

## СОДЕРЖАНИЕ

Кондратенко А. Н., Куклин В. М., Крюков А. В. О возбуждении низкочастотных поверхностных волн в плазменных волноводах пучками ионов . . . . .	1081
Капинос В. Н., Медведев Ю. А., Морозов Н. Н., Степанов Б. М., Хохлов В. Д. Исследование неравновесной проводимости воздуха, ионизованного пучком быстрых электронов . . . . .	1088
Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А. Результаты измерений электронной концентрации в <i>D</i> -области ионосферы во время внезапных ионосферных возмущений . . . . .	1094
Жмур Л. Е. К теории распространения модифицированных ионно-звуковых волн во внешней ионосфере . . . . .	1098
Дианов-Клоков В. И., Иванов В. П., Матвеева О. А., Станкевич К. С. Измерения поглощения в жидком кислороде на частоте 2,71 ГГц . . . . .	1106
Капельзон А. А. К вопросу о взаимодействии мощных модулированных радиоволн	1111
Малышев Л. Г., Новиков Л. Н. Параметрический резонанс, вызванный модуляцией <i>g</i> -фактора атомной системы . . . . .	1118
Гречишкин В. С., Воронков С. А., Шишкин Е. М. Особенности формирования <i>S</i> -сигналов в программах с разделением времени . . . . .	1122
Пасманик Г. А. О каноническом описании волновых процессов в нелинейных средах . . . . .	1128
Тамойкин В. В., Файнштейн С. М. О «жестком» возбуждении взрывной неустойчивости в системе поток—плазма с хаотическими неоднородностями концентрации . . . . .	1134
Пермяков В. А. Слабозатухающие угловые волны, направляемые цилиндрическими и сферическими поверхностями с произвольной кривизной . . . . .	1140
Игнатьев В. И., Сысоев Ю. В., Турчин В. И. Определение диаграмм направленности антенн сантиметрового диапазона волн по фазометрическим измерениям в зоне Френеля . . . . .	1152
Весслов Г. И., Ильинская О. К. Решение задачи дифракции на наклонной диэлектрической пластине . . . . .	1157
Лерер А. М., Михалевский В. С. Применение парных интегральных уравнений к некоторым задачам дифракции волноводных волн на телах конечных размеров . . . . .	1164
Горобец А. П., Дерюгин Л. Н., Курдюмов О. А., Сотин В. Е. Дисперсионные уравнения и расчет замедления микрополосковой линии . . . . .	1173
Мартынова Т. А. К расчету нерегулярных волноводов с локальной слоистой неоднородностью . . . . .	1178
Семенов Д. И., Косаков Г. С. Резонансные явления в слоистых гиротропных средах . . . . .	1189
Антаков И. И., Гинцбург В. А., Засыпкин Е. В., Соколов Е. В. Экспериментальное исследование распределения электронов по скоростям в винтовом электронном потоке . . . . .	1196
Горшкова М. А., Сморгонский А. В. Теория убитрона—усилителя типа «О» с ультрарелятивистским электронным пучком . . . . .	1201
Кириченко В. И., Ткаченко В. М. Исследование продольного распределения тока в тлеющем разряде с цилиндрическим полым катодом в гелии . . . . .	1206

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Малышев С. К., Морозов В. И., Самойлов Р. А., Федянец Б. К., Хрулёв В. В., Чекалёв С. П., Шмулевич С. А. Модуляционные радиометры дециметрового диапазона для исследований нерегулярных импульсов спорадического радионизлучения фона . . . . .	1211
---	------

Демарёв В. М., Малышев С. К., Метелев М. И., Мильченко В. А., Пройдаков В. И., Рассадовский В. А., Самойлов Р. А., Хрулёв В. В., Чекалёв С. П., Шмулевич С. А. Радиометрический комплекс на 927 МГц с малой ЭВМ . . . . .	1215
Багдасарян О. В., Пермяков В. А. О распространении поверхностных волн с большим замедлением вдоль плазменного цилиндра . . . . .	1217
Сажин В. И., Тинин М. В. О влиянии волновых возмущений электронной концентрации в ионосфере на распространение коротких волн . . . . .	1219
Боровицкая Е. С. Рассеяние электромагнитных волн в магнитоактивной плазме при резонансном взаимодействии виртуальной волны с электронами на аномальной доплеровской частоте . . . . .	1221
Абрамович Б. С., Дятлов А. И. К теории распространения волн в одномерной случайно-неоднородной поглощающей среде в диффузионном приближении . . . . .	1222
Памяти А. П. Скибарко . . . . .	1225

#### Информация

Аннотации статей, помещённых в журнале «Геомagnetизм и аэрономия», т. XV, № 2, 1975 . . . . .	1226
---	------

УДК 621.372.09

## О ВОЗБУЖДЕНИИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНОВОДАХ ПУЧКАМИ ИОНОВ

*А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин, А. В. Крюков*

Рассматривается возбуждение пучками ионов поверхностных низкочастотных волн, распространяющихся в волноводах с магнитоактивной сильно неизотермической плазмой. Задача решается в квазигидродинамическом приближении. Рассмотрен случай длинноволновых и коротковолновых колебаний поверхностного типа с пространственно-разделенными и с пространственно-совмещенными пучком и плазмой. Исследованы дисперсионные характеристики, найдены коэффициенты усиления и инкременты возбуждения низкочастотных волн поверхностного типа.

1. Возбуждение высокочастотных поверхностных волн в плазменных волноводах пучками заряженных частиц рассматривалось в работах [1-3]. В магнитоактивной сильно неизотермической плазме, наряду с высокочастотными, существуют низкочастотные поверхностные волны [4]. Распространение низкочастотных поверхностных волн вдоль постоянного магнитного поля в плазменном волноводе изучалось в работах [5, 6]. В данной работе рассмотрим возбуждение симметричных и несимметричных низкочастотных поверхностных волн в плазменных волноводах моноэнергетическими пучками ионов.

Пусть координатная ось  $z$  ориентирована вдоль постоянного магнитного поля  $H_0$ , направленного вдоль оси плазменного волновода. Используя уравнения квазигидродинамики и уравнения Максвелла и полагая зависимость от координат и времени в виде  $\sim \exp[i(k_3 z + m \varphi - \omega t)]$ , получим исходную систему уравнений для электрических полей поверхностной низкочастотной волны  $E = (E_\rho, E_\varphi, E_z)$  в плазме (магнитным полем волны пренебрегаем, так как фазовая скорость меньше тепловой скорости электронов плазмы,  $v_{Te} \ll c$ , электроны считаем замагниченными):

$$\left( \varepsilon_3 k_3^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \varepsilon_1 - \frac{m}{\rho} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \rho} \right) E_z = i k_3 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \varepsilon_1 E_\rho); \quad (1)$$

$$E_\varphi = \frac{m}{\rho k_3} E_z; \quad (2)$$

$$E_\rho = - \frac{i}{k_3} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} + q_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_i}{\omega} \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_i^2} + q_2, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2} + \frac{1}{k_3^2 D^2} + q_3,$$

$$q_1 = - \frac{\Omega_a^2}{(\omega - k_3 v_0)^2 - \omega_a^2}, \quad q_2 = - \frac{\omega_a}{\omega - k_3 v_0} q_1, \quad q_3 = - \frac{\Omega_a^2}{(\omega - k_3 v_0)^2},$$

$$D^2 = \frac{T_e}{4\pi e^2 n_0}, \quad \Omega_{l,\alpha}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0,\alpha}}{M_{l,\alpha}}, \quad \omega_{l,\alpha} = \frac{e_{l,\alpha} H_0}{m_{l,\alpha} c},$$

$n_{0,\alpha}$ ,  $M_{l,\alpha}$ ,  $e_{l,\alpha}$  — соответственно невозмущенная плотность, масса и заряд ионов плазмы и частиц пучка,  $v_0$  — постоянная скорость пучка, направленная вдоль оси  $z$ .

В каждой из однородных областей, где  $n_{0\alpha} = \text{const}$ , для  $z$ -компоненты электрического поля волны можно записать уравнение:

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} E_z \right) - \left( \chi^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) E_z = 0, \quad (4)$$

где

$$\chi^2 = k_3^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}. \quad (5)$$

Решениями этого уравнения будут функции Макдональда и модифицированные функции Бесселя  $m$ -порядка при  $\chi^2 > 0$ , что соответствует рассматриваемому нами поверхностному типу волн.

Граничные условия получаем интегрированием уравнений (1)–(3) вдоль тонкого переходного слоя между двумя плазменными средами, ограниченными цилиндрическими поверхностями, устремляя затем толщину этого слоя к нулю:

$$-m \{ \varepsilon_2 E_z \} = ik_3 R \{ \varepsilon_1 E_\rho \}; \quad (6)$$

$$\{ E_z \} = \{ E_\varphi \} = 0, \quad (7)$$

где  $R$  — радиус цилиндрической поверхности, отделяющей одну однородную область от другой, а скобки  $\{ \}$  означают скачок функции  $f$  через границу двух плазменных областей. Вследствие замагниченности электронная компонента не дает вклада в граничные условия.

Используя (4)–(7), получим дисперсионное уравнение для поверхностных низкочастотных волн, распространяющихся в плазменном волноводе радиуса  $R$ , имеющем резкую границу с вакуумом (пучок занимает весь объем волновода), которое имеет вид

$$k_3 R \frac{K'_m(k_3 R)}{K_m(k_3 R)} - m \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \chi R \frac{I'_m(\chi R)}{I_m(\chi R)} = 0, \quad (8)$$

где  $K_m(z)$  и  $I_m(z)$  — соответственно функции Макдональда и Бесселя,  $Z'_m(z) = \frac{d}{dz} Z_m(z)$ ,  $m$  принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Поверхностные низкочастотные волны, распространяющиеся в неограниченной плазме с вырезанным цилиндрическим отверстием радиуса  $R$  (пучок занимает только объем отверстия), описываются следующим дисперсионным уравнением:

$$\frac{I'_m(x_1 R)}{I_m(x_1 R)} x_1 R \varepsilon_1^{(1)} + m (\varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_2^{(2)}) - \varepsilon_1^{(2)} x_2 R \frac{K'_m(x_2 R)}{K_m(x_2 R)} = 0; \quad (9)$$

где обозначения с индексом 1 соответствуют области, занятой пучком, причем  $\varepsilon_1^{(1)} = 1 + q_1$ ,  $\varepsilon_2^{(1)} = q_2$ ,  $\varepsilon_3^{(1)} = 1 + q_3$ ,  $x_1^2 = k_3^2 \varepsilon_3^{(1)} / \varepsilon_1^{(1)}$ , а с индексом 2 — плазме, где  $n_\alpha$  следует положить равным нулю.

Исследование уравнений (8) и (9) для произвольных радиусов волновода (или  $\chi$ ,  $k_3$ ) представляет значительные трудности, поэтому остановимся на достаточно интересных частных случаях.

2. При больших радиусах плазменных волноводов или для достаточно мелкомасштабных в осевом направлении колебаний с малой глубиной проникновения поля волны в плазму ( $L \sim \kappa^{-1}$ ),

$$\kappa R \gg |m|, 1, \quad k_3 R \gg |m|, 1, \quad (10)$$

полагая плотность пучка  $n_\alpha$  равной нулю, получаем дисперсионное уравнение для аксиально-симметричной волны ( $m=0$ ):

$$k_{30} = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_1 \epsilon_i}}, \quad (11)$$

причем,  $\kappa$  определяется выражением

$$\kappa = \kappa_0 = -\frac{k_{30}}{\epsilon_1}. \quad (12)$$

Удерживая члены, пропорциональные  $R^{-1}$ , для произвольного  $m$  запишем

$$k_{3m} = k_{30} \pm \frac{1}{4R} \frac{\omega(\omega + 2m\omega_i)}{\omega_{gp}^2 - \omega^2}; \quad (13)$$

$$\kappa_m = \kappa_0 \mp \frac{1}{4R\epsilon_1} \frac{\omega(\omega + 2m\omega_i)}{\omega_{gp}^2 - \omega^2} \left( 1 - \frac{2\Omega_i^2}{\omega_i^2} \frac{\omega_{gp}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right), \quad (14)$$

где верхний знак соответствует плазменному цилиндру, а нижний — неограниченной плазме с цилиндрическим отверстием,

$$\omega_{gp} = \sqrt{\frac{\Omega_i^2 + \omega_i^2}{2}}. \quad (15)$$

Легко видеть, что при  $\omega \rightarrow \omega_{gp}$ ,  $k_3$  и  $\kappa$  быстро возрастают и волна прижимается к поверхности плазмы. Область существования поверхностной волны лежит между  $\omega_i$  и граничной частотой  $\omega_{gp}$ .

Относительный коэффициент усиления при пучковой неустойчивости  $\omega - k_3 v_0 = i \delta_1 v_0$  ( $\delta_1 > 0$ ) для аксиально-симметричной низкочастотной поверхностной волны ( $m=0$ ) в плазменном цилиндре имеет вид

$$\frac{\delta_1}{k_{30}} \approx \left( \frac{n_\alpha}{2n_0} \right)^{1/3} \left( \frac{\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_i^2}{2\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_i^2} \right)^{1/3} \left( \frac{M_i}{M_\alpha} \right)^{1/3}; \quad (16)$$

аналогично, вводя коэффициент усиления аксиально-симметричной поверхностной волны  $\delta_2 > 0$  для пучковой неустойчивости в отверстии, вырезанном в плазме, получаем

$$\delta_2 = \left( -\frac{1}{\epsilon_1} \right)^{1/3} \delta_1. \quad (17)$$

Коэффициенты усиления для несимметричных волн практически не отличаются от выражений (16) и (17). Циклотронная неустойчивость возможна для ионных пучков при  $\omega - R_3 v_0 + \omega_i \approx 0$ . Относительные коэффициенты усиления соответственно для плазменного цилиндра с пучком и для пучка в отверстии, вырезанном в неограниченной плазме, имеют вид

$$\frac{\delta_1^2}{k_{30}^2} = \frac{n_i}{4n_0} \frac{\omega^2}{\omega_i(\omega + \omega_i)} \frac{\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_i^2}{2\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_i^2} \left( -\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{m}{Rk_{30}} \right)^2; \quad (18)$$

$$\frac{\delta_2^2}{k_{30}^2} = \frac{n_i}{4n_0} \frac{\omega^2}{\omega_i(\omega + \omega_i)} \frac{\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_i^2}{2\omega^2 - \Omega_i^2 - \omega_i^2} \left(-\frac{1}{\epsilon_1}\right)^2. \quad (19)$$

При  $m=0$  (18) и (19) совпадают. В том случае, если глубина проникновения поля в плазму  $L \sim 1/\kappa \approx -\epsilon_1/k_{30}$  велика, слагаемое  $|m/Rk_{30}| \ll \ll 1$  в выражении (18) определяет отличие  $\delta_1$  от  $\delta_2$ .

Все рассмотренные коэффициенты усиления заметно растут при  $\omega \rightarrow \omega_{\text{гр}}$ , т. е. в областях, где фазовая скорость волны быстро убывает. При увеличении глубины проникновения поля поверхностной волны в плазму коэффициенты усиления  $\delta_2 \sim \kappa$  убывают значительно быстрее, чем  $\delta_1$ , как в случае пучковой, так и в случае циклотронной неустойчивости. Отметим, что коэффициенты  $\delta_2$  тем больше, чем ближе к границе сосредоточена основная энергия поверхностной волны в плазме.

При  $\omega \rightarrow \omega_i$  глубина проникновения поля в плазму возрастает и выражения (12) и (14), вследствие нарушения условия (10), становятся неприменимыми, поскольку вблизи частоты  $\omega_i$  может оказаться  $\kappa R \ll 1$ . В этом случае волна имеет практически объемный характер и  $\kappa^2$  может принимать как положительные, так и отрицательные (соответствующие объемному типу волн) значения.

Остановимся на случае возбуждения поверхностной аксиально-симметричной волны ( $m=0$ ) в плазменном цилиндре. Дисперсионное уравнение (8) в отсутствие пучка запишется в виде

$$2f_0(k_3R) = \epsilon_1 \kappa^2 R^2, \quad (20)$$

где

$$f_m(z) = z \frac{K'_m(z)}{K_m(z)}.$$

Так как  $\kappa R \ll 1$ , рассмотрение возможно при условии

$$\omega^2 - \omega_i^2 \ll -\frac{\Omega_i^2}{2f_0(k_3R)}. \quad (21)$$

Для частоты  $\omega$  из уравнения (20) получим выражение

$$\omega^2 = \frac{k_3^2 v_s^2}{1 + k_3^2 D^2 - 2f_0(k_3R) \frac{D^2}{R^2}}, \quad (22)$$

где  $v_s = \sqrt{T_e/M_i}$  — скорость ионного звука в плазме. При  $k_3R \gg 1$ ,  $|f_0(k_3R)| \approx k_3R$ , и так как  $R \gg D$ , последним слагаемым в знаменателе выражения (22) можно пренебречь, т. е.

$$\omega^2 = \frac{k^2 v_s^2}{1 + k_3^2 D^2} \approx \omega_i^2. \quad (23)$$

Таким образом, в узком диапазоне частот вблизи  $\omega_i$  дисперсия волны совпадает с дисперсией ионно-звуковой волны в неограниченной плазме, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля. Максимальный инкремент пучковой неустойчивости

$$\gamma \approx \left(\frac{n_a}{2n_0}\right)^{1/3} \omega_i \left(\frac{M_i}{M_a}\right)^{1/3}. \quad (24)$$

Если  $m \neq 0$ , то дисперсионное уравнение (8) для случая плазменного цилиндра при  $\kappa R \ll 1$  запишется в виде

$$\frac{1}{m} f_m(k_3 R) - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0. \quad (25)$$

В отсутствие пучка и при  $k_3 R \gg 1$  уравнение (26) упрощается:

$$k_3 = \frac{m}{R} \frac{\Omega_i^2}{\omega(\omega + \omega_i)}. \quad (26)$$

Очевидно,  $m$  в рассматриваемом случае может принимать только положительные значения; кроме того, (26) справедливо для плотной плазмы

$$\omega \approx \omega_i \ll \Omega_i. \quad (27)$$

Коэффициент усиления волны для единственно возможной пучковой неустойчивости в случае возбуждения волны ионным пучком

$$\delta \approx \frac{m}{R} \left( \frac{n_a}{2n_0} \right)^{1/2} \frac{\Omega_i^2}{\omega_i^2}. \quad (28)$$

Для плазменного волновода, представляющего собой цилиндрическое отверстие в неограниченной плазме, возбуждение волн при  $|xR| \ll \ll 1$ , ограниченным пучком, занимающим объем отверстия, неэффективно, поскольку коэффициенты усиления волны пропорциональны малому параметру  $R/L \ll 1$ , где  $L$  — глубина проникновения поля волны в плазму.

Исследование уравнений (8) и (9) показывает, что низкочастотные поверхностные колебания с большой продольной длиной волны  $k_3 R \ll 1$  и малой глубиной проникновения поля в плазму  $xR \gg 1$  в обоих типах волноводов не реализуются.

В заключение рассмотрим случай крупномасштабных в осевом направлении колебаний с большой глубиной проникновения поля волны в плазму:

$$k_3 R \ll 1, \quad xR \ll 1, \quad (29)$$

где пучок, как и раньше, занимает весь объем плазмы. Наиболее интересна неустойчивость ионного пучка ( $\alpha = i$ ) в плазме. Для несимметричных ( $m \neq 0$ ) волн условие  $xR \ll 1$  реализуется при  $\omega \sim \omega_i$ . Дисперсионное уравнение (26) в условиях (29) для несимметричных волн приобретает простой вид:

$$1 \pm \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 0. \quad (30)$$

Колебания возможны при  $m > 0$ :

$$k_3 v_0 \approx \frac{3}{2} \omega_i + \frac{\omega_i}{2} \sqrt{1 + \frac{8 \Omega_{\alpha i}^2}{4 \omega_i^2 - \Omega_i^2}}. \quad (31)$$

Следовательно, неустойчивость возникает при

$$\frac{\Omega_i^2}{4} - 2 \Omega_{\alpha i}^2 < \omega^2 < \frac{\Omega_i^2}{4} \quad (32)$$

с коэффициентом усиления волны

$$\delta = \frac{\omega_i}{2 v_0} \sqrt{\frac{8 \Omega_{\alpha i}^2}{\Omega_i^2 - 4 \omega_i^2} - 1}. \quad (33)$$

Отсюда видно, что коэффициент усиления волны при  $\omega \sim \omega_i \rightarrow \Omega_i/2$  быстро возрастает, а при  $\omega \sim \omega_i \rightarrow \sqrt{\frac{\Omega_i^2}{4} + 2\Omega_{\alpha i}^2}$  стремится к нулю.

Для аксиально-симметричной волны ( $m=0$ ) условия (29) реализуются при  $\omega \ll \Omega_i$ , причем дисперсионное уравнение (8) при этих условиях совпадает с дисперсионным уравнением для звука в неограниченной плазме:

$$\omega = k_3 v_s. \quad (34)$$

Инкремент пучковой неустойчивости легко определяется:

$$\gamma \approx \left(\frac{n_\alpha}{2n_0}\right)^{1/3} k_3 v_s. \quad (35)$$

### 3. Обсудим полученные результаты.

а) Случай мелкомасштабных в осевом направлении колебаний

$$k_3 R \gg m, 1.$$

При малой глубине проникновения поля волны в плазму практически равновероятно возбуждаются аксиально-симметричные и несимметричные волны. Вблизи ионно-циклотронной частоты глубина проникновения поля в плазму может быть больше радиуса волновода. В этом случае в результате пучковой неустойчивости можно возбудить как аксиально-симметричную, так и несимметричную волну в плазменном цилиндре. Симметричная волна в узком диапазоне частот вблизи  $\omega_i$  обладает дисперсией, характерной для ионно-звуковых колебаний в неограниченной плазме, распространяющихся вдоль магнитного поля. Электрический вектор несимметричной волны вращается в положительном направлении ( $m > 0$ ).

б) Колебания с большой продольной длиной волны ( $k_3 R \ll 1$ ) при малой глубине проникновения поля в плазму не возбуждаются. При большой глубине проникновения поля в плазму ( $\kappa R \ll 1$ ) аксиально-симметричные волны можно возбудить в результате пучковой неустойчивости на частотах, много меньших ионной ленгмюровской частоты. Дисперсия волны совпадает с дисперсией для звука в неограниченной плазме. Несимметричные волны при этих условиях ( $k_3 R \ll 1$ ,  $\kappa R \ll 1$ ) существуют вблизи  $\omega_i$  и возбуждаются в результате неустойчивости ионного пучка, причем влияние пучка на дисперсию волны существенно. Как и прежде, электрический вектор волны вращается в положительном направлении. Ширина области неустойчивости зависит от плотности пучка.

Отметим, что при большой глубине проникновения поля в плазму ( $\kappa R \ll 1$ ) возбуждение волн в плазменном волноводе, представляющем собой неограниченную плазму с вырезанным цилиндрическим отверстием, ограниченным пучком (занимающим объем отверстия), неэффективно.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Рухадзе, М. Е. Чоговадзе, ЖТФ, 43, 256 (1973).
2. Б. И. Аронов, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ, 43, 716 (1973).
3. А. А. Гончаров, ЖТФ, 43, 1459 (1973).
4. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, 36, 1943 (1966)
5. А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин, ЖТФ, 44, вып. 3 (1974).
6. И. М. Панкратов, К. М. Степанов, УФЖ, 16, вып. 12 (1971)



---

**EXCITATION OF LOW-FREQUENCY SURFACE WAVES IN PLASMA  
WAVEGUIDES BY ION BEAMS***A. N. Kondratenko, V. M. Kuklin, A. V. Kryukov*

The paper considers the excitation of surface low-frequency waves propagating in waveguides with a magnetoactive strongly nonisothermal plasma by ion beams. The problem is solved in the quasihydrodynamic approximation. The case of long and short wave surface-type oscillations with spatially-separated and spatially-coincided beam and plasma is solved. The dispersion characteristics are studied, the amplification coefficient and the increments of low-frequency surface-type wave excitation are found.

---

УДК 533.932

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ВОЗДУХА, ИОНИЗОВАННОГО ПУЧКОМ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

*В. Н. Капинос, Ю. А. Медведев, Н. Н. Морозов,  
Б. М. Степанов, В. Д. Хохлов*

Излагаются результаты экспериментального и теоретического исследования влияния неравновесных эффектов на электрофизические свойства плазмы, образованной в газе импульсом быстрых электронов. Показано, что во время действия источника ионизации проводимость воздуха в 2—3 раза меньше равновесных значений, при этом в моменты времени, меньшие времени термализации электронов, соответствующее уменьшение может достигать порядка величины.

Электрофизические свойства газа, в котором действуют источники высокоэнергетичных электронов, в значительной мере определяют макроскопическое поведение плазменных систем (например, в области радиосияний [1]) и представляют интерес в исследованиях, связанных с использованием СВЧ методов диагностики плазмы. Проводимость воздуха во время действия импульсных источников быстрых электронов рассматривалась в работах [2, 3], в основе которых лежит предположение о максвелловском распределении вторичных электронов по энергиям, что в нестационарном случае, как будет показано ниже, может приводить к совершенно неудовлетворительным результатам.

В связи с этим было проведено экспериментальное исследование влияния неравновесности в энергетическом спектре вторичных электронов на проводимость плазмы, образованной в воздухе коротким импульсом релятивистских электронов, на основании которого развит метод расчета электрофизических свойств такой плазмы.

В проведенных экспериментах плазма создавалась пучком электронов линейного ускорителя, имеющего следующие параметры: энергия электронов 8 МэВ, длительность импульса на полувысоте  $T = 50$  нс, максимальный ток в импульсе 2А. Осциллограмма тока электронного импульса показана на рис. 1 (временной масштаб 0,1 мкс, на деление).

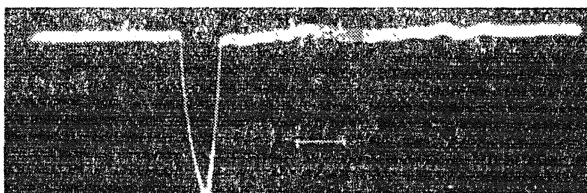


Рис. 1.

Проводимость плазмы измерялась волноводным методом, который обеспечивал временное разрешение не ниже  $5 \cdot 10^{-9}$  с. Схема измерительной установки и конструкция волноводной камеры показаны на

рис. 2. Пучок электронов вводился в регулярную часть волноводной камеры (1) через сетку (2) в торце волновода. Энергия СВЧ колебаний с генератора (3), работающего на частоте  $f=2,8$  ГГц, через развязывающее устройство (4) вводилась в волноводную камеру с помощью коаксиально-волноводного перехода (5). Волноводный поворот (6) предотвращал облучение детектора электронным пучком. Для устранения СВЧ колебаний, возбуждаемых в волноводе пучком электронов на частоте 2 ГГц (рабочая частота линейного ускорителя), применялся проходной фильтр (7).

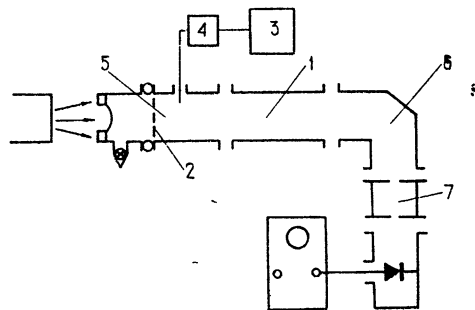


Рис. 2.

В предварительных экспериментах измерительная установка включала направленный волноводный ответвитель, с помощью которого регистрировалась СВЧ мощность, отраженная плазмой. Результаты предварительных экспериментов показали, что в исследуемом диапазоне давлений воздуха (200—760 мм рт. ст.) коэффициент отражения при максимальном токе электронного импульса достигает максимального значения при давлении воздуха 200 мм рт. ст., при этом его величина не превышает  $10^{-2}$ .

Используя результаты работы [4], можно показать, что в рассматриваемых условиях (низкочастотный случай, концентрация электронов много меньше критической) коэффициент отражения плазмы в волноводе определяется выражением

$$R = \frac{1}{[1 - (\lambda/\lambda_0)^2]^2} \left( \frac{\sigma}{2f} \right)^2, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве,  $\lambda_0$  — критическая длина волны в волноводе,  $\sigma$  — проводимость плазмы. Выражение (1) справедливо для плазмы, имеющей резкую границу, и, следовательно, для рассматриваемого случая плазмы с размытой границей дает верхнюю оценку коэффициента отражения. В условиях поставленных экспериментов проводимость плазмы, определенная по изменению выходной амплитуды поля при введении плазмы в волновод (т. е. без учета отражения от плазмы), не превышала  $10^8$  с<sup>-1</sup>. Отметим, что при таком методе измерений проводимость всегда больше проводимости плазмы, определенной с учетом отражения. Полагая в формуле (1)  $\sigma = 10^8$  с<sup>-1</sup>, найдем, что коэффициент отражения не превышает  $1,6 \cdot 10^{-2}$ . При этом СВЧ мощность, поглощенная плазмой, на два порядка превышает отраженную. Поэтому в описываемых ниже экспериментах, в которых измерялось затухание СВЧ энергии в волноводе, отражение от плазмы не учитывалось.

Непосредственно измеряемой величиной являлся коэффициент затухания СВЧ энергии в волноводе  $\beta(t)$ , который в исследуемом диапазоне давлений воздуха связан с усредненной по объему волновода проводимостью плазмы соотношением [5]

$$\alpha(t) = \frac{f\lambda\beta(t)}{2\pi L} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2},$$

где  $L$  — эффективная длина волноводной камеры. Типичная осциллограмма затухания СВЧ энергии в волноводе, заполненном плазмой, по-

казана на рис. 3 (временной масштаб 0,1 мкс на деление). Результаты измерений проводимости воздуха  $\sigma$ , ионизованного пучком быстрых электронов (максимальный ток в импульсе 2 А) при давлениях 760 тор (кривая 1), 410 тор (кривая 2), представлены на рис. 4 сплошными линиями.

Для объяснения полученных результатов была найдена функция распределения вторичных электронов по энергиям. Определение функции распределения основано на прослеживании процесса замедления вторичного электрона от момента его рождения до исчезновения. В рассматриваемом случае время жизни электрона  $\tau^{-1}$  определяется коэффициентом прилипания электронов  $\gamma$  к молекулам кислорода.

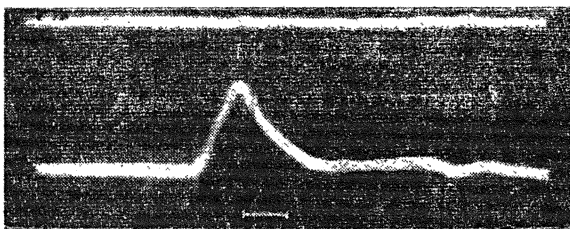


Рис. 3.

В виду малости относительной величины энергии  $\alpha(E)$ , теряемой электроном в одном столкновении, которая для воздуха не превышает  $10^{-2}$ , движение вторичного электрона в пространстве энергий можно считать непрерывным и описывать релаксационным уравнением [6]

$$dE = -\alpha(E)\nu(E)(E - E_0)dt, \quad (2)$$

где  $E$  — энергия электрона,  $\nu(E)$  — частота столкновений электронов,  $E_0$  — тепловая энергия молекул, которая одновременно характеризует ширину максвелловского распределения термализованных электронов.

Уравнение (2) определяет время  $t'$ , в течение которого электрон (если он не прилипнет) сбрасывает свою энергию от  $E'$  до  $E$ :

$$t' = \int_E^{E'} \frac{dE''}{\alpha(E'')\nu(E'')(E'' - E_0)}. \quad (3)$$

Из уравнения (2) следует, что электроны, рожденные за время

$$dt' = dE' / \alpha(E')\nu(E')(E' - E_0),$$

в интервале энергий

$$dE' = \frac{\alpha(E')\nu(E')(E' - E_0)}{\alpha(E)\nu(E)(E - E_0)} dE,$$

через промежуток времени  $t'$  сбросят свою энергию от  $E'$  до  $E$  и будут находиться в интервале энергий от  $E$  до  $E + dE$ . Пусть  $q(t, E)dE$  — скорость образования вторичных электронов в единице объема в интервале энергий от  $E$  до  $E + dE$ . Тогда количество электронов, рожденных в интервале энергий  $dE'$  и находящихся в момент времени  $t$  в интервале энергий от  $E$  до  $E + dE$ , определяется выражением

$$q(t - t', E') d\dot{t}' dE' \exp\left[-\int_0^{t'} \gamma(t'') dt''\right] =$$

$$= \frac{q(t - t', E') dE dE'}{\alpha(E) \nu(E)(E - E_0)} \exp\left[-\int_E^{E'} \frac{\gamma(E'') dE''}{\alpha(E'') \nu(E'')(E'' - E_0)}\right], \quad (4)$$

в котором экспоненциальный множитель учитывает исчезновение электронов за время  $t'$ . Интегрируя выражение (4) по  $dE'$  по всей области высоких энергий, для функции распределения вторичных электронов по энергиям получим выражение

$$F(t, E) = \frac{1}{\alpha(E) \nu(E)(E - E_0)} \int_E^{\infty} q(t - t', E') dE' \times$$

$$\times \exp\left[-\int_E^{E'} \frac{\gamma(E'') dE''}{\alpha(E'') \nu(E'')(E'' - E_0)}\right], \quad (5)$$

где  $t'$  определено выражением (3).

Функция распределения (5) использовалась для вычисления проводимости плазмы в условиях поставленных экспериментов. Исходя из экспериментальных данных, о зависимостях  $\alpha(E)$  [6, 7],  $\nu(E)$  [8] и  $\gamma(E)$  [9, 10], которые были использованы при вычислении проводимости, можно убедиться, что время термализации электрона

$$\tau = \int_{2E_0}^{E_1} \frac{dE}{\alpha(E) \nu(E)(E - E_0)}$$

не зависит от его начальной энергии  $E_1$ , если  $\sqrt{E_1} \gg \sqrt{E_0}$ . Это означает, что можно пренебречь присутствием в плазме электронов, для которых  $\sqrt{E} \gg \sqrt{E_0}$ , и в качестве функции источников взять  $\delta$ -функцию, т. е.  $q(t, E) = Q(t) \delta(E - E_1)$ , где  $Q(t)$  — скорость образования электронов в единице объема. Отметим, что при изменении начальной энергии электронов от 2 эВ до 10 эВ проводимость плазмы изменяется в пределах 5% (в конкретных вычислениях величина  $E_1$  принята равной 10 эВ).

Кроме того, в исследуемой области давлений зависимость коэффициента прилипания от энергии не влияет на результаты вычислений, что объясняется малым временем (по сравнению с величиной  $\gamma^{-1}(E)$ ), которое проводит электрон в области высоких энергий. Так, если во всей области энергий принять  $\gamma(E) = \gamma(E_0)$ , то изменение проводимости плазмы не превышает 4%. В моменты времени  $t \geq 2T + \tau$ , когда все электроны термализованы, проводимость плазмы  $\sigma(t)$  описывается выражением, справедливым при максвелловском распределении электронов по энергиям, которое для электронного импульса треугольной формы (наиболее близкой к реальной форме пучка) имеет вид

$$\sigma(t) = \frac{e^3 Q(T) \exp[-\gamma(E_0)t]}{m \nu(E_0) \gamma^2(E_0) T} \{\exp[\gamma(E_0)2T] - 2\exp[T\gamma(E_0)] + 1\}, \quad (6)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. Это обстоятельство было использовано для определения скорости образования электронов в единице объема, которая находилась с помощью выражения (6) по результатам измерения проводимости в момент времени  $t = 2T + \tau$ .

Результаты вычислений проводимости воздуха при давлениях 410 и 760 *тор* представлены на рис. 4 пунктирными кривыми. Незначительное превышение измеренных значений проводимости по сравнению с теоретическими в моменты времени  $t > 2T + \tau_{\text{в}}$  связано с наличием медленно спадающего фонового тока после действия основного электронного импульса.

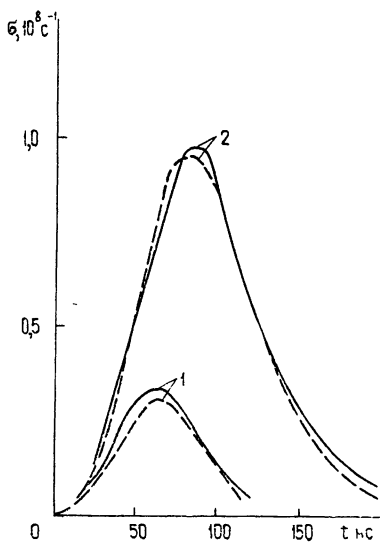


Рис. 4.

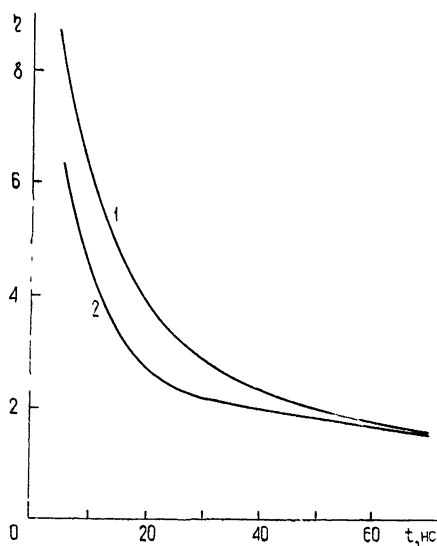


Рис. 5.

На рис. 5 приведен график зависимости отношения  $\eta$  проводимости воздуха, вычисленной в предположении о равновесном распределении вторичных электронов по энергиям, к проводимости воздуха, определенной с помощью распределения (5) (кривая 1 —  $p = 410$  *тор*, кривая 2 —  $p = 760$  *тор*). Видно, что во время действия источника быстрых электронов проводимость плазмы существенно меньше равновесных значений. Обнаруженное уменьшение проводимости воздуха по сравнению с равновесными значениями объясняется неравновесностью в энергетическом спектре вторичных электронов, образующихся на последних стадиях ионизации газов импульсами быстрых электронов. Согласие экспериментальных и теоретических результатов свидетельствует о том, что найденная функция распределения хорошо описывает свойства плазмы, образованной в газе импульсом быстрых электронов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Чемберлен, Физика полярных сияний и излучения атмосферы, ИЛ, М., 1963.
2. V. Gilinsky, Phys. Rev., **137**, 50 (1965).
3. Л. А. Вольф, В. С. Поликанов, ЖТФ, **41**, 1146 (1971)
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов радио, М., 1957.
5. В. Е. Голант, ЖТФ, **30**, 1265 (1960).
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
7. L. G. Christophorou, F. G. Carter, Chem. Phys. Lett., **2**, 607 (1968).
8. И. Шкаровский, Т. Джонстон, М. Бачинский, Кинетика частиц плазмы. Атомиздат, М., 1969.

9. Л. Л. Марьяновская, Ю. А. Медведев, Геомагнетизм и аэронавигация, 11, 290 (1971).
10. Сб. Атомные и молекулярные процессы (под ред. Д. Бейтса), изд. Мир, М., 1964.

Поступила в редакцию  
7 июня 1974 г.

INVESTIGATION OF NON-EQUILIBRIUM CONDUCTIVITY OF THE AIR  
IONIZED BY A FAST-ELECTRON BEAM —

*V. N. Kapinos, Yu. A. Medvedev, N. N. Morozov, B. M. Stepanov,  
V. D. Khokhlov*

We set forth the results of experimental and theoretical investigation of the influence of non-equilibrium effects on the electric and physical properties of plasma formed in gas by a fast-electron beam. It is shown that during ionization the air conductivity is 23 times less than the equilibrium values. At the moments of time less than the time of electron thermalization the corresponding decrease may reach the order of a magnitude.

---

УДК 551.510.535

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В *D*-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ ВО ВРЕМЯ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

*В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов*

Приведены  $N(h)$ -профили *D*-области ионосферы, измеренные в г. Горьком в периоды 11 внезапных ионосферных возмущений. Наблюдения проводились методом частичных отражений на частоте  $f = 5,75$  МГц.

Осенью 1969 г. и летом 1970 г. в г. Горьком методом частичных отражений проводились измерения  $N(h)$ -профилей электронной концентрации *D*-области в периоды внезапных ионосферных возмущений (ВИВ). Появление ВИВ обнаруживалось по характеру записей уровня космического радиоизлучения ( $f = 13$  и  $25$  МГц) и по временным вариациям амплитуды длинноволнового сигнала ( $f = 50$  кГц) европейского радиопередатчика ( $\varphi \approx 50^\circ$  с.ш.,  $\lambda \approx 15^\circ$  в.д.). Состояние ионосферы контролировалось также на станции АИС. Степень активности Солнца оценивалась по его рентгеновскому радиоизлучению и радиоизлучению в сантиметровом диапазоне волн. Во время ВИВ производилась фоторегистрация высотных зависимостей амплитуд  $A_{0,x}(h, t)$  обыкновенной и необыкновенной компонент обратно рассеянных сигналов на частоте  $f = 5,75$  МГц. Сведения об аппаратуре, методике измерений амплитуд и способах вычислений  $N(h)$ -профилей приведены в [1-5].

В мае—июне 1970 г. было зарегистрировано несколько десятков случаев ВИВ, во время которых проводились наблюдения методом частичных отражений. Однако для последующей обработки отбирались лишь те данные измерений  $A_{0,x}(h, t)$ , которые были получены при низком уровне радиопомех (при отношении помеха/сигнал не более 0,1).

В таблице приведены сведения о моментах начала, максимума и конца ВИВ, которые определялись по риометрическим записям поглощения радиоволн на  $f = 13$  МГц. В ней также представлены периоды определения  $N(h)$ -профилей, косинусы зенитных углов Солнца в моменты максимальной фазы ВИВ, величины аномального поглощения космического радиоизлучения на  $f = 13$  МГц и величины возрастания уровня длинноволнового сигнала для максимальной фазы и в период измерения  $N(h)$ -профилей.

Как видно из таблицы, большинство рассмотренных случаев ВИВ характеризовалось слабым или умеренным поглощением радиоволн—величины аномального поглощения на  $f = 13$  МГц заключались в интервале 0,7—2,6 дБ, и только в одном случае аномальное поглощение достигло значения 4,5 дБ. Увеличение напряженности поля длинноволнового сигнала в периоды тех же ВИВ было ограничено более узким интервалом значений 1,2—2,6 дБ. При анализе ВИВ привлекались также сведения о рентгеновском и радиоизлучении Солнца [6]. Оказалось, что всплески сантиметрового радиоизлучения обычно возникали в начальной фазе и вблизи максимума ВИВ. Времена появления ВИВ, определяемые по риометрическим записям поглощения и по записям



Таблица 1

№ про- филя	Дата	Вспышки поглощения на $f = 13 \text{ МГц}$			Время наблюдений UT	$\cos \chi$	Высотный интервал опреде- ления $N(h)$ , км	Величина ано- мального погло- щения на частоте $13 \text{ МГц}$		Изменения уров- ня сигнала $f = 50 \text{ кГц}$ , $\delta B$		Примечание*
		начало	максим- ум	конец				в мо- мент изме- рения	в мак- симу- ме возму- щения	в мо- мент изме- рения	в мак- симу- ме возму- щения	
1a	24.10.69	07.25	07.52	08.40	07.20—07.25	0,354	78—82	0	—	—	—	До возмущения
1б	— " —				07.40—07.41		71—82	0,8	1,8	—	—	Начало возму- щения
1в	— " —				07.46—07.48		66—82	1,4	—	—	—	До максимума возмущения
1г	— " —				07.50—07.51		64—82	1,8	—	—	—	В максимуме возмущения
2a	12.5.70	07.18	07.38	03.32	07.55—07.56,5	0,766	71—86	1,15	2,65	1,85	2,55	В затухающей фазе возмущения
2б	— " —				07.56,5—07.58		74—86	1,08	—	1,75	—	— " —
2в	— " —				07.58—08.00		74—86	0,95	—	1,5	—	— " —
3	23.5.70	07.57	07.01	07.20	07.02—07.05	0,766	60—76	0,6	0,7	1,8	2,6	— " —
4a	26.5.70	08.00	08.24	08.57	08.23,5—08.25,5	0,812	67—86	1,0	1,0	2,5	2,5	В максимуме возмущения
4б	— " —				08.27—08.30		67—79	0,75	—	2,3	—	В затухающей фазе возмущения
4в	— " —				08.43—08.45		70—89	0,2	—	1,5	—	— " —
5	26.5.70	11.21	11.24	11.55	11.27—11.28	0,740	61—71	2,9	4,5	2,2	2,4	— " —
6a	29.5.70	10.54	11.30	11.54	11.29—11.33	0,716	65—70	1,7	1,7	2,4	2,4	В максимуме возмущения
6б	— " —				11.34—11.36		65—79	1,05	—	2,3	—	В затухающей фазе возмущения
6в	— " —				11.36—11.38		65—79	0,9	—	2,2	—	— " —
7	13.6.70	13.23		14.46	13.38—13.43	0,515	61—84	1,9	1,9	1,7	1,7	В максимуме возмущения
8	14.6.70	09.17	09.49		09.40—09.45	0,829	62—85	1,0	2,0	—	—	В начальной фазе возмущения
9	15.6.70	10.51	11.12	—	11.21—11.23	0,761	65—90	0,9	1,1	1,65	1,9	Вблизи макси- мума возмущения
10	17.6.70	11.53	12.12	12.54	12.03—12.12	0,677	67—85	0,5	0,55	1,6	1,65	— " —
11	18.6.70	06.44	07.00	08.07	06.50—07.00	0,769	68—89	0,6	0,7	1,2	1,2	— " —

\* Максимум возмущения определяется по наибольшей величине аномального поглощения радиоволн в ионосфере.

амплитуд длинноволнового сигнала, практически совпадали между собой и соответствовали моментам увеличения интенсивности рентгеновского излучения. Однако интервалы, в которых имело место увеличение амплитуды длинноволнового сигнала, иногда были несколько больше, чем соответствующие периоды аномального поглощения.

На рис. 1—4 представлены профили  $N(h)$ , полученные в различные фазы развития ВИБ.

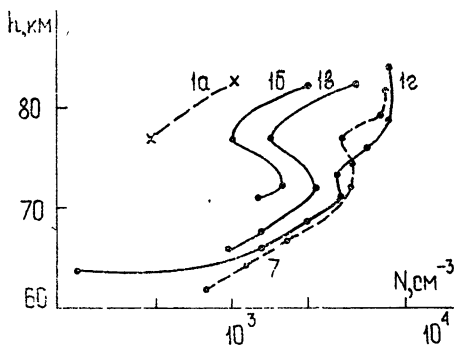


Рис. 1.

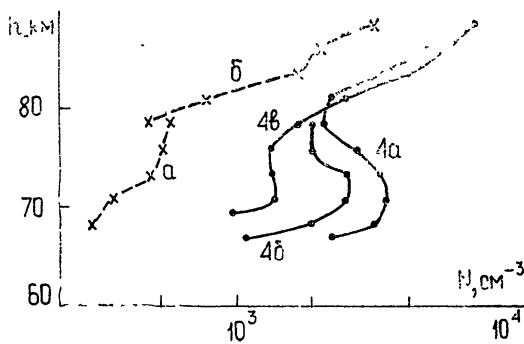


Рис. 2.

Данные рис. 1 и 2 иллюстрируют особенности изменений электронной концентрации в  $D$ -области в начальный период развития ВИБ 24. 10. 1969 г. (рис. 1) и в затухающей фазе ВИБ 26. 05. 1970 г. (рис. 2)\*. Профиль  $1a$  на рис. 1 предшествует началу ВИБ, а профиль  $1г$  относится к периоду его максимума. На рис. 1 цифрой 7 обозначен  $N(h)$ -профиль в момент максимума ВИБ 13. 06. 1970 г., а на рис. 2—4 профили «а» и «б» получены соответственно 14. 06 и 19. 06. 1970 г. в часы, близкие к полудню при спокойных условиях в ионосфере. На рис. 3 изображены последовательно измеренные  $N(h)$ -профили в затухающей фазе ВИБ—профиль  $6a$  соответствует максимуму возмущения 29.05.1970 г., а профили  $6б, в$  получены позднее его соответственно на 4—6 мин и на 6—8 мин. Профили  $2a, б, в$  характеризуют процесс уменьшения электронной концентрации в верхней части  $D$ -области спустя 20 мин после максимума ВИБ 12. 05. 1970 г. На рис. 3 и 4 приведены также другие примеры  $N(h)$ -профилей, измеренные в отдельные периоды ВИБ (см. таблицу).

Из рассмотрения рис. 1—4 можно заключить, что во время ВИБ  $N(h)$ -профили имеют довольно разнообразный вид. Иногда они очень схожи между собой (кривые  $6б, 6в, 8$  и  $9, 10$ ), а в других случаях — значительно различаются. Другой особенностью их является наличие экстремумов в высотном распределении электронной концентрации. Немонотонный характер зависимостей  $N(h)$  наблюдался нами во многих случаях и отмечался также в работах [7, 8].

Следует обратить внимание на определенную тенденцию в расположении экстремумов у  $N(h)$ -профилей — их высоты в среднем понижаются с ростом интенсивности ВИБ. Последнее наиболее заметно на рис. 4. Необычный  $N(h)$ -профиль был получен 23. 05. 1970 г. (рис. 4, кривая 3), максимум которого располагался на высоте около 65 км при довольно умеренной общей электронной концентрации в области  $D$ . В этой связи заметим, что факт увеличения ионизации на высотах мень-

\* Номера кривых на рис. 1—4 соответствуют номерам данных таблицы.

ше или порядка 70 км во время ВИБ находится в хорошем качественном согласии с известным эффектом возрастания амплитуды длинноволновых сигналов. Так, в периоды измерений  $N(h)$ -профилей, представленных кривыми 2в, 4в, 9 и 10, имело место увеличение средней амплитуды сигнала  $f = 50$  кГц примерно до 1,5 дБ, а при измерениях  $N(h)$ -профилей, изображенных кривыми 4а, 5 и 6а, средняя амплитуда сигналов увеличилась до 2,2—2,5 дБ. Связанное с этими явлениями возрастание электронной концентрации в нижней части области D во вре-

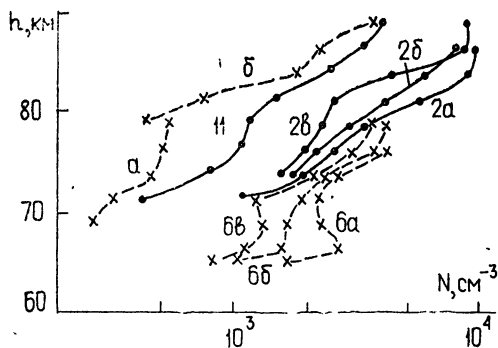


Рис. 3.

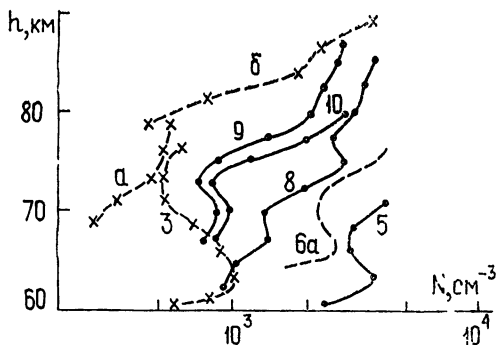


Рис. 4.

мя отдельных ВИБ может быть объяснено особенностями спектра рентгеновского излучения Солнца или особенностями высотной зависимости коэффициента потерь ионизации или их совместным воздействием на процессы ионизации [9, 10]. В периоды ВИБ аномальная ионизация возникла, по-видимому, в основном на высотах меньше 100 км. Анализ данных вертикального зондирования на станции АИС показал, что в тех случаях, когда во время ВИБ регистрировались критические частоты E- и F-областей ионосферы, их значения с учетом суточного хода практически не отличались от контрольных.

Авторы выражают благодарность Н. К. Шичковой за помощь при обработке данных наблюдений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, В. В. Подмосков, Ф. А. Флат, Геомагнетизм и аэрономия, 11, № 6, 1090 (1971)
- 2 Ф. В. Головин, В. В. Подмосков, Ф. А. Флат, Геомагнетизм и аэрономия, 12, № 4, 766 (1972).
- 3 J. S. Belrose, H. J. Burke, J. Geophys. Res., 69, № 13, 2799 (1964).
- 4 Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1452 (1971).
- 5 Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 695 (1972).
- 6 Solar Geophys. Data, ESSA Research Lab Boulder US Department of Commerce
- 7 L. E. Montbrion, J. S. Belrose, Radio Sci., 7, 1 (1972).
- 8 J. N. Rowe, A. J. Ferraro, H. S. Lee, R. W. Kreplin, A. P. Mitra, J. Atm. Terr. Phys., 32, 1609 (1970).
- 9 V. V. Belikovich, E. A. Benediktov, M. A. Itkina, J. Atm. Terr. Phys. (in press).
- 10 В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, В. А. Иванов, М. А. Иткина, Тезисы докладов на Всесоюзной конференции по физике ионосферы, 1974, г. Ростов (в печати).

---

THE RESULTS OF MEASURING THE ELECTRON DENSITY IN THE  
IONOSPHERIC *D*-REGION DURING SUDDEN IONOSPHERIC DISTURBANCES

*V. V. Belkovich, E. A. Benediktov, L. V. Grishkevich, V. A. Ivanov*

*N(h)*-profiles of the ionospheric *D*-region measured in Gorky for the period of 11 sudden ionospheric disturbances are given. Observations were carried out by the partial reflection method at the frequency  $f = 5.75$  MHz.

---

УДК 621.371.25

## К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН ВО ВНЕШНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

Л. Е. Жмур

Исходя из механизма, описанного Поверлейном [2], который предполагает возникновение ионно-звуковых волн во внешней ионосфере в периоды геомагнитных возмущений, рассматривается влияние на эти волны столкновений ионов с молекулами и силы тяжести. Рассмотрение ведется в изотермическом приближении с учетом внешнего магнитного поля и условия замагничности плазмы.

