (20)$$

Рассмотрим подробней структуру этого ядра.

Ядро  $G(t, \omega; \beta)$  определяется соотношением (16), где  $\beta$  — параметр порядка единицы ( $\beta$  принимает значения  $\beta_0 = \frac{8\pi}{3}$  и  $\beta_1 = \frac{4\pi}{15}$ , случай  $\beta = 0$  — тривиален). Функция  $\sigma(\tau)$ , входящая в (16), имеет наибольшее значение при  $\tau = 0$  и исчезает при  $\tau \gg \tau_k$ , где  $\tau_k$  — некоторое характерное время ( $\tau_k$  равно характерному времени затухания корреляций электронной плотности, если последнее не зависит от пространственного размера флуктуаций, так что корреляционная функция  $\langle \delta N(\mathbf{r}, t) \delta N(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle$  вырождается в произведение  $\chi(\boldsymbol{\rho}) \varphi(\tau)$ ). Простые соображения показывают, что зависимость ядра  $G(t, \omega; \beta)$  от частоты качественно имеет вид, изображенный на рис. 1. При  $\omega = 0$  это ядро имеет особенность типа  $\delta$ -функции и плавно спадает при  $|\omega| \rightarrow \infty$ . При малых временах  $t$ , таких, что  $t \ll t_{cb} = (\beta\sigma(\tau=0)c)^{-1}$ , экспоненту в (16) можно разложить по степеням  $\beta$ , что дает

$$G(t, \omega; \beta) \Big|_{t < t_{cb}} \approx \theta(t) c e^{-\alpha t c} (\delta(\omega) + \beta\sigma(\omega) ct). \quad (21)$$

Величина  $t_{cb} = (\beta\sigma(\tau=0)c)^{-1} \equiv \frac{l_{cb}}{c}$  имеет смысл характерного времени свободного пробега излучения, а выражение (21) соответствует одно-



кратному рассеянию с учетом поглощения и может быть получено простым итерированием уравнения для  $\tilde{r}_{t\omega}^0 \equiv \omega^{-2} I(t, \omega)$ .

Более интересен противоположный предельный случай больших  $t$  и сильных флуктуаций, когда  $t \gg t_{св}$ . В этом случае при  $\omega\tau_k \gg 1$  для вычисления интеграла (16) можно применить метод перевала. Разложив в (16)  $\sigma(\tau)$  в ряд по степеням  $\tau$  и удержав квадратный член, получаем

$$G(t, \omega; \beta) \Big|_{\substack{t > t_{св} \\ \omega\tau_k \gg 1}} \approx c \theta(t) \times \frac{\exp[-(\alpha - \beta\sigma(\tau=0)) ct] \exp[(t - \omega^2/2\beta ct | \sigma_0'' |)]}{\sqrt{2\pi\beta ct | \sigma_0'' |}}, \quad (22)$$

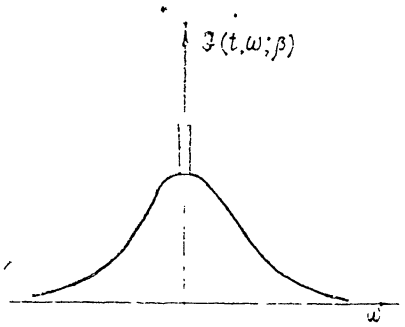


Рис. 1.

где

$$\sigma_0'' = \left. \frac{d^2 \sigma(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0}.$$

Первый множитель в этом выражении описывает ослабление поля, связанное с поглощением, а второй — расплывание импульса по частоте из-за рассеяния. Если флуктуации медленны и сдвиг частоты при рассеянии достаточно мал, то в (2) можно положить  $\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega')}} = 1$ .

Тогда затухание с показателем экспоненты  $\alpha_0 = \alpha - \beta_0 \sigma(\tau=0)$  будет соответствовать частному случаю оптической теоремы [7, 8], согласно которой коэффициент поглощения равен

$$\alpha_0 = \alpha - \sigma(\omega, n \rightarrow \omega', n') = \alpha - \beta_0 \sigma(\tau=0).$$

При малых частотах,  $\omega\tau_k \ll 1$ , оценка ядра  $G(t, \omega; \beta)$  в случае  $t \gg t_{св}$  дает

$$G(t, \omega; \beta) \Big|_{t > t_{св}} \approx c \theta(t) e^{-act} \left[ \delta(\omega) + \int \left( e^{\beta c t \sigma(\tau)} - 1 \right) \frac{d\tau}{2\pi} \right]. \quad (23)$$

Таким образом, если при малых  $t \ll t_{св}$  форма частотной зависимости уширенной части импульса, согласно (20) и (21), в среднем повторяет форму спектральной интенсивности флуктуаций  $\sigma(\omega)$ , то при больших  $t \gg t_{св}$ , как это видно из (20) и (22), форма «хвостов»  $I(t, \omega)$  независимо от формы  $\sigma(\omega)$  близка к гауссовой, но содержит плавно зависящий от частоты множитель. При этом время установления распределения гауссова типа имеет порядок времени свободного пробега излучения  $t_{св} = (\beta\sigma(\tau=0)c)^{-1}$ .

Аналогично можно рассмотреть и другие моменты поля. Например,

в приближении медленных флуктуаций, (если  $\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega')}}$  в (2) заменить на единицу) радиус-вектор «центра тяжести» импульса изменяется по закону

$$R_n(t) \equiv \frac{r_{i\omega'n'}^1}{\int r_{i\omega n}^0 d\omega d\Omega_n} = R_n(0) + [1 - \exp(-t/t_{св})] ct_{св} \times \quad (24)$$

$$\times \frac{n' r_{0\omega'n'}^0}{\int r_{0\omega n}^0 d\omega d\Omega_n},$$

соответствующему затухающему движению в направлении вектора  $n$ , усредненного по начальному состоянию импульса. Из (24) видно, что центр тяжести останавливается за время  $t \sim t_{св}$ .

Более сложные моменты вычисляются непосредственно по формулам (12) — (19).

### 3. СЛУЧАЙ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Если характерный размер неоднородностей много больше характерной длины волны, то рассеяние происходит, в основном, с малыми изменениями  $n$ , и член правой части (7), описывающий рассеяние, можно аппроксимировать следующим дифференциальным выражением (диффузионное приближение):

$$\sigma(\omega', n' \rightarrow \omega, n) \overset{\vee m}{r_{i\omega'n'}} \approx$$

$$\approx \sigma(\omega', n' \rightarrow \omega, n) \left\{ 1 + (n' - n) \nabla_{n_0} + \frac{1}{2} [(n' - n) \nabla_{n_0}]^2 \right\} \times \quad (25)$$

$$\times \overset{\vee m}{r_{i\omega n_0}^m} \Big|_{n_0 = n} = (a(\omega' \rightarrow \omega) + b(\omega' \rightarrow \omega) \Delta_n) \overset{\vee m}{r_{i\omega'n}^m},$$

где

$$a(\omega_1 \rightarrow \omega) = \sigma(\omega_1, n' \rightarrow \omega, n); \quad (26)$$

$$b(\omega_1 \rightarrow \omega) = \sigma(\omega_1, n' \rightarrow \omega, n) \frac{1 - (nn')^2}{4}. \quad (27)$$

При выводе (25) мы учли, что среда статистически изотропна и сечение зависит только от  $(nn')$ .

Соответствующая (25) система уравнений для моментов в общем случае не сводится к интегральному уравнению с разностным ядром и существенно зависит от явного вида корреляционной функции флуктуаций электронной плотности. Поэтому в случае крупномасштабных флуктуаций мы ограничимся некоторыми качественными оценками для спектральной плотности  $I(t, \omega) = r_{i\omega n}^0$ , при специальной — гауссовой — форме корреляционной функции

$$\langle \delta N(r, t) \delta N(r + \rho, t + \tau) \rangle = \delta N_0^2 \exp \left[ - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 - \left( \frac{\tau}{\tau_k} \right)^2 \right]. \quad (28)$$

В случае (28) уравнение для  $\tilde{I}(t, \omega) = \omega^{-2} I(t, \omega)$ , как это следует из (7) и (25), имеет вид

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + a \right) \tilde{I}(t, \omega) = C(\omega' \rightarrow \omega) \tilde{I}(t, \omega'), \quad (29)$$

где

$$C(\omega_1 \rightarrow \omega) \approx \frac{2\pi^2 r_0^2 \delta N_0^2 \tau_k a c^2}{\omega \omega_1} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \left[ \tau_k^2 + \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right] \left( \frac{\omega - \omega_1}{2} \right)^2 \right\}. \quad (30)$$

В (30) мы пренебрегли членами порядка  $(ka)^{-2}$  по сравнению с единицей, а также учли, что на высоких частотах  $k_\omega \approx \omega/c$ .

При рассеянии импульса, локализованного в начальный момент времени на частоте  $\omega_0$ , для не слишком больших изменений частоты в (30) можно пренебречь изменением частоты в знаменателе, учитывая только сильную зависимость от частоты в экспоненте. Тогда (29) примет вид интегро-дифференциального уравнения с разностным ядром, имеющего такую же форму, как и аналогичное уравнение в случае

мелкомасштабных флуктуаций. Поэтому для оценок поведения  $\tilde{I}(t, \omega)$  в предельных случаях больших и малых времен применимы те же соображения, которые мы использовали в предыдущем разделе при описании рассеяния на мелкомасштабных флуктуациях. Такое соответствие является следствием принятых приближений и в общем случае, конечно, не имеет места.

На примере корреляционной функции (28) отметим различия в поведении величины  $I(t, \omega)$  в случае мелкомасштабных и в случае крупномасштабных флуктуаций. Вместо времени  $\tau_k$  в случае крупномасштабных флуктуаций выступает некоторое среднее  $\tau_0$  между  $\tau_k$  и величиной  $a/c$ , имеющей порядок времени прохождения волной характерной неоднородности. В случае (28)  $\tau_0 = \sqrt{\tau_k^2 + (a/c)^2}$ \*. Еще одно отличие заключается в том, что характерное время установления «квазигауссовых хвостов» интенсивности  $I(t, \omega)$  при крупномасштабных флуктуациях в  $(ka)^2$  раз больше, чем в случае мелкомасштабных флуктуаций, поскольку усредненное по направлениям сечение рассеяния для корреляционной функции (28) при  $ka \gg 1$  в  $(ka)^2$  раз меньше, чем при  $ka \ll 1$ .

Таким образом, точная форма моментов поля существенно зависит от явного вида корреляционной функции флуктуаций, так что общие выражения для моментов удается получить только в предельном случае мелкомасштабных флуктуаций.

Важным для проведенного анализа является предположение о независимости коэффициента ослабления и групповой скорости от частоты. Если частотной зависимостью коэффициента ослабления или групповой скорости пренебречь нельзя, то исследование поведения моментов резко усложняется. В этом случае не удается получить полезных аналитических оценок даже для простейшей интегральной характеристики спектра  $I(t, \omega)$ . Частотная зависимость коэффициента  $\alpha$  важна, например, в случае слабого поглощения для изучения вопроса о возможности параметрической раскачки импульса из-за рассеяния не зависящих от времени флуктуаций, когда флуктуации не слишком медленны, вследствие чего не выполняется оптическая теорема.

Автор искренне признателен С. М. Рытову и Ю. А. Кравцову за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
2. Дж. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд. Мир, М., 1971.
3. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
4. К. М. Case, R. D. Hazeltine, J. Math. Phys., 12 (9), 1970 (1971).

\* Аналогичный параметр использовался в работе [9].

- 5 К. Кейз, П Цвайфель, Линейная теория переноса, изд. Мир, М, 1972.
- 6 В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, изд. Наука, М., 1969.
- 7 Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Препринт ИТЭФ № 486, 1967.
- 8 Л. Апресян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 461 (1973).
- 9 В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 69 (1973).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
1 октября 1974 г.

## TIME VARIATIONS OF SOME CHARACTERISTICS OF PULSES PROPAGATING IN AN INFINITE SCATTERING MEDIUM

*L. Apresyan*

Equations are derived from the radiative transfer equation for space moments of pulses propagating by fluctuations in a randomly homogeneous and stationary medium. The lowest spatial moments describe the volume-averaged pulse characteristics such as the energetic spectrum, gravity center radius-vector and mean-square pulse broadening. The equations for the moments are solved in the case of scattering of radiation by small-scale electron density fluctuations in a cold plasma. Some estimations are given for the pulse frequency spectrum in the case of scattering by large-scale fluctuations.

1

УДК 538.56 : 519.25

## ЗАВИСИМОСТЬ ВИДА СПЕКТРА МЕРЦАНИЙ ОТ ВИДА СПЕКТРА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ. II. СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНАЯ СРЕДА

В. И. Шишов

Определен вид спектра мерцаний плоской волны, прошедшей слой статистически однородной и изотропной среды с кусочно-степенным спектром неоднородностей показателя преломления. Непрерывным изменением параметров спектра турбулентности получены результаты, характерные для чисто степенного спектра турбулентности и спектра с одним характерным масштабом неоднородностей. Аналитические результаты получены в режиме слабых мерцаний, в переходном режиме и режиме насыщенных мерцаний. Выявлен тип кусочно-степенного спектра турбулентности, при котором мерцания могут иметь обширную область слабой фокусировки, в которой индекс мерцаний держится на постоянном уровне, зависящем от вида спектра, однако масштаб спектра мерцаний весьма сильно отличается от масштаба спектра флуктуаций поля. Показано, что слабые мерцания при всех типах спектра турбулентности можно описать методом Рытова.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе исследуется поведение спектральной функции флуктуаций интенсивности первоначально плоской волны, распространяющейся в слое статистически однородной и изотропной случайно-преломляющей среды, в частности изменение вида спектра мерцаний при изменении вида спектра турбулентности. В целом настоящая статья является развитием работы [1] применительно к случаю статистически однородной среды.

В качестве исходного вида пространственного спектра флуктуаций показателя преломления  $\Phi_\mu$  мы возьмем спектр,

$$\Phi_\mu(q) = \begin{cases} \frac{C_\mu}{2\pi} a^3 (qa)^{-\beta}, & \beta < 2, q < 1/a \\ \frac{C_\mu}{2\pi} a^3 (qa)^{-\alpha-2}, & \alpha > 1, q > 1/a \end{cases} \quad (1)$$

Параметр  $C_\mu$  по порядку величины совпадает со средним квадратом флуктуаций показателя преломления  $\mu^2$ .

Флуктуации интенсивности будем характеризовать функцией когерентности четвертого порядка

$$W(u, v, z) = \langle E(u, z) E(v, z) E^*(0, z) E^*(u + v, z) \rangle \quad (2)$$

и ее спектральной функцией

$$M(q, v, z) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d^2 u \exp[-i(qu)] W(u, v, z), \quad (3)$$

где ось  $z$  направлена вдоль направления распространения излучения;  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  — двумерные векторы в картинной плоскости.

Ниже мы получим соотношения, связывающие  $M(\mathbf{q}, z)|_{z=0}$  и  $\Phi_\mu(\mathbf{q})$  при различных значениях  $\alpha$ .

## 2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В работах [2-5] было найдено, что функция  $M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z)$  подчиняется уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{k} q \nabla_{\mathbf{v}} \right) M = \int d^2 q_1 F(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1, \mathbf{v}) M(\mathbf{q}_1, \mathbf{v}, z) - D'(\mathbf{v}) M; \quad (4)$$

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = 4\pi k^2 \Phi_\mu(\mathbf{q}, q_z = 0) [1 - \cos(\mathbf{q}\mathbf{v})]; \quad (5)$$

$$D'(\mathbf{v}) = \int d^2 q F(\mathbf{q}, \mathbf{v}). \quad (6)$$

Подчеркнем, что в (4), (5) пространственная частота  $\mathbf{q} = \{q_x, q_y\}$  является двумерной. Функция  $D'(\mathbf{v})$  имеет физический смысл градиента структурной функции флуктуаций фазы (вычисленной в линейном геометрическом приближении). Поскольку задача является статистически однородной, то  $F$  и  $D'$  не зависят от  $z$ .

К уравнению (4) следует добавить граничное условие

$$M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z)|_{z=0} = \delta(\mathbf{q}), \quad (7)$$

которое означает, что на границу  $z = 0$  нормально к поверхности слоя падает плоская волна единичной амплитуды.

Следуя работам [2, 6], представим решение задачи (4), (7) в виде итерационного ряда

$$M(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z); \quad (8)$$

$$M_0(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z) = \delta(\mathbf{q}) \exp[-D'(\mathbf{v})z]; \quad (9)$$

$$M_n(\mathbf{q}, \mathbf{v}, z) = \int_0^z dz_1 \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \int d^2 q_1 \dots \int d^2 q_{n-1} \times \quad (10)$$

$$\times \exp[-L_n] \prod_{i=1}^n [P(\mathbf{q}_{i-1} - \mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i) D'(\mathbf{v}_i)],$$

где

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \sum_{l=1}^i \mathbf{q}_{l-1} (z_{l-1} - z_l), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}; \quad (11)$$

$$L_n = \sum_{l=0}^n \int_{z_{l+1}}^{z_l} dz' D'(\mathbf{v}_l + \mathbf{q}_l [z_l - z']), \quad (12)$$

а функция

$$P(\mathbf{q}, \mathbf{v}_i) = F(\mathbf{q}, \mathbf{v}_i) / D'(\mathbf{v}_i) \quad (13)$$

удовлетворяет соотношению

$$\int d^2 q' P(\mathbf{q}', \mathbf{v}_i) = 1. \quad (14)$$

В (10)–(12) следует положить  $q_0 = q$ ,  $q_n = 0$ ,  $z_0 = z$ ,  $z_{n+1} = 0$ . Выражение (10) будет служить основой дальнейшего анализа.

Для упрощения вычислений будем считать  $v = 0$  и исследовать функцию

$$M(q, z) \equiv M(q, v = 0, z), \quad (15)$$

которая имеет смысл спектральной функции флуктуаций интенсивности (при  $q > 0$ ).

В работах [2, 6] было показано, что вклад членов ряда (8) в  $M(q)$  зависит от величины  $L_1$ . При малых значениях  $q$   $L_1 \ll 1$  и основной вклад в  $M(q)$  вносят нулевой и первый члены ряда. При больших значениях  $q$   $L_1 \gg 1$  и основной вклад в  $M(q)$  вносят члены ряда с большими  $n$ . Вычисление  $M_n$  при больших  $n$  упрощается из-за того, что переменные  $z_i$  слабо меняются вблизи некоторых средних значений  $\langle z_i \rangle$ , а эффективная область изменения переменных  $q_i$  определяется в основном множителями  $P(\Delta q_i, v_i)$ . Методика вычисления интегралов  $M_n$  и суммирования ряда (8) описана в [2, 6].

Качественная картина развития мерцаний существенным образом зависит от величины параметра

$$C = C_v 4\pi k^3 a^3 \left( \frac{1}{2 - \beta} + \frac{1}{\alpha} \right), \quad (16)$$

который равен среднему квадрату флуктуаций набега фазы на дистанции

$$z_0 = ka^2. \quad (17)$$

### 3. СЛУЧАЙ $C \ll 1$

При  $C \ll 1$  сколь-нибудь заметные флуктуации интенсивности возникают в зоне Фраунгофера по отношению к масштабу  $a$ . Для корреляционной функции флуктуаций интенсивности независимо от величины  $\alpha$  можно сразу записать

$$B_I(u) = \exp[-D'(u)z] - \exp[-Cz]. \quad (18)$$

### 4. СЛУЧАЙ $1 < \alpha < 2$ , $C \gg 1$

Структурная функция  $D'(v)$  имеет в этом случае вид

$$D'(v) = \begin{cases} A(\alpha) \frac{C}{z_0} (v/2a)^\alpha, & v \ll 2a \\ C/z_0, & v \gg 2a \end{cases}; \quad (19)$$

$$A(\alpha) = \frac{\pi}{2} \Gamma^{-2}(1 + \alpha/2) \left/ \left( \frac{1}{2 - \beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \sin \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right. . \quad (20)$$

При

$$z < z_1, \quad D' \left( \sqrt{\frac{z_1}{k}} \right) z_1 = 1 \quad (21)$$

основная часть спектра мерцаний определяется первыми двумя членами ряда (8) [2]:

$$M(q) = \delta(q) + 8\pi k^2 \int_0^z \sin^2 \left[ q^2 \frac{(z - z_1)}{2k} \right] \Phi_v(q) dz_1. \quad (22)$$

Характерный масштаб дифракционной картины совпадает с масштабом Френеля  $\sqrt{z/k}$ , а индекс мерцаний равен

$$m^2 \approx m_0^2 = CK(\alpha) (z/z_0)^{(\alpha+2)/2}, \quad (23)$$

$$K(\alpha) = \pi \left[ 2(\alpha + 2) \left( \frac{1}{2 - \beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \sin \left( \frac{\pi\alpha}{4} \right) \Gamma \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right]^{-1}.$$

При  $z \gg z_1$  мерцания становятся насыщенными. Спектральная функция имеет вид [2,7]

$$M(q) = \begin{cases} \delta(q) + 2\pi q^i \Phi_\mu(q) \int_0^z dz_1 (z - z_1)^2 \times \\ \times \exp \left[ - \int_{z_1}^z D' \left( q \frac{z - z'}{k} \right) dz' - D'(q(z - z_1)) z_1 \right], & q < q_1, \\ (2\pi)^{-2} \iint d^2 u \exp [-i(qu) - D'(u)z], & q > q_1 \end{cases} \quad (24)$$

где  $q_1$  определяется из равенства высокочастотного и низкочастотного приближений (отметим, что  $q_1 \ll \sqrt{k/z}$ ).

Как видно из (24), спектр мерцаний содержит два масштаба  $(u^*)^{-1}$  и  $q^*$ :

$$D'(u^*) = 1/z, \quad D' \left( q^* \frac{z}{k} \right) = 1/z. \quad (25)$$

Основная энергия флуктуаций приходится на масштаб  $(u^*)^{-1}$ . С увеличением  $z$  индекс мерцаний стремится к 1 сверху:

$$m^2 = 1 + B(\alpha) m_0^{-4(2-\alpha)/z}, \quad (26)$$

где  $B(\alpha)$  — безразмерный коэффициент, зависящий от  $\alpha$ , имеет порядок единицы. Индекс мерцаний имеет максимум  $z \approx z_1$  (в частности, при  $\alpha = 5/3$   $m_{\max} \approx 1,3$  [8]).

Интересно проследить, какие неоднородности создают основной эффект мерцаний. В режиме слабых мерцаний основной эффект создается неоднородностями с масштабом Френеля  $\sqrt{z/k}$ , который растет с увеличением  $z$ . С переходом в режим насыщения масштаб неоднородностей, ответственный за мерцания, равен  $u^*$ , он падает с увеличением  $z$ .

### 5. СЛУЧАИ $\alpha \rightarrow 2 - 0$ , $C \gg 1$

При  $0 < 2 - \alpha \ll 1$  структурная функция  $D'(v)$  имеет вид

$$D'(v) = \begin{cases} \frac{C_1}{(2 - \alpha) z_0} (v/2a)^\alpha, \ln(2a/v) > \frac{1}{2 - \alpha}; & (27a) \\ \frac{C_1}{(2 - \alpha) z_0} \left( \frac{v}{2a} \right)^2 - \frac{C_1}{z_0} \left( \frac{v}{2a} \right)^2 \ln \left( \frac{2a}{v} \right), 1 < \ln \left( \frac{2a}{v} \right) < \frac{1}{2 - \alpha}; & (27b) \\ \frac{C}{z_0}, & v > 2a; & (27b) \end{cases}$$



$$C_1 = C \left/ \left( \frac{1}{2 - \beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \right. \quad (28)$$

В режиме слабых мерцаний основную роль играет область значений  $v$ , определяемая неравенством (27 б). Пользуясь представлением  $D'(v)$  в виде (27 б) и повторяя рассуждения, проведенные для случая  $1 < \alpha < 2$  [2, 7], получаем, что спектр мерцаний определяется соотношением (19), а индекс мерцаний равен

$$m^2 \approx m_0^2 = \frac{\pi}{8} C_1 (z/z_0)^2. \quad (29)$$

Характерный масштаб спектра мерцаний совпадает с френелевским масштабом  $\sqrt{k/z}$ . Условие выполнимости соотношений (19) определяется неравенством

$$z < z_1 = z_0/C_1 \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \quad (30)$$

При  $z > z_1$  наступает режим насыщения мерцаний. В этом режиме также можно пользоваться представлением в виде (27 б), что дает

$$M(q) = \begin{cases} \delta(q) + 2\pi q^4 \Phi_p(q) \times \\ \times \int_0^z dz_1 (z - z_1)^2 \exp \left[ -\frac{1}{3} D' \left( q \frac{z - z_1}{k} \right) (z + 2z_1) \right], & q < q_1, \\ \left( \frac{1}{2\pi^2} \right)^2 \int d^2 u \exp[-D'(u)z - i(qu)], & q > q_1. \end{cases} \quad (31)$$

Частота  $q_1$  определяется из равенства высокочастотного и низкочастотного приближений ( $q_1 \ll \sqrt{k/z}$ ). Основная энергия спектра приходится на масштаб  $(u^*)^{-1}$  ( $D'(u^*)z = 1$ ). Индекс мерцаний при  $z > z_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} m^2 &= 1 + 6 \ln 3 / \ln \left( \frac{C}{6} \frac{z}{z_0} \right) \approx \\ &\approx 1 + 6 \ln 3 \left/ \left( \ln m_0 + \frac{1}{2} \ln C \right) \right. \end{aligned} \quad (32)$$

При  $C \gg 1$  отличие  $m^2$  от 1 мало. Из выражения (32) следует, что увеличение параметра  $C$  приводит к уменьшению  $m^2$  в режиме насыщения (а также в переходном режиме) и тем самым максимальное значение  $m^2$  с увеличением  $C$  стремится к 1. Из сравнения оценок  $m^2_{\max}$  при  $\alpha < 2$  и при  $\alpha \rightarrow 2$  следует, что при стремлении  $\alpha$  к 2 происходит уменьшение  $m^2_{\max}$ .

Следует отметить, что спектр рассмотренного типа может иметь большое значение для плазмы, поскольку к нему приводят неоднородности в виде разрывов.

## 6. СЛУЧАЙ $2 < \alpha < 4$ , $C \ll 1$

Для структурной функции  $D'(v)$  имеем следующее выражение:

$$D'(v) = \begin{cases} \frac{C_2}{z} (v/2a)^2 - \frac{C_3}{z_0} (v/2a)^2, & \rho < 2a \\ C/z_0, & \rho > 2a \end{cases}; \quad (33)$$

$$C_2 = C \left( \frac{1}{4 - \beta} + \frac{1}{\alpha - 2} \right) / \left( \frac{1}{2 - \beta} + \frac{1}{\alpha} \right), \quad (34)$$

$$C_3 = C\pi/2 \sin \left[ \frac{(4 - \alpha)\pi}{2} \right] \Gamma^2(1 + \alpha/2).$$

Этот случай специфичен тем, что даже режим слабых мерцаний определяется членами ряда (8) с большими  $n$ .

Если мы предположим, что в выражениях для  $M_n$   $q_i \ll q$ , то

$$v_i = q(z - z_i)$$

и интегралы (10) по  $z_i$  легко взять, а интегралы по  $q_i$  берутся с помощью методов теории предельных законов сумм независимых случайных величин [9], после чего ряд (8) можно приближенно просуммировать методом, развитым в [2, 6]. В результате получаем

$$M(q, z) = \delta(q) + 8\pi k^2 \int_0^z dz_1 \int d^2 q_1 \times \quad (35)$$

$$\times \sin^2 \left[ \frac{(q - q_1) q (z - z_1)}{2k} \right] \Phi_\nu(q - q_1) P(q_1);$$

$$P(q_1) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp[-q_1^2/2\sigma^2]; \quad (36)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{a^2} A_1(\alpha) C \left( \frac{z - z_1}{z_0} \right)^2 \frac{z_1}{z_0} (qa)^{\alpha-2}, \quad (37)$$

$$A_1(\alpha) = \pi 2^{\alpha-1} / \left( \frac{1}{2 - \beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right).$$

Выражение (35) весьма близко к выражению (22). Отличие (35) от (22) состоит в сглаживании фильтра Френеля по пространственной частоте, что приводит к некоторому подавлению дифракционных полос. Эффект подавления дифракционных полос особенно заметен в модели фазового экрана.