Найдено выражение для скорости движения плазмы, вызываемой модифицированной ионно-звуковой волной. Проанализирована эффективность проникновения данной волны из внешней ионосферы в область F2.

1. В настоящее время еще не выявлена достаточно уверенно природа изменений электронной концентрации в области F в периоды геомагнитных возмущений [1]. В связи с этим большой интерес приобретает анализ возможных путей воздействия таких возмущений на ионосферу.

В [2] развита следующая схема этого воздействия. Возникающие под влиянием солнечного ветра деформации магнитосферы передаются к Земле в форме магнитогидродинамических волн. Последние в свою очередь трансформируются на высотах  $h$  порядка 1000 км в ионно-звуковые волны [2, 3]. Преобразование волн происходит вследствие резких, по сравнению с длинами магнитогидродинамических волн, изменений концентрации ионосферной плазмы. Предполагается, что ионно-звуковые волны могут вызывать изменения электронной концентрации в области F.

Можно расширить и уточнить расчеты [2, 3], которые проведены без учета влияния столкновений и силы тяжести\*.

Основной целью этой статьи и будет выявление роли тяжести и столкновений (в первую очередь столкновений ионов с молекулами, характеризующихся частотой  $\nu_{im}$ ) на распространение ионно-звуковых волн в ионосфере.

Распространение этих волн в присутствии силы тяжести в магнитоактивной плазме имеет сходные черты с распространением атмосферных внутренних волн [4]. По аналогии можно полагать, что влияние тяжести будет существенным при выполнении неравенства [2, 4]

$$kH \ll 1, \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число,  $H = \frac{x T_i}{M_i g}$  — высота однородной атмосферы ( $T_i$  — температура ионов,  $M_i$  — масса иона,  $g$  — величина ускорения силы тяжести). Для простоты массы ионов и молекул и их температуры

\* В [2] отмечено, что сила тяжести влияет на частотах  $\omega < 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Имеется также замечание о возрастающей роли столкновений при уменьшении высоты. Однако подробный расчет вклада указанных факторов не произведен.

считаем одинаковыми ( $M_i = M$  и  $T_i = T$ ). Согласно приведенным в [5, 6] данным о распределении средних значений  $M$  и  $T_i$  для высоты однородной атмосферы получаем значение  $H \approx 100$  км. Из неравенства (1) следует, что сила тяжести существенна при  $\omega \leq 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ .

2. Считаем среду квазинейтральной, полагая  $N_e \approx N_i = N$  ( $N_e$  и  $N_i$  — концентрации электронов и ионов). Исходим из квазигидродинамических уравнений для электронов и ионов:

$$mN \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -eN \left\{ E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e H_0] \right\} - \chi T_e \nabla N + mN \nu_{ei} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - mN \nu_{em} \mathbf{v}_e + mN \mathbf{g}; \quad (2)$$

$$MN \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = eN \left\{ E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i H_0] \right\} - \chi T_i \nabla N + mN \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - MN \nu_{im} \mathbf{v}_i + MN \mathbf{g}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \text{div} (N_e \mathbf{v}_e) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \text{div} (N_i \mathbf{v}_i) = 0. \quad (5)$$

Здесь  $m$  — масса электронов,  $\mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_i$  — скорости электронов и ионов,  $E$  — электрическое поле, возникающее из-за малых различий между концентрациями  $N_e$  и  $N_i$ ,  $H_0$  — геомагнитное поле,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $c$  — скорость света,  $\chi$  — постоянная Больцмана,  $\nu_{em}$  и  $\nu_{im}$  — частоты соударений электронов и ионов с молекулами,  $\nu_e$  — частота соударений между электронами и ионами. В уравнениях (2) и (3) пренебрежено вязкими слагаемыми, а в (4) и (5) — фотохимическими процессами.

Сделаем ряд упрощений в уравнениях (2) и (3) и перейдем к линейризованной системе. Так как далее рассматриваются высоты на уровне области F2 и больше, то можно считать, что  $\nu_{ei} \gg \nu_{en}$ . В то же время считаем, что выполняется неравенство  $m\nu_{ei} \ll M\nu_{im}$ . Оценки показывают, что ниже уровня  $h \approx 1000$  км оно справедливо. Далее примем, что распространение происходит в плоскости  $xz$  и поле  $H_0$  лежит в этой же плоскости, составляя угол  $\alpha$  с осью  $z$  (ось  $z$  считаем направленной вниз). Из-за сильно выраженной анизотропии в области F ( $\omega_H \gg \nu_{em}$  и  $\Omega_H \gg \nu_{im}$ , где  $\omega_H$  и  $\Omega_H$  — гирочастоты электронов и ионов) пренебрегаем поперечными, по отношению к  $H_0$ , составляющими  $\mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_i$ .

Проектируем уравнения (2)–(5) на направление  $H_0$  (ось  $z'$ ). Считая переменные величины пропорциональными  $\exp(i\omega t)$ , учитывая сделанные замечания и проводя линеаризацию, приходим, исходя из (2)–(5), к следующим уравнениям:

$$i\omega mN_0 v_{ez'} = -eN_0 E_{z'} - \chi T_e \frac{\partial N'}{\partial z'} + mN_0 \nu_{ei} (v_{iz'} - v_{ez'}) + mN' g_{z'}; \quad (6)$$

$$i\omega MN_0 v_{iz'} = eN_0 E_{z'} - \chi T_i \frac{\partial N'}{\partial z'} + mN_0 \nu_{ei} (v_{ez'} - v_{iz'}) - MN_0 \nu_{im} v_{iz'} + mN' g_{z'}; \quad (7)$$

$$i \omega N' + N_0 \frac{\partial v_{ez'}}{\partial z'} + v_{ez'} \frac{\partial N_0}{\partial z'} = 0; \quad (8)$$

$$i \omega N' + N_0 \frac{\partial v_{iz'}}{\partial z'} + v_{iz'} \frac{\partial N_0}{\partial z'} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $N_0$  — невозмущенное значение концентрации электронов (ионов),  $N'$  — их возмущенное значение ( $N = N_0 + N'$ , где  $N' \ll N_0$ ). В (6) и (7) используется условие изотермичности рассматриваемого неравновесного процесса. Для плазменной компоненты в ионосфере изотермичность является часто используемым приближением (например, в теории диффузионного расплывания неоднородностей [7]). Принимается, что условие квазинейтральности выполняется не только для равновесных значений концентраций, но и для их возмущенных значений. Тогда из уравнений (8) и (9) следует, что  $v_{ez'} = v_{iz'} = v_{z'}$ . Исключая из (6) и (7) поле  $E_{z'}$ , получаем уравнение

$$i \omega MN_0 v_{z'} = -\kappa(T_e + T_i) \frac{\partial N'}{\partial z'} - MN_0 v_{im} v_{z'} + MN' g_{z'}. \quad (10)$$

С помощью (8) (или (9)) исключаем в (10)  $N'$ :

$$-\omega^2 v_{z'} = g_{z'} \frac{dv_{z'}}{dz'} + C_0^2 \frac{d^2 v_{z'}}{dz'^2} - i \omega v_{im} v_{z'}, \quad (11)$$

где  $C_0 = \sqrt{\frac{\kappa(T_e + T_i)}{M}}$  — скорость распространения ионно-звуковых волн в изотермическом приближении, а

$$\frac{dv_{z'}}{dz'} = \frac{\partial v_{z'}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'} + \frac{\partial v_{z'}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z'}.$$

Тогда, переходя к старым координатам  $x, z$ , получаем из (11) уравнение для проекции скорости  $v_z$ :

$$\begin{aligned} -\omega^2 v_z = g \cos \alpha \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial v_z}{\partial x} \sin \alpha \right) + C_0^2 \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \cos^2 \alpha + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \sin^2 \alpha \right) - i \omega v_{im} v_z. \end{aligned} \quad (12)$$

3. Рассмотрим сначала дисперсионное уравнение (12) без соударений. Полагая, что переменная  $v_z$  изменяется по закону  $\exp(-iK_x x - iK_z z)$ , приходим к уравнению

$$\omega^2 = ig \cos \alpha (K_z \cos \alpha + K_x \sin \alpha) + C_0^2 (K_z \cos \alpha + K_x \sin \alpha)^2. \quad (13)$$

Далее будем считать  $\omega$  и  $K_x$  действительными ( $K_x = k_x$ ), а  $K_z$  представим в виде

$$K_z = k_z - i/2\tilde{H}, \quad (14)$$

где  $k_z$  — действительная величина. Тогда дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\omega^2 = C_0^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{4\tilde{H}^2} + k^2 \cos^2 \beta \right), \quad (15)$$

где  $\beta$  — угол между  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{H}_0$  и  $\tilde{H} = \frac{x(T_e + T_i)}{Mg}$ . Уравнение (15) описывает ионные звуковые волны при учете тяжести. Оно отличается от известного уравнения для атмосферных волн (см., например, [4]) сомножителями  $\cos^2\alpha$  и  $\cos^2\beta$ , которые отражают вклад геомагнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Особенно сильной будет аналогия при  $k_x=0$ , когда  $\cos^2\alpha = \cos^2\beta$ , и уравнение (15) приобретает вид\*

$$\omega^2 = C_0^2 \cos^2\alpha \left( k^2 + \frac{1}{4H^2} \right).$$

Используя уравнение (15), найдем соотношения для компонент групповой скорости ионно-звуковых волн:  $\mathbf{v}_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}$ . Имея в виду, что  $k \cos\beta = k_x \sin\alpha + k_z \cos\alpha$ , и дифференцируя, находим

$$v_{гр, x} = \frac{C_0^2 k \sin\alpha \cos\beta}{\omega}; \quad (16)$$

$$v_{гр, z} = \frac{C_0^2 k \cos\alpha \cos\beta}{\omega}. \quad (17)$$

При  $\alpha=0$  имеется только вертикальная проекция групповой скорости, а при  $\alpha=\pi/2$  — только горизонтальная проекция. При условии, обратном (1), когда  $\omega/k \approx C_0 \cos\beta$ , абсолютное значение скорости  $\mathbf{v}_{гр}$  равно  $v_{гр}=C_0$ , а ее направление параллельно направлению силовых линий магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Эти утверждения являются хорошо известными [8]. Условие  $\mathbf{v}_{гр} \parallel \mathbf{H}_0$  выполняется и в нашем случае, когда справедливо неравенство (1).

4. Рассмотрим теперь случай, когда принимается во внимание наличие столкновений ионов с молекулами. Для ионно-акустических волн существенным фактором во внешней ионосфере может быть бесстолкновительное черенковское поглощение (затухание Ландау). Влияние этого затухания не может быть учтено в рамках используемого гидродинамического приближения, и поэтому здесь это затухание не фигурирует. Можно заметить, что в области, примыкающей к максимуму области  $F$ , плазма в какой-то степени неизотермична ( $T_e > T_i$ ). В силу этого при максимальной неизотермичности бесстолкновительное затухание может быть не очень большим. Кроме того, следует иметь в виду, что в существенной части рассматриваемого интервала высот, где  $\omega \lesssim v_{im}$ , явно преобладающим будет столкновительный механизм затухания, учет которого и составляет главную цель работы. Что же касается внешней ионосферы и магнитосферы, то на этих высотах возможность появления ионно-акустических волн, по существу, постулируется. Реально же в магнитосфере слабозатухающие ионно-акустические волны могут существовать из-за дестабилизирующих факторов (анизотропный характер функции распределения по скоростям и т. п.).

Полагая, как и в разд. 3, что  $v_z \sim \exp(-ik_x x)$ , из (12) получаем

$$\frac{d^2 v_z}{dz^2} + \left( \frac{g}{C_0^2} - 2ik_x \operatorname{tg}\alpha \right) \frac{dv_z}{dz} + \left( \frac{\omega^2}{C_0^2 \cos^2\alpha} - \right.$$

\* Для атмосферных волн в изотермическом случае  $\omega^2 = C_0^2 \left( k^2 + \frac{1}{4H^2} \right)$ , где  $C_0$  — скорость звука.



$$\left( -\frac{ik_x g \operatorname{tg} \alpha}{C_0^2} - k_x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{i \omega v_{im}}{C_0^2 \cos^2 \alpha} \right) v_z = 0. \quad (18)$$

Частота  $\nu_{im}$  на высоте  $h$  в 1000 км примерно равна  $10^{-4} \text{ с}^{-1}$  [2]. Для высоты от 1000 км до максимума области  $F$  выберем в качестве простой модели распределения  $\nu_{im}$  с высотой следующую:

$$\nu_{im} = \nu_{im0} \exp(z/H), \quad (19)$$

полагая, что уровень  $z = 0$  расположен там, где образуются ионно-звуковые волны ( $h \approx 1000 \text{ км}$ ).

Используя (19) и делая замену переменных  $p = z/H$ , из (18) получаем

$$\frac{d^2 v_z}{dp^2} + \left( \frac{g}{C_0^2} - 2ik_x \operatorname{tg} \alpha \right) H \frac{dv_z}{dp} + \left( \frac{\omega^2}{C_0^2 \cos^2 \alpha} - \frac{ik_x g \operatorname{tg} \alpha}{C_0^2} - k_x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{i \omega v_{im0} \exp(p)}{C_0^2 \cos^2 \alpha} \right) H^2 v_z = 0. \quad (20)$$

Общее решение (20) может быть представлено в виде [9]

$$v_z = \exp \left[ - \left( \frac{g}{2C_0^2} - ik_x \operatorname{tg} \alpha \right) z \right] [C_1 H_\lambda^{(1)}(y) + C_2 H_\lambda^{(2)}(y)], \quad (21)$$

где  $H_\lambda^{(1)}(y)$  и  $H_\lambda^{(2)}(y)$  — функции Ханкеля первого и второго рода и

$$y = \frac{2H}{C_0 \cos \alpha} \sqrt{-i \omega v_{im0} \exp \left( \frac{z}{2H} \right)}; \quad (22)$$

$$\lambda = \frac{H}{C_0 \cos \alpha} \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}. \quad (23)$$

Пусть амплитудное значение скорости  $v_z$  в волне при  $z = 0$  равно  $v_0$ . Рассмотрим асимптотическое поведение решения (21) при больших  $z$ , чему отвечает условие

$$y^2 \gg \lambda. \quad (24)$$

Учитывая (19), из (24) находим, что выражением для  $v_z$  при больших  $z$  можно пользоваться только при выполнении неравенства

$$\nu_{im} \gg \omega. \quad (25)$$

Воспользуемся асимптотическими представлениями функций Ханкеля для больших аргументов [10]

$$H_\lambda^{(1)}(y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \exp \left[ i \left( y - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad (26)$$

$$H_\lambda^{(2)}(y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \exp \left[ -i \left( y - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (27)$$

Используя функции (26) и (27), убеждаемся, что  $C_1 = 0$  (оставляем только затухающее решение). Тогда решение (21) запишется:

$$v_z = C_2 \exp \left[ - \left( \frac{g}{2C_0^2} - ik_x \operatorname{tg} \alpha \right) z \right] H_\lambda^{(2)}(y), \quad (28)$$

Используя (27), приходим к выражению

$$v_z = C_2 \exp \left[ - \left( \frac{g}{2C_0^2} - ik_x \operatorname{tg} \alpha \right) z \right] \left( \frac{\pi H}{C_0 \cos \alpha} \right)^{-1/2} (\omega v_{im})^{-1/4} \times \quad (29)$$

$$\times \exp \left[ - \frac{HV \sqrt{2\omega v_{im}}}{C_0 \cos \alpha} + i \left( \frac{\pi}{2} \frac{HV g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}{C_0^2 \cos \alpha} - \frac{HV \sqrt{2\omega v_{im}}}{C_0^2 \cos \alpha} + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Для нахождения постоянной  $C_2$  используем разложение функции  $H_\lambda^{(2)}(y)$  при малых  $y$  [11] (в области вблизи  $z = 0$ ):

$$H_\lambda^{(2)}(y) = \frac{i}{\sqrt{2\pi} \sin \lambda\pi} \exp \left[ -\lambda - \lambda \ln \frac{y}{2} - \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) \ln (-\lambda) \right] - \quad (30)$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2\pi} \sin \lambda\pi} \exp \left[ \lambda\pi i + \lambda + \lambda \ln \frac{y}{2} - \left( \frac{1}{2} + \lambda \right) \ln \lambda \right].$$

Первое слагаемое в (30) соответствует падающей волне. Считая, что для этой волны  $v_z = v_0$  при  $z = 0$ , из (28) находим  $C_2$ . Тогда с учетом (19) из (29) получаем

$$v_z = Av_0 v_{im}^{-1/4} \exp \left[ - \frac{HV \sqrt{2\omega v_{im}}}{C_0 \cos \alpha} (1+i) - \left( \frac{g}{2C_0^2} - ik_x \operatorname{tg} \alpha \right) z \right], \quad (31)$$

где

$$A = \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi H V g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}{C_0^2 \cos \alpha} \right) \left( \frac{H}{C_0 \cos \alpha} \right)^{-1/2} \times$$

$$\times \omega^{-1/4} \exp \left[ \frac{HV \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}}{C_0^2 \cos \alpha} + \frac{HV \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}}{C_0^2 \cos \alpha} \times \right.$$

$$\times \ln \left( \frac{HV \omega v_{im0}}{C_0 \cos \alpha} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{HV \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}}{C_0^2 \cos \alpha} -$$

$$- \frac{HV \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}}{C_0^2 \cos \alpha} \ln \frac{HV \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}}{C_0^2 \cos \alpha} +$$

$$\left. + i \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \frac{HV \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha - 4\omega^2 C_0^2}}{C_0^2 \cos \alpha} \right) \right].$$

Формула (31) переходит в выражение для скорости движения плазмы, вызываемой ионно-звуковой волной, полученное в [12] без учета силы тяжести. В [12] использовалось условие, обратное (1). Из (31) следует, что основным фактором, определяющим убывание  $v_z$  при проникновении в ионосферу является множитель  $\exp \left( - \frac{HV \sqrt{2\omega v_{im}}}{C_0 \cos \alpha} - \frac{gz}{2C_0^2} \right)$ . Заметим, что множитель  $\exp \left( - \frac{gz}{2C_0^2} \right) = \exp \left( - \frac{z}{2H} \right)$ , не связан с диссипацией из-за столкновений. Его появление является очевидным следствием закона сохранения энергии в среде с переменной плотностью.

При наличии сильного столкновительного затухания убывание  $v_z$  связано с множителем

$$\exp\left(-\frac{H\sqrt{2\omega\nu_{im}}}{C_0 \cos \alpha} - \frac{gz}{2C_0^2}\right).$$

Для того, чтобы понять его смысл, проделаем следующее: оставим в уравнении (18) те слагаемые, которые содержат  $\nu_{im}$ . Получим

$$\frac{d^2 v_z}{dz^2} - \frac{i\omega\nu_{im}}{C_0^2 \cos^2 \alpha} v_z = 0. \quad (32)$$

Полагая  $v_z \sim \exp\left(-\int q dz\right)$  и определяя из (32) значение  $q$ , легко заметить, что мы получаем тот же закон изменения  $v_z$  от  $\nu_{im}$ , что и в (31). Разница в множителе  $\sqrt{2}$  объясняется тем, что при больших  $z$  использовались асимптотические представления функций Ханкеля, которые являются приближенными.

Таким образом, при  $z \gg H$  множитель  $\exp\left(-\frac{H\sqrt{2\omega\nu_{im}}}{C_0 \cos \alpha}\right)$ , фактически, соответствует случаю геометрической оптики (в зоне сильного поглощения).

На рис. 1 показана зависимость фактора

$$B = \exp\left(-\frac{H\sqrt{2\omega\nu_{im}}}{C_0 \cos \alpha}\right),$$

который характеризует величину энергетического поглощения волн из-за влияния соударений в зависимости от высоты  $h$  над землей (кривая 1 —  $\omega = 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ , кривая 2 —  $\omega = 10^{-3} \text{ c}^{-1}$ ). Из графиков видно, что энергия модифицированных ионно-звуковых волн, по мере их проникновения внутрь ионосферы, уменьшается до высот области  $F$  не очень значительно.

Итак, с энергетической точки зрения проникновение рассматриваемых волн на высоты области  $F$  вполне возможно.

Однако следует иметь в виду, что в средах с переменной плотностью значение амплитуды скорости может существенно меняться с высотой даже в отсутствие диссипативных процессов ( $\nu_{im} \rightarrow 0$ ).

В данном случае это обстоятельство отражено наличием множителя  $\exp(-z/2H)$ . С учетом этого множителя величина скорости плазмы, индуцируемая модифицированной ионно-звуковой волной, заметно убывает на расстоянии  $2H \approx 200 \text{ км}$ . Поэтому предлагаемая в [2] схема воздействия на область  $F$  ионосферы в своем первоначальном виде сталкивается с существенными трудностями. Эти трудности были бы меньше, если бы область трансформации располагалась ниже  $1000 \text{ км}$ . Окончательный вывод можно сделать после анализа эффекта «всасывания», который лежит в основе теории из [2]. Этот эффект проявляется в том, что из-за движения плазмы в модифицированной ионно-зву-

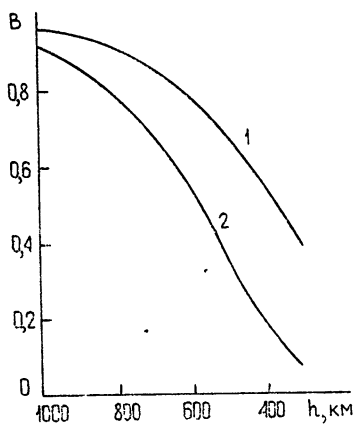


Рис. 1.

ковой волне в районе трансформации волн происходит изменение концентрации электронов в районе максимума области  $F_2$ .

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. Н. Гершману за руководство работой и Ю. Я. Яшину за дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. Ионосферные возмущения и их влияние на радиосвязь, изд. Наука, М., 1971.
2. H. Poverlein, *J. Atm. Terr. Phys.*, **28**, № 11, 1111 (1966).
3. H. Poverlein, *Phys. Rev.*, **136**, № 6A, 1605 (1964).
4. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **11**, № 1, 5 (1968).
5. Сб. Исследование ионосферы, изд. Наука, Н., 1970, стр. 86.
6. S. J. Bauer, J. E. Jackson, *J. Geophys. Res.*, **67**, 1675 (1962).
7. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедиллина, *УФН*, **91**, вып. 4, 609 (1967).
8. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, изд. Наука, М., 1967.
9. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным и дифференциальным уравнениям*, изд. Наука, М., 1971.
10. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, изд. Наука, М., 1965.
11. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, часть 1, ИЛ, М., 1949.
12. Л. Е. Жмур, *Геомagnetизм и аэрономия*, **13**, № 5, 825 (1973).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
19 октября 1972 г.,  
после доработки  
14 января 1975 г.

#### TO THE THEORY OF PROPAGATION OF MODIFIED ION-SOUND WAVES IN THE OUTER IONOSPHERE

*L. E. Zhmur*

Starting from the mechanism described by Poverlein [2] who suggests the occurrence of ion-sound waves in the outer ionosphere in the period of geomagnetic perturbations, the influence of ion and molecule collisions on these waves and the gravity are considered. Consideration is made in the isothermal approximation with taking into account the external magnetic field and the condition of plasma magnetization.

An expression is found for the velocity of plasma motion caused by a modified ion-sound wave. The efficiency of penetration of the given wave out of the outer ionosphere into  $F$ -region has been analysed.

УДК 523.164

## ИЗМЕРЕНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ В ЖИДКОМ КИСЛОРОДЕ НА ЧАСТОТЕ 2,71 ГГц

*В. И. Дианов-Клоков, В. П. Иванов, О. А. Матвеева,  
К. С. Станкевич*

Методом абсолютных радиоастрономических измерений собственного излучения исследовано поглощение жидкого кислорода и его смесей с азотом на частоте  $\nu = 2,7$  ГГц. Полученные значения оказались в пределах погрешностей пропорциональными объемному содержанию кислорода.

Абсолютная величина поглощения для чистого жидкого кислорода ( $\lg \delta \approx 7,4 \cdot 10^{-4}$ ) согласуется с вычисленной на основании теории Дебая для поглощения полярной жидкости.

Проведенные нами измерения нерезонансного поглощения сжатого кислорода на частоте 2,57 ГГц при  $T = 273$  К и плотностях до 150 амага обнаружили некоторое превышение поглощения кислорода над рассчитанным для различных вариантов теории, не учитывающих взаимодействия молекул [1]. Это превышение предположительно трактовалось как проявление переходов, индуцированных межмолекулярным взаимодействием. С целью дальнейшего исследования эффекта было решено распространить измерения на область еще больших плотностей молекул  $O_2$  и, в частности, обследовать жидкий кислород и его смеси с азотом.

Исследования поглощения в жидком кислороде проводились на частоте 2,71 ГГц по его собственному излучению на основе метода абсолютных радиоастрономических измерений малых интенсивностей [2]. Блок-схема установки изображена на рис. 1.

В качестве антенны использовался рупор (1), близкий к оптимальному, с раскрывом  $30 \times 30$  см<sup>2</sup>. Пенопластовая ванна (5) заполнялась жидким кислородом с толщиной слоя до 27 см. Для уменьшения температуры шумов, «подсвечивающих» пенопластовую ванну с исследуемым веществом, пространство вокруг установки металлизировалось (4), а уменьшение излучения антенны достигалось подключением приемника через циркулятор (2), нагруженный вспомогательным рупором (3).

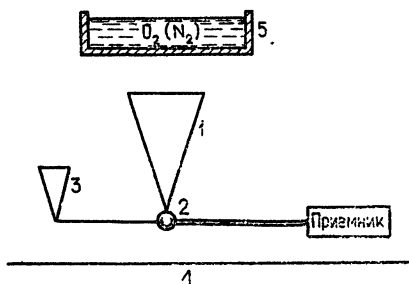


Рис. 1.

На первом этапе эксперимента снимались кривые испарения жидкого кислорода (кружки на рис. 2). При этом измерялась разность температур антенны,  $\Delta \tilde{T}_{O_2}(d) = T_{во_2}(d) - T_n$ , при приеме излучения от ванны, заполненной кислородом ( $T_{во_2}$ ), и от неба ( $T_n$ ) при отодвинутой ванне в зависимости от толщины слоя жидкости  $d$ . Калибровка температуры антенны производилась по разности сигналов от погло-

щающего эталона, находившегося при температуре окружающего воздуха, и от неба в зените. Температура неба  $T_n$  на волнах дециметрового диапазона хорошо известна и для интервалов времени, когда плоскость Галактики не проходит через зенит, равно  $T_n = 6$  К. Таким образом, калибровочная разность сигналов соответствовала  $\Delta T_K = T_0(1 - R_0) - 6$  К\*, где  $R_0$  — коэффициент отражения эталона. Совокупность

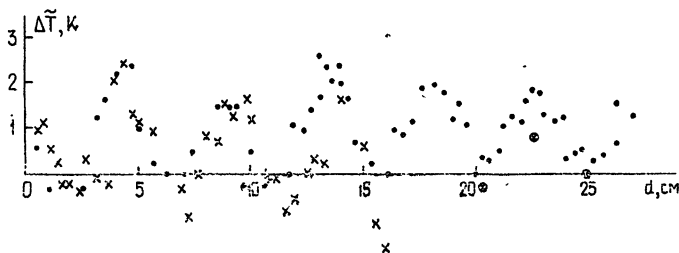


Рис. 2.

экспериментальных точек на рис. 2 представляет собой периодическую кривую, характеризующую изменение коэффициента отражения слоя в зависимости от его толщины. Поскольку исследуемое поглощение кислорода весьма мало, для повышения точности измерений была использована методика, при которой радиоизлучение пенопластовой ванны, заполненной жидким кислородом, сравнивалось с излучением идентичной ванны, заполненной слоем жидкого азота такой же толщины. Для этого были сняты кривые  $\Delta T(d) = T_{\text{вн},n}(d) - T_n$  при выкипании жидкого азота. Как оказалось, период интерференции для них был таким же, как для кислородных (см. крестики на рис. 2); одинаковыми оказались и коэффициенты отражения из слоев равной толщины (например, в максимуме при  $d = 4,2$  см  $R_{O_2} \approx R_{N_2} \approx 0,4\%$  по мощности).

В дальнейших опытах для сокращения длительности эксперимента измерения поглощения проводились при толщинах слоя  $d$ , отвечающих максимумам и минимумам интерференционной картины на этих кривых. Процесс измерений состоял из циклов, каждый из которых включал запись радиоизлучения неба, ванны с кислородом, ванны с азотом с такой же толщиной слоя  $d$ , снова радиоизлучения неба. После каждого пяти таких циклов делалась калибровка. Температура радиоизлучения слоя жидкого кислорода в этом случае определялась как

$$\Delta T(d) = \Gamma_{O_2} d (T_{O_2} - T_n), \quad \Gamma_{O_2} = 2\pi \frac{\nu}{c} (\text{tg } \delta)_{O_2}, \quad (1)$$

где  $\Gamma_{O_2}$  — коэффициент поглощения в жидком кислороде,  $\text{tg } \delta$  — тангенс угла потерь,  $T_{O_2} = 90$  К — температура жидкого кислорода.

Полученная зависимость температуры радиоизлучения жидкого кислорода  $\Delta T(d)$  от толщины слоя приведена на рис. 3; где кружки представляют экспериментальные данные.

\* При необходимости более точного знания температуры калибровочного сигнала можно использовать калибровку по двум эталонам, одним из которых является поглощающее тело, охлаждаемое жидким азотом, а другое находится при температуре окружающего воздуха.

Аналогичные измерения были проведены для жидких смесей кислорода и азота 50% O<sub>2</sub> и 50% N<sub>2</sub>, 20% O<sub>2</sub> и 80% N<sub>2</sub> для толщины слоя 22,6 см. Соответствующие результаты приведены в табл. 1.

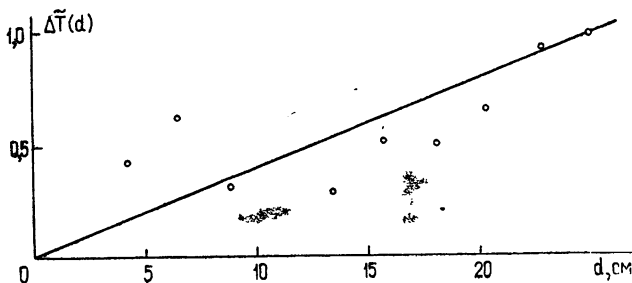


Рис. 3.

Таблица 1

Объемная концентрация кислорода в смеси, %	Плотность кислорода в смеси ρ <sub>O<sub>2</sub></sub> , амага	Температура смеси, К	Δ T, К (d=22,6 см)	Γ <sub>O<sub>2</sub></sub> , 1/см	tg δ	tg δ <sub>экстрп</sub>
100	800	91	0,90	4,1 · 10 <sup>-4</sup>	7,4 · 10 <sup>-4</sup>	10,2 · 10 <sup>-4</sup>
50	370	84	0,31	1,64 · 10 <sup>-4</sup>	2,9 · 10 <sup>-4</sup>	5,5 · 10 <sup>-4</sup>
20	140	80	0,18	1 · 10 <sup>-4</sup>	1,75 · 10 <sup>-4</sup>	3,4 · 10 <sup>-4</sup>

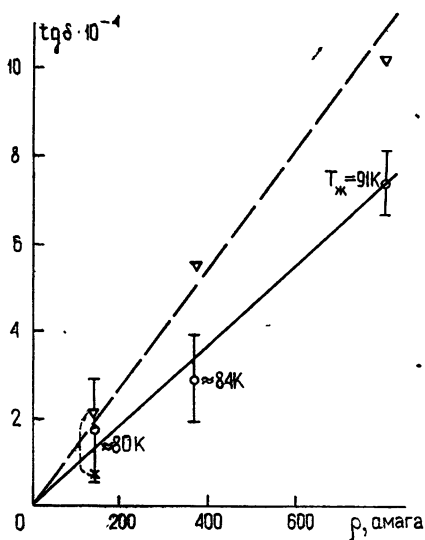


Рис. 4.

Как видно из таблицы и рис. 4, при постоянной толщине слоя поглощение в пределах погрешностей остается пропорциональным объемной плотности кислорода. Это свидетельствует о том, что ширина линии поглощения Δ, обратная времени релаксации, не меняется в процессе разбавления чистого кислорода жидким азотом. Это обстоятельство правдоподобно объясняется тем, что Δ определяется взаимодействием как молекул O<sub>2</sub>—O<sub>2</sub>, так и O<sub>2</sub>—N<sub>2</sub>. Если близки эффективные сечения взаимодействия таких пар\*, то постоянство Δ связано с тем, что общее число молекул в единице объема смеси в первом приближении постоянно при любой концентрации кислорода.

Приведенные выше результаты можно сопоставить с данными, полученными нами для сжатого кислорода при T ≈ 273 К [1]. При мак-

\* Последнее характерно для ситуации, когда основными силами взаимодействия являются универсальные ван-дер Ваальсовские силы. В газе при атмосферном давлении это действительно имеет место [3], поскольку электрические дипольные переходы для молекулы кислорода запрещены.

симальной достигнутой в цитированной работе плотности  $(\rho_{O_2})_{\max} = 150$  амага тангенс угла потерь оказался равным  $(\operatorname{tg} \delta)_{\text{газ}} = 0,64 \cdot 10^{-4}$ , причем поглощение возрастало быстрее, чем первая степень плотности газа. Согласно существующим теориям нерезонансное поглощение газобразным кислородом меняется с температурой пропорционально  $1/T^n$ , где  $n \geq 1$  (см., например, [5, 6]). По этой причине величина

$$(\operatorname{tg} \delta)_{\text{экстрап}} = (\operatorname{tg} \delta)_{\text{газ, 273}} \frac{\rho_{\text{жидк}}}{\rho_{\text{газ}}} \frac{273}{T_{\text{жидк}}} \quad (2)$$

является минимальным значением поглощения, которое можно было бы ожидать в жидкости при сохранении в ней неизменным того же механизма поглощения, что и в газе. Как видно, однако, из таблицы и из рис. 4, даже эти экстраполированные значения оказываются выше найденных в эксперименте. Таким образом, процессы, связанные с нерезонансным поглощением в жидкости, оказываются отличающимися от характерных для газа. Это наводит на мысль, что попарные межмолекулярные взаимодействия, вызывающие индуцированное поглощение в сжатом газе, в жидкости проявляются значительно слабее.

В этой связи представляет интерес оценить полученные величины  $\operatorname{tg} \delta$  с позиций нерезонансного поглощения полярными жидкостями. Согласно теории Дебая [4] эти потери равны

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{(\epsilon + 2)^2}{\epsilon} \frac{4 \pi \mu^2 n}{27 kT} \frac{\nu \Delta}{\nu^2 + \Delta^2}, \quad (3)$$

где  $\epsilon = 1,463$  — статическая диэлектрическая постоянная жидкого кислорода,  $\mu$  — магнитный дипольный момент молекул  $O_2$ ,  $n$  — число молекул кислорода в единице объема,  $\nu$  — частота,  $\Delta$  — ширина полосы дебаевского поглощения, определяемая вязкостью жидкости,  $k$  — постоянная Больцмана. При подстановке  $n = 2,2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  ( $\rho \approx 820$  амага),  $T = 91 \text{ К}$  имеем для случая чистого кислорода

$$\operatorname{tg} \delta = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{\nu \Delta}{\nu^2 + \Delta^2}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что максимальная величина тангенса угла потерь, достигаемая при  $\nu = \Delta$ , составляет  $\operatorname{tg} \delta \approx 7,5 \cdot 10^{-4}$ , т. е. практически совпадает с измеренной экспериментально (см. таблицу).

Если применение (3) для описания полученных нами результатов правомерно, это означает, в частности, что  $\Delta \approx 2,7 \text{ МГц}$  и время релаксации магнитных диполей в жидком кислороде

$$\tau = \frac{1}{2 \pi \Delta} \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

Суммируя, можно заключить, что сопоставление с данными экстраполяции поглощения в газе и с оценками дебаевского поглощения (3) не выявляет на частоте  $\nu = 2,7 \text{ ГГц}$  каких-либо признаков эффектов индуцированного нерезонансного поглощения в жидком кислороде. Существование таких признаков в сжатом кислороде при  $\rho \approx 150$  амага [1] дает, однако, основание предположить, что более отчетливого их проявления можно ожидать в газе при плотностях  $\rho \approx 300 \div 400$  амага, когда практически межмолекулярные взаимодействия еще не «выключают» полностью вращательную степень свободы молекул  $O_2$ .



## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Дианов-Клоков, В. П. Иванов, О. А. Матвеева, К. С. Станкевич, Изв. АН СССР, серия физ. атм. и океана (в печати).
2. К. С. Станкевич, В. П. Ласточкин, В. А. Торхов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 12, 1758 (1967).
3. J. O. Artman, J. P. Gordon, Phys. Rev., 96, № 5, 1237 (1954).
4. В. Гордон, В. Смит, Р. Трамбуарло, Радиоспектроскопия, Гостехиздат, М., 1955.
5. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, № 7, 413 (1947).
6. J. Gordon, J. Chem. Phys., 46, № 2, 448 (1967).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
29 октября 1974 г.

MEASUREMENTS OF ABSORPTION IN LIQUID OXYGEN AT A FREQUENCY  
OF 2.71 GHz

*V. I. Dianov-Klokov, V. P. Ivanov, O. A. Matveeva, K. S. Stankevich*

The absorption of liquid oxygen and its mixtures with nitrogen at  $\nu = 2.7$  GHz has been investigated by the method of absolute radioastronomical measurements of the natural radiation. The obtained values appeared to be, in the error limits, proportional to the volume oxygen content.

The absolute absorption value for a pure liquid oxygen ( $\text{tg } \delta \approx 7.4 \cdot 10^{-4}$ ) agrees with that calculated on the basis of the Debye theory for absorption of the polar liquid.

---

УДК 621.371

## К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МОЩНЫХ МОДУЛИРОВАННЫХ РАДИОВОЛН

А. А. Капельзон

Показано, что резонансное взаимодействие распространяющихся навстречу друг другу мощных модулированных радиоволн приводит к дополнительному искажению их модуляции, сравнимому по величине с «самодействием». В частности, рассмотрено взаимодействие прямоугольных радиопульсов и синусоидально модулированных волн.

Как показано в [1], резонансное взаимодействие двух монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в столкновительной плазме навстречу друг другу, приводит к существенному изменению их поглощения. В этой связи представляется интересным рассматриваемый ниже случай, когда амплитуды взаимодействующих волн являются медленно меняющимися функциями времени и координат. В работе исследуется резонансное взаимодействие таких волн. Под резонансным взаимодействием [2] здесь понимается несинхронное (или амплитудное) взаимодействие волн в среде с кубической нелинейностью. Будем также пользоваться термином «температурное взаимодействие», подразумеваемая под этим обычную кроссмодуляцию, т. е. изменение условий распространения волны в среде, нагретой другой волной.

Как обычно, исходная система уравнений представляет собой волновое уравнение для поля  $E$ , уравнение для вектора поляризации  $P$  и уравнение баланса энергии электронов:

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \nu(T_e) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} E; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} + \delta\nu(T_e) (T_e - T) = \frac{2}{3\pi N} E \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (3)$$

Нелинейность будем считать слабой, т. е.

$$x = \frac{T_e - T}{T} \ll 1. \quad (4)$$

Поле  $E$  и поляризацию  $P$  представим в виде

$$E = A_1(z, t) e^{i(\omega t - kz)} + A_2(z, t) e^{i[\omega t - k(L-z)]} + \text{к. с.}; \quad (5a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = B_1(z, t) e^{i(\omega t - kz)} + B_2(z, t) e^{i[\omega t - k(L-z)]} + \text{к. с.} \quad (5b)$$

Тогда работа (усредненная за период), совершаемая полем над электронами, будет:

$$\overline{\frac{\partial P}{\partial t}} = (A_1 B_1^* + A_1^* B_1) e^{-i(k-k^*)z} + (A_2 B_2^* + A_2^* B_2) e^{-i(k-k^*)(L-z)} + (A_1 B_2^* + A_2^* B_1) e^{-i(k+k^*)z} e^{ik^*L} + (A_1^* B_2 + A_2 B_1^*) e^{i(k+k^*)z} e^{-ikL}. \quad (6)$$

Для (3) с учетом (4) будем искать решение в виде

$$x = x_1 e^{-i(k-k^*)z} + x_2 e^{-i(k-k^*)(L-z)} + x_3 e^{-i(k+k^*)z} e^{ik^*L} + x_4 e^{i(k+k^*)z} e^{-ikL}. \quad (7)$$

Введем обозначения  $a_1 = A_1/E_p$ ,  $a_2 = A_2/E_p$ . Тогда из системы уравнений (1)–(3) получим

$$\frac{\partial |a_1|^2}{\partial t} + v_{\text{гp}} \frac{\partial |a_1|^2}{\partial z} = -2\rho_0 [x_0 |a_1|^2 + (x_3 a_2 a_1^* + x_4 a_2^* a_1) e^{-2\gamma(L-z)}]; \quad (8)$$

$$\frac{\partial |a_2|^2}{\partial t} - v_{\text{гp}} \frac{\partial |a_2|^2}{\partial z} = -2\rho_0 [x_0 |a_2|^2 + (x_4 a_1 a_2^* + x_3 a_1^* a_2) e^{-2\gamma z}], \quad (9)$$

где

$$\gamma = i(k-k^*) = \frac{\omega}{c} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2} \frac{\nu_0}{\omega}, \quad x_0 = x_1 e^{-2\gamma z} + x_2 e^{-2\gamma(L-z)},$$

$$v_{\text{гp}} = \frac{c^2 \operatorname{Re} k}{\omega \left[ 1 - \frac{\omega_0^2 \nu_0^2}{(\omega^2 + \nu_0^2)^2} \right]}, \quad \rho_0 = - \frac{\nu_1 \omega_0^2 (\nu_0^2 - \omega^2)}{(\omega^2 + \nu_0^2)^2 \left[ 1 - \frac{\omega_0^2 \nu_0^2}{(\omega^2 + \nu_0^2)^2} \right]},$$

$$\nu_1 = \left. \frac{\partial \nu_{\text{эфф}}(T_e)}{\partial T_e} \right|_{T_e=T}.$$

Решение уравнений (3), (4), (7) имеет вид

$$x_1 = 4\delta\nu_0 e^{-\delta\nu_0 t} \int_{-\infty}^t \left| a_{10} \left( t' - \frac{z}{v} \right) \right|^2 e^{\delta\nu_0 t'} dt', \quad x_2 = 4\delta\nu_0 e^{-\delta\nu_0 t} \times \\ \times \int_{-\infty}^t \left| a_{20} \left( t' - \frac{L-z}{v} \right) \right|^2 e^{\delta\nu_0 t'} dt', \\ x_3 = 4\delta\nu_0 e^{-\delta\nu_0 t} \int_{-\infty}^t a_{10} \left( t' - \frac{z}{v} \right) a_{20}^* \left( t' - \frac{L-z}{v} \right) e^{\delta\nu_0 t'} dt', \quad (10)$$

$$x_4 = 4\delta\nu_0 e^{-\delta\nu_0 t} \int_{-\infty}^t a_{10}^* \left( t' - \frac{z}{v} \right) a_{20} \left( t' - \frac{L-z}{v} \right) e^{\delta\nu_0 t'} dt',$$

где

$$a_{10} = a_1(z=0), \quad a_{20} = a_2(z=L).$$

Для уравнений (8), (9) с учетом (10) решение можно записать в виде

$$|a_1(t, z)|^2 = \left| a_{10} \left( t - \frac{z}{v} \right) \right|^2 - \frac{\rho_0}{v_{\text{гp}}} \int_0^z F_1 \left( t - \frac{z}{v} + \frac{z'}{v}, z' \right) dz'; \quad (11)$$

$$|a_2(t, z)|^2 = \left| a_{20} \left( t - \frac{L-z}{v} \right) \right|^2 + \frac{p_0}{v_{\text{гp}}} \int_L^z F_2 \left( t + \frac{z}{v} - \frac{z'}{v}, z' \right) dz', \quad (12)$$

где

$$F_1(t, z) = 2x_0 \left| a_{10} \left( t - \frac{z}{v} \right) \right|^2 + \left[ x_3 a_{20} \left( t - \frac{L-z}{v} \right) a_{10}^* \left( t - \frac{z}{v} \right) + \right. \\ \left. + x_4 a_{20}^* \left( t - \frac{L-z}{v} \right) a_{10} \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] e^{-2\gamma(L-z)},$$

$$F_2(t, z) = 2x_0 \left| a_{20} \left( t - \frac{L-z}{v} \right) \right|^2 + \left[ x_4 a_{10} \left( t - \frac{z}{v} \right) a_{20}^* \left( t - \frac{L-z}{v} \right) + \right. \\ \left. + x_3 a_{10}^* \left( t - \frac{z}{v} \right) a_{20} \left( t - \frac{L-z}{v} \right) \right] e^{-2\gamma z}.$$

Рассмотрим случай, когда из точек  $z = 0$  и  $z = L$  навстречу друг другу распространяются импульсы соответственно длительностью  $T_1$  и  $T_2$  (для определенности будем считать, что  $T_1 > T_2$ ):

$$a_{10} \left( t - \frac{z}{v} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{z}{v} \\ p & \text{при } \frac{z}{v} \leq t \leq \frac{z}{v} + T_1, \\ 0 & \text{при } t > \frac{z}{v} + T_1 \end{cases}$$

$$a_{20} \left( t - \frac{L-z}{v} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{L-z}{v} \\ q & \text{при } \frac{L-z}{v} \leq t \leq \frac{L-z}{v} + T_2, \\ 0 & \text{при } t > \frac{L-z}{v} + T_2 \end{cases}$$

Тогда согласно (11) амплитуда передней части импульса  $a_1$  ( $0 < t - \frac{z}{v} = \theta < T_2$ ) после прохождения им области взаимодействия будет

$$|a_1(t, z)|^2 = |a_{10}(\theta)|^2 \left\{ 1 - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} p^2 (1 - e^{-\delta v_0 \theta}) (1 - e^{-2\gamma z}) - \right. \\ \left. - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} q^2 \exp[-\gamma(L + v_{\text{гp}} \theta)] \left\{ \exp(\gamma v_{\text{гp}} T_2) - 1 \right\} - \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гp}}} \left\{ \exp \left[ \left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гp}}} \right) v_{\text{гp}} T_2 \right] - 1 \right\} - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} q^2 e^{-\gamma L} \times \right. \\ \left. \times \left[ (1 - e^{-\gamma v_{\text{гp}} \theta}) - \frac{\gamma}{\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гp}}} e^{-\delta v_0 \theta} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гп}}} \right) v_{\text{гп}} \theta \right] \right\} \right] \right\} + (13)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} q^2 (1 - e^{-\delta v_0 \theta}) e^{-\gamma L} \{1 - \exp[-\gamma v_{\text{гp}} (\theta - T_2)]\} - \\
& - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} (\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гp}})} q^2 (e^{\delta v_0 T_2} - 1) \left\{ e^{-2\gamma(L-z)} \exp \left[ -\delta v_0 \left( \theta - \frac{L-2z}{v_{\text{гp}}} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \exp[-\gamma(L+v_{\text{гp}}\theta)] \exp \left[ \left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гp}}} \right) v_{\text{гp}} T_2 \right] \right\} = |a_{10}(\theta)|^2 \{1 - f_1 - f_2 - f_3 + f_4 - f_5\}.
\end{aligned}$$

Здесь член  $f_1$  связан с самовоздействием импульса [3],  $f_2$  с температурным взаимодействием, члены  $f_3, f_4$  — обусловлены резонансным характером взаимодействия,  $f_5$  — определяет температурное взаимодействие с «хвостом» импульса  $a_2$ , т. е. обусловлен распространением импульса  $a_1$  в среде, еще не остывшей после распространения в ней импульса  $a_2$ .

Для задней части импульса  $a_1$  ( $T_2 < \theta \doteq t - z/v < T_1$ ) получим

$$\begin{aligned}
|a_1(t, z)|^2 &= |a_{10}(\theta)|^2 \left\{ 1 - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} p^2 (1 - e^{-\delta v_0 \theta}) (1 - e^{-2\gamma z}) - \frac{8p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} q^2 \times \right. \\
& \times e^{-\gamma(L+v_{\text{гp}}\theta)} \left[ (e^{\gamma v_{\text{гp}} T_2} - 1) - \frac{\gamma}{\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гp}}} \left\{ \exp \left[ \left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гp}}} \right) v_{\text{гp}} T_2 \right] - 1 \right\} \right] - \\
& - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} (\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гp}})} q^2 (e^{\delta v_0 T_2} - 1) \left\{ e^{-2\gamma(L-z)} \exp \left[ -\delta v_0 \left( \theta - \frac{L-2z}{v_{\text{гp}}} \right) \right] - \right. \\
& \left. - e^{-\gamma(L+v_{\text{гp}}\theta)} \exp \left[ \left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гp}}} \right) v_{\text{гp}} T_2 \right] \right\} \right\} = |a_{10}(\theta)|^2 \{1 - g_1 - g_2 - g_3\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь выделены  $g_1, g_3$ , по смыслу аналогичные соответственно  $f_1, f_5$ , (13), а  $g_2$  объединяет остальные члены (ср. с  $f_2, f_3, f_4$ ). Аналогично для импульса  $a_2$  получим

$$\begin{aligned}
|a_2(t, z)|^2 &= |a_{20}(\varphi)|^2 \left\{ 1 - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} q^2 (1 - e^{-\delta v_0 \varphi}) (1 - e^{-2\gamma(L-z)}) - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} \times \right. \\
& \times p^2 e^{-\gamma(L+v_{\text{гp}}\varphi)} \left\{ (e^{\gamma v_{\text{гp}} T_1} - 1) - \frac{\gamma}{\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гp}}} \left\{ \exp \left[ \left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гp}}} \right) v_{\text{гp}} T_1 \right] - 1 \right\} \right\} - \\
& - \frac{4p_0}{v_{\text{гp}} \gamma} p^2 e^{-\gamma L} \left\{ (1 - e^{-\gamma v_{\text{гp}} \varphi}) - \frac{\gamma}{\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гp}}} e^{-\delta v_0 \varphi} \times \right. \\
& \times \left\{ 1 - \exp \left[ -\left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гp}}} \right) v_{\text{гп}} \varphi \right] \right\} \right\} + \frac{4p_0}{v_{\text{гп}} \gamma} p^2 e^{-\gamma L} (1 - e^{-\delta v_0 \varphi}) (1 - e^{-\gamma v_{\text{гп}} (\varphi - T_1)}) - \\
& - \frac{4p_0}{v_{\text{гп}} (\gamma - \delta v_0 / v_{\text{гп}})} p^2 (e^{\delta v_0 T_1} - 1) \left\{ e^{-2\gamma z} \exp \left[ -\delta v_0 \left( \varphi + \frac{L-2z}{v_{\text{гп}}} \right) \right] - \right. \\
& \left. - e^{-\gamma(L+v_{\text{гп}}\varphi)} \exp \left[ \left( \gamma - \frac{\delta v_0}{v_{\text{гп}}} \right) v_{\text{гп}} T_1 \right] \right\} \right\} \quad \left( \varphi = t - \frac{L-z}{v} \right).
\end{aligned} \tag{15}$$

На рис. 1 а, 1 б приведена разность  $|a_1(t, z)|^2 - |a_{10}(t, z)|^2$  для импульса, пришедшего в точку  $z = L$  (кривые 1, 2), и для сравнения эта же разность для импульса (кривые 1', 2'), искажения которого связаны только с самовоздействием (второй импульс отсутствует) [3].

Здесь принято  $\gamma L = \frac{\omega}{c} \kappa_0 L = 5$  (это значение определяет затухание импульса на пути распространения),  $p^2 = 0,1$ ,  $q^2 = 0,2$ . Кривые 1, 1' на обоих рисунках приведены для  $\delta\nu_0 T_1 = 5$  (отношение длительности импульса к времени релаксации температуры),  $\frac{\delta\nu_0}{v_{гр} \gamma} = \frac{\delta(\omega^2 + \nu_0^2)}{\omega_0^2} = \frac{\delta}{1-n^2} = 1,5$  (отношение характерного пути поглощения к расстоянию, на которое распространяется импульс за время релаксации температуры),  $T_2/T_1 = 1$  (отношение длительностей импульсов). Кривые 2, 2' взяты для случая

$$\delta\nu_0 T_1 = 1, \quad \delta\nu_0/v_{гр} \gamma = 0,5, \quad T_2/T_1 = 0,5.$$

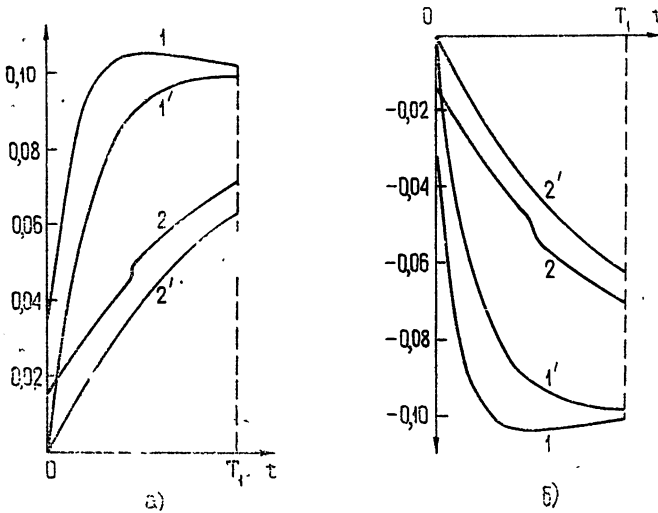


Рис. 1.