Условие  $q_i \ll q$  приводит к неравенству

$$q \gg Q_1 = \frac{1}{a} \left[ AC \left( \frac{z}{z_0} \right)^{\alpha-1} \right]^{1/(4-\alpha)}. \quad (38)$$

При малых значениях  $z$  (режим слабых мерцаний) основная часть спектра описывается выражением (35) и индекс мерцаний определяется выражением (23). В режиме слабых мерцаний основной масштаб спектра совпадает с частотой Френеля  $\sqrt{k/z}$ .

Существенная часть спектра мерцаний определяется выражением (35) при выполнении неравенства  $Q_1 < \sqrt{k/z}$ , а это, в свою очередь, приводит к условию  $m_0 \ll 1$ . Таким образом, режим слабых мерцаний в случае  $2 < \alpha < 4$  аналогичен по своим свойствам режиму слабых мерцаний в случае  $1 < \alpha < 2$ . Однако переход в режим сильных и насыщенных мерцаний имеет значительные особенности.

При  $m_0 > 1$  (но не слишком большом) выражение (35) описывает только высокочастотный хвост спектра мерцаний ( $q > Q_1$ ). При меньших значениях  $q$  переменные  $q_i \gg q$  и вычисления становятся весьма

сложными. Однако можно утверждать, что при  $q_i \gg q$  спектр  $M(q)$  не зависит от  $q$ . Оценка методом, разработанным в [2], дает

$$M(q) \approx 1/2\pi Q_1^2, \quad Q_2 \ll q < Q_1; \quad (39)$$

$$Q_2 = \frac{1}{a} \left[ \frac{C_3}{10} \left( \frac{z}{z_0} \right)^3 \right]^{-1/(4-\alpha)}. \quad (40)$$

При приближении  $q$  к  $Q_2$  спектр быстро возрастает, а при  $q < Q_2$  спектр вновь определяется выражением (35), в котором, однако, функция  $P(q_1)$  имеет другой вид:

$$P(q_1) = \int d^2u \exp \left[ -i(qu) - \frac{C_3}{4} \left( \frac{z-z_1}{z_0} \right)^3 \frac{z_1}{z_0} (qa)^2 \left( \frac{u}{2a} \right)^{\alpha-2} \right]. \quad (41)$$

В этом режиме индекс мерцаний является постоянным:

$$m^2 = 1 + \Delta m^2, \quad (42)$$

$$\Delta m^2 \approx \frac{\alpha - 2}{4 - \alpha}.$$

Таким образом, этот режим можно охарактеризовать как режим квазинасыщения, особенность его состоит в том, что характерный масштаб флуктуаций интенсивности (равный  $Q_1^{-1}$ ) много больше масштаба когерентности поля.

При

$$z > z_2 = z_0/\sqrt{C} \quad (43)$$

мерцания становятся насыщенными и корреляционная функция флуктуаций интенсивности приобретает вид (18).

Рассмотрим, какие неоднородности создают основной эффект мерцаний в разных режимах. В режиме слабых мерцаний основной эффект создается неоднородностями с масштабом  $\sqrt{z/k}$ , который растет с увеличением  $z$ . В режиме квазинасыщения основной эффект создается неоднородностями с масштабом  $Q_2^{-1}$ , этот масштаб растет с увеличением  $z$ . Отметим также, что масштаб флуктуаций интенсивности значительно меньше масштаба  $Q_2^{-1}$ . Эффект мерцаний создается фокусировкой и интерференцией после модуляции поля на неоднородностях с масштабом  $Q_2^{-1}$ . Режим насыщения наступает, как только масштаб  $Q_2^{-1}$  станет равным  $a$ . Далее эффект мерцаний создается на неоднородностях с масштабом  $a$  (за счет эффектов интерференции).

#### 7. СЛУЧАЙ $\alpha \rightarrow 4 - 0$ , $C \gg 1$

Для структурной функции  $D'(v)$  имеет место выражение

$$D'(v) = \begin{cases} C_4 (v/2a)^2 - C_5 (v/2a)^4 \ln(2a/v), & v < 2a; \\ C, & v > 2a \end{cases}; \quad (44)$$

$$C_4 = C \left( \frac{1}{4-\beta} + \frac{1}{2} \right) \left/ \left( \frac{1}{2-\beta} + \frac{1}{4} \right) \right., \quad (45)$$

$$C_5 = C/4 \left( \frac{1}{2-\beta} + \frac{1}{4} \right).$$

В режиме слабых мерцаний спектр определяется выражением (35), а индекс мерцаний равен

$$m^2 \approx m_0^2 = \frac{1}{6} \frac{C}{(1/4) + 1/(2 - \beta)} \left( \frac{z}{z_0} \right)^3 \ln \left( \frac{z_0}{z} \right). \quad (46)$$

Режим слабых мерцаний существует при  $m_0 < 1$ .

Специфичность рассматриваемого случая заключается в появлении эффекта сильной фокусировки при  $m_0 \approx 1$ . В режиме сильной фокусировки спектр определяется выражением (35) при  $q < Q_2$  ( $Q_2$  определяется (40)), если  $Q_2 > q^*$ , и выражением (22), если  $Q_2 < q^*$ . При

$$\max \{q^*, Q_2\} < q < Q_3 = \frac{1}{a} \frac{z_0}{z} \exp \left[ -\frac{2}{3} C \left( \frac{z}{z_0} \right)^3 \right] \quad (47)$$

$M(q)$  имеет вид

$$\dot{M}(q) \approx \frac{\ln(z_0/z)}{2\pi m_0^2 (qa)^2 \ln f_1} \exp \left[ -\frac{\ln(z_0/z)}{2m_0^2 \ln f_1} \right], \quad (48)$$

$$f_1 = \begin{cases} ak/qz, & q < \sqrt{k/z} \\ qz/ak, & q > \sqrt{k/z} \end{cases}$$

а индекс мерцаний —

$$m^2 \approx \frac{1}{m_0} \ln \left[ \ln \sqrt{C \frac{z}{z_0}} \exp(-m_0^2) \right]. \quad (49)$$

При  $m_0 > \ln \sqrt{C}$  мерцания становятся насыщенными и корреляционная функция флуктуаций интенсивности определяется соотношением (18).

### 8. СЛУЧАЙ $\alpha > 4$ , $C \gg 1$

Основные характеристики мерцаний на неоднородностях этого типа определяются только частотой излома в спектре турбулентности  $1/\alpha$  и параметром  $C$ . Здесь применимы все выводы, полученные в [6] для случая среды с одним характерным масштабом неоднородностей.

При

$$z < z_0/\sqrt{C} = z_1 \quad (50)$$

мерцания будут слабыми, спектр мерцаний определяется выражением (22), а индекс мерцаний равен

$$m^2 \approx m_0^2 = \frac{\frac{1}{6 - \beta} + \frac{1}{\alpha - 4}}{6 \left( \frac{1}{2 - \beta} + \frac{1}{\alpha} \right)} C \left( \frac{z}{z_0} \right)^3. \quad (51)$$

Характерный масштаб дифракционной картины равен примерно  $a$ .

При  $z > z_1$  спектр мерцаний имеет вид

$$M(q) \approx \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{Ca^2}{2\pi} \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 (qa)^{1-\beta}, & q < q^* \\ \frac{z_0^3}{2\pi Cz^3 (qa)^2} \exp\left[-\frac{1}{m_0^2}\right], & q^* < q < 1/a, \\ \frac{2a^2}{\pi} \exp[-(2qa/Cz)^2], & q > 1/a \end{cases} \quad (52)$$

где  $q^*$  определяется выражением (25). Вблизи  $z_1$  мы имеем режим сильной фокусировки, в этом режиме в дифракционной картине присутствуют все масштабы от  $a$  до  $a/Cz$ . Максимальное значение индекса мерцаний равно

$$m_{\max}^2 \approx \ln C. \quad (53)$$

При увеличении  $z$  мерцания становятся насыщенными, а корреляционная функция определяется (18).

Итак, резюмируя вышеизложенное, можно утверждать, что режим слабых мерцаний всегда определяется выражением (22) или близким к нему выражением. Это означает, что режим слабых мерцаний описывается методом Рытова при любых типах спектров неоднородностей показателя преломления. В случаях  $\alpha < 2$  и  $\alpha > 4$  переход от слабых мерцаний к насыщенным совершается весьма быстро. В случае  $2 < \alpha < 4$  между режимами слабых и насыщенных мерцаний появляется режим квазинасыщения, в котором флуктуации поля не подчиняются нормальному закону распределения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати)
2. K. S. Gochelashvili, V. I. Shishov, Opt. Acta, **18**, 767 (1971).
3. В. И. Шишов, Труды ФИАН, **38**, 171 (1967).
4. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 6, 866 (1968).
5. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **56**, 2107 (1969).
6. В. И. Шишов, ЖЭТФ, **61**, 1399 (1971).
7. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, **66**, 1237 (1974)
8. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. О. Ломадзе, В. Покасов, А. С. Хрупин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 1, 105 (1974).
9. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, изд. Наука, М., 1965.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
19 августа 1974 г.

#### THE DEPENDENCE OF THE FORM OF SCINTILLATION SPECTRUM ON THE FORM OF THE REFRACTIVE INDEX INHOMOGENEITY SPECTRUM. II. STATISTICALLY HOMOGENEOUS MEDIUM

V. I. Shishov

The form of the scintillation spectrum of a plane wave passed through a statistically homogeneous and isotropic medium with piece-power spectrum of the refractive index inhomogeneities. By changing continuously the parameters of the turbulence spectrum the results characteristic of purely power turbulence spectrum and that with one characteristic scale of inhomogeneities are obtained. Analytical results are obtained in a weak scintillation regime, in transient and saturable scintillation regimes. The type of piece-power turbulence spectrum is clarified for which the scintillations may have a wide region of weak focusing in which the scintillation index is held at the constant level dependent on the form of the spectrum. However the scale of scintillation spectrum differ rather strongly from the scale of the field fluctuation spectrum. It is shown that weak scintillations for all types of the turbulence spectrum may be described by Rytov's method.

УДК 621.372.413

## ОТКРЫТЫЙ РЕЗОНАТОР С ТОРОИДАЛЬНЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

*А. В. Камышан, В. В. Камышан*

Численно исследованы свойства двухзеркального аксиально-симметричного открытого резонатора, позволяющего осуществлять квазиоптическую связь с внешним пространством через большое, по сравнению с длиной волны, центральное отверстие в зеркале. Приведены зависимости характеристик этого резонатора от геометрических параметров. Найдены области, в которых низший тип колебаний с однородным по азимуту полем обладает максимальной дифракционной добротностью. Рассчитаны диаграммы направленности излучения основного типа колебаний из отверстия связи.

1. В технике миллиметрового (ММ) и субмиллиметрового (СБМ) диапазонов волн используются, в основном, устройства, размеры которых гораздо больше длины волны. Основными элементами как пассивных, так и активных приборов этих диапазонов являются квазиоптические элементы—открытые резонаторы и лучеводы, принцип работы которых заимствован из оптики. Однако элементы связи, согласующие отдельные квазиоптические узлы между собой, далеко не всегда построены на оптических принципах. С одной стороны, это вызвано тем, что на начальном этапе освоения ММ и СБМ диапазонов имелись генераторы только с волноводным выводом энергии, а с другой,—применение элементов связи оптического типа с размерами отверстий, гораздо большими длины волны, как правило, приводит к нежелательным изменениям параметров обычно используемых резонаторов. Тем не менее по мере развития техники этих диапазонов большие отверстия связи стали применяться все более широко.

Среди резонансных систем в этих диапазонах наиболее распространены открытые резонаторы с аксиально-симметричными круглыми зеркалами. Поле низшего типа колебания этих резонаторов (обладающего минимальными дифракционными потерями) сосредоточено в околоосевой области и имеет максимальную амплитуду на оси резонатора. При появлении любого возмущающего объекта, в частности отверстия связи в центральной области резонатора, у низшего типа возникают наибольшие, по сравнению с остальными, дополнительные потери, вследствие чего он становится неконкурентоспособным. Для того, чтобы не подавлять основной тип отверстием связи, было предложено [1] выводить энергию из резонатора через край зеркала. Однако сложная конфигурация выходного поля и ее зависимость от многих параметров препятствуют широкому распространению этого способа.

Не отказываясь от вывода энергии через центральное отверстие, можно обеспечить необходимую величину связи без существенного понижения конкурентной способности низшего типа, видоизменяя геометрическую конфигурацию зеркал резонатора.

В настоящей работе исследуются в квазиоптическом приближении свободные колебания симметричного открытого тороидального резонатора (ОТР) [2], зеркала которого являются частью тора (рис. 1). Поле собственных колебаний такого резонатора сосредоточено в трубообраз-

ной области и ограничено двумя каустиками. Вследствие этого амплитуда поля низшего типа колебания вблизи продольной оси резонатора мала. Это дает возможность использовать ОТР с достаточно большим центральным отверстием, не оказывающим существенного влияния на структуру поля и добротность низшего типа колебания. Радиальные размеры аксиальной области с малым полем, ограниченной внутренней каустикой, в таком резонаторе пропорциональны радиусу полярной окружности  $l$ . Как отмечалось в [3], при больших  $l$  поперечные типы колебаний, отличающиеся азимутальными индексами, вырождаются по частоте и потерям, что не позволяет осуществить одномодовый режим работы ОТР.

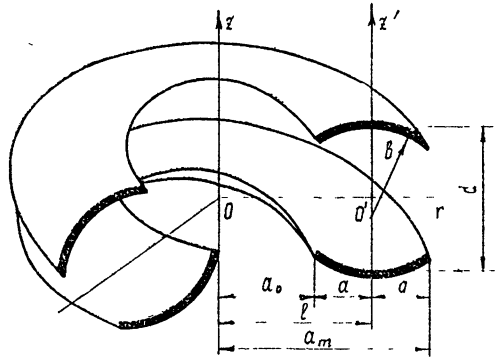


Рис. 1. Симметричный ОТР.

Поскольку для резонатора со сферическими зеркалами, для которого  $l=0$ , упомянутое вырождение снимается, то естественно предположить, что при некотором промежуточном значении  $l$  это вырождение отсутствует и для ОТР, а распределение поля еще сохраняет характерную структуру с двумя каустиками. Анализ ОТР при таких значениях не удастся провести методами, развитыми в [3], и в настоящей работе он проводится численно.

2. В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  отражающие поверхности ОТР описывается уравнениями

$$z = \pm \left[ \frac{d}{2} - h(r) \right], \quad a_0 \leq r \leq a_m, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (1)$$

где  $d$  — максимальное расстояние между зеркалами,  $a_0, a_m$  — радиусы отверстия и апертуры зеркал ОТР,  $h(r) = b \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{l-r}{b} \right)^2} \right] \approx \frac{(l-r)^2}{2b} \ll d$  — функция фазовой коррекции отражателей,  $b$  — радиус образующей поверхности,  $l$  — радиус полярной окружности тора.

В квазиоптическом приближении расчет свободных колебаний двухзеркальных симметричных резонаторов сводится к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\mu v(r) = \int_{a_0}^{a_m} K(r, r') v(r') r' dr', \quad (2)$$

собственные значения которого определяют дифракционные потери открытого резонатора и дополнительные фазовые сдвиги, а собственные функции  $v(r) e^{im\varphi}$  описывают распределение полей на его зеркалах.

Для рассматриваемого резонатора уравнение (2) имеет комплексное симметричное ядро

$$K(r, r') = J_m \left( \frac{k}{d} rr' \right) \exp \left\{ i \left[ \frac{k}{2d} (r^2 + (r')^2) - kh(r) - \right. \right.$$

$$\left. - kh(r') - \frac{m+1}{2} \pi \right\}, \quad (3)$$

где  $J_m(x)$  — функция Бесселя первого рода с индексом  $m$ ,  $m$  — азимутальный индекс поперечного типа колебания,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число.

Для численного решения интегральное уравнение заменялось методом квадратурных сумм [4] на «близкое» матричное:

$$\widetilde{\mu} \widetilde{v} = A \widetilde{v}. \quad (4)$$

Трудность решения уравнения (4) быстро растет с увеличением порядка  $n$  матрицы  $A$ , поэтому при замене интеграла использовалась квадратурная формула Гаусса [5], имеющая наивысшую алгебраическую точность при фиксированном числе узлов  $n$ .

Погрешность, которая обусловлена заменой интегрального уравнения матричным посредством квадратурной формулы с конечным числом узлов, допускает сравнительно простую априорную оценку лишь для случая эрмитовых ядер [6]. Поэтому для определения порядка эквивалентной матрицы, позволяющей вычислить собственные числа интегрального уравнения с заданной точностью, проводились оценочные просчеты, которые давали возможность судить о сходимости собственных значений последовательности этих матриц к собственным значениям интегрального уравнения. В результате была получена приближенная линейная зависимость между общим числом Френеля  $N_m = a_m^2/d\lambda$  рассматриваемого резонатора и порядком матрицы, требуемым для нахождения

собственных чисел с погрешностью  $\varepsilon = \frac{|\mu - \widetilde{\mu}|}{|\mu|} \leq 10^{-6}$ . Это соотношение

для параметров  $g = 1 - \frac{d}{b}$ , не слишком близких по модулю к единице, имеет вид

$$n \geq 2,4 N_m + 3. \quad (5)$$

Естественная селекция типов колебаний ОТР по дифракционным потерям обуславливает характерный спектр собственных значений матричного уравнения (4). Небольшое их количество, соответствующее добротным колебаниям, по модулю близко к единице, а остальные спрунплированы вблизи нуля и соответствуют колебаниям с перекрывающимися резонансными кривыми. Такая структура спектра позволила ограничиться вычислением собственных значений, соответствующих высокодобротным колебаниям.

Наиболее распространенный метод решения частной проблемы собственных значений матрицы основан на прямой итерации произвольного начального вектора матрицей  $A$  [7]. Обычно он характеризуется слабой сходимостью, поскольку модули нескольких наибольших по абсолютной величине собственных значений очень близки. Тем не менее этот метод часто используется вследствие того, что позволяет находить несколько собственных значений на машинах с ограниченной оперативной памятью.

Для уменьшения требуемого машинного времени нами был разработан алгоритм, позволяющий сократить время счета в десятки раз [8]. Он основан на итерации произвольного начального вектора полиномом второй степени от матрицы  $A$ :

$$P(A) = A + \eta A^2 \quad (\eta = \text{const}).$$

Для получения сходимости итерационного процесса к собственному вектору, соответствующему собственному значению  $\mu_i$ , следует положить



$\eta = \mu_i^{-1}$ . В этом случае последовательность векторов  $\{u_s\}$ , сходящаяся к собственному вектору  $x_i$ , строится в соответствии с

$$u_s = \frac{P(A) u_{s-1}}{\max\{P(A)u_{s-1}\}} \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где через  $\max\{u\}$  обозначена наибольшая по модулю компонента вектора  $u$ . Можно показать, что скорость сходимости к собственному вектору определяется величиной

$$\Delta_i = \max_{j \neq i} \left\{ \left| \frac{\mu_j}{\mu_i} \right| \left| 1 + \left| \frac{\mu_j}{\mu_i} \right| \exp [i(\arg \mu_j - \arg \mu_i)] \right| \right\}, \quad (7)$$

т. е. она зависит как от отношения модулей собственных значений, так и от разности их аргументов. Последнее обстоятельство играет решающую роль при малом отличии модулей собственных значений и, как уже упоминалось, ускоряет сходимость в десятки раз по сравнению с простым итерационным процессом, где она зависит только от отношения модулей собственных значений.

При практической реализации итерационного процесса (6) в качестве константы  $\eta$  бралось улучшаемое после каждой итерации приближенное значение к собственному числу. Хотя вначале оно вычисляется с большой погрешностью, уменьшение ошибки от итерации к итерации в начале и на конечной стадии, когда собственное значение известно с достаточной точностью, практически одинаковое.

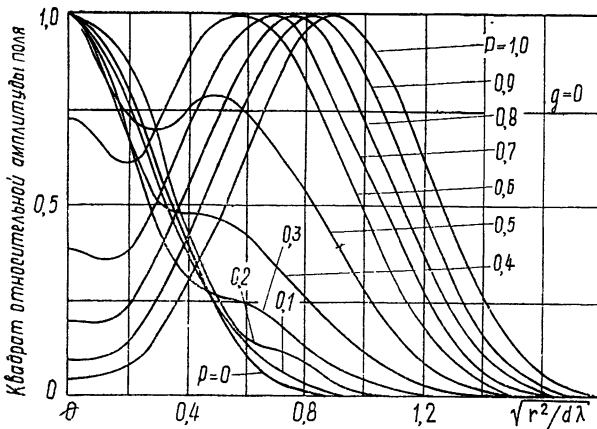


Рис. 2.

3. Как показали расчеты, структура поля ОТР, в основном, определяется величиной параметра  $p = l^2/d\lambda$ . При малых  $p$ , когда поверхность зеркала близка к сфере, структура поля собственных колебаний ОТР подобна структуре поля собственных колебаний резонатора со сферическими зеркалами. На рис. 2 приведены радиальные амплитудные распределения поля основного типа колебания (TEM<sub>00</sub>) конфокального ОТР ( $d = b$ ) при различных значениях параметра  $p$ . С увеличением  $p$  от 0 (сферические зеркала) до 0,4 радиальное распределение поля испытывает небольшое возмущение, выражающееся в изменении формы склона колоколообразной кривой. При дальнейшем увеличении  $p$ , благодаря фокусирующему действию кольцевого желоба, поле собственного колебания вытесняется из центральной области на пери-

ферию, в центре появляется провал и амплитудное распределение приобретает кратерообразный характер. При больших  $\rho$  ( $\rho > 2$ ) конфигурация радиального распределения поля основного колебания ОТР с большой точностью совпадает с поперечным распределением поля низшего типа резонатора с бесконечными цилиндрическими зеркалами, образующие которых совпадают с контуром радиального сечения ОТР.

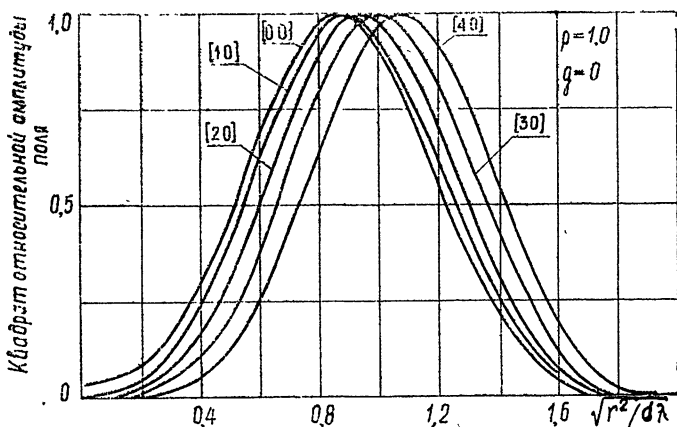


Рис. 3.

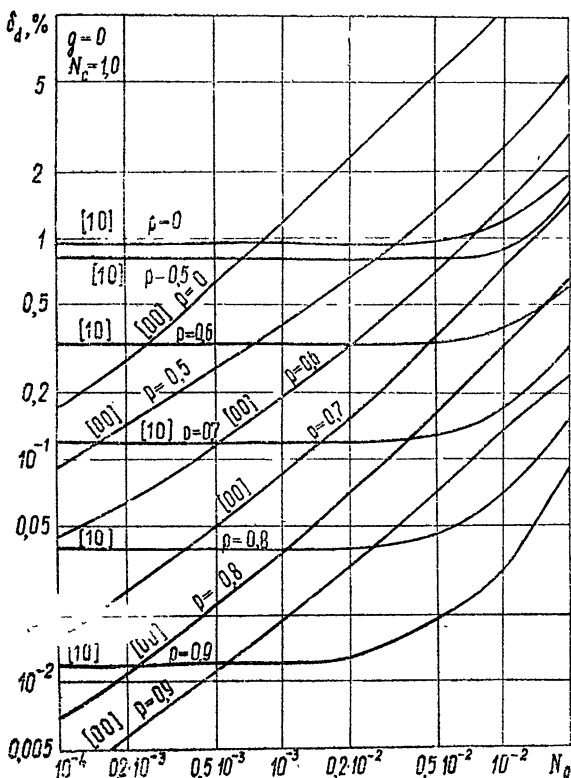


Рис. 4.

Радиальное распределение нечетено-симметричных колебаний с азимутальной зависимостью вида  $\left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} (m\varphi)$  ( $m \neq 0$ ) при изменении  $\rho$  не претерпевает качественных изменений. Наличие кольцеобразного жемлоба лишь несколько вытесняет поля этих типов из центральной части. На рис. 3 приведено радиальное амплитудное распределение поля на зеркале ОТР для низших типов колебаний. Цифры в квадратных скобках (см. также рис. 4, 5, 8) идентифицируют поперечный тип колебаний: первая — азимутальный индекс  $m$ , вторая — радиальный. При больших  $\rho$  радиальное распределение нечетно-симметричных типов колебаний с нулевым радиальным индексом совпадает с радиальным распределением поля типа  $TEM_{00}$ , чем объясняется вырождение этих типов по дифракционным потерям.

Одним из наиболее интересных свойств ОТР с большим, по сравнению с длиной волны, отверстием в центре одного или обоих зеркал является существование обладающего высокой радиационной добротностью низшего членно-симметричного типа колебания  $TEM_{00}$ . Это связано с тем, что благодаря специфической структуре поля запасенная основным типом колебания энергия оказывается перераспределенной таким образом, что потери, обусловленные отверстием, могут быть при надлежащем выборе геометрических параметров зеркал как угодно малы.

На рис. 4 приведены зависимости дифракционных потерь ( $\delta$ ) основного  $TEM_{00}$ - и низшего нечетно-симметричного  $TEM_{10}$ -типов колебаний ОТР от числа Френеля отверстия  $N_0 = a_0^2/d\lambda$  при различных значениях параметра  $\rho$ . Видно, что увеличение отверстия приводит к быстрому росту дифракционных потерь для любого фиксированного  $\rho$ , однако увеличивая этот параметр, можно уменьшить относительную амплитуду поля на отверстии, тем самым снижая до желаемой величины потери на излучение через отверстие.

Возможность построения на базе того или иного резонатора одномодовой резонансной системы, работающей на аксиально-симметричном типе колебаний, определяется фактом и величиной превышения потерь ближайшего высшего типа над радиационными потерями основного (рабочего). Как отмечалось, ОТР при большом значении параметра  $\rho$  характеризуется вырождением типов с одинаковыми радиальными индексами по дифракционным потерям и, следовательно, не обладает в этом смысле селективными свойствами. С целью отыскания области геометрических параметров, при которых ОТР может функционировать как одномодовая система, была исследована область, в которой  $\rho \leq 1$ .

На рис. 5 в плоскости переменных  $\rho$  и  $g$  нанесены линии равных потерь  $\delta = \text{const}$  (в процентах) для основного типа колебаний  $TEM_{00}$  (рис. 5а) и ближайшего по потерям —  $TEM_{10}$  (рис. 5б) — для резонатора с параметрами  $N_c = \frac{(a_m - l)^2}{d\lambda} = 1$ ,  $N_0 = 0$ . Вследствие того, что после

основного типа колебаний максимальной добротностью обладает волна  $TEM_{10}$ , селективные свойства рассматриваемой системы, предназначенной для работы на низшем типе колебания, удобно характеризовать параметром  $T$ , который выражается через потери основного типа колебаний  $\delta_{00}$  и ближайшего высшего —  $\delta_{10}$  — следующим образом:

$$T = 10 \lg (\delta_{10}/\delta_{00}). \quad (8)$$

Линии равных значений этого параметра в плоскости переменных  $\rho$  и  $g$  показаны на рис. 6. Особого внимания заслуживает область  $0,5 < \rho < 0,7$ ;  $-0,4 \leq g \leq -0,05$ , в которой  $T$  имеет наибольшую величину.