На рис. 1 а кривые приведены для случая, когда  $\omega^2 < \nu_0^2$  ( $\frac{4p_0}{v_{гр} \gamma} = 4 \frac{\nu_1}{\nu_0} \frac{\omega^2 - \nu_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2} = -1$ ); на рис. 1 б — для случая  $\omega^2 > \nu_0^2$  ( $\frac{4p_0}{v_{гр} \gamma} = 1$ ), что, как и следовало ожидать, соответствует увеличению амплитуды импульса в первом случае или уменьшению — во втором.

Из сравнения кривых 1' и 2' с соответствующими им кривыми 1 и 2 видно, что взаимодействие импульсов приводит к достаточно существенному (по сравнению с «самовоздействием») дополнительному искажению. Следует отметить, что, увеличивая амплитуду второго импульса, это искажение можно сделать значительно большим, но использованное в работе приближение «слабой нелинейности» ограничивает амплитуду условием  $q^2 \ll 1$ .

Анализ кривых на рис. 1 а, 1 б наводит на мысль о возможности проведения эксперимента по исследованию импульсной «кроссмодуляции» с помощью одного передатчика. Пусть последовательность сигналов, излучаемая антенной, имеет вид, показанный на рис. 2.

Здесь  $\Delta t_2 > \frac{2L}{v_{гр}}$ ,  $\frac{L}{v_{гр}} < \Delta t_1 < \frac{2L}{v_{гр}}$ , где  $L$  — расстояние до точки отражения,  $v_{гр}$  — групповая скорость импульса. Тогда импульс 1, отра-

жившись в точке  $z = L$ , взаимодействует в точке  $z = L - \frac{\Delta t_1 v_{гp}}{2}$

с распространяющимся ему навстречу импульсом II. Импульс III должен распространяться в ионосфере, остывшей после прохождения импульсов I и II. Таким образом разность амплитуд импульсов I и III характеризует искажение импульса I, связанное как с его самовоздействием, так и взаимодействием. По условию эксперимента необходимо только, чтобы амплитуды импульсов I и III первоначально были одинаковыми. Высота точки отражения  $L$  определяется по групповому запаздыванию  $\tau$  импульса,  $2L = v_{гp} \tau$ . Высоту области взаимодействия

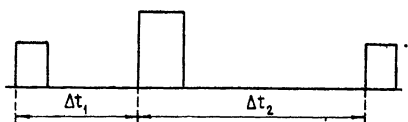


Рис. 2.

можно изменять, варьируя величину  $\Delta t_1$ . Причем, если увеличивать или уменьшать амплитуду импульса II, то соответственно меняется величина взаимодействия волн по отношению к «самовоздействию». Это дает возможность выяснять характер взаимодействия волн и параметры ионосферной плазмы.

Представляется интересным случай, когда распространяющиеся навстречу друг другу волны промодулированы низкой частотой, т. е.

$$a_{10} = m_1(1 + \gamma_1 \cos \Omega t + \xi_1 \sin \Omega t) = m_1[1 + \mu_1 \cos(\Omega t - \varphi_1)] \quad (z=0),$$

$$a_{20} = m_2(1 + \gamma_2 \cos \Omega t + \xi_2 \sin \Omega t) = m_2[1 + \mu_2 \cos(\Omega t - \varphi_2)] \quad (z=L).$$

В общем виде решение такой задачи приводит к довольно громоздким результатам. Поэтому здесь ограничимся только наиболее интересным частным случаем, а именно, когда волна с амплитудой  $a_2$  является отраженной по отношению к волне с амплитудой  $a_1$ . Пусть точка отражения будет  $z = L^*$ . Тогда в ней принимаем:

$$a_{20} = e^{-\gamma L} a_1(t, L).$$

В точке  $z = 0$  амплитуда поля примет вид

$$a = a_{10} + e^{-\gamma L} a_2(t, 0) = m_1 D \{1 + M_1 \cos(\Omega t - \varphi_2) + \dots\}, \quad (16)$$

где

$$a_{10} = m_1(1 + \mu_0 \cos \Omega t),$$

$$D = 1 + e^{-2\gamma L} - S \left[ 1 + \mu_0^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\delta^2 v_0^2}{\Omega^2 + \delta^2 v_0^2} \right) \right], \quad S = \frac{12\rho_0}{v_{гp} \gamma} m_1^2 e^{-2\gamma L} (1 - e^{-2\gamma L}),$$

$$M_1 = \frac{\mu_0}{1 + e^{-2\gamma L}} \left[ 1 - 2\delta^2 v_0^2 S \left( \frac{1 - \mu_0^2/2}{\Omega^2 + \delta^2 v_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2}{4\Omega^2 + \delta^2 v_0^2} \right) \right],$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -2\delta v_0 \Omega S \left( \frac{1}{\Omega^2 + \delta^2 v_0^2} + \frac{\mu_0^2}{4} \frac{1}{4\Omega^2 + \delta^2 v_0^2} \right).$$

Таким образом, учет взаимодействия прямой волны с отраженной приводит к некоторому изменению (по сравнению с «самовоздействием»

\* Следует заметить, что такое рассмотрение не совсем строго, так как метод геометрической оптики, которым мы пользовались, в окрестности точки отражения несправедлив. Но по отношению к полученным результатам данной некорректностью можно пренебречь, потому что рассматриваемые эффекты являются интегральными, т. е. их роль проявляется только при прохождении волной достаточно большого расстояния.

[4]), как амплитуды волны, так и параметров модуляции —  $M_1$ ,  $\varphi_2$ , что, конечно, следует учитывать в соответствующих экспериментах.

В заключение автор выражает благодарность В. В. Плоткину за помощь и полезные замечания и И. М. Виленскому за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Митяков, М. И. Рабинович, В. О. Рапопорт, Л. Е. Штильман, ЖЭТФ, 65, 1893 (1973).
2. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 164 (1970).
3. В. В. Плоткин, сб. Вопросы исследования нижней ионосферы, Новосибирск, № 1, стр. 11, 1972.
4. И. М. Виленский, Н. А. Зыкова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 543 (1959).

Поступила в редакцию  
30 января 1975 г.

#### THE INTERACTION BETWEEN POWERFUL MODULATED WAVES

*A. A. Kapel'son*

It is shown that the resonance interaction of powerful modulated radio waves propagating opposite each other results in an additional distortion of their modulation comparable with self-action. In particular, the interaction of square radio pulses and sinusoidal-modulated waves has been considered.

---



УДК 539.285

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС, ВЫЗВАННЫЙ МОДУЛЯЦИЕЙ $g$ -ФАКТОРА АТОМНОЙ СИСТЕМЫ

*Л. Г. Малышев, Л. Н. Новиков*

Обнаружен и исследован новый тип параметрического резонанса, вызываемый модуляцией  $g$ -фактора атомной системы. Результаты теории подтверждаются экспериментом, проведенным в системе оптически ориентированных атомов  $Cs^{133}$ .

В работах, опубликованных в последние годы [1, 2, 3], сообщалось о наблюдении резонансных явлений, получивших название параметрических. Хорошо изучен параметрический резонанс [1], вызываемый воздействием на атомную систему осциллирующего радиочастотного поля  $h_1 \cos \Omega t$ , параллельного постоянному магнитному полю  $H_0$ , при поперечной оптической накачке циркулярно поляризованным лучом резонансного света. Название «параметрический» свидетельствует об изменении во времени одного из «параметров» атомной системы, в частности, зеемановского расщепления магнитных подуровней в поле  $H_0 + h_1 \cos \Omega t$ .

В работе [2] был описан иной тип резонанса, названный авторами параметрическим резонансом, индуцированным оптически, поскольку в этом случае оптическими методами изменялось эффективное время релаксации атомов, которое также является «параметром» атомной системы. Возможность наблюдения резонанса при модуляции времени столкновительной релаксации (параметрический релаксационный резонанс) была рассмотрена в работе [3], где в качестве возможного механизма предлагалась модуляция интенсивности высокочастотного разряда в буферном газе.

В данной работе сообщается о наблюдении резонанса, который также может быть отнесен к типу параметрических, поскольку он возникает при изменении другого «параметра», характеризующего атомы, а именно их  $g$ -фактора.

Как известно [4–6], взаимодействие атома с сильным нерезонансным радиочастотным полем изменяет его магнитные свойства, приводя к изменению его  $g$ -фактора. Так, если на атом, находящийся в постоянном магнитном поле  $H_0$ , действует радиочастотное поле  $H_1 \cos \omega t$ , осциллирующее в плоскости, перпендикулярной полю  $H_0$ , и  $\omega \gg \gamma_0 H_0$  ( $\gamma_0$  — гиромагнитное отношение свободного атома), то  $g$ -фактор атома, взаимодействующего с этим полем (иначе говоря «одетого» атома), связан с амплитудой поля  $H_1$  и частотой  $\omega$  соотношением

$$g = g_0 J_0 \left( \frac{\gamma_0 H_1}{\omega} \right), \quad (1)$$

где  $g_0$  —  $g$ -фактор свободного атома, а  $J_0$  — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка. Выражение (1) указывает на возможность изменения во времени  $g$ -фактора «одетого» атома путем модуляции амплитуды нерезонансного радиочастотного поля, что создает условия для

наблюдения параметрического резонанса, вызванного модуляцией  $g$ -фактора атомной системы.

Допустим, что атомы находятся в постоянном поле  $H_0$  в условиях поперечной оптической накачки. Не конкретизируя пока характер модуляции амплитуды нерезонансного радиочастотного поля, будем считать, что  $g$ -фактор атомной системы изменяется по гармоническому закону. Для описания явления воспользуемся уравнениями Блоха, записанными для двухуровневой оптически ориентированной системы:

$$\frac{dM}{dt} = \gamma(t) [M \times H_0] - \frac{1}{T} M + \frac{1}{T_p} M_0, \quad (2)$$

где  $M$  — намагниченность атомной системы,  $H_0 = (0, 0, H_0)$  — постоянное магнитное поле,  $T_1 = T_2 = T$  — время тепловой релаксации,  $T_p$  — время оптической релаксации,  $M_0 = (0, M_0, 0)$  — намагниченность, создаваемая вдоль оси  $Oy$  лучом циркулярно поляризованного света в отсутствие магнитного поля.

Факт изменения  $g$ -фактора атомной системы можно учесть, введя зависящее от времени гиромагнитное отношение

$$\gamma(t) = \gamma(1 + \varepsilon \cos \Omega t), \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — глубина модуляции,  $\Omega$  — частота модуляции,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение «одетого» атома, отличающееся, вообще говоря, от гиромагнитного отношения свободного атома  $\gamma_0$  и связанное с последним соотношением, аналогичным (1).

Решение уравнения (2) не представляет трудностей и с учетом вышесказанного приводит к выражению для компоненты намагниченности  $M_y$ :

$$M_y = \frac{1}{T_p} M_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n, k=-\infty}^{\infty} \frac{J_n \left( \varepsilon \frac{\omega_0}{\Omega} \right) J_{n-k} \left( \varepsilon \frac{\omega_0}{\Omega} \right)}{\frac{1}{T} + i(\omega_0 + n\Omega)} e^{ik\Omega t} \right\}, \quad (4)$$

где  $\omega_0 = \gamma H_0$ ,  $J_n$  — функция Бесселя 1-го рода порядка  $n$ ,  $n$  и  $k$  — целые числа.

Анализ выражения (4) показывает, что интенсивность прошедшего света, пропорциональная  $M_y$ , должна быть модулирована с частотами  $k\Omega$ , а амплитуда модуляции меняется резонансным образом вблизи  $\omega_0 = -n\Omega$ . Следует отметить аналогию между видом конечных выражений в работах [1-3] и результатом (4) данной работы, что свидетельствует о родственном характере описанных явлений. Однако положение параметрического резонанса, вызванного модуляцией  $g$ -фактора (будем называть его для краткости « $g$ -резонансом»), и определяемого выражением  $\omega_0 = -n\Omega$ , должно отличаться от положения резонансов, описанных в цитированных выше работах, при одной и той же частоте модуляции соответствующего «параметра» атомной системы, поскольку  $g$ -фактор «одетого» атома отличен от  $g$ -фактора свободного атома.

Эксперимент проводился в системе атомов  $\text{Cs}^{133}$ , помещенных в ячейку с парафиновым покрытием стенок. Для исключения влияния внешних магнитных помех на результаты измерений в слабых магнитных полях (порядка нескольких миллиэрстед) вся система помещалась в 4-слойный магнитный экран, остаточное поле в котором компенсировалось по трем осям системой колец Гельмгольца с точностью до  $10^{-5}$  Э. Атомы находились в условиях поперечной оптической накачки, создаваемой циркулярно поляризованным лучом резонансного света в пло-

скости, перпендикулярной к полю  $H_0$ . Модуляция  $g$ -фактора осуществлялась путем гармонической модуляции амплитуды нерезонансного радиочастотного поля, осциллирующего в плоскости, перпендикулярной к полю  $H_0$ , и имеющего частоту, много большую частоты модуляции  $\Omega$ . Следует отметить, что согласно (1) в этом случае модуляция  $g$ -фактора, вообще говоря, не является гармонической, как предполагалось выше. Однако в приближении малых аргументов в формуле (1), выражение (4) остается справедливым.

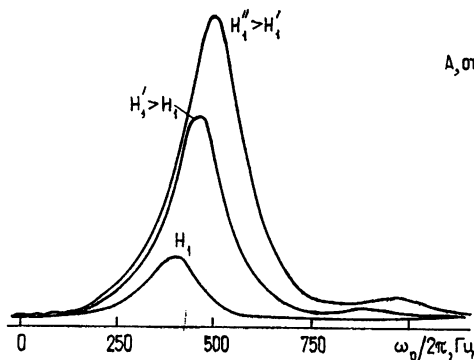


Рис. 1.

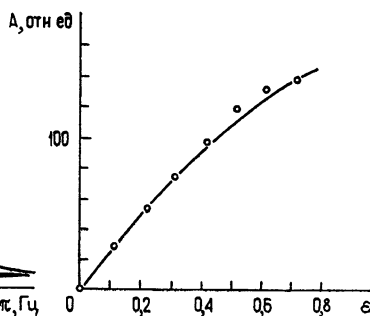


Рис. 2.

Исследования проводились при фиксированном значении частоты сильного нерезонансного поля. Запись сигналов осуществлялась при помощи двухкоординатного самопишущего потенциометра при сканировании постоянного магнитного поля вблизи значений  $H_0 = n\Omega/\gamma$ . На рис. 1 приведены записи сигнала « $g$ -резонанса» при различных амплитудах нерезонансного поля, сделанные на частоте  $\Omega/2\pi = 400$  Гц ( $\omega/2\pi = 12$  кГц, глубина модуляции поля 0,7). По оси абсцисс на этом рисунке отложены значения постоянного поля в единицах частоты ( $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\gamma H_0}{2\pi}$ ). Хорошо виден сдвиг сигнала резонанса в сторону больших

полей при увеличении амплитуды радиочастотного поля. Напротив, при уменьшении ее до нуля сигнал резко падает, и его положение стремится к значению  $H_0 = \Omega/\gamma_0$ . Заметим, что сигнал в нулевом поле отсутствует. Все это вполне описывается предложенной выше теорией. На рис. 2 изображена теоретическая зависимость амплитуды сигнала « $g$ -резонанса»  $\omega_0 = \Omega$  от глубины модуляции нерезонансного поля и нанесены экспериментальные точки ( $\omega/2\pi = 12$  кГц,  $\Omega/2\pi = 400$  Гц)

Нами также наблюдались сигналы резонанса на второй гармонике ( $k = 2$ ). Основной особенностью сигналов на частоте  $2\Omega$  является то, что амплитуда сигнала в поле  $\omega_0 = 2\Omega$  больше, чем амплитуда сигнала в поле  $\omega_0 = \Omega$ , что также следует из предложенного теоретического анализа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Б. Александров, О. В. Константинов, В. И. Перель, В. А. Ходовой, ЖЭТФ, 45, 503 (1963).
2. Л. Н. Новиков, Л. Г. Малышев, Письма в ЖЭТФ, 20, № 3, 177 (1974)
3. А. И. Окуневич, ЖЭТФ, 66, 1578 (1974).
4. С. Cohen-Tannoudji, S. Haroche, J. Phys., 30, 125, 153 (1969).
5. С. Landre', The'se de 3<sup>e</sup> Cycle, Paris, 1970.
6. S. Haroche, The'se, Paris, 1971; Ann. de Phys., 6, 189, 327 (1971).

---

PARAMETRIC RESONANCE PRODUCED BY ATOMIC SYSTEM *g*-FACTOR  
MODULATION

*L. G. Malyshev, L. N. Novikov*

A new type of the parametric resonance produced by the atomic system *g*-factor modulation is discovered and investigated. The results of the theory are confirmed by the experiment made in the system of optically oriented Cs<sup>133</sup> atoms.

---

УДК 539.285

## ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ S-СИГНАЛОВ В ПРОГРАММАХ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

*В. С. Гречишкин, С. А. Воронков, Е. М. Шишкин*

Для систем с параметром асимметрии  $\eta = 0$  теоретически и экспериментально рассмотрена возможность наблюдения S-сигналов в многоимпульсных программах с разделением времени в ядерном квадрупольном резонансе (ЯКР). Доказана необходимость учета всех фазовых соотношений, возникающих в ядерной спин-системе при двухчастотном взаимодействии.

С обнаружением одним из авторов [1] явления образования двухчастотного спинового эхо в ядерном квадрупольном резонансе (ЯКР) возник новый метод исследований, который обладает повышенной чувствительностью к внешним магнитным и внутримолекулярным локальным полям и позволяет определять параметры рассматриваемых систем с большой точностью. Природа наблюдаемых двухчастотных сигналов до настоящего времени оставалась до конца неясной. Переход к программам возбуждения ядерных спин-систем с разделением времени действия радиочастотных (РЧ) импульсов позволил выделить ряд закономерностей в формировании дополнительных двухчастотных сигналов спинового эхо. По приведенному времени появления сигналов  $t^*$ , т. е. величине, полученной при попарном совмещении во времени РЧ импульсов на обоих смежных переходах, дополнительные сигналы эхо можно разделить на два различных типа, обозначаемых символами  $V$  и  $S$ . Они входят в схему классификации сигналов при двухчастотном импульсном воздействии, включающую кроме двух указанных сигналов основное эхо (А) и свободной индукции (Е). Анализ четырехимпульсных программ, приведенный ранее [2], показал, что появившиеся в них  $V$ -сигналы с приведенным временем  $t^* = \tau \left( 2 + \frac{\omega_{b(a)}}{\omega_{a(b)}} \right)$  своему возникновению обязаны фазовой корреляции прецессирующих намагниченностей на смежных переходах. В настоящей работе на программах с разделением времени рассматривается вопрос о природе S-сигналов.

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЧ СПЕКТРОВ

Рассмотрим взаимодействие спин-системы из  $N$  невзаимодействующих ядер со спином  $I$ , большем  $3/2$ , с импульсным РЧ полем, действующим на смежные переходы с резонансными частотами:

$$\begin{aligned} \omega_a &= 3P(2m-1) \sim \pm m \rightarrow \pm (m-1), \\ \omega_b &= 3P(2m-3) \sim \pm (m-1) \rightarrow \pm (m-2), \end{aligned} \quad (1)$$

\* Работа доложена на I Всесоюзном семинаре по ЯКР, Калининград, 5—7 июня 1974 г.

где  $m$  — магнитное квантовое число,  $P = \frac{eQq_{zz}}{4I(2I-1)}$ ,  $eQq_{zz}$  — константа квадрупольного взаимодействия. Применяя метод Даса и Сахи [3] для переходов с  $\Delta m = \pm 1$ , получаем общую формулу для амплитуд сигналов при  $n$ -импульсном воздействии\*:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\substack{m'_n, \dots, m'_1 \\ m'_{n+1}, \dots, m'_2}} \left\{ \langle m'_{n+1} + 1 | R_n^* | m_n \rangle \dots \langle m_1 | \rho(0) | m_1 \rangle \dots \times \right. \\ & \quad \times \langle m'_n | R_n^{*-1} | m'_{n+1} \rangle [(I + m'_{n+1})(I - m'_{n+1} + 1)]^{1/2} \times \\ & \quad \times \exp \left\{ -iP \left[ - (2m'_{n+1} + 1)t + \sum_{i=3}^n (m_i'^2 - m_i^2) (\tau_{i-1} - \tau_{i-2}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (m_2'^2 - m_2^2) \tau_1 \right] \right\} + \langle m'_{n+1} - 1 | R_n^* | m_n \rangle \dots \langle m_1 | \rho(0) | m_1 \rangle \dots \times \\ & \quad \times \langle m'_n | R_n^{*-1} | m'_{n+1} \rangle [(I - m'_{n+1})(I + m'_{n+1} + 1)]^{1/2} \exp \left\{ iP \left[ (2m'_{n+1} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 1)t + \sum_{i=3}^n (m_i'^2 - m_i^2) (\tau_{i-1} - \tau_{i-2}) + (m_2'^2 - m_2^2) \tau_1 \right] \right\} \Big\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho(0)$  — матрица плотности системы в начальный момент времени,  $t=0$ ,  $\tau_i$  — время действия  $i + 1$ -го импульса,  $R^*$  — матрица унитарного преобразования, связанная с матрицами Раби—Блоха  $R$ -соотношением:

$$R(t) = \exp(-i/\hbar H_Q t) R^*(t). \quad (3)$$

В случае, когда сигналы от всех ядер находятся в «фазе» [4], из (2) трудно найти условия на времена появления сигналов эхо и свободной индукции:

$$t'(m_2, m_2', m_1, m_1', m'_{n+1}) = \frac{\sum_{i=3}^n (m_i'^2 - m_i^2) (\tau_{i-1} - \tau_{i-2}) + (m_2'^2 - m_2^2) \tau_1}{2m'_{n+1} + 1}, \quad (4)$$

$$t''(m_2, m_2', m_1, m_1', m'_{n+1}) = \frac{\sum_{i=3}^n (m_i'^2 - m_i^2) (\tau_{i-1} - \tau_{i-2}) + (m_2'^2 - m_2^2) \tau_1}{1 - 2m'_{n+1}}.$$

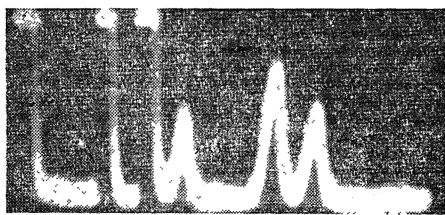
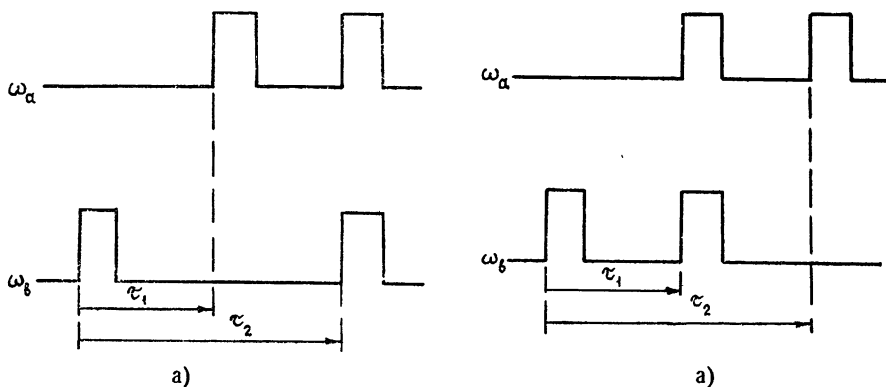
Меняя значения  $m_2, m_2', m_1, m_1', m'_{n+1}$  в интервале  $[-1, 1]$ , получаем полный спектр сигналов при РЧ  $n$ -импульсном воздействии.

Расчет конкретных программ возбуждения требует вычисления матричных элементов матрицы  $R^*(t)$ , которая в случае двухчастотного воздействия имеет три различных вида: когда на спин-систему два РЧ импульса действуют одновременно на оба перехода [1] и отдельно на верхний и нижний переходы.

Интересующие нас  $S$ -сигналы с приведенным временем  $t^* = \tau \left( 1 + \frac{\omega_{b(a)}}{\omega_{a(b)}} \right)$  можно наблюдать в семнадцати трех- и четырехимпульс-

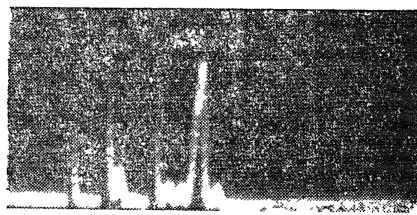
\* Все расчеты проводим в  $I_z$ -представлении, в котором  $H_Q$  диагонален.

ных программах. Первоначально эти сигналы были зарегистрированы в четырехимпульсной программе, в которой четыре РЧ импульса действовали попарно одновременно [1]. Простейшими программами для получения S-сигналов являются трехимпульсные программы с последними РЧ импульсами, действующими одновременно или с запаздывающим одиночным импульсом. Эти программы представляют частный случай программ, изображенных на рис. 1 и 2.



б)

Рис. 1.



б)

Рис. 2.

Рис. 1. Возбуждение ядер  $^{187}\text{Re}$  по программе с разделением времени (а). На осциллограмме изображены сигналы на верхнем переходе ( $\pm 5/2 \leftrightarrow \pm 3/2$ ). Слева направо расположены следующие сигналы эхо:  $S_{a_3}$ ,  $A_{a_3}$  и  $V_{a_3}$  (б).

Рис. 2. Возбуждение ядер  $^{187}\text{Re}$  по программе с совпадающими промежуточными РЧ импульсами. Сигналы эхо на верхнем переходе расположены в следующем порядке:

$$S_{a_3}, S_{a_3}, V_{a_3}, A_{a_3} \text{ и } V_{a_3}.$$

Рассмотрим результаты теоретического анализа четырехимпульсных программ с разделением времени. Здесь  $\alpha_i = \gamma H_1 \sqrt{a^2 + b^2} t_{w_i}$ ,  $\beta_i = \gamma H_1 a t_{w_i}$ ,  $\gamma_i = \gamma H_1 b t_{w_i}$ , где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $t_{w_i}$  — время действия  $i$ -го РЧ импульса,  $a$  и  $b$  — матричные элементы оператора проекции спина  $I_x$ . Подстрочные индексы обозначают переход, на котором наблюдается рассматриваемый сигнал и РЧ импульс, за которым он следует\*.

#### Программа 1

$$1. S_{a_3} = - \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \cos \alpha_3 (\cos \alpha_3 - 1) \cos \beta_2 \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_a \left[ t - \tau_2 \left( 1 + \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) \right],$$

\* Амплитуды сигналов приведены в относительных единицах  $A = \frac{N\gamma h^2}{(2I+1)kT}$ .

$$2. A_{a_3} = -\frac{a^3}{a^2 + b^2} \sin^2 \alpha_3 \sin 2\beta_2 (\omega_a + \omega_b \sin^2 \gamma_1) \sin \omega_a (t - 2\tau_2 + \tau_1),$$

$$3. V_{a_3} = -\frac{a^3 b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \sin \alpha_3 (\cos \alpha_3 - 1) \sin \beta_2 \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_a \times \\ \times \left[ t - \tau_2 \left( 2 + \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) + \tau_1 \right],$$

$$4. A_{b_3} = -\frac{b^3}{a^2 + b^2} \sin^2 \alpha_3 \cos \beta_2 \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_b (t - 2\tau_2),$$

$$5. S_{b_3} = -\frac{ab^2}{a^2 + b^2} \cos \alpha_3 (\cos \alpha_3 - 1) \sin 2\beta_2 (\omega_a + \omega_b \sin^2 \gamma_1) \sin \omega_b \times \\ \times \left[ t - \tau_2 \left( 1 + \frac{\omega_a}{\omega_b} \right) + \tau_1 \frac{\omega_a}{\omega_b} \right],$$

$$6. V_{b_3} = -\frac{ab^3}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \sin \alpha_3 (\cos \alpha_3 - 1) \sin \beta_2 \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_b \times \\ \times \left[ t - \tau_2 \left( 2 + \frac{\omega_a}{\omega_b} \right) + \tau_1 \frac{\omega_a}{\omega_b} \right].$$

Сигналы свободной индукции опущены. Меняя времена действия первых РЧ импульсов, нетрудно заметить, что с уменьшением интервала времени между РЧ импульсами на одном из переходов  $S$ -сигналы на соседних перемещаются влево по оси времени; в предельном случае совпадения РЧ импульсов они сливаются с сигналами свободной индукции, исчезая как двухчастотные сигналы. Простейшая трехимпульсная программа, в которой образуется  $S$ -сигнал, получается из только что рассмотренной, если в ней убрать один из промежуточных импульсов.

Рассмотрим теперь результаты расчета четырехимпульсной программы, изображенной на рис. 2.

В этой программе при определенных условиях реализуется «захват», обусловленный расстройкой РЧ импульсом уже созданных фазовых соотношений, приводящих к образованию сигналов эхо. Сигналы в случае, когда реализуется этот вид «захвата», обозначены соответствующими символами со штрихами.

#### Программа 2

$$1. E_{a_2} = \frac{2a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \sin \alpha_2 \{ \omega_a (a^2 \cos \alpha_2 + b^2) + (3 - 2m) \times \\ \times [b^2 \cos^2 \gamma_1 (\cos \alpha_2 - 1) - (a^2 + b^2) \cos \alpha_2 \sin^2 \gamma_1] \} \sin \omega_a (t - \tau_1),$$

$$2. A_{a_2} = -\frac{2a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \sin^2 \beta_3 \sin \alpha_3 \{ \omega_a (a^2 \cos \alpha_2 + b^2) + \\ + \omega_b [b^2 \cos^2 \gamma_1 (\cos \alpha_2 - 1) - (a^2 + b^2) \cos \alpha_2 \sin^2 \gamma_1] \} \sin \omega_a (t - 2\tau_2 + \tau_1),$$

$$3. S_{a_2} = -\frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \cos \alpha_2 (\cos \alpha_2 - 1) \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_a \times$$



$$\times \left[ t - \tau_1 \left( 1 + \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) \right] \quad \left( \tau_1 \left( 1 + \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) < \tau_2 \right),$$

$$4. S'_{a_3} = S_{a_2} \cos \beta_3 \quad \left( \tau_1 \left( 1 + \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) \geq \tau_2 \right),$$

$$5. S^*_{a_3} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \sin^2 \beta_3 \cos \alpha_2 (\cos \alpha_2 - 1) \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_a \times \\ \times \left[ t - 2\tau_2 + \tau_1 \left( 1 + \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) \right],$$

$$6. S^*_{a_3} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \sin^2 \alpha_2 \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_a \left[ t - \tau_1 \left( 1 - \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) \right],$$

$$7. S^*_{a_3} = - \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \sin^2 \beta_3 \sin^2 \alpha_2 \sin 2\gamma_1 \omega_b \sin \omega_a \left[ t - 2\tau_2 + \tau_1 \left( 1 - \frac{\omega_b}{\omega_a} \right) \right].$$

Появление сигналов после третьих импульсов, как это видно из приведенных результатов, обусловлено восстановлением состояний намагниченности, получаемых в результате одновременного воздействия на спин-систему двумя РЧ импульсами в момент  $\tau_1$ , посредством вторичного импульсного воздействия в момент времени  $\tau_2$  на переход, на котором эти сигналы наблюдаются. При этом необходимо отметить, что сигналы  $V^*_{a_3}$  и  $V_{a_3}$  появляются в результате восстановления состояний, соответствующих сигналам  $S_{a_2}$  и  $S^*_{a_2}$ , путем, аналогичным тому, как вторичное импульсное воздействие согласно Хану [5] восстанавливает состояние свободной индукции  $E_{a_2}$ , вызывая появление сигнала основного эхо  $A_{a_2}$ . Под  $S^*_{a_2}$  следует понимать фазовые соотношения, проявляющиеся при последующем РЧ воздействии. Таким образом, E- и S-сигналы в многоимпульсных программах обнаруживают сходные свойства.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Эксперимент проводился на ядрах  $^{187}\text{Re}$  и  $^{209}\text{Bi}$  в поликристаллическом  $\text{KReO}_4$  и  $\text{BiCl}_3$  при комнатной температуре и температуре 77 К. Нами возбуждались верхние переходы с резонансными частотами  $\omega_a$  и  $\omega_b$ .

Результаты эксперимента полностью соответствуют теоретическим расчетам. Времена релаксации во всех возможных программах дали одинаковые значения двухчастотных сигналов и сигналов основного эхо. Для треххлористого висмута ( $^{209}\text{Bi}$ ) времена релаксации при комнатной температуре составили  $T_2' \sim 50$  мкс и  $T_2'' \sim 600$  мкс соответственно для двухчастотных и одночастотных сигналов, и для перената калия  $T_2' \sim 150$  мкс и  $T_2'' \sim 250$  мкс.

Двухчастотные четырехимпульсные программы с разделением времени имеют существенные преимущества для экспериментального изучения S-сигналов по сравнению с трехимпульсными программами и программой с четырьмя попарно действующими РЧ импульсами, в которой впервые были обнаружены S-сигналы. Немаловажным является и то обстоятельство, что изучение программ с разделением времени

также указывает на необходимость учитывать в описании поведения спин-системы всю совокупность фазовых соотношений, образующуюся при многоимпульсном многочастотном воздействии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Гречишкин, Н. Е. Айнбиндер, Письма в ЖЭТФ, 5, 87 (1967); В. С. Гречишкин, Ядерные квадрупольные взаимодействия в твердых телах, изд. Наука, М., 1973.
2. В. С. Гречишкин, Е. М. Шишкин, ФТТ, 5, 1542 (1974).
3. T. P. Das, A. K. Saha, Phys. Rev., 98, 516 (1955).
4. L. Solomon, Phys. Rev., 100, 61 (1958).
5. E. L. Hahn, Phys. Rev., 80, 580 (1950).

Калининградский государственный университет

Поступила в редакцию  
12 июля 1974 г.

#### THE PECULIARITIES OF S-SIGNAL FORMATION IN TIME-SHARING PROGRAMS

V. S. Grechishkin, S. A. Voronkov, E. M. Shishkin

The possibility of observing S-signals in multi-impulse programs with time-sharing in a nucleus quadrupole resonance (NQR) is considered theoretically and experimentally for the system with the asymmetry parameter  $\eta=0$ . The necessary account for all phase relations occurring in a nucleus spin-system at two-frequency action is proved.

---

УДК 621.371 : 530.18

## О КАНОНИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Г. А. Пасманик

Рассматривается каноническое описание электромагнитных волновых процессов в нелинейных средах, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых зависят от переменных, характеризующих движение в среде. На основании развитого подхода получены уравнения, описывающие влияние электромагнитного поля на характер указанного движения. В качестве примера рассматривается, каким образом найденные уравнения могут быть использованы для описания вынужденного комбинационного рассеяния на ориентационных колебаниях, и определяется инкремент, соответствующий этому виду рассеяния.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о некоторых общих соотношениях, имеющих место при взаимодействии волн в нелинейных средах, неоднократно затрагивался в литературе (см., например, [1-4]). При этом, главным образом, речь шла о средах с безынерционной нелинейностью, диэлектрическая  $\epsilon_{ij}$  и магнитная  $\mu_{ij}$  проницаемости которых являются явной функцией поля. В настоящем сообщении результаты, полученные для сред с безынерционной нелинейностью, обобщаются на случай, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости зависят также от переменных  $P_m$  и  $Q_m$ , описывающих некоторое движение в среде. Так как характер указанного движения, в свою очередь, зависит от электромагнитного поля, то можно говорить об инерционной связи между диэлектрической и магнитной проницаемостями с одной стороны и электромагнитным полем — с другой.

В разд. 2 получено каноническое описание электромагнитного поля, представляющее, по существу, обобщение на нелинейные среды хорошо известного канонического формализма, развитого для линейных сред с постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей [5]. Особенность описания полей в нелинейных средах, как будет показано ниже, заключается в следующем. Если в линейных средах с постоянными значениями  $\epsilon_{ij}$  и  $\mu_{ij}$  в качестве канонических переменных могут быть использованы как коэффициенты разложения электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  по ортогональному набору собственных функций, удовлетворяющих (3), так и коэффициенты разложения векторов электрической и магнитной индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  по тем же собственным функциям, то в нелинейных средах каноническими переменными являются лишь коэффициенты разложения векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ .

В разд. 3 в качестве примера рассмотрено, каким образом каноническое описание может быть использовано для получения уравнений описывающих вынужденное комбинационное рассеяние на ориентационных колебаниях молекул, и определяется инкремент, соответствующий этому виду рассеяния.

## 2. КАНОНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим электромагнитное поле, удовлетворяющее вместе со своими производными периодическим граничным условиям в кубе объема  $L^3$ . Размер  $L$  выбираем достаточно большим, чтобы в пределе ( $L \rightarrow \infty$ ) свойства материальной системы не зависели от  $L$ . Пусть макроскопические электромагнитные свойства среды характеризуются тензорами обратной диэлектрической  $\eta_{ij} = \epsilon_{ij}^{-1}$  и магнитной  $\theta_{ij} = \mu_{ij}^{-1}$  проницаемостей. В диспергирующей среде  $\eta_{ij}$  и  $\theta_{ij}$  — пространственно-временные операторы. Уравнения поля без источников имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad E_i = \eta_{ij} D_j, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad H_i = \theta_{ij} B_j.$$

Запишем уравнения (1) в другой форме. Для этого разложим  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  по ортонормированным векторам  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{B}_k$ :

$$\mathbf{D} = - \sum_k p_k \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{B} = \sum_k c k q_k \mathbf{B}_k. \quad (2)$$

Выберем  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{B}_k$  таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{D}_k = k \mathbf{B}_k, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_k = k \mathbf{D}_k, \quad (3)$$

или

$$\Delta \mathbf{D}_k + k^2 \mathbf{D}_k = 0, \quad \Delta \mathbf{B}_k + k^2 \mathbf{B}_k = 0$$

с периодическими граничными условиями на поверхности куба объемом  $L^3$  ( $k$  — дискретный набор собственных значений). Подставляя (2) в (1) и используя свойство ортонормированности функций  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{B}_k$ , получим

$$\dot{p}_k = - \sum_l c^2 k l \beta_{kl} q_l, \quad \dot{q}_k = \sum_l \alpha_{kl} p_l, \quad (4)$$

где

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{4\pi} \int_{L^3} d\mathbf{v} \sum_{ij} (\mathbf{D}_k)_i \eta_{ij} (\mathbf{D}_l)_j, \quad \beta_{kl} = \frac{1}{4\pi} \int_{L^3} d\mathbf{v} \sum_{ij} (\mathbf{B}_k)_i \theta_{ij} (\mathbf{B}_l)_j. \quad (5)$$

Мы считаем коэффициенты  $\alpha_{kl}$  и  $\beta_{kl}$  симметричными по индексам  $k$  и  $l$ , предполагая для этого симметрию  $\eta_{ij} = \eta_{ji}$  и  $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ , а также (в случае пространственно-диспергирующих сред) эрмитовость координатной части операторов  $\alpha_{kl}$  и  $\beta_{kl}$ . В диспергирующей среде  $\alpha_{kl}$  и  $\beta_{kl}$  — временные операторы.

Для перехода к каноническому описанию предположим, что  $\eta_{ij}$  и  $\theta_{ij}$  зависят от векторов электрической и магнитной индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  и набора макроскопических переменных  $P_m$  и  $Q_m$ , описывающих некоторое движение в среде (упругие волны, колебания, вращения и т. д.), т. е.  $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\mathbf{D}, \mathbf{B}, P_m, Q_m)$  и  $\theta_{ij} = \theta_{ij}(\mathbf{D}, \mathbf{B}, P_m, Q_m)$ . Пусть в отсутствие электромагнитного поля энергия указанного движения сохраняется и необратимые процессы трения, приводящие в конце концов к прекращению движения, отсутствуют. Переменные  $P_m$  и  $Q_m$  будем считать каноническими переменными. Мы также пренебрежем временной дисперсией, т. е. примем, что  $\alpha_{kl}$  и  $\beta_{kl}$  не являются операторами, а есть только функции  $p_k, q_k, P_m$  и  $Q_m$ .

Рассмотрим теперь совместно электромагнитное поле и движение в среде, описываемое переменными  $P_m$  и  $Q_m$ . Покажем, что коэффици-

енты разложения векторов электрической и магнитной индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ , т. е. коэффициенты  $p_k$  и  $q_k$ , являются каноническими переменными. Для этого уравнения (4) запишем в гамильтоновой форме:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \quad (6)$$

К уравнениям (6) следует добавить также уравнения для канонических переменных  $P_m$  и  $Q_m$ , т. е.

$$\dot{Q}_m = \frac{\partial H}{\partial P_m}, \quad \dot{P}_m = -\frac{\partial H}{\partial Q_m}. \quad (7)$$

Покажем, что функция Гамильтона всей системы (среды и поля в среде) существует, и найдем ее вид. Тем самым докажем, что  $p_k$  и  $q_k$  являются каноническими переменными.

Функция Гамильтона находится из системы (6) и (7), если известны выражения для производных, входящих в левые части этих уравнений. Однако в рассматриваемом случае заданы лишь уравнения Максвелла для поля, позволяющие определить только  $\dot{p}_k$  и  $\dot{q}_k$  (см. (4)), в то время как уравнения движения для  $P_m$  и  $Q_m$  априори неизвестны. В этом случае, очевидно, для определения функции Гамильтона необходимо дополнительно использовать «начальное» условие

$$H(q_k = 0, p_k = 0, P_m, Q_m) = H''(P_m, Q_m),$$

где функция  $H''(P_m, Q_m)$  имеет смысл энергии движения в среде, описываемого переменными  $P_m$  и  $Q_m$ . Решение сформулированной таким образом задачи позволяет определить функцию Гамильтона  $H$ . Из сопоставления уравнений (4) и (6) видно, что функция Гамильтона существует, если

$$\sum_l c^2 k l q_l \frac{\partial \beta_{kl}}{\partial q_m} = \sum_l c^2 m l q_l \frac{\partial \beta_{ml}}{\partial q_k},$$

$$\sum_l p_l \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial p_m} = \sum_l p_l \frac{\partial \alpha_{ml}}{\partial p_k}, \quad \sum_l c^2 k l q_l \frac{\partial \beta_{kl}}{\partial p_m} = \sum_l p_l \frac{\partial \alpha_{ml}}{\partial q_k}.$$

Непосредственным дифференцированием легко убедиться, что первые два соотношения выполняются. Последнее же соотношение связывает зависимости  $\eta_{ij}$  от  $\mathbf{B}$  и  $\theta_{ij}$  от  $\mathbf{D}$ . В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда  $\eta_{ij}$  не зависит от  $\mathbf{B}$  и  $\theta_{ij}$  не зависит от  $\mathbf{D}$ . Тогда, подставляя  $q_k$  и  $p_k$  из (4) в (6) и интегрируя полученные выражения, найдем

$$H = H' + H''. \quad (8)$$

Здесь

$$H' = \sum_k \left[ \int_0^{q_k} \sum_{l=1}^k c^2 k l \beta_{kl}(q_1, q_2, \dots, q_k, 0, \dots, 0) q_l dq_k + \right. \\ \left. + \int_0^{p_k} \sum_{l=1}^k \alpha_{kl}(p_1, p_2, \dots, p_k, 0, \dots, 0) p_l dp_k \right] \quad (9)$$

( $H'$  — энергия электромагнитного поля в среде). Уравнения (6) и (7) с функцией Гамильтона (8) представляют полный набор уравнений, описывающих макроскопические изменения при наличии электромагнитного поля в консервативной системе.

Таким образом, проведенное рассмотрение доказывает высказанное выше утверждение, что коэффициенты разложения векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  по собственным функциям  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{B}_k$  являются каноническими переменными, описывающими электромагнитное поле в нелинейной среде обобщаемого типа\*. Энергию электромагнитного поля в среде можно записать в более удобном виде, если ввести плотность энергии поля:

$$H' = \int_{L^3} d^3v H', \quad (10)$$

$$H' = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^{D_i} \eta_{ij}(\mathbf{D}, P_m, Q_m) D_j dD_i + \int_0^{B_i} \theta_{ij}(\mathbf{B}, P_m, Q_m) B_j dB_i \right].$$

Заметим, что  $H'$  и  $H''$  не являются, в общем случае, сохраняющимися во времени величинами, тогда как функция Гамильтона сохраняется во времени, т. е. полная система, описываемая функцией  $H$  — консервативная. Если диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от параметров, характеризующих движение в среде (но, вообще говоря, могут зависеть заданным образом от координат), или это движение вообще отсутствует, то энергия поля в среде, определяемая формулой (10), сохраняется во времени. В том случае, когда безынерционная нелинейность отсутствует ( $\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial \mathbf{B}} = 0$ ), плотность энергии поля равна

$$H' = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}}{8\pi}, \quad (11)$$

Подставляя  $H$  из (8) и (10) в уравнения (7), получим явный вид зависимости от поля уравнений, характеризующих движение в среде:

$$\dot{Q}_m = \frac{\partial H''}{\partial P_m} + \frac{1}{4\pi} \left( \int_{L^3} d^3v \int_0^{D_i} \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial P_m} D_j dD_i + \int_0^{B_i} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial P_m} B_j dB_i \right), \quad (12)$$

$$\dot{P}_m = -\frac{\partial H''}{\partial Q_m} - \frac{1}{4\pi} \int_{L^3} d^3v \left( \int_0^{D_i} \frac{\partial \eta_{ij}}{\partial Q_m} D_j dD_i + \int_0^{B_i} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial Q_m} B_j dB_i \right).$$

Из уравнений (12) следует, что влияние движения в среде на поле сопровождается, вообще говоря, влиянием поля на характер движения в среде\*\*.

Заменяя канонические переменные соответствующими операторами, можно перейти к квантовому описанию полей в нелинейных средах. Особенность квантования в нелинейных средах заключается в том, что стандартные коммутационные соотношения, которые записываются для операторов электрического и магнитного полей  $\hat{\mathbf{E}}$  и  $\hat{\mathbf{H}}$  в линейных средах (или вакууме) с постоянными  $\epsilon_{ij}$  и  $\mu_{ij}$ , следует теперь состав-

\* Аналогичным образом канонический формализм может быть развит для описания других волновых процессов, например, для описания звуковых волн в средах, адиабатический модуль сжатия которых является функцией поля (квадратичный пьезоэффект).

\*\* Интересно отметить, что в процессе взаимодействия энергии каждой из рассматриваемых подсистем могут иногда сохраняться. Действительно, нетрудно показать, что если  $\eta_{ij}$  и  $\theta_{ij}$  являются интегралами движения в отсутствие поля, то при наличии последнего энергии  $H'$  и  $H''$  сохраняются во времени. Сохранение энергии каждой из рассматриваемых подсистем не означает, конечно, отсутствия взаимовлияния поля и движения в среде друг на друга.

лять уже для операторов  $D$  и  $B$ , поскольку именно коэффициенты разложения этих операторов по собственным функциям  $D_k$  и  $B_k$  являются каноническими переменными.

### 3. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ НА ОРИЕНТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

В качестве примера рассмотрим, каким образом уравнения (12) могут быть использованы для описания вынужденного рассеяния (ВР) на возмущениях диэлектрической проницаемости, вызванных ориентационными колебаниями молекул около положения равновесия. Будем исходить из упрощенной модели, в которой молекула представляет абсолютно твердый стержень, характеризующийся только одним моментом инерции (линейная молекула). Диэлектрическая проницаемость среды, состоящей из таких молекул (пирроэлектрики, магнетики и некоторые другие кристаллы), записывается в виде

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\chi_{ij}, \quad \chi_{ij} = N \left( \frac{\alpha_{\parallel}}{3} + \frac{2\alpha_{\perp}}{3} \right) \delta_{ij} + N(\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp}) S_{ij}, \quad (13)$$

где

$$S_{ij} = \cos \theta_i \cos \theta_j - \frac{\delta_{ij}}{3}. \quad (14)$$

Здесь  $N$  — число молекул в единице объема,  $\alpha_{\parallel}$  — поляризуемость молекулы вдоль оси симметрии,  $\alpha_{\perp}$  — поляризуемость вдоль других осей,  $\theta_i$  — характерный угол, определяющий отклонение осей молекул от  $i$ -ой координатной оси. Под  $\theta_i$  следует понимать угол, усредненный по объему  $V$ , удовлетворяющему условию  $a^3 \ll V \ll \lambda^3$  ( $a$  — расстояние между молекулами,  $\lambda$  — длина волны электромагнитного излучения). Изменение угла  $\theta_i$  в рассматриваемой модели вызвано ориентационными колебаниями молекулы около положения равновесия:

$$\theta_i = \theta_i^0 + \Delta\theta_i. \quad (15)$$

На основании (12) и (13) нетрудно составить уравнение, описывающее ориентационные колебания  $\theta_i$  в присутствии электромагнитного поля:

$$\ddot{\theta}_i + \omega_c^2 (\theta_i - \theta_i^0) = -\frac{\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp}}{I_M} \sin \theta_i E_i \sum_j \cos \theta_j E_j, \quad (16)$$

где  $\omega_c$  — частота собственных колебаний,  $I_M$  — момент инерции молекулы. При учете процессов релаксации в правую часть уравнения (16) следует добавить диссипативный член  $\frac{2}{\tau} \dot{\theta}_i$  ( $\tau$  — время релаксации ориентационных колебаний), а в левую — сторонний источник шума со спектральной интенсивностью, обратно пропорциональной  $\tau$ . В том случае, если  $\Delta\theta_i \ll \theta_i^0$ , возмущения диэлектрической проницаемости, линейно зависящие от  $\Delta\theta_i$ , вызывают модуляцию падающего света с частотой ориентационных колебаний молекулы  $\omega_c$  (комбинационное рассеяние на ориентационных колебаниях). При достаточно большой интенсивности возбуждающего света накачки процесс приобретает вынужденный характер. Стационарный инкремент (на единицу длины) интенсивности рассеянной компоненты, поляризованной в плоскости накачки  $\mathcal{E}_0$  (вдоль оси  $x$ ) и распространяющейся в том же направлении, что и возбуждающее излучение, равен

$$\Gamma = \frac{2\pi k_c \tau N (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp})^2 |\mathcal{E}_0|^2 \sin^2 \theta_x^0}{\epsilon_{xx}^0 \omega_c I_m}, \quad (17)$$

где  $k_c$  — волновой вектор рассеянного света. Например, для кристалла  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$ , ориентированного под углом  $\theta_x^0 = \pi/4$  к плоскости поляризации накачки,  $\Gamma [\text{см}^{-1}] = 10^{-4} I_0 [\text{МВТ/см}^2]$ . Из формулы (17) следует, что полный инкремент достигает максимального значения при  $\theta_x^0 = \pi/4$  и падает до нуля при  $\theta_x^0 \rightarrow 0, \pi/2$ .

Если кристалл ориентирован таким образом, что его ось симметрии параллельна плоскости поляризации накачки ( $\theta_i^0 = \pi/2 (1 - \delta_{ix})$ ), то характер процесса рассеяния существенно изменяется. В этом случае  $\theta_x^0 = 0$  и  $\theta_x = \Delta\theta_x$ . При  $\Delta\theta_x \ll 1$  с точностью до членов высших порядков  $\sum_j \cos \theta_j E_j = E_x$  и  $\sin \theta_x = \theta_x$ . Из (16) следует, что электромаг-

нитное поле, поляризованное вдоль оси  $x$ , вызывает изменение частоты ориентационных колебаний. Если в спектре поля содержатся две гармоники (возбуждающая и стоксова компоненты) с частотами, отличными на  $2\omega_c$ , то может произойти параметрическая раскачка колебаний  $\theta_x$ . Возмущения диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon_{xx}$ , квадратично зависящие от угла  $\theta_x$  (двухфононный процесс), вызывают, в свою очередь, модуляцию падающего света с частотой  $2\omega_c$ , что приводит к нарастанию стоксовой компоненты и дальнейшей раскачке ориентационных колебаний. Рассматриваемый процесс, по сути дела, является процессом ВР с двойным смещением частоты, или ВР второго порядка. В том случае, когда исходная интенсивность обеих гармоник ( $\omega_0$  и  $\omega_0 - 2\omega_c$ ) примерно одинакова, то пороговая плотность мощности, при превышении которой происходит резкое нарастание  $\Delta\theta_x$ , определяется из соотношения  $|\mathcal{E}_0|^2 \approx I_m \omega_c / \tau (\alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp})$ . В кристаллах это соответствует интенсивности в  $10^5 - 10^6 \text{ МВТ/см}^2$ . Реализация указанного эффекта в эксперименте, однако, существенно затруднена пробоем, наступающим обычно при плотностях мощности, меньших  $10^5 - 10^6 \text{ МВТ/см}^2$ . В этой связи более целесообразным представляется наблюдение спонтанного рассеяния с двойным смещением частоты на возмущениях  $\theta_x$ , возбужденных посредством обычного ВР первого порядка, индуцируемого накачкой с плоскостью поляризации, не параллельной оси кристалла.

Автор благодарит В. И. Беспалова за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Manley, H. E. Rowe, Proc IRE, 44, 904 (1956).
2. Сб Нелинейная теория распространения волн, изд. Мир, М., 1970
3. Б. Я. Зельдович, Краткие сообщения по физике, № 5, 20 (1970).
4. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынах, ЖЭТФ, 60, 136 (1971).
5. В. М. Файн, Фотоны и нелинейные среды, изд. Сов. радио, М., 1972

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию  
12 июля 1972 г.,  
после доработки  
12 сентября 1974 г.

#### A CANONIC DESCRIPTION OF WAVE PROCESS IN NONLINEAR MEDIA

G. A. Pasmanik

A canonic description of electromagnetic wave processes in nonlinear media the permittivity and permeability of which depend on the variables characterizing the motion in the media is considered. Based on the approach developed, the equations are derived which describe the influence of the electromagnetic field on the character of the given motion. As an example it is considered how the equations found may be used for describing the stimulated Raman scattering by oriented oscillations and the increment corresponding to this type of scattering is defined.



УДК 533.951

## О «ЖЕСТКОМ» ВОЗБУЖДЕНИИ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ ПОТОК—ПЛАЗМА С ХАОТИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ КОНЦЕНТРАЦИИ

*В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн*

Рассматривается взрывная неустойчивость плазменных волн в системе поток—плазма со случайными неоднородностями концентрации. Выведены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и показано, что из-за рассеяния на неоднородностях возникает эффективное поглощение среднего поля и расстройка от синхронизма. В результате численного счета для конкретной системы показано, что порог возбуждения взрывной неустойчивости повышается почти в 40 раз по сравнению с системой с той же расстройкой, но без затухания.

Известно (см., например, [1-4]), что в системе поток—плазма возможна взрывная неустойчивость, которая характеризуется резким ростом амплитуд взаимодействующих волн. Одним из механизмов ограничения этой неустойчивости является нелинейная расстройка от синхронизма, которая связана с кубичной нелинейностью исходных уравнений [4-7]. В [8] обсуждается стабилизация взрывной неустойчивости в плавно неоднородной среде, где показано, что линейная расстройка от синхронизма может привести к жесткому возбуждению неустойчивости. Представляет интерес исследование взрывной неустойчивости в среде с хаотическими неоднородностями, где из-за рассеяния на случайных неоднородностях появляется как линейная расстройка от синхронизма, так и поглощение среднего поля [9]. В данной работе рассмотрена взрывная неустойчивость плазменных волн в системе поток—плазма со случайными неоднородностями концентрации в основной плазме. Получены уравнения для амплитуд взаимодействующих волн, где появляются дополнительные члены, обусловленные рассеянием среднего поля на неоднородностях. Проведен численный счет полученных уравнений для конкретной плазменной системы, и выяснено, что из-за рассеяния на случайных неоднородностях взрывная неустойчивость возникает при начальных амплитудах более чем на порядок выше, чем в однородной непоглощающей среде с той же фазовой расстройкой. Результаты работы могут быть полезны для диагностики турбулентной системы поток—плазма, так как по характеру взаимодействия волн можно определить параметры турбулентной плазмы.

### 1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исходная одномерная система квазигидродинамических уравнений для электронов плазмы и пучка имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e [(N + N_s) - N_{0s} - N_0],$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{e}{m} E = -v \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Nv) = 0,$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{e}{m} E = -v_s \frac{\partial v_s}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} v_s + V_0 \frac{\partial N_s}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (N_s v_s),$$

где  $N$ ,  $v$  — концентрация и скорость электронов основной плазмы;  $v_s$  и  $N_s$  — отклонения скорости и концентрации электронов потока от равновесных значений  $V_0$ ,  $N_{0s}$ ;  $E$  — напряженность электрического поля. Представим функцию  $N(x, t)$  в виде

$$N = N_0 + \delta N(x) + \langle N(x, t) \rangle + N'(x, t), \quad (2)$$

где  $N_0$  — равновесная концентрация плазмы,  $\delta N(x)$  — поле флуктуаций, которое для простоты предполагается одномерным\*,  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по ансамблю неоднородностей, а штрих соответствует рассеянному полю. Аналогично представим и остальные функции:

$$\begin{aligned} N_s &= N_{0s} + \langle N_s(x, t) \rangle + N'_s(x, t), \\ v_s &= \langle v_s(x, t) \rangle + v'_s(x, t), \\ v &= \langle v(x, t) \rangle + v'(x, t), \\ E &= \langle E(x, t) \rangle + E'(x, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив (2), (3) в (1) и усреднив по ансамблю неоднородностей, получим систему уравнений для средних величин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial x} &= 4\pi e (\langle N \rangle + \langle N_s \rangle), \\ \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} - \frac{e}{m} \langle E \rangle &= -\langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x}, \\ \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial t} + N_0 \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} &= J - \frac{\partial}{\partial x} (\langle v \rangle \langle N \rangle), \\ \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial x} - \frac{e}{m} \langle E \rangle &= -\langle v_s \rangle \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial x}, \\ \frac{\partial \langle N_s \rangle}{\partial t} + N_{0s} \frac{\partial \langle v_s \rangle}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \langle N_s \rangle}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\langle N_s \rangle \langle v_s \rangle), \\ J &= -\frac{\partial}{\partial x} (\langle \delta N(x) v'(x, t) \rangle). \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе (4) предполагалось, что  $\frac{|\delta N|}{N_0} \sim \mu \ll 1$ , а  $\left( \frac{E_{\max}^2}{2\pi m N_{0s} V_0^2} \right)^{1/2} \sim \mu^2$

(см. также [9, 10]); тогда в (4) отброшены члены вида  $v' \frac{\partial v'}{\partial x}$ ,  $N' \frac{\partial v'}{\partial x}$  и т. п.,

которые, как будет показано ниже, много меньше нелинейных членов и члена  $J$ , связанного с рассеянием на неоднородностях. Чтобы получить выражение  $J(x, t)$ , вычтем из (1) систему (4) и получим уравнения для флуктуационных составляющих полей:

\* Учет трехмерных неоднородностей, как показано в [10], приводит лишь к изменению численных коэффициентов  $\sim 1$ .

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = 4\pi e(N' + N'_s), \quad \frac{\partial v'}{\partial t} - \frac{e}{m}E' = 0,$$

$$\frac{\partial N'}{\partial t} + N_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\langle v \rangle \delta N) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v'_s}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v'_s}{\partial x} - \frac{e}{m}E' = 0, \quad \frac{\partial N'_s}{\partial t} + N_{0s} \frac{\partial v'_s}{\partial x} + V_0 \frac{\partial N'_s}{\partial x} = 0.$$

Система (5) линейна по флуктуациям  $\delta N(x)$ , поэтому, используя преобразование Фурье, из (5) найдем выражение  $v'(x, t)$  и подставим в  $J(x, t)$ . Отсюда, кстати, видно, что  $\left(\frac{|E'|^2}{2\pi m N_{0s} V_0^2}\right)^{1/2} \sim \mu^3$ , следовательно, член, отвечающий рассеянию  $J(x, t) \sim \mu^4$ , т. е. того же порядка, что и нелинейные члены в (4).

В дальнейшем будем рассматривать взаимодействие плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ , поэтому нам необходимо знать лишь фурье-составляющие члена  $J(x, t)$ . Подставляя  $v'(x, t)$  в выражение

$$J_{\omega, k} = - \int \frac{\partial}{\partial x} \langle \delta N(x) v'(x, t) \rangle \exp[-i(\omega t - kx)] dt dx$$

и предполагая, что корреляционная функция флуктуаций  $N$  имеет вид\*

$$\langle \delta N(x) \delta N(x + \xi) \rangle = \langle (\delta N)^2 \rangle \exp\left(-\frac{|\xi|}{l}\right),$$

получим формулу для  $J_{\omega, k}$ :

$$J_{\omega, k} = - \frac{\omega_0^2 N_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \langle v_{\omega, k} \rangle k \left\langle \left(\frac{\delta N}{N_0}\right)^2 \right\rangle \left\{ \left[ \frac{1}{k_0} \left( k_0 + \frac{i\omega_{0s}}{V_0 \sqrt{1 - \omega_0^2/\omega^2}} \right)^{-1} \right] \frac{\omega}{V_0} + i \right\}, \quad (6)$$

где  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N_0/m$ ,  $\omega_{0s}^2 = 4\pi e^2 N_{0s}/m$ ,  $k_0 = 1/l$ ,  $\omega$ ,  $k$  — частота и волновой вектор плазменной волны.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД ВОЛН

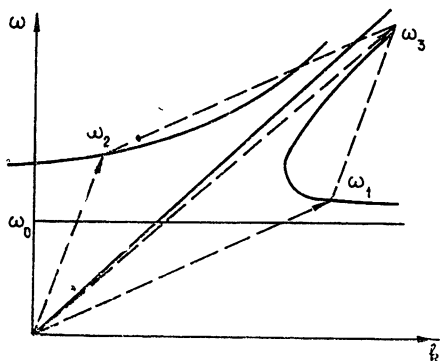


Рис. 1.

Рассмотрим взаимодействие трех плазменных волн, причем волна высшей частоты ( $\omega_3$ ) имеет отрицательную энергию — медленная пучковая волна, а энергии волн частот  $\omega_1, \omega_2$  положительны; тогда в системе возможна взрывная неустойчивость. При этом частоты и волновые векторы удовлетворяют условиям синхронизма (рис. 1):

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 + k_2 = k_3. \quad (7)$$

Предполагаем, что  $\omega_1 \approx \omega_0 + \delta$  ( $\delta \ll$

\* Выбор корреляционной функции не принципиален и определяется простой вычислений.

$\ll \omega_0$ ),  $N_{0s}/N_0 \ll 1$ , тогда из (7) и дисперсионного уравнения  $1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{0s}^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0$  найдем параметры других волн:

$$\omega_2 \approx \omega_0 + \delta, \quad \omega_3 \approx 2\omega_0, \quad k_3 \approx \frac{2\omega_0}{V_0}, \quad k_{1,2} \approx \frac{\omega_0}{V_0} \pm \frac{\omega_{0s}}{V_0 \sqrt{2\delta/\omega_0}}. \quad (8)$$

Представив решение (4) в виде  $\langle E \rangle = \sum_{j=1}^3 A_j(x, t) \exp [i(\omega_j t - k_j x) - i\varphi_j(x, t)]$  и используя асимптотический метод [11], получим уравнения для амплитуд  $A_j$  и разности фаз  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$  взаимодействующих волн\*:

$$\begin{aligned} \frac{dA_{1,2}}{dt} &= \sigma_{1,2} A_3 A_{2,1} \cos \Phi - \nu_{1,2}^{\Phi} A_{1,2}, \\ \frac{dA_3}{dt} &= \sigma_3 A_1 A_2 \cos \Phi - \nu_3^{\Phi} A_3, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\sin \Phi \left( \sigma_3 \frac{A_1 A_2}{A_3} + \sigma_2 \frac{A_1 A_3}{A_2} + \sigma_1 \frac{A_2 A_3}{A_1} \right) + \delta_1;$$

$$\sigma_{1,2} \approx \sigma \approx \frac{e}{2mV_0} \frac{\omega_0 N_0}{\delta N_{0s}}, \quad \sigma_3 \approx \frac{e}{2mV_0} \frac{\omega_0}{\delta} \left( \frac{N_0}{N_{0s}} \right)^{1/2},$$

$$\frac{\nu_{1,2}^{\Phi}}{\omega_0} \approx \left\langle \left( \frac{\delta N}{N_0} \right)^2 \right\rangle \frac{\omega_0^2 \omega_{0s} l}{8 \delta^2 V_0},$$

$$\frac{\nu_3^{\Phi}}{\omega_0} \approx \left\langle \left( \frac{\delta N}{N_0} \right)^2 \right\rangle \frac{\omega_{0s} (k_3 l)}{\omega_0}, \quad (10)$$

$$\frac{\delta_1}{\omega_0} \approx \left\langle \left( \frac{\delta N}{N_0} \right)^2 \right\rangle \frac{\omega_0^2 \omega_{0s}}{8 \delta^2 \omega_0} \left( \frac{8 \delta}{\omega_0} \right)^{1/2} \left( \frac{2 \delta}{\omega_0} - \frac{N_{0s}}{N_0 2 \delta / \omega_0} \right)^{-1}.$$

При выводе (10) учтены условия (7), (8), а также  $k_0 \gg \frac{\omega_{0s}}{V_0} \left( \frac{2 \delta}{\omega_0} \right)^{-1/2}$ .

Исследование (9) в общем виде затруднительно, поскольку необходим анализ в четырехмерном фазовом пространстве  $(A_1, A_2, A_3, \Phi)$ , поэтому ограничимся численным счетом для системы поток-плазма со следующими параметрами:  $N_{0s}/N_0 \approx 10^{-4}$ ,  $N_0 \approx 10^{11} \text{ см}^{-3}$  ( $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ),  $\delta/\omega_0 \approx 10^{-3}$ ,  $l \approx 0,1 \text{ см}$ ,  $\langle (\delta N/N)^2 \rangle \approx 10^{-4}$ ,  $V_0/c \approx 0,1$  (температура плазмы  $\approx 10^3 \text{ К}$ , тогда радиус Дебая  $r_D \ll l$ , а тепловая скорость  $v_T \ll V_0$ ). Счет на ЭВМ производился для системы (10) в безразмерных переменных:

$$\frac{du_{1,2}}{dt_s} = u_3 u_{2,1} \cos \Phi - \nu_1 u_{1,2},$$

$$\frac{du_3}{dt_s} = u_1 u_2 \cos \Phi - \nu_3 u_3, \quad (11)$$

\* Для простоты рассматриваем пространственно-однородную задачу, т. е.  $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ ; кроме того, пренебрегаем линейно-неустойчивой волной, что возможно для пучка, модулированного внешним ВЧ полем [12].

$$\frac{d\Phi}{dt_0} = -\sin \Phi \left( \frac{u_1 u_2}{u_3} + \frac{u_2 u_3}{u_1} + \frac{u_1 u_3}{u_2} \right) + \delta_0,$$

где

$$u_i = A_i^\delta (\sigma_m^\delta \sigma_n^\delta)^{1/2} \quad (i \neq m \neq n), \quad A_i^\delta = \left( \frac{A_i^2}{2\pi m N_{0s} V_0^2} \right)^{1/2},$$

$t_0 = t \omega_0$ ,  $\delta_0 = \delta_1 / \omega_0$ ,  $\nu_{1,2,3} = \nu_{1,2,3}^{\Phi} / \omega_0$ ,  $\sigma_n^\delta = \sigma_n V_0 (2\pi m N_{0s})^{1/2} / \omega_0$ . При заданных параметрах системы поток—плазма коэффициенты  $\nu_{1,2,3}$  и  $\delta_0$  равны соответственно  $\nu_1 \approx \nu_2 = 0,03$ ,  $\nu_3 = 6 \cdot 10^{-7}$ ,  $\delta_0 = 0,06$ . Задавались различные начальные значения амплитуды  $u_3(0)$ , а затравки  $u_{1,2}(0)$  не изменялись ( $u_{1,2}(0) = 10^{-4}$ ). В результате счета обнаружено, что при  $u_3(0) < u_3^*(0)$  ( $0,3 < u_3^*(0) < 0,4$ ) взрывная неустойчивость не возникает (рис. 2). При  $u_3(0) > u_3^*(0)$  наблюдалась взрывная неустойчивость. Если сравнить  $u_3^*(0)$  с аналогичной задачей в однород-

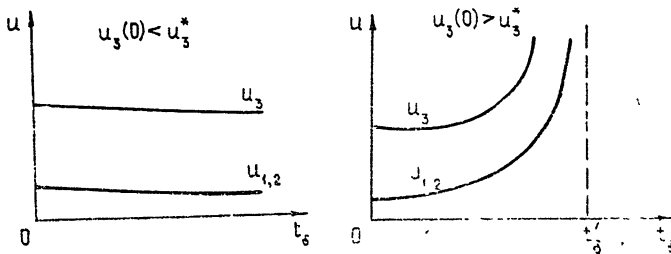


Рис. 2.

ной среде [8], то  $u_3^* \approx 40 \delta_0 / 6$ , т. е. для возбуждения взрывной неустойчивости необходимы начальные амплитуды в 40 раз выше, чем в соответствующей однородной среде без поглощения при наличии той же расстройки  $\delta_0$ .

Таким образом, в системе поток—плазма со случайными неоднородностями концентрации возможен лишь «жесткий» режим возбуждения взрывной неустойчивости при сравнительно больших начальных амплитудах полей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Wilhelmsson, Plasma Phys., 3, 315 (1969).
2. М. И Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, 10, 1298 (1969).
3. Е. Е. Плоткин, С. М. Файнштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 3, 333 (1974).
4. С. М. Файнштейн, ЖТФ, № 6 (1975); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 7, 1059 (1975).
5. J. Fukai, S. Krishan, E. G. Harris, Phys. Rev. Lett., 23, 910 (1969).
6. V. N. Oraevski, V. P. Pavlenko, H. Wilhelmsson, E. Ya, Kogan, Phys. Rev. Lett., 30, 49 (1973).
7. М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 6, 815 (1973).
8. Т. А. Давыдова, В. Н. Ораевский, ЖЭТФ, 66, № 5, 1613 (1973).
9. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 62, № 213 (1972); ЖЭТФ, 68, 948 (1975).
10. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 64, 505 (1973); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 8, 1120 (1974).

11. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
12. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 901 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
9 октября 1974 г.

## A RIGID EXCITATION OF EXPLOSIVE INSTABILITY IN A STREAM-PLASMA SYSTEM WITH CHAOTIC DENSITY INHOMOGENEITIES

*V. V. Tamoykin, S. M. Fainshtein*

An explosive instability of plasma waves in a stream-plasma system with random density inhomogeneities is considered. The equations are deduced for the amplitudes of interacting waves and it is shown that the scattering by inhomogeneities is responsible for the effective absorption of the average field and mistuning from synchronism. As a result of a numerical calculation it is shown for a specific system that the excitation threshold of the explosive instability is increased 40 times than that of the system with the same mistuning but without attenuation.

---

УДК 621.371.222

## СЛАБОЗАТУХАЮЩИЕ УГЛОВЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ И СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ

В. А. Пермяков

Исследованы особенности распространения слабозатухающих угловых волн, направляемых цилиндрическими и сферическими поверхностями произвольного (относительно длины волны в свободном пространстве) радиуса с различной зависимостью поверхностного импеданса от структуры поля

1. Представление поля в виде волн, бегущих по угловой координате, часто используется при асимптотическом исследовании решений внешних задач электродинамики для тел простой формы (цилиндр, шар). Наглядность и простота приближенных решений достигается при этом ценой ограничений, налагаемых на параметры тел для применимости асимптотик специальных функций. Одно из основных условий при асимптотическом исследовании обычно заключается в том, что радиус тела должен быть велик по сравнению с длиной волны в свободном пространстве.

Существуют, однако, определенные основания физического и математического характера, позволяющие ожидать, что это требование может быть в некоторых случаях ослаблено по отношению к определенной части спектра угловых волн.

С физической точки зрения мы имеем в виду, например, системы, способные направлять слабо затухающие квазиповерхностные волны. Квазиповерхностные волны являются аналогами поверхностных волн в соответствующих плоских системах. Для формирования слабозатухающей волны физически необходимо, чтобы радиус поверхности был велик по сравнению с длиной квазиповерхностной волны, т. е. выполнялось условие

$$s\alpha \gg 1, \quad (1)$$

где  $\alpha = k_0 a$  — нормированный радиус,  $s$  — нормированная постоянная распространения квазиповерхностной волны\*.

В то же время, как следует из (1), радиус поверхности может быть велик, соизмерим, либо мал по сравнению с длиной волны в свободном пространстве. Разумеется, случай  $\alpha \leq 1$  в соответствии с (1) может быть реализован только при достаточно большом замедлении квазиповерхностной волны. Таким образом, в указанном смысле мы будем говорить далее о распространении волн над поверхностями произвольной кривизны ( $\alpha \geq 1$ ), имея в виду, что для любого фиксированного радиуса  $\alpha$  условие (1) может быть выполнено подбором других параметров тел (диэлектрическая проницаемость, импеданс), определяющих замедление волны.

\* Ниже все линейные размеры нормированы путем умножения на волновое число свободного пространства  $k_0$ .

С математической точки зрения основанием для получения асимптотических представлений слабозатухающих при произвольных радиусах угловых волн, является тот факт, что асимптотические представления Дебая цилиндрических функций  $Z_\nu(x)$  справедливы в случае больших индексов при произвольных, в том числе малых, значениях переменной, удовлетворяющих условию  $|\nu| > x$  (см. [6], стр. 269).

Таким образом, следует полагать, что по крайней мере в области больших замедлений, когда постоянная распространения угловой волны  $s = \frac{\text{Re } \nu}{\alpha} \gg 1$ , исходя из асимптотик Дебая, можно будет найти пред-

ставления слабозатухающих угловых волн, пригодные при произвольных радиусах. Подчеркнем, что, хотя полное поле описывается в общем случае непрерывной и дискретной частью спектра угловых волн, выделение из полного поля части, относящейся к слабозатухающим волнам дискретного спектра, имеет существенные физические основания. Действительно, именно слабозатухающие волны практически определяют резонансные свойства рассеивателей и дают основной вклад в поле в условиях резонанса.

Впервые указанное асимптотическое представление поля слабозатухающей квазиповерхностной волны с помощью преобразования Ватсона было выделено из полного поля для сверхплотного ( $\epsilon < -1$ ) плазменного шара [1,2] и цилиндра [3] произвольного радиуса\*.

При этом было показано, что в области больших замедлений постоянная распространения квазиповерхностной волны над шаром принципиально отличается от постоянных распространения волн над цилиндром и плоской границей раздела плазма—вакуум.

С целью выяснения причин такого расхождения в настоящей работе анализируются особенности распространения слабозатухающих угловых волн, связанные с кривизной поверхности и различной зависимостью импеданса от структуры поля. Для этого проводится сравнение постоянных распространения угловых волн на цилиндре и шаре с различными физическими реализуемыми импедансами (плазма с  $\epsilon < -1$ , диэлектрик с  $\epsilon > 1$ , импеданс, не зависящий от структуры поля). Асимптотические разложения для постоянных распространения слабозатухающих угловых волн ищутся в форме, пригодной при произвольных радиусах относительно длины волны в свободном пространстве. В последней части работы определяются постоянные затухания угловых волн. При этом учитываются, наряду с потерями на излучение, тепловые потери в среде. Анализируется зависимость постоянной затухания квазиповерхностной волны над плазменным шаром от его радиуса.

Результаты работы можно использовать при интерпретации резонансов тел произвольных радиусов как резонансов слабозатухающих угловых волн [1-4].

2. Характеристические уравнения для определения комплексных постоянных распространения угловых волн  $\nu/\alpha = s - i\gamma$  над цилиндром и шаром имеют следующий вид в случае  $E$ -волн ( $E_r \neq 0, H_r = 0$ )\*\*:

$$L_{ц, ш} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln H_\nu^{(2)}(\alpha) - iZ_{\nu, ц} + \Delta L_{ц, ш} = 0; \quad (2)$$

\* Некоторые особенности формирования слабозатухающих угловых волн над плазменным шаром и цилиндром обсуждались позднее в работе [14]

\*\* Временной множитель  $\exp(i\omega t)$ . В случае цилиндра рассматривается двумерная задача, причем тип волны мы определяем по аналогии с шаром (по радиальной компоненте поля).



$$\Delta L_{\text{ц}} = 0, \quad \Delta L_{\text{ш}} = \frac{1}{2\alpha} + i(Z_{\text{вц}} - Z_{\text{вш}}), \quad (3)$$

$Z_{\text{вц}}, \text{ш}$  в формулах (2), (3) — парциальный поверхностный импеданс цилиндра (шара), деленный на импеданс свободного пространства. В случае однородной плазмы с отрицательной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = -x^2 < 0$

$$Z_{\text{вц}} = \frac{i}{x^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln I_\nu(x\alpha), \quad Z_{\text{вш}} = Z_{\text{вц}} + \frac{i}{2x^2\alpha},$$

$H_\nu^{(2)}(\alpha)$  — функция Ханкеля 2-го рода,  $I_\nu(x)$  — модифицированная функция Бесселя.

Предполагая радиационное затухание весьма малым ( $\text{Re } \nu - \alpha \gg \gg -\text{Im } \nu$ ), получим с помощью асимптотик Дебая цилиндрических функций следующее характеристическое уравнение для постоянной распространения квазиповерхностной волны  $s$ :

$$L_{\text{ц}, \text{ш}} = -\sqrt{s^2 - 1} + \frac{1}{x^2} \sqrt{s^2 + x^2} + \frac{x^2 + 1}{2\alpha(s^2 - 1)(s^2 + x^2)} + \Delta L_{\text{ц}, \text{ш}} = O(\alpha^{-2}(s^2 - 1)^{-3/2}). \quad (4)$$

Поставим цель получить асимптотические разложения\* постоянной распространения квазиповерхностной волны при условии (1), т. е. пригодные в случае больших замедлений при произвольных радиусах.

Трудность получения таких разложений связана с тем, что  $s$  есть функция двух переменных  $\alpha$  и  $x$ . При этом заранее неясно, каким должен быть при произвольных радиусах большой параметр асимптотического разложения (т. е. замедление волны); вообще говоря, он может быть сложной функцией  $\alpha$  и  $x$ . Следует лишь ожидать, что при  $\alpha \rightarrow \infty$  постоянная распространения волны над цилиндром (шаром) совпадает с постоянной распространения поверхностной волны над плоскостью.

В связи с этим мы будем строить асимптотику  $s(\alpha, x)$  при условии  $\alpha \gg 1$ , а затем выясним, будет ли она справедлива и при малых радиусах, если замедление волны достаточно велико.

При этом получим для цилиндра

$$s_{\text{ц}} = h \left[ 1 + \frac{x}{2\alpha^2 h^3} + O\left(\frac{x^4}{h^2 \alpha^2}\right) \right] \quad (5)$$

и для шара

$$s_{\text{ш}} = h \left[ 1 + \frac{xh}{2\alpha} \left( 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) + O\left(\frac{x^4 h^2}{\alpha^2}\right) \right], \quad (6)$$

где

$$h = \sqrt{x^2/(x^2 - 1)} \quad (7)$$

— постоянная распространения поверхностной волны над плоской границей раздела плазма—вакуум [5]. Как и следовало ожидать из физических соображений, при фиксированном  $x$  и  $\alpha \rightarrow \infty$  постоянные распространения волн над цилиндром и шаром переходят в постоянную распространения поверхностной волны плоской задачи. В области  $1 \ll x^2 - 1 \ll \alpha^{2/3}$  разложения (5) и (6) совпадают с известными аналитическими решениями для индуктивного шара и цилиндра [8–10] и численными решениями для шара [2, 13], полученными методом Фока [7].

\* Мы следуем определению асимптотического разложения, данному Эрдейи [15].

Изучим теперь разложения (5) и (6) в области больших замедлений. Как следует из (5), постоянные распространения волн над цилиндром и плоской границей близки, т. е. высшими членами разложения можно пренебречь, при условии

$$h\alpha \gg x^2 + x/h^2. \quad (8)$$

Это условие выполняется в случае небольших замедлений только при достаточно больших радиусах. Для случая больших замедлений оно приобретает вид (1), т. е. означает высказанное ранее из физических соображений требование малости длины поверхностной волны по сравнению с радиусом кривизны. В то же время это условие означает, что с ростом замедления волны ( $x \rightarrow 1_{+0}$ ) оно может быть выполнено при любых конечных радиусах цилиндра.

Рассмотрим теперь разложение (6) для шара. Оно, как показывают оценки, пригодно при

$$\alpha^{-2} \ll x^2 - 1 \ll \alpha^{2/3}, \quad (9)$$

т. е. только при больших радиусах шара и ограниченных замедлениях волны.

Таким образом, очевидное на первый взгляд предположение о совпадении асимптотического представления постоянной распространения квазиповерхностной волны на шаре большого радиуса с постоянной распространения волны над плоской границей оказывается неверным при фиксированном радиусе с увеличением замедления волны.

Пригодная в области  $x \rightarrow 1_{+0}$  ( $\epsilon \rightarrow -1_{-0}$ ) асимптотика постоянной распространения волны над шаром ищется в виде разложения по степеням  $x^2 - 1$  и имеет вид

$$s_{ш} = \frac{x^2 + 1}{2\alpha(x^2 - 1)} + \frac{2\alpha x^2}{x^2 + 1} + O\left(\frac{\alpha^3(x^2 - 1)}{x^2}\right). \quad (10)$$

Асимптотика (10) справедлива в области

$$0 < x^2 - 1 \ll \alpha^{-2} \quad (11a)$$

или при условии

$$h^*\alpha = \frac{x^2 + 1}{2(x^2 - 1)} \gg \alpha^2, \quad (11b)$$

где  $h^*$  имеет смысл постоянной распространения квазиповерхностной волны над шаром, существенно зависящей от кривизны поверхности в области больших замедлений\*. Хотя условие (11) несколько отличается от априорного (1), при  $x \rightarrow 1_{+0}$  оба условия выполняются и асимптотика (10) оказывается пригодной для произвольных конечных радиусов шара.

Приближенное аналитическое решение уравнения (4) для плазменного шара, совпадающее в предельных случаях, удовлетворяющих условиям (9) и (11), с главными членами соответствующих решений (6) и (10), было получено ранее в [1].

Ниже мы приведем более точное, по сравнению с данным в [1], решение

$$s = s_0 + \Delta s,$$

\* Это означает, что в области больших замедлений для плазменного шара нарушается принцип локальности, согласно которому квазиповерхностная волна над шаром при  $\alpha \gg 1$ ,  $h\alpha \gg 1$  должна совпадать с локально плоской поверхностной волной, имеющей постоянную распространения (7) (см. [14]).

$$s_0 = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1} + \left(\frac{x^2 + 1}{2\alpha(x^2 - 1)}\right)^2 + \frac{2x^2}{(x^2 - 1)(1 + \tau)}},$$

$$\Delta s = \frac{4\alpha^2 x^2 (x^2 - 1)}{s_0 (1 + x^2 \tau) (x^2 + \tau) \tau}, \quad (12)$$

$$\tau = \sqrt{1 + 4\alpha^2 (x^2 - 1)}.$$

Главный член решения (12) удовлетворяет биквадратному алгебраическому уравнению, которое следует из (4) после пренебрежения членом  $\frac{x^2}{2\alpha(s^2 - 1)(s^2 + x^2)}$ ; поправка  $\Delta s$  найдена методом возмущений.

Формула (12) для  $s$  пригодна в области

$$0 < x^2 - 1 \ll \alpha^{2/3} + \alpha^{-2}, \quad (13)$$

т. е. при произвольных радиусах шара, и переходит в предельных случаях в (6) и (10). Наиболее жесткими оказываются условия применимости формулы (12) при  $\alpha \sim 1$ . Учет поправки  $\Delta s$  в (12) существен при анализе резонансных свойств рассеивателей, поскольку она определяет асимптотику разности соседних резонансных частот. Оценка погрешности формулы (12) в общем случае весьма громоздка, при  $\alpha \gg 1$  она имеет порядок  $o(1/\alpha)$ .

Таким образом, приближенные выражения для постоянной распространения квазиповерхностной волны над сверхплотным плазменным цилиндром (5) и шаром (10), (12) оказываются пригодными при произвольных конечных радиусах, если замедление волны растет ( $x^2 \rightarrow 1+0$ )\*.

3. Как следует из полученных выражений, в области больших замедлений (при  $x^2 \rightarrow 1+0$ ) постоянная распространения квазиповерхностной волны над шаром принципиально отличается от постоянной распространения волны над цилиндром и плоской границей при любых конечных, в том числе и больших радиусах. Обсудим причины такого различия в поведении квазиповерхностных волн над плазменным шаром и цилиндром. С этой целью сравним представления полей над шаром и цилиндром в приближении комплексной геометрической оптики. Для рассматриваемых здесь волн электрического типа компоненты полей выражаются через скалярную функцию  $U$ , равную в случае цилиндра в области тени [11]

$$U_{\text{ц}} = \begin{cases} A_{\text{ц}} \exp(-i\varphi_1) - \frac{i}{2} A_{\text{ц}} \exp(-i\varphi_2) & (\text{Re } v > r > \alpha) \\ A_{\text{ц}} \exp(-i\varphi_1) & (r < \alpha) \end{cases}, \quad (14)$$

где эйконал  $\varphi$  и амплитуда  $A_{\text{ц}}$  равны

$$\varphi_{1,2} = v\theta \pm i \int^r \sqrt{v^2/r^2 - \varepsilon} dr,$$

$$A_{\text{ц}} = (v^2 - r^2 \varepsilon)^{-1/4}, \quad (15)$$

$\varepsilon = 1$  при  $r > \alpha$ ,  $\varepsilon = -x^2$  при  $r < \alpha$ .

В случае шара скалярная функция имеет вид, аналогичный (14),

\* Проверка показывает также, что указанные выражения согласуются с решениями, полученными методом степенных рядов при  $|v| \gg \alpha$ ,  $|v| \gg 1$ .

причем эйконал  $\varphi$  совпадает с приведенным выше, а амплитуда замещается на\*

$$A_{\text{ш}} = r^{1/2} f(\theta) A_{\text{ц}}. \quad (16)$$

Условие непрерывности тангенциальных составляющих полей на поверхности цилиндра и шара с учетом векторного характера задачи для  $E$ -волн сводится к

$$\left[ \frac{1}{\epsilon U} \frac{\partial U}{\partial r} \right]_{r=\alpha-0}^{r=\alpha+0} = 0. \quad (17)$$

Из лучевых представлений (14)—(16) и условия (17) следует, что различие трансцендентных уравнений для постоянных распространения волн над шаром и цилиндром объясняется членом

$$\left[ \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial r} \ln A_{\text{ш}} - \frac{\partial}{\partial r} \ln A_{\text{ц}} \right) \right]_{r=\alpha-0}^{r=\alpha+0} = \frac{1}{2\alpha} \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) = \Delta L_{\text{ш}}, \quad (18)$$

т. е. различием в радиальных логарифмических производных амплитуд комплексных лучей над шаром и цилиндром\*\*. Это различие, как следует из (15), (16) и (18), обусловлено дополнительной (поперечной относительно направления распространения волны) кривизной поверхности плазменного шара по сравнению с цилиндром. Исходя из (15)—(18), обсудим влияние кривизны более подробно. Согласно (17), фазовая скорость зависит от характера изменения поля по радиусу. Основная изменение поля в радиальном направлении обусловлено мнимой частью эйконала, т. е. экспоненциальным фактором  $\exp(\text{Im } \varphi)$ , который, однако, одинаков для цилиндра и шара и дает при подстановке в (17) уравнение для постоянной распространения поверхностной волны над плоской границей. Поэтому все различие в радиальном изменении поля при искривлении поверхности оказывается связанным с предэкспоненциальными множителями (амплитудами) лучевых представлений полей. Продольная относительно направления распространения волны кривизна поверхности (угловые волны на цилиндре) не может качественно изменить фазовую скорость в области больших замедлений. Действительно, из (15) следует, что при  $r = \text{const}$  и  $|\nu| \rightarrow \infty$   $A_{\text{ц}} \rightarrow \nu^{-1/2}$ , т. е. амплитуда угловой волны на цилиндре явно от радиуса не зависит и вклада в уравнение (17) не дает. Поперечная кривизна (шар) приводит к не исчезающей в предельном случае больших замедлений зависимости амплитуды от радиуса кривизны: в соответствии с (16) при  $r = \text{const}$  и  $|\nu| \rightarrow \infty$   $A_{\text{ш}} \rightarrow r^{1/2} \nu^{-1/2} f(\theta)$ .

Подчеркнем, что аномальное поведение фазовой скорости волны на шаре связано именно с поперечной относительно направления распространения волны кривизной поверхности, а не с обязательным наличием двойной кривизны. Такой вывод очевиден из приведенных выше оценок, а также подтверждается анализом фазовой скорости аксиальной поверхностной волны на цилиндре [12]. Для аксиальной волны поперечная кривизна поверхности цилиндра отлична от нуля, продольная — равна нулю, а фазовая скорость имеет в области больших замедлений такую же зависимость, как в случае волны над шаром

4. Влияние дополнительной кривизны шара не является, однако, единственным фактором, обуславливающим принципиальное отличие

\* Для простоты записи поля предполагаем осесимметричное возбуждение шара: от характера возбуждения и явного вида множителя  $f(\theta)$  окончательный результат (18) не зависит.

\*\* Отметим, что различие точных характеристических уравнений для шара и цилиндра (см. (2), (3)) строго определяется выражением (18).

постоянной распространения квазиповерхностной волны над шаром от плоского случая. Другой существенный фактор — характер зависимости поверхностного импеданса от постоянной распространения поверхностной волны.

Для выяснения роли поверхностного импеданса рассмотрим, помимо плазмы, другие системы, направляющие слабозатухающие волны.

а) Тела со «сторонним» импедансом (не зависящим от структуры поля). При  $Z_{\text{ш}} = Z_{\text{ц}} = iX$ ,  $X > 0$  асимптотические разложения по степеням  $h^{-1} = (1 + X^2)^{-1/2}$  постоянных распространения квазиповерхностной волны имеют вид

для шара

$$s_{\text{ш}} = h + \frac{1}{2\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2 h}\right), \quad (19)$$

для цилиндра

$$s_{\text{ц}} = h + \frac{1}{2\alpha h^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^2 h^3}\right).$$

Здесь  $h = \sqrt{1 + X^2}$  — постоянная распространения поверхностной волны над плоской импедансной границей.

Разложения (18), найденные при  $h \rightarrow \infty$ , согласуются с полученными в [9, 10] с помощью асимптотики Дебая для случая  $\alpha \gg 1$ . Таким образом, результаты работ [9, 10] в области сильных замедлений оказываются пригодными при большой кривизне. Заметим, однако, что в [9] не вычислена поправка к  $s$  порядка  $1/\alpha$ , учет которой существен при описании резонансных свойств рассеивателей [1].

б) Диэлектрик  $\epsilon \gg 1$ . При  $\epsilon > 1$   $Z_{\text{ц}} = \frac{i J'_v(\sqrt{\epsilon}\alpha)}{\sqrt{\epsilon} J_v(\sqrt{\epsilon}\alpha)}$ . В интересующей нас области больших замедлений уравнение (2) может удовлетвориться только при больших импедансах, т. е. при  $J_v(\sqrt{\epsilon}\alpha) \sim 0$ . В окрестности  $m$ -го нуля функции Бесселя постоянные распространения представляются в виде рядов:

$$s_{\text{ц}} \approx s_{\text{ш}} \approx \sqrt{\epsilon} \left[ 1 - \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\beta_m}{\beta} \right)^{2/3} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}(\epsilon-1)\beta} + O(\beta^{-4/3}) \right], \quad (20)$$

где

$$\beta_m = m\pi + 3\pi/4, \quad \beta = \sqrt{\epsilon}\alpha.$$

Рассматриваемые слабозатухающие волны порождаются волнами шепчущей галереи, распространяющимися внутри диэлектрического цилиндра (шара) [8].

Приведенные выше примеры иллюстрируют поведение квазиповерхностной волны в области больших замедлений при типичных зависимостях импеданса от постоянной распространения поверхностной волны. При этом разложения (19), (20) для импедансных и диэлектрических тел оказываются пригодными при любых конечных радиусах, если замедление волны неограниченно растет, т. е.  $X \rightarrow \infty$  для импедансных тел и  $\epsilon \rightarrow \infty$  для диэлектрических тел, и, следовательно, выполняется условие (1).

Основываясь на рассмотренных примерах, можно утверждать, что принципиальное отличие в поведении постоянных распространения квазиповерхностных волн над шаром и цилиндром возможно только при условии, что импеданс шара имеет следующий характер роста по  $s$ :  $Z = i(as + b + 0(1/s))$  ( $a > 0$ ,  $b \neq -1/2\alpha$ ), реализующийся в случае сверхплотной ( $\epsilon < -1$ ) плазмы.

5. Постоянная затухания  $\gamma$  квазиповерхностной волны в случае малых потерь с помощью метода возмущений в явном виде выражается через постоянную распространения

$$\gamma_{ц, ш} = \gamma^r + \gamma^d = -\frac{1}{D} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln H_v^{(2)}(\alpha) + \frac{1}{D} \operatorname{Re} Z_{ц, ш}, \quad (21)$$

где

$$D = -\alpha \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial \alpha} \operatorname{Re} \ln H_v^{(2)}(\alpha) + \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{Im} Z_{ц, ш} \right) \quad (v = s\alpha).$$

Постоянная затухания представляется в виде суммы двух членов, первый из которых ( $\gamma^r$ ) определяет потери на излучение, а второй ( $\gamma^d$ ) — диссипацию энергии в плазме.

С помощью асимптотик Дебая при учете малых потерь в плазме ( $\sqrt{\varepsilon} = n - i\kappa$ ,  $n \ll \kappa$  при  $\varepsilon < 0$ ) получим следующие выражения для  $\gamma$ :

$$\gamma_{ц, ш}^r = \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{D} \exp(-2\eta); \quad (22)$$

$$\gamma_{ц, ш}^d = \frac{2n}{\kappa^3} \frac{\sqrt{s^2 + \kappa^2}}{D}, \quad \gamma_{ш}^d = \gamma_{ц}^d \left( 1 + \frac{1}{2\alpha \sqrt{s^2 + \kappa^2}} \right), \quad (23)$$

где

$$D = s [(s^2 - 1)^{-1/2} - \kappa^{-2} (s^2 + \kappa^2)^{-1/2}],$$

$$\eta = \alpha [s \ln (s + \sqrt{s^2 - 1}) - \sqrt{s^2 - 1}].$$

Как следует из (21) — (23), в первом приближении теории возмущений функциональные зависимости постоянных затухания над цилиндром и шаром от переменных  $s$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$  различаются только при наличии потерь, причем это различие оказывается пренебрежимо малым при условии  $2s\alpha = 2\operatorname{Re} v \gg 1$ . В связи с этим различие в затухании волн над цилиндром и шаром обусловлено в первую очередь различной зависимостью постоянных распространения  $s_{ц}$  и  $s_{ш}$  от радиуса и диэлектрической проницаемости.

Приведенные выше выражения для постоянной затухания квазиповерхностной волны (21) — (23), полученные методом возмущений, непригодны в области весьма больших замедлений, где знаменатель  $D$  стремится к нулю. В этой области, однако, можно вообще пренебречь радиационными потерями, а полученные ранее представления для вещественной части постоянной распространения волны использовать при учете потерь, заменяя  $\varepsilon$  на  $\varepsilon' - i\varepsilon''$  в случае диэлектрика (плазмы) и  $X$  на  $-iR$  в случае импеданса. После такой замены поведение комплексных постоянных распространения волн с сильным замедлением может быть исследовано даже для относительно больших затуханий волн, лишь бы выполнялось условие  $|v| \gg \alpha$ .

6. Эффективным методом отыскания комплексных постоянных распространения слабозатухающих волн является численное решение трансцендентных уравнений, полученных подстановкой асимптотик Дебая в исходные уравнения (2), (3). Приведем результаты расчетов для плазменного шара и цилиндра, полученные путем численного решения уравнения (4) для  $s$  и определения  $\gamma$  по формулам (22), (23). Зависимости постоянных распространения квазиповерхностных волн над шаром (сплошная линия) и цилиндром (пунктир) от радиуса при различных показателях затухания плазмы показаны на рис. 1. Сравнение численных и аналитических решений для постоянных распространения

слабозатухающих волн над плазменным цилиндром и шаром приведено на рис. 2 (сплошная линия — численное решение уравнения (4), штрих-пунктир — приближение (5) для цилиндра, пунктир — приближение (6), треугольники — приближение (10), крестики — приближение (12) для

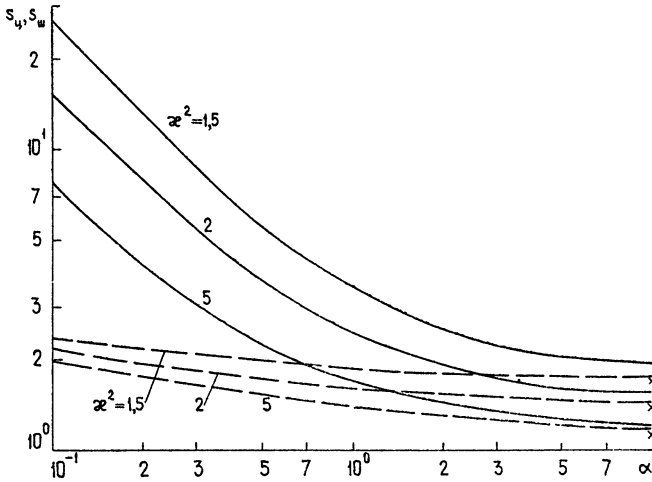


Рис. 1.

шара). Отметим, что решение (12) для шара практически совпадает с численным. Сравнение комплексных постоянных распространения квазиповерхностной волны над плазменным шаром радиуса  $\alpha = 10$

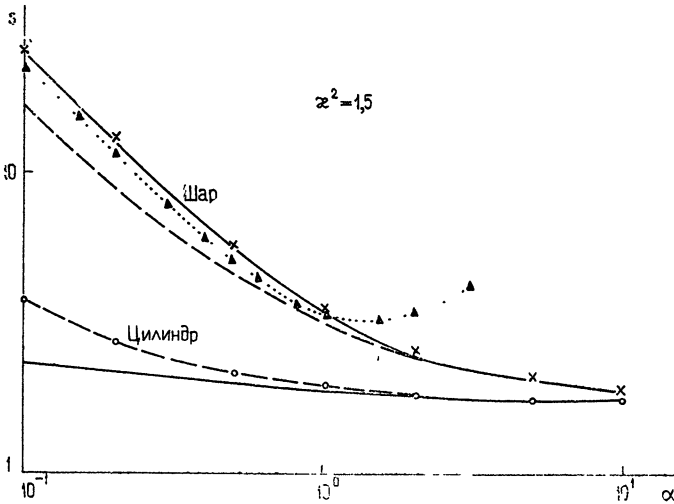


Рис. 2.

приведено на рис. 3 (пунктир — расчет с помощью асимптотики Дебая (численное решение уравнения (4) и формула (22)), сплошная линия — расчет в импедансном приближении методом В. А. Фока). Решения удовлетворительно согласуются в области  $x^2 \sim 2,4 - 3$ , при меньших

значениях растет погрешность импедансного приближения\*, при больших — неприменима асимптотика Дебая.

Расчетные зависимости компонент  $\gamma^r$  и  $\gamma^d$  постоянной затухания волны над шаром (см. формулы (22) и (23)), определяющих потери на излучение (сплошная линия) и на поглощение в плазме (пунктир), от радиуса шара приведены на рис. 4. Обратим внимание на то, что зависимость радиационных потерь от радиуса имеет максимум при некоторых радиусах, убывая при  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow \infty$ . Убывание потерь на излучение с ростом  $\alpha$  очевидно из элементарных соображений, так как квазиповерхностная волна должна переходить при  $\alpha \rightarrow \infty$  в неизлучающую поверхностную волну над плоской индуктивной поверхностью. Убывание потерь с уменьшением радиуса можно оценить с помощью энергетического метода аналогично [10] по формуле  $-2 \operatorname{Im} \nu = s_r / S_0$ , где

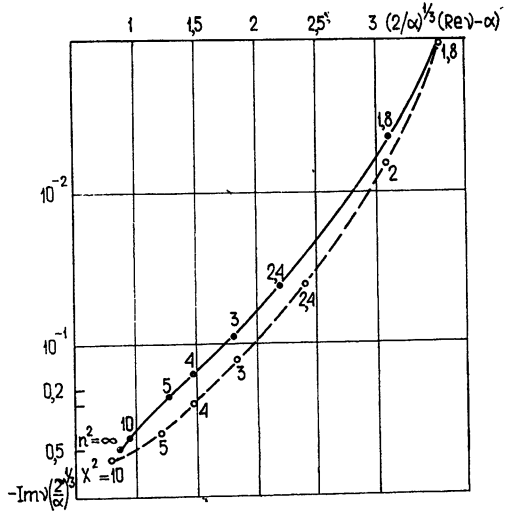


Рис. 3.

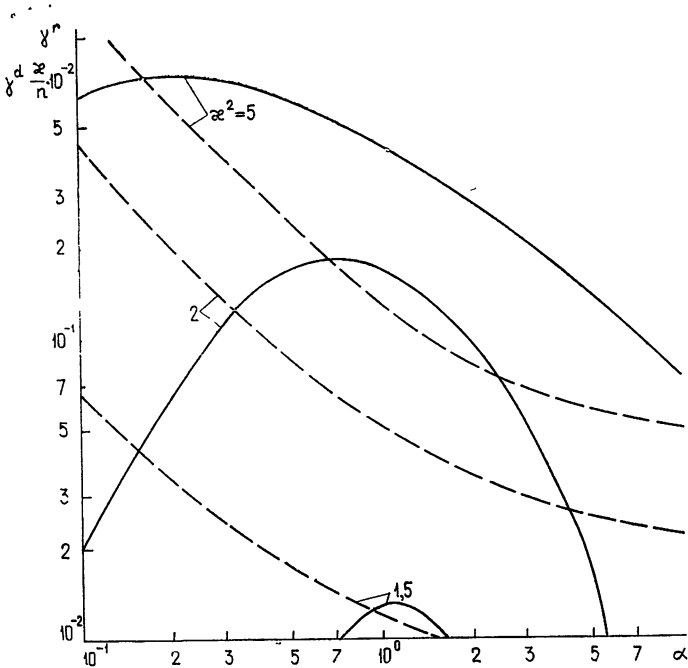


Рис. 4.

\* Эта погрешность обусловлена приближенным характером импедансного граничного условия  $Z = i/\alpha$  и ошибкой, возникающей при замене функции Ханкеля функцией Эйри аргумента  $t = (2/\alpha)^{1/3}(\nu - \alpha)$ .



$S_\theta$  — полный поток энергии, переносимой вдоль поверхности,  $S_r$  — поток энергии, излучаемой в радиальном направлении в сектор единичного угла. При грубых оценках можно полагать, что поле квазиповерхностной волны убывает по радиусу от поверхности тела до поверхности  $r \sim \text{Re } \nu$ , с которой идет излучение. При уменьшении радиуса тела относительная амплитуда поля на поверхности  $r \sim \text{Re } \nu$  быстро падает в соответствии с квазистатическим характером убывания поля по радиусу, что и объясняет уменьшение радиационных потерь. Так, для шара в области  $r < \text{Re } \nu$

$$E_r \sim E_\theta \sim \frac{H_\varphi}{r} \sim r^{-\text{Re } \nu - 3/2},$$

откуда следует, что при  $\alpha \rightarrow 0$

$$-\frac{\text{Im } \nu}{\alpha} \sim \frac{E_\theta H_\varphi |_{r=\text{Re } \nu}}{\alpha \int_{\text{Re } \nu}^{\alpha} E_r H_\varphi dr} \sim \left( \frac{\alpha}{\text{Re } \nu} \right)^{2 \text{Re } \nu} \rightarrow 0.$$

7. Предложенный подход к исследованию слабозатухающих угловых волн на телах радиуса, большего по сравнению с длиной угловой волны и произвольного по сравнению с длиной волны в свободном пространстве, по существу основан на асимптотическом разложении постоянных распространения этих волн в ряд по обратным степеням большого параметра, не зависящего от радиуса тела и с физической точки зрения, связанного с величинами, определяющими замедление волны  $((\chi^2 - 1)^{-1}$  в случае плазмы,  $\epsilon$  — в случае диэлектрика,  $X$  для импедансного тела). Построенные таким образом разложения оказываются справедливыми при любых конечных радиусах с ростом замедления волны.

Изложенный на примере распространения слабозатухающих волн вдоль цилиндрических и сферических поверхностей сверхплотной плазмы ( $\epsilon < -1$ ), диэлектрика с  $\epsilon > 1$  и импедансного тела, этот подход, по-видимому, может быть обобщен в некоторых случаях на более сложные системы (слоистые и плавные неоднородные объекты с поверхностями переменной кривизны).

В заключение автор благодарит С. И. Белоусова за помощь в выполнении данной работы, В. К. Полищука и Ю. И. Орлова за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 8, 1265 (1968).
2. В. А. Пермяков, Диссертация, МЭИ, 1969.
3. В. А. Пермяков, Аннотации докладов V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, ЛГУ, 1970, стр. 57.
4. В. А. Пермяков, Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1968—1969 гг., секция радиотехническая, подсекция антенных устройств и распространения радиоволн, МЭИ, Москва, 1969, стр. 81.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957.
6. Дж. В. Ватсон, Теория бесселевых функций, 1, ИЛ, М., 1949.
7. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вдоль земной поверхности, АН СССР, М.—Л., 1946.
8. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
9. J. V. Keller, F. S. Karal, J. Appl. Phys., 31, 1039 (1960).
10. М. А. Миллер, В. И. Таланов, ЖТФ, 26, 2755 (1956).

11. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
12. О. В. Багдасарян, В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, 8, 1217 (1975).
13. Э. М. Гюннинен, Б. Д. Кочетков, сб. Дифракция и распространение волн, ЛГУ, вып. 5, 208 (1966).
14. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1894 (1972).
15. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
23 июня 1972 г.,  
после доработки  
3 марта 1975 г.

## WEAKLY-ATTENUATING ANGULAR WAVES GUIDED BY CYLINDRICAL AND SPHERICAL SURFACES WITH AN ARBITRARY CURVATURE

*V. A. Permyakov*

The peculiarities of propagation of weakly-attenuating angular waves guided by cylindrical and spherical surfaces of an arbitrary (with respect to the wavelength in a free space) radius with different dependence of the surface impedance on the field structure are investigated.

---

УДК 621.396.67.012.12

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН САНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ВОЛН ПО ФАЗОМЕТРИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

*В. И. Игнатьев, Ю. В. Сысоев, В. И. Турчин*

Для систематического контроля диаграмм направленности типовых полноповоротных антенных систем в условиях их эксплуатации предлагается использовать фазометрический (голографический) метод. Рассматривается блок-схема измерительного устройства, использующего типовые элементы тракта антенной системы, и методика проведения измерений, приводятся результаты измерения диаграммы направленности типовой антенной системы сантиметрового диапазона длин волн.

В настоящее время повышение требований к точности и достоверности определения параметров антенн привело к необходимости систематического измерения диаграмм направленности антенных систем в условиях их эксплуатации. Одним из путей решения этой проблемы является применение методов определения диаграмм направленности (ДН) антенн по измерению поля в ближней зоне [1].