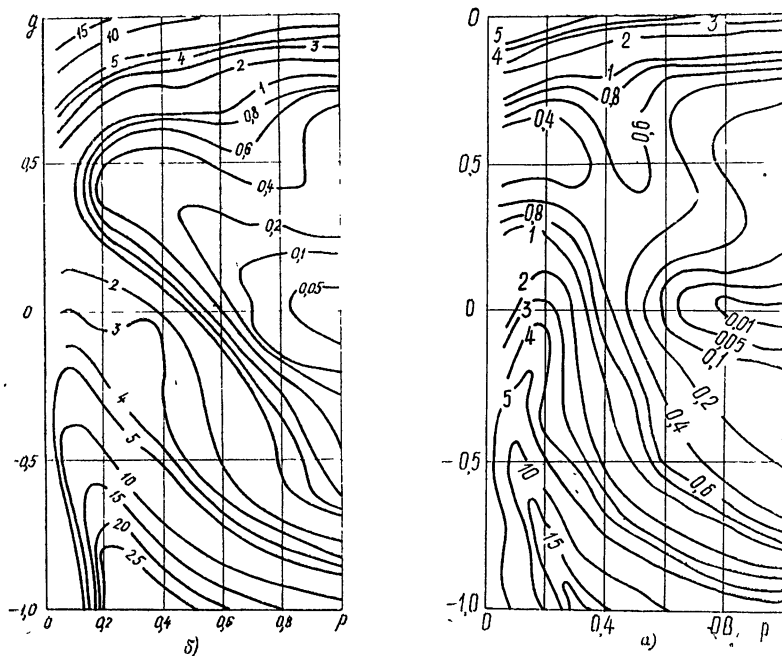


Рис. 5.

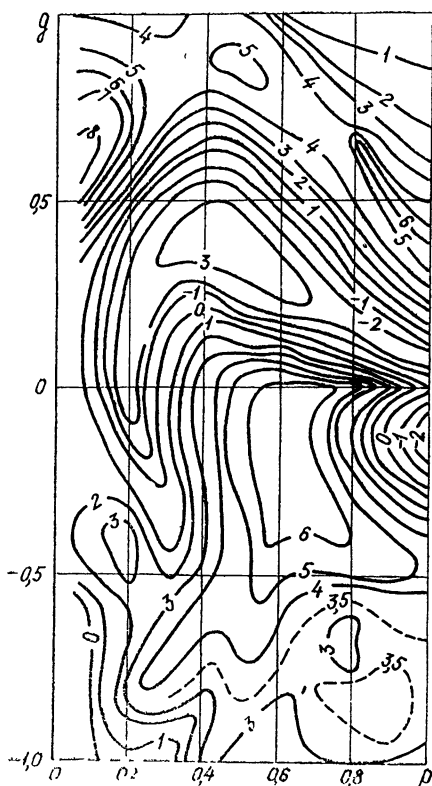


Рис. 6.

Следует отметить, что при изменении параметров  $N_0$  и  $N_c$  абсолютная величина потерь и селективность  $T$  изменяются по сравнению со значениями, приведенными на рис. 5 и 6. Однако качественная картина сохраняется в широком диапазоне изменения этих параметров. Поэтому при выборе геометрии конкретных резонансных систем можно руководствоваться результатами расчетов, представленных в наиболее компактной и удобной форме на этих рисунках.

На рис. 7 приведены зависимости аргументов собственных чисел интегрального уравнения (дополнительных фазовых сдвигов) для типов колебаний  $TEM_{00}$  и  $TEM_{10}$  ОТР от параметра  $p$  для различных значений  $g$ . Видно, что при  $p \rightarrow 0$  значения дополнительных фазовых сдвигов ОТР стремятся к величинам дополнительных фазовых сдвигов, соответствующих колебаний резонатора со сферическими зеркалами. При увеличении  $p$  ( $g$  — фиксировано) значения дополнитель-

ных фазовых сдвигов колебаний  $TEM_{00}$  и  $TEM_{10}$  сближаются и стремятся к величине дополнительного фазового сдвига резонатора с цилиндрическими бесконечными зеркалами.

Важным вопросом практического использования ОТР является конфигурация диаграммы направленности излучения основного типа колебания из отверстия связи. В дальней зоне в направлении, составляющем угол  $\theta$  с осью  $Oz$  резонатора, поле, обусловленное излучением колебания  $TEM_{mn}$  из одного из отверстий, пропорционально [9]

$$D(\theta, \varphi) = Y(\theta) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (m\varphi),$$

где  $Y(\theta) = c(1 + \cos \theta) \int_0^{a_0} v(r) J_m(kr \sin \theta) r dr$ ,  $c$  — нормирующий множитель,  $v(r)$  — радиальное распределение поля рассматриваемого типа на отверстии.

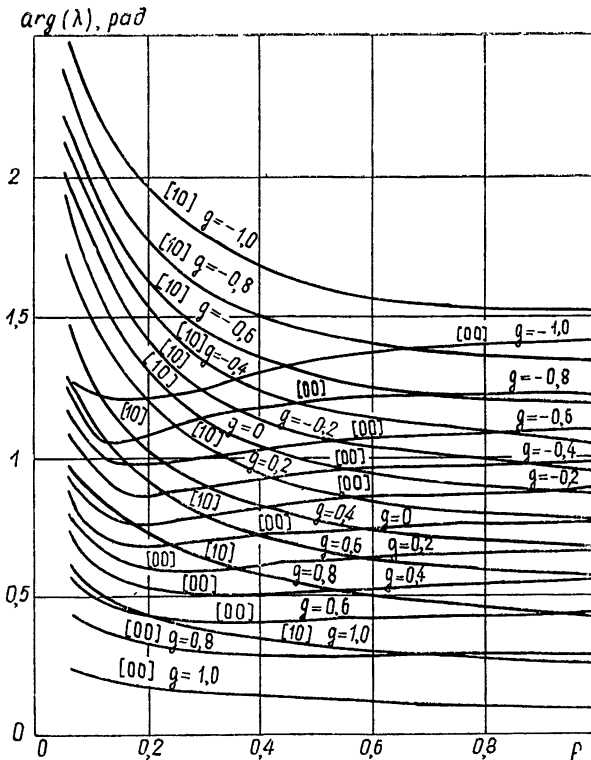


Рис. 7.

На рис. 8 приведены диаграммы направленности  $Y(\theta)$  основного типа колебаний ОТР (сплошные кривые) при различных значениях параметра  $\alpha_m = a_m/\lambda$  ( $1 - 2a_m/\lambda = 50$ ,  $2 - 2a_m/\lambda = 100$ ,  $3 - 2a_m/\lambda = 200$ ,  $4 - 2a_m/\lambda = 400$ ). Геометрические параметры ОТР выбраны в оптимальной области:  $N_0 = 0,01$ ,  $N_c = 1,0$ ,  $p = 0,6$ ,  $g = -0,3$ . Штриховыми линиями на этом же рисунке приведены диаграммы направленности излучения из отверстия открытого резонатора со сферическими зеркалами, имеющие такие же, как и ОТР, значения параметра  $\alpha_m$ , дифракционные потери и селективность. В данном случае  $N_0 = 0,001$ ,  $N_c = N_m = 1,0$ ,  $g = -0,3$ .

Как следует из рис. 8, диаграмма направленности из отверстия связи ОТР подобна диаграмме направленности излучения из круглого отверстия с равномерным амплитудным распределением поля по апертуре. Сравнение диаграммы направленности излучения ОТР и резонатора со сферическими зеркалами свидетельствует о том, что переход от сферической конфигурации зеркал к тороидальной позволяет при прочих равных условиях сузить диаграмму направленности примерно в два раза.

4. Таким образом, проведенный анализ позволяет отметить следующие характерные особенности тороидальных резонаторов.

а) Амплитудное распределение поля основного типа колебаний ОТР при изменении параметра  $p$  от 0 до 1 плавно преобразуется из колоколообразного в кратерообразное. При  $p > 1,5$  в околоосевой области основной аксиально-симметричный тип имеет пренебрежимо малое поле, что позволяет помещать в эту область кон-

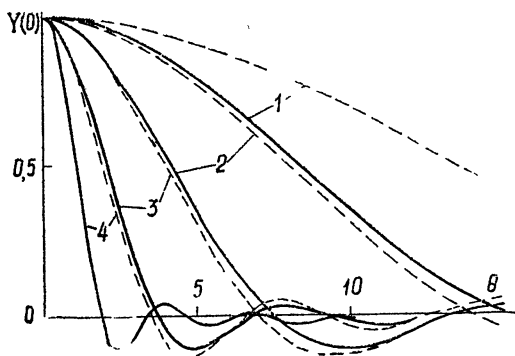


Рис. 8.

структивные элементы без внесения дополнительных потерь.

б) Структура нечетно-симметричных типов с нулевым радиальным индексом не претерпевает качественных изменений.

в) Отверстие связи в меньшей степени влияет на добротность низшего аксиально-симметричного типа колебаний ОТР по сравнению с резонатором со сферическими зеркалами. С увеличением параметра  $p$  дифракционные потери, обусловленные отверстием, падают; изменение параметра  $p$  позволяет варьировать потери через отверстие и осуществлять таким образом регулируемую квазиоптическую связь ОТР с внешним пространством.

г) При  $p \approx 1$  существует обширная область геометрических параметров ОТР, в которой потери нечетно-симметричных типов существенно превосходят потери низшего, что дает возможность создать квазиодномодовую резонансную систему.

д) Спектр резонансных частот рассмотренного резонатора имеет тенденцию сгущаться с увеличением параметра  $p$ , в результате чего при больших  $p$  возникает опасность паразитного взаимодействия колебаний, если их добротность не достаточно высока.

е) Диаграмма направленности излучения из центрального отверстия ОТР при прочих равных условиях уже диаграммы направленности обычно используемых резонаторов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Барчуков, В. С. Терин, Радиотехника и электроника, **14**, 2072 (1969).
2. А. В. Камышан, В. В. Камышан, В. П. Шестопалов, Авт. свидетельство № 362381 от 22.07.1971, ОИПОТЗ, 1973, бюлл. № 2, стр. 121.
3. В. А. Киселев, Радиотехника и электроника, **17**, 2020 (1972).
4. И. С. Березин, Н. П. Житков, Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, М., 1960, гл. 8.
5. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, изд. Наука, М., 1967.
6. И. П. Мысовских, Матем. сб., **48**, № 2, 137 (1959).
7. Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1963.

8. А. В. Камышан, В. В. Камышан, сб. Материалы семинара по методам решения внутренних краевых задач электродинамики, Электроника. сер. Электроника СВЧ, вып. 2/27, 65 (1974).
9. D. E. M c u m b e r, Bell. System Techn. J., 44, 333 (1965).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
27 августа 1974 г.

## OPEN RESONATOR WITH THOROIDAL MIRRORS

*A. V. Kamyshan, V. V. Kamyshan*

The properties of a two-mirror axially-symmetric open resonator which realizes a quasi-optic relation with outer space through a larger (than the wavelength) central opening in mirror is numerically investigated. The dependences of the characteristics of this resonator on the geometrical parameters are presented. The region of the geometrical parameters are found in which the  $TEM_{00}$ -mode has the maximum diffraction  $Q$ -factor. The radiation patterns of the basic mode from the coupling opening are calculated.

---

УДК 621 396.67

## К ТЕОРИИ ЗОНДОВОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН

*В. И. Турчин*

Применительно к зондовому методу определения диаграмм направленности антенн рассмотрена связь между полем, создаваемым антенной в дальней зоне, и полем, найденным по значениям компонент вектора электрического поля в отдельных точках ограниченного участка плоской поверхности, расположенной в непосредственной близости от антенны. Сформулированы требования к размерам участка плоской поверхности и расстоянию между пространственными выборками, позволяющие определить диаграмму направленности антенны с достаточной степенью точности.

В связи со значительными техническими трудностями, возникающими при измерении диаграмм направленности антенн СВЧ диапазона прямыми методами, т. е. с использованием источников, расположенных в дальней зоне исследуемой антенны, в последнее время интенсивно развиваются методы определения диаграммы направленности, использующие источники, расположенные вблизи антенны [1]. Один из таких методов — зондовый метод — заключается в том, что с помощью небольшой перемещаемой антенны — зонда — измеряется пространственное распределение амплитуды и фазы ближнего поля исследуемой антенны на плоскости вблизи ее раскрытия — плоскости сканирования, а диаграмма направленности находится как преобразование Фурье измеренного распределения ближнего поля [1-4].

Задача определения диаграммы направленности зондовым методом может быть сформулирована следующим образом: требуется определить угловое распределение поля в дальней зоне (диаграмму направленности)  $f(\xi, \eta)$ , удовлетворяющее уравнениям Максвелла и граничным условиям — пространственному распределению компонент вектора электрического поля  $E^{(s)}(x, y)$  в плоскости сканирования.

Поставленная таким образом задача определения диаграммы направленности имеет единственное решение [5], определяемое соотношениями, хорошо известными в антенной технике (см., например, [6]),

$$f_{xy}(\xi, \eta) = -\frac{i}{\lambda} \zeta S_{x,y}(\xi, \eta), \quad f_z(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda} [\xi S_x(\xi, \eta) + \eta S_y(\xi, \eta)], \quad (1)$$

$\xi = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\eta = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$ ,  $\varphi, \theta$  — азимут и угол места,  $\lambda$  — длина волны,  $S_{x,y}(\xi, \eta)$  — фурье-спектры соответственно  $x$ - и  $y$ -компонент пространственного распределения вектора электрического поля  $E^{(s)}(x, y)$  в плоскости  $z = 0$ :

$$S_{x,y}(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} E_{x,y}^{(s)}(x, y) \exp[ik(\xi x + \eta y)] dx dy, \quad (2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$



**1. СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗМЕРОМ ОБЛАСТИ, В КОТОРОЙ ИЗМЕРЯЕТСЯ БЛИЖНЕЕ ПОЛЕ, И СЕКТОРОМ УГЛОВ, В КОТОРОМ ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ОШИБКОЙ**

Будем считать, что исследуемая антенна представляет собой объемное распределение электрического тока  $\mathbf{j}(x, y, z)$ , целиком заключенное внутри объема  $V_a$  с размерами  $D_x^a \times D_y^a \times D_z^a$ . В этом случае спектр распределения поля на плоскости, отстоящей на расстоянии  $z$  от центра области  $V_a$ , можно представить в виде

$$S(\xi, \eta) = \iiint_{V_a} \overset{\wedge}{v}_0 \mathbf{j}(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (3)$$

где тензор  $\overset{\wedge}{v}_0$  есть

$$v_{0ij} = \frac{k^2}{\xi_3} (\xi_i \xi_j - \delta_{ij}) \exp \{ ik [\xi_1 x' + \xi_2 y' + \xi_3 (z' - z)] \} \quad (4)$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера; для сокращения записи выражения (4) для угловых координат  $\xi, \eta; \zeta$  использованы обозначения  $\xi_1, \xi_2, \xi_3: \xi_1 \equiv \xi, \xi_2 \equiv \eta, \xi_3 \equiv \zeta$ .

Пусть далее спектр поля ищется по распределению поля  $E^{(s)}(x, y)$  внутри конечной области  $\Omega_n$  — области сканирования с размерами  $D_x^n \times D_y^n$ :

$$S_{x,y}^B(\xi, \eta) = \iint_{\Omega_n} E_{x,y}^{(s)}(x, y) \exp [ik(\xi x + \eta y)] dx dy.$$

Задача заключается в том, чтобы выбрать размеры этой области так, чтобы спектр  $S^B(\xi, \eta)$  с достаточной точностью совпадал с «истинным» спектром  $S(\xi, \eta)$  в интересующей нас области изменения  $\xi, \eta$ . Выразим спектр  $S^B(\xi, \eta)$  через распределение тока  $\mathbf{j}(x, y, z)$ :

$$S^B(\xi, \eta) = \iiint_{V_a} \overset{\wedge}{v} \mathbf{j}(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (5)$$

где

$$\overset{\wedge}{v}(\xi, \eta, x', y', z' - z) = \iint_{\Omega_n} \frac{\overset{\wedge}{b}(x' - x, y' - y, z' - z)}{r} \times$$

$$\times \exp \{ ik [r + \xi(x' - x) + \eta(y' - y)] \} dx dy, \quad (6)$$

$$b_{ij} = \left( k^2 + \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \delta_{ij} - \frac{(x'_i - x_i)(x'_j - x_j)}{r^2} \left( k^2 + \frac{3ik}{r} - \frac{3}{r^2} \right)$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

$r = [\sum_i (x_i - x'_i)^2]^{1/2}$ . Для сокращения записи (6) для координат  $x, y, z$  использованы обозначения  $x_1, x_2, x_3: x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$ . Очевидно, для совпадения  $S^B$  с  $S$  достаточно совпадения тензора  $\overset{\wedge}{v}$  с  $\overset{\wedge}{v}_0$ .

Рассмотрим выражение для  $\overset{\wedge}{v}$  (6). Считая, что параметр  $k$ , входящий в качестве множителя в фазу подынтегрального выражения, велик (длина волны много меньше размеров области  $\Omega_n$ ), (6) можно предста-

вить в виде асимптотического разложения по степеням  $k^{-1/2}$ . Первый член разложения, полученный методом стационарной фазы [7], будет в точности совпадать с  $\hat{v}_0$  [8]. Таким образом,

$$\hat{v} = \hat{v}_0 (1 + o(k^{-1/2})). \quad (7)$$

Соотношение (7) будет, естественно, выполняться лишь в том случае, если точка стационарной фазы с координатами  $x_c, y_c$  в виде

$$x_c = x' + (z' - z) \frac{\xi}{\zeta}, \quad y_c = y' + (z' - z) \frac{\eta}{\zeta} \quad (8)$$

принадлежит области интегрирования  $\Omega_n$  для всех  $x', y', z' \in V_n$ . В противном случае первый член разложения (7) обращается в нуль и основной вклад в величину  $\hat{v}$  будет давать второй член разложения, отличный от  $\hat{v}_0$ . Таким образом, условием близости  $\hat{v}$  и  $\hat{v}_0$  с точностью порядка  $k^{-1/2}$ , а следовательно, близости  $S^b$  к  $S$  (с той же степенью точности) является

$$x_c, y_c \in \Omega_n \text{ при } x', y', z' \in V_n. \quad (9)$$

Поскольку основной вклад в величину  $\hat{v}$  дает интеграл по окрестности точки стационарной фазы [9], условие (9) необходимо усилить, требуя, чтобы точка стационарной фазы приближалась изнутри к границе области  $\Omega_n$  не более чем на величину  $\Delta r$  — размер окрестности точки стационарной фазы, дающей основной вклад в интеграл (6). Величину  $\Delta r$  определим из условия, чтобы фаза  $\Phi$  в подынтегральном выражении (6) всюду на границе рассматриваемой окрестности — круга радиуса  $\Delta r$  — менялась на величину  $n\pi$  ( $n \gg 1$ ) по сравнению со своим значением в точке стационарной фазы. Выражая значение фазы  $\Phi$  на границе окрестности через вторые производные  $\Phi$  в точке стационарной фазы, получим

$$\Delta r = \gamma \left[ \frac{(z - z') \lambda}{\zeta^3} \right]^{1/2}, \quad (10)$$

где  $\gamma = \sqrt{n} \gg 1$ .

Полагая  $D_x^a = D_y^a = D^a$ ,  $D_x^n = D_y^n = D^n$  и вводя величину  $\theta_b$  — размер углового сектора, внутри которого спектр поля (а следовательно, и диаграмма направленности) будет восстанавливаться с малой ошибкой, соотношение (9) можно представить с учетом (8), (10) в виде, более удобном для практического использования:

$$D^n = D^a + 2 \left( z + \frac{1}{2} D_z^a \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\theta_b}{2} \right) + \gamma \left[ \frac{\left( z + \frac{1}{2} D_z^a \right) \lambda}{\cos^3 \left( \frac{\theta_b}{2} \right)} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Из выражений (11) следует, что при выборе размера области сканирования  $D^n$  следует учитывать не только протяженность, но и «глубину» антенны (например, в случае зеркальной антенны за величину  $D_z^a$ , видимо, следует принять глубину зеркала). Из (11) следует также, что размер области  $D^n$ , в которой задается (измеряется) ближнее поле, начинает существенно превышать размеры антенны, если мы хотим вос-

становить диаграмму направленности в широком секторе углов ( $\theta_v$  приближается к  $180^\circ$ ). Этот результат можно объяснить следующим образом.

Рассмотрим находящийся на расстоянии  $z$  от плоскости сканирования точечный источник (диполь Герца), излучающий набор плоских волн (лучей) по всем направлениям. Значение диаграммы  $f(\theta)$  определяется соответственно плоской волной (лучом), падающим под углом  $\theta$  к нормали к плоскости. «Центр» этой плоской волны (или соответствующий ей луч) будет пересекать плоскость сканирования на расстоянии  $z \operatorname{tg} \theta$  от проекции источника на плоскость. Чтобы зафиксировать информацию об этой плоской волне, мы должны измерить ближнее поле в окрестности точки пересечения луча с плоскостью. Чем больше угол падения, тем дальше мы должны двигаться от источника по плоскости сканирования, т. е. тем больше должен быть размер области, в которой необходимо измерить ближнее поле. Так, например, если  $\theta_v = 175^\circ$  и  $z + \frac{1}{2} D^2 = 0,1 D^2$ , размер области сканирования  $D^2$  (при  $\gamma = 0$ ) превышает размеры антенны уже в 2,3 раза, так что, по-видимому, не следует стремиться восстановить боковое излучение в секторе, прилегающем непосредственно к границе переднего и заднего полупространства.

С целью иллюстрации полученных результатов и для выяснения практической применимости формулы (11) для оценки размера области сканирования на ЭВМ был проведен расчет диаграммы  $f^B(\xi)$  путем вычисления преобразования Фурье распределения ближнего поля, заданного в конечных пределах. В одномерном случае (принципиально не отличающемся от двумерного) вычислялась  $y$ -компонента диаграммы направленности антенны, представляющей собой плоскую ленту тока, ориентированную вдоль оси  $x$ . («Истинная» диаграмма направленности такой антенны, как известно, есть  $f(\xi) = \frac{\sin(\pi D^2/\lambda \xi)}{\pi D^2/\lambda \xi}$ ,  $D^2$  — ширина ленты тока.)

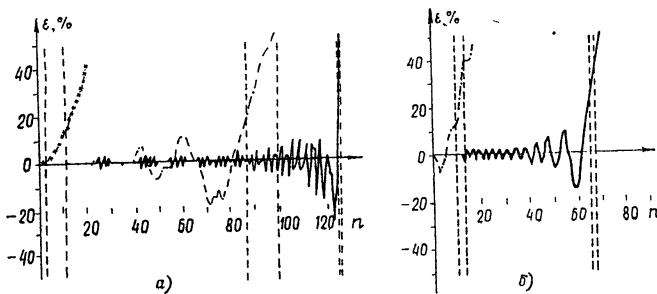


Рис. 1.

Результаты расчетов антенны с  $D^2 = 128 \lambda$  представлены на рис. 1 для  $z = 10 \lambda$  (рис. 1а) и для  $z = 100 \lambda$  (рис. 1б). По оси ординат графиков отложена ошибка восстановления диаграммы  $\varepsilon(\xi) = [(|f(\xi)|^2 - |f^B(\xi)|^2)/|f(\xi)|^2] \cdot 100\%$  в точках  $\xi_n = \lambda/D^2(n + 1/2)$  ( $n = 0, 1, \dots, 127$ ), соответствующих примерно максимумам боковых лепестков диаграммы. На рис. 1а сплошной линией показаны ошибки для  $D^2 = 225 \lambda$ , штрихпунктирной — для  $D^2 = 150 \lambda$  и штриховой с крестиками — для  $D^2 = 130 \lambda$ ; на рис. 1б ошибки, показанные сплошной и штрихпунктирной линиями, соответствуют  $D^2 = 255 \lambda$  и  $D^2 = 150 \lambda$ . На этих же графиках

для каждого значения  $D^n$  вертикальными штриховыми линиями отмечены значения  $n^{(1)}, n^{(2)}: n^{(1,2)} = (D^2/\lambda) \sin(\theta_B^{(1,2)}/2)$ , где  $\theta_B^{(1,2)}$  были вычислены по формуле (11) при  $\gamma = 0$  (правая линия) и  $\gamma = 0,5$  (левая линия).

Как видно из рисунка, для каждого  $D^n$  штриховые вертикальные линии достаточно точно делят область изменения  $\xi$  на участок со сравнительно небольшими ошибками восстановления (около 10%) и область, где диаграмма восстанавливается неверно.

## 2. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ДИСКРЕТНОЙ РЕГИСТРАЦИИ БЛИЖНЕГО ПОЛЯ НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Как правило, на практике пространственное распределение ближнего поля измеряется в точках, отстоящих друг от друга на одинаковом расстоянии  $h$  (дискретная последовательность). Чтобы избежать громоздких выражений при анализе влияния дискретности, мы рассмотрим одномерный случай. Заменяем при вычислении фурье-спектра ближнего поля интегрирование суммированием с шагом  $h$ , получая при этом функцию  $S^a(\xi)$ :

$$S^a(\xi) = h \sum_{n=0}^{N-1} E^{(s)}(x_n) \exp(ik\xi x_n), \quad N = D^n/h. \quad (12)$$

Поскольку при определении диаграммы направленности по распределению ближнего поля мы уже совершаем ошибку из-за ограниченности области сканирования, можно сопоставить между собой величины ошибок, обусловленных дискретностью и конечными размерами области сканирования, и величину шага  $h$  выбрать из условия, чтобы ошибка, обусловленная дискретностью регистрации ближнего поля,  $\Delta S_a(\xi)$ , и ошибка, обусловленная конечными размерами области сканирования,  $\Delta S_b(\xi)$ , были бы одного порядка\*:

$$\Delta S_a(\xi) \approx \Delta S_b(\xi). \quad (13)$$

Здесь  $\Delta S_a(\xi) = S^b(\xi) - S^a(\xi)$ ,  $\Delta S_b(\xi) = S(\xi) - S^b(\xi)$ ,

$$S^b(\xi) = \int_{-D^n/2}^{D^n/2} E^{(s)}(x) e^{ik\xi x} dx.$$

Ошибку  $\Delta S_b(\xi)$  представим в виде

$$\Delta S_b(\xi) = \int_{-\infty}^{-D^n/2} E^{(s)}(x) e^{ik\xi x} dx + \int_{D^n/2}^{\infty} E^{(s)}(x) e^{ik\xi x} dx. \quad (14)$$

Производя в (14) дважды интегрирование по частям, мы получим

$$\Delta S_b(\xi) = \frac{i}{k\xi} \left\{ \varphi(\xi) + \frac{i}{k\xi} \psi(\xi) \right\} + o(k^{-3}), \quad (15)$$

\* В работе [4] предложен следующий критерий выбора шага. При  $kz > 1$  спектр ближнего поля  $S(\xi)$  экспоненциально убывает вне области видимых углов  $|\xi| > 1$  и ошибка, вносимая дискретностью измерений, будет незначительна при шаге  $h \leq \lambda/2$ , поскольку функцию  $S(\xi)$  можно приближенно рассматривать как финитную. Такая оценка представляется не вполне корректной, поскольку мы можем рассматривать лишь спектр  $S^b(\xi)$ , полученный путем интегрирования в конечных пределах, а такая функция, как известно, не может убывать экспоненциально при  $\xi \rightarrow \infty$ .

где

$$\varphi(\xi) = E^{(s)} \left( \frac{D''}{2} \right) \exp \left( i k \xi \frac{D''}{2} \right) + E^{(s)} \left( -\frac{D''}{2} \right) \exp \left( -i k \xi \frac{D''}{2} \right),$$

$$\psi(\xi) = E^{(s)'} \left( \frac{D''}{2} \right) \exp \left( i k \xi \frac{D''}{2} \right) + E^{(s)'} \left( -\frac{D''}{2} \right) \exp \left( -i k \xi \frac{D''}{2} \right).$$

Для нахождения ошибки, обусловленной дискретностью, воспользуемся эйлеровыми методами разложения остатка квадратурной формулы [10]:

$$\Delta S_d(\xi) = i k \xi \frac{h^2}{24} \left\{ \varphi(\xi) - \frac{i}{k \xi} \psi(\xi) \right\} + o(h^4). \quad (16)$$

Поскольку второе слагаемое в фигурных скобках в (15) и (16) имеет порядок малости  $k^{-1}$  по сравнению с первым, его можно опустить, полагая

$$\Delta S_b(\xi) \approx \frac{i}{k \xi} \varphi(\xi), \quad \Delta S_d(\xi) \approx i k \xi \frac{h^2}{24} \varphi(\xi).$$

Сравнивая между собой величину ошибок  $\Delta S_b$  и  $\Delta S_d$ , с учетом введенного нами критерия (13) получим следующую оценку величины шага:

$$h \approx \frac{\lambda}{\sin(\theta_d/2)} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{24}{M}}, \quad (17)$$

где  $\theta_d$  — размер углового сектора, внутри которого будет выполняться условие (13),  $M$  — число, показывающее, во сколько раз ошибка, вызванная дискретностью, будет меньше ошибки, обусловленной конечными размерами области сканирования.

В заключение автор выражает благодарность Н. М. Цейтлингу за постоянное внимание к данной работе и В. В. Тамойкину и Ю. А. Рыжову за обсуждение результатов настоящей работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Johnson, H. A. Ecker, J. S. Hollis, Proc. IEEE, **61**, 12, 1668 (1973).
2. R. C. Baird et al., Electron Let., **6**, 11, 349 (1970).
3. А. А. Арутюнян и др., Изв. АН Арм. ССР, Физика, **7**, № 5, 373 (1972).
4. E. V. Joy, D. T. Paris, IEEE Trans. Ant. Prop., **AP-20**, № 3, 253 (1972).
5. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
6. Сканирующие антенные системы СВЧ, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1966.
7. А. Г. Прудковский, Журнал вычислительной математики и математической физики, **13**, 2 (1973).
8. В. К. Парк, Proc. IEEE, **61**, № 8, 1165 (1973).
9. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.
10. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
24 февраля 1975 г.

#### THE THEORY OF NEAR-FIELD MEASUREMENT OF THE ANTENNA RADIATION PATTERN

V. I. Turchin

Applying to the near-field measurement of the antenna radiation pattern we consider the relation between the field produced by the antenna in a far zone and that found by the components of the electric field vector at separate points of the bounded section of the plane surface situated in the close vicinity of the antenna. The requirements on the dimensions of the measurement plane and on sample spacing are formulated which enable us to determine the antenna radiation pattern with a sufficient accuracy.

УДК 538.574 6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА СФЕРАХ И ЦИЛИНДРАХ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ РАДИУСАМИ

*В. А. Класс, В. Н. Красильников*

Дано асимптотическое решение интегродифференциальных уравнений, описывающих дифракцию плоской волны на сфере или цилиндре переменного радиуса [1]. При решении предполагается, что длина падающей волны мала по сравнению с мгновенным значением радиуса объекта. Отмечается возникновение в полученном решении измененных (доплеровских) частот и связанное с этим появление точки ветвления на комплексной плоскости  $\gamma$ -значка полиномов Лежандра (в случае сферы). Решение интегродифференциальных уравнений построено в правой полуплоскости  $\gamma$  для любых скоростей движения границы раздела, меньших скорости света.

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой дано формальное решение задачи дифракции плоской волны на сфере или цилиндре переменного радиуса. Центральным моментом в исследовании этих решений оказывается проблема интегрирования уравнений, возникающих при наложении граничных условий на движущейся поверхности. Ранее эта проблема была решена только в длинноволновом приближении [2]; мы же остановимся на более сложном случае дифракции коротких волн. Подробно рассматривается дифракция на сфере; результаты для цилиндра могут быть получены по аналогии, и здесь упоминаются лишь важнейшие из них.

Пусть падающее поле будет монохроматическим:

$$f(\tau) = \exp(-i\omega_0\tau). \quad (1)$$

Тогда неизвестные функции  $\Phi_n^{(i)}(\tau)$ , описывающие дифрагированное поле, естественно искать в виде

$$\Phi_n^{(i)}(\tau) = S_n^{(i)}(\tau) \exp\left(-i \int_{\alpha}^{\tau} \omega_n(x) dx\right), \quad (2)$$

где  $\alpha$  — параметр, а текущая частота  $\omega_n(\tau)$  будет выбрана (см. разд. 3) вполне определенным образом. Расчету подлежит только множитель  $S_n^{(i)}(\tau)$ .

Частота  $\omega_n(\tau)$  считается настолько высокой, что при любых рассматриваемых значениях радиуса сферы  $a(t)$  существуют большие параметры

$$p_0(a) = \frac{\omega_0 a(t)}{c} \gg 1, \quad p_n(a) = \frac{\omega_n(t) a(t)}{c} \gg 1, \quad (3)$$

позволяющие применить асимптотический подход, хорошо известный по задачам дифракции на неподвижных объектах. Асимптотически рас-

считываемая величина  $S_n^{(i)}(\tau)$  предполагается медленно изменяющейся,

$$\left| \frac{dS_n^{(i)}}{d\tau} \right| \ll |\omega_n S_n^{(i)}|, \quad (4)$$

что не приведет к жестким ограничениям на закон движения сферической поверхности. Ниже функция  $a(t)$  считается аналитической, причем скорость ее изменения ограничена скоростью света:

$$|\beta| < 1, \quad \beta \equiv \frac{1}{c} \frac{da}{dt}. \quad (5)$$

Асимптотический анализ основных интегродифференциальных уравнений основывается на вычислении с помощью метода перевала входящих в них интегралов ( $i = 1, 2$ ):

$$I_{\nu 0}^{(i)} = \int_{\gamma} \int_{l_i} e^{\varphi_{\nu}(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (6)$$

$$\varphi_0 = -i\omega_0 \left( t + \frac{r}{c} \xi + \frac{r}{c} \eta \right) + \nu \ln \eta - \nu \ln (\xi^2 - 1);$$

$$I_{\nu}^{(i)} = \int_{\gamma} \int_{l_2} S_{\nu}^{(i)} \left( t + \frac{r}{c} \xi + \frac{r}{c} \eta \right) e^{\varphi_{\nu}(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (7)$$

$$\varphi_{\nu} = - \int_{\alpha}^{t + \frac{r}{c} \xi + \frac{r}{c} \eta} \omega_{\nu}(x) dx + \nu \ln \eta - \nu \ln (\xi^2 - 1),$$

где контуры  $\gamma$  и  $l_i$  определены в разд. 1 работы [1], а индекс  $n+1$  заменен на  $\nu$ . Для последующих целей необходимо знать функции  $\Phi_{\nu}^{(i)}(\tau)$  при любых комплексных  $\nu$  в полуплоскости  $\text{Re } \nu > 0$ .

### 1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ $I_{\nu 0}^{(i)}$

Двойные интегралы (6) распадаются на произведение

$$I_{\nu 0}^{(i)} = I_1 I_2^{(i)},$$

где

$$I_1 = \int_{\gamma} e^{-ip_0 \eta + \nu \ln \eta} d\eta, \quad (8)$$

$$I_2^{(i)} = \int_{l_i} e^{-ip_0 \xi - \nu \ln (\xi^2 - 1)} d\xi.$$

Здесь  $p_0(r) = \omega_0 r/c$  — большой параметр при любых  $r \gg a$ .

Применим метод перевала к интегралу  $I_1$ . На плоскости  $\eta$  имеется одна перевальная точка

$$\eta_0 = -i \frac{\nu}{p_0}, \quad (9)$$

расположенная при  $\text{Re } \nu > 0$  в нижней полуплоскости. Уравнение контура наибо́льшего спуска

$$\text{Im}(\nu \ln \eta - ip_0 \eta) = \text{Im}(\nu \ln \eta_0 - ip_0 \eta_0)$$

показывает, что этот контур одним концом уходит в начало координат, а другим—на бесконечность (рис. 1). Для применения метода перевала преобразуем интеграл по петле  $\gamma$  в интеграл по одному берегу разреза. В итоге для  $|\arg v| < \pi/2$  получим

$$I_1 \approx (e^{2\pi i v} - 1) \sqrt{\frac{2\pi}{v}} \eta_0^2 e^{v \ln \eta_0 - i p_0 \eta_0} \left( 1 - \frac{3}{16v} + \dots \right), \quad (10)$$

где  $\arg \sqrt{\eta_0^2/v} = 0$  при  $\arg(\eta_0^2/v) = 0$ .

Второе слагаемое в скобке определяет точность главного члена асимптотического представления. Если, как и в обычных задачах дифракции, требовать, чтобы по порядку относительная погрешность была не более  $p_0^{-1/3}$ , то тогда полученной асимптотикой можно пользоваться вне области  $|v| < p_0^{1/3}$ .

При асимптотической оценке интеграла  $I_2^{(i)}$  в (8) приходится иметь дело с двумя седловыми точками

$$\xi_{01} = i \frac{v}{p_0} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{p_0^2}}, \quad \xi_{02} = i \frac{v}{p_0} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{p_0^2}}, \quad (11)$$

причем  $\arg \sqrt{1 - v^2/p_0^2} = 0$  при  $\arg(1 - v^2/p_0^2) = 0$ .

Уравнения контуров наибо́льшего спуска  $l_{01}$  и  $l_{02}$  имеют вид

$$\operatorname{Im} \left[ -i p_0 (\xi - \xi_{0i}) - v \ln \frac{\xi^2 - 1}{\xi_{0i}^2 - 1} \right] = 0 \quad (i = 1, 2).$$

В результате их исследования устанавливается топология контуров наибо́льшего спуска, уходящих на бесконечность в нижней полуплоскости  $\xi$ . Ниже приводится расположение седловых точек и контуров спуска при различных значениях  $v$ .

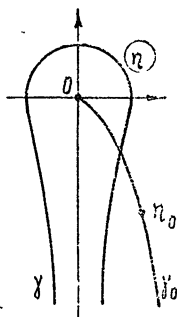


Рис. 1.

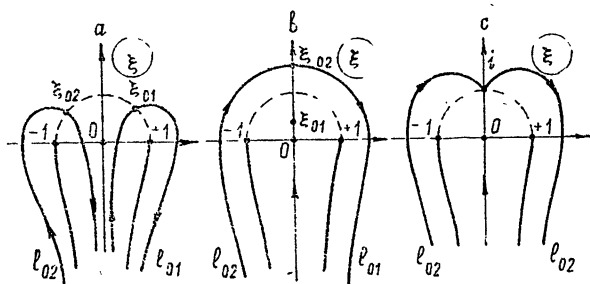


Рис. 2.

1. Пусть  $0 < v < p_0$ . Седловые точки расположены на верхней части окружности единичного радиуса. Если ввести острый угол  $\psi_0$  по формуле

$$\sin \psi_0 = v/p_0, \quad (12)$$

то седловые точки просто выражаются через него:

$$\xi_{01} = e^{i\psi_0}, \quad \xi_{02} = e^{i(\pi-\psi_0)}, \quad (13)$$

$$\xi_{01} + \eta_0 = \cos \psi_0, \quad \xi_{02} + \eta_0 = -\cos \psi_0.$$

Контур наибо́льшего спуска проходит так, что исходный контур  $l_1$  можно совместить с  $l_{01}$ , а контур  $l_2$  — с контуром  $l_{02}$  (рис. 2 а).



2. Если  $p_0 < \nu < \infty$ , то седловые точки располагаются на мнимой оси и при  $\nu \gg p_0$

$$\xi_{01} \approx i \frac{p_0}{2\nu}, \quad \xi_{02} \approx i \frac{2\nu}{p_0}. \quad (14)$$

Видно, что седловая точка  $\xi_{01}$  лежит внутри единичного круга и приближается к началу координат при  $\nu \rightarrow \infty$ , а точка  $\xi_{02}$  при этом уходит на бесконечность (рис. 2 б). Каждый контур спуска проходит через обе седловые точки. Однако при  $\nu \gg p_0$  вклад от точки  $\xi_{01}$  экспоненциально велик по сравнению с вкладом от  $\xi_{02}$ .

3. При  $\nu = p_0$  обе седловые точки сливаются и дают точку перевала  $\xi_0 = i$  более высокого порядка. В этом случае необходимо сохранить в разложении фазовой функции кубичный член. Из точки  $\xi_0 = i$  выходят три направления наибоыстрейшего убывания подынтегральной функции (рис. 2 с).

Перейдем теперь к рассмотрению положения контуров спуска при любых комплексных  $\nu$  из правой полуплоскости. Поскольку  $\xi_{01} \xi_{02} = -1$ , то обе седловые точки остаются в пределах верхней полуплоскости  $\xi$ , если  $\text{Re } \nu \geq 0$ .

Взаимное расположение контуров наибоыстрейшего спуска, проходящих через седловые точки, оказывается различным в разных областях плоскости  $\nu$  и принципиально меняется на линиях:

$$\text{Im} \left[ -ip_0 (\xi_{01} - \xi_{02}) - \nu \ln \frac{\xi_{01}^2 - 1}{\xi_{02}^2 - 1} \right] = 0. \quad (15)$$

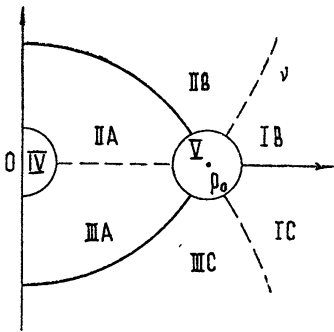


Рис. 3.

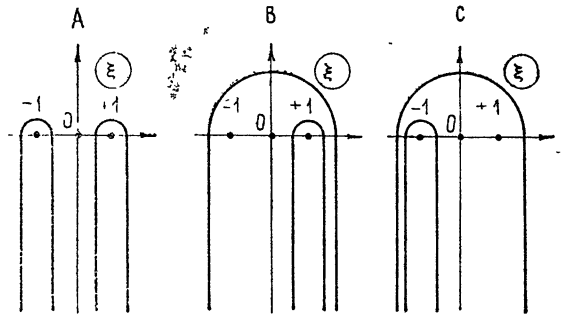


Рис. 4.

Кривые в правой полуплоскости  $\nu$ , на которых выполняется (15), выходят из точки  $\nu = p_0$  под углами  $0; 2/3\pi; -2/3\pi$  (рис. 3, сплошные линии). При таких значениях  $\nu$  один из контуров наибоыстрейшего спуска проходит сразу через две седловые точки. Полуплоскость  $\text{Re } \nu \geq 0$  разбивается кривыми (15) на три области (A, B, C), где взаимная топология контуров спуска неизменна и указана на рис. 4. В общем случае вклад в интеграл вносят обе седловые точки

$$I_2^{(l)} \approx \tilde{A}(\xi_{01}) e^{\tilde{\varphi}(\xi_{01})} + \tilde{A}(\xi_{02}) e^{\tilde{\varphi}(\xi_{02})}.$$

Определяющей является та точка перевала, у которой  $\text{Re } \tilde{\varphi}(\xi_{0i})$  больше. Области преобладания вкладов от разных седловых точек разделяются на плоскости  $\nu$  линиями:

$$\operatorname{Re} \left[ -ip_0 (\xi_{01} - \xi_{02}) - \nu \ln \frac{\xi_{01}^2 - 1}{\xi_{02}^2 - 1} \right] = 0 \quad (16)$$

(рис. 3, пунктирные кривые). Углы их выхода из точки  $\nu = p_0$  суть  $\pi/3$ ,  $-\pi/3$ ,  $\pi$ , а на бесконечности эти линии становятся параллельными мнимой оси. На линиях (16) асимптотика  $I_2^{(i)}$  имеет осциллирующий вид, поэтому нули интегралов  $I_2^{(i)}$  могут лежать только на этих линиях. Таким образом, в правой полуплоскости  $\nu$  выделяется шесть областей, в каждой из которых асимптотическое представление интегралов  $I_2^{(i)}$  является вполне определенным.

Приведем таблицу, указывающую соответствие седловых точек различным контурным интегралам. Знак «минус» в таблице означает, что результат интегрирования по  $\xi$  следует брать с обратным знаком.

Таблица 1

Область на плоскости $\nu$	II A	II B	I B	I C	III C	III A
Главная седловая точка	$\xi_{02}$	$\xi_{02}$	$\xi_{01}$	$\xi_{01}$	$\xi_{02}$	$\xi_{02}$
Интеграл $I_2^{(1)}$ вычисляется через	$-\xi_{01}$	$-\xi_{01}$	$-\xi_{02}$	$-\xi_{02} - \xi_{01}$	$-\xi_{02} - \xi_{01}$	$-\xi_{02}$
Интеграл $I_2^{(2)}$ вычисляется через	$\xi_{02}$	$\xi_{02} + \xi_{01}$	$\xi_{02} + \xi_{01}$	$\xi_{01}$	$\xi_{01}$	$\xi_{01}$
Интеграл $I_2^{(1)} - I_2^{(2)}$ вычисляется через	$-\xi_{01} - \xi_{02}$	$-\xi_{02}$	$-\xi_{02}$	$-\xi_{02}$	$-\xi_{02}$	$-\xi_{01} - \xi_{02}$

Из табл. 1 видно, что нули интеграла  $I_2^{(1)}$  расположены на границе областей I C, III C, а интеграла  $I_2^{(2)}$  — на линии, разделяющей области II B, I B.

Результат интегрирования по контуру наискорейшего спуска,  $l_0$ , проходящему через какую-либо седловую точку  $\xi_0$ , дается формулой

$$I_2^{(i)} \approx \tilde{A}_0(\xi_0) e^{\tilde{\varphi}(\xi_0)} \left[ 1 + \frac{3(\xi_0^4 + 6\xi_0^2 + 1)}{4\nu(\xi_0^2 + 1)^2} + \dots \right], \quad (17)$$

где

$$\tilde{\varphi} = -ip_0 \xi_0 - \nu \ln(\xi_0^2 - 1), \quad \tilde{A}_0 = \left[ \frac{\pi(\xi_0^2 - 1)}{2\nu(\xi_0^2 + 1)} \right]^{1/2},$$

$$\arg \tilde{A}_0 = 0 \quad \text{при} \quad \arg \frac{\xi_0^2 - 1}{2\nu(\xi_0^2 + 1)} = 0.$$

Второе слагаемое в скобках дает оценку погрешности главного члена асимптотического разложения. Если потребовать, чтобы ее относительная величина была не более  $p_0^{-1,3}$ , то на комплексной плоскости  $\nu$  определяются области  $|\nu| < p_0^{1/3}$  и  $|p_0 - \nu| < p_0^{1/3}$  около точек  $\nu = 0$  и  $\nu = p_0$ , где полученные представления не имеют требуемой точности. Вблизи точки  $\nu = p_0$  можно построить другие асимптотики интегралов  $I_2^{(i)}$ , используя функции Эйри—Фока  $W_j$ :

$$I_2^{(1/2)} \approx i \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\tilde{\varphi}(i)} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} W_{(2)} \left(\frac{\nu - p_0}{(\nu/2)^{1/3}}\right), \quad (18)$$

где использовано обычное определение этих функций через контурные интегралы [3]. Разность интегралов

$$I_2^{(1)} - I_2^{(2)} \approx i \sqrt{2\pi} e^{\tilde{\varphi}(i)} \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/3} V \left(\frac{\nu - p_0}{(\nu/2)^{1/3}}\right) \quad (19)$$

выражается через функцию Эйри  $V$ .

Асимптотические представления основных интегралов (6) получаются объединением формул (10) и (17):

$$I_{\nu 0}^{(i)} \approx A_0^{(i)}(\xi_0, \eta_0) e^{\varphi_0(\xi_0, \eta_0)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right], \quad (20)$$

где

$$A_0^{(i)} = (e^{2\pi\nu i} - 1) \sqrt{\frac{2\pi}{\nu} \eta_0^2} \sqrt{\frac{\pi(\xi_0^2 - 1)}{2\nu(\xi_0^2 + 1)}},$$

$$\varphi_0(\xi_0, \eta_0) = -i\omega_0 \left(t + \frac{r}{c} \xi_0 + \frac{r}{c} \eta_0\right) + \nu \ln \frac{\eta_0}{\xi_0^2 - 1}.$$

Таким образом, получены упрощенные представления интегралов  $I_{\nu 0}^{(i)}$  всюду в правой полуплоскости  $\nu$ , за исключением окрестности  $|\nu| < p_0^{1/3}$  начала координат. При этом большой параметр  $p_0 = \frac{\omega_0}{c} r$  соответствует любой точке вне сферы:  $r \geq a(t)$ .

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ $I_{\nu}^{(i)}$

Вычисление интегралов  $I_{\nu}^{(i)}$  может быть выполнено аналогично асимптотическому расчету интегралов  $I_{\nu 0}^{(i)}$  с той только разницей, что из-за непостоянства частоты  $\omega_{\nu}(\tau)$  двойные интегралы не сводятся к произведению однократных. Усложняются и вторые производные от фазовой функции  $\varphi_{\nu}(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{\nu}}{\partial \xi^2} &= -i \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \tau} \left(\frac{r}{c}\right)^2 + \frac{2\nu(\xi^2 + 1)}{(\xi^2 - 1)^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{\nu}}{\partial \eta^2} &= -i \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \tau} \left(\frac{r}{c}\right)^2 - \frac{\nu}{\eta^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{\nu}}{\partial \xi \partial \eta} &= -i \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \tau} \left(\frac{r}{c}\right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Однако, поскольку  $S_{\nu}^{(i)}$  считается медленно меняющейся, уравнения для седловых точек и контуров наибоыстрейшего спуска сохраняют свой аналитический вид. Различие при переходе от  $\varphi_0$  к  $\varphi_{\nu}$  состоит в замене постоянной частоты  $\omega_0$  на функцию  $\omega_{\nu}(\tau)$ , которая будет в дальнейшем указана точно.

Перевальные точки  $\xi_{\nu}$ ,  $\eta_{\nu}$  определяются из условий

$$\left. \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi} \right|_{\xi_\nu, \eta_\nu} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \eta} \right|_{\xi_\nu, \eta_\nu} = 0,$$

где

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi} = -i\omega_\nu \frac{r}{c} - \frac{2\nu\xi}{\xi^2 - 1}, \quad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \eta} = -i\omega_\nu \frac{r}{c} + \frac{\nu}{\eta}, \quad (22)$$

и имеют вид

$$\begin{cases} \xi_{\nu 1} \\ \xi_{\nu 2} \end{cases} = i \frac{\nu}{\rho_\nu} \pm \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{\rho_\nu^2}}, \quad \eta_\nu = -i \frac{\nu}{\rho_\nu}, \quad \rho_\nu(r) = \frac{\omega_\nu r}{c}. \quad (23)$$

Для интегралов  $I_\nu^{(i)}$  на комплексной плоскости  $\nu$  при  $\operatorname{Re} \nu \geq 0$  можно ввести такие же области, как и показанные на рис. 3 для интегралов  $I_{\nu 0}^{(i)}$ . В центре топологической картины оказывается значение  $\nu = \rho_\nu$ . В каждой из областей взаимное расположение седловых точек и связанных с ними контуров спуска соответствует табл. 1.

Введем острый угол  $\psi_\nu$  по формуле (для  $\nu < \rho_\nu$ )

$$\sin \psi_\nu = \nu / \rho_\nu. \quad (24)$$

Тогда получим

$$\xi_{\nu 1} = e^{i\psi_\nu}, \quad \xi_{\nu 2} = e^{i(\pi - \psi_\nu)}, \quad (25)$$

$$\xi_{\nu 1} + \eta_\nu = \cos \psi_\nu, \quad -(\xi_{\nu 2} + \eta_\nu) = \cos \psi_\nu.$$

В результате применения метода перевала к двойному интегралу вклад от интегрирования по окрестности какой-либо седловой точки  $\xi_\nu, \eta_\nu$  записывается в виде

$$I_\nu^{(i)} \approx S_\nu^{(i)}(\xi_\nu, \eta_\nu) A_\nu^{(i)}(\xi_\nu, \eta_\nu) e^{\varphi_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right], \quad (26)$$

где

$$A_\nu^{(i)} = (e^{2\pi i \nu} - 1) \pi \left( \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{\xi_\nu, \eta_\nu}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu) = -i \int_a^\tau \omega_\nu(x) dx + \nu \ln \frac{\eta_\nu}{\xi_\nu^2 - 1},$$

$$\tau = t + \frac{r}{c} (\xi_\nu + \eta_\nu).$$

В окрестности точки  $\nu = \rho_\nu$  асимптотические представления включают в себя функции Эйри и отличаются от (18), (19) заменой  $\rho_0$  на  $\rho_\nu$ . В цилиндрическом случае в полученных формулах (20), (26) следует заменить  $r$  на  $\rho$  и добавить к  $A_k^{(i)}$  ( $k=0, \nu$ ) множитель  $\eta (\xi^2 - 1)^{-1/2}$ , взятый в перевальной точке  $\xi_k, \eta_k$ , возникающий, если положить  $m = \nu$ .

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные интегродифференциальные уравнения, определяющие функции  $\Phi_\nu^{(i)}(\tau)$ , в принятых в работе [1] обозначениях имеют вид.

$$\hat{M}(\omega) \{r I_\nu^{(i)}(r, t)\} = -\hat{M}(\omega) \{r I_{\nu 0}^{(i)}(r, t)\} \quad (i = 1, 2) \quad (27)$$

при  $r = a(t)$ . Двойные контурные интегралы  $I_\nu^{(i)}$  и  $I_{\nu 0}^{(i)}$  допускают представления (20) и (26), где для функций  $A_k^{(i)}$  известны первые члены асимптотических разложений. Так как  $A_k^{(i)}$  медленно меняются,

то операторы  $\hat{M}(\omega)$  граничных условий можно считать действующими только на экспоненциальные множители. С точностью до членов порядка  $1/p_h$  (27) представляется в виде

$$A_0^{(i)} e^{i\varphi_0} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right\} = - A_v^{(i)} S_v^{(i)} e^{i\varphi_v} \left\{ \frac{\partial \varphi_v}{\partial r} - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} \right\}, \quad (28)$$

при  $r = a(t)$ .

Выберем теперь функцию  $\omega_v(\tau)$  так, чтобы для фиксированного момента  $t_a$  взаимодействия поля с границей  $a = a(t_a)$  фазы падающего и дифрагированного поля были бы равны:

$$\varphi_0(t_a, a(t_a), \xi_0, \eta_0) = \varphi_v(t_a, a(t_a), \xi_v, \eta_v). \quad (29)$$

Ниже мы убедимся, что условие (29) является естественным в задаче дифракции коротких волн. Это соотношение определяет неявным образом фазу функции  $\Phi_v^{(i)}(\tau)$  при  $t = t_a, r = a$ :

$$-i \int_a^{\tau_v} \omega_v(x) dx = -i \omega_0 \tau_0 + \nu \ln \frac{\xi_v}{\xi_0}, \quad (30)$$

где введены обозначения

$$\tau_0 = t_a + \frac{a(t_a)}{c} (\xi_0 + \eta_0), \quad \tau_v = t_a + \frac{a(t_a)}{c} (\xi_v + \eta_v) \quad (31)$$

и использованы соотношения

$$\frac{\xi_0^2 - 1}{\eta_v} = -2\xi_v, \quad \frac{\xi_0^2 - 1}{\eta_0} = -2\xi_0,$$

вытекающие из уравнений для перевальных точек  $\eta_v, \xi_v$ , (22) и аналогичных уравнений для  $\eta_0, \xi_0$ .