Используемый в этих целях зондовый метод имеет ограниченную применимость при измерениях, проводимых в полевых условиях, в основном из-за громоздкости измерительной установки. Применяется также метод фокусировки на источник в ближней зоне [1, 8, 9].

Одним из перспективных методов для полевых измерений антенных систем представляется фазометрический (голографический) метод [2, 3, 4], в котором измеряется поле (или голограмма) антенны на участке сферы в зоне Френеля, пересчитываемое затем в ДН. Прием сигнала контрольного рупора, находящегося в зоне Френеля антенны, производится при этом как исследуемой антенной, так и вспомогательным (опорным) рупором. Алгоритмы пересчета полей и голограмм в ДН известны [2, 4], причем поля и голограммы задаются на сфере в зоне Френеля, что особенно удобно для полноповоротных антенн, которыми являются исследуемые антенные системы. Этот алгоритм представляет собой интегральное преобразование Френеля [2].

$$\dot{f}(\beta, \varepsilon) = \iint \dot{f}_R(\beta', \varepsilon') \exp \left\{ -j\pi \frac{R}{\lambda} [(\beta - \beta')^2 + (\varepsilon - \varepsilon')^2] \right\} d\beta' d\varepsilon', \quad (1)$$

где  $\dot{f}_R(\beta, \varepsilon)^*$  — поле в зоне Френеля на сфере радиуса  $R$  в азимутально-угломестной системе координат,  $\dot{f}(\beta, \varepsilon)$  — ДН (по полю).

Преобразование (1) можно выполнить, используя оптическую обработку в когерентном [2], либо некогерентном [5] свете, а также на ЭВМ. В данном случае была выбрана обработка на ЭВМ.

Целью исследования явилась проверка возможности и особенностей использования фазометрического метода с измерениями в зоне Фре-

\* Точкой, поставленной над знаком функции, здесь и далее обозначается комплексная функция.

неля при машинной обработке результатов применительно к серийным антенным системам в условиях их эксплуатации и оценка трудностей реализации метода.

### 1. СХЕМА ИЗМЕРЕНИЙ

Анализ операций, выполняемых известными схемами [2, 3, 4], показывает, что получение интерференционного члена  $\dot{A}_{оп} \dot{f}_R(\beta, \epsilon)$  ( $\dot{A}_{оп}$  — амплитуда опорного сигнала) в этих схемах производится косвенно, что усложняет схему измерений. При проведении настоящих исследований использовалась операция непосредственного перемножения величин  $\dot{A}_{оп}$  и  $\dot{f}_R(\beta, \epsilon)$  путем использования кольцевого модулятора [10].

При условии, что вольт-амперные характеристики диодов модулятора идентичны и аппроксимируются полиномом степени не выше третьей, постоянная составляющая выходного напряжения модулятора, фиксируемая измерительным прибором, пропорциональна  $\text{Re}\{\dot{A}_{оп} \dot{f}_R(\beta, \epsilon)\}$ . Для получения величины  $\text{Im}\{\dot{A}_{оп} \dot{f}_R(\beta, \epsilon)\}$  необходимо произвести предварительное изменение фазы одной из перемножаемых величин на  $\pi/2$ .

Выполнение операции непосредственного перемножения позволяет существенно упростить схему измерения, а применительно к типовым антенным системам еще и использовать элементы их трактов. В связи с тем, что обработку сигналов удобнее вести на промежуточной частоте, блок-схема измерений для типовой антенной системы приобретает вид, показанный на рис. 1.

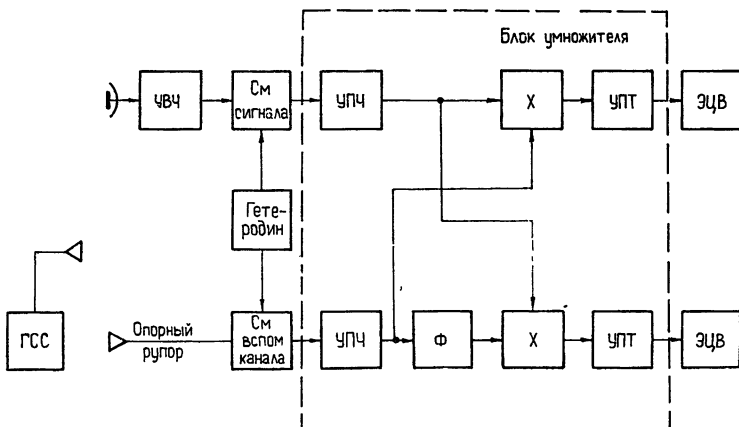


Рис. 1.

Схема содержит два преобразователя частоты, имеющих общий гетеродин (элементы антенной системы), два усилителя промежуточной частоты (УПЧ) с одинаковыми амплитудно-частотными и фазо-частотными характеристиками, два одинаковых умножителя. На входы 1-го умножителя подаются сигналы с выходов обоих УПЧ непосредственно, на 2-й поступают те же сигналы, но фаза одного из них изменена на величину  $\pi/2$  специальным фазосдвигающим каскадом.

Усилители постоянного тока (УПТ), подключенные к выходам модуляторов, усиливают лишь постоянные составляющие их выходных напряжений. Напряжения на выходе УПТ регистрируются электронными цифровыми вольтметрами (ЭЦВ).

Сигнальный вход блока умножителя подключается к основному смесителю антенной системы, опорный — к смесителю вспомогательного канала антенной системы.

Переключение на промежуточной частоте облегчило задачу универсализации прибора с целью применения его на разнотипных антенных системах.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Эксперимент проводился на типовом образце антенной системы сантиметрового диапазона с антенной в виде усеченного параболоида.

Проведение полевых измерений было осуществлено следующим образом: на типовой мачте, высота которой составляла 20 м, удаленной от исследуемой антенны на расстояние 50 м, устанавливался контрольный рупор, направленный в сторону антенны. По кабелю длиной 20 м он запитывался сигналом СВЧ от измерительного генератора. Входы блока умножителя подключались к смесителям сигнального и вспомогательного каналов антенной системы. Выходные напряжения блока умножителей определялись с помощью электронно-цифрового вольтметра.

Перед началом измерений антенна была точно сориентирована в направлении на контрольный рупор с фиксацией ее положения по азимуту ( $\beta_0$ ) и углу места ( $\epsilon_0$ ). При постоянном значении азимута антенны были измерены выходные напряжения блока умножителей в секторе  $\epsilon$  с шагом  $\Delta\epsilon_0$ , при проведении измерений эти значения использовались как контрольные. Далее при постоянных значениях угла места антенны  $\epsilon_0 \pm n\Delta\epsilon_0$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) фиксировались выходные напряжения при положениях антенны по азимуту  $\beta_0 \pm m\Delta\beta_0$  ( $m = 0, 1, \dots$ ), образующие строки матрицы выходных данных. Размеры углового сектора, внутри которого производились измерения, и величины  $\Delta\beta_0$ ,  $\Delta\epsilon_0$  выбирались на основании соотношений, приведенных в [4].

При проведении предварительных измерений регистрировался сигнал на выходе одного из каналов\*, причем при переходе от одного значения угла места к другому при помощи фазосдвигающего каскада менялся набег фазы по закону  $0 - \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{2} - 0 - \dots$ \*\*;

полученные таким образом результаты измерений представляли собой интерференционный член голограммы. Далее при обработке матрица выходных данных разделялась на две — с четными и нечетными номерами строк, которые рассматривались соответственно как действительная и мнимая части обрабатываемого массива. Действительное изображение (диаграмма направленности) выделялось при помощи дополнительного пространственного амплитудного фильтра, подавляющего верхние пространственные частоты голограммы (см. [4]).

Обработка производилась на ЭВМ по программам, приведенным в [7]. Формула (1) в программах реализована с использованием программы быстрого преобразования Фурье; информация о вычисленной ДН представлялась в виде числовых и специальных символьных таблиц, обеспечивающих быстрый просмотр полученных результатов.

Сечение ДН в плоскости  $\beta$ , полученное после обработки результа-

\* При одновременном использовании обоих каналов время измерений сокращается в два раза.

\*\* Такой закон модуляции позволяет использовать простой переключатель вместо фазовращателя, необходимого при введении общепринятой в голографии пространственной модуляции по закону  $0 - \pi/2 - \pi - 3\pi/2 - 0 - \dots$  или  $0 - \pi/3 - 2\pi/3 - 0 - \dots$  (см. [6]), однако это усложняет обработку в связи с необходимостью введения дополнительной амплитудной фильтрации спектра голограммы (см. ниже).

тов фазометрических измерений, изображено на рис. 2. Пунктирной линией показано сечение ДН той же антенны по измерениям в дальней зоне.

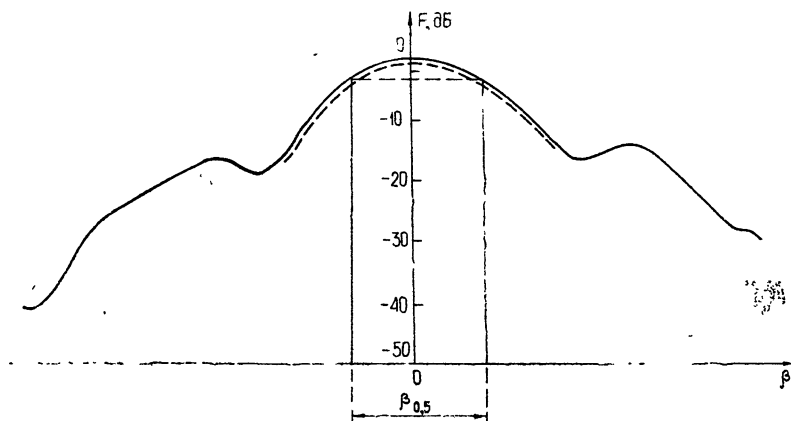


Рис. 2.

В заключение отметим, что использование фазометрического метода для измерения диаграмм направленности антенных систем в условиях эксплуатации не только возможно, но и целесообразно, поскольку существенно упрощает измерения, повышает их надежность, а использование высокочастотных головок приемных устройств антенных систем и применение непосредственного перемножения сигналов по промежуточной частоте позволяют существенно упростить используемую аппаратуру, что особенно важно для массовых измерений в условиях эксплуатации. Достоинством метода является также и то, что он не требует вмешательства в исследуемый антенно-фидерный тракт. Отметим, что исследуемая схема измерений позволяет автоматизировать запись результатов измерений (например, на перфоленту).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Johnson etc., Proc. IEEE, 61, № 12, 1668 (1973).
2. Л. Д. Бахрах, А. П. Курочкин, Докл. АН СССР, 171, № 6, 1309 (1966).
3. В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, Докл. АН СССР, 205, № 4, 820 (1972).
4. В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, А. К. Чандаев, Радиотехника и электроника, 18, № 4, 725 (1973).
5. Э. М. Зуйкова, Л. А. Пасманик, В. И. Турчин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1615 (1973).
6. А. П. Курочкин, В. И. Троицкий, Радиотехника и электроника, 14, № 4, 710 (1969).
7. В. И. Турчин, Препринт НИРФИ, часть 1, № 46, 1974; часть 2, № 47, 1974.
8. Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Радиотехника и электроника, 15, 6 (1970).
9. Д. А. Дмитренко, В. В. Аникина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 261 (1973).
10. И. С. Гоноровский, Радиотехнические цепи и сигналы, изд. Сов. радио, М., 1971.

DETERMINATION OF cm ANTENNA RADIATION PATTERNS  
ACCORDING TO PHASEMETRIC MEASUREMENTS IN  
FRESNEL ZONE

*V. I. Ignat'ev, Yu. V. Sysoev, V. I. Turchin*

A phasemetric (holographic) method is used for a systematic control of radiation patterns of standard full-rotation antenna systems under their operational conditions. A block-scheme of the meter using standard elements of the antenna feeder and the methods of the measurements are considered. The results of measuring the radiation pattern of a cm standard antenna system are presented.

---

УДК 538.574 6

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА НАКЛОННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Г. И. Веселов, О. К. Ильинская

Рассмотрена задача дифракции волны  $H_{10}$  прямоугольного волновода на наклонной диэлектрической пластине, разделяющей среды с различной диэлектрической проницаемостью. Разработан метод, позволяющий исследовать распределение поля при произвольном угле наклона пластины с учетом потерь. Полученные расчетные зависимости модуля коэффициента отражения могут быть использованы при разработке нагрузок поглощающего типа.

В работе рассмотрена задача дифракции волны  $H_{10}$  прямоугольного волновода на наклонной диэлектрической пластине, разделяющей среды с различной диэлектрической проницаемостью, полностью заполняющие регулярные полубесконечные волноводы. Решение задачи получено методом, позволяющим исследовать распределение поля при произвольном угле наклона пластины с учетом потерь. Подобная система с малым углом наклона пластины и с одной границей раздела сред рассмотрена в работе [1], в которой использовался метод поперечных сечений.

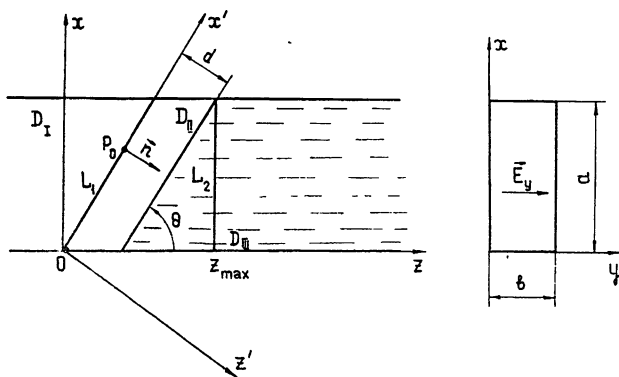


Рис. 1.

Рассмотрим дифракцию волны  $H_{10}$  прямоугольного волновода на пластине, расположенной в волноводе таким образом, что границы раздела сред параллельны электрическому вектору  $E$  падающей волны (рис. 1). В этом случае полное поле будет иметь составляющие  $E_y$ ,  $H_x$  и  $H_z$ , которые не зависят от переменной  $y$ . Задача расчета электромагнитного поля в таком нерегулярном волноводе сводится к решению краевой задачи для уравнения Гельмгольца относительно  $y$ -составляющей электрического поля, которую обозначим через  $u(x, z) = E_y$ ,

$$\Delta_{xz} u(x, z) + k^2 \varepsilon(x, z) u(x, z) = 0, \quad (1)$$



с граничными условиями

$$u(x, z) \Big|_{x=0} = 0, \quad \Big|_{x=a} = 0. \quad (2)$$

В уравнении (1)  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . На границе раздела сред с различной диэлектрической проницаемостью  $L_1$  и  $L_2$  должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей, из которых следуют условия сопряжения относительно функции  $u(x, z)$ :

$$[u] \Big|_{L_1, L_2} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right] \Big|_{L_1, L_2} = 0. \quad (3)$$

Квадратные скобки означают скачок функции или ее производной на границе раздела сред  $L_1$  или  $L_2$ . Кроме того, функция  $u$  должна удовлетворять условиям излучения, обеспечивающим падение только одной волны  $H_{10}$ :

$$u = \exp(i \gamma_1^{(1)} z) \sin \frac{\pi}{a} x + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \exp(-i \gamma_n^{(1)} z) \sin \frac{\pi n}{a} x \quad (4)$$

$$(z < 0);$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \exp(i \gamma_n^{(2)} z) \sin \frac{\pi n}{a} x \quad (z > z_{\max}), \quad (5)$$

где  $R_n$  и  $T_n$  — неизвестные амплитудные коэффициенты отраженных и прошедших нормальных волн  $H_{n0}$ ,

$$\gamma_n^j = \sqrt{k^2 \epsilon_j - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2} \quad (j = 1, 2, 3, n = 1, \dots). \quad (6)$$

Рассмотрим в каждой из областей  $D_j$ , в которых диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_j = \text{const}$ , фундаментальное решение уравнения Гельмгольца [2]

$$g^j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-2i \gamma_n^{(j)}} \sin \frac{\pi n}{a} x \sin \frac{\pi n}{a} x_0 \exp(i \gamma_n^{(j)} |z - z_0|) \quad (7)$$

$$(j = 1, 2, 3)$$

Би получим интегральное представление поля в каждой области  $D_j$  через значение функции  $u$  и ее нормальной производной на границе раздела сред. С этой целью применим вторую формулу Грина к функциям  $u$  и  $g^1$  в области  $D_1$ , считая, что точка  $(x_0, z_0)$  принадлежит этой области:

$$u(x_0, z_0) = \int_{L_1} \left( g^1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g^1}{\partial n} \right) dl + u^0, \quad (8)$$

где падающее поле

$$u^0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \exp(i \gamma_1^{(1)}(z)) \sin \frac{\pi}{a} x. \quad (9)$$

Применяя вторую формулу Грина к функциям  $u$  и  $g^2$  в области  $D_{II}$ , ограниченной боковой поверхностью волновода и прямыми  $L_1, L_2$ , и считая, что точка  $(x_0, z_0)$  принадлежит области  $D_1$ , получим

$$0 = \int_{L_2} \left( g^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g^2}{\partial n} \right) dl - \int_{L_1} \left( g^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g^2}{\partial n} \right) dl. \quad (10)$$

Складывая (8) и (10) и пользуясь условиями сопряжения (3), получим следующее представление функции  $u$  в области  $D_1$ :

$$u(x_0, z_0) = \int_{L_1} \left[ (g^1 - g^2) \frac{\partial u}{\partial n} - u \left( \frac{\partial g^1}{\partial n} - \frac{\partial g^2}{\partial n} \right) \right] dl + \\ + \int_{L_2} \left( g^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g^2}{\partial n} \right) dl + u^0. \quad (11)$$

Дифференцируя полученное выражение (11) по внешней нормали к области  $D_1$  и опуская точку  $(x_0, z_0)$  на контур  $L_1$ , получим следующую систему интегральных уравнений:

$$u(P_0)|_{L_1} = \int_{L_1} \left[ (g^1 - g^2) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} (g^1 - g^2) \right] dl + \\ + \int_{L_2} \left( g^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g^2}{\partial n} \right) dl + u^0 \quad (P_0 \in L_1); \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_{P_0}} \Big|_{L_1} = \int_{L_1} \left[ \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} (g^1 - g^2) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{\partial}{\partial n} (g^1 - g^2) \right] dl + \\ + \int_{L_2} \left( \frac{\partial g^2}{\partial n_{P_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{\partial}{\partial n} g^2 \right) dl + \frac{\partial u^0}{\partial n_{P_0}}. \quad (13)$$

По аналогии рассматривая интегральное представление функции  $u$  в области  $D_{III}$ , получим еще два интегральных уравнения:

$$u(P_0)|_{L_2} = \int_{L_2} \left[ (g^2 - g^3) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} (g^2 - g^3) \right] dl - \\ - \int_{L_1} \left( g^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial g^2}{\partial n} \right) dl \quad (P_0 \in L_2); \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_{P_0}} \Big|_{L_2} = \int_{L_2} \left[ \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} (g^2 - g^3) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{\partial}{\partial n} (g^2 - g^3) \right] dl - \\ - \int_{L_1} \left( \frac{\partial g^2}{\partial n_{P_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} \frac{\partial}{\partial n} g^2 \right) dl. \quad (15)$$

Система интегральных уравнений (12)–(15) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда исходная краевая задача имеет единственное решение [3].

Для решения полученной системы интегральных уравнений используется метод сведения системы интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений с помощью квадратурных формул.

Расчет по этой методике целесообразно проводить для углов наклона пластины от 30 до 90°. Для пологих наклонов прямое решение интегральных уравнений становится громоздким. Поэтому был разработан приближенный метод решения интегральных уравнений, основанный на представлении о близости точного значения электромагнитного поля на границе раздела сред к значению поля, полученному в результате решения задачи о падении плоских волн на слоистую среду.

Введем новую систему координат  $x', y, z'$  с тем же началом отсчета, направив ось  $Ox'$  вдоль контура  $L_1$ . Известно, что поле падающей волны  $H_{10}$  можно представить в виде суммы двух плоских волн:

$$u^0 = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{2i} \{ \exp[ik(z' \cos \varphi_1 + x' \sin \varphi_1)] - \exp[ik(z' \cos \varphi_2 + x' \sin \varphi_2)] \}, \quad (16)$$

где

$$k \sin \varphi_1 = \gamma_1^{(1)} \cos \theta - \frac{\pi}{a} \sin \theta,$$

$$k \sin \varphi_2 = \gamma_1^{(1)} \cos \theta + \frac{\pi}{a} \sin \theta,$$

(17)

$$k \cos \varphi_1 = \gamma_1^{(1)} \sin \theta - \frac{\pi}{a} \cos \theta,$$

$$k \cos \varphi_2 = \gamma_1^{(1)} \sin \theta + \frac{\pi}{a} \cos \theta.$$

Поле в каждой области  $D_j$  представляется в виде суперпозиции плоских волн с постоянными коэффициентами [4]:

$$u_I = u^0 + \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{2i} [V_1 \exp(p_1(\varphi_1) z' + ikx' \sin \varphi_1) - V_2 \exp(p_1(\varphi_2) z' + ikx' \sin \varphi_2)]; \quad (18)$$

$$u_{II} = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{2i} [A_1 \exp(-p_2(\varphi_1) z' + ikx' \sin \varphi_1) + B_1 \exp(p_2(\varphi_1) z' + ikx' \sin \varphi_1) - A_2 \exp(-p_2(\varphi_2) z' + ikx' \sin \varphi_2) - B_2 \exp(p_2(\varphi_2) z' + ikx' \sin \varphi_2)]; \quad (19)$$

$$u_{III} = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{2i} [T_1 \exp(-p_3(\varphi_1) z' + ikx' \sin \varphi_1) - T_2 \exp(-p_3(\varphi_2) z' + ikx' \sin \varphi_2)], \quad (20)$$

где

$$p_1(\varphi) = -ik \cos \varphi, \quad p_2(\varphi) = -ik \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \varphi}, \quad (21)$$

$$p_3(\varphi) = -ik \sqrt{\varepsilon_3 - \sin^2 \varphi}.$$

Выбор ветви корня в выражении (21) подчиняется требованию  $\text{Re } p > 0$ . Если  $\text{Re } p = 0$ , то  $\text{Im } p < 0$ . Используя условия сопряжения (3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $V_1, V_2, A_1, A_2, B_1, B_2, T_1, T_2$ , входящих в формулы (18) — (20), которая легко разрешается. Определив неизвестные

коэффициенты, находим значение поля на границах раздела сред  $L_1$  и  $L_2$  по формулам (18)—(20). Вычисленное таким образом поле на границе раздела сред будем считать нулевым приближением решения системы интегральных уравнений (12)—(15). Подставляя нулевое приближение в систему интегральных уравнений (12)—(15), можно получить следующее приближение решения интегральных уравнений.

По известным значениям  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на границах  $L_1$  и  $L_2$  можно определить значение поля в любой точке волновода.

Для нахождения коэффициентов отражения нормальных волн в волноводе используем условие излучения (4) и интегральное представление поля в области  $D_1$  (8). Проводя необходимые вычисления, получим

$$R_n = \frac{1}{-2i\gamma_n^{(1)}} \int_{L_1} \left( \frac{\partial u}{\partial z'} g_n - u \frac{\partial g_n}{\partial z'} \right) \Big|_{z'=0} dx' \quad (n=1, 2, \dots), \quad (22)$$

где

$$g^n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi n}{a} (x' \sin \theta - z' \cos \theta) \exp [i\gamma_n^{(1)} (x' \cos \theta + z' \sin \theta)]. \quad (23)$$

Подставляя в выражение (22) значение поля на границе раздела сред  $L_1$  ( $z' = 0$ ), определяемое формулой (18), и вычисляя интегралы, получим в первом приближении следующее выражение для коэффициентов отражения в явной аналитической форме:

$$\begin{aligned} R_n = & A_n(V_1, \varphi_1) J_n^1[\alpha(\varphi_1)] - A_n(V_2, \varphi_2) J_n^1[\alpha(\varphi_2)] - \\ & - B_n(\varphi_1) J_n^2[\alpha(\varphi_1)] + B_n(\varphi_2) J_n^2[\alpha(\varphi_2)] + C_n J_{n-1}^2(\beta) - \\ & - C_n J_{n+1}^2(\beta) - D_n J_{n+1}^1(\beta) - D_n J_{n-1}^1(\beta) \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$J_n^1(\alpha) = \frac{\pi n}{L} \frac{1}{\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 - \alpha^2} [1 - (-1)^n e^{i\alpha L}],$$

$$J_n^2(\alpha) = \frac{\alpha}{i \left[ \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 - \alpha^2 \right]} [1 - (-1)^n e^{i\alpha L}],$$

$$A_n = \frac{V}{2i} \left( \frac{1}{L} + \frac{k \cos \varphi}{a\gamma_n^{(1)}} \right), \quad B_n = \frac{\pi n \cos \theta}{2\gamma_n^{(1)} \alpha^2} V,$$

$$C_n = \frac{1}{2L} (1 - \gamma_1^{(1)}/\gamma_n^{(1)}), \quad D_n = \frac{\pi n \cos \theta}{2i\gamma_n^{(1)} \alpha^2},$$

$$\alpha(\varphi) = k \sin \varphi - \gamma_n^{(1)} \cos \theta,$$

$$\beta = -(\gamma_n^{(1)} + \gamma_1^{(1)}) \cos \theta.$$

С помощью рассмотренной методики были проведены исследования поведения коэффициента отражения при дифракции волны  $H_{10}$  на наклонной пластине в зависимости от частоты, угла наклона и толщины пластины для различных значений диэлектрической проницаемости.

Расчеты были проведены применительно к анализу нагрузки поглощающего типа. При всех расчетах в области  $D_I$  диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_1 = 1$ , в области  $D_{III}$  —  $\epsilon_3 = 74 (1 + i0,11)$ , что соответствует параметрам технической воды. Диэлектрическая проницаемость наклонной пластины (область  $D_{II}$ ) соответствует разным маркам керамики, имеющей малые потери  $\text{tg } \delta = 10^{-3}$ , которые учитывались при расчетах. Типичные зависимости модуля коэффициента отражения от угла наклона пластины приведены на рис. 2—4. Зависимость модуля

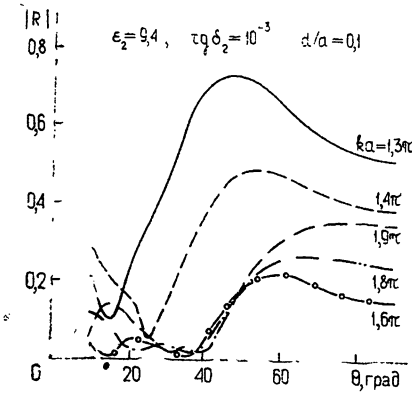


Рис 2

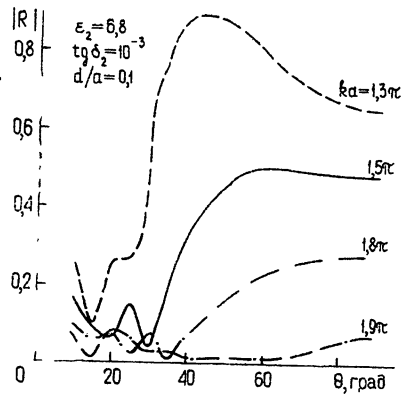


Рис 3

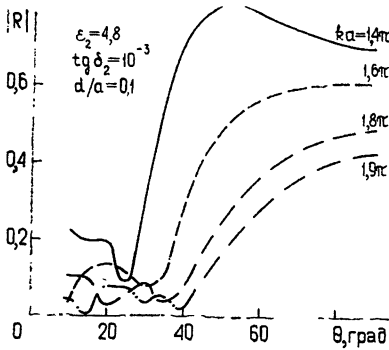


Рис 4

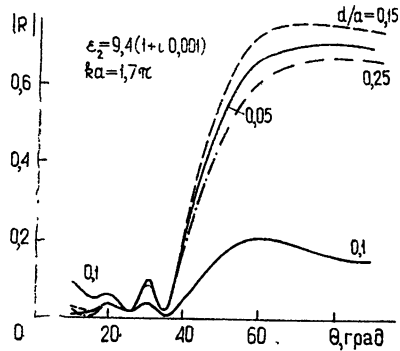


Рис 5

коэффициента отражения от толщины диэлектрической пластины приведена на рис. 5. Частотные зависимости модуля коэффициента отражения приведены на рис. 6. Проведенные исследования позволяют выбрать такие параметры системы, при которых обеспечивается минимальное отражение от диэлектрической вставки с последующей поглощающей камерой, что представляет интерес при конструировании оконечных поглощающих нагрузок.

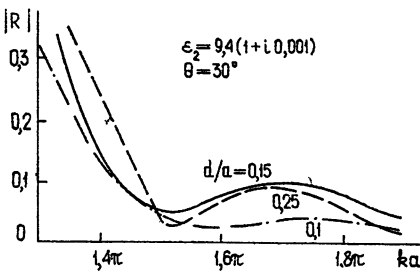


Рис. 6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Нефедов, Расчет пологих диэлектрических вставок в прямоугольном волноводе, Радиотехника и электроника, 7, № 5, 801 (1962).
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1953.
3. С. Müller, Math. Annalen, 123, № 4, 345 (1951).
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов радио, М., 1957.

Московский институт электронной техники

Поступила в редакцию  
7 октября 1974 г.

SOLUTION OF THE DIFFRACTION PROBLEM ON AN OBLIQUE  
DIELECTRIC PLATE

*G. I. Veselov, O. K. Il'inskaya*

The problem of diffraction of the wave  $H_{10}$  of a rectangular waveguide on an oblique dielectric plate dividing the media with different dielectric permittivity is considered. A method is developed which permits to investigate the field distribution at the arbitrary angle of incidence of the plate with taking into account the losses. The estimated dependences of the modulus of the reflection coefficient may be used when designing absorption loads.

---

УДК 538.574.6

## ПРИМЕНЕНИЕ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ДИФРАКЦИИ ВОЛНОВОДНЫХ ВОЛН НА ТЕЛАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

*А. М. Лерер, В. С. Михалевский*

Методом парных интегральных уравнений рассчитаны электрические параметры волноводов, связанных через две щели, и получены формулы для расчета собственных чисел некоторых передающих линий СВЧ и коаксиального резонатора.

Парные интегральные уравнения успешно применяются при расчете полубесконечных структур. Количество таких структур сравнительно невелико и большинство из них рассмотрено в [1]. В технике СВЧ находят применение устройства, которые можно идентифицировать как ряд последовательных соединений полубесконечных структур, каждая из которых может быть точно рассчитана методом Винера—Хопфа. Некоторые из устройств, относящихся к этому классу, исследованы, в частности, в [1–6]. В настоящей работе рассмотрены более усложненные устройства, которые можно идентифицировать как три и более последовательных соединений полубесконечных структур.

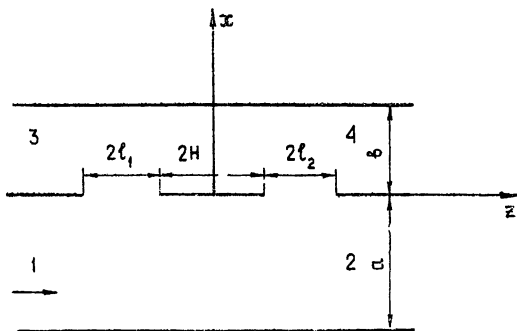


Рис. 1.

К ним следует отнести систему двух, связанных через два отверстия в общей стенке, волноводов, достаточно просто обобщаемую на большее количество отверстий (рис. 1). Рассмотрим 3 случая: волноводы плоские, падающая волна имеет  $E$ - и  $H$ -поляризацию; волноводы прямоугольные, связанные через щели в широкой стенке, ширина щелей равна ширине волноводов  $h$ , падающая волна  $H_{p0}$ . С помощью двустороннего преобразования Лапласа нетрудно получить парные интегральные уравнения:

$$\frac{1}{2\pi l} \int_{\zeta} F(s) e^{sz} ds = 0 \quad (z \geq L_2 + l_2, |z| \leq h, z \leq -L_1 - l_1); \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(s) f(s) e^{sz} ds = e^{-\gamma_p^{(1)} z} \quad (|z - L_2| \leq L_2 \text{ и } |z + L_1| \leq L_1), \quad (2)$$

где контур интегрирования  $C$  изображен в [5],

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\omega \sin \omega(a+b)}{\sin \omega a \sin \omega b} & (E\text{-поляризация}), \\ \frac{\sin \omega(a+b)}{\omega \sin \omega a \sin \omega b} & (H\text{-поляризация}), \\ \frac{\sin \omega_1(a+b)}{\omega_1 \sin \omega_1 a \sin \omega_1 b} & (\text{прямоугольные волноводы}) \end{cases},$$

$\omega^2 = s^2 + k^2$ ,  $\omega_1^2 = \omega^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2$ ,  $\gamma_p^{(1)}$  — постоянная распространения падающей волны,  $L_{1,2} = H + l_{1,2}$ .

Из уравнения (2) можно получить [5]

$$F(s) = \frac{1}{f(s)} (\bar{F}'_+(s) + \bar{F}'_-(s) + \bar{F}'_0(s) + \bar{\varphi}(s)); \quad (3)$$

$$\bar{\varphi}(s) = 2 \exp[-(\gamma_p^{(1)} + s)L_2] \frac{\text{sh}(s + \gamma_p^{(1)})L_2}{s + \gamma_p^{(1)}} + 2 \exp[(\gamma_p^{(1)} + s)L_1] \frac{\text{sh}(s + \gamma_p^{(1)})L_1}{s + \gamma_p^{(1)}}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}'_+(s) &= \int_{L_2+L_2}^{\infty} F'(z) e^{-sz} dz = \exp[-s(L_2+L_2)] \Phi_+(s) + \\ &+ \frac{\exp[-(\gamma_p^{(1)} + s)(L_2 + L_2)]}{s + \gamma_p^{(1)}}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{F}'_-(s) = \int_{-\infty}^{-L_1-L_1} F'(z) e^{-sz} dz = \exp[s(L_1+L_1)] \Phi_-(s) - \frac{\exp[(\gamma_p^{(1)} + s)(L_1+L_1)]}{s + \gamma_p^{(1)}}; \quad (6)$$

$$\bar{F}'_0(s) = \int_{-H}^H F'(z) e^{-sz} dz = \bar{F}'_{0+}(s) + \bar{F}'_{0-}(s); \quad (7)$$

$$\bar{F}'_{0+}(s) = \Phi_{0+}(s) e^{sH} + \frac{\exp(s + \gamma_p^{(1)})H}{s + \gamma_p^{(1)}}; \quad (8)$$

$$\bar{F}'_{0-}(s) = \Phi_{0-}(s) e^{-sH} - \frac{\exp[-(s + \gamma_p^{(1)})H]}{s + \gamma_p^{(1)}}. \quad (9)$$

Функция  $F'(z)$  определяется интегралом, стоящим в левой части (2). Функции  $\Phi_{\pm}(s)$  и  $\Phi_{\pm 0}(s)$  определим следующим образом:

$$\Phi_+(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_j^+}{1 + s/\delta_j} U(s),$$



$$\Phi_{-}(s) = \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_j^-}{1-s/\delta_j} + \frac{1}{s + \gamma_p^{(1)}} \frac{\exp[\gamma_p^{(1)}(L_1 + l_1)]}{U(\gamma_p^{(1)})} \right] U(-s),$$

$$\Phi_{0+}(s) = \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{y}_j^+}{1+s/\delta_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_j^+}{1-s/\gamma_j} \right] U(s),$$

$$\Phi_{0-}(s) = \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{y}_j^-}{1-s/\delta_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_j^-}{1+s/\gamma_j} \right] U(-s),$$

$\bar{x}_j^{\pm}$ ,  $\bar{y}_j^{\pm}$ ,  $\bar{z}_j^{\pm}$  — неизвестные коэффициенты;  $\delta_j$  и  $\gamma_j$  — соответственно нули и полюса  $U(s)$ ;  $U(s)$  с точностью до постоянного сомножителя совпадает с функцией  $f_+(s)$ , получающейся при факторизации  $f(s)$ .

Подставив (4)–(9) в (3), получим

$$F(s) = \frac{1}{f(s)} [(\Phi_{+}(s) e^{-sl_2} + \Phi_{0-}(s) e^{sl_2}) e^{-sL_2} + (\Phi_{-}(s) e^{sl_1} + \Phi_{0+}(s) e^{-sl_1}) e^{sL_1}]. \quad (10)$$

Для того, чтобы выполнялось уравнение (1), нули суммы функций, стоящих в каждой из квадратных скобок (10), должны совпадать с нулями  $f(s)$ , т. е.

$$\Phi_{+}(\pm \delta_m) \exp(\mp \delta_m l_2) + \Phi_{0-}(\pm \delta_m) \exp(\pm \delta_m l_2) = 0; \quad (11)$$

$$\Phi_{-}(\pm \delta_m) \exp(\pm \delta_m l_1) + \Phi_{0+}(\pm \delta_m) \exp(\mp \delta_m l_1) = 0. \quad (12)$$

Кроме того, функция  $\bar{F}_0^{\pm}(s)$ , определяемая интегралом (7), должна быть целой [7]. Поэтому

$$\exp(\pm \gamma_m H) \operatorname{res} \Phi_{0+}(\pm \gamma_m) + \exp(\mp \gamma_m H) \operatorname{res} \Phi_{0-}(\pm \gamma_m) = 0. \quad (13)$$

Подставляя  $\Phi_{\pm}$  и  $\Phi_{0\pm}$  в систему функциональных уравнений (11)–(13), получим систему бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. В случае  $l_2 = l_1 = l$  эти системы имеют вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j^{\pm}}{1 + \delta_m/\delta_j} + \exp(2\delta_m l) p_m y_m^{\pm} = -\frac{1}{\gamma_p^{(1)} - \delta_m},$$

$$\exp(2\delta_m l) p_m x_m^{\pm} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j^{\pm}}{1 + \delta_m/\delta_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j^{\pm}}{1 - \delta_m/\gamma_j} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j^{\pm}}{1 - \gamma_m/\delta_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j^{\pm}}{1 + \gamma_m/\gamma_j} \pm \exp(2\gamma_m H) q_m z_m^{\pm} = 0 \quad (m=1, 2, \dots),$$

где

$$x_j^{\pm} = \exp[-\gamma_p^{(1)}(L+l)] (\bar{x}_j^- \pm \bar{x}_j^+) U(\gamma_p^{(1)}),$$

$$y_j^{\pm} = \exp[-\gamma_p^{(1)}(L+l)] (\bar{y}_j^+ \pm \bar{y}_j^-) U(\gamma_p^{(1)}),$$

$$z_j^{\pm} = \exp[-\gamma_p^{(1)}(L+l)] (\bar{z}_j^+ \pm \bar{z}_j^-) U(\gamma_p^{(1)}),$$

$$p_m = \frac{1}{u(\delta_m)} \lim_{s \rightarrow \delta_m} \frac{U(-s)}{1-s/\delta_m}, \quad q_m = \gamma_m \frac{U(\gamma_m)}{\operatorname{res} U(-\gamma_m)};$$

$f(s)$  можно факторизовать методом бесконечных произведений [8]. Тогда

$$p_m = 0,5/\Phi(\delta_m), \quad q_m = 0,5 \Phi(\gamma_m),$$

$$\Phi(x) = \exp \left( 2 \left\{ \frac{x}{\pi} \left[ (a+b) \ln \frac{a+b}{2} - a \ln a - b \ln b \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arth} \frac{x}{\delta_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arth} \frac{x}{\gamma_n} \right\} \right). \quad (14)$$

В рядах опущен член, у которого аргумент  $\operatorname{Arth}$  равен единице.

Найденное решение по существу является методом последовательных дифракций волноводных волн на ряде элементарных неоднородностей, на которые можно расчленить рассматриваемые устройства. Причем каждая последовательная дифракция точно рассчитывается методом Винера—Хопфа. Благодаря этому полученное решение в любом приближении правильно отражает характер поля на ребре.

Полученная алгебраическая система имеет экспоненциальную сходимость, коэффициенты при неизвестных легко вычисляются, наиболее трудно вычисляемые коэффициенты  $p_m$  и  $q_m$  не зависят от  $l$  и  $H$ , что значительно уменьшает время счета на ЭВМ.

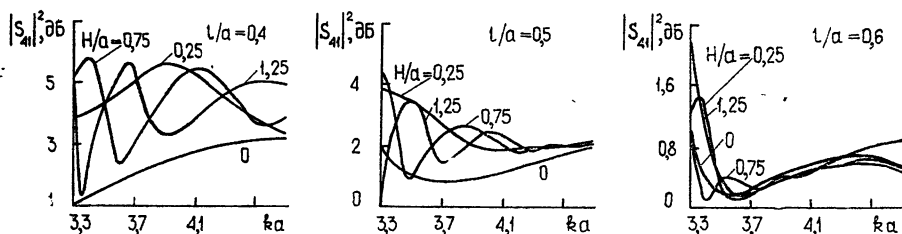


Рис 2

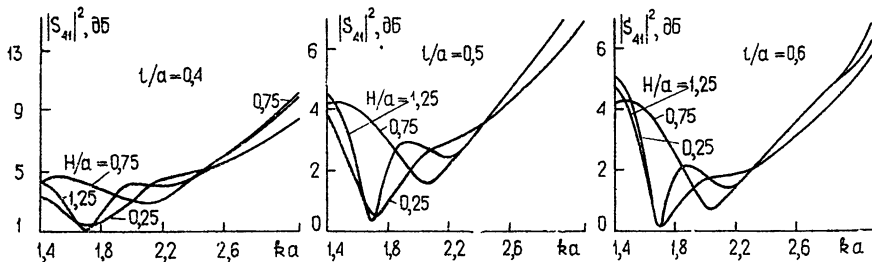


Рис 3

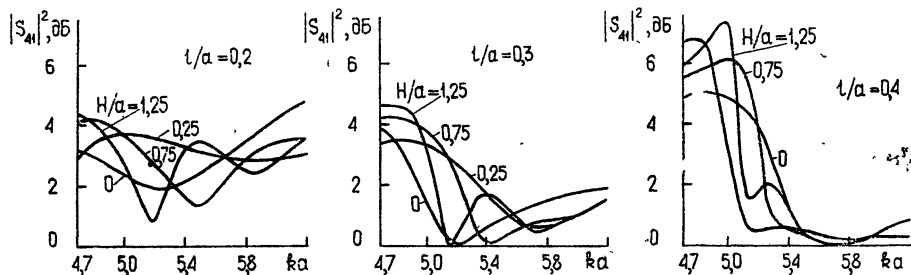


Рис 4

Определив неизвестные коэффициенты, можно легко найти элементы матрицы рассеяния. На рис. 2—4 представлены результаты расчета величины  $|S_{41}|^2$  при  $b = a$  для трех случаев;

- 1) плоские волноводы,  $E$ -поляризация или прямоугольные волноводы, связь по узкой стенке (рис. 2);
- 2) плоские волноводы,  $H$ -поляризация (рис. 3);
- 3) прямоугольные волноводы,  $a/h = 0,435$ , связь по широкой стенке (рис. 4).

Волноводы возбуждаются на основной волне. При численных расчетах решались системы из 3—6 уравнений. Ошибка, порождаемая редукцией системы, не превышает при этом 1%.

Сложный вид кривых объясняется интерференцией волн, рассеянных каждой из щелей. Число экстремумов увеличивается с увеличением  $H$ . Их величина определяется значением собственного коэффициента стоящей волны (КСВ) каждой из щелей. КСВ уменьшается с увеличением частоты (см., например, [5]), величина экстремумов также уменьшается. Во втором и третьем случаях в нижней части частотного диапазона волноводов в областях связи может распространяться лишь одна волноводная волна. В этом случае мощность делится приблизительно поровну между каналами устройств.

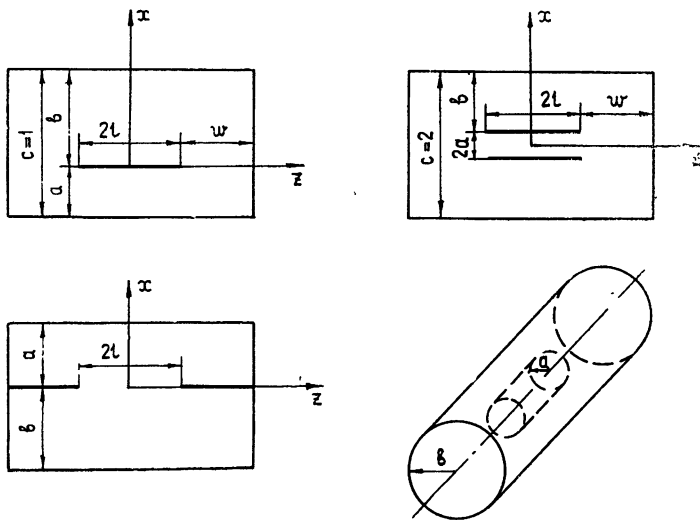


Рис. 5.

Расчет собственных чисел некоторых экранированных полосковых линий и резонаторов (рис. 5) может быть сведен к решению парных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c F(s) e^{sz} ds = 0 \quad (l \leq |z - 2nL| \leq L = l + w); \quad (15)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c F(s) f(s) e^{sz} ds = 0 \quad (|z - 2nL| \leq l, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2). \quad (16)$$

Из (16) следует

$$F(s) = \frac{1}{f(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}'_n(s), \quad \text{где } \bar{F}'_n(s) = \int_{2nL+l}^{2(n+1)L-l} F'_n(z) e^{-sz} dz. \quad (17)$$

Функцию  $\bar{F}'_n(z)$  представим в виде

$$\bar{F}'_n(s) = e^{-sL(2n+1)} (\Phi_n^+(s) e^{s w} + \Phi_n^-(s) e^{-s w}), \quad (18)$$

где

$$\Phi_n^\pm(s) = \Phi^\pm(s) e^{-ln\varphi},$$

$$\Phi^+(s) = U(s) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_j^+}{1+s/\delta_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{y}_j^+}{1-s/\gamma_j} \right); \quad (19)$$

$$\Phi^-(s) = U(-s) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_j^-}{1-s/\delta_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{y}_j^-}{1+s/\gamma_j} \right). \quad (20)$$

Функции  $\bar{F}_n^\pm(s)$  целые, поэтому

$$\text{res } \Phi^+(\pm \gamma_m) e^{\pm \gamma_m \omega} + \text{res } \Phi^-(\pm \gamma_m) e^{\mp \gamma_m \omega} = 0 \quad (m=1, 2, \dots). \quad (21)$$

Подставив (18) в (17) и перегруппировав члены, получим

$$F(s) = \frac{1}{f(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2snL} [\Phi_n^+(s) e^{-sl} + \Phi_{n-1}^-(s) e^{sl}]. \quad (22)$$

Для выполнения (15) нули суммы функций, стоящих в квадратных скобках в (22), должны совпадать с нулями  $f(s)$ :

$$\Phi^+(\pm \delta_m) e^{\mp \delta_m l} + e^{l\varphi} \Phi^-(\pm \delta_m) e^{\pm \delta_m l} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Подставив (19), (20) в (22), (23), получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений. Для экранированных полосковых линий и резонаторов  $\varphi$  равно четному или нечетному числу  $\pi$  в зависимости от типа волны. В результате получим четыре системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j^+}{1+\delta_m/\delta_j} \mp p_m e^{2\delta_m l} x_m^\pm + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j^\mp}{1-\delta_m/\gamma_j} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j^\pm}{1-\gamma_m/\delta_j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j^\pm}{1+\gamma_m/\gamma_j} + q_m e^{2\gamma_m \omega} = 0.$$

Вторая пара уравнений отличается знаком перед  $q_m$ . Полученные системы имеют также экспоненциальную сходимость. Скорость сходимости системы тем выше, чем больше  $\omega$  и  $l$ . Для нахождения собственных чисел определитель системы нужно приравнять нулю. В первом приближении, ограничиваясь двумя уравнениями с двумя неизвестными, получим:

из первых двух систем

$$L_+ = \frac{1}{\delta_1} \left\{ \theta(k, \delta_1) - \text{Arth} \left[ \frac{\delta_1}{\gamma_1} \text{cth}(\gamma_1 \omega + \theta(k, \gamma_1)) \right] + p\pi i \right\} \quad (p = 1, 2, \dots); \quad (24)$$

$$L_- = L_+ - \frac{\pi}{2\delta_1} i, \quad (25)$$

из последних двух систем

$$L_+ = \frac{1}{\delta_1} \left\{ \theta(k, \delta_1) - \text{Arth} \left[ \frac{\delta_1}{\gamma_1} \text{th}(\gamma_1 \omega + \theta(k, \gamma_1)) \right] + p\pi i \right\} \quad (p = 1, 2, \dots), \quad (26)$$

$$L_- = L_+ - \frac{\pi}{2\delta_1} i;$$

$$\theta(k, x) = x(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \text{Arth} \frac{x}{\delta_n} - \text{Arth} \frac{x}{\gamma_n} \right). \quad (27)$$

Функция  $x(x)$  целая, она определяется так, чтобы

$$U(s) = e^{x(s)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+s/\delta_n}{1+s/\gamma_n}$$

имела алгебраический рост в правой полуплоскости [8].

Функции  $f(s)$  имеют вид (ниже  $\omega^2 = s^2 + k^2$ )

$$\left. \begin{aligned} f_{hc} &= \frac{\omega \sin \omega b \cos \omega a}{\cos \omega} \quad (\text{синфазное возбуждение}) \\ f_{hn} &= \frac{\omega \sin \omega a \sin \omega b}{\sin \omega} \quad (\text{противофазное возбуждение}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} H\text{-волны} \\ \text{в связанных} \\ \text{полосковых} \\ \text{линиях,} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{hc}/\omega^2 \quad (\text{синфазное возбуждение}) \\ f_{hn}/\omega^2 \quad (\text{противофазное возбуждение}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} E\text{-волны в связанных} \\ \text{полосковых линиях,} \end{array}$$

$$\left\{ \frac{J_0(\omega b)}{\omega^2 J_0(\omega a) [N_0(\omega b) J_0(\omega a) - J_0(\omega b) N_0(\omega a)]} \right\}^{-1} \begin{array}{l} E\text{-колебания коаксиального} \\ \text{резонатора,} \end{array}$$

$$\left\{ \frac{J_1(\omega b)}{J_1(\omega a) [J_1(\omega a) N_1(\omega b) - N_1(\omega a) J_1(\omega b)]} \right\}^{-1} \begin{array}{l} H\text{-колебания коаксиального} \\ \text{резонатора.} \end{array}$$

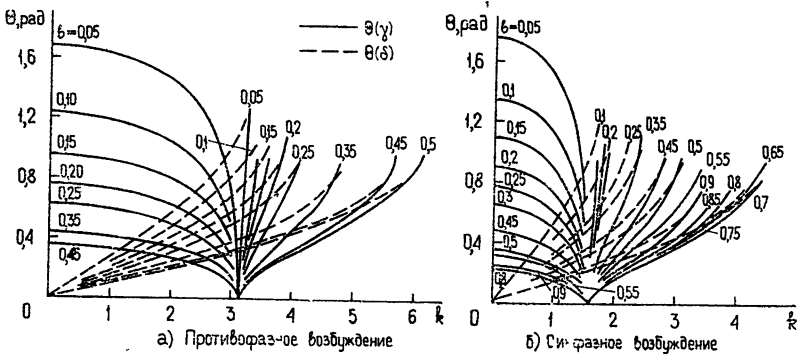


Рис 6.

Результаты расчета функций  $\theta(k, x)$  для некоторых полосковых линий и коаксиального резонатора представлены на рис. 6—8. Зависимости величин  $\theta$  от  $k$  изображены для  $H$ - и  $E$ -волн в связанных экранированных полосковых линиях, соответственно, на рис. 6 и 7; для симметричных  $E$ - и  $H$ -колебаний коаксиального резонатора на рис. 8. При некоторых значениях  $k$   $\theta(k, \gamma_1)$  на рис. 6, 8 а ( $\theta(k, \delta)$  на рис. 7 и 8 б) обращаются в нуль. При больших  $k$  на этих рисунках изображена функция  $\theta(k, \hat{\gamma}_1)$  ( $\theta(k, \hat{\delta}_1)$ ), где  $\gamma = i\hat{\gamma}$  ( $\delta = i\hat{\delta}$ ),  $\hat{\gamma}_1(\hat{\delta}_1)$  — величина действительная.

Расчеты собственных чисел должны проводиться по формулам (24), (25) для  $H$ -волн в полосковых линиях и  $E$ -колебаний в коаксиальном резонаторе, (26), (27) для  $E$ -волн в полосковых линиях и  $H$ -колебаний в коаксиальном резонаторе. Для расчета собственных чисел экраниро-

ванной щелевой линии можно использовать результаты, полученные для связанных полосковых линий в противофазном режиме, производя замену  $\delta_1 \leftrightarrow \gamma_1$  и поменяв знаки при функциях  $\theta$ . Сравнение результатов, полученных при расчете, с известными из литературы [9-11] показывает их хорошее соответствие, кроме случаев  $l \ll c$  и  $\omega \ll c$ , когда нужно учитывать большее число членов в определителях.

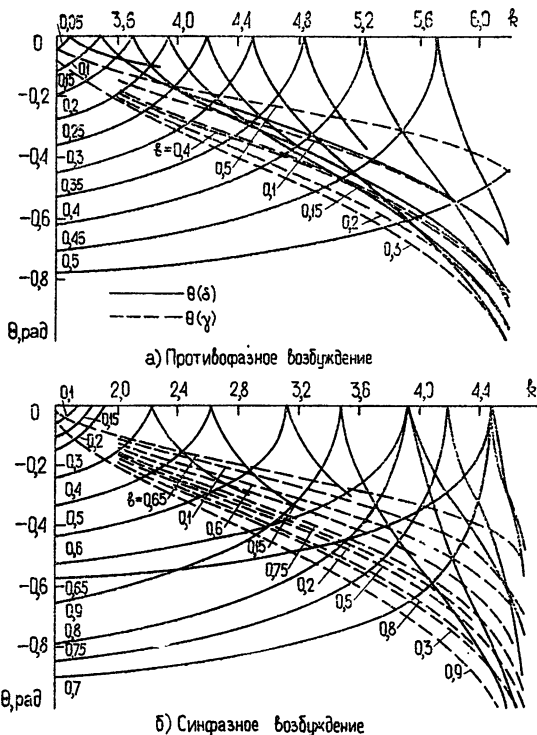


Рис. 7.