Опишем теперь в целом асимптотическое решение уравнений (27) для функций  $\Phi_v^{(i)}(\tau)$ , разыскиваемых в форме (2). Если указаны значения седловых точек  $\xi_0, \xi_v$  и  $\eta_0, \eta_v$  для данного  $\nu$  в момент взаимодействия  $t_a$  волны с границей раздела, то показатель фазового множителя определяется с помощью (30), а основное слагаемое в асимптотическом разложении амплитудного множителя имеет вид

$$S_v^{(i)}(\tau) = - \frac{A_0^{(i)}(\xi_0, \eta_0)}{A_v^{(i)}(\xi_v, \eta_v)} \frac{\omega_0 (\xi_0 + \eta_0 - \omega)}{\omega_v (\xi_v + \eta_v - \omega)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{p_v^{1/3}}\right) \right]. \quad (32)$$

В задаче дифракции на цилиндре аналогичные выкладки приводят к выражению

$$S_v^{(i)}(\tau) = - \frac{A_0^{(i)}(\xi_0, \eta_0)}{A_v^{(i)}(\xi_v, \eta_v)} \frac{\omega_0}{\omega_v} \left( \frac{\xi_v^2 - 1}{\xi_0^2 - 1} \right)^{1/2} \frac{(\xi_0 + \eta_0 - \omega)}{(\xi_v + \eta_v - \omega)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{p_v^{1/3}}\right) \right]. \quad (33)$$

Отметим поведение функций  $\Phi_v^{(i)}(\tau)$  и разности  $\Phi_v^{(1)}(\tau) - \Phi_v^{(2)}(\tau)$  на бесконечности в правой полуплоскости  $\nu$ . Оно определяется поведением  $\exp(\varphi)$ , где

$$\varphi_v(\tau) = -i \omega_0 \left[ t_a + \frac{a(t_a)}{c} (\xi_0 + \eta_0) \right] + \nu \ln \frac{\xi_v}{\xi_0}.$$

Поскольку при  $|\nu| \rightarrow \infty$  в правой полуплоскости  $\xi_0 \rightarrow \frac{2i\nu}{\rho_0}$ ,  $\xi_\nu \rightarrow -\beta$ , то видно, что

$$\exp(\varphi_\nu) \rightarrow \exp\left(-i\omega_0 t_a + \nu + \nu \ln \frac{i\beta\rho_0}{2\nu}\right).$$

Отсюда следует, что разность  $\Phi_\nu^{(1)} - \Phi_\nu^{(2)}$  убывает быстрее, чем экспоненциально всюду на бесконечности в правой полуплоскости  $\nu$ , за исключением окрестности мнимой оси. Сами же функции  $\Phi_\nu^{(1)}$  и  $\Phi_\nu^{(2)}$  неограниченно растут, причем рост их прекращается только в окрестности направлений  $|\arg \nu| = \pi/2$ . Для выбора седловых точек  $\xi_\nu$  и схемы вычисления интеграла  $I_\nu^{(i)}$  необходимо вновь обратиться к равенству (29).

#### 4. ФУНКЦИЯ $\omega_\nu(\tau)$ И ЕЕ СВОЙСТВА

Продифференцируем равенство (29) по времени, учитывая, что в седловых точках производные от фаз по  $\xi$  и  $\eta$  равны нулю:

$$\omega_\nu [1 + \beta(\xi_\nu + \eta_\nu)] = \omega_0 [1 + \beta(\xi_0 + \eta_0)]. \quad (34)$$

Входящие в (34) безразмерная скорость  $\beta$  и значения седловых точек берутся в некоторый текущий момент времени  $t_a$  взаимодействия поля с границей раздела, имеющей текущий радиус  $a(t_a)$ . Функция  $\omega_\nu$ , определяющая частоту отраженного поля, может быть продолжена в пространство  $r > a(t_a)$  по характеристике  $\tau_\nu = t - r/c$ .

Используя уравнения для седловых точек (22), нетрудно выразить функцию  $\omega_\nu$  и связанные с ней величины  $\xi_\nu$  и  $\eta_\nu$  через известные характеристики падающего поля. В частности, получают полезные соотношения

$$\omega_\nu (1 + \beta\xi_\nu) = \omega_0 (1 + \beta\xi_0), \quad \omega_\nu \eta_\nu = \omega_0 \eta_0 \quad (35)$$

и квадратное уравнение для  $\xi_\nu$

$$\frac{\xi_\nu (1 + \beta\xi_\nu)}{\xi_\nu^2 - 1} = \frac{\xi_0 (1 + \beta\xi_0)}{\xi_0^2 - 1}, \quad (36)$$

имеющее следующие корни:

$$\xi_\nu^{(1)} = \xi_0, \quad \xi_\nu^{(2)} = -\frac{1 + \beta\xi_0}{\xi_0 + \beta}. \quad (37)$$

Двум значениям корней на основании (35) соответствуют два значения частоты отраженной волны

$$\omega_0, \quad \omega_\nu = \frac{(1 + \beta\xi_0)(\xi_0^2 + \beta)}{\xi_0(1 - \beta^2)} \omega_0. \quad (38)$$

Из написанных формул естественным образом получают законы отражения лучей от движущихся границ [4]. Так, равенства (34) и (35) приводят с учетом введенных ранее определений углов  $\psi_0$  и  $\psi_\nu$  к соотношению

$$\frac{\sin \psi_0}{1 + \beta \cos \psi_0} = \frac{\sin \psi_\nu}{1 - \beta \cos \psi_\nu}, \quad (39)$$

которое определяет зависимость угла отражения луча  $\psi_\nu$  от угла падения  $\psi_0$  и относительной скорости движения границы  $\beta$ . Теперь углы

$\psi_0$  и  $\psi_v$ , определявшие положение седловых точек на единичной окружности плоскости  $\xi$ , приобретают при  $r = a$  ясный физический смысл.

В этих же обозначениях формула (38) определяет частоту отраженной волны

$$\omega_v = \omega_0 \frac{1 + 2\beta \cos \psi_0 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \omega_0 \frac{1 + \beta \cos \psi_0}{1 - \beta \cos \psi_v} \quad (40)$$

в полном согласии с двойным эффектом Допплера. Геометрооптические соотношения (39), (40) относятся не к полному полю, а к отдельной сферической волне с фиксированным номером  $\nu$ . Получающиеся лучевые закономерности свидетельствуют о верном выборе фазовой функции у последней, формально следующем из равенства фаз (29).

## 5. ВЫБОР РЕШЕНИЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные уравнения (27) удобно брать в такой форме, чтобы интеграл  $I_{\nu_0}^{(i)}$ , соответствующий падающему полю, выражался только через вклад от одной седловой точки. При этом в области  $A$  (см. рис. 3) в правой полуплоскости  $\nu$  седловые точки дают, вообще говоря, соизмеримый вклад, и необходимо рассматривать два уравнения, разбивая отраженное поле на части в соответствии с (27):

$$\begin{aligned} \hat{M}(w) I_{\nu}^{(1)} &= - \hat{M}(w) I_{\nu_0}^{(1)}, \\ \hat{M}(w) I_{\nu}^{(2)} &= - \hat{M}(w) I_{\nu_0}^{(2)} \quad \text{при } r = a(t). \end{aligned} \quad (41)$$

В остальной части полуплоскости достаточно ограничиться одним уравнением

$$\hat{M}(w) I_{\nu} = - \hat{M}(w) (I_{\nu_0}^{(1)} - I_{\nu_0}^{(2)}) \quad \text{при } r = a(t). \quad (42)$$

В окрестности точки  $\nu = p_0$  следует использовать для  $I_{\nu_0}^{(i)}$  представления через функции Эйри.

Асимптотическое решение написанных уравнений не представляет труда и было проделано в разд. 3. Однако существование двух корней у уравнения (36) позволяет строить два различных решения уравнений (27). Этот факт связан с тем, что волновое уравнение является уравнением второго порядка. Однозначный выбор решения, по крайней мере, при целых положительных  $\nu$  может быть осуществлен с помощью обобщенного принципа излучения (условие причинности) [1]. Подчеркнем, что специфика применения принципа, которая могла бы быть обусловлена кривизной границы раздела, здесь не проявляется, что количественно видно из формул (39), (40).

Из простого анализа задачи об отражении луча от границы, движущейся навстречу ему с относительной скоростью  $\beta$ , следует, что угол падения  $\psi_0$  должен удовлетворять неравенству

$$\cos \psi_0 \geq -\beta, \quad (43)$$

иначе луч удаляется от границы. При условии (43) имеет место эффект Допплера, а направление распространения отраженного луча определяется формулой (39). В нашей задаче выполнение (43) обеспечивается выбором «доплеровского» корня  $\xi_{\nu}^{(2)}$  (см. (37)). Если выполняется обратное неравенство

$$\cos \psi_0 < -\beta,$$

лучевая задача теряет смысл. В нашем случае это означает выбор тривиального корня  $\xi_v^{(1)} = \xi_0$ , тогда в геометрикооптическом приближении падающее и отраженное поля взаимно уничтожаются.

Угол падения  $\psi_0$  в задаче дифракции на сфере и цилиндре является функцией параметра  $\nu$ , поэтому критическому значению  $\cos \psi_0 = -\beta$ , при котором происходит смена корней  $\xi_v^{(i)}$ , отвечает критическое значение  $\nu$ :

$$\nu_{кр} = \pm p_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{44}$$

В критической точке  $\nu = \nu_{кр}$  смена функций происходит без разрыва их значений, так как  $\omega_\nu = \omega_0$  и  $\xi_v^{(1)} = \xi_v^{(2)}$ .

Удобно ввести в рассмотрение ветвящуюся функцию  $\omega$ , сконструированную следующим образом:

$$\omega = \frac{1}{2} \{ (\omega_\nu + \omega_0) \pm \sqrt{(\omega_\nu - \omega_0)^2} \},$$

где каждая из точек ветвления ( $\nu_{кр} = \pm p_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ ) должна рассматриваться как результат слияния двух точек ветвления второго порядка. Если из соединившихся таким образом точек ветвления провести разрезы на бесконечность, как это указано на рис. 5 для правой полуплоскости  $\nu$ , то в зависимости от фиксации ветвей корня на берегах разреза можно получить  $\omega = \omega_0$  при  $\nu < \nu_{кр}$  и  $\omega = \omega_\nu$  во внешности разрезов или наоборот.

Рассмотрим интервал  $0 < \nu < p_0$ . Здесь имеются два интегродифференциальных уравнения (41). В первом из них — для функции  $\Phi_\nu^{(1)}(\tau)$  — седловая точка  $\xi_0 = \exp(i\psi_0)$  при росте  $\nu$  от 0 до  $p_0$  движется по окружности единичного радиуса от  $\psi_0=0$  до  $\psi_0=\pi/2$ . Во втором уравнении — для  $\Phi_\nu^{(2)}(\tau)$  — аргумент  $\psi_0$  соответственно изменяется от  $\pi$  до  $\pi/2$ . Поведение доплеровской частоты  $\omega_\nu$  в зависимости от угла падения  $\psi_0$  дается формулой (40) и иллюстрируется рис. 6.

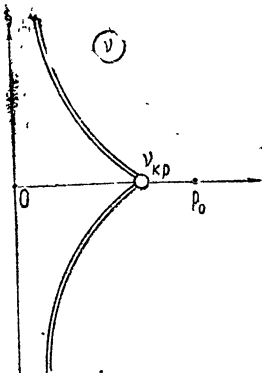


Рис. 5.

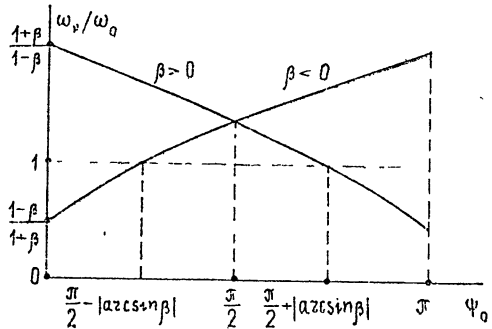


Рис. 6.

Для расширяющихся ( $\beta > 0$ ) сфер ветвлению подвергается функция  $\Phi_\nu^{(2)}(\tau)$ , причем слева от  $\nu_{кр} > 0$  для нее используется корень  $\xi_v^{(1)}$  и частота  $\omega_0$ . Функция  $\Phi_\nu^{(1)}(\tau)$  не имеет ветвления и всюду связана с доплеровской частотой  $\omega_\nu$ .

В случае сжимающихся ( $\beta < 0$ ) сфер ветвление испытывает функция  $\Phi_\nu^{(1)}(\tau)$ , которая слева от точки ветвления  $\nu_{кр} > 0$  имеет доплер-



ровскую частоту  $\omega_\nu$ , а справа — частоту  $\omega_0$  падающего поля. Функция  $\Phi_\nu^{(2)}(\tau)$  в этом случае всюду определяется частотой  $\omega_0$ .

В интервале  $\rho_0 < \nu < \infty$  имеется одно интегродифференциальное уравнение (42). Здесь всюду используется корень  $\xi_\nu^{(2)}$ , связанный с частотой  $\omega_\nu$ , так как на этом отрезке не содержится никаких точек ветвления. Решения интегродифференциальных уравнений, фиксированные на вещественной полуоси  $\nu$ , можно использовать во всей правой полуплоскости  $\nu$ , если осуществить их аналитическое продолжение с учетом наличия точек ветвления и связанных с ними разрывов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Класс, В. Н. Красильников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 12, 1855 (1975).
2. В. Н. Красильников, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 7, 1968, стр. 89.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд. Наука, М., 1972.
4. С. Н. Столяров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 4, 671 (1962).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 августа 1974 г.

#### INVESTIGATION OF INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF WAVE DIFFRACTION BY SPHERES AND CYLINDERS WITH TIME-VARYING RADII

*V. A. Klass, V. N. Krasil'nikov*

The asymptotic solution of the integral-differential equations which describe diffraction of a plane wave by sphere or cylinder with a variable radius is given [1]. It is assumed that the incident wavelength is smaller than the instantaneous value of the object radius. The appearance of changed (Doppler) frequencies in the solution obtained and of the branching point on the  $\nu$ -sign complex plane of Legendre polynomials (in the case of the sphere) is pointed out. The solution of the integral-differential equations is built in the right semi-plane  $\nu$  for any velocities of motion of the interface smaller than the velocity of light.

УДК 621.373

## ОПТИМИЗАЦИЯ СВЯЗИ ГЕНЕРАТОРА ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С НАГРУЗКОЙ

*В. Г. Курин, Б. К. Скрынник, В. П. Шестопапов*

Исследована возможность осуществления вывода энергии из открытого резонатора генератора дифракционного излучения с помощью отверстия связи сравнительно больших размеров, расположенного вне центра сферического отражателя открытого резонатора. Описаны результаты экспериментального измерения коэффициента связи генератора по пусковым токам. Приведена методика приближенного расчета для оценки оптимального коэффициента связи.

При конструировании генераторов дифракционного излучения (ГДИ) возникает важная задача определения величины коэффициента связи открытого резонатора (ОР) с нагрузкой и выбора оптимальной связи. В конкретных случаях применения ГДИ предъявляются различные требования к их выходной мощности, стабильности частоты, пусковым токам. С помощью выходного устройства, изменяя величину коэффициента связи, можно управлять указанными параметрами генератора.

Обычно энергия из ОР ГДИ выводится через отверстие связи [1], расположенное в центре сферического зеркала ОР. Для этих целей используются также квазиоптические выходные устройства [2], однако последние, ввиду сложности изготовления, пока не получили широкого применения в ГДИ. Регулирование величины связи в волноводных выходных устройствах при расположении щели связи в центре зеркала ОР встречает большие трудности, особенно для субмиллиметровых волн. Как известно, ОР ГДИ [3] возбуждается в основном на  $TEM_{02q}$ -волне. Если отверстие связи расположено в центре зеркала ОР, то оно оказывается в области с максимальной интенсивностью поля. Незначительное изменение размеров отверстия приводит к резкому изменению величины коэффициента связи, т. е. отношения потерь высокочастотной энергии в нагрузке к собственным потерям в резонаторе. При таких условиях создание генератора с заданным значением коэффициента связи резонатора с нагрузкой сопровождается большими технологическими трудностями.

В настоящей работе предлагается выходное устройство, в котором отверстие связи сравнительно больших размеров расположено не в центре сферического зеркала ОР, а на расстоянии  $A$  от его центра (см. рис. 1). Величина  $A$  рассчитывается или подбирается экспериментально. На рис. 1б изображены качественные картины распределения поля на сферическом зеркале ОР и расположение отверстия связи. Ось  $Oy$  перпендикулярна ламелям отражательной дифракционной решетки, частично заполняющей нижнее плоское зеркало полусимметричного ОР ГДИ, и совпадает с направлением движения электронного потока. Из рис. 1б видно, что, выбирая определенные значения  $A$  и вращая зеркало ОР вокруг оси, мы тем самым перемещаем отверстие связи в области с различной интенсивностью поля, следовательно,

изменяем  $\sigma$ . Таким образом, величина  $\sigma$  оказывается функцией угла поворота  $\alpha$  зеркала и расстояния  $A$  центра отверстия от оси ОР. Теперь при одних и тех же размерах отверстия связи только за счет изменения  $\alpha$  можно получать различные  $\sigma$  ГДИ с нагрузкой.

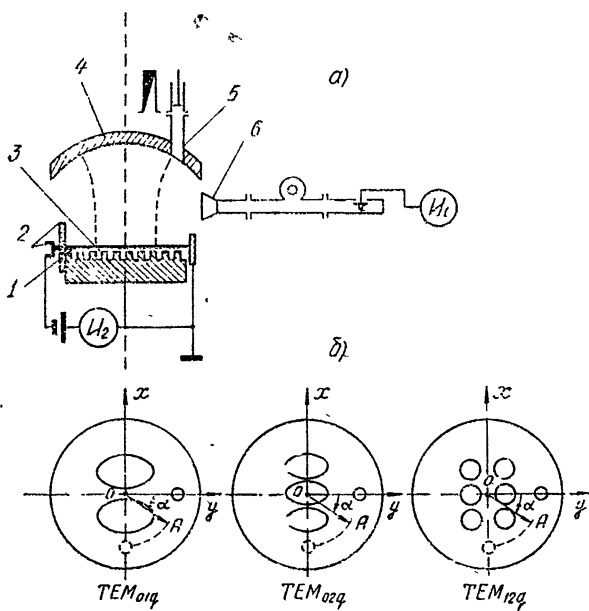


Рис. 1.

Определение величины коэффициента связи в данной работе проведено с помощью соотношения между пусковыми токами генератора при работе его на согласованную нагрузку и при закороченном отверстии связи передвижным короткозамыкающим поршнем.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СВЯЗИ

Исследование проводилось на разборном макете ГДИ на экспериментальной установке, схема которой представлена на рис. 1 а.

Электронный поток (1), формируемый диодной пушкой (2) и продольным магнитным полем, пролетая вблизи дифракционной решетки (3), порождает дифракционное излучение. Дифракционное излучение запитывает ОР генератора. Вывод энергии осуществляется из верхнего зеркала (4) ОР через отверстие связи (5), смещенное относительно центра на  $A$ . Для измерения частоты и пусковых токов используется энергия дифракционных потерь, улавливаемая рупором (6), через окно, прозрачное для СВЧ энергии, расположенное в корпусе ГДИ. Срыв колебаний отмечается индикатором И<sub>1</sub>, величина пусковых токов—индикатором И<sub>2</sub>. Такая схема позволяет свести к минимуму потери в выходном устройстве и подводящих волноводах.

Известно [4], что пусковой ток ГДИ пропорционален общим потерям в ОР и нагрузке. Оценивая величину потерь по пусковым токам, можно определить величину коэффициента связи  $\sigma$ . Минимальная величина пускового тока,  $I_{п \text{ min}}$ , измеренного при закороченном выходе с помощью передвижного поршня, пропорциональна собственным потерям ОР, а пусковой ток при согласованной нагрузке  $I_{п}$  пропорционален

общим потерям. Разность между этими токами пропорциональна потерям во внешней цепи. Следовательно,  $\sigma$  определяется соотношением

$$\sigma = \frac{\delta_{\text{вн}}}{\delta_0} \approx \frac{I_{\text{п}} - I_{\text{п min}}}{I_{\text{п min}}} = \frac{\Delta I_{\text{п}}}{I_{\text{п min}}}, \quad (1)$$

где  $\delta_{\text{вн}}$  — потери во внешней цепи,  $\delta_0$  — собственные потери ОР ГДИ. В этом выражении не учтены потери в волноводах выходного устройства. С учетом этих потерь вместо (1) получаем

$$\sigma = \frac{\Delta I_{\text{п}}}{(1 - \gamma) I_{\text{п}} - \Delta I_{\text{п}}}, \quad (2)$$

где  $\gamma$  — безразмерный коэффициент, учитывающий потери в волноводах.

При определении  $\sigma$  важно знать не только расположение и величину отверстия связи, но и тип колебания, на котором возбудился ОР ГДИ. Известно, что величина  $\sigma$  зависит от интенсивности поля в месте расположения отверстия связи, следовательно, изменение  $\sigma$  соответствует характеру изменения интенсивности поля на траектории, по которой перемещается отверстие связи при изменении угла поворота.

Для расчета распределения поля, возбуждающегося в ОР ГДИ, воспользуемся выражением, которое описывает распределение интенсивности поля в полусимметричном ОР без решетки, [5].

$$\frac{E_{mn}(x, y)}{E_0} = \sqrt{\frac{2(R_1 - D)}{R_1}} H_m \left( \sqrt{2} \frac{x}{w} \right) H_n \left( \sqrt{2} \frac{y}{w} \right) \exp \left[ -\frac{2(x^2 + y^2)}{w} \right], \quad (3)$$

где  $w = \sqrt{\frac{\lambda R_1}{\pi}} \sqrt{\frac{D}{R_1 - D}}$  — радиус пятна поля для основного типа колебания,  $H_m$ ,  $H_n$  — полиномы Эрмита,  $E_{mn}(x, y)$  — интенсивность поля на сферическом зеркале в точке  $(x, y)$ ,  $E_0$  — максимальное значение интенсивности поля на сферическом зеркале для колебания  $\text{TEM}_{00q}$  в полуконфокальном ОР (когда  $D = R_1/2$ ),  $R_1$  — радиус кривизны сферического зеркала,  $D$  — расстояние между зеркалами,  $\lambda$  — длина волны.

Интенсивность поля на сферическом зеркале вдоль окружности с радиусом  $A$  в зависимости от угла  $\alpha$  для различных типов колебаний можно представить в виде

$$\frac{E_{01}(\alpha, A)}{E_0} = 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{R_1 - D}{R_1}} \frac{A}{w} \sin \alpha \exp \left( -\frac{2A^2}{w^2} \right),$$

$$\frac{E_{02}(\alpha, A)}{E_0} = 8 \sqrt{\frac{R_1 - D}{R_1}} \left( \frac{A^2}{w^2} \sin^2 \alpha - 1 \right) \exp \left( -\frac{2A^2}{w^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{E_{12}(\alpha, A)}{E_0} = 16 \sqrt{2} \sqrt{\frac{R_1 - D}{R_1}} \frac{A}{w} \cos \alpha \left( \frac{A^2}{w^2} \sin^2 \alpha - 1 \right) \exp \left( -\frac{2A^2}{w^2} \right),$$

где уже вместо  $x$  и  $y$  подставлены их значения, выраженные через  $A$  и  $\alpha$ .

На рис. 2 пунктиром построены экспериментальные значения  $\sigma$  в зависимости от угла поворота отверстия связи  $\alpha$  для колебаний  $\text{TEM}_{01q}$  (а),  $\text{TEM}_{02q}$  (б) и  $\text{TEM}_{12q}$  (в). Для этих же типов колебаний сплошными линиями показано изменение интенсивности поля по траектории перемещения отверстия связи, рассчитанное согласно (4).

Как и следовало ожидать, качественное изменение  $\sigma$  и интенсивности поля вдоль траектории перемещения отверстия связи имеют сходный характер.

Для сравнения со значениями  $\sigma$ , определенными по пусковым токам ГДИ, величина  $\sigma$  была вычислена также и по измеренному отношению добротностей [6]

$$\frac{Q_{\text{вн}}}{Q_{\text{н}}} - 1 = \frac{1}{\sigma}, \quad (5)$$

где  $Q_{\text{вн}}$  — внешняя добротность,  $Q_{\text{н}}$  — нагруженная добротность ОР ГДИ.

Внешнюю добротность определим, измерив величину затягивания частоты [7]:

$$Q_{\text{вн}} = \frac{b f_0}{F}, \quad (6)$$

где  $f_0$  — средняя частота полосы при изменении общей реактивности системы,  $F$  — величина затягивания частоты,  $b$  — коэффициент, зависящий от КСВ излучения.

Нагруженную добротность найдем, представив ОР ГДИ в виде одночастотного резонансного контура. В этом случае легко получить зависимости между крутизной электронной настройки и нагруженной добротностью ОР. Необходимые соотношения между активной и реактивной проводимостями электронного потока найдем, пользуясь результатами линейной теории каскадного группирования электронов для ГДИ [8]:

$$Q_{\text{н}} = \frac{\Delta U}{2 \Delta f} \frac{f_0}{2 U_{\text{опт}}} \pi p N, \quad (7)$$

где  $N$  — число периодов ( $l$ ) в пятне поля ( $2\omega$ ),  $p$  — номер гармоники,  $\Delta f/\Delta U$  — крутизна электронной настройки частоты вблизи  $U_{\text{опт}}$ ,  $U_{\text{опт}}$  — значение анодного напряжения при максимальной выходной мощности.

Определяя  $Q_{\text{вн}}$  и  $Q_{\text{н}}$  согласно (6), (7) и подставляя их значения в (5), получим величину  $\sigma$ . Результаты измерений  $\sigma$  этим методом, проведенные для ТЕМ<sub>01q</sub>-колебания, представлены на рис. 2 а (треугольниками). Из этого рисунка видно, что экспериментальные точки хорошо согласуются с результатами вычисления коэффициента связи по пусковым токам. Таким образом, экспериментально проверено, что  $\sigma$  достаточной для практических целей точностью можно пользоваться

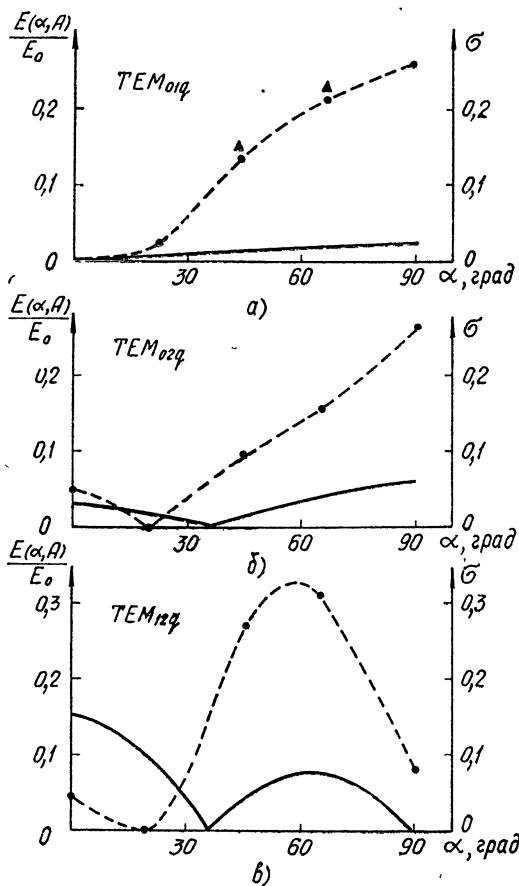


Рис. 2.

выражением (1) для определения коэффициента связи ОР ГДИ с нагрузкой.

Несоответствие минимальных значений для коэффициента связи и интенсивности высокочастотного поля в резонаторе говорит о том, что, вероятно, реальная ширина пятен поля в ОР вдоль оси  $Ox$  для колебаний  $TEM_{02q}$  и  $TEM_{12q}$  больше расчетной, полученной в квазиоптическом приближении.