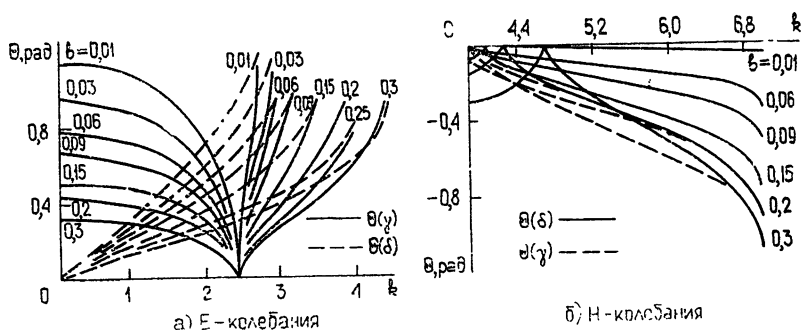


Рис. 8.

Рассмотренный метод решения парных интегральных уравнений близок к модифицированному методу вычетов [13, 14], но более прост и физически нагляден.

Полученные формулы для расчета связи волноводов через щели и собственных чисел некоторых передающих линий и резонаторов про-

ще известных из литературы [9-12], позволяют получить большую точность, не требуют больших затрат машинного времени. Это подтверждает эффективность полученных решений парных интегральных уравнений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. Л. А. Вайнштейн, П. Я. Уфимцев, Метод факторизации и его применение в теории дифракции, в кн. Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн, М., 1970
3. Е. И. Нефедов, А. Г. Фиалковский, Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах, изд. Наука, М., 1971.
4. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский, Радиотехника и электроника, 12, № 3, 469 (1962).
5. А. М. Лерер, В. С. Михалевский, Радиотехника и электроника, 17, № 5, 913 (1972)
6. А. М. Лерер, Известия СКНЦВШ, серия естеств. наук, 2, 97 (1973).
7. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Финитные функции в физике и технике, изд. Наука, М., 1971
8. Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962
9. Л. А. Вайнштейн, А. Б. Маненков, Радиотехника и электроника, 18, № 9, 1777 (1973).
10. Л. И. Белоусова, Л. П. Сальникова, Радиотехника и электроника, 16, № 7, 1262 (1971).
11. R. O. E. Lagelof, IEEE Trans., MTT-21, № 7, 499 (1973).
12. Марин Хосе, В. М. Репин, Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, 13, 67 (1969).
13. G. F. Vanblaricum, R. Mittra, IEEE Trans., MTT-17, № 6, 302 (1969).
14. T. Itoh, R. Mittra, Proc. IEEE, 59, № 2, 332 (1971).

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 апреля 1974 г.

#### APPLICATION OF PAIR INTEGRAL EQUATIONS TO SOME PROBLEMS OF DIFFRACTION OF WAVEGUIDE WAVES BY FINITE-DIMENSION BODIES

*A. M. Lerer, V. S. Mikhalevskii*

The electric parameters of the waveguides connected by two slots are calculated by the pair integral equation method. The formulas are obtained to calculate the eigen values of some transmission microwave lines and coaxial resonator.

УДК 517.5

## ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАСЧЕТ ЗАМЕДЛЕНИЯ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

*А. П. Горобец, Л. Н. Дерюгин, О. А. Курдюмов, В. Е. Сотин*

Проведен расчет открытой несимметричной микрополосковой линии, учитывающий продольные компоненты электромагнитного поля и дисперсию фазовой скорости. Электромагнитное поле в двух частичных областях поперечного сечения представлено в виде интеграла по сплошному спектру плоских волн. Согласование решений в двух областях приводит к системе двух связанных интегральных уравнений, которые с помощью метода Галеркина сводятся к системе линейных алгебраических уравнений. Приведены рассчитанные на ЭВМ кривые, дающие зависимость замедления основной волны от параметров линии и рабочей частоты.

1. Микрополосковая линия (МПЛ) является одним из основных элементов микроэлектроники. Неоднородность заполнения диэлектриком поперечного сечения МПЛ приводит к появлению продольных компонент поля и связанной с ними дисперсии фазовой скорости [1]. Эти компоненты не учитываются известными ТЕМ-приближениями [2-5], которые справедливы для случаев, когда поперечные размеры линии значительно меньше длины волны. Для расчета МПЛ с учетом дисперсии применялся, в частности, метод конечных разностей [6, 7], или задача сводилась к системе однородных интегральных уравнений [8, 9]. В этих случаях дисперсионное уравнение МПЛ аппроксимируется характеристическим определителем, как правило, весьма высокого порядка.

В настоящей работе краевая электродинамическая задача для МПЛ, учитывающая продольные составляющие поля, приведена к системе двух интегральных уравнений Фредгольма I рода. Последняя методом Галеркина сведена к системе линейных алгебраических уравнений. В первом приближении проведен расчет зависимости фазового замедления основной волны МПЛ от параметров линии и рабочей частоты.

2. Поперечное сечение открытой несимметричной МПЛ (рис. 1) разобьем на две области: I — область, занятую диэлектриком без потерь с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , и II — область над диэлектриком с  $\epsilon = 1$  (воздух). Толщина полоскового проводника бесконечно мала.

Монохроматическое полс частоты  $\omega$  представим сплошным спектром парциальных плоских волн с компонентами волновых векторов  $(\alpha, \beta, \gamma)$  в I-й области  $(\alpha, \rho, \gamma)$  во II-й области:

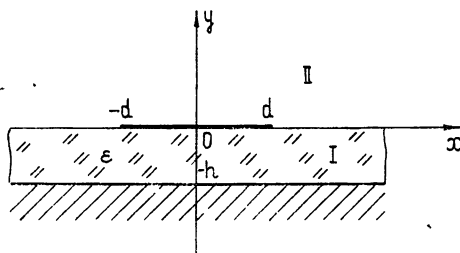


Рис. 1.



$$E^I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\alpha) e^{-i\beta(y+h)} + B(\alpha) e^{i\beta(y+h)}) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$E^{II}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-\rho y} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1)$$

где  $A(\alpha)$  и  $B(\alpha)$  — спектральные плотности амплитуд электрических полей плоских волн в области I,  $C(\alpha)$  — то же для волн в области II. В (1) опущен одинаковый для всех волн множитель  $e^{i(\omega t - \gamma z)}$ . В областях I и II соответственно имеют место равенства  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2 \epsilon$  и  $\alpha^2 - \rho^2 + \gamma^2 = k^2$ , где  $k = \omega/c$  — постоянная распространения в воздухе.

На границе раздела частичных областей  $y = 0$  тангенциальные граничные компоненты электрического и магнитного полей должны удовлетворять условиям

$$E_x^I(x, 0) = E_x^{II}(x, 0), \quad E_z^I(x, 0) = E_z^{II}(x, 0), \quad (|x| > 0),$$

$$E_x^{II}(x, 0) = E_z^{II}(x, 0) = 0, \quad (|x| < d), \quad (2)$$

$$H_x^I(x, 0) = H_x^{II}(x, 0), \quad H_z^I(x, 0) = H_z^{II}(x, 0) \quad (|x| > d).$$

Введем функции  $f(x)$  и  $q(x)$ , равные разностям тангенциальных граничных составляющих векторов магнитного поля в I-й и II-й областях при  $|x| < d$ :

$$f(x) = H_x^{II}(x, 0) - H_x^I(x, 0), \quad q(x) = H_z^{II}(x, 0) - H_z^I(x, 0).$$

Потребовав выполнения граничных условий (2), задачу сведем к системе интегральных уравнений относительно функций  $f(x)$  и  $q(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ [K_1(\alpha) - K_2(\alpha)] \gamma \alpha \int_{-d}^d f(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi +$$

$$+ [\alpha^2 K_1(\alpha) + \gamma^2 K_2(\alpha)] \int_{-d}^d q(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi \} e^{-i\alpha x} d\alpha = 0; \quad (3a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ [\gamma^2 K_1(\alpha) + \alpha^2 K_2(\alpha)] \int_{-d}^d f(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi +$$

$$+ [K_1(\alpha) - K_2(\alpha)] \gamma \alpha \int_{-d}^d q(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi \} e^{-i\alpha x} d\alpha = 0, \quad (3b)$$

где

$$K_1(\alpha) = \left[ (\gamma^2 + \alpha^2) \left( \frac{k \epsilon}{\beta \operatorname{tg} \beta h} - \frac{k}{\rho} \right) \right]^{-1},$$

$$K_2(\alpha) = \left[ (\gamma^2 + \alpha^2) \left( \frac{\beta}{k \operatorname{tg} \beta h} + \frac{\rho}{k} \right) \right]^{-1}.$$

3. Решение системы уравнений (3) будем искать в виде суммы аппроксимирующих функций с неизвестными коэффициентами:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^N A_n f_n(x), \quad \tilde{q}(x) = \sum_{m=0}^M B_m q_m(x) \quad (|x| < d).$$

Подставляя  $\tilde{f}(x)$  и  $\tilde{q}(x)$  в (3) вместо  $f(x)$  и  $q(x)$ , получим в правых частях уравнений (3а) и (3б) соответственно функции  $\varphi(x, A_n, B_m)$  и  $\psi(x, A_n, B_m)$ , отклонение которых от нуля на интервале  $|x| < d$  является ошибкой аппроксимации. Следовательно, задача сводится к минимизации  $|\varphi|$  и  $|\psi|$  на интервале  $|x| < d$ .

В качестве аппроксимирующих функций в настоящей задаче можно выбрать функции вида

$$u_r(x) = \cos \left[ r \left( \frac{\pi x}{d} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (r = 0, 1, 2, \dots, |x| < d).$$

Для четных типов волн, низшей из которых является квази-ТЕМ волна,

$\tilde{f}(x)$  представляется линейной комбинацией четных функций  $u_{2r}(x)$ :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{r=0}^R A_{2r} u_{2r}(x), \quad (4)$$

а  $\tilde{q}(x)$  — нечетных функций:

$$\tilde{q}(x) = \sum_{r=0}^R A_{2r+1} u_{2r+1}(x). \quad (5)$$

Число  $R$  определяет порядок приближения.

Подставляя (4) и (5) в (3) и проводя интегрирование по  $\xi$ , получим  $\varphi(x, A_r)$  и  $\psi(x, A_r)$ . Применяя метод Галеркина и используя в качестве весовых функций  $u_r(x)$ , имеем  $2R$  алгебраических уравнений:

$$\int_0^d \psi(x, A_r) u_{2j}(x) dx = 0,$$

$$\int_0^d \varphi(x, A_r) u_{2j+1}(x) dx = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, R),$$

или

$$\sum_{r=0}^R A_{2r} M_{2r, 2j} + A_{2r+1} M_{2r+1, 2j} = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{r=0}^R A_{2r} M_{2r, 2j+1} + A_{2r+1} M_{2r+1, 2j+1} = 0,$$

где через  $M_{p, q}$  обозначены выражения, полученные после интегрирования по  $\alpha$ .

Приравняв определитель системы (6) нулю, получим дисперсионное уравнение МПЛ в  $R$ -приближении:

$$|N_{r, j}| = 0 \quad (r, j = 0, 1, 2, \dots, R), \quad (7)$$

где

$$N_{r, j} = M_{2r, 2j} M_{2r+1, 2j+1} - M_{2r+1, 2j} M_{2r, 2j+1}.$$

Подынтегральные выражения в  $M_{p, q}$  не имеют особых точек при всех действительных  $\alpha$ ,  $\gamma$  и при больших  $\alpha$  пропорциональны  $\alpha^{-3}$ . Это обеспечивает абсолютную сходимость интегралов, определяющих элементы определителя (7). При этом элементы определителя быстро убывают как с увеличением  $r$  и  $j$ , так и с увеличением разности  $|r - j|$ , т. е. при удалении от главной диагонали. Все это обеспечивает быструю

сходимость решения. В самом деле, сравнение результатов расчета постоянной распространения для волны низшего типа (квази-ТЕМ) в первом ( $M_{0,0} = 0$ ) и во втором ( $M_{0,0}M_{1,1} - M_{1,0}M_{0,1} = 0$ ) приближениях показало, что относительная разность между ними не превышает 1% при изменении параметров линии  $\epsilon$ ,  $h$ ,  $d$  в широких пределах.

Результаты расчетов в первом приближении ( $M_{0,0} = 0$ ) фазового замедления квази-ТЕМ волны для различной толщины диэлектрического слоя  $h$  и ширины полоскового проводника  $d$  при  $\epsilon = 10,2$  представлены

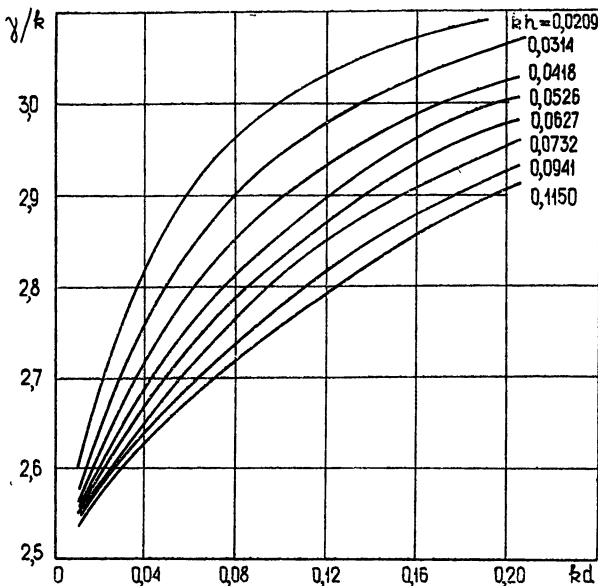


Рис. 2. Зависимость фазового замедления  $\gamma/k$  от относительной ширины полоскового проводника  $kd$  для различных значений относительной толщины диэлектрического слоя  $kh$  ( $\epsilon = 10,2$ ).

на рис. 2. Результаты расчета довольно хорошо совпадают со статическими [5] для  $kh, kd < 0,02$  (отличие порядка 1%) и начинают заметно отклоняться от статического приближения при больших  $kh, kd$  (рис. 3),

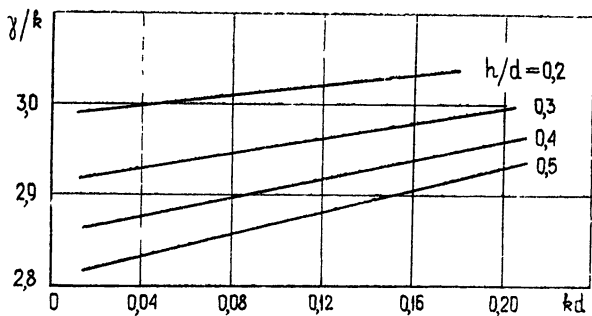


Рис. 3. Зависимость фазового замедления  $\gamma/k$  от относительной ширины полоскового проводника  $kd$  для различных величин отношения  $h/d$  ( $\epsilon = 10,2$ ).

что говорит о необходимости учитывать на высоких частотах продольные составляющие поля МПЛ и связанную с ними дисперсию фазовой скорости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. T. T. Wu, J. Appl. Phys., 28, № 3, 229 (1957).
2. H. A. Wheeler, IEEE Trans., MTT-13, № 3, 172 (1965).
3. H. E. Stinehelfer, Sr. IEEE Trans., MTT-16, № 7, 439 (1968).
4. E. Yamashita, R. Mittra, IEEE Trans., MTT-16 № 4, 251 (1968).
5. M. V. Schneider, Bell Syst. Techn. J., 48, № 5, 1421 (1969).
6. J. S. Hornsby, A. Gopinath, IEEE Trans., MTT-17, № 9, 684 (1969).
7. J. S. Hornsby, A. Gopinath, Electron. Letters, 5, № 12, 265 (1969).
8. G. I. Zisman, D. Varon, Int. Microwave Symp., Dallas, Tex., 1969, MAM-1-1.
9. R. Mittra, T. Itoh, IEEE Trans., MTT-19, № 1, 47 (1971).

Университет Дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Поступила в редакцию  
4 июня 1974 г.

DISPERSION EQUATION AND PROPAGATION CONSTANTS OF A  
MICROSTRIP LINE

*A. P. Gorobets, L. N. Deryugin, O. A. Kurdyumov, V. E. Sotin*

The paper describes a technique for the analysis of the microstrip line dispersion characteristics. The electromagnetic field in the two regions of the line cross-section is represented by continuous spectrum of plane waves. The field matching at the boundary yields the system of two integral equations which is then reduced to the system of linear algebraic equations.

The paper presents the results of computations in the form of the propagation constant curves of the dominant mode.

---



$\Sigma_q (q = 1, 2, \dots, Q)$  — цилиндрическая поверхность, часть стенки волновода, соответствующая  $q$ -й секции, дающая в сечении  $z = \text{const}$  ( $z_{q-1} \leq z \leq z_q$ ) окружность или прямоугольник.

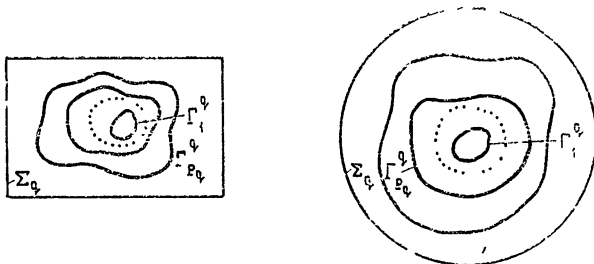


Рис. 2. Поперечное сечение  $q$ -й секции волновода (слева — прямоугольного, справа — круглого) плоскостью  $z = \text{const}$  ( $z_{q-1} \leq z \leq z_q$ ).

$T_p^q$  ( $p = 1, 2, \dots, P_q + 1$ ;  $q = 1, 2, \dots, Q$ ) — область, ограниченная поверхностями:

$$\begin{aligned} \sigma_p^q, \quad z = z_{q-1}, \quad z = z_q \quad (p = 1), \\ \sigma_{p-1}^q, \quad \sigma_p^q, \quad z = z_{q-1}, \quad z = z_q \quad (p = 2, 3, \dots, P_q), \\ \sigma_{p-1}^q, \quad \Sigma_q, \quad z = z_{q-1}, \quad z = z_q \quad (p = P_q + 1). \end{aligned}$$

Исходные физические данные задачи:

Диэлектрическая проницаемость:

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} \varepsilon & \text{— в регулярных участках волновода} \\ \hat{\varepsilon}_p^q & \text{— в области } T_p^q \quad (p = 1, 2, \dots, P_q + 1; q = 1, 2, \dots, Q). \end{cases}$$

Магнитная проницаемость:

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} \mu & \text{— в регулярных участках волновода} \\ \hat{\mu}_p^q & \text{— в области } T_p^q \quad (p = 1, 2, \dots, P_q + 1; q = 1, 2, \dots, Q). \end{cases}$$

Здесь  $\hat{\varepsilon}_p^q, \hat{\mu}_p^q$  — эрмитовы тензоры с ограниченными в области  $T_p^q$  компонентами.

Главной целью исследования является определение полной матрицы рассеяния данного неоднородного участка волновода.

## 2. ВЫБОР БАЗИСА

Предположим, что среда, заполняющая волновод, обладает поглощением, т. е.  $\varepsilon$  и  $\mu$  — комплексны, а тензоры  $\hat{\varepsilon}_p^q, \hat{\mu}_p^q$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varepsilon}_p^q &= (\hat{\varepsilon}_1)_p^q + (\varepsilon_0)_p^q \hat{I} \\ \hat{\mu}_p^q &= (\hat{\mu}_1)_p^q + (\mu_0)_p^q \hat{I} \end{aligned} \right\} \quad (p = 1, 2, \dots, P_q + 1; q = 1, 2, \dots, Q), \quad (1)$$

где  $(\hat{\varepsilon}_1)_p^q, (\hat{\mu}_1)_p^q$  — эрмитовы тензоры,  $\hat{I}$  — единичный тензор,  $(\varepsilon_0)_p^q, (\mu_0)_p^q$  — комплексны.

Кроме того, будем считать, что

$$\operatorname{Im} \varepsilon > 0, \quad \operatorname{Im} \mu > 0, \quad \operatorname{Im} (\varepsilon_0)_p^q > 0, \quad \operatorname{Im} (\mu_0)_p^q > 0, \quad (2)$$

причем все фигурирующие в (2) величины ограничены в соответствующих областях.

Выберем временную зависимость в виде  $e^{-i\omega t}$ .

Пусть  $\{\mathbf{E}_{\pm n}^q(M), \mathbf{H}_{\pm n}^q(M)\} e^{\pm i\gamma_n z}$  ( $n = 1, 2, \dots; q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1$ ) — полная система собственных волн  $q$ -й секции волновода. При этом:

1) если  $q = 0, Q+1$ , то это обычная система волн регулярных участков волновода, вид и основные свойства которой приведены, например, в [1];

2) если  $q = 1, 2, \dots, Q$ , то это система волн волновода со слоистым заполнением со скалярными параметрами слоев  $(\varepsilon_0)_p^q, (\mu_0)_p^q$  ( $p = 1, 2, \dots, P_q + 1$ ). Такая система имитирует физические свойства поля на горизонтальных границах сред, а потому существенно ускоряет сходимость соответствующего вариационного метода. В работах [2-4] рассмотрен вопрос о построении полных систем собственных волн для ряда частных случаев.

Пронормируем функции так, что

$$\iint_S [\mathbf{E}_m^q \times \mathbf{H}_{nt}^q]_z dx dy = \beta_m^q \delta_{nm} \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1). \quad (3)$$

Нам понадобится значение  $\beta_m^q$  в регулярных участках:

$$\beta_m^0 = \beta_m^{Q+1} = \begin{cases} \gamma_m^* \omega & \text{— для электрических волн} \\ \gamma_m \omega & \text{— для магнитных волн} \end{cases} \quad (4)$$

### 3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Для определения полной матрицы рассеяния неоднородного участка волновода, как известно, достаточно решить задачу возбуждения данного волновода приходящей из бесконечности произвольной собственной волной одного из регулярных участков волновода. Итак, пусть волновод возбуждается  $n$ -гармоникой амплитуды  $A$  левого регулярного участка.

Известно также, что продольные компоненты можно выразить через поперечные [5], а потому задачу для точного решения целесообразно ставить как задачу определения поперечных компонент поля:

$$\{\mathbf{E}(M, z), \mathbf{H}(M, z)\} = \{\mathbf{E}_p^q(M, z), \mathbf{H}_p^q(M, z); p = 1, 2, \dots, P_q + 1; q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1\},$$

удовлетворяющего:

1) уравнениям в областях  $T_p^q$  ( $p = 1, 2, \dots, P_q + 1; q = 1, 2, \dots, Q$ )

$$[\nabla \times \mathbf{H}_p^q]_t + i\omega (\hat{\varepsilon}_p^q \mathbf{E}_p^q)_t = 0; \quad (5)$$

$$[\nabla \times \mathbf{E}_p^q]_t - i\omega (\hat{\mu}_p^q \mathbf{H}_p^q)_t = 0; \quad (6)$$

$$[\nabla \times \mathbf{H}_p^q]_z + i\omega (\hat{\varepsilon}_p^q \mathbf{E}_p^q)_z = 0; \quad (7)$$

$$[\nabla \times \mathbf{E}_p^q]_z - i\omega (\hat{\mu}_p^q \mathbf{H}_p^q)_z = 0; \quad (8)$$

2) граничному условию на идеально-проводящей стенке

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_p^q)_{q+1}]|_{z_q} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, Q); \quad (9)$$

$$(E_{p_{q+1}}^q)_z \Big|_{z_q} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, Q); \quad (10)$$

3) условиям сопряжения

$$\text{St} \{ [n \times E_t^q] \} \Big|_{\sigma_p^q} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, P_q; q = 1, 2, \dots, Q); \quad (11)$$

$$\text{St} \{ [n \times H_t^q] \} \Big|_{\sigma_p^q} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, P_q; q = 1, 2, \dots, Q); \quad (12)$$

$$\text{St} \{ E_z^q \} \Big|_{\sigma_p^q} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, P_q; q = 1, 2, \dots, Q); \quad (13)$$

$$\text{St} \{ H_z^q \} \Big|_{\sigma_p^q} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, P_q; q = 1, 2, \dots, Q); \quad (14)$$

$$\text{St} \{ E_t \} \Big|_{S(z_q)} = 0 \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q); \quad (15)$$

$$\text{St} \{ H_t \} \Big|_{S(z_q)} = 0 \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q); \quad (16)$$

4) условиям возбуждения и излучения на бесконечности

$$\left. \begin{array}{l} E_t^0(M, z) \\ H_t^0(M, z) \end{array} \right\}_{z < z_0 = 0} = \sum_{n=1}^{\infty} R_n e^{-i\gamma_n z} \left\{ \begin{array}{l} Q_{-nt}^0(M) \\ H_{-nt}^0(M) \end{array} \right. + A e^{i\gamma_{n_0} z} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{n_0 t}^0(M) \\ H_{n_0 t}^0(M) \end{array} \right. ; \quad (17)$$

$$\left. \begin{array}{l} E_t^{Q+1}(M, z) \\ H_t^{Q+1}(M, z) \end{array} \right\}_{z > z_Q = L} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n e^{i\gamma_n z} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{nt}^{Q+1}(M) \\ H_{nt}^{Q+1}(M) \end{array} \right. . \quad (18)$$

Здесь  $n$  — единичный вектор внешней нормали к соответствующей поверхности, символом St обозначен скачок, а  $R_n$  и  $T_n$  — неизвестные коэффициенты отражения и прохождения в соответствующих регулярных участках волновода. Задачу для точного решения (5)—(18) назовем задачей I.

В силу полноты системы  $\{ \mathcal{E}_{nt}^q(M), H_{nt}^q(M) \}$ , в любой секции волновода имеют место разложения:

$$E_t^q(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^q(z) \mathcal{E}_{nt}^q(M) \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1); \quad (19)$$

$$H_t^q(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^q(z) H_{nt}^q(M) \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1). \quad (20)$$

Далее из (5), (6) вытекает:

$$\iint_{S(z)} \{ [\nabla \times H^q]_t + i\omega (\hat{\epsilon}^q E^q)_t \} \mathcal{E}_{nt}^{q*} ds = 0 \quad (21)$$

$$(n = 1, 2, \dots; z_{q-1} < z < z_q; q = 1, 2, \dots, Q);$$

$$\iint_{S(z)} \{ [\nabla \times E^q]_t - i\omega (\hat{\mu}^q H^q)_t \} H_{nt}^{q*} ds = 0 \quad (22)$$

$$(n = 1, 2, \dots; z_{q-1} < z < z_q; q = 1, 2, \dots, Q).$$

Из (9), (10), (11)—(14) и (15), (16) соответственно вытекает:

$$\iint_{\Sigma_q} [H_{p_{q+1}}^q \times E_{p_{q+1}}^{q*}]_n d\sigma = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, Q); \quad (23)$$



$$\iint_{\sigma_p^{q_1}} \text{St} \{ [H^q \times E^{q*}]_n \} d\sigma = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, P_q; q = 1, 2, \dots, Q); \quad (24)$$

$$\iint_{S(z_q)} \text{St} \{ [H_t \times E_t^*]_z \} ds = 0 \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q). \quad (25)$$

Из (17), (18) с учетом (3), (4) следует:

$$\iint_{S(z_0=0)} [H_t^0 \times E_t^{0*}]_z ds = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0 |P_n(0)|^2 - 2A\beta_{n_0}^0 P_{n_0}^*(0); \quad (26)$$

$$\iint_{S(z_Q=L)} [H_t^{Q+1} \times E_t^{Q+1*}]_z ds = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{Q+1} |Q_n(L)|^2. \quad (27)$$

Здесь

$$P_n(z) = \mp R_n e^{-i\gamma_n z} + A e^{i\gamma_{n_0} z} \delta_{nn_0} \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (28)$$

$$Q_n(z) = T_n e^{i\gamma_n z} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (29)$$

Знак «минус» соответствует электрическим волнам, знак «плюс» — магнитным.

Из (7), (8), (21), (22), используя (19), (20), а также ряд соотношений векторной алгебры [6], получим

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^{P_q+1} \iiint_{T_p^{q_1}} \{ \nabla [H_p^q \times E_p^{q*}] \} dv + i\omega \iiint_T \{ (\hat{\epsilon} E) E^* - (\hat{\mu} H)^* H \} dv = 0. \quad (30)$$

Применив теперь лемму Лоренца к интегралу по области  $T_p^q$  в левой части (30), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^Q \iint_{\Sigma_q} [H_{p_{q+1}}^q \times E_{p_{q+1}}^{q*}]_n d\sigma + \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^{P_q} \iint_{\sigma_p^q} \text{St} \{ [H^q \times E^{q*}]_n \} d\sigma + \\ & + \sum_{q=1}^{Q-1} \iint_{S(z_q)} \text{St} \{ [H_t \times E_t^*]_z \} ds - \\ & - \iint_{S(z_0=0)} [H_t^1 \times E_t^{1*}]_z ds + \iint_{S(z_Q=L)} [H_t^Q \times E_t^{Q*}]_z ds + \\ & + i\omega \iiint_T \{ (\hat{\epsilon} E) E^* - (\hat{\mu} H)^* H \} dv = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Используя теперь (1), (23) — (27) и взяв действительную часть получившегося выражения, найдем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq n_0)}}^{\infty} \text{Re} \beta_n^0 |P_n(0)|^2 + \text{Re} \beta_{n_0}^0 \left| P_{n_0}(0) - \frac{\beta_{n_0}^0}{\text{Re} \beta_{n_0}^0} A \right|^2 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \beta_n^{Q+1} |Q_n(L)|^2 + \omega \text{Im} \iiint_T \{ \epsilon_0 |E|^2 + \mu_0 |H|^2 \} dv = \frac{|\beta_{n_0}^0|^2}{\text{Re} \beta_{n_0}^0} |A|^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда в силу (2), в частности, следует:

$$\iint_{\Gamma} |E|^2 dv < C, \quad \iint_{\Gamma} |H|^2 dv < C. \quad (33)$$

#### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Перейдем теперь к построению приближенного решения задачи I. Будем искать его в виде

$$E_i^{q(N)}(M, z) = \sum_{n=1}^N A_n^{q(N)}(z) \mathcal{E}_{nt}^q(M) \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1); \quad (34)$$

$$H_i^{q(N)}(M, z) = \sum_{n=1}^N B_n^{q(N)}(z) \mathcal{H}_{nt}^q(M) \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1). \quad (35)$$

Задача для приближенного решения формулируется из требования, чтобы оно удовлетворяло энергетическому соотношению, аналогичному (32). Такую формулировку подсказывают соотношения (21)–(27). Она состоит в определении поперечных компонент поля  $\{E^{(N)}(M, z), H^{(N)}(M, z)\} = \{E^{q(N)}(M, z), H^{q(N)}(M, z); q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1\}$ , удовлетворяющего:

1) уравнениям в областях  $z_{q-1} < z < z_q$  ( $q = 1, 2, \dots, Q$ )

$$\iint_{S(z)} \{[\nabla \times H^{q(N)}]_t + i\omega (\epsilon^q E^{q(N)})_t\} \mathcal{E}_{nt}^{q*} ds = - \sum_{p=1}^{P_q} \oint_{\Gamma_p^q} \text{St} \{H_z^{q(N)}\} \times \times \mathcal{E}_{nt}^{q*} [n_z \times n] dl \quad (n = 1, 2, \dots, N); \quad (36)$$

$$\iint_{S(z)} \{[\nabla \times E^{q(N)}]_t - i\omega (\mu^q H^{q(N)})_t\} \mathcal{H}_{nt}^{q*} ds = - \sum_{p=1}^{P_q} \oint_{\Gamma_p^q} \text{St} \{E_z^{q(N)}\} \mathcal{H}_{nt}^{q*} [n_z \times n] dl \quad (n = 1, 2, \dots, N); \quad (37)$$

$$[\nabla \times H^{q(N)}]_z + i\omega (\epsilon^q E^{q(N)})_z = 0; \quad (38)$$

$$[\nabla \times E^{q(N)}]_z - i\omega (\mu^q H^{q(N)})_z = 0; \quad (39)$$

2) условиям сопряжения

$$\iint_{S(z_q)} \{ (E_i^{q(N)} - E_i^{q+1(N)}) \times \mathcal{H}_{nt}^{q*} \}_z ds = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N; q = 0, 1, 2, \dots, Q); \quad (40)$$

$$\iint_{S(z_q)} \{ (H_i^{q(N)} - H_i^{q+1(N)}) \times \mathcal{E}_{nt}^{q+1*} \}_z ds = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N; q = 0, 1, 2, \dots, Q); \quad (41)$$

3) условиям возбуждения и излучения на бесконечности

$$\iint_{S(z_0=0)} |H_t^{0(N)} \times \mathcal{E}_{nt}^{0*}|_z ds = \beta_n^0 (P_n^{(N)}(0) - 2A\delta_{nn_0}) \quad (n = 1, 2, \dots, N); \quad (42)$$

$$\iint_{S(z=Q=L)} [H_i^{Q+1(N)} \times \mathcal{E}_{ni}^{Q+1*}]_z ds = -\beta_n^{Q+1} Q_n^{(N)}(L) \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (43)$$

Задачу для приближенного решения (36) — (43) назовем задачей II.

Далее, учтя основные свойства базиса, а также (40) — (43), легко показать, что для приближенного решения имеют место соотношения (23 а), (25 а), (26 а), (27 а), совершенно идентичные соответственно (23), (25), (26), (27) с той лишь разницей, что суммирование в (26 а) и (27 а) производится до  $N$ . Соотношение же (24 а) отлично от (24), оно имеет вид

$$\begin{aligned} \int\limits_{\substack{\sigma \\ \rho}}^q \text{St} \{ [H^{q(N)} \times E^{q(N)*}]_n \} d\sigma = - \int_0^L dz \oint\limits_{\Gamma_p^q} \text{St} \{ H_z^{q(N)} \} \times \\ \times E_t^{q(N)*} [n_z \times n] dl + \int_0^L dz \oint\limits_{\Gamma_p^q} \text{St} \{ E_z^{q(N)*} \} H_t^{q(N)} [n_z \times n] dl \end{aligned} \quad (24a)$$

$$(p = 1, 2, \dots, P_q; \quad q = 1, 2, \dots, Q).$$

Повторив далее в точности выше изложенную схему и увидев, что отличные от нуля скачки (24 а) скомпенсируются за счет правых частей уравнений (36) и (37), мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq n_0)}}^N \text{Re} \beta_n^0 |P_n^{(N)}(0)|^2 + \text{Re} \beta_{n_0}^0 \left| P_{n_0}^{(N)}(0) - \frac{\beta_{n_0}^0}{\text{Re} \beta_{n_0}^0} A \right|^2 + \\ + \sum_{n=1}^N \text{Re} \beta_n^{Q+1} |Q_n^{(N)}(L)|^2 + \omega \text{Im} \iint_V \{ \epsilon_0 |E^{(N)}|^2 + \mu_0 |H^{(N)}|^2 \} dV = \frac{|\beta_{n_0}^0|^2}{\text{Re} \beta_{n_0}^0} |A|^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (44), в силу (2), следуют основные свойства решения задачи II:

1) однородная задача II имеет только тривиальное решение; отсюда, в силу общих свойств линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что неоднородная задача всегда разрешима и ее решение единственно;

2) решение задачи II — поле  $\{E^{(N)}(M, z), H^{(N)}(M, z)\}$  — удовлетворяет условиям ограниченности, равномерным по  $N$ :

$$\iint_V |E^{(N)}|^2 dV < C, \quad \iint_V |H^{(N)}|^2 dV < C. \quad (45)$$

### 5. СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ К ТОЧНОМУ ПРИ $N \rightarrow \infty$

Введем обозначения:

$$e^q = E^q - E^{q(N)}, \quad h^q = H^q - H^{q(N)} \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q+1); \quad (46)$$

$$\hat{P}_n(z) = \begin{cases} P_n - P_n^{(N)} & (n = 1, 2, \dots, N) \\ P_n & (n = N+1, \dots) \end{cases}, \quad (47)$$

$$\hat{Q}_n(z) = \begin{cases} Q_n - Q_n^{(N)} & (n = 1, 2, \dots, N); \\ Q_n & (n = N+1, \dots) \end{cases}$$

$$E_t^{q(R)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n^q(z) \mathcal{E}_{nt}^q(M), \quad H_t^{q(R)} = \sum_{n=N+1}^{\infty} B_n^q(z) H_{nt}^q(M) \quad (48)$$

$(q = 0, 1, 2, \dots, Q, Q + 1).$

Используя все свойства решений задач I и II, установим для функций  $e^q, h^q$  соотношения типа (21)—(27):

$$\iint_{S(z)} \{ [\nabla \times h^q]_t + i\omega (\varepsilon^q e^q)_t \} \mathcal{E}_{nt}^{q*} ds = \sum_{p=1}^{P_q} \oint_{\Gamma_p^q} \text{St} \{ H_z^{q(N)} \} \times$$

$$\times \mathcal{E}_{nt}^{q*} [n_z \times n] dl + \begin{cases} 0 & (n = 1, 2, \dots, N) \\ - \iint_{S(z)} H_z^{q(N)} n_z [\nabla \times \mathcal{E}_{nt}^{q*}] ds - \end{cases} \quad (49)$$

$$- i\omega \iint_{S(z)} (\varepsilon^q E^{q(N)})_t \mathcal{E}_{nt}^{q*} ds \quad (n = N + 1, \dots)$$

$$(n = 1, 2, \dots; \quad z_{q-1} < z < z_q; \quad q = 1, 2, \dots, Q);$$

$$\iint_{S(z)} \{ [\nabla \times e^q]_t - i\omega (\mu^q h^q)_t \} H_{nt}^{q*} ds =$$

$$= \sum_{p=1}^{P_q} \oint_{\Gamma_p^q} \text{St} \{ E_z^{q(N)} \} H_{nt}^{q*} [n_z \times n] dl +$$

$$+ \begin{cases} 0 & (n = 1, 2, \dots, N) \\ - \iint_{S(z)} E_z^{q(N)} n_z [\nabla \times H_{nt}^{q*}] ds + \end{cases} \quad (50)$$

$$+ i\omega \iint_{S(z)} (\mu^q H^{q(N)})_t H_{nt}^{q*} ds \quad (n = N + 1, \dots)$$

$$(n = 1, 2, \dots; \quad z_{q-1} < z < z_q; \quad q = 1, 2, \dots, Q);$$

$$\iint_{\Sigma_q} [h_{q+1}^q \times e_{q+1}^{q*}]_n d\sigma = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, Q); \quad (51)$$

$$\iint_{\sigma_p^q} \text{St} \{ [h^q \times e^{q*}]_n \} d\sigma = \iint_{\sigma_p^q} \text{St} \{ H_z^{q(N)} \} e_t^{q*} [n_z \times n] d\sigma - \quad (52)$$

$$- \iint_{\sigma_p^q} \text{St} \{ E_z^{q(N)*} \} h_t^q [n_z \times n] d\sigma \quad (p = 1, 2, \dots, P_q; \quad q = 1, 2, \dots, Q);$$

$$\iint_{S(z_q)} \text{St} \{ [h_t \times e_t^*]_z \} ds = \iint_{S(z_q)} [(H_t^{q(N)} - H_t^{q+1(N)}) \times E_t^{q+1(R)}]_z ds - \quad (53)$$

$$- \iint_{S(z_q)} [(E_t^{q(N)*} - E_t^{q+1(N)*}) \times H_t^{q(R)}]_z ds \quad (q = 0, 1, 2, \dots, Q);$$

$$\iint_{S(z_q=0)} [h_t^0 \times e_t^{0*}]_z ds = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^0 |\hat{P}_n(0)|^2; \quad (54)$$

$$\iint_{S(z_Q=L)} [h_i^{Q+1} \times e_i^{Q+1*}]_z ds = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{Q+1} |\hat{Q}_n(L)|^2. \quad (55)$$

Повторив далее еще раз вышеизложенную схему, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \beta_n^0 |\hat{P}_n(0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \beta_n^{Q+1} |\hat{Q}_n(L)|^2 + \omega \operatorname{Im} \iiint_T \{\varepsilon_0 |e|^2 + \\ + \mu_0 |h|^2\} dv = \operatorname{Re} \iiint_T \{H_z^{(N)} n_z [\nabla \times E_i^{*(R)}] - E_z^{(N)*} n_z \times \\ \times [\nabla \times H_i^{(R)}]\} dv - \operatorname{Re} \sum_{q=0}^Q \iiint_{S(z_q)} \{[(H_i^{q(N)} - H_i^{q+1(N)}) \times E_i^{q+1*(R)}]_z - \\ - [(E_i^{q(N)*} - E_i^{q+1(N)*}) \times H_i^{(R)}]_z\} ds - \\ - \omega \operatorname{Im} \iiint_T \{(\hat{\varepsilon} E^{(N)})_i E_i^{*(R)} - (\hat{\mu} H^{(N)})_i H_i^{(R)}\} dv. \end{aligned} \quad (56)$$

Сделав естественное предположение о том, что первые производные точного решения интегрируемы с квадратом в области  $T$ , физический смысл которого состоит в конечности передаваемой по волноводу энергии, учтя (33), (45), а также полноту системы собственных функций, легко показать, что правая часть в (56) при  $N \rightarrow \infty$  может быть сделана сколь угодно малой. А это означает, что приближенное решение задачи II сходится в среднем к точному решению задачи I при  $N \rightarrow \infty$ . Подчеркнем, что при этом имеет место сходимостъ приближенных значений коэффициентов  $P_n^{(N)}$  и  $Q_n^{(N)}$  соответственно к их истинным значениям  $P_n$  и  $Q_n$ .

Показательство сходимости проведено в предположении (2). Однако с помощью принципа предельного поглощения удается показать, что сходимостъ метода имеет место и в случае вещественных диагональных компонент тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\mu}$ .

Задача II дает следующую дифференциальную задачу III:

1) в областях  $z_{q-1} < z < z_q$  ( $q = 1, 2, \dots, Q$ )

$$Y^{q'}(z) = \Omega_q Y^q(z);$$

2) в точках  $z_q$  ( $q = 0, 1, 2, \dots, Q$ )

$$F Y^1(0) = G,$$

$$Y^q(z_q) = K^{q,q+1} Y^{q+1}(z_q) \quad (q = 1, 2, \dots, Q-1),$$

$$W Y^Q(L) = 0.$$

Здесь  $G$  — вектор размерности  $4N$ ,  $Y^s$  — вектор размерности  $8N$ ,  $\Omega_q$ ,  $K^{q,q+1}$  — квадратные матрицы размерности  $(8N \times 8N)$ ,  $F$ ,  $W$  — прямоугольные матрицы размерности  $(4N \times 8N)$ .

В работе [7] предложен метод численного решения краевой задачи III с нормализацией и ортогонализацией, работающий для больших значений  $N$  ( $N = 20 - 25$ ) и позволяющий рассчитывать волноводы с любым числом продольных секций произвольной длины.

Следует заметить, что если построенная на участке  $0 \leq z \leq L$  система собственных волн не обладает свойством полноты, то изложенный выше алгоритм остается в силе, но вопрос о характере сходимости приближенного решения к точному становится открытым.

Предлагаемый метод применялся для решения нескольких задач по расчету волноводов со сложным гиротропным заполнением [8, 9], аналогичным описанному в данной статье.

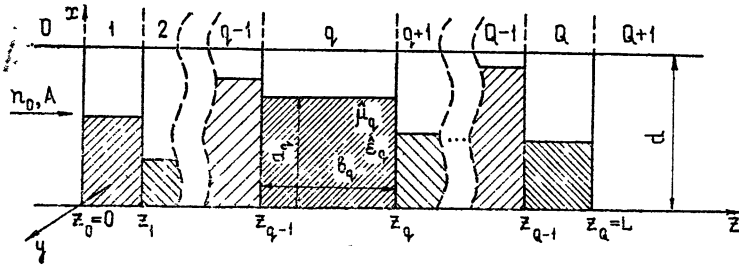


Рис. 3. Сечение волновода плоскостью  $y = \text{const}$

На рис. 4 даны приведенные для иллюстрации метода результаты. Эти результаты относятся к изображенному на рис. 3 плоскому волноводу ширины  $d = 1$ , возбуждаемому гармоникой  $n_0 = 1$  амплитуды  $A = 1$ , и сняты в полосе частот, для которой число проходящих волн в пустом волноводу равно 2 (рассматривался случай поперечного постоянного и однородного в гиромагнитной среде подмагничивающего поля).

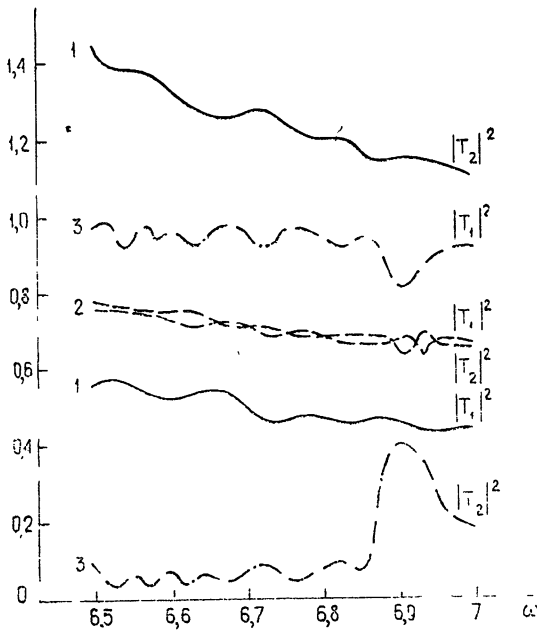


Рис. 4. Кривая 1 —  $Q=4$ ,  $\varepsilon_i = 10$ ,  $\mu_i = 1$ ,  $x_i = 0,8$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ ;  $a_1=0,08$ ,  $a_2=0,11$ ,  $a_3=0,15$ ,  $a_4=0,07$ ,  $b_1=0,17$ ,  $b_2=0,13$ ,  $b_3=0,72$ ,  $b_4=0,6$ . Кривая 2 —  $Q=6$ ,  $\varepsilon_i = 10$ ,  $\mu_i = 1$ ,  $x_i = 0,5$ ,  $i=1, 2, \dots, 6$ ,  $a_1=0,02$ ,  $a_2=0,1$ ,  $a_3=0,12$ ,  $a_4=0,06$ ,  $a_5=0,1$ ,  $a_6=0,09$ ;  $b_1=0,23$ ,  $b_2=0,39$ ,  $b_3=0,12$ ,  $b_4=0,8$ ,  $b_5=0,28$ ,  $b_6=0,32$ . Кривая 3 —  $Q=9$ ,  $\varepsilon_i = 8$ ,  $\mu_i = 1$ ,  $x_i = 0,2$ ,  $i=1, 2, \dots, 9$ ;  $a_1=0,02$ ,  $a_2=0,01$ ,  $a_3=0,02$ ,  $a_4=0,04$ ,  $a_5=0,02$ ,  $a_6=0,03$ ,  $a_7=0,07$ ,  $a_8=0,01$ ,  $a_9=0,02$ ,  $b_1=0,13$ ,  $b_2=0,19$ ,  $b_3=0,07$ ,  $b_4=0,37$ ,  $b_5=0,49$ ,  $b_6=0,27$ ,  $b_7=0,41$ ,  $b_8=0,57$ ,  $b_9=0,13$ .

На рис. 4 приведены три интересных случая, когда в достаточно широкой полосе частот ( $\omega$  — в безразмерных единицах) практически отсутствует отражение ( $|R_1|^2, |R_2|^2 \sim 10^{-2}$ ) при постоянном отношении энергий первой и второй гармоник.

Так, кривые 1 относятся к случаю сильной трансформации первой гармоники во вторую ( $|T_2|^2 / |T_1|^2 \approx 2,5$ ), кривые 2 — к случаю равного распределения энергий ( $|T_2|^2 / |T_1|^2 \approx 1$ ), кривые 3 — к случаю слабой трансформации первой гармоники во вторую ( $|T_2|^2 / |T_1|^2 \approx 0,1$  на большей части рассматриваемой полосы частот). Все остальные необходимые данные приведены на рисунке (всюду  $\kappa$  и  $\mu$  — компоненты тензора магнитной проницаемости феррита).

Заметим, что эти результаты были получены при решении задачи синтеза, соответствующей описанной в данной статье прямой задаче (задаче анализа), причем решение последней сходилось уже при  $N = 9 - 10$ .

В заключение автор выражает свою глубокую признательность А. Г. Свешникову за внимание к работе и ее обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, ч. 1, ОГИЗ, М.—Л., 1946
2. Т. А. Мартынова, в сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 13, изд. МГУ (1969).
3. Т. А. Мартынова, в сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 20, изд. МГУ (1973)
4. Т. А. Мартынова, Диссертация, МГУ, 1973
5. А. Г. Свешников, Диссертация, МГУ, 1963.
6. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, изд. Наука, М., 1965
7. Т. А. Мартынова, Вестник МГУ, серия физика, астрономия, № 5, 527 (1973).
8. Т. А. Мартынова, Радиотехника и электроника, 18, 9 (1973)
9. Т. А. Мартынова, Радиотехника и электроника, 19, 11 (1974)

Поступила в редакцию  
5 апреля 1974 г.

#### THE CALCULATION OF THE IRREGULAR WAVEGUIDE WITH THE LOCAL MULTILAYER IMPERFECTION

*T. A. Martynova*

This paper presents a comprehensive method of calculating irregular waveguides with an arbitrary multilayer physical filling (ferrite, plasma dielectric) both in longitudinal and transverse directions. The method can be applied to the calculation of optical fibers with metallic boundary and radiowaveguides. The formulated problem possessing both geometrical and physical asymmetry provides versatile possibilities for a set of a nonuniform switching providing the necessary regime of the waveguide (for example, phaserotator etc) operation that makes it interesting as the problem of synthesis. The basis of the algorithm is the method of cross sections, one of its peculiarities is the fact that the solution expansion is made not over the basis of the empty waveguide but over the eigen functions of the waveguide being multilayered in the cross section. Such a basis imitates physical properties of the field at the interface and therefore gives allowance for improving the method convergence.

The experimental results illustrating the method are presented.

УДК 539.28

## РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СЛОИСТЫХ ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Д. И. Семенцов, Г. С. Косаков

На основе решения уравнений Максвелла рассмотрены особенности резонансного поведения гиротропной слоистой среды. Показано, что изменение отношения между толщинами ферромагнитных слоев и диэлектрических приводит к сдвигу резонансных частот. Направление сдвига при поперечном и продольном подмагничивании среды различно. Получены условия, при которых эффективная глубина проникновения электромагнитного поля в слоистую систему намного превышает глубину скин-слоя для массивных металлических образцов.

1. Интерес, проявляемый к тонким ферромагнитным пленкам, вызван большими возможностями практического использования их магнито-гиротропных свойств в технике сверхвысоких частот. Однако тонкая пленка как гиротропный элемент оказывает на СВЧ поле слабую реакцию, поскольку объем ферромагнитного материала в ней очень мал. Увеличение же толщины пленки из-за большой проводимости ограничено глубиной проникновения высокочастотного поля в образец, которая для металлических ферромагнетиков в диапазоне сантиметровых волн составляет  $10^{-4}$ — $10^{-5}$  см. В связи с этим в последнее время большое внимание уделяется исследованиям свойств многослойных систем, состоящих из тонких слоев ферромагнитного металла, разделенных немагнитными диэлектрическими прослойками. Статическое и динамическое поведение таких систем во многом отличается от поведения однослойных пленок, что и определяет повышенный к ним интерес в микроэлектронике. Особый интерес в этом плане представляет изучение резонансных свойств слоистых систем. В пленках с тонкими диэлектрическими прослойками ( $L \leq 1500 \text{ \AA}$ ) наличие магнитостатической связи между ферромагнитными слоями приводит к сдвигу резонансных кривых [1-3]. Однако, как показывает эксперимент [4], уход резонансной частоты наблюдается и в тонкопленочных системах, в которых магнитостатическая связь между ферромагнитными слоями отсутствует. Величина сдвига при этом зависит от соотношения толщин магнитных и диэлектрических слоев. Представляет интерес рассмотреть влияние параметров тонкопленочной системы на ее резонансное поведение. В настоящей работе проводится изучение резонансных свойств безграничной слоистой среды и рассматриваются некоторые особенности резонансного поведения ограниченных систем, находящихся в передающих линиях.