## 2. ОПТИМАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ СВЯЗИ

Величина выводимой мощности из ГДИ зависит не только от рабочего тока, но и от коэффициента связи ОР с нагрузкой. На рис. 3\* приведена экспериментально снятая зависимость выходной мощности от коэффициента связи при различных значениях рабочих токов ( $1 - I_p = 60$  мА,  $2 - I_p = 80$  мА,  $3 - I_p = 110$  мА,  $4 - I_p = 140$  мА). Видно, что максимум выходной мощности с увеличением рабочего тока смещается в сторону возрастания коэффициента связи. То значение коэф-

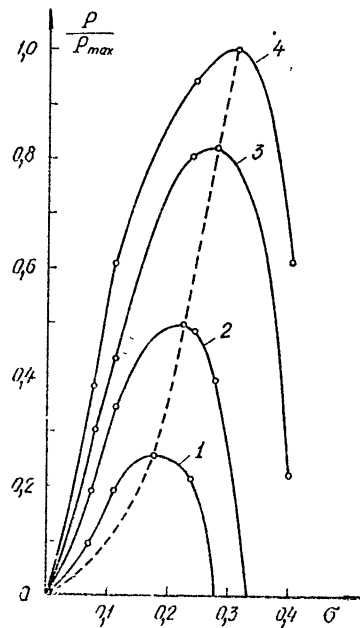


Рис. 3.

фициента связи, при котором достигается максимум выходной мощности, будем называть оптимальным для данного рабочего тока. Величину оптимального коэффициента связи можно определить, зная рабочий ток  $I_p$  и  $I_{п min}$ .

Известно, что выходная мощность  $P_{вых}$  из любого генератора, имеющего резонансный контур, равна произведению контурного КПД на мощность запитки этого контура. Последняя сложным образом зависит от различных параметров, как-то: коэффициента преобразования дифракционного излучения в собственные типы колебаний ОР, типа колебания, его добротности, характеристик электронного пучка, периодической структуры и т. д. Однако в данном приближении будем считать, что все указанные параметры остаются постоянными при работе на выбранном колебании и не влияют на изменение мощности запитки. Будем учитывать только влияние на изменение мощности рабочего тока  $I_p$  и запасенной энергии в ОР.

Поскольку мощность дифракционного излучения пропорциональна плотности запасенной энергии, а последняя — нагруженной добротности, то целесообразно ввести коэффициент, устанавливающий зависимость между запасенной энергией и коэффициентом связи  $\sigma$ , который, очевидно, равен  $\frac{Q_n}{Q_0} = \frac{1}{1 + \sigma}$ . Зависимость между рабочим током

и выходной мощностью имеет почти линейный характер, так как  $P_{вых} \sim (I_p - I_{п})$ . Это хорошо подтверждается экспериментом. Конечно, пусковой ток тоже будет изменяться с изменением величины связи:  $I_{п} = I_{п min} k(1 + \sigma)$ , где  $k \geq 1$  показывает относительное ухудшение взаимодействия электронного потока с высокочастотным полем ОР при увеличении рабочего тока (при  $(I_p - I_{п}) < 0,2 I_{п}$  коэффициентом  $k$  можно пренебречь, так как при этом  $(k - 1) \ll 1$ ). Таким образом,

$$P_{\text{вых}} \sim \left( \frac{I_p}{1 + \sigma} - kI_{n \text{ min}} \right) \frac{\sigma}{\sigma + 1}. \quad (8)$$

Полученное выражение качественно хорошо описывает сплошные кривые рис. 3. Максимум выходной мощности при данном рабочем токе наступает при

$$\sigma_{\text{opt}} = \frac{I_p - kI_{n \text{ min}}}{I_p + kI_{n \text{ min}}} \approx \frac{I_p - I_{n \text{ min}}}{I_p + I_{n \text{ min}}}. \quad (9)$$

На рис. 4 пунктиром изображена зависимость экспериментальных значений  $\sigma$  от соотношения  $\frac{I_p - I_{n \text{ min}}}{I_p + I_{n \text{ min}}}$ . Сплошной линией показано изменение  $\sigma$  в соответствии с (9). При малой связи, когда рабочий ток незначительно превышает минимальный пусковой ток, имеем очень хорошее совпадение расчетных значений оптимального коэффициента связи с экспериментом. При больших значениях рабочих токов генератора значения оптимального коэффициента связи, рассчитанные по формуле (9), не соответствуют экспериментальным оптимумам выходной мощности. Это связано с тем, что с увеличением токов нарушается линейная зависимость между приращением выходной мощности и приращением рабочего тока генератора. Однако величину  $\sigma_{\text{opt}}$  можно оценивать и при больших токах генератора, если учесть коэффициент  $k$ , характеризующий относительное ухудшение взаимодействия электронного потока с высокочастотным полем ОР при увеличении плотности пространственного заряда.

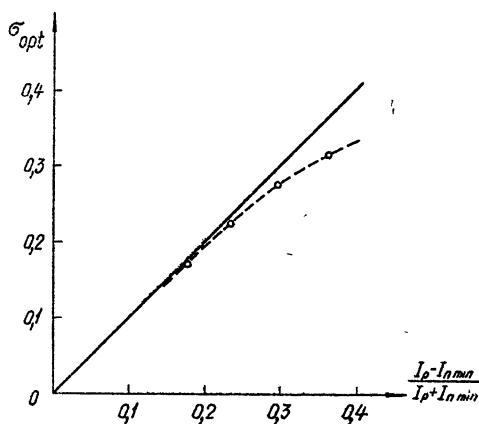


Рис. 4.

1) Исследован генератор дифракционного излучения с выводом энергии через отверстие связи, расположенное вне центра сферического зеркала ОР ГДИ. Показано, что коэффициент связи генератора с нагрузкой можно изменять в широких пределах для всех типов колебаний, возбуждающихся в ОР ГДИ, вращая одно из зеркал вокруг оси ОР, а также изменяя расстояние между зеркалами.

2) Расположение отверстия связи вне центра сферического зеркала ОР позволяет значительно увеличить размеры самого отверстия по сравнению с аналогичными отверстиями, расположенными в центре. Например, в наших опытах с 4-миллиметровым ГДИ с полусимметричным ОР нецентральное отверстие связи было круглого сечения и имело диаметр 4 мм, в то время как в аналогичных ГДИ центральное отверстие имеет размер  $0,1 \times 3,6 \text{ мм}^2$ . Это упрощает технологию изготовления генератора и повышает точность получения заданной связи.

3) Логически доказано и экспериментально проверено, что величину коэффициента связи ГДИ с нагрузкой можно определять посред-

ством измерения пусковых токов на согласованную нагрузку и на коротко замыкающий поршень, а оптимальный коэффициент связи можно оценивать по отношению разности рабочего и минимального пускового тока к их сумме.

4) Из сравнения экспериментально измеренной величины коэффициента связи и расчетного значения интенсивности поля в месте расположения отверстия связи следует, что реальная ширина пятен поля вдоль оси  $Ox$  для колебаний  $TEM_{02q}$  и  $TEM_{12q}$  имеет большую величину, чем расчетная. Следовательно, выражение (3) только качественно правильно описывает поле в ОР:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Балаклицкий, Б. К. Скрынник, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, УФЖ, 14, № 4, 539 (1969).
2. И. М. Балаклицкий, И. Д. Ревин, Б. К. Скрынник, А. С. Сысоев, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, Докл. VII Всесоюзной конференции, Электронные приборы СВЧ и области их применения, Томск, 1972, стр. 259.
3. И. М. Балаклицкий, В. Г. Курин, Б. К. Скрынник, В. П. Шестопалов, ПТЭ, № 5 (1974).
4. И. М. Балаклицкий, И. Д. Ревин, Б. К. Скрынник, А. С. Сысоев, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 235 (1973).
5. Дж. Бирнбаум, Оптические квантовые генераторы, изд. Сов. радио, М., 1967.
6. Дж. Л. Альтман, Устройства сверхвысоких частот, изд. Мир, М., 1968.
7. Д. Е. Самсонов, Основы расчета и конструирования магнетронов, изд. Сов. радио, 1974.
8. Б. К. Скрынник, Радиотехника, изд. ХГУ, Харьков, вып. 34, 133 (1975).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
25 октября 1974 г.

#### OPTIMIZATION OF COUPLING OF DIFFRACTION RADIATION OSCILLATOR WITH A LOAD

*V. G. Kurin, B. K. Skrynnik, V. P. Shestopalov*

We investigate the possibility of realizing the energy output from an open resonator of the diffraction radiation oscillator using the link opening of comparatively large dimensions situated outside the center of a spherical reflector of an open resonator. The results of experimental measurement of the starting current coupling coefficient are described. The method of an approximate calculation to estimate the optimum coupling coefficient is given.



УДК 621.372.822

## ОТРАЖЕНИЕ ОТ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Б. Ю. Капилевич, Н. С. Симин

Обсуждается методика численного расчета коэффициента отражения от диэлектрического клина, образованного наклонной границей раздела сред с различными проницаемостями в прямоугольном волноводе. Плоскость раздела перпендикулярна широким стенкам волновода. Приводятся результаты расчета и экспериментальной проверки в трехсантиметровом диапазоне для конкретных конфигураций клина.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование отражений электромагнитных волн от диэлектрического клина, образованного границей раздела сред с различными проницаемостями, представляет интерес при решении задач согласования устройств СВЧ диапазона, использующих диэлектрические материалы.

В работах [1, 2] рассматривается в многоволновом приближении отражение от наклонной диэлектрической плоскости в прямоугольном волноводе, когда она перпендикулярна его широким стенкам. Однако если в волноводе с диэлектриком распространяется одна волна, что типично для большинства устройств СВЧ, то достаточную для практики точность расчетов может обеспечить одноволновое приближение. Использование такого приближения в аналогичных задачах (плоскость раздела диэлектриков перпендикулярна узким стенкам прямоугольного волновода) оказалось весьма эффективным [3, 4]. Кроме того, значительно сокращается объем вычислений.

### 2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Пусть диэлектрический клин, образованный средами с различными диэлектрическими проницаемостями, имеет вдоль оси  $z$  длину  $L$  (рис. 1). В предположении, что на участке прямоугольного волновода с продольно неоднородным заполнением распространяется волна, структура которой близка к моде  $TE_{10}$ , уравнение для функции распределения поперечного электрического поля согласно [5] можно записать в виде

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + \beta^2(z) \Psi = 0, \quad (1)$$

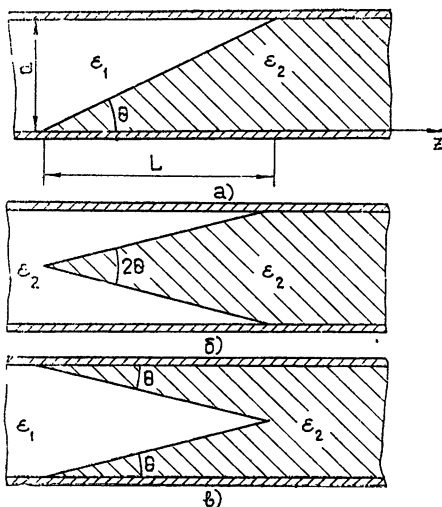


Рис. 1.

где  $\beta(z)$  — локальная, зависящая от  $z$ , постоянная распространения.

Используя результаты работ [6, 7], после несложных преобразований локальную постоянную распространения  $\beta(z)$  для указанной волны можно представить в форме:

в случае несимметричной границы раздела (рис. 1 а)

$$\beta^2(z) = k_0^2 \left[ \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{z}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{\Delta} \right) \right] - \frac{\pi^2}{a^2}, \quad (2)$$

в случае симметричной границы раздела (рис. 1 б)

$$\beta^2(z) = k_0^2 \left[ \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{z}{L} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi z}{L} \right) \right] - \frac{\pi^2}{a^2}, \quad (3)$$

в случае симметричной границы раздела (рис. 1 в)

$$\beta^2(z) = k_0^2 \left[ \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{z}{L} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi z}{L} \right) \right] - \frac{\pi^2}{a^2}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — относительные диэлектрические проницаемости сред в волноводах с однородным заполнением,  $a$  — ширина волновода,  $L$  — длина клина,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  — волновое число свободного пространства. С учетом (2)–(4) и, вводя новую переменную  $\xi = z/L$ , уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + (\alpha + \delta \xi + \gamma \sin q \xi) \Psi = 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \left( \frac{\pi L}{\lambda} \right)^2 \left[ 4\varepsilon_1 - \left( \frac{\lambda}{a} \right)^2 \right], \quad \delta = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left( \frac{2\pi L}{\lambda} \right)^2,$$

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\pi} \left( \frac{2\pi L}{\lambda} \right)^2 \quad (q = 2\pi) \quad (\text{рис. 1 а}),$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\pi} \left( \frac{2\pi L}{\lambda} \right)^2 \quad (q = \pi) \quad (\text{рис. 1 б}),$$

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\pi} \left( \frac{2\pi L}{\lambda} \right)^2 \quad (q = \pi) \quad (\text{рис. 1 в}).$$

Два линейно независимых решения уравнения (5) должны удовлетворять следующим условиям:  $\Psi_1(0) = 1$ ,  $\Psi_1'(0) = 0$ ,  $\Psi_2(0) = 0$ ,  $\Psi_2'(0) = 1$ .

Из условия непрерывности  $\Psi$  и  $\Psi'$  на концах волновода с неоднородным заполнением получается выражение для коэффициента отражения

$$\Gamma = \frac{-\Psi_1' - \beta_1 \beta_2 \Psi_2 + j(\beta_1 \Psi_2' - \beta_2 \Psi_1)}{\Psi_1' - \beta_1 \beta_2 \Psi_2 + j(\beta_1 \Psi_2' + \beta_2 \Psi_1)}, \quad (6)$$

где  $\beta_1, \beta_2$  — постоянные распространения соответственно в однородных незаполненном и заполненном волноводах.

Значения функций  $\Psi_{1,2}$  и  $\Psi'_{1,2}$ , входящие в (4), вычисляются в точке  $\xi = 1$ , соответствующей концу участка с неоднородным заполнением.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Для вычисления  $\Psi_{1,2}$  и  $\Psi'_{1,2}$  использовалась следующая схема. С помощью замены  $\frac{d\Psi}{d\xi} = \varphi$  уравнение (5) преобразовывалось к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка с соответствующими начальными условиями. Последняя решалась стандартным методом Рунге—Кутты.

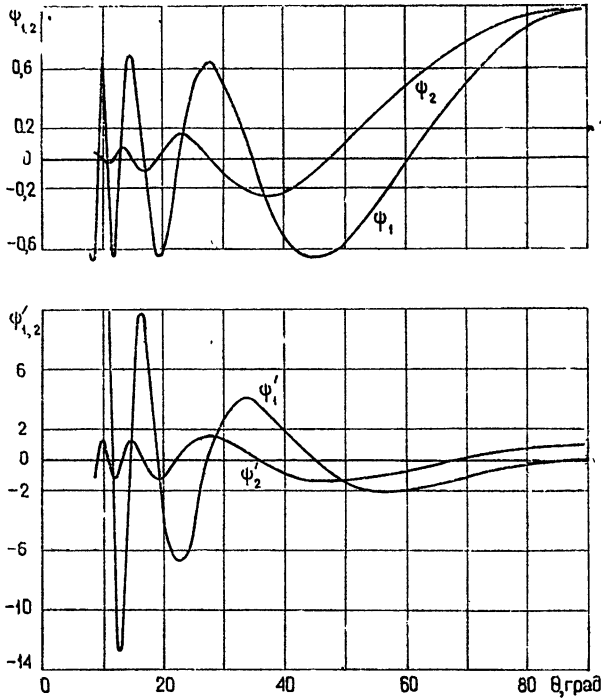


Рис. 2.

В качестве иллюстрации на рис. 2 показаны решения уравнения (5) и их первые производные в точке  $\xi = 1$  в зависимости от угла наклона  $\theta$  при  $\epsilon_2 = 2$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $a/\lambda = 0,6$  для структуры рис. 1 а. Видно, что при  $\theta \rightarrow 90^\circ$  значения  $\Psi_{1,2}$  и  $\Psi'_2$  стремятся к единице, а значение  $\Psi'_1$  стремится к нулю. В этом предельном случае из (6) находим  $\Gamma = (\beta_1 - \beta_2)/(\beta_1 + \beta_2)$ , что совпадает с хорошо известным выражением для случая, когда в линии передачи имеет место скачок проницаемостей. С другой стороны, данное обстоятельство подтверждает правильность реализации процедуры Рунге—Кутты. Время вычисления одного набора величин  $\Psi_{1,2}$ ,  $\Psi'_{1,2}$  (при точности 0,01) на ЭВМ «Наири-2» составляло 1—3 мин и увеличивалось с уменьшением  $\theta$  из-за осциллирующего характера решений при малых  $\theta$ .

Дополнительный контроль за ходом процесса вычисления осуществлялся с помощью определителя Вронского. В нашем случае значение определителя Вронского должно равняться единице, независимо от значений исходных параметров, входящих в уравнение (5). Некоторые типичные результаты расчета определителя Вронского  $W = \Psi_1\Psi'_2 - \Psi_2\Psi'_1$  приведены в таблице. Видно, что отклонение  $W$  от еди-

ности не превосходит 0,2%, что обеспечивает вполне достаточную точность расчетов для большинства приложений.

На рис. 3 представлены результаты расчета модуля коэффициента отражения  $|\Gamma|$  при  $\epsilon_2 = 2$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $a/\lambda = 0,55 \div 0,7$  для структур, изображенных на рис. 1. Наибольшие отражения при прочих равных условиях наблюдаются в структуре рис. 1б. В структурах рис. 1а и рис. 1в уровень отражений меньше. Это объясняется тем, что в случае рис. 1б граница раздела сред с различными проницаемостями начинается в центре волновода, где электрическое поле основной волны максимально, что приводит к существенным отражениям. В случае рис. 1а и рис. 1в

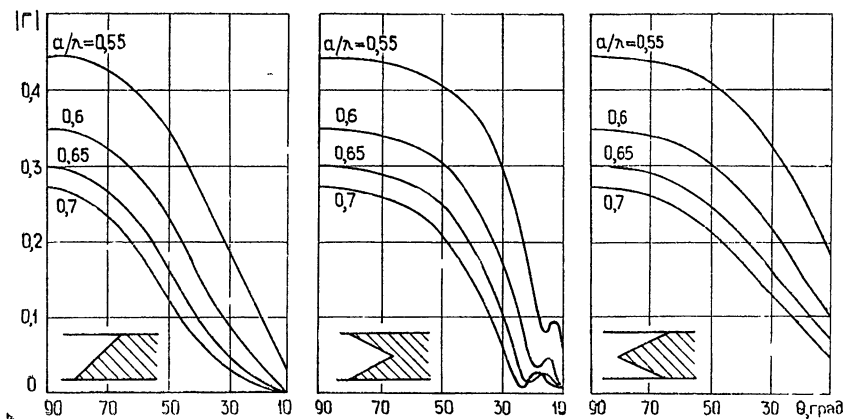


Рис. 3.

эта граница начинается от узких стенок волновода, где электрическое поле равно нулю, что способствует уменьшению коэффициента отражения. Хотя отражения от структур рис. 1а и рис. 1в сравнимы по величине, однако с точки зрения подавления нежелательных высших типов волн симметричные границы раздела имеют преимущество перед несимметричными. В первом случае могут возбуждаться только нечетные волны, во втором — наряду с нечетными — возбуждаются и четные волны. Из рис. 3 видно, что с ростом  $a/\lambda$  модуль коэффициента отражения убывает, что является закономерным, поскольку с увеличением  $a/\lambda$  перепад волновых сопротивлений незаполненного и заполненного диэлектриком волноводов уменьшается.

#### 4. СРАВНЕНИЕ С ДАННЫМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ ДРУГИМИ МЕТОДАМИ, И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

В работах [1, 2] приведены результаты расчета модуля коэффициента отражения в структуре рис. 1а для некоторых значений  $\theta$ . Использовалось представление полей с помощью функции Грина. Интересно сравнить эти данные с результатами, полученными на основе рассмотренной выше методики. Такое сравнение, очевидно, имеет смысл только при условии, что параметры  $\epsilon_2$  и  $a/\lambda$  соответствуют одноволновому режиму в волноводе, заполненном диэлектриком.

На рис. 4 показана зависимость  $|\Gamma|$  от  $\epsilon_2$ , заимствованная из работы [1] (сплошная кривая) и рассчитанная по предлагаемой методике (пунктирная кривая) при значениях  $a/\lambda = 0,7$  и  $L/a = 2/7$ . В табл. 1 приведены значения  $|\Gamma|$ , взятые из работы [2] и рассчитан-

ные по формуле (6) для значений  $a/\lambda = 0,55$ ,  $\epsilon_2 = 3$  при  $\theta = 30, 45, 60, 75^\circ$ . В целом имеет место вполне удовлетворительное соответствие значений  $|\Gamma|$ , определенных различными методами. В то же время заметна одна характерная тенденция: с ростом  $\epsilon_2$  и  $L$  расхождение значений  $|\Gamma|$  увеличивается. Такое поведение становится понятным, если учесть, что увеличение  $\epsilon_2$  и  $L$  благоприятствует возбуждению высших типов волн, которые не учитываются в одноволновом приближении.

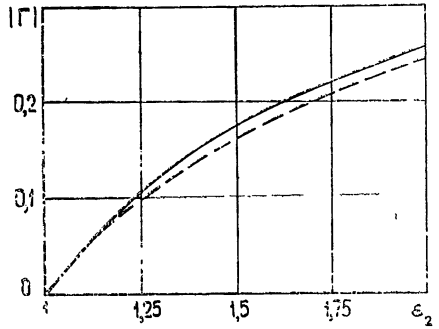


Рис. 4.

Таблица 1

$\theta^\circ$	$75^\circ$	$60^\circ$	$45^\circ$	$30^\circ$
$W = \Psi_1 \Psi'_2 - \Psi_2 \Psi'_1$	1,000000	1,000044	0,999802	0,998826
$ \Gamma $ Статья [2]	0,53	0,49	0,42	0,32
$ \Gamma $ Формула (6)	0,54	0,48	0,36	0,25

Поскольку затруднительно установить аналитически погрешность расчетов  $|\Gamma|$  в рассматриваемых методах, была проведена экспериментальная проверка в 3-сантиметровом диапазоне. Использовался стандартный волновод сечением  $23 \times 10 \text{ мм}^2$  с фторопластовыми ( $\epsilon_2 = 2$ ) вкладышами с конфигурацией рис. 1 а и рис. 1 в. Угол  $\theta$  в обоих случаях равнялся  $60^\circ$ . Результаты измерений в диапазоне частот 7,8—9 ГГц показаны на рис. 5 (сплошная линия — теоретический расчет, крестики — данные эксперимента для схемы рис. 1 а, кружки — данные эксперимента для схемы рис. 1 в).

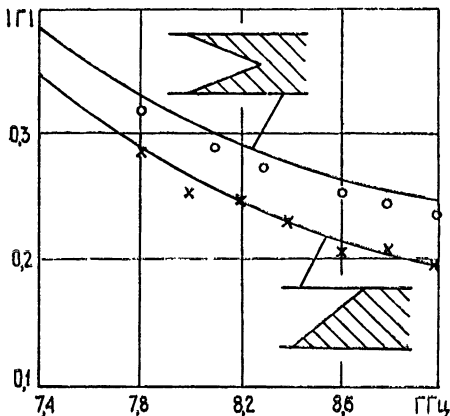


Рис. 5.

Теоретические кривые, построенные на рис. 5, получены из формулы (6). Совпадение теоретических и экспериментальных данных вполне удовлетворительное.

Таким образом, проведенный выше анализ показывает, что одноволновое приближение (в ситуациях, где оно физически оправдано) обеспечивает вполне удовлетворительную точность при расчете отражений от диэлектрического клина в прямоугольном волноводе.

В заключение кратко обсудим границы применимости одноволнового приближения. Определяющим критерием здесь является требование, чтобы волны высших типов не распространялись как на участке волновода с неоднородным заполнением (диэлектрический клин), так и в подводящих волноводах. Выполнение данного требования существенно зависит от симметрии диэлектрического клина относительно оси волновода.

В случае структуры рис. 1 а высокочастотная граница одноволнового приближения определяется появлением ближайшей четной волны высшего типа —  $TE_{20}$ . В случае структур рис. 1 б эта граница определяется появлением ближайшей нечетной волны высшего типа —  $TE_{30}$ , так как на симметричной неоднородности четные волны не возбуждаются.

Что касается количественной оценки критических сечений и частот отсечки волн  $TE_{20}$  и  $TE_{30}$ , то ее можно получить, используя данные, приведенные, например, в работах [8, 9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Y. L. Chow, S. C. Wu, IEEE Trans., MTT-21, № 5, 333 (1973).
2. G. De Jong, W. Offringa, Int. J. Electronics, 34, № 4, 453 (1973).
3. Ю. В. Шаворыкин, Б. Н. Бондаренко, Радиотехника (изд. Харьковского университета), вып. 22, 3 (1972).
4. Б. Ю. Капилевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 4, 577 (1975).
5. T. W. Kao, IEEE Trans., MTT-17, № 8, 639 (1969).
6. Ю. В. Егоров, Частично заполненные прямоугольные волноводы, изд. Сов. радио, М., 1967.
7. W. E. Nord, F. J. Rosenbaum, IEEE Trans., MTT-16, № 4, 228 (1968).
8. М. Н. Бергер, Б. Ю. Капилевич, Прямоугольные волноводы с диэлектриками, изд. Сов. радио, М., 1973.
9. P. H. Vartanian, W. P. Ayres, A. L. Helgesson, IRE Trans., MTT-6, № 2, 215 (1958).

Новосибирский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию  
24 февраля 1975 г.

#### REFLECTION FROM A DIELECTRIC WEDGE IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

*B. Yu. Kapilevich, N. S. Simin*

The methods of numerical calculation of the coefficient of reflection from a dielectric wedge formed by an incline interface with different permittivities in a rectangular waveguide is discussed. The interface is perpendicular to wide walls of the waveguide. The results of calculation and experimental verification in 3 cm wave range are presented for specific wedge configurations.

УДК 621.372.8

## О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ КОЛЬЦЕВОГО ТОКА С НЕОДНОРОДНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ СТРУКТУРОЙ

Г. В. Воскресенский, В. Н. Курдюмов

Рассмотрено переформирование поля кольцевого тока, пролетающего мимо уступа в круглом волноводе. Сопоставлены работа тормозящей силы, действующей на ток со стороны поля излучения, и полная работа над током в кольце. Показано, что соотношение между этими величинами существенно зависит от скорости источника.

В работе [1] определены потери на излучение электронного кольца при пролете вблизи уступа круглого волновода. Простая геометрия неоднородности представляется удобной для более детального рассмотрения взаимодействия движущегося источника с полем дифракционного излучения в волноводе. Интересно, в частности, установить соответствие между различными выражениями для силы реакции излучения, действующей на движущийся в неоднородной структуре нейтральный ток, а также выяснить соотношения энергетического баланса в различных случаях.