2. Рассмотрим слоистую среду, состоящую из чередующихся слоев ферромагнитного металла с изотропной проводимостью  $\varepsilon$  и тензорной магнитной проницаемостью  $\hat{\mu}$  и слоев диэлектрика с изотропными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu_0$ . Такая среда обладает свойствами одноосного кристалла с осью симметрии, перпендикулярной слоям. По отношению к проводимости и диэлектрической проницаемости среда, хотя и состоит из изотропных слоев, в целом прояв-



ляет анизотропию [5]. Если ось  $Oz$  совпадает с нормалью к поверхности раздела слоев, то тензор комплексной диэлектрической проницаемости среды  $\hat{\eta} = \hat{\epsilon} - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}$  является диагональным с компонентами, определяющимися следующими соотношениями:

$$\eta_{xx} = \eta_{yy} = \frac{l\eta_m + L\eta_d}{l + L}, \quad \frac{1}{\eta_{zz}} = \frac{l/\eta_m + L/\eta_d}{l + L}, \quad (1)$$

где  $l$  — толщина металлических слоев,  $L$  — диэлектрических. Вид тензора магнитной проницаемости зависит от направления внешнего магнитного поля  $H_0$ . Если ферромагнитные слои намагничены в своей плоскости ( $H_0 \parallel Oy$ ), то тензор принимает вид

$$\hat{\mu}_s = \begin{pmatrix} \mu_{xx}^s & 0 & \mu_{xz}^s \\ 0 & \mu_{yy}^s & 0 \\ \mu_{zx}^s & 0 & \mu_{zz}^s \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь

$$\frac{1}{\mu_{zz}^s} = \frac{l/\mu_{zz} + L/\mu_0}{l + L}, \quad (3)$$

а остальные компоненты тензора определяются следующим образом:

$$\mu_{\alpha\beta}^s = \frac{l\mu_{\alpha\beta} + L\mu_0}{l + L} \quad (\alpha, \beta = x, y, z), \quad (4)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронеккера. Соотношения (1), (3), (4) справедливы для малых толщин металлических и диэлектрических слоев, т. е. при выполнении условий  $k_z l \ll 1$  и  $k_z L \ll 1$ . Толщина диэлектрических слоев в реальных тонкопленочных слоистых системах практически всегда удовлетворяет указанному условию в СВЧ диапазоне. Если же толщины слоев в указанном смысле не являются малыми, то в выражении для параметров среды (1) — (4) необходимо вводить поправочные члены, имеющие порядок  $k_z (l + L)^2$ .

3. Пусть в слоистой среде в направлении оси  $Oy$  распространяется монохроматическая волна с частотой  $\omega$ . Электромагнитное поле при этом представляется суперпозицией ряда плоских волн. Для каждой такой волны электрическое и магнитное поля изменяются по закону  $e^{-i(\omega t - kr)}$  и удовлетворяют уравнениям Максвелла, которые мы запишем в виде

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e} = \frac{\omega}{c} \hat{\mu}_s \mathbf{h}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{h} = -\frac{\omega}{c} \hat{\eta} \mathbf{e}. \quad (5)$$

После подстановки второго из этих уравнений в первое (5) принимает следующий вид:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{h}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mu}_s \hat{\eta} \mathbf{h}. \quad (6)$$

Записывая это уравнение в проекциях на координатные оси, получаем с учетом (1) и (2) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{rx}^s \eta_{xx} \right) h_x - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{xz}^s \eta_{zz} h_z &= 0, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{yy}^s \eta_{yy} h_y &= 0, \\ \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{zx}^s \eta_{xx} h_x - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{zz}^s \eta_{zz} \right) h_z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

из которой следует, что в продольно намагниченной слоистой среде распространяются поперечные волны, т. е.  $h_y = e_y = 0$ . Из равенства нулю детерминанта системы (7) получаем дисперсионное соотношение

$$k_{\pm}^2 = \frac{k_0^2}{2} \eta_{xx} \left\{ \mu_{xx}^s + \mu_{zz}^s \frac{\eta_{zz}}{\eta_{xx}} \pm \sqrt{\left( \mu_{xx}^s - \mu_{zz}^s \frac{\eta_{zz}}{\eta_{xx}} \right)^2 + 4 \mu_{xz}^s \mu_{zx}^s \frac{\eta_{zz}}{\eta_{xx}}} \right\}, \quad (8)$$

где  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , а двум значениям волнового числа соответствуют две волны — с правым  $k_+$  и левым  $k_-$  вращением векторов поля. Используя уравнения (5), можно определить поляризацию каждой из этих волн и соотношение между их фазами и амплитудами. Так, следующие выражения дают связь между амплитудами соответствующих волн:

$$\left( \frac{h_z}{h_x} \right)_{\pm} = - \frac{\eta_{xx}}{\eta_{zz}} \left( \frac{e_x}{e_z} \right)_{\pm} = \sqrt{\frac{\eta_{xx} k_{\pm}^2 - k_0^2 \mu_{xx}^s \eta_{zz}}{\eta_{zz} k_0^2 \mu_{zz}^s \eta_{xx} - k_{\pm}^2}}; \quad (9a)$$

$$\left( \frac{e_x}{h_x} \right)_{\pm} = \frac{k_0 k_{\pm} \mu_{xz}^s}{k_{\pm}^2 - k_0^2 \mu_{zz}^s \eta_{xx}}; \quad (9b)$$

$$\left( \frac{e_z}{h_z} \right)_{\pm} = \frac{k_0 k_{\pm} \mu_{zx}^s}{k_{\pm}^2 - k_0^2 \mu_{xx}^s \eta_{zz}}. \quad (9b)$$

Соотношения (9) показывают, что распространяющиеся в слоистой среде волны являются поперечными с эллиптической поляризацией.

Поскольку в сантиметровом диапазоне длин волн  $\sigma \gg \omega \epsilon$ , то из (1) следует неравенство  $|\eta_{zz}| \ll |\eta_{xx}|$ , которое позволяет провести разложение в ряд квадратного корня в соотношении (8) и получить следующие выражения для волновых чисел:

$$k_+ = k_0 \sqrt{\eta_{xx} \mu^+}, \quad k_- = k_0 \sqrt{\eta_{zz} \mu^-}, \quad (10)$$

где

$$\mu^+ = \mu_{xx}^s + \frac{\mu_{xz}^s \mu_{zx}^s}{\mu_{xx}^s} \frac{\eta_{zz}}{\eta_{xx}}, \quad \mu^- = \mu_{zz}^s - \frac{\mu_{xz}^s \mu_{zx}^s}{\mu_{xx}^s}.$$

За резонансное поглощение энергии СВЧ поля ответственна волна с левым вращением, поэтому для определения резонансной частоты слоистой системы перепишем  $\mu^-$  с учетом соотношений (3) и (4):

$$\mu^- = \frac{(1 + \theta) \mu \mu_0}{\mu_0 + \theta \mu} - \frac{\mu^2}{(1 + \theta)(\mu + \theta \mu_0)}. \quad (11)$$

Здесь  $\theta = L/l$ , а компоненты тензора магнитной проницаемости металлических слоев находятся из решения уравнения Ландау—Лифшица и имеют следующий вид [6]

$$\mu = \frac{\gamma^2 H_i (H_i + 4\pi M_0) - \omega^2}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2}; \quad (12a)$$

$$\mu' = \frac{4\pi\gamma M_0 \omega}{\gamma^2 H_i^2 - \omega^2}, \quad (126)$$

где  $H_i$  — внутреннее поле, равное в рассматриваемом случае  $H_0 \pm H_k$ ,  $H_k$  — поле наведенной одноосной анизотропии (знак плюс (минус) соответствует направлению  $H_0$  вдоль легкой (трудной) оси). Резонансная частота определяется полюсом магнитной проницаемости и имеет вид

$$\omega_p = \gamma \sqrt{(H_0 \pm H_k) \left( H_0 \pm H_k + \frac{4\pi M_0 \theta \mu_0}{\theta + \mu_0} \right)}. \quad (13)$$

Полученное выражение в предельном случае  $\theta \rightarrow \infty$  переходит в известную формулу для резонансной частоты изолированной тонкой пленки, намагниченной в своей плоскости:  $\omega_p = \gamma \sqrt{4\pi M_0 (H_0 + H_k)}$ ; если же  $\theta = 0$ , то  $\omega_p = \gamma (H_0 \pm H_k)$ . В предельных выражениях магнитная проницаемость диэлектрических слоев принимается равной единице.

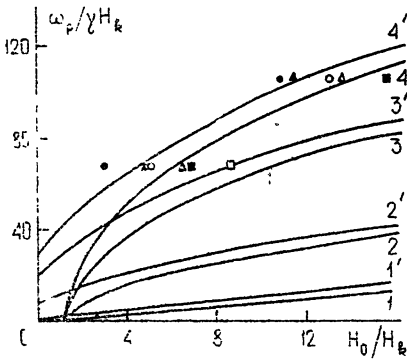


Рис. 1. Резонансные кривые при параллельном подмагничивании вдоль легкой и трудной (') осей: теория —  $\theta_1 = 100$ ,  $\theta_2 = 1$ ,  $\theta_3 = 0.1$  и  $\theta_4 = 0$ , эксперимент —  $\bullet\bullet\bullet$  —  $\theta = 40$ ,  $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$  —  $\theta = 100$ ,  $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$  —  $\theta = 25$ .

На рис. 1 на теоретические кривые нанесены экспериментальные точки, полученные в полосковой линии, заполненной слоистой системой с различным соотношением толщин металлических (пермаллой 80Ni 20Fe) и диэлектрических (слода) слоев. Измерения проводились на частоте 3000 и 1860 МГц, толщина металлических слоев выбиралась при этом значительно меньше глубины скин-слоя. Как следует из полученных результатов, с ростом  $\theta$  наблюдается уход резонансных частот (полей) в область более высоких (низких) значений.

4. Рассмотрим теперь случай распространения электромагнитной волны в поперечно намагниченной слоистой среде, т. е. когда внешнее статическое поле  $H_0$  приложено вдоль нормали к поверхностям слоев, а волновой вектор лежит в плоскости слоев, т. е.  $k \parallel Oy$ . При этом решение уравнений Максвелла приводит к двум типам волн — поперечно-электрической (ТЕ) и поперечно-магнитной (ТМ). Резонансные условия, т. е. перпендикулярность высокочастотной составляющей магнитного поля статическому полю, выполняются только для волны ТЕ, поэтому ограничимся только ее рассмотрением. Уравнение (6) в проекциях принимает вид

$$\begin{aligned} (k^2 - k_0^2 \mu_{xx}^s \eta_{xx}) h_x - k_0^2 \mu_{xy}^s \eta_{yy} h_y &= 0, \\ \mu_{yx}^s \eta_{xx} h_x + \mu_{yy}^s \eta_{yy} h_y &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенства нулю определителя этой системы находим константу пространства

$$k = k_0 \sqrt{\eta_{xx} \mu_{\perp}}, \quad \mu_{\perp} = \mu_{xx}^s - \frac{\mu_{xy}^s \mu_{yx}^s}{\mu_{yy}^s}. \quad (15)$$

С учетом (1) и (4)  $\mu_{\perp}$  принимает следующий вид:

$$\mu_{\perp} = \frac{(\mu + \theta \mu_0)^2 + \mu'^2}{(1 + \theta)^2 (\mu + \theta \mu_0)}, \quad (16)$$

где компоненты тензора магнитной проницаемости металлических слоев определяются выражениями (12), в которых внутреннее поле должно быть взято в виде  $H_0 - 4\pi M_0$ . Приравнявая нулю знаменатель полученного выражения, находим резонансную частоту поперечно намагниченной слоистой системы:

$$\omega_p = \gamma \sqrt{(H_0 - 4\pi M_0) \left( H_0 - \frac{4\pi M_0 \theta \mu_0}{1 + \theta \mu_0} \right)}. \quad (17)$$

Полученная формула в двух предельных случаях  $\theta \rightarrow \infty$  и  $\theta = 0$  переходит в известные выражения для резонансных частот: изолированной пленки, намагниченной перпендикулярно своей поверхности —  $\omega_p = \gamma (H_0 - 4\pi M_0)$ , и массивного образца —  $\omega_p = \gamma H_0$ , если считать, что при отсутствии диэлектрических слоев отсутствуют и границы раздела между слоями ферромагнетика ( $H_i = H_0$ ). Если же система остается слоистой при  $L = 0$ , то резонансная частота дается формулой  $\omega_p = \gamma \sqrt{H_0 (H_0 - 4\pi M_0)}$ . На рис. 2 представлена рассчитанная по формуле (17) зависимость резонансной частоты слоистой системы от приложенного статического поля, при перпендикулярном подмагничивании полученная при различных параметрах  $\theta$ . При переходе от больших  $\theta$  к малым происходит сдвиг резонансных кривых в область меньших значений полей и больших частот, что подтверждается экспериментом [4].

Как показывает проведенный анализ и данные эксперимента, сдвиг резонансных кривых с изменением параметра  $\theta$  при параллельном и перпендикулярном подмагничивании среды происходит в разные стороны. Связано это с тем, что изменение отношения между толщинами ферромагнитного металла и диэлектрика меняет величину средней намагниченности среды, которую можно представить в виде  $M_s = M_0 / (1 + \theta)$ . Изменение  $\theta$  приводит к сдвигу резонансных кривых, причем направление сдвига, как и в случае изолированных тонких пленок, при различных типах подмагничивания различно.

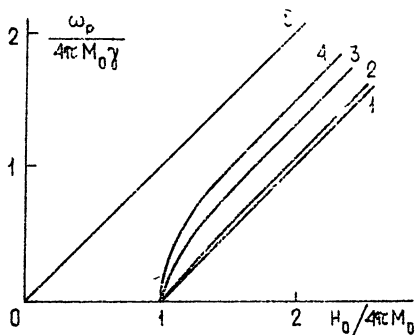


Рис. 2.

5. Использование резонансной зависимости магнитной проницаемости металлических слоев от частоты (поля) позволяет при определенных условиях значительно увеличить глубину проникновения СВЧ поля в слоистую систему по сравнению с обычным скин-слоем. Рассмотрим распространение электромагнитной волны с составляющими  $e_x$ ,  $h_y$  и  $e_z$

(тип волны, реализуемый в полосковых линиях передачи) в слоистой системе вдоль подмагничивающего поля  $H_0$ , лежащего в плоскости слоев. С учетом (1) и (2) уравнения Максвелла для указанных составляющих электромагнитного поля примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} &= -\frac{i\omega}{c} \mu_{yy}^s h_y, \\ \frac{\partial h_y}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{c} \eta_{xx} e_x, \\ \frac{\partial h_y}{\partial x} &= \frac{i\omega}{c} \eta_{zz} e_z. \end{aligned} \quad (18)$$

Для волн, распространяющихся вдоль оси  $Ox$ , зависимость от координаты будет пропорциональна  $e^{ikx}$ , где  $k$  — продольная составляющая константы распространения. С учетом этого из (18) легко найти уравнение, описывающее проникновение поля в систему в направлении нормали к поверхностям слоев:

$$\frac{d^2 h_y}{dz^2} - \frac{\eta_{xx}}{\eta_{zz}} (k^2 - k_0^2 \mu_{yy}^s \eta_{zz}) h_y = 0. \quad (19)$$

Если считать, что среда занимает полубесконечное пространство и  $h_{y0}$  — величина поля на границе  $z=0$ , то решение полученного уравнения можно записать в виде  $h_y(z) = h_{y0} e^{-\gamma z}$ , где поперечная составляющая константы распространения имеет вид

$$\gamma = \left[ \frac{i\omega \varepsilon_{xx} + 4\pi \sigma_{xx}}{i\omega \varepsilon_{zz} + 4\pi \sigma_{zz}} \left( k^2 - k_0^2 \varepsilon_{zz} \mu_{yy}^s + \frac{4\pi i\omega \tau_{zz} \mu_{yy}^s}{c^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Глубина проникновения СВЧ поля в слоистую систему определяется выражением  $\delta^{-1} = \text{Re } \gamma$ . В полученной формуле продольная константа распространения и величина  $k_0^2 \varepsilon_{zz} \mu_{yy}^s$  имеют один порядок и могут оказаться равными. При этом  $\text{Im } \gamma = 0$  и с учетом неравенств  $\tau_{xx} \gg \omega \varepsilon_{xx}$  и  $\sigma_{zz} \ll \omega \varepsilon_{zz}$  глубина проникновения окажется равной

$$\delta = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_{zz}}{\mu_{yy}^s \sigma_{zz} \tau_{xx}}}. \quad (21)$$

Подставляя в эту формулу соотношения (1) и (4), получаем

$$\delta = \frac{1+\theta}{4\pi} \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\theta}{\varepsilon(\mu + \theta\mu_0)}}. \quad (22)$$

Для обычных значений входящих в (21) величин:  $\omega \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $\varepsilon \sim 10$ ,  $\mu \sim 10 \div 100$ ,  $\mu_0 \sim 1$ ,  $\theta \sim 1$ , глубина проникновения поля в слоистую систему имеет порядок  $10^{-2} - 10^{-1} \text{ см}$ , что намного превышает глубину проникновения поля в массивный образец. Условие, при котором выполняется (22), можно записать следующим образом:

$$\mu = \theta \left( \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}{\varepsilon} - \mu_0 \right), \quad (23)$$

где  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{\mu}$  — значения диэлектрической и магнитной проницаемостей среды, переносящей энергию волны. Поскольку основная часть энергии

переносится в области, лежащие вне слоистой системы, соответствующим подбором среды, в которую помещена слоистая система, можно добиться выполнения условия (23). Однако выполнения этого условия намного проще добиться выбором надлежащей частоты (поля), поскольку  $\mu$  имеет резонансный характер зависимости от частоты (поля). Подставляя в (23) соотношение (12 а), получаем условие, накладываемое на частоту, при которой резко возрастает глубина проникновения поля в слоистую систему:

$$\omega^2 = \gamma^2 H_i \left\{ H_i - \frac{4\pi M_0}{\theta \left( \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}{\varepsilon} - \mu_0 \right) - 1} \right\}. \quad (24)$$

В области частот, не удовлетворяющих этому условию, глубина проникновения имеет обычный вид и порядок величины. Условие, аналогичное (24), можно получить для статического подмагничивающего поля при постоянной частоте.

Таким образом, результаты работы показывают, что особенности резонансного поведения слоистых гиротропных сред с успехом могут быть использованы при создании СВЧ устройств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. Chen, A. Morrish, JAP, **33**, 1146 (1962).
2. Л. В. Киренский, Н. С. Чистяков, Изв. АН СССР, сер. физ., **30**, 1 (1966).
3. Д. И. Семенов, ФММ, **34**, 1088 (1972).
4. L. Courtois et al, IEEE Trans on Mag., **7**, 3 (1971).
5. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1973.
6. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пилетминский, Спиновые волны, М., 1967.

Северо-Осетинский государственный университет

Поступила в редакцию  
24 октября 1974 г.

#### RESONANCE PHENOMENA IN STRATIFIED GYROTROPIC MEDIA

*D. I. Sementsov, G. S. Kosakov*

The peculiarities of the resonance behaviour of a gyrotropic stratified medium are considered on the basis of solving Maxwell equations. It is shown that the change in the ratio of the thicknesses of ferromagnetic and dielectric layers causes the resonance frequency shift. The shift direction at transverse and longitudinal magnetization of the medium is different. The conditions are obtained under which the effective depth of penetration of the electromagnetic field into a stratified medium exceeds greatly the depth of the skin-layer for massive metal samples.

УДК 538.112

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТЯМ В ВИНТОВОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПОТОКЕ

*И. И. Антаков, В. А. Гинцбург, Е. В. Засыпкин, Е. В. Соколов*

Приведены результаты экспериментального исследования распределения электронов по скоростям в винтовом пучке, формируемом адиабатической электронной пушкой магнетронного типа. Показана эволюция функции распределения электронов по скоростям в сформированном пучке при изменении режима и геометрии пушки.

В мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) [1] обычно используются адиабатические электронные пушки магнетронного типа [2]. Формируемые ими винтовые электронные пучки по ряду причин имеют значительный разброс скоростей электронов [3], который существенно влияет на эффективность работы приборов.

Для расчета МЦР и интерпретации их характеристик необходимо знать функцию распределения электронов по скоростям и характер ее эволюции с изменением режима прибора. В известных работах, касающихся теории формирования винтовых электронных пучков и измерений величины разброса скоростей электронов в таких пучках [4-6], проводимых, как правило, в моделирующих режимах, достаточной информации по этому вопросу не содержится.

Данная работа посвящена исследованию функции распределения электронов по скоростям вращательного движения в винтовых электронных пучках в режимах, близких к рабочим. В экспериментах использовалась аксиально-симметричная двухэлектродная пушка с катодом, имеющим узкий эмиттирующий пояс (  $l \ll d$ ,  $l$  — ширина пояса,  $d$  — расстояние между анодом и катодом пушки). Катод пушки закреплялся в юстировочном устройстве, что позволило также выяснить влияние положения катода относительно анода (перекосов в радиальной плоскости и смещений его вдоль оси системы) на распределение электронов по скоростям. Измерения проводились методом тормозящего поля [5].

Функция распределения электронов  $f(\gamma)$  по скоростям их вращательного движения  $v_{\perp}$  (поперечным скоростям) связана с измеряемыми величинами соотношением

$$f(\gamma) = \frac{k_{\perp} \gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left[ \frac{d}{d\tilde{U}_{\tau}} \left( \frac{I_k}{I_0} \right) \right] \tilde{U}_{\perp=1-\gamma^2}, \quad (1)$$

в котором  $k_{\perp}$  — нормирующий множитель,  $\gamma = v_{\tau}/v$  — отношение поперечной и полной скоростей электронов,  $\tilde{U}_{\tau}$  — отношение тормозящего и анодного напряжений,  $I_k$  — ток коллектора,  $I_0$  — полный ток пучка.

На рис. 1 приведены экспериментальные функции распределения электронов по поперечным скоростям при оптимальном положении ка-

года\*. В области значений величины перемагничивания  $\alpha = H_0/H_k < 4,15$  ( $H_0, H_k$  — напряженности магнитного поля в пространстве взаимодействия и на катоде), там, где отсутствует отражение электронов от магнитной пробки, функция распределения близка к симметричной относительно своего максимума, и при изменении  $\alpha$  ее эволюция достаточно хорошо описывается адиабатической теорией электронных пушек МЦР [4]. Накопление электронов в ловушке между катодом и магнитной пробкой при  $\alpha \geq 4,15$  приводит к заметному нарушению адиабатичности преобразования скоростей электронов, функция распределения при этом становится существенно несимметричной — появляются электроны с большими продольными скоростями ( $v_{\perp}/v_{\parallel} = g \ll 1$ ).

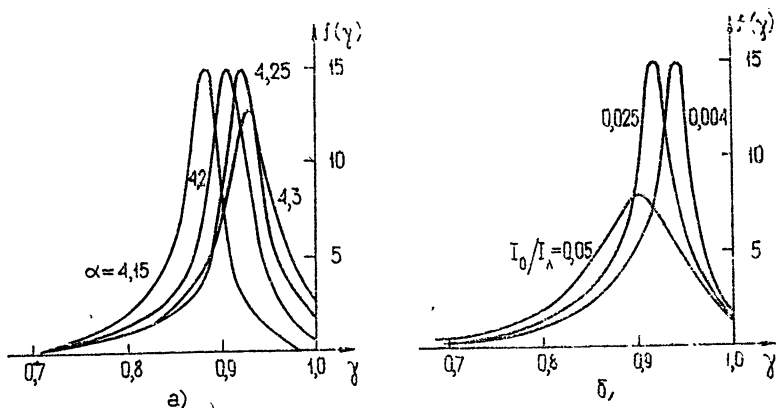


Рис. 1. Эволюция функции распределения электронов по скоростям при изменении:  
а) перемагничивания  $\sigma$  ( $I_0/I_A = 2,5 \cdot 10^{-2}$ ); б) тока электронного пучка ( $\alpha = 4,2$ ).

Повышение тока пучка (отношения тока пучка к ленгмюровскому току  $I_{\text{Л}}$  диода, эквивалентного промежутку катод — анод пушки)\*\*, как видно из рис. 1 б, вызывает расширение функции распределения и сдвиг ее максимума в области меньших поперечных скоростей электронов. Эти эффекты обусловлены, согласно [4, 8], влиянием объемного заряда вблизи катода на начальное формирование пучка.

Поскольку экспериментально найденные распределения электронов по скоростям близки к симметричным (за исключением «хвоста» электронов с относительно большими продольными скоростями, не играющими, как правило [1], существенной роли при взаимодействии пучка с высокочастотным полем), их можно описать двухпараметрической, в частности, гауссовой функцией

$$f(\gamma) = k_{\perp} \exp[-(\gamma - \gamma_0)^2/2\sigma^2]. \quad (2)$$

Параметры  $\gamma_0$  и  $\sigma$  могут быть определены через экспериментально измеряемые величины: отношение поперечных и продольных скоростей электронов в максимуме функции распределения  $g_0$  и относительный

\* Оптимизация электронно-оптической системы (минимизация скоростного разброса) проводилась при помощи численных методов, описанных в [7]. Влияние статического пространственного заряда вблизи катода на начальные условия формирования электронного пучка при этом не учитывалось.

\*\* В исследуемых пушках при анодном напряжении 16 кВ ленгмюровский ток составляет 20 А (поверхность эмиттирующего пояса 2 см<sup>2</sup>, рассеяние анод — катод 0,8 см).



разброс поперечных скоростей  $\delta v_{\perp}$ . Величина  $\delta v_{\perp}$  при этом должна измеряться на том участке  $f(\gamma)$ , где характер поведения экспериментальной и аппроксимирующей функции одинаков. Необходимо отметить, что определение параметров  $g_0$  и  $\delta v_{\perp}$  в режимах, близких пробочным по отсечке коллекторного тока, методом, описанным в [5], приводит вследствие несимметрии функции  $f(\gamma)$  к занижению  $g_0$  и завышению  $\delta v_{\perp}$ . Если определить  $\delta v_{\perp}$  на уровне  $f(\gamma)$  в  $e^2$  раз. меньшем  $f(\gamma_0)$  и учесть моноэнергетичность электронного потока, что допустимо при относительно малых значениях  $I_0/I_n$ , то

$$\gamma_0 = \frac{g_0}{\sqrt{1+g_0^2}}, \quad \sigma = 0,25 \frac{g_0}{\sqrt{1+g_0^2}} \delta v_{\perp}. \quad (3)$$

Примеры такой аппроксимации показаны на рис. 2. Приведенные на рис. 3 зависимости  $g_0$  и  $\delta v_{\perp}$  от тока электронного пучка при различных значениях величины перемагничивания  $\alpha$ , построенные по данным эксперимента, позволяют аналитически определить функцию распределения электронов по скоростям в широком диапазоне изменения параметров.

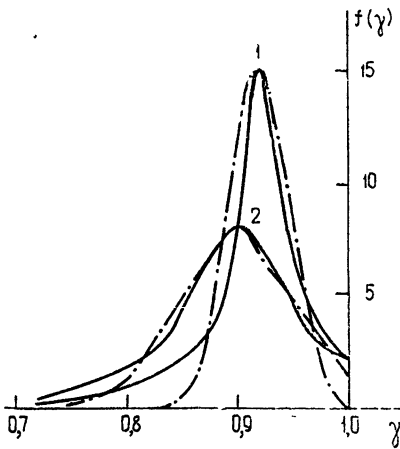


Рис. 2. Сравнение экспериментальных функций распределения по поперечным скоростям (сплошная кривая) с аппроксимирующей гауссовой функцией (штрих-пунктирная) при  $\alpha = 4,25$  ( $I - I_0/I_n = 2,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $2 - I_0/I_n = 5 \cdot 10^{-2}$ ).

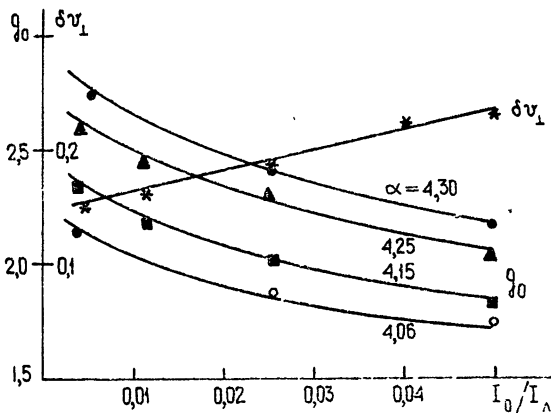


Рис. 3.

Из адиабатической теории электронных пушек МЦР известно [4], что поперечный разброс  $\delta v_{\perp}$  является инвариантом относительно изменения  $\alpha$ , а зависимость параметра  $g_0$  от величины перемагничивания имеет вид

$$g_0 = \sqrt{\frac{A\alpha^3}{1-A\alpha^3}}, \quad A = \frac{E_k^2 (\kappa B / \text{с.м.})}{3,52 U_a (\kappa B) H_0^2 (\kappa \mathcal{E})},$$

где  $U_a$  — анодное напряжение,  $E_k$  — напряженность электрического поля на катоде.

Рассчитанная по (4) зависимость отношения поперечных и продольных скоростей в максимуме функции распределения от  $\alpha$  достаточно хорошо совпадает с экспериментальной, полученной для малых токов электронного пучка ( $I_0/I_d \rightarrow 0$ ), где отсутствует отражение электронов от магнитной пробки (рис. 4). Накопление пространственного заряда в области нарастающего магнитного поля при  $\alpha \gtrsim 4,15$  приводит к заметному уменьшению величины  $g_0$  по сравнению с расчетной. Инвариантность поперечного разброса при этом практически не нарушается (рис. 1 а, 3).

Рис. 4. Сравнение теоретической (штрих-пунктирная) и экспериментальных (сплошная) кривых зависимости  $g_0$  от величины перемасштабирования  $\alpha$ . Кривая (штриховая) получена путем экстраполяции экспериментальных данных в область малых токов ( $I_0/I_d \rightarrow 0$ ).

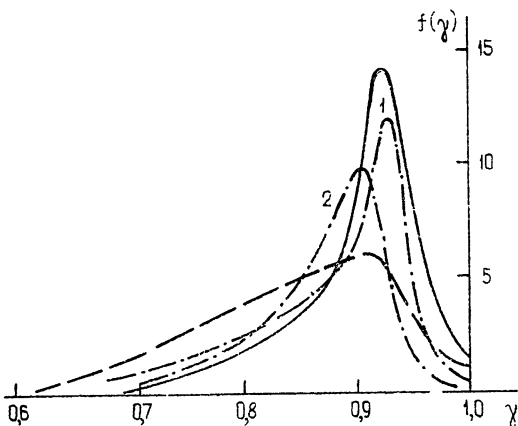
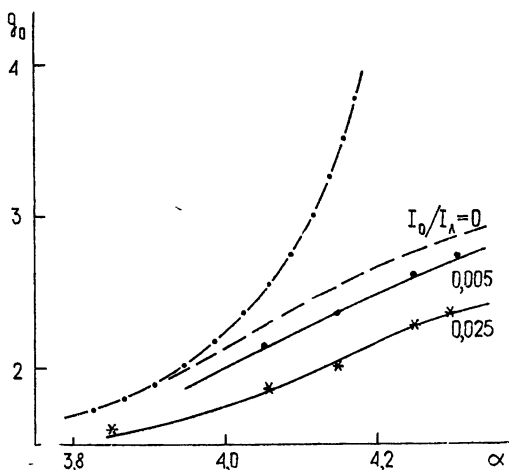


Рис. 5. Распределение электронов по скоростям при различном положении катода ( $\alpha=4,25$ ,  $I_0/I_d=2,5 \cdot 10^{-2}$ ; сплошная кривая — оптимальное положение катода, штриховая — смещение катода в радиальной плоскости на  $0,1 d$ , штрих-пунктирная — смещение катода вдоль оси пушки; 1 —  $\Delta z = 1,5 l$ , 2 —  $\Delta z = -1,5 l$ ).

Для иллюстрации влияния на параметры электронного пучка отклонения положения катода от оптимального было измерено распределение электронов по скоростям при сдвиге катода в радиальной плоскости и смещении его вдоль оси на величину  $\Delta z = \pm 1,5$  (рис. 5). Отклоне-

ние положения катоды от оптимального приводит, как видно из рис. 5, к несимметричному расплыванию функции  $f(\gamma)$ , причем особенно критичен вид функции распределения к нарушению аксиальной симметрии пучки.

В заключение отметим, что проведенные исследования показали возможность не только аналитического представления функции распределения электронов по поперечным скоростям в пучке, формируемом адиабатической электронной пушкой магнетронного типа, но и позволили объяснить некоторые результаты экспериментов с мощными МЦР-генераторами — получение, в частности, высокого КПД гиротрона ( $\eta \approx 50\%$ ) в широком интервале значений токов электронного пучка ( $I_0/I_{\text{л}} = 0,004 \div 0,015$ ) [9]. Плавная зависимость КПД генератора от тока и высокий максимальный КПД ( $\eta = 55\%$ ) в режиме малых токов обусловлены тем, что при помощи рассмотренной электронно-оптической системы удается не только формировать электронные пучки с большим отношением средних поперечных и продольных скоростей ( $g_0 = 2,5 \div 3$ ), но и, изменяя это отношение, обеспечить необходимое для достижения максимального КПД соотношение между  $I_0$  и  $I_{\text{ст min}}$  — минимальным стартовым током резонатора.

Авторы благодарны В. К. Юлпатову за постоянный интерес к работе и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
3. Ш. Е. Цимринг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 8, 1247 (1972)
4. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 141 (1973)
5. Е. Г. Авдошин, А. Л. Гольденберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1605 (1973).
6. В. А. Прус, В. И. Глущенко, В. Г. Тараненко, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 5 (1972).
7. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, ЖТФ, 13, 1695 (1972)
8. А. Л. Гольденберг, Т. Б. Панкратова, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 9 (1971).
9. И. И. Антаков, С. Н. Власов, В. А. Гинцбург, Л. И. Загрядская, Л. В. Николаев, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
11 октября 1974 г.

#### EXPERIMENTAL STUDY OF INVESTIGATION OF VELOCITY ELECTRON DISTRIBUTION IN A SCREW ELECTRON BEAM

*I. I. Antakov, V. A. Ginzburg, E. V. Zasyplin, E. V. Sokolov*

The results of experimental investigation of the velocity electron distribution in a screw beam formed by the adiabatic electron magnetron-type gun are given. The evolution of the velocity electron distribution function in a formed beam when changing the regime and gun geometry is shown.

УДК 621.385.6

## ТЕОРИЯ УБИТРОНА-УСИЛИТЕЛЯ ТИПА «О» С УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

*М. А. Горшкова А. В. Сморгонский*

Рассматривается возможность использования усилительного прибора типа убитрон «О» с ультрарелятивистским электронным пучком для получения электромагнитных колебаний в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых волн. Найдены оптимальные параметры—длина пространства взаимодействия, расстройка синхронизма, ток и сопротивление связи, при которых может быть достигнут максимальный КПД 28%. Определены зависимости оптимальных параметров от энергии пучка.

Трудности в создании мощных убитронов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн связаны, как и у многих других электронных приборов, с миниатюризацией элементов конструкции, в данном случае—магнитов или электродов периодического фокусирующего поля [1]. Требования к их размерам могут быть значительно ослаблены при работе с релятивистскими пучками, так как для осуществления резонансного взаимодействия электронов с попутной волной, имеющей фазовую скорость, близкую к скорости света, благодаря эффекту Доплера становится возможным использование статического поля, имеющего период почти в  $\gamma^2$  раз больше, чем длина волны генерируемого излучения ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  — энергия электрона, отнесенная к его энергии покоя,  $v$  — скорость частицы,  $c$  — скорость света) [2]. Однако обеспечить узкополосную с высоким КПД генерацию в этом случае оказывается весьма сложно из-за большого числа мод (различающихся продольными индексами), одновременно попадающих в полосу возбуждения\*. Поэтому, для повышения выходной мощности в указанном диапазоне может оказаться более целесообразным использование не генераторов, а усилителей, в которых поданный на вход узкополосный сигнал выделяет одну—рабочую моду\*\*.

В настоящей статье рассмотрена работа убитрона типа «О» с ультрарелятивистским ( $\gamma \gg 1$ ) электронным пучком в режиме усиления монохроматического сигнала. Предполагается, что электроны, осциллирующие в периодическом фокусирующем поле, синхронно взаимодействуют с волной гладкого волновода:

$$|\omega - hv_{\parallel} - \Omega| \ll \omega, \Omega,$$

усиливая ее в направлении своего движения (здесь  $\omega$  — частота волны,  $h$  — ее постоянная распространения,  $v_{\parallel}$  — поступательная скорость электронов,  $\Omega = \frac{2\pi v_{\parallel}}{d}$  — частота их осцилляций,  $d$  — период фокусирующего поля). Отражения на выходе прибора отсутствуют.

\* Обзор методов, используемых для получения одномодовой генерации в лазерной технике, где возникают аналогичные трудности, имеется в [3, 4].

\*\* По-видимому, для работы в одномодовом режиме возможно использование и «захваченных» генераторов, в которых к моменту их возбуждения одна из мод выделена на фоне шумов высшим сигналом [5].

Этот процесс описывается самосогласованной системой уравнений, состоящей из уравнений движения электронов в убитроне, которые получены и проанализированы в [1], и уравнения возбуждения волновода. Последнее можно привести к виду, принятому в теории ЛБВ, если в уравнении возбуждения, записанном в форме [6], выразить поперечные и продольные составляющие тока через найденные в [1] скорости движения частиц и воспользоваться законом сохранения заряда. Движение частиц в приближении малой жесткости фокусировки представляется в виде суммы дрейфового  $R$  и осцилляторного  $p$ , в силу чего интеграл взаимодействия для тонкого пучка преобразуется к виду

$$\frac{1}{N} \int j^\omega E_0^\omega ds \rightarrow \frac{I_0}{\pi v_{\parallel} N} \int \{ \dot{p} E_0^\omega(R) + v_{\parallel} (p \nabla) E_z^\omega(R) \} \times \\ \exp[-i(\omega t - hz + \Theta_0)] d\Theta_0,$$

где  $I_0$  — полный ток пучка. Оставляя во всех уравнениях лишь медленно меняющиеся члены, получаем самосогласованную систему:

$$\frac{dA}{d\zeta} = -I \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\Theta}}{\mathcal{E}} d\Theta_0; \quad (1)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\zeta} = \text{Re} \left( \frac{A}{\mathcal{E}} e^{i\Theta} \right); \quad (2)$$

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = \frac{1}{\mathcal{E}^2} - B, \quad (3)$$

где

$$A = 2 \left( \frac{e}{m_0} \right)^2 \frac{1}{\omega k c^3} \left\{ (E_0^\omega [z_0 \times H_1]) - \frac{1}{k} ([z_0 \times H_1] \nabla) E_z^\omega \right\},$$

$\mathcal{E} = \gamma/\gamma_0$  — энергия электрона, отнесенная к ее начальному значению,  $\Theta = \omega t - (h + k)z + \Theta_0$  — фаза невозмущенной волны в точке нахождения электрона,  $\zeta = \frac{\omega z}{2 \frac{1}{10} c}$  — независимая переменная, пропорциональная координате  $z$ ,  $E_0^\omega$  — амплитуда электрической составляющей высокочастотного поля,  $H_1$  — амплитуда первой гармоники периодического фокусирующего поля,  $N$  — норма волны  $E^\omega$  «холодного» волновода,

$$I = 4 \left( \frac{e}{m_0} \right)^3 \frac{\gamma_0 I_0 | (E_0^\omega [z_0 \times H_1]) - (1/k) ([z_0 \times H_1] \nabla) E_z^\omega |^2}{\pi N \omega^2 k^2 c^4}$$

— параметр, пропорциональный сопротивлению связи и току пучка,  $B = 2 \gamma_0^2 \left[ \frac{(h + k)}{\omega} c - 1 \right]$  — параметр расстройки,  $e/m_0$  — удельный заряд электрона.

На входе прибора, при  $\zeta = 0$ , моноэнергетический ( $\mathcal{E}(0) = 1$ ) стационарный ( $\Theta(0) = \Theta_0$ ,  $0 \leq \Theta_0 < 2\pi$ ) электронный пучок вступает во взаимодействие с волной, амплитуда которой  $A(0) = A_0$ .

Система уравнений (1)–(3) близка к уравнениям, описывающим работу ультрарелятивистской ЛБВ [7], и отличается от них зависимостью правых частей уравнений (1), (2) от энергии электронов. Эта зависимость обусловлена тем, что эффективность воздействия поля на пучок в убитроне определяется амплитудой осциллирующих частиц, зависящей в свою очередь от энергии их поступательного движения

Система уравнений (1)—(3) имеет интеграл, который выражает собой закон сохранения энергии в системе пучок—волна. Он может быть получен усреднением уравнения (2) по начальным фазам  $\theta_0$ :

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{E} d\theta_0 + \frac{|A|^2}{2I} = C.$$

Этот интеграл можно использовать для проверки точности получаемых численными методами решений. Величина  $\eta = \frac{|A_k|^2 - |A_0|^2}{4\pi I}$  ( $A_k$  — значение амплитуды поля на выходе системы) есть КПД прибора.

В приближении слабого поля  $A \rightarrow 0$  решение линеаризованных уравнений (1)—(3) представляет собой сумму волн  $A = \sum_{j=1}^3 A_{0j} \exp(i\Gamma_j \hat{\zeta})$ ,

где  $\hat{\zeta} = (2\pi I)^{1/3} \zeta$ , а постоянные распространения  $\Gamma$  удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\Gamma^3 + \delta \Gamma^2 + \frac{(2\pi I)^{1/3}}{2} \Gamma + 1 = 0 \quad (4)$$

( $\delta = (1 - B)/(2\pi I)^{1/3}$ ), которое для малого параметра  $I$  совпадает с аналогичным уравнением для ЛБВ [7–9]. Дополнительный член в этом уравнении указывает на наличие в убитроне кроме характерного для ЛБВ механизма усиления, вызванного группировкой электронов в тормозящей фазе поля, еще одного механизма. Этот дополнительный механизм обусловлен различием эффективности взаимодействия заторможенных и ускоренных электронов с волной, появляющимися в результате зависимости амплитуды осцилляций частиц от их энергии.

При наличии усиления в системе на достаточно большой длине  $\hat{\zeta}$  можно учитывать лишь ту волну, постоянная распространения которой ( $\Gamma_1$ ) имеет отрицательную мнимую часть, и записать поле в виде

$$A \approx A_{01} \exp(i\Gamma_1 \hat{\zeta}), \quad (5)$$

где  $A_{01} = \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3)[(\Gamma_1 - \Gamma_2)(\Gamma_3 - \Gamma_1)]^{-1}$ ,  $\Gamma_2, \Gamma_3$  — два других корня уравнения (4). Отметим, что решения уравнения (4) и характеристического уравнения для ЛБВ [7] практически совпадают вплоть до «токов»  $I \leq 1$ , а при больших токах для убитрона имеется решение с  $\text{Im } \Gamma_1 < 0$  в области расстройек  $|\delta| > 1,89$  (на рис. 1 между пунктирной и штрих-пунктирной кривыми).

Уравнения для усилительного убитрона типа «О», как и для всех приборов этого типа, в приближении слабого тока  $I \ll 1$ , когда изменение энергии электронов можно считать малыми  $|\mathcal{E} - 1| \ll 1$ , совпадают с уравнениями ЛБВ, причем величину  $I$  удается исключить из числа независимых параметров. Как известно [8], в этом приближении максимальный КПД достигается (при малых входных амплитудах) при значении параметра  $\delta$ , близком к 1,89, и составляет  $\eta \approx 3,7 I^{1/3}$ , что соответствует амплитуде поля на выходе  $A_k = \sqrt{4\pi\eta I} \approx 6,8 I^{2/3}$ . Оптимальная длина прибора при усилении в 20 дБ составляет  $\zeta_{20} \approx 3,8 I^{-1/3}$ , а при других коэффициентах усиления может быть с помощью (5) приближенно определена по формуле

$$\zeta_{20} = \frac{(2\pi I)^{-1/3}}{|\text{Im } \Gamma_1|} \ln \frac{A_k}{10A_{01}} + \zeta_{20}.$$

Численное интегрирование системы уравнений (1)–(3) при изменении параметра  $I$  в интервале  $10^{-3} \leq I \leq 10^3$  показало, что зависимость оптимальных (с точки зрения получения максимального КПД) параметров расстройки  $B$ , длины прибора (при коэффициенте усиления  $20 \text{ дБ}$ )  $z_{20 \text{ дБ}}$ , полосы усиления по уровню мощности  $0,5 \Delta B/B$  в убитроне весьма сходны с соответствующими зависимостями для ЛБВ (рис. 1). Сходной оказывается и зависимость КПД от длины прибора

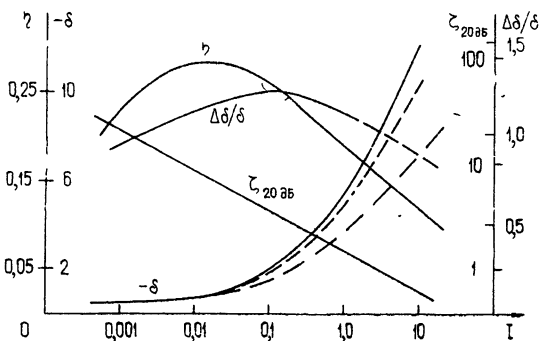


Рис. 1. Зависимость максимального КПД и оптимальных параметров от тока пучка. Для сравнения показаны границы области усиления (по расстройке), найденные в линейном приближении из уравнения (4) (пунктир) и путем численных расчетов (сплошная кривая) для убитрона и для ультрарелятивистской ЛБВ [7] (штрихпунктир).

(рис. 2). Лишь само значение максимального КПД,  $\eta \approx 28\%$  (при  $I = 10^{-2}$ ,  $B = 1,7$ ), оказывается несколько ниже, чем в приборах с прямо-

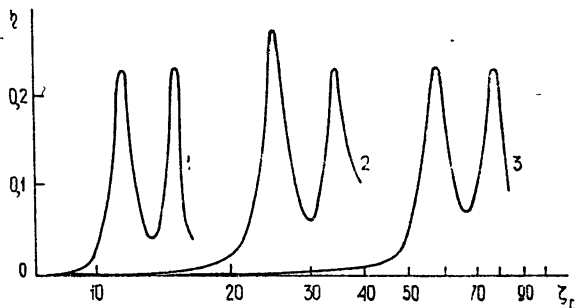


Рис. 2. Характерные зависимости КПД убитрона от длины пространства взаимодействия;  
1— $I = 0,1$ ,  $B = 2,5$ , 2— $I = 0,01$ ,  $B = 1,7$ ;  
3— $I = 0,001$ ,  $B = 1,35$ .

линейными пучками. Особенностью убитрона, проявляющейся при больших ( $I > 10^{-1}$ ) «токах», является также то, что максимум КПД может достигаться при расстройках  $\delta$ , далеких от границы области усиления, найденной из линейной теории. Так для «тока»  $I = 1$  КПД достигает своего наибольшего значения, равного  $19\%$ , при  $B \approx 3,5$  и остается почти постоянным вплоть до величины  $B \approx 5,5$ . При больших значениях расстройки усиление в приборе отсутствует\*.

Несколько отличным от приборов с прямолинейными пучками является и поведение оптимальных параметров убитронов типа «О» при изменении энергии пучка (в области  $\gamma \gg 1$ ). Как и в ЛБВ, оптимальная расстройка с ростом  $\gamma$  убывает пропорционально  $\gamma^{-2}$ , длина прибора (при заданном коэффициенте усиления) растет, как  $\gamma^2$ , эффектив-

\* Крестатронный режим усиления не рассматривается

ная напряженность поля убывает:  $E_{эфф}^{\omega} = k|\rho|E_0^{\omega} \sim \gamma^{-1}$ . В то же время, при постоянной напряженности фокусирующего поля, абсолютное значение поля  $E_0^{\omega}$  меняться не должно, что связано с уменьшением кривизны пучка  $k|\rho| \sim \gamma^{-1}$ . С этим же связана и иная, по сравнению с ЛБВ, зависимость параметра  $I$ , играющего в убитроне роль параметра Пирса, от энергии частиц. Из его определения следует, что для получения высокого КПД в приборе величина произведения амплитуды магнитного поля на сопротивление связи и на ток должна убывать пропорционально  $\sim \gamma^{-1}$ .

Таким образом, в убитроне с ультрарелятивистским электронным пучком возможно усиление СВЧ колебаний почти с такой же эффективностью, как и в ультрарелятивистской ЛБВ. Указанная возможность использовать (при наличии соответствующего входного сигнала) фокусирующие поля с периодом, значительно превышающим длину усиливаемых колебаний, позволяет надеяться на повышение мощности излучения в коротковолновой части СВЧ диапазона.

Авторы выражают благодарность М. И. Петелину за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. И. Петелин, А. В. Сморгонский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 2, 294 (1973).
- 2 Миллиметровые и субмиллиметровые волны, сб. статей, ч. III, ИЛ, М., 1959.
- 3 В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1333 (1967)
- 4 P. Smith, Proc. IEEE, **60**, № 4, 422 (1972) (перевод ТИИЭР, **60**, № 4, 106 (1972)).
- 5 И. Г. Зарницина, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 3, 459 (1975).
- 6 Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
- 7 Н. Ф. Ковалев, А. В. Сморгонский, Радиотехника и электроника, **20**, № 6, 1205 (1975).
- 8 Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, **2**, № 7, 883, ч. I, **2**, № 8, 1027, ч. II (1957).
- 9 Д. Ж. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
7 октября 1974 г.

#### THE THEORY OF UBITRON-„O“-TYPE AMPLIFIER WITH ULTRA-RELATIVISTIC ELECTRON BEAM

*M. A. Gorshkova, A. V. Smorgonskii*

The paper considers the possibility of using „O“-type ubitron amplifier with an ultrarelativistic electron beam to obtain electromagnetic oscillations at millimeter and submillimeter wavelengths. Optimal parameters are found: the length of interaction space, synchronism detuning, current and resistance of coupling at which the maximum efficiency 28% may be achieved. The dependences of optimal parameters on the beam energy are determined.



УДК 538.56

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА В ТЛЕЮЩЕМ РАЗРЯДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПОЛЫМ КАТОДОМ В ГЕЛИИ

*В. И. Қириченко, В. М. Ткаченко*

Исследована зависимость напряжения горения и характера продольного распределения тока в цилиндрическом полой катоде с одним и двумя анодами. Измерена зависимость глубины проникновения разряда в полость катода от давления газа и тока разряда.

Неравномерность распределения тока по поверхности полого катода была замечена давно и исследовалась рядом авторов [1-4]. Однако различия в физических условиях разряда и конфигурациях электродных систем, использовавшихся различными авторами, и, как правило, узость диапазона исследованных давлений не позволяют установить основные закономерности характера распределения тока от конструкции и размеров катодной полости, рода и давления газа. Кроме того, распределение тока в разряде с цилиндрическим полым катодом и двумя симметрично расположенными анодами не исследовано вовсе, хотя такая конструкция электродной системы наиболее пригодна для получения относительно однородной протяженной плазмы высокой концентрации, что важно для применений разряда с полым катодом в лазерной и сверхвысокочастотной технике [5].

Целью настоящей работы является исследование продольного распределения тока в тлеющем разряде с цилиндрическим полым катодом с одним и двумя анодами в широком диапазоне давлений, охватывающем как оптимальную так и переходные области, а также выяснение влияния на характер распределения длины катодной полости.

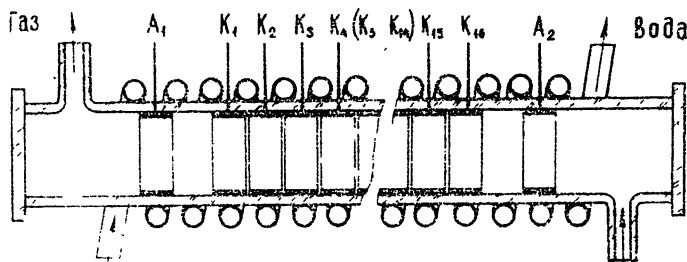


Рис 1.

Исследования проведены в разрядной трубке, конструкция которой изображена на рис. 1. Катод состоит из имеющих отдельные выходы 16 никелевых колец — секций диаметром 30 мм и длиной 15 мм. Анодами служили также же два кольца, расположенные по обе стороны катода на расстоянии 15 мм от его торцов. Катодные секции распо-

жены на расстоянии 0,5 мм друг от друга и плотно вставлены в стеклянную трубку, наружная поверхность которой охлаждалась водой, протекающей по змеевику из полихлорвиниловой трубки. Для улучшения теплоотвода змеевик залит эпоксидной смолой (на рисунке не показано), в результате чего в процессе измерений температура катода поддерживалась практически постоянной. Все измерения проведены в режиме непрерывного протекания через катодную полость гелия особой чистоты.

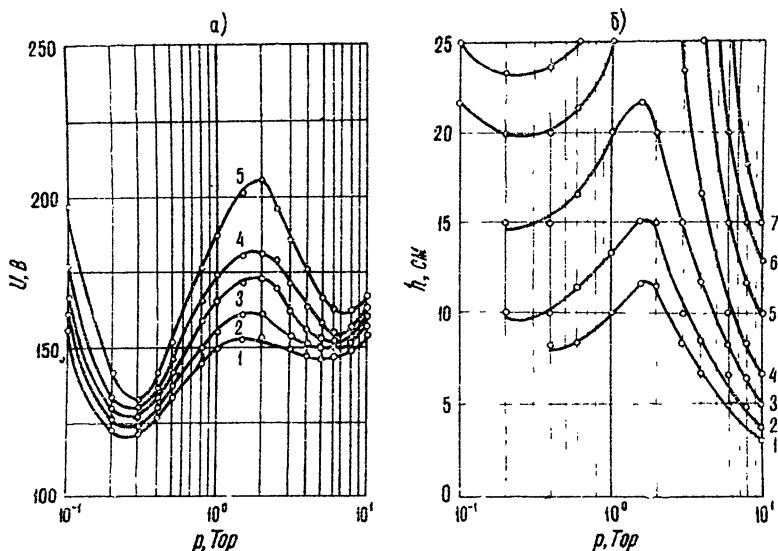


Рис. 2. а) Зависимость напряжения горения от давления. Ток разряда: 1—50 мА, 2—100 мА, 3—150 мА, 4—200 мА, 5—300 мА; б) зависимость глубины проникновения разряда от давления. Ток разряда: 1—3 мА, 2—5 мА, 3—10 мА, 4—25 мА, 5—50 мА, 6—75 мА, 7—100 мА.

На рис. 2а приведены зависимости напряжения горения разряда  $U$  от давления гелия  $p$  для фиксированных токов разряда  $I$  от 50 мА (кривая 1) до 300 мА (5) при подключенных всех секциях катода и двух анодах. Вид приведенных зависимостей  $U(p)$  характерен для разряда с полым катодом данной конструкции [6]. Как видно из рисунка, напряжение горения разряда минимально при давлении  $0,2 \div 0,3$  тор и составляет величину от 120 В для  $I = 50$  мА до 132 В для  $I = 300$  мА, что заметно ниже величины нормального катодного падения потенциала [7]. Напряжение горения разряда с одним анодом лишь ненамного больше, чем с двумя, однако, как будет показано ниже, распределение тока при этом изменяется значительно.