Рассматриваемая структура состоит из круглых волноводов с радиусами  $a$  и  $b$ , соединенных фланцем в плоскости  $z = 0$  (см. рис. 1). Источником поля является кольцевой ток, движущийся вдоль оси структуры со скоростью  $v = \beta c$ ; плотность тока и его спектральная амплитуда имеют вид

$$j_{\varphi}(r, t) = I \delta(r - \rho) \delta(z - vt) = \int_{-\infty}^{\infty} j_{\varphi\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

$$j_{\varphi\omega} = \frac{I}{2\pi v} \delta(r - \rho) \exp\left(i \frac{\omega}{v} z\right),$$

где  $I$  — ток в кольце,  $\rho$  — радиус кольца,  $\delta(x)$  — дельта-функция. Полное поле в структуре ищем в виде суммы

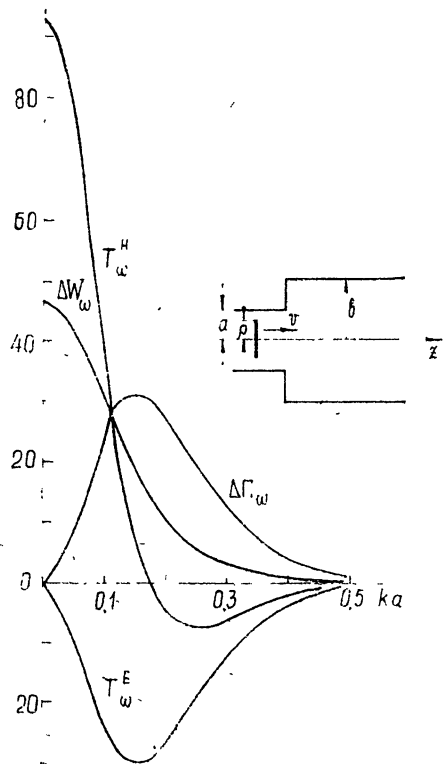


Рис. 1.

$$H(r, t) = H^{(0)}(r, t) + H^{(1)}(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

В качестве  $E^{(0)}$ ,  $H^{(0)}$  принято при  $z < 0$  поле кольцевого тока в регулярном волноводе радиуса  $a$ , при  $z > 0$  — поле источника в волноводе радиуса  $b$ :

$$H_{r\omega}^{(0)} = -\frac{1}{\beta} E_{\varphi\omega}^{(0)} = -\frac{2ik\rho l}{v^2} e^{i\frac{\omega}{v}z} \left\{ \left[ \frac{I_1(\Gamma r) K_1(\Gamma \rho)}{I_1(\Gamma \rho) K_1(\Gamma r)} \right] - I_1(\Gamma r) I_1(\Gamma \rho) \frac{K_1(\Gamma a)}{I_1(\Gamma a)} \right\} \quad (3)$$

при  $\begin{cases} r < \rho \\ r > \rho \end{cases}$  ( $z < 0$ ), здесь  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $\Gamma = \left| \frac{k}{\beta\gamma} \right|$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $I_n(x)$ ,  $K_n(x)$  — модифицированные функции Бесселя.

Спектральные амплитуды рассеянного поля представляются суперпозицией собственных волн регулярного волновода:

$$E_{\varphi\omega}^{(1)} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\mu_n r/a) e^{-ih_n z} \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_1(\mu_n r/b) e^{ig_n z} \end{cases}, \quad H_{r\omega}^{(1)} = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_{\varphi\omega}^{(1)}}{\partial z}, \quad (4)$$

$h_n = \sqrt{k^2 - (\mu_n/a)^2}$ ,  $g_n = \sqrt{k^2 - (\mu_n/b)^2}$ ,  $\mu_n$  — корни уравнения  $J_1(\mu_n) = 0$ .

Сшивание полей в плоскости  $z = 0$  приводит к бесконечной системе уравнений для коэффициентов  $A_n$ :

$$\frac{h_n J_0(\mu_n)}{\mu_n} A_n + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ns} A_s = f_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

где

$$\alpha_{ns} = 4 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \mu_s J_0(\mu_s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(y_m)}{J_0^2(\mu_m)} \frac{g_m}{(y_m^2 - \mu_s^2)(y_m^2 - \mu_n^2)}; \quad (6)$$

$$f_n = \frac{4ik\rho l I_1(\Gamma\rho)}{\beta c^2} \left[ \frac{2}{I_1(\Gamma a)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(y_m)}{J_0^2(\mu_m)} \frac{g_m}{(y_m^2 - \mu_n^2)(\Gamma^2 b^2 + \mu_m^2)} - \frac{kl I_1(\Gamma a)}{\beta} \frac{\Phi}{\Gamma^2 a^2 + \mu_n^2} \right], \quad (7)$$

$$y_m = \frac{a}{b} \mu_m, \quad \Phi = \frac{K_1(\Gamma b)}{I_1(\Gamma b)} - \frac{K_1(\Gamma a)}{I_1(\Gamma a)}.$$

Решение бесконечной системы (5) проводилось методом редукции на ЭВМ. Коэффициенты  $B_n$  определялись при этом по формуле

$$B_n = \frac{J_1(y_n)}{J_0^2(\mu_n)} \left[ 2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\mu_s J_0(\mu_s)}{y_n^2 - \mu_s^2} - i \frac{4Ik\rho}{\beta c^2} \frac{I_1(\Gamma\rho)}{I_1(\Gamma a)} \times \right. \\ \left. \times (\Gamma^2 b^2 + \mu_n^2)^{-1} \right]. \quad (8)$$



Вычислив амплитуды возбуждаемых волноводных гармоник  $A_n$ ,  $B_n$ , определим различные энергетические характеристики рассеянного поля. Полный поток энергии через сечения волноводов  $S_1$  и  $S_2$ , расположенные по обе стороны от неоднородности, за все время и его спектральная плотность выражаются в виде

$$P = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{S_1+S_2} [E^{(1)}(t), H^{(1)}(t)] ds =$$

$$= \pi c \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left( \int_0^a E_{\varphi\omega}^{(1)} H_{r\omega}^{(1)*} r dr - \int_0^b E_{\varphi\omega}^{(1)} H_{r\omega}^{(1)*} r dr \right) = \int_0^{\infty} P_{\omega} d\omega, \quad (9)$$

$$P_{\omega} = \frac{\pi c a^2}{k} \sum_n J_0^2(\nu_n) \left( h_n |A_n|^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 g_n |B_n|^2 \right).$$

В последнем выражении при суммировании учитываются лишь волны, свободно распространяющиеся на данной частоте в волноводах.

Работа, совершаемая за все время пролета над заданным током  $I$ , определяется азимутальной составляющей электрического поля и равна

$$T^E = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V j_{\varphi}(t) E_{\varphi}^{(1)}(t) dV = \frac{2\pi I \rho}{\beta c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\varphi\omega}^{(1)} e^{-i\frac{\omega}{v}z} dz d\omega = \int_0^{\infty} T_{\omega}^E d\omega,$$

$$T_{\omega}^E = \frac{4\pi a^2 I \rho}{c \beta} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n J_1(\nu_n \rho/a) \frac{h_n - \omega/v}{\nu_n^2 + \Gamma^2 a^2} + \right. \quad (10)$$

$$\left. + \left(\frac{b}{a}\right)^2 B_n J_1(\nu_n \rho/b) \frac{g_n + \omega/v}{\nu_n^2 + \Gamma^2 b^2} \right].$$

Поле излучения обуславливает действие продольной силы на движущийся кольцевой ток. Полная работа продольной силы на всем пути движения и ее спектральная плотность выражаются в виде

$$T^H = -\frac{2\pi I \rho}{c} \int_{-\infty}^{\infty} H_r^{(1)} \Big|_{r=\rho} \Big|_{t=z/v} dz = -\frac{2\pi I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega r}^{(1)} e^{-i\frac{\omega}{v}z} dz d\omega = \int_0^{\infty} T_{\omega}^H d\omega,$$

$$T_{\omega}^H = -\frac{4\pi \rho a^2}{\omega} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n J_1(\nu_n \rho/a) h_n \frac{h_n - \omega/v}{\nu_n^2 + \Gamma^2 a^2} - \right. \quad (11)$$

$$\left. - \left(\frac{b}{a}\right)^2 B_n J_1(\nu_n \rho/b) g_n \frac{g_n + \omega/v}{\nu_n^2 + \Gamma^2 b^2} \right].$$

Вдали от нерегулярности (плоскости сочленения волноводов) источник движется в круглой однородной трубе. Полный поток энергии через сечение  $S$  трубы радиуса  $a$ , связанный с собственным полем источника, равен

$$\Pi(a) = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_S [E^{(0)}(t) H^{(0)}(t)] ds = \int_0^{\infty} \Pi_{\omega}(a) d\omega,$$

$$\Pi_{\omega}(a) = \frac{4\pi \rho^2 I^2 \gamma^2}{\beta c^3} \left\{ 2\Gamma \rho I_1^2(\Gamma \rho) K_0(\Gamma \rho) K_1(\Gamma \rho) - (\Gamma \rho I_1(\Gamma \rho))^2 \right\} \times \quad (12)$$

$$\times [K_1^2(\Gamma\rho) - K_0^2(\Gamma\rho)] + 2\Gamma\rho \frac{K_1(\Gamma a)}{I_1(\Gamma a)} I_0(\Gamma\rho) I_1(\Gamma\rho) - 2 \frac{K_1(\Gamma a)}{I_1(\Gamma a)} I_1^2(\Gamma\rho) \Big\}.$$

Полная энергия собственного поля движущегося кольцевого тока и ее спектральная плотность равны

$$W(a) = \frac{c}{8\pi} \int_V (|E^{(0)}(t)|^2 + |H^{(0)}(t)|^2) dV = \int_0^\infty W_\omega(a) d\omega,$$

$$W_\omega(a) = \frac{4\pi I^2 \gamma^2 \beta \rho^2}{c^3} \left\{ \Gamma\rho [I_1(\Gamma\rho) K_0(\Gamma\rho) - K_1(\Gamma\rho) I_0(\Gamma\rho)] + \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) \times \right.$$

$$\times K_1(\Gamma\rho) I_1(\Gamma\rho) + 2\Gamma\rho I_1(\Gamma\rho) I_0(\Gamma\rho) \frac{K_1(\Gamma a)}{I_1(\Gamma a)} - \frac{\Gamma^2}{k^2} \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \times$$

$$\left. \times I_1^2(\Gamma\rho) \frac{K_1(\Gamma a)}{I_1(\Gamma a)} - \frac{I_1^2(\Gamma\rho)}{I_1^2(\Gamma a)} \right\}. \quad (13)$$

Физический смысл имеют лишь разности

$$\Delta\Pi = \Pi(b) - \Pi(a), \quad \Delta W = W(b) - W(a), \quad (14)$$

характеризующие изменение энергии собственного поля токового кольца при скачкообразном изменении радиуса волновода. Спектральные плотности этих разностных величин равны соответственно

$$\Delta\Pi_\omega = - \frac{4\pi I^2 \rho^2 I_1^2(\Gamma\rho)}{\beta c^3} \gamma^2 \left\{ \frac{1}{I_1^2(\Gamma b)} - \frac{1}{I_1^2(\Gamma a)} + 2\Phi \left[ 1 - \Gamma\rho \frac{I_0(\Gamma\rho)}{I_1(\Gamma\rho)} \right] \right\},$$

$$\Delta W_\omega = - \frac{4\pi I^2 \rho^2 I_1^2(\Gamma\rho)}{c^3} \gamma^2 \beta \left\{ \frac{1}{I_1^2(\Gamma b)} - \frac{1}{I_1^2(\Gamma a)} + \right.$$

$$\left. + \Phi \left[ 1 + \frac{1}{\beta^2} - 2\Gamma\rho \frac{I_0(\Gamma\rho)}{I_1(\Gamma\rho)} \right] \right\}. \quad (15)$$

Видно, что эти выражения совпадают лишь при ультрарелятивистской скорости источника ( $\beta = 1$ ). В то же время интегральные величины  $\Delta\Pi$  и  $\Delta W$  равны при всех скоростях [1]. Легко убедиться также, что разности  $\Delta\Pi$  и  $\Delta W$  пропорциональны  $\gamma^3$  и не зависят явно от скорости источника.

С помощью теоремы Пойнтинга можно связать [1] спектральные амплитуды потоков энергии излучения в волноводы и работы поля излучения над током:

$$T_\omega^E = - (P_\omega + \Delta\Pi_\omega), \quad (16)$$

аналогичное равенство справедливо и для интегральных величин. На малых частотах, когда потоки энергии излучения в волноводы отсутствуют ( $P_\omega = 0$ ), работа поля над кольцевым током определяется переформированием квазистатического собственного поля из-за изменения сечения трубы.

Интересно установить связь между полной работой поля излучения над током  $T^E$  и работой силы реакции излучения  $T^H$ . При движении источника в однородной структуре, сопровождающемся потерей энергии на возбуждение электромагнитных волн, например, при движении в волноводе со стенками конечной проводимости [2], или при излуече-

нии Вавилова—Черенкова в однородной среде [3],  $T^E_\omega = T^H_\omega$ , причем сила реакции излучения имеет тормозящий характер. В случае пролета кольцевого тока возле волноводной неоднородности аналитические выражения (10), (11) для спектральных плотностей  $T^E_\omega$  и  $T^H_\omega$  различны и без проведения расчета не позволяют судить о соотношении этих величин.

Численный анализ состоял в решении системы уравнений (4) и определении всех введенных выше характеристик поля для различных значений  $a/b$ ,  $\rho/a$  и  $\beta$ . Изложим сначала результаты для случая  $\beta > 0$  (влет тока из узкого волновода в широкий); они качественно различаются для малых ( $\beta \ll 1$ ) и релятивистских ( $\gamma \gg 1$ ) скоростей источника.

При  $\beta \ll 1$  верхняя граница спектра возбуждаемых частот определяется равенством  $(ka)_{\text{гр}} \approx \beta/(1 - \rho/a)$  и, таким образом, поле имеет квазистационарный характер. Излучение в волноводы начинается при значении  $ka = \mu_1 a/b$  и в этом случае практически отсутствует. На рис. 1 приведены типичные для квазистационарного случая спектральные распределения величин  $T^E_\omega$ ,  $T^H_\omega$ ,  $\Delta W_\omega$ ,  $\Delta \Pi_\omega$  (все величины нормированы на  $I^2 \rho^4 \gamma^3 / c^3 a^2$ ,  $a/b = 0,5$ ,  $\rho/a = 0,4$ ) при  $\beta = 0,1$ , а в табл. 1 даны значения соответствующих интегральных величин при разных значениях радиуса кольцевого тока. Для других значений  $\beta$  при условии квазистационарности спектральные распределения могут быть получены линейным сжатием масштаба по оси абсцисс и растяжением по оси ординат в  $\beta$  раз; интегральные величины при этом не меняются.

Таблица интегральных характеристик взаимодействия кольцевого тока с неоднородной структурой

$\rho/a$		0,1	0,2	0,4	0,6
$\beta = 0,1$	$P$	0	0	0	0
	$T^E$	-6,933	-6,983	-7,396	-8,261
	$T^H$	2,157	8,044	7,171	7,591
	$\Delta \Pi$	6,919	6,982	7,396	8,260
$\gamma = 5,0$	$P$	1,903	1,960	2,224	2,833
	$T^E$	-8,814	-8,960	-9,622	-11,088
	$T^H$	-8,318	-8,380	-9,028	-10,434
	$\Delta \Pi$	6,910	6,999	7,396	8,256

Примечание Все величины нормированы на  $\frac{I^2 \gamma^3 \rho^4}{c^2 a^2}$ ;  $\frac{a}{b} = 0,5$ .

Из рис. 1 видно, что величины  $T^E_\omega$  и  $T^H_\omega$  существенно различаются. В частности,  $T^E_\omega$  положительна на малых частотах и изменяет знак с ростом частоты. Интегральные величины  $T^E$  и  $T^H$  в квазистационарном случае практически совпадают по величине и отличаются по знаку. Заметим, что некоторую аналогию этому можно найти при рас-

смотрении движения рамки с током в неоднородном магнитном поле [4]. В этом случае механическая энергия, определяемая работой сил, действующих на рамку с фиксированным током, равна по величине и отличается знаком от электрической энергии, определяемой работой наводимого в рамке электрического поля над электронами проводимости.

Таким образом, при пролете заданного кольцевого тока из узкого волновода в широкий на ток действует ускоряющая продольная сила, обусловленная притяжением тока, наведенного на торцевой стенке. В то же время при переходе в широкий волновод собственная энергия кольцевого тока возрастает, чему соответствует отрицательный знак полной работы над током  $T^E$ .

В случае, когда верхняя граница спектра возбуждаемых частот превышает низшую критическую частоту широкого волновода, появляется поток энергии вдоль структуры и поле перестает быть квазистационарным. С ростом скорости источника изменяется спектральное распределение работы силы реакции излучения  $T_\omega^H$ : низкочастотная положительная ветвь кривой понижается, а отрицательный участок кривой существенно расширяется. Величина  $T^H$  при некотором значении  $\beta$ , зависящем от отношения радиусов волноводов, обращается в нуль, а затем меняет знак, т. е. продольная сила реакции излучения становится в основном тормозящей.

На рис. 2 приведены спектральные распределения величин  $T_\omega^H$ ,  $T_\omega^E$ ,  $P_\omega$ ,  $\Delta\Pi_\omega$ , взятые, в отличие от кривых на рис. 1, при  $\beta = 0,75$ . На кривых  $T_\omega^H$ ,  $T_\omega^E$  и  $P_\omega$  видны характерные изломы, отвечающие появлению в спектре излучения новых свободно распространяющихся волноводных волн.

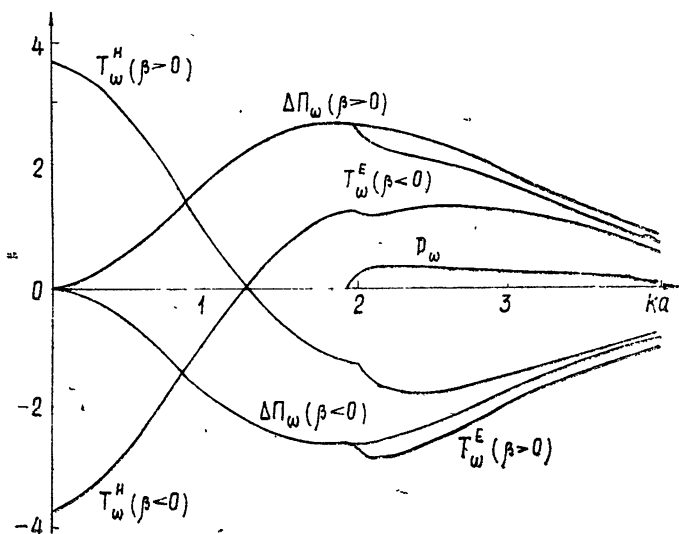


Рис. 2.

Для ультрарелятивистских энергий кольцевого тока ( $\gamma \gg 1$ ) спектр возбуждаемых частот расширяется пропорционально  $\gamma$ . При этом спектральные распределения  $T_\omega^E$  и  $T_\omega^H$  становятся довольно близкими всюду, кроме области малых частот, где они различаются даже знаком (см. рис. 3,  $\gamma = 5$ ,  $a/b$ ,  $\rho/a$  — прежние). Таким образом, для кольцевого тока, движущегося с релятивистской скоростью, работа силы реакции

излучения отрицательна и близка по величине к полной работе поля излучения над током (табл. 1).

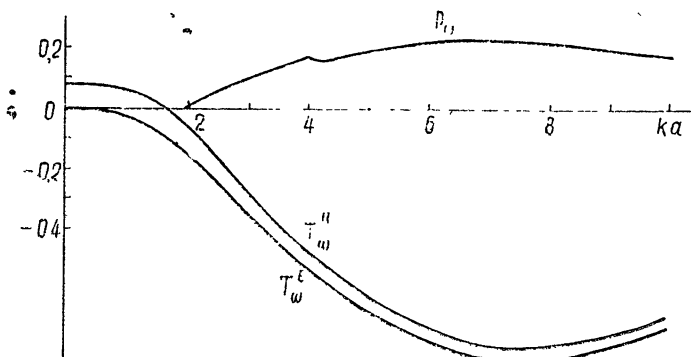


Рис. 3.

При изменении знака скорости (при пролете из широкого волновода в узкий) характеристики излучения могут быть получены с помощью соотношений:

$$\Delta\Pi_{\omega}(-\beta) = -\Delta\Pi_{\omega}(\beta); \quad (17)$$

$$P_{\omega}(-\beta) = P_{\omega}(\beta). \quad (18)$$

Смысл соотношений (17) очевиден: собственная энергия кольцевого тока в широком волноводе больше. Равенство суммарного потока излучения для противоположных направлений пролета хорошо выполнялось во всех вариантах расчета; при этом распределение излучения по волноводам и по отдельным собственным волнам существенно менялось при изменении знака скорости.

Из соотношений (16)–(18) вытекает следующее равенство для спектральных составляющих работы поля излучения над током:

$$T_{\omega}^E(\beta) + T_{\omega}^E(-\beta) = -2P_{\omega}(\beta). \quad (19)$$

Как следует из результатов расчета, аналогичное равенство справедливо и для спектральных составляющих работы продольной силы реакции излучения:

$$T_{\omega}^H(\beta) + T_{\omega}^H(-\beta) = -2P_{\omega}(\beta). \quad (20)$$

Приведенные соотношения позволяют, зная решение для  $\beta > 0$ , определить все характеристики излучения и для обратного направления движения источника.

Заметим, что, построив с помощью выражений (8), (10) график  $F(\omega) = T_{\omega}^E + P_{\omega}$ , мы получим спектральную зависимость  $\Delta\Pi_{\omega} = -F(\omega)$ , которая имеет замкнутое аналитическое выражение (15) и описывается гладкой кривой. Аналогично график величины  $F(\omega) = T_{\omega}^H + P_{\omega}$  представляет собой гладкую кривую, однако физический смысл и возможность описания ее аналитической зависимостью нам неизвестны.

В заключение отметим различную степень сходимости сумм в выражениях (10) и (11) для  $T_{\omega}^E$  и  $T_{\omega}^H$ . При больших значениях индекса

справедлива асимптотическая оценка  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n| \sim n^{-3/2}$ , откуда для асимптотического поведения членов ряда имеем:

$$\text{при } \rho/a \approx 1 - T_{\omega n}^E \sim \frac{1}{n^3}, \quad T_{\omega n}^H \sim \frac{1}{n^2} \quad (n \rightarrow \infty), \quad (21)$$

$$\text{при } \rho/a \ll 1 - T_{\omega n}^E \sim \frac{1}{n^{3/2}}, \quad T_{\omega n}^H \sim \frac{1}{n^{1/2}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Таким образом в предельном случае  $\rho \rightarrow 0$  сходимость сумм ухудшается настолько, что выражение для работы продольной силы реакции излучения не обладает абсолютной сходимостью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Воскресенский, В. Н. Курдюмов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 778 (1971).
2. Г. В. Воскресенский, В. Н. Курдюмов, М. Л. Левин, Труды РТИ, № 11, Теория и техника ускорителей, 1972, стр. 192.
3. А. И. Морозов, ЖЭТФ, 31, № 4, 1079 (1956).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

Поступила в редакцию  
12 августа 1974 г.

#### THE CHARACTERISTICS OF INTERACTION BETWEEN MOVING RING CURRENT AND INHOMOGENEOUS WAVEGUIDE STRUCTURE

*G. V. Voskresensky, V. N. Kurdyumov*

The transformation of the field of a ring current passing near a step discontinuity in a circular waveguide is considered. The work of the retarding force affecting the current on the part of the radiation field and the full work at the current in the ring are compared. It is shown that the relation between these values depends essentially on the source velocity.

УДК 538.561

## ДИФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ МОДУЛИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ВБЛИЗИ ТОНКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ЛЕНТЫ

*Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин, А. Ю. Титаренко*

Получено строгое решение задачи о дифракционном излучении плоского модулированного электронного пучка, движущегося вблизи металлической ленты. Решение найдено в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно трансформант Фурье поля излучения. В длинноволновом случае проведено аналитическое исследование решения методом последовательных приближений. При произвольных ширине ленты, скорости и частоте модуляции электронного пучка решение найдено численно. Изучены энергетические характеристики и построены диаграммы направленности поля излучения в дальней зоне

Эффект дифракционного излучения при движении заряженных частиц вблизи проводящих тел представляет интерес в связи с рядом возможных приложений. Основные из них — это использование дифракционного излучения в микроволновых генераторах и определение характеристик движущихся зарядов по их излучению. Поэтому в последнее время большое внимание было уделено исследованию дифракционного излучения зарядов при их движении вблизи различных неоднородностей: полуплоскости, открытого конца плоского волновода, периодических структур [1, 2].

Эффект дифракционного излучения находит практическое применение в том случае, когда длина волны соизмерима с характерным размером неоднородности. Поэтому соответствующие электродинамические задачи должны базироваться на строгих методах решения. Дифракционное излучение зарядов, движущихся вблизи периодических структур бесконечной протяженности, достаточно полно исследовано с помощью методов задачи Римана—Гильберта и Винера—Хопфа—Фока. С другой стороны, эффект дифракционного излучения от одиночных тел изучен совершенно недостаточно, в связи с чем определенный интерес представляет решение задачи об излучении модулированного электронного пучка, движущегося вблизи металлической ленты. Строгое решение задачи дает возможность получить информацию, позволяющую использовать проводящую ленту в качестве пробного тела для измерения фазовой скорости в системах, поддерживающих медленные волны. Представляет интерес также возможность расчета потерь энергии заряженной частицей, когда она пролетает вблизи металлической ленты.

Пусть вначале идеализированный неограниченный плоский модулированный электронный пучок движется параллельно плоскости металлической ленты. Мгновенное значение плотности заряда монохроматического электронного потока, который движется вдоль оси  $Oy$  с постоянной скоростью  $v = j\beta c$ , определяется выражением

$$\rho = \rho_0 \delta(z) \exp[i(ky - \omega t)]. \quad (1)$$

Здесь  $\rho_0$  — амплитуда модуляции пучка,  $\omega$  — частота модуляции,  $c$  — скорость света в свободном пространстве,  $k^2 = \omega^2/c^2$ ,  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака,  $i, j, k$  — орты декартовой системы координат. В плоскости  $z = -a$  помещен тонкий металлический экран, представляющий собой бесконечно длинную вдоль оси  $Ox$  ленту шириной  $2d$ , расположенную таким образом, что плоскость  $y = 0$  проходит по середине ленты.

Собственное поле модулированного электронного пучка (1) в свободном пространстве, как известно [3], представляет собой неоднородную плоскую волну

$$H_0 = i2\pi\rho_0\beta \frac{d|z|}{dz} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0|z| + i\frac{k_0}{\beta} y\right),$$

$$E_0 = 2\pi\rho_0 \left(-ji\sqrt{1-\beta^2} + k \frac{d|z|}{dz}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0|z| + i\frac{k_0}{\beta} y\right),$$

где  $k_0 = \omega/c$  — волновое число, а зависимость от времени для простоты опущена. Решение задачи об излучении сводится к задаче дифракции неоднородной плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны, падающей под комплексным углом, на металлической ленте. Поле излучения, в силу однородности рассматриваемой структуры в направлении оси  $Ox$ , линейно поляризовано (вектор  $H$  параллелен ребру ленты). Излучение происходит на частоте, совпадающей с частотой модуляции электронного пучка.

Представим электромагнитное поле во всем пространстве в виде суперпозиции поля неоднородной плоской волны электронного пучка и поля излучения, записанного в виде разложения в интеграл Фурье:

$$H = \begin{cases} H_0 + i \int_{-\infty}^{\infty} a(\zeta) \exp\{i[\sqrt{1-\zeta^2} k_0(z+a) + \zeta k_0 y]\} d\zeta & (z > -a) \\ H_0 + i \int_{-\infty}^{\infty} b(\zeta) \exp\{i[-\sqrt{1-\zeta^2} k_0(z+a) + \zeta k_0 y]\} d\zeta & (z < -a) \end{cases} \quad (2)$$

Из граничных условий для тангенциальных компонент электромагнитного поля в плоскости  $z = -a$  (тангенциальные компоненты электрического поля непрерывны во всей плоскости и исчезают на металле, а тангенциальные компоненты магнитного поля непрерывны на части плоскости, свободной от металла) следует соотношение, связывающее трансформанты Фурье поля излучения в областях  $z > -a$  и  $z < -a$  —  $-a(\zeta) = -b(\zeta)$  — и парные интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\zeta) \exp(i\zeta k_0 y) d\zeta = 0, \quad d < |y| < \infty, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2} \exp(i\zeta k_0 y) d\zeta = -i2\pi\rho_0 \sqrt{1-\beta^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 a + i\frac{k_0}{\beta} y\right), \quad |y| \leq d.$$

Хорошо известно, что решение парных интегральных уравнений (3) в замкнутой форме получить не удастся, а для численного решения они непригодны из-за медленного убывания функции  $a(\zeta)$  при  $|\zeta| \rightarrow \infty$ .



Действительно, из условия на ребре следует, что трансформанты Фурье поля излучения при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  убывают, как  $|\zeta|^{-3/2}$  [4].

Решение парных интегральных уравнений (3) может быть сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода [5, 6]:

$$a(\zeta) = -2\pi\rho_0 \sqrt{1-\beta^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 a\right) K\left(\frac{1}{\beta}, \zeta\right) + \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) [|\xi| + i\sqrt{1-\xi^2}] K(\xi, \zeta) d\xi, \quad (4)$$

где

$$K(\xi, \zeta) = \frac{k_0 d}{2(\zeta - \xi)} [J_0(k_0 d \xi) J_1(k_0 d \zeta) - J_1(k_0 d \xi) J_0(k_0 d \zeta)].$$

Уравнение (4) удобно для аналитического исследования в случае, когда ширина ленты мала ( $k_0 d \ll 1$ ). Решая его методом последовательных приближений, получим

$$a^{(0)}(\zeta) = -2\pi\rho_0 \sqrt{1-\beta^2} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 a\right) K\left(\frac{1}{\beta}, \zeta\right) \quad (5)$$

с погрешностью, не превышающей  $O[(k_0 d)^3]$ .

Введем коэффициент излучения, определив его как отношение полной усредненной по времени мощности излучения с единицы длины ленты к полной усредненной по времени мощности электронного пучка единичной ширины, переносимой через плоскость, перпендикулярную направлению движения. Полная усредненная по времени мощность дифракционного излучения в полупространство  $z > -a$

$$F = \frac{c}{8\pi} \frac{2\pi}{k_0} \int_{-1}^1 |a(\zeta)|^2 \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta.$$

Полная усредненная по времени мощность электромагнитного поля электронного пучка, переносимая через плоскость, перпендикулярную направлению движения,

$$F_0 = \frac{c}{8\pi} \frac{(2\pi\rho_0)^2}{k_0} \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Коэффициент излучения определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{2F}{F_0} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\pi\rho_0^2\beta^2} \int_{-1}^1 |a(\zeta)|^2 \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta. \quad (6)$$

Найдем коэффициент излучения в длинноволновом приближении. Используя (6) и (5) с точностью до величин порядка  $O[(k_0 d)^5]$ , получаем

$$\sigma = \pi(k_0 d)^2 \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\beta^2} \exp\left(-2\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 a\right) \left[ \pi \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) J_1^2\left(\frac{k_0 d}{\beta}\right) - k_0 d J_1\left(\frac{k_0 d}{\beta}\right) \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2} \zeta}{\left(\zeta - \frac{1}{\beta}\right)^2} d\zeta + \left(\frac{k_0 d}{2}\right)^2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2} \zeta^2}{\left(\zeta - \frac{1}{\beta}\right)^2} d\zeta \right]. \quad (7)$$

Заметим, что норма интегрального оператора уравнения (4) зависит только от параметра  $k_0 d$ , поэтому величина отношения  $k_0 d / \beta$  в (7) может быть произвольной. Коэффициент излучения при малой ширине ленты  $k_0 d \ll \beta$  пропорционален  $(k_0 d)^4$ . Если же величина отношения  $k_0 d / \beta$  порядка единицы, в (7) можно пренебречь величинами  $O[k_0 d^3]$ :

$$\sigma = \pi^2 (k_0 d)^2 \frac{(1 - \beta^2)(1 - \sqrt{1 - \beta^2})}{\beta^2} \exp\left(-2 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} k_0 a\right) J_1^2\left(\frac{k_0 d}{\beta}\right). \quad (8)$$

Оказывается, что при определенном соотношении между шириной ленты, частотой модуляции и скоростью электронного пучка излучение может практически полностью отсутствовать. Такая ситуация возникает, когда величина отношения  $k_0 d / \beta$  совпадает с нулями функции  $J_1(x)$ .

Получим оценку для энергии вспышки дифракционного излучения при пролете заряженной нити вблизи тонкой металлической ленты. Будем считать, что во времени излучение представляет импульс длительностью

$$\Delta t \approx \frac{1}{\omega_{\max}}, \quad \text{где } \omega_{\max} \approx \frac{c}{2\gamma a}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta},$$

а мощность излучения определяется интегралом по частоте от мощности излучения на каждой из частот. В таком приближении мощность излучения в импульсе

$$F_{\text{нить}} = \frac{1}{2\pi\beta c} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(k_0 d) F_0 f(\omega) d\omega,$$

где  $f(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_{\max} \\ 0, & |\omega| \geq \omega_{\max} \end{cases}$ , а множитель перед интегралом учитывает раз-

личие в величинах спектральной плотности поля заряженной нити и поля модулированного электронного пучка. На размер ленты, величину прицельного параметра и скорость нити наложим ограничение  $d \ll 2\gamma a$ , следующее из условий применимости формулы (8). Несложные вычисления позволяют получить оценку

$$F_{\text{нить}} \leq \frac{3}{128} \pi \rho_0^2 \left(\frac{d}{a}\right)^4 \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta^2)^{3/2}},$$

откуда энергия вспышки дифракционного излучения

$$W_{\text{нить}} \leq \frac{3}{64} \frac{\pi \rho_0^2 d^4}{c a^3} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 - \beta^2)^2}.$$

При  $\beta \rightarrow 1$  спектр излучаемых частот существенно расширяется и формула (8) для оценки энергии излучения дает неверные результаты. Поэтому полученными оценками для величин  $F_{\text{нить}}$  и  $W_{\text{нить}}$  при  $\beta \rightarrow 1$  пользоваться нельзя. Однако из простых физических соображений и интегрального уравнения (4) следует, что при  $\beta \rightarrow 1$  энергия излучения стремится к нулю.

Для численного решения интегрального уравнения (4) применен метод последовательных уточнений [7], который позволяет при любых параметрах задачи получить решение с любой степенью точности.

На рис. 1 показана зависимость коэффициента излучения от частоты модуляции электронного пучка ( $1 - \beta = 0,1$ ;  $2 - \beta = 0,25$ ;  $3 - \beta =$

= 0,75). При малых значениях параметра  $k_0 d$  характер поведения частотной зависимости коэффициента излучения хорошо описывается формулами (7), (8).

Для того, чтобы определить поле излучения в дальней зоне, воспользуемся методом стационарной фазы и заменим интегралы в (2) их асимптотическими значениями при большом параметре  $k_0 r$ , где  $r$  — расстояние от точки наблюдения до начала координат. Диаграмма направленности поля излучения в полупространстве  $z > -a$  определяется формулой

$$N(\varphi) = \frac{\sin(\varphi |a(\cos \varphi)|)}{\max_{0 < \varphi < \pi} \{ \sin \varphi |a(\cos \varphi)| \}}.$$

Относительно плоскости  $z = -a$  поле излучения симметрично. На рис. 2 приведен ряд диаграмм направленности излучения в полупространстве  $z > -a$ , возникающего при движении электронного пучка над металлической лентой ( $\beta = 0,5$ ; а) —  $k_0 d = 2,0$ , б) —  $k_0 d = 4,0$ ). Основная часть мощности излучается под некоторым углом к направлению движения пучка. С увеличением ширины ленты растет число лепестков диаграммы направленности.

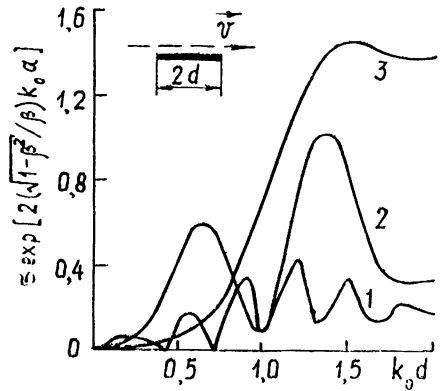


Рис. 1.

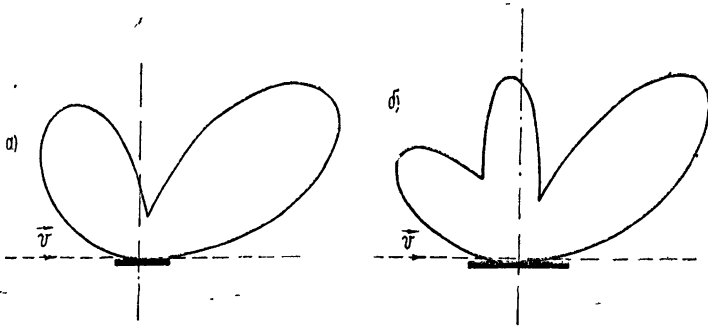


Рис. 2.

Рассмотрим теперь дифракционное излучение электронного пучка, движущегося вблизи ребра металлической ленты по нормали к ее плоскости. Электромагнитное поле во всем пространстве представим в виде (2), где  $H_0$  — собственное поле пучка, движущегося в направлении оси  $Oz$  на расстоянии  $b$  от плоскости  $xOz$ :

$$H_0 = i2\pi\rho_0\beta \frac{d|y+b|}{dy} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 |y+b| + i\frac{k_0}{\beta} z\right),$$

$$E_0 = 2\pi\rho_0 \left[ -j \frac{d|y+b|}{dy} + ki \sqrt{1-\beta^2} \right] \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 |y+b| + i\frac{k_0}{\beta} z\right).$$

Металлическая лента расположена так же, как и в первой задаче. Аналогично предыдущему случаю можно показать, что трансформанты

Фурье поля излучения удовлетворяют интегральному уравнению Фредгольма второго рода следующего вида:

$$a(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) K(\xi, \zeta) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) [|\xi| + i\sqrt{1-\xi^2}] K(\xi, \zeta) d\xi, \quad (9)$$

где

$$f(\xi) = 2\rho_0\beta^2 \frac{\xi}{1-\beta^2+\beta^2\xi^2} \exp(ik_0b\xi).$$

Решение уравнения (9) найдено численно методом последовательных уточнений. На рис. 3 показаны диаграммы направленности поля излучения для металлических лент разной ширины ( $\beta = 0,5$ ; а) —  $k_0d = 2,0$  б) —  $k_0d = 4,0$ ). Плоский электронный пучок разбивает все пространство на две области. Основная часть мощности излучается в область, где расположена металлическая лента. Излучение симметрично относительно плоскости ленты и направлено под некоторым углом к ней. По сравнению со случаем, когда пучок движется параллельно плоскости ленты, диаграмма направленности менее изрезана и ее лепестки выражены слабее.

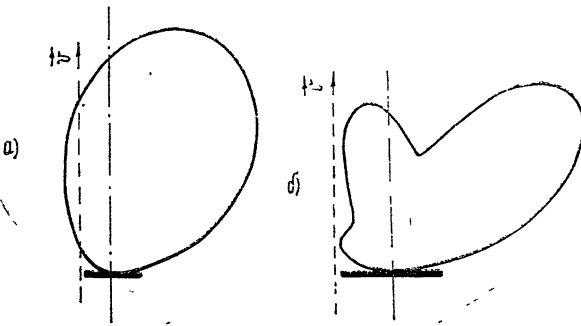


Рис. 3.

Зависимость коэффициента излучения от скорости электронного пучка и частоты модуляции показана на рис. 4 (1 —  $\beta = 0,5$ ; 2 —  $\beta = 0,75$ ). Максимум интенсивности дифракционного излучения наблюдается при  $k_0d \approx 1,3$ .

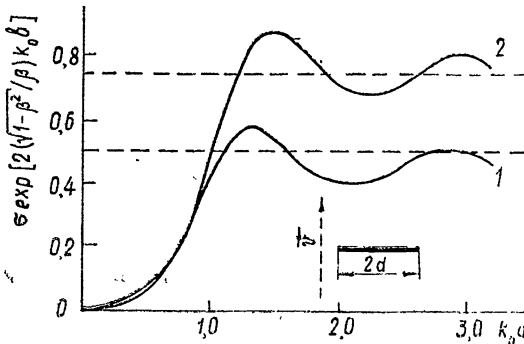


Рис. 4.

С увеличением ширины металлической ленты ослабевает влияние на излучения ребра ленты, удаленного от пучка. Поэтому коэффи-

цент излучения асимптотически стремится к коэффициенту излучения при движении модулированного электронного пучка вблизи ребра металлической полуплоскости.

Этот предельный случай можно изучить с помощью метода Винера—Хопфа—Фока. Трансформанта Фурье поля излучения теперь определяется следующим выражением:

$$a(\xi) = \frac{i \rho_0 \beta^{3/2} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 b\right)}{\sqrt{\beta + i\sqrt{1-\beta^2}} (\beta\xi - i\sqrt{1-\beta^2}) \sqrt{1-\xi}},$$

а коэффициент излучения—формулой

$$\sigma = \beta \cdot \exp\left(-2 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} k_0 b\right)$$

(на рис. 4 показан пунктирными прямыми). Диаграмма направленности поля излучения может быть найдена по формуле

$$N(\varphi) = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \varphi}} \begin{cases} 1, & \beta < \frac{1}{2} \\ 2\sqrt{\beta(1-\beta)}, & \beta > \frac{1}{2} \end{cases},$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 88, № 2, 209 (1966).
2. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 94, № 3, 377 (1968).
3. M. Dapos, J. Appl. Phys., 26, № 1, 2 (1955).
4. X. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
5. В. П. Шестопалов, Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. ХГУ; Харьков, 1971.
6. В. Г. Сологуб, Журн. вычисл. матем и матем. физики, 11, № 4, 337 (1971).
7. В. П. Шестопалов, Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин, Доповіді, АН УССР, сер. А, № 4, 353 (1973).

Институт радиопизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
19 августа 1974 г.

#### DIFFRACTION RADIATION OF A MODULATED ELECTRON BEAM MOVING NEAR A THIN METAL STRIP

*L. N. Litvinenko, S. L. Prosvirnin, A. Yu. Titarenko*

A strict solution of the problem of diffraction radiation of a plane modulated electron beam moving near a metal strip is obtained. The solution is found as the Fredholm integral equation of the second kind (with respect to Fourier transformants radiation field). In the long-wave case an analytical investigation of the solution is made by the successive approximation method. For arbitrary tape width, velocity and modulation frequency of the electron beam, the solution is found numerically. The energetic characteristics are studied and the radiation pattern of the field in a far zone is built.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 537.525

**ИССЛЕДОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
В ТЛЕЮЩЕМ РАЗРЯДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПОЛЫМ  
КАТОДОМ В ГЕЛИИ**

*В. М. Сорокина, В. А. Тиманюк, В. М. Ткаченко*

Существование стабильных колебаний разрядного тока, потенциала пространства и интенсивности свечения в линейном тлеющем разряде известно давно [1]. Характеристики этих колебаний разнообразны и сложным образом зависят от конструкции разрядных трубок и режима разряда. Природа их, по-видимому, может быть различной и связывается с поверхностными зарядами, возникающими на стенках трубки, ограничивающей канал разряда [2], существованием страт в положительном столбе разряда [3] и др.

Колебания в разряде с полым катодом до настоящего времени практически не изучались (нам известны только две работы [4-5], в которых описаны колебания, наблюдавшиеся в разряде с полым катодом при наличии магнитного поля). Но при зондовых и микроволновых измерениях параметров плазмы в разряде с цилиндрическим полым катодом нами неоднократно отмечались интенсивные низкочастотные колебания в разряде и без магнитного поля. По сообщению Ю. М. Кагана подобного рода колебания наблюдались и в их экспериментах, но систематического исследования характеристик колебаний не производилось. Поэтому целью настоящей работы является изучение основных закономерностей развития и определение условий существования регулярных низкочастотных колебаний в разряде с цилиндрическим полым катодом.

Исследование проведено в разряде с охлаждаемым проточной водой никелевым цилиндрическим полым катодом диаметром 30 мм и длиной 200 мм. Конструкция разрядной трубки аналогична описанной в работе [6]. Разряд осуществлялся при непрерывной прокачке через трубку спектрально чистого гелия. Колебания напряжения горения разряда регистрировались непосредственно между катодом и анодом разряда с помощью осциллографа С1-16 и анализатора спектра С4-8.

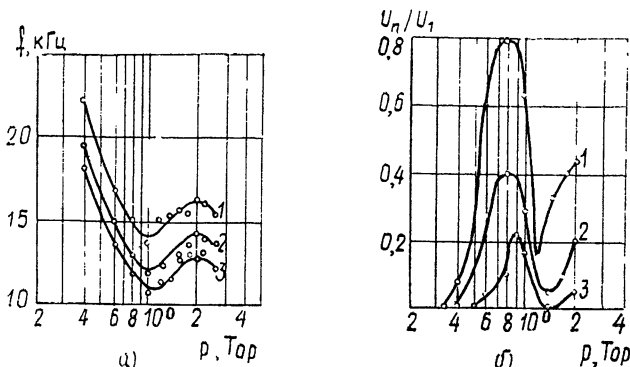


Рис. 1.

На рис 1 приведены зависимости от давления гелия: (а) — частоты основной гармоники колебаний при различных разрядных токах: 1 —  $I = 250$  мА, 2 —  $I = 150$  мА, 3 —  $I = 50$  мА и (б) — относительной амплитуды второй (1), третьей (2) и четвертой (3) гармоник. Регулярные колебания в разряде с цилиндрическим полым

катодом существуют в довольно узком диапазоне давлений, и их форма сильно меняется с изменением давления газа. При давлении меньше  $0,3 \text{ Тор}$  колебания отсутствуют, при давлении около  $0,3—0,4 \text{ Тор}$  появляются стабильные колебания практически синусоидальной формы. С ростом давления спектр колебаний усложняется, а частота основной гармоники уменьшается. При давлениях выше  $3 \text{ Тор}$  колебания становятся нестабильными, а затем переходят в шумовые. Как видно из рисунка, зависимость частоты и формы колебаний от давления гелия немонотонны и обнаруживают некоторую корреляцию с изменением напряжения горения разряда [7].

На рис. 2 приведены зависимости частоты (а) и амплитуды колебаний (б) от силы разрядного тока при нескольких значениях давления газа (1 —  $p = 0,4 \text{ Тор}$ , 2 —  $0,6 \text{ Тор}$ , 3 —  $0,8 \text{ Тор}$ , 4 —  $1,2 \text{ Тор}$ , 5 —  $1,6 \text{ Тор}$ , 6 —  $2 \text{ Тор}$ ). Видно, что частота колебаний растет с увеличением разрядного тока довольно слабо. Амплитуда колебаний растет с увеличением разрядного тока нелинейно и достигает при давлении  $0,6 \text{ Тор}$  и токе разряда  $300 \text{ мА}$  значения  $10 \text{ В}$  (напряжение горения разряда при этих условиях равно  $180 \text{ В}$ ). От давления амплитуда колебаний зависит немонотонно, она максимальна при давлении  $0,6—0,8 \text{ Тор}$ , при котором колебания имеют наиболее богатый спектр. Следует отметить, что существует некоторый, зависящий от давления, критический ток, ниже которого колебания скачком исчезают. При давлении  $0,4 \text{ Тор}$  величина этого тока равна примерно  $50 \text{ мА}$ , с ростом давления она уменьшается, и при давлении  $2 \text{ Тор}$  колебания возникают при токе разряда всего  $1—2 \text{ мА}$ .

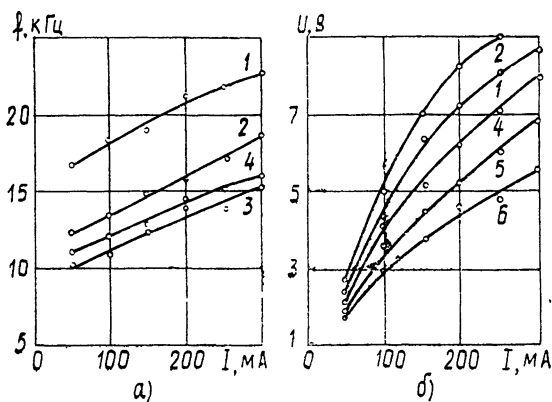


Рис. 2.

Описанные выше колебания в разряде с полым катодом были обнаружены нами при зондовых измерениях параметров плазмы в его полости. В дальнейшем было замечено, что при малых токах разряда потенциал зонда, находящегося в центре катодной полости, влияет на амплитуду колебаний в разрядной цепи. На участке электронного тока с уменьшением потенциала зонда амплитуда колебаний напряжения на нем возрастает, а в разрядной цепи убывает, и при токах разряда до  $30—50 \text{ мА}$  при потенциале зонда на  $1—2 \text{ В}$  ниже потенциала пространства колебания скачком срываются как в зондовой, так и в разрядной цепи. При больших токах разряда наличие зонда и его потенциал практически не меняют амплитуды колебаний напряжения в разрядной цепи.

Эти факты, а также то, что анодное падение потенциала и крутизна вольт-амперной характеристики разряда положительны во всем исследованном диапазоне условий свидетельствуют о том, что причиной развития колебаний в разряде являются процессы, протекающие в катодной полости. Порядок частоты наблюдающихся колебаний и характер зависимости ее от условий разряда позволяют предположить, что они являются следствием развития ионно-звуковых волн в катодной полости, обусловленных взаимодействием колеблющихся в поперечном сечении катодной полости быстрых электронов с плазмой отрицательного свечения.

В заключение необходимо отметить, что амплитуда колебаний напряжения горения разряда с полым катодом достигает столь больших значений, что они, возможно, могут играть существенную роль и в формировании рассматриваемого разряда.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Колебания и волны в плазме, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
2. Ю. Р. Апанакян, Ю. М. Айвадян, ЖЭТФ, 59, 1032 (1970).
3. А. Л. Зайцев, В. Ф. Махров, И. А. Савченко, Б. Н. Швилкин, ЖТФ, 39, 764 (1969).

4. V. Ionescu, R. Parvan, I. Baranu, C. R. Acad. Sci, 270, 1321 (1970).  
 5. R. Parvan, I. Baranu, Rev. Roum. Phys., 16, 521 (1971).  
 6. В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник, ЖТФ, 42, 67 (1972).  
 7. В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 11, 1759 (1973).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
15 мая 1975 г.

УДК 537.525

## ОБЩЕЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ СВЕЧЕНИЕ ТЛЕЮЩИХ РАЗРЯДОВ

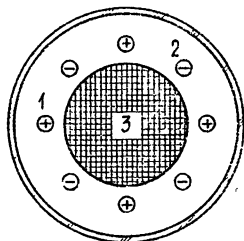
Н. В. Волков

Как известно, низкотемпературная плазма положительного столба и отрицательного свечения в плоскопараллельном промежутке имеет осевую неоднородность в распределении потенциала, напряженности электрического поля и значительные потери зарядоносителей вследствие амбиполярной диффузии к стенкам разрядной трубки [1]. В результате этого плазма, имеющая контакт с ограничивающими стенками, имеет дополнительные потери энергии, по сравнению со случаем, когда такого контакта нет.

В данном сообщении рассматривается плазма отрицательного свечения, не взаимодействующая с ограничивающими стенками разрядного устройства и имеющая осевую однородность в распределении потенциала и напряженности электрического поля.

Газоразрядное устройство, в котором была получена такая плазма, представляет собой цилиндрический промежуток, образованный системой чередующихся стержневых анодов и катодов (см. рис. 1, где 1 — аноды, 2 — катоды, 3 — плазма общего отрицательного свечения). В одном из оснований этого устройства монтировался цилиндрический молибденовый зонд диаметром 0,1 мм и длиной 5 мм, который мог перемещаться вдоль оси по всей длине разрядного промежутка. После проведения вакуумной обработки устройство заполнялось аргоном до давления 0,8 мм рт. ст.

Рис. 1. Поперечное сечение газоразрядного устройства.



При установлении тлеющих разрядов слабой аномальности с разрядным анодным током  $I = 3,2 \cdot 10^{-3}$  А отрицательные свечения каждого разряда были размещены с внутренней стороны системы электродов и достигали продольной оси газоразрядного устройства. Расстояние между электродами и давление газа были подобраны таким образом, что разряд состоял только из приэлектродных зон. Поскольку все разряды были одинаковы и каждый катод взаимодействовал с двумя соседними анодами, отрицательные свечения не отделялись друг от друга, а соединялись в одно общее отрицательное свечение. Это свечение заполняло всю центральную часть разрядного промежутка в виде ярко светящегося цилиндра. От электродов свечение было отделено темными промежутками.

Измеренные вольт-амперные зондовые характеристики вдоль оси плазмы общего свечения имели четко выраженные прямолинейные электронные и ионные ветви. Ионная часть всех зондовых характеристик имела небольшой наклон к оси абсцисс и была мала по величине даже при больших значениях потенциала зонда  $V_s$ . При переходе через нулевую точку (соответствующем плавающему потенциалу) наблюдается резкий излом характеристики с последующим большим ростом электронного зондового тока  $i_e$ .

Электронный и ионный зондовые токи  $i_e$  и  $i_i$ , измеренные вдоль оси плазмы общего свечения при постоянных соответствующих потенциалах зонда  $V_s$ , имели в этом направлении неизменные значения.

Все зондовые характеристики электронного зондового тока, построенные в полулогарифмическом масштабе, были прямолинейны, а в верхней части имели небольшой изгиб, который давал возможность определить потенциал пространства плазмы общего свечения  $V_p$ . Прямолинейность такой линейной характеристики свидетельствует о максвелловском распределении электронов в плазме общего свечения. Определение электронной температуры электронов  $T_e$  по измеренным электронному зондовому току и потенциалу зонда  $V_s$  с помощью известного выражения [2].



$$T_e = \frac{e/k}{d \ln i_e/dV_s} \quad (1)$$

показывает, что их средняя энергия составляет 1, 2 эВ. Здесь  $e$  — заряд электрона,  $k$  — постоянная Больцмана. Концентрацию электронов  $n_e$  можно найти по измеренной плотности зондового электронного тока  $j_e$  и  $T_e$  с помощью соотношения [2].

$$n_e = 4,03 \cdot 10^{19} \frac{j_e (A/m^2)}{\sqrt{T_e (K)}} \quad (2)$$

Значения  $V_p$  (относительно анода),  $T_e$  и  $n_e$  для всех зондовых характеристик, измеренных вдоль продольной оси плазмы общего свечения в пределах точности измерений, имели следующие постоянные значения.

$V_p, B$	$T_e, K$	$n_e, m^{-3}$
-6,3	13300	$3,4 \cdot 10^{18}$

Постоянные значения потенциала пространства  $V_p$  свидетельствуют о том, что в продольном направлении в плазме общего свечения наблюдаются эквипотенциальность, отсутствие градиента концентрации зарядоносителей и электрического поля. Как показывают результаты работ [3-7] и др., такое обстоятельство не наблюдается в плазме отрицательного тлеющего свечения плоскопараллельного промежутка.

Другим существенным отличием от плазмы положительного столба и отрицательного тлеющего свечения плоскопараллельного промежутка является отсутствие взаимодействия плазмы общего свечения с ограничивающими стенками разрядной трубки. Эта особенность связана с тем, что между плазмой и стенками трубки находятся приэлектродные зоны разряда, через которые не могут пройти ни электроны, ни положительные ионы. В результате этого амбиполярная диффузия зарядоносителей отсутствует, что способствует сохранению их в объеме плазмы общего свечения и увеличению плотности зарядоносителей. Сравнение концентраций  $n_e$  в плазме общего свечения и обычной плазме отрицательного свечения показывает, что при прочих равных условиях плотность  $n_e$  увеличивается более чем на порядок. Вследствие этого в плазме общего свечения рекомбинация электронов и ионов в ее объеме и на электродах протекает более эффективно. Благодаря этому при той же мощности на разрядной трубке увеличиваются перенос электрического тока и излучение в разрядном промежутке.

Плазма общего свечения, полученная указанным способом, представляет интерес как объект спектроскопических исследований и может найти ряд практических применений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Энгель, Ионизованные газы, Физматгиз, М., 1959.
2. В. Л. Грановский Электрический ток в газе, т. 1, Гостехиздат, М., 1952
3. Н. А. Капцов, Электрические явления в газах и в вакууме, Гостехиздат, М., 1950.
4. K. Nobata, Electrotechn. J. Japan, 7, № 4, 144 (1962).
5. E. Hantzshe, Beitrage, a. d., Plasma Phys., 1, № 3, 179 (1961).
6. E. Badareu, G. Popescu, Rev. Phys. Acad. RPR, 5, № 1, 41 (1960).
7. H. Neu, Zeitschrift für Phys., 152, 294 (1958).

Куйбышевский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию  
30 апреля 1975 г.