Область давлений, в которой наблюдается основное отличие разряда с полым катодом от линейного (с уменьшением давления напряжение горения также уменьшается), будем называть областью оптимальных давлений. Тогда верхняя граница области оптимальных давлений соответствует максимуму зависимости  $U(p)$  ( $1,5 \div 2$  тор в нашем случае), нижняя — минимуму ( $0,2 \div 0,3$  тор).

Распределение тока по длине катода изучено нами во всем диапазоне давлений гелия от 0,1 до 10 тор при использовании одного или двух анодов. Для примера на рис. 3 приведены такие распределения для одноанодной системы при трех характерных давлениях гелия:

0,3 тор (а), 2 тор (б) и 10 тор (в) и нескольких токах разряда. На графиках отложены токи на катодную секцию в зависимости от ее номера (подключенный анод находится у 1-ой секции). Видно, что распределение тока существенно неоднородно при всех давлениях гелия, однако характер его зависит от давления. При высоких давлениях газа максимальный ток отбирается от ближайшей к аноду секции, далее ток секции монотонно убывает. С понижением давления газа максимум отбираемого тока постепенно удаляется от анода и в области оптимальных давлений располагается на 3-й—4-й секции. Это обусловлено уменьшением эффективности ионизации в области, примыкающей к открытому торцу катодной полости, в результате ухода быстрых электронов к аноду.

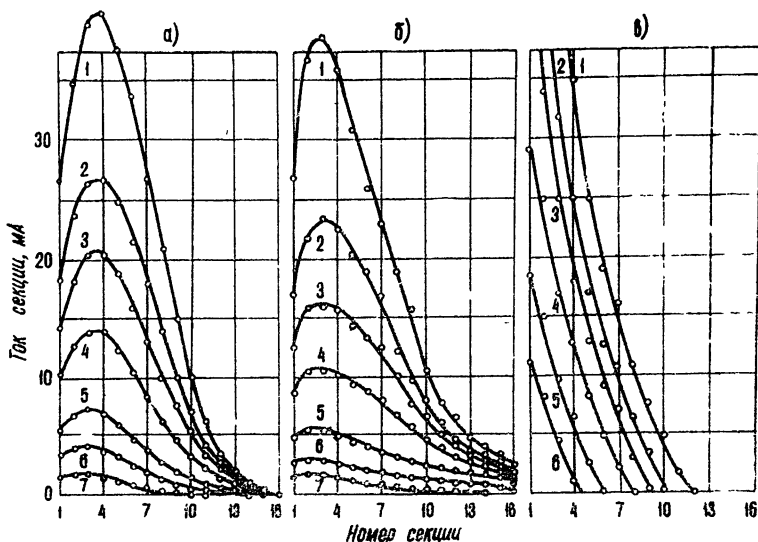


Рис. 3. Распределение тока вдоль катода (один анод).

а)  $p = 0,3$  тор, б)  $p = 2$  тор, в)  $p = 10$  тор. Ток разряда: 1—300 мА, 2—200 мА, 3—150 мА, 4—100 мА, 5—50 мА, 6—25 мА, 7—10 мА.

При малых токах в разряде участвует не вся поверхность катода, что позволило измерить глубину проникновения тока в полость катода в зависимости от давления газа и величины тока разряда (рис. 2б). Не участвующей в разряде считалась секция, ток разряда на которую составлял менее 1% величины тока секции в максимуме распределения. Видно, что в области давлений 0,3—2 тор свойства разряда с полным катодом прямо противоположны линейному разряду: с уменьшением давления площадь катода, участвующая в разряде, уменьшается. Это означает, что появляется некоторый процесс, препятствующий диффузии ионов вглубь катодной полости и расширению зоны разряда. Таким процессом может быть развитие при давлениях менее 2 тор колебательного движения электронов в поперечном сечении катодной полости.

Интересно проследить изменение распределения тока с укорочением длины полого катода. На рис. 4 приведены такие распределения для трех давлений газа и постоянного тока разряда. При давлениях 5—10 тор (рис. 4в) укорочение катода почти не изменяет характера распределения тока. В области же оптимальных давлений укорочение катода приводит к более равномерному распределению тока, а при давле-

дли 0,2 тор (рис 4а), начиная с длины катода 9 см, распределение становится почти симметричным.

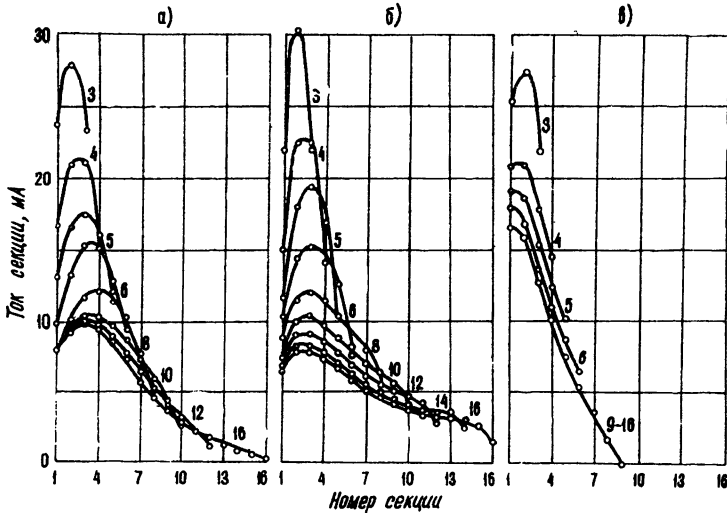


Рис. 4. Распределение тока при различной длине катода. Ток разряда 75 мА.

а)  $p=0,2$  тор, б)  $p=2$  тор, в)  $p=7$  тор. Цифры у кривых обозначают число подключенных секций.

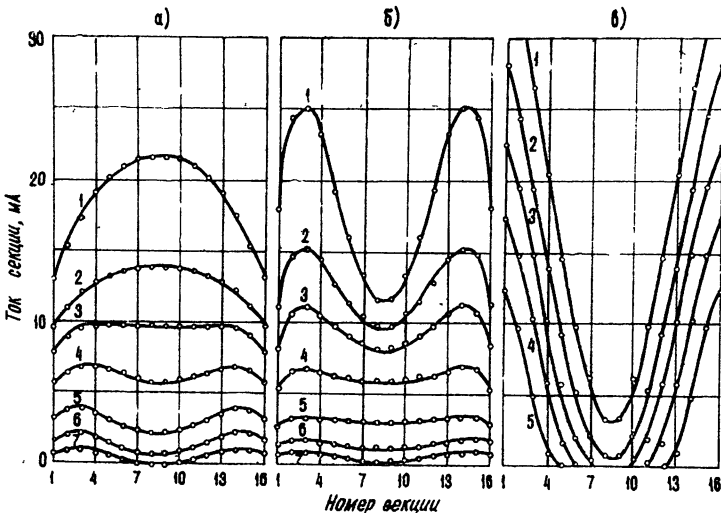


Рис. 5. Распределение тока вдоль катода (два анода).

а)  $p=0,2$  тор, б)  $p=2$  тор, в)  $p=10$  тор. Ток разряда: 1—300 мА, 2—200 мА, 3—150 мА, 4—100 мА, 5—50 мА, 6—25 мА, 7—10 мА.

Распределение тока по длине полого катода при подключении двух анодов изображено на рис. 5. Как видно из рисунка, распределение практически симметрично для всех давлений и токов разряда, однако для достижения этой симметрии аноды необходимо подключить к источнику напряжения через отдельные балластные сопротивления. Ес-

ли использовать общее балластное сопротивление, то распределение тока будет несимметричным, причем асимметрия наиболее выражена в области оптимальных давлений и возрастает с ростом разрядного тока. Таким образом, при использовании двух анодов при низких давлениях газа можно добиться практически равномерного распределения тока по длине катодной полости.

В области оптимальных давлений характер распределения сильно зависит от величины разрядного тока. Так при давлении 0,2 тор при малых токах разряда в центре катодной полости наблюдается минимум распределения тока, при больших — максимум. Кроме того, следует отметить, что распределение тока в разряде с двойным анодом не является арифметической суммой распределений одноанодных систем.

Из проведенного исследования можно сделать следующие выводы. Для выбранных размеров катода в диапазоне давлений гелия 0,3—2 тор при фиксированном токе разряда напряжение горения и площадь катода, участвующая в разряде, уменьшаются с понижением давления газа, а крутизна вольтамперных характеристик возрастает. Эти свойства прямо противоположны свойствам линейного разряда с плоским катодом и не могут быть объяснены существующими теориями тлеющего разряда.

Характер распределения тока по катоду является сложной функцией конфигурации электродной системы и размеров катода, давления газа и величины разрядного тока. Наиболее равномерное распределение тока по длине полого катода для гелия наблюдается вблизи минимума зависимости напряжения горения от давления газа при больших токах разряда и вблизи максимума — при малых. Для этого необходимо использовать в разряде два анода, симметрично расположенные относительно катода, и включать балластные сопротивления в цепь каждого из них.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. Lompe, R. Seeliger, E. Wolter, *Ann. der Phys.*, **36**, 9 (1939).
2. B. I. Moskalev, *Proc. 9-th Intern. Conf. on Phenomena Ionised Gases*, Bucharest, 166 (1969).
3. F. Noworka, M. Pahl, *Z. Naturforsch.*, **27a**, 1425 (1972).
4. Е. Т. Кучеренко, Е. В. Зыкова, Л. Н. Макосевская, *УФЖ*, **17**, 2063 (1972).
5. Б. И. Москалев, *Разряд с полым катодом*, изд. Энергия, М., 1969.
6. В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **16**, № 11, 1759 (1973).
7. В. Л. Грановский, *Электрический ток в газе. Установившийся ток*, изд. Наука, М., 1971.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 октября 1974 г.

#### INVESTIGATION OF LONGITUDINAL CURRENT DISTRIBUTION IN A GLOW-DISCHARGE WITH A CYLINDRICAL HOLLOW CATHODE IN HELIUM

V. I. Kirichenko, V. M. Tkachenko

We investigate the dependence of the arc voltage and the longitudinal current distribution in a cylindrical hollow cathode with one and two anodes. The dependence of the depth of penetration of the discharge in the cathode cavity on the gas pressure and discharge current is measured.

УДК 621.396.628 · 523.164

**МОДУЛЯЦИОННЫЕ РАДИОМЕТРЫ ДЕЦИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ИМПУЛЬСОВ  
СПОРАДИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ФОНА**

*С. К. Малышев, В. И. Морозов, Р. А. Самойлов, Б. К. Федянцеv, В. В. Хрулев,  
С. П. Чекалев, С. А. Шмудевич*

Исследования импульсов спорадического радиоизлучения фона [1—3] привели к необходимости разработки специальной радиометрической аппаратуры. В настоящей работе кратко описаны разработанные в НИРФИ радиометры на 290, 408 и 577 МГц, являющиеся базовыми при изготовлении радиометров на фиксированные частоты в диапазоне 100—600 МГц. На рис. 1 и 2 приведены блок-схема радиометров и электрическая схема ВЧ блока. Модулятор выполнен по параллельно-последовательной схеме на переключающих диодах 1А501Е. Двухкаскадный УВЧ собран на транзисторах ГТ329А с непосредственной связью между каскадами по схеме с общим эмиттером. Для температурной стабилизации во всех каскадах введена отрицательная обратная связь по постоянному току. Гетеродин собран на транзисторе ГТ329Г ( $T_{11}$ ) по трехточечной схеме с емкостной связью. Для точной подстройки частоты служит переменный конденсатор  $C_{44}$ . УПЧ собран по каскадной схеме общий эмиттер—общая база на транзисторах ГТ329А и ГТ329Г. Квадратичный детектор выполнен на диоде 2А201А. Для согласования высокого выходного сопротивления диода с низким входным сопротивлением блока НЧ применен иепоковый повторитель на кремниевом полевом транзисторе КП103И. Настройку УВЧ на заданную частоту  $\nu_c$  в диапазоне 100—600 МГц осуществляем путем изменения величины индуктивностей  $L_1—L_4$ . Конструктивно ВЧ блок выполнен в монолитном корпусе. Узлы ВЧ блока соединены между собой безразъемно, что позволило улучшить характеристики блока, сведя к минимуму количество соединений, являющихся источниками помех и вносящих дополнительные потери.

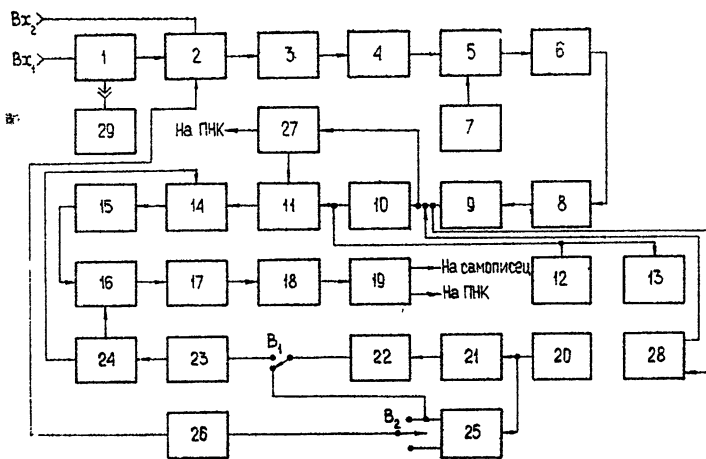


Рис. 1. Блок-схема радиометра:

1—направленный ответвитель, 2—модулятор, 3—циркулятор, 4—УВЧ, 5—смеситель, 6—ПУПЧ, 7—гетеродин, 8—УПЧ, 9—квадратичный детектор, 10—УНЧ, 11—индикатор перегрузки, 12—система звукового контроля, 14—синхронный фильтр, 15—усилитель, 16—синхронный детектор, 17—усилитель, 18—фильтр низких частот, 19—УПЧ, 20—мультипликатор, 21—жужащий мультипликатор, 22—триггер, 23—эмиттерный повторитель, 24—самопишущее устройство, 25—выходной каскад, 27—устройство автоматического переключения пределов измерения, 28—система стабилизации коэффициента усиления, 29—генератор шума Г2-32.



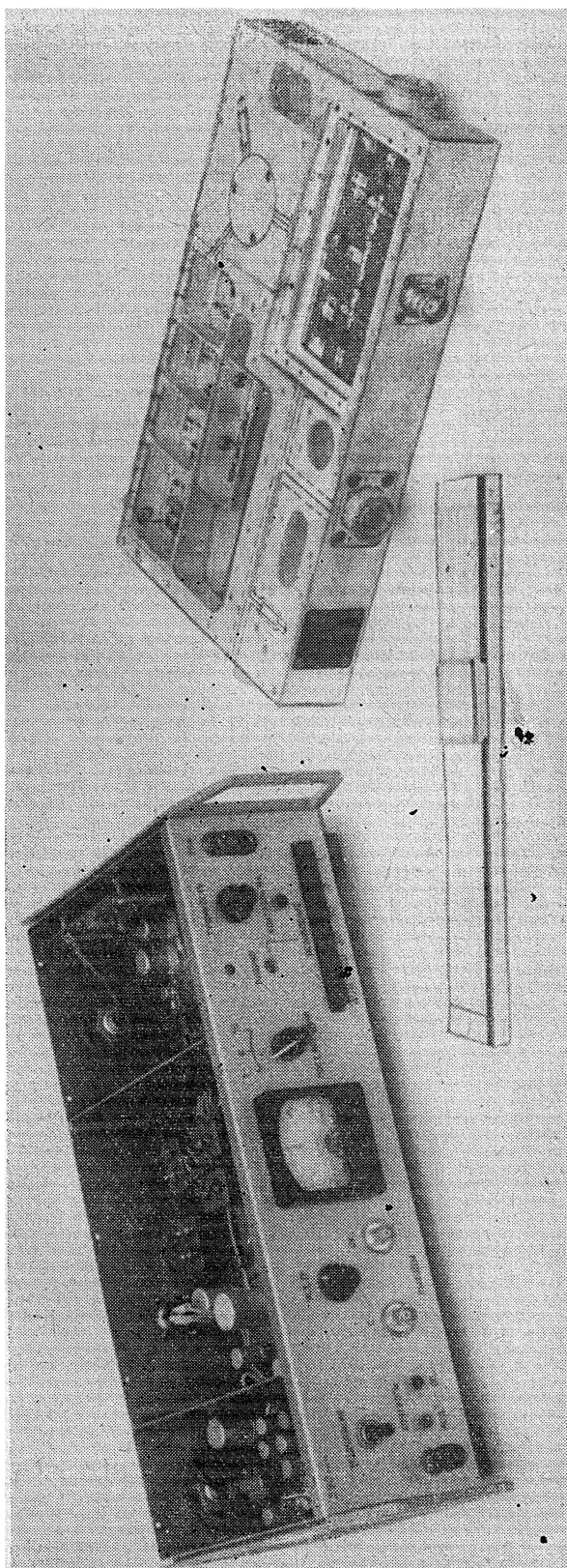


Рис. 3. Внешний вид радиометра.



В низкочастотном выходном устройстве радиометров применен предложенный Фрейтером в [4] и получивший широкое распространение в радиоастрономической аппаратуре синхронный интегратор. Усилитель НЧ выполнен широкополосным, с регулируемым коэффициентом усиления. Высокая временная и температурная стабильность коэффициента усиления УНЧ достигнута благодаря применению глубоких отрицательных обратных связей. Напряжение шума УНЧ, приведенное ко входу, во всей полосе не превышает 5 мкВ. Для фильтрации спектра модулированного меандром сигнала применен синхронный фильтр с гребенчатой частотной характеристикой. Синхронный фильтр выполнен по схеме емкостного накопителя с транзисторным коммутатором [5]. Выделение сигнала из шума и преобразование в постоянное напряжение осуществляется синхронным детектором. Высшие гармоники шумов отфильтровываются однозвенным фильтром нижних частот с изменяемой полосой пропускания  $\Delta\nu = (0,0625 - 4) \text{ Гц}$ . Частота модуляции 1 кГц. Изменение фазы модулирующего напряжения на  $180^\circ$  осуществляется путем переключения входа усилителя мощности к разным плечам триггера 1.

Устройство автоматического переключения пределов измерения обеспечивает ступенчатое изменение коэффициента усиления в интервале 0—30 дБ через 5 дБ. Сигнал с выхода квадратичного детектора одновременно поступает на вход УНЧ и схемы переключения пределов измерения, которая состоит из логарифмического усилителя [6], переключающих устройств, устройства регистрации и индикации. Время срабатывания исполнительных элементов  $\geq 3 \text{ мс}$ .

В НЧ блоке предусмотрена возможность подключения системы стабилизации коэффициента усиления. Использование этой системы весьма эффективно при работе на пунктах с плохой стабилизацией сети и значительными перепадами температуры окружающей среды. Рабочая характеристика системы линейна с уровня сигнала 30 мкВ. Динамический диапазон регулирования  $\leq 60 \text{ дБ}$ .

УНЧ собран на микросхемах К1УТ401А. Синхронный фильтр выполнен на резисторе  $R = 15 \text{ кОм}$ , зарядных конденсаторах  $C = 4,0 \text{ мкФ}$  и кремниевом интегральном прерывателе К1УТ011Б. УПТ выполнен на микросхемах К1УТ401А. Схема переключения пределов собрана на микросхемах К2УС244, 2УС261А, К1УТ401А, интегральных прерывателях КТ011Б и транзисторах КТ315А. Устройства индикации выполнены на светодиодах АЛ-102Б, а устройство регистрации коэффициента усиления радиометра — на транзисторах КТ312В, МП38 и реле РЭС 55А.

Разработанные радиометры испытывались в лабораторных условиях и на радиоастрономических станциях НИРФИ Зименки, Пустынь и Кара-Даг в течение 1972—1973 гг. при исследовании импульсов спорадического радионезлучения фона. Испытания проводились месячными циклами с круглосуточной работой без выключения аппаратуры. Отдельные узлы радиометров использовались в составе аппаратуры, предназначенной для исследований параметров антенн, радионезлучения Солнца и шумовых характеристик разрабатываемых параметрических усилителей дециметрового диапазона.

Характеристики радиометров следующие.

Флуктуационный порог чувствительности (при  $\tau = 1 \text{ с}$ ) —  $0,4^\circ\text{К}$ .

Динамический диапазон — 40 дБ.

Полоса пропускания УПЧ — 17 МГц.

Флуктуации коэффициента усиления за 20 часов работы  $\leq 3\%$ , за 1 час работы  $\leq 1\%$ .

Пределы изменения постоянной времени — 0,25; 1; 4 и 16 с.

Внешний вид радиометра представлен на рис 3

В заключение следует отметить, что разработанные радиометры входят в состав многоканального автоматизированного комплекса с малой ЭВМ и могут быть использованы для различных исследований.

Авторы выражают благодарность В. С. Троицкому за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, А. М. Стародубцев, Л. Н. Бондарь, Р. М. Зелинская, К. М. Стрежнева, М. С. Китай, А. И. Сергеева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 323 (1973).
2. W. N. Charman, J. V. Jelley, J. H. Frum, Nature, 228, № 5269, 346 (1970).
3. G. Zimmernann, Astron. J. Astrophys., 15, 433 (1971).
4. Р. Фрейтер, Приборы для научных исследований, 5 (1965).
5. Н. К. Игнатьев, Радиотехника, 11, № 9 (1956).
6. С. К. Малышев, В. В. Хрулев, С. П. Чекалев, С. А. Шмулевич, ПТЭ, № 6, 127 (1974).



напряжение гетеродина — в режиме противофазного возбуждения. Смеситель выполнен на парных разнополярных диодах Д405 З, БП Усилитель промежуточной частоты (УПЧ) ( $\nu_c = 100$  МГц,  $\Delta\nu = 30$  МГц,  $K_{yc} = 60$  дБ) собран на транзисторах ГТ329 А, Б и состоит из 5 каскадов (3 первых каскада собраны по каскадной схеме ОЭ-ОБ). Для согласования УПЧ со смесителем предусмотрен согласующий трансформатор. Коэффициент шума смесителя с УПЧ равен 8 дБ. Квадратичный детектор выполнен на диоде 2А201А по схеме параллельного включения. Низкочастотное устройство применяется унифицированное, описанное в работе [4]. Шумовая температура радиометра  $T_{шр} = 100$  К, основной вклад, равный примерно 50 К, дает входная пассивная цепь (модулятор, развязка, цепь калибровки). Для первичной обработки данных наблюдений используется малый исследовательский комплекс МИК-1М. В состав комплекса входит универсальная управляющая вычислительная машина УМ1-НХ-М [5], которая легко стыкуется с радиометрами. В состав УМ1-НХ-М входят 8-разрядный преобразователь напряжение-код ПНК, 5-разрядный преобразователь код-напряжение ПКН, а также 11-разрядный преобразователь угол-код ПУК. Все преобразователи 8-канальные. УМ1-НХ-М оперирует с 15-разрядными числами с фиксированной запятой. Для обеспечения автоматического режима проведения исследований разработан таймер, позволяющий вводить время в ЭВМ в течение 24 часов, через каждые 10 с. Разработанный БУЧС управляет частотой считывания информации с радиометра. В состав блока входят четыре генератора прямоугольных импульсов и устройство программного управления генераторами. Время переключения с одной частоты считывания на другую 600 мкс, а предельная частота считывания  $\nu_{пр} = 600$  Гц.

Нами разработаны оптимальные (с точки зрения времени обчета и точности вычислений) алгоритмы и программы ввода данных и первичной обработки [6]. Программы составлены в кодах машины. С целью повышения точности вычисления дисперсии  $\sigma_x^2$  и увеличения емкости пакета информации  $N$  разработаны программы, позволяющие оперировать с 28-разрядными двоичными числами с фиксированной запятой и увеличить  $N$  до  $2^{13}$ . Вывод информации осуществляется в десятичной и двоичной форме. Программы вывода оформлены в виде стандартных подпрограмм. Печать 9-разрядных десятичных чисел производится на ЭУМ-23ДП. Для вывода информации в двоичном коде разработано согласующее устройство, позволяющее регистрировать 14-разрядные числа на ленточный перфоратор ПЛУ-1М.

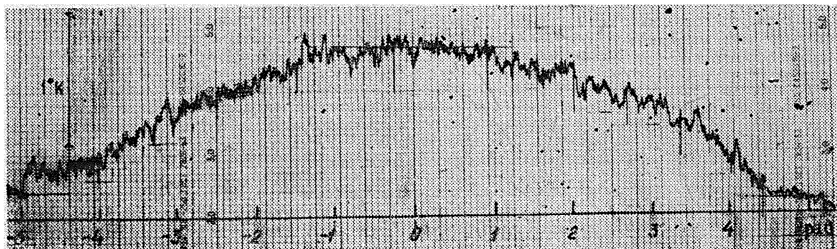


Рис. 2.

В октябре—ноябре 1973 г проводились испытания комплекса при измерении параметров малых антенн ( $D \leq 3$  м) с помощью космических радионисточников\*. Пример записи прохождения Кассиопеи-А через диаграмму направленности антенны ( $D = 2,6$  м) приведен на рис 2. Реализованы следующие параметры комплекса: флуктуационный порог чувствительности  $\delta T_{фл} = 0,04$  К при  $\tau = 1$  с (система обработки дополнительных шумов не вносит), флуктуации коэффициента усиления не превышают 0,5% за 2 часа работы, время, необходимое для обработки пакета из  $N = 2^7$  чисел и вывода на печать, много меньше 1 с (т. е. обработка данных производится в реальном времени).

Описанная система обработки в сочетании с универсальной ЭВМ позволяет проводить спектрально-корреляционный анализ флуктуационных процессов в полосе частот 0 — 300 Гц и исследовать процессы с временным разрешением 1,6 мс.

В заключение авторы выражают благодарность В. С. Троицкому за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, А. М. Стародубцев, Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, К. М. Стрежнева, М. С. Китай, А. М. Сергеева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 323 (1973)

\* По результатам измерений параметров малых антенн подготавливается отдельная статья.

2. С. Zimmerman, Astr. and Astrophys., 15, 433 (1971).
3. E. M. Verkhuijzen, Astr. and Astrophys., 14, № 3, 359 (1971).
4. С. К. Малышев, В. М. Морозов, Р. А. Самойлов, Б. К. Федянцев, В. В. Хрулев, С. П. Чекалев, С. А. Шмулевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 8, 1211 (1975).
5. Г. К. Круг, В. П. Бородюк, Ю. Б. Голяс, В. А. Кабанов, в сб. Идентификация и аппаратура для статистических исследований, изд. Наука, М., 1970, стр. 285.
6. В. М. Демарев, В. И. Пройдаков, В. В. Хрулев, С. П. Чекалев, ВИНТИ (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
23 мая 1974 г.

УДК 621.371.222

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН С БОЛЬШИМ ЗАМЕДЛЕНИЕМ ВДОЛЬ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

О. В. Багдасарян, В. А. Пермяков

Распространение поверхностных волн вдоль плазменного цилиндра рассматривалось в связи с диагностикой плазмы и изучением плазменных волноводов [1–5], причем наиболее детально была исследована симметричная ТМ волна [1, 2]. Однако трансцендентное уравнение для постоянной распространения поверхностной волны решалось в [1, 2] графически, что затруднило анализ области больших замедлений. В частности, в [2] утверждается, что поверхностная волна срывается при относительной проницаемости плазмы, равной  $\varepsilon \approx -1,15$ , в то время как в [1, 4, 5] указана граница срыва  $\varepsilon = -1$  (проницаемость внешнего пространства принята за единицу). В области срыва также весьма существенно влияние потерь в плазме, что (за исключением некоторых результатов [3]) не учитывалось при численном анализе.

В настоящей работе проведено аналитическое исследование фазовой скорости поверхностных симметричных и несимметричных волн в области больших замедлений. Следуя [6], запишем уравнение для продольной постоянной распространения поверхностной волны  $h$ .

$$\left( \frac{K'_n(pa)}{pa K_n(pa)} - \varepsilon \frac{I'_n(ga)}{ga I_n(ga)} \right) = n^2 \left( \frac{1}{(pa)^2} - \frac{1}{(ga)^2} \right) \left( \frac{1}{(pa)^2} - \frac{\varepsilon}{(ga)^2} \right) \times \left( \frac{K'_n(pa)}{pa K_n(pa)} - \frac{I'_n(ga)}{ga I_n(ga)} \right)^{-1}, \quad (1)$$

где  $p = \sqrt{h^2 - k^2}$ ,  $g = \sqrt{h^2 - k^2 \varepsilon}$  — поперечные постоянные распространения,  $k$  — волновое число внешнего пространства,  $a$  — радиус цилиндра,  $K_n(x)$ ,  $I_n(x)$  — модифицированные функции Бесселя. При  $n = 0$  правая часть уравнения (1) равна нулю, и оно переходит в уравнение для симметричной ТМ волны; при  $n \neq 0$  правая часть учитывает гибридный характер волн.

Предположим теперь, что  $ha \gg 1$ . Тогда уравнение (1) с помощью асимптотик модифицированных функций Бесселя для больших значений аргумента [7] преобразуется при  $h \gg k$  к виду

$$h^2 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{2a} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) h - \frac{4n^2 - 3}{8a^2} \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) - k^2 + O \left( \frac{n^2 - 1/4}{a^3 h} \right) = n^2 O \left( \frac{k^2}{a_1 h_1} \right), \quad (2)$$

О — оценка правой части уравнения (2) соответствует правой части (1), и, как следует из (2), ею можно пренебречь при больших замедлениях ( $h \rightarrow \infty$ ). Таким образом, уравнение (2), в пределах точности его левой части, соответствует ТМ волнам как при симметричном, так и при несимметричном возбуждении. Решение его имеет вид

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{4a} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} + \frac{1}{16a^2} \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right)^2 + \frac{4n^2 - 3}{8a^2}}, \quad (3)$$

где  $\alpha = ka$ . Если пренебречь в (3) членом  $(4n^2 - 3)/8\alpha^2$ , дающим малый вклад при  $n = \text{const}$  и  $\varepsilon \rightarrow -1-0$ , то (3) совпадает с постоянной распространения квазиверхностной волны над плазменным шаром [8, 9]. Поэтому основные выводы работы [8], касающиеся особенностей распространения квазиверхностной волны над шаром, переносятся на рассматриваемый случай. В частности, в области  $\alpha^{-2} \ll |1 + \varepsilon|$  совпадают постоянные распространения поверхностных волн над цилиндром и над плоской границей раздела плазма — вакуум:

$$\frac{h}{k} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (4)$$

В области  $\alpha^{-2} \gg |1 + \varepsilon|$  постоянная распространения поверхностной волны равна

$$\frac{h}{k} \approx \frac{1}{2\alpha} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} + \alpha + O\left(\frac{(n^2 - 3/4)(1 + \varepsilon)}{\alpha}\right) \quad (5)$$

и неограниченно растет при  $\varepsilon \rightarrow -1-0$ . Тем самым аналитически показано, что утверждение работы [2] о срыве волны при  $\varepsilon \approx -1,15$  неверно. Из (5) следует, что при  $\varepsilon \rightarrow -1-0$  и любых конечных, в том числе больших, радиусах фазовая скорость поверхностной волны на цилиндре качественно отличается от плоского случая.

Отметим теперь, что в отличие от шара и рассмотренной выше задачи фазовые скорости квазиверхностной волны, бегущей вдоль образующей цилиндра по угловой его координате, и поверхностной волны над плоскостью совпадают при  $\varepsilon \rightarrow -1-0$  [9-11]. Поэтому, сопоставляя зависимости фазовых скоростей волн в трех модельных задачах (1 — волна над шаром, 2 — азимутальная волна на цилиндре, 3 — аксиальная волна на цилиндре) с плоским случаем, можно сделать вывод, что аномальное отличие фазовой скорости квазиверхностной волны над плазменным шаром и поверхностной волны над цилиндром в области больших замедлений ( $\varepsilon \rightarrow -1-0$ ) от скорости волны над плоской границей обусловлено поперечной относительно направления распространения волны кривизной поверхности.

Обсудим более подробно границы применимости решения (3). Из  $O$ -оценок следует, что это решение пригодно при любых конечных радиусах цилиндра, если  $\varepsilon \rightarrow -1-0$ . Для малых (по сравнению с длиной волны во внешнем пространстве) радиусов цилиндра ( $\alpha \ll 1$ ) оно пригодно при условии  $|\varepsilon + 1| \ll 1$ . Для больших радиусов в соответствии с условием  $ka \gg 1$  оно справедливо при  $\varepsilon$ , удовлетворяющих условию  $-\alpha^2 \ll \varepsilon < -1$ . Выражение (3) сохраняет смысл и в случае среды с потерями, (если введение потерь не нарушает условия  $|ha| \gg 1$ ), достаточно лишь понимать в (3) под  $\varepsilon$  — комплексную диэлектрическую проницаемость плазмы.

Результаты настоящей работы могут быть полезны при интерпретации экспериментальных данных по диагностике плазмы с помощью поверхностных волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Schumann, Zeitschrift für Naturforsch, 5a, 181 (1950).
2. В. И. Зими́на, Сб трудов НТОРиЭ им А. С. Попова, 4, 180 (1959).
3. С. М. Левитский, Н. С. Баранчук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1078 (1961).
4. М. Хилд, С. Уортон, Микроволновая диагностика плазмы, АИ, М., 1968.
5. В. Е. Голант, Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы, изд. Наука, М., 1968.
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
7. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 2, изд. Наука, М., 1966.
8. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 8, 1265 (1968).
9. В. А. Пермяков, Аннотации докладов V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, ЛГУ, 1970, стр. 57.
10. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1894 (1972).
11. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

УДК 551.510.535

## О ВЛИЯНИИ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ИОНОСФЕРЕ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОРОТКИХ ВОЛН

В. И. Сажин, М. В. Тинин

Как показывают наблюдения, регулярность ионосферного профиля в реальных условиях имеет место только в грубом приближении, почти всегда в ионосфере имеются различного рода неоднородности ионизации. Влияние тонкой структуры ионосферы на картину распространения коротких радиоволн поэтому представляет несомненный интерес.

Результаты работы [1] говорят, что так называемые волнообразные ионосферные возмущения оказывают существенное влияние на расстоянии скачка. В [2] на примере двумерной изолированной неоднородности гауссовской формы, помещенной в параболический слой, показано, что в зависимости от положения неоднородности, возможно ее фокусирующее или дефокусирующее действие.

В данной работе приводятся результаты численного эксперимента по исследованию влияния волновых возмущений электронной концентрации на распространение коротких волн. Ионосферная модель задается следующим выражением:

$$\varepsilon = 1 - \varepsilon_1 \exp[-\alpha_1(z - z_1)^2] \{1 - \chi \sin(\beta x) \exp[-\alpha_2(z - z_2)^2]\}. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость, связанная с электронной концентрацией  $N$  соотношением  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 - Ne^2/\varepsilon_0 m \omega^2)$  ( $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $m$  и  $e$  — заряд и масса электрона,  $\omega$  — круговая рабочая частота);  $\varepsilon_1$ ,  $z_1$ ,  $\alpha_1$  характеризуют соответственно значение электронной концентрации в максимуме слоя ( $\varepsilon_1 = f_{кр}^2/f_{раб}^2$  — отношение квадратов критической и рабочей частот), высоту максимума, полутолщину слоя (под полутолщиной понимается расстояние от максимума до высоты, где электронная концентрация уменьшается в  $e$  раз) в отсутствие неоднородности. Параметры  $\chi$ ,  $\beta$ ,  $z_2$ ,  $\alpha_2$  определяют амплитуду возмущения, его длину волны, положение по высоте и скорости спада по  $z$ ,  $z = R - a$ ,  $\chi = a \cdot \theta$  ( $R$  и  $\theta$  — сферические координаты,  $a$  — радиус земли).

По программе [3] были рассчитаны на ЭВМ М 222 траектории и степень пространственного расхождения лучей (по отношению к свободному пространству) для следующих величин параметров (1):  $\varepsilon_1 = 0,3$ ,  $z_1 = 2,7$  (за единицу расстояния в расчетах бралось 100 км),  $\alpha_1 = 4$ ,  $\chi = 0,05$ ,  $\beta = 3$ ,  $\alpha_2 = 100$ . Вначале было исследовано изменение зависимости дальности распространения от угла падения на ионосферу  $D(\psi_0)$  при перемещении неоднородности по высоте (с шагом, равным 0,05). Результаты показали, что при значениях  $z_2$ , больших 2,6 и меньших 2,4, неоднородность не меняет форму кривой  $D(\psi_0)$ , которую она имеет в отсутствие неоднородности, а лишь незначительно сдвигает эту кривую. Сильное влияние на зависимость  $D(\psi_0)$  оказывает возмущение при значениях  $z_2$  в интервале от 2,4 до 2,6. Рис. 1 демонстрирует это влияние. Цифрами на кривых помечены соответствующие значения  $z_2$ , пунктиром на рисунке показана зависимость  $D(\psi_0)$  в отсутствие неоднородности. Из рисунка видно, что кривые имеют область неоднозначности по  $\psi_0$ . Это означает, что в точку наблюдения, лежащую в интервале расстояний, соответствующем этой области, приходят 4 луча с разными значениями угла падения  $\psi_0$ , что приводит к формированию сложной интерференционной картины на Земле. Интервал расстояний, в котором имеет место эта многолучевость, изменяется с изменением  $z_2$ ; наибольшую величину он имеет при  $z_2 = 2,45$ .

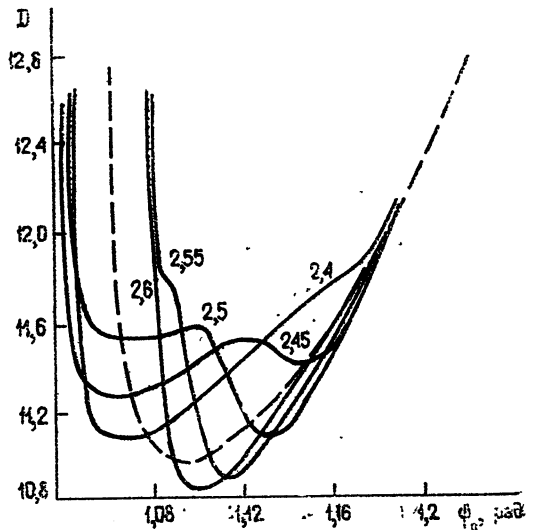


Рис. 1. Зависимости дальности траекторий лучей от угла падения на ионосферу для различных значений  $z_2$ .

Анализ показал, что это значение  $z_2$  соответствует уровню слияния высот отражения верхнего и нижнего лучей. Таким образом, неоднородность, расположенная в окрестности этого уровня, наиболее сильно возмущает зависимость  $D(\psi_0)$ , расщепляя верхний и нижний лучи.

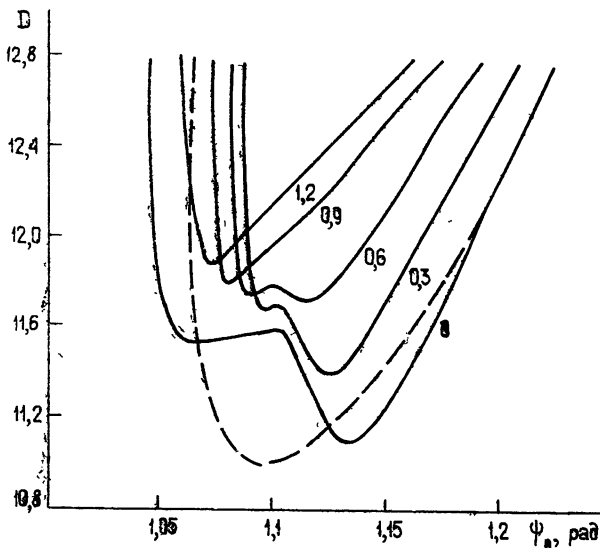


Рис. 2. Зависимости дальности траекторий лучей от угла падения на ионосферу при различных значениях фазы волны возмущения.

Затем положение передатчика на земной поверхности менялось в интервале от 0 до 120 км. Кривые  $D(\psi_0)$ , полученные в этом случае, при  $z_2 = 2,5$  показаны на рис. 2. Видно, что с изменением фазы волны возмущения (что происходит при перемещении передатчика) картина меняется, и существующая вначале область неоднозначности по  $\psi_0$  постепенно исчезает. Цифрами на кривых отмечено положение передатчика относительно исходной точки, пунктиром показана зависимость  $D(\psi_0)$  при  $\alpha = 0$ .

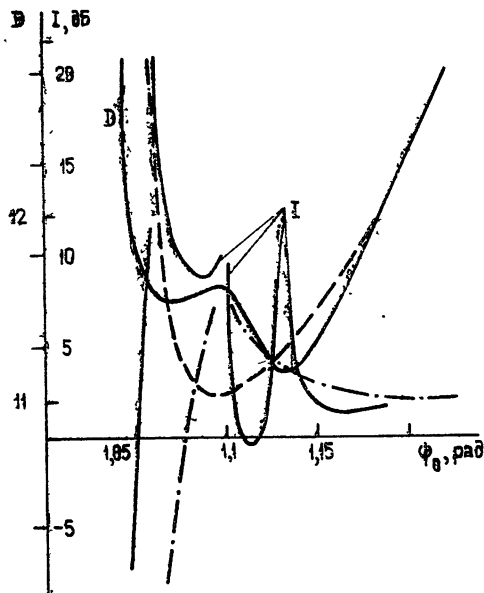


Рис. 3. Зависимость пространственного расхождения лучей от угла падения.

Наличие возмущения приводит к изменению пространственной картины лучей, в результате чего меняется амплитуда поля. Отношение  $I$  — амплитуды, вычисленной для начального положения передатчика при  $z_2 = 2,5$ , к амплитуде поля при распространении в свободном пространстве, в зависимости от  $\psi_0$ , показано на рис. 3. На нем же нанесена зависимость  $D(\psi_0)$  для этого случая. Для сравнения на рисунке показаны зависимости  $I(\psi_0)$  (штрих-пунктирная линия) и  $D(\psi_0)$  (пунктирная линия) в отсутствие возмущения. Видно, что наличие неоднородности приводит к появлению на кривой  $I(\psi_0)$  трех интересных областей, совпадающих с экстремумами кривой  $D(\psi_0)$ . При значениях  $\psi_0$ , соответствующих этим областям, имеет место значительная фокусировка, неограниченно возрастающая в точках экстремума  $D(\psi_0)$ . Сильное ослабление при малых углах падения, близких к критическому, соответствует верхним лучам.

Таким образом, волновые возмущения электронной концентрации существенно влияют на распространение коротких волн, приводя к появлению сложной картины поля на Земле. Степень влияния сильно зависит от высоты возмущения и фазы его волны. Приведенные результаты говорят о необходимости учета влияния волновых возмущений на практике.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Нургожин, Б. В. Троицкий, сб Исследования распространения коротких радиоволн, изд. Наука, М., 1973, стр. 90.
2. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Краткие тексты докладов, книга 1, Ереван, 1973, стр. 234.
3. В. И. Сагин, М. В. Тинин, Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца, вып. 35, изд. Наука, М., 1975, стр. 82.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию  
19 августа 1974 г.

УДК 533.951

### РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВИРТУАЛЬНОЙ ВОЛНЫ С ЭЛЕКТРОНАМИ НА АНОМАЛЬНОЙ ДОППЛЕРОВСКОЙ ЧАСТОТЕ

*Е. С. Боровицкая*

Процесс нелинейной трансформации волн на электронах плазмы можно наглядно описать, используя понятие усредненной высокочастотной силы, действующей на заряженную частицу [1]. Так, в магнитоактивной плазме, находящейся в поле двух электромагнитных волн

$$E = E_1 \exp(i\omega_1 t - ih_1 r) + E_2 \exp(i\omega_2 t - ih_2 r)$$

с близкими  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$  частотами, усредненная по периодам парциальных колебаний сила, действующая на электрон, оказывается потенциальной,

$$F = -\nabla\Phi,$$

и имеет структуру бегущей волны

$$\Phi = \frac{e^2 E_1 E_2}{2m} \chi \exp(i\Omega t - ikr). \quad (1)$$

Здесь  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ ,  $k = h_1 - h_2$ ,

$$\chi = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{a_{x1} a_{x2}^* + a_{y1} a_{y2}^*}{\omega_H^2 - \omega_2^2} - i \frac{\omega_H}{\omega_1} \frac{a_{x1} a_{y2}^* - a_{y1} a_{x2}^*}{\omega_H^2 - \omega_2^2} - \frac{a_{z1} a_{z2}^*}{\omega_1 \omega_2} \right),$$

$a_{ij}$  — компоненты векторов поляризации [2] в системе координат с осями  $x^0 \perp y^0 \perp z^0$ ,  $z^0 \parallel H_0$  (в настоящей работе используются обозначения, принятые в [1]).

Существенно, что усредненная сила, действующая на частицы, обладает как продольной, так и поперечной составляющими относительно статического магнитного поля  $H_0$ . В частном случае, когда продольная фазовая скорость виртуальной волны (1) близка к скорости  $v$  электронов, движущихся вдоль  $H_0$ ,

$$\Omega/k_{\parallel} \approx v$$

( $k_{\parallel} = k H_0 / H_0$ ), то существенное влияние на их движение оказывает лишь продольная составляющая поля виртуальной волны. При этом, если электронный поток является моноэнергетическим и изолированным в пространстве скоростей, одна из волн оказывается нарастающей [1].

Естественно предположить, что усиление одной из электромагнитных волн возможно и при взаимодействии моноэнергетического прямолинейного электронного потока



с поперечной составляющей виртуальной волны, если выполнено условие излучения электронов в области аномальных доплеровских частот [3, 4]:

$$\Omega \approx \alpha_{\parallel} v - \omega_H. \quad (2)$$

Для этого необходимо, чтобы скорость электронов была больше продольной фазовой скорости виртуальной волны. Данная работа посвящена доказательству этого предположения.

Воспользуемся уравнениями для энергий  $W_{1,2}$  взаимодействующих электромагнитных волн [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= -\frac{\omega_1}{\Omega} Q, \\ \frac{dW_2}{dt} &= \frac{\omega_2}{\Omega} Q, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Q$  — мощность, диссипируемая высокочастотным полем в плазме. Если плазма является разреженной ( $\omega_p \ll \omega_H$ ), то

$$Q = \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{2} \right)^2 \sum \alpha_j \alpha_l \operatorname{Re} \sigma_{ij}.$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора проводимости. Считая, что начальные энергии волн удовлетворяют соотношению  $W_1^{(0)} \gg W_2^{(0)}$ , линеаризуем уравнения (3) и будем характеризовать процесс рассеяния инкрементом слабой волны:

$$\gamma = \frac{\omega_2}{\Omega} \frac{Q(\gamma)}{W_2}.$$

При резонансном условии (2) в выражении для  $Q$  достаточно учесть лишь слабые с индексами, обозначающими направления, перпендикулярные магнитному полю. Соответственно для максимального инкремента слабой волны  $E_2$  получаем

$$\gamma^2 = \frac{\pi I_0 \eta^3 E_1^2 h_2^2 (a_y^2 + a_x^2)}{8v\omega_1^2 (\omega_1 - h_1 v - \omega_H)^2 (\alpha_{\parallel} v - \Omega)} > 0.$$

Волна, как и ожидалось, является нарастающей.

Специфика данной разновидности индуцированного рассеяния волн на электродах при циклотронном резонансе (по сравнению со случаем циклотронного резонанса в области нормального эффекта Доплера [1]) заключается в том, что торможение электронов и увеличение суммарной энергии взаимодействующих волн имеют место, даже если электроны в исходном состоянии не обладают вращательной скоростью.

Автор выражает благодарность М. И. Петелину за руководство работой и А. Г. Литваку за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ, 62, № 1, 228 (1972).
2. В. В. Шафранов, в сб. Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, 1964.
3. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Докл. АН СССР, 56, № 6, 583 (1947).
4. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 1, 14 (1959).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию  
25 марта 1974 г.,  
после доработки  
23 декабря 1974 г.

УДК 538 576 23

### К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Б. С. Абрамович, А. И. Дятлов

Имеется значительное число работ, посвященных распространению волн в одномерных консервативных случайно-неоднородных средах. Как показано в работах [1–3], при исследовании одномерного волнового стохастического уравнения целесообразно изучать коэффициент отражения волны, который удовлетворяет обыкновенному

дифференциальному уравнению первого порядка и при определенных условиях является марковским случайным процессом. При больших размерах рассеивающей области необходимо учитывать диссипацию в среде, которая может существенно изменить характер рассеяния [4, 5]. В настоящем сообщении на основе анализа диффузионного уравнения исследуется поведение коэффициента отражения плоской электромагнитной волны от нерегулярного слабо поглощающего слоя.

Рассмотрим неоднородный слой  $(0, L)$  с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + i\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon(z)$  ( $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$ ,  $\langle \Delta\varepsilon^2 \rangle \ll \varepsilon_0^2$ ,  $\langle \Delta\varepsilon \rangle = 0$ ). Предполагаем, что функция  $\Delta\varepsilon(z)$  на отрезке  $z \in [0, L]$  является однородным случайным процессом, а диэлектрическая проницаемость однородной среды вне слоя равна  $\varepsilon_0$ . Пусть справа на слой падает плоская гармоническая волна единичной амплитуды  $E_0 = e^{ikz}$  ( $k = k_0 \sqrt{\varepsilon_0}$ ,  $k_0 = \omega/c$ ). Из уравнения для поля  $E_x = E$  волны  $E'' + k_0^2 \varepsilon(z) E = 0$ , полагая  $E = P(z) e^{ikz} + Q(z) e^{-ikz}$ , легко получить нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для коэффициента отражения  $R(z) = Q/P$ :

$$\frac{dR}{dz} = -2\gamma R + \frac{k_0 \Delta\varepsilon(z)}{2i \sqrt{\varepsilon_0}} (Re^{-ikz} + e^{ikz})^2, \quad (1)$$

где  $\gamma = k_0 \varepsilon_1 / 2 \sqrt{\varepsilon_0}$  — декремент затухания в однородном слое. Коэффициент отражения  $R(z)$  учитывает эффекты объемного рассеяния в слое. Коэффициент отражения от слоя  $A$ , учитывающий и отражение на границе, связан с  $R$  соотношением

$$A = \frac{R_L + R_1}{1 + R_L R_1^*}. \quad (2)$$

Здесь  $R_L$  — решение уравнения (1) при  $z = L$  с начальным условием  $R(z=0) = R_0$ ,  $R_{0,1} \approx \pm i\varepsilon_1 / 2\varepsilon_0$ .

Если выполнены условия  $kl \langle \Delta\varepsilon^2 \rangle / 4\varepsilon_0 \ll 1$  при  $kl \ll 1$  и  $(kl)^2 \langle \Delta\varepsilon^2 \rangle / 4\varepsilon_0^2 \ll 1$ ,  $\gamma l \ll 1$  при  $kl \gg 1$ , то случайный процесс  $R = \rho e^{i\varphi}$  будет диффузионным, и для плотности вероятности  $W(\rho, \varphi, z)$  можно, используя (1), написать уравнение Эйнштейна—Фоккера (ср с [6]):

$$4 \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho^2)^2 W + \frac{2\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 W) + \left[ \frac{4(\beta + 2)}{\beta} + \frac{(1 - \rho^2)^2}{\rho^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}, \quad (3)$$

где  $\alpha = \gamma / 2D$ . Здесь  $W(\rho, \varphi, \tau)$  определена таким образом, что вероятность  $\Delta P$  величинам  $\rho$  и  $\varphi$  попасть в интервалы  $[\rho, \rho + d\rho]$ ,  $[\varphi + \varphi + d\varphi]$  при фиксированном  $\tau$  определяется формулой  $\Delta P = W \rho d\rho d\varphi$ ,  $\tau = Dz$ ,  $D = \beta \frac{k_0^2 l}{4} \frac{\langle \Delta\varepsilon^2 \rangle}{\varepsilon_0}$ . Величина  $\beta$  определяет эффективность обратного рассеяния [4]:

$$\beta = \begin{cases} 1 & (kl \ll 1) \\ \Phi(2kl) & (kl \gg 1) \end{cases}$$

где  $\Phi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(z) e^{iqz} dz$ ,  $\Gamma(z)$  — нормированная корреляционная функция величины

$\Delta\varepsilon(z)$ . Параметр  $\alpha$  характеризует относительную роль эффектов объемного рассеяния и диссипации в слое. Заметим, что так как  $\beta \ll 1$  при  $kl \gg 1$ , то диссипация в крупномасштабной среде играет большую роль, чем в мелкомасштабной.

Начальное распределение зададим в виде  $W(\rho, \varphi, \tau = 0) = \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} \delta(\varphi - \varphi_0)$ ,

где  $\rho_0 = |R_0|$  и  $\varphi_0 = \arg R_0$ . Нетрудно убедиться из (3) в том, что уже при  $\tau \geq \frac{\beta}{2(\beta + 4)}$  фазу коэффициента отражения можно считать равномерно распределенной. Поэтому мы исследуем функцию распределения модуля коэффициента отражения  $W(\rho, \tau)$ , для которой из (3) легко получить уравнение

$$4 \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho^2)^2 W + \frac{2\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 W) \quad (4)$$

с начальным условием  $W(\rho, 0) = \delta(\rho - \rho_0) / \rho$ . Диффузионное уравнение (4) допускает стационарное решение  $W_0(\rho)$ , для которого, учитывая условия нормировки и отсутствия потока вероятности через границы области  $[0, 1]$ , получаем

$$W_0(\rho) = 2\alpha \frac{\exp[-\alpha\rho^2/(1-\rho^2)]}{(1-\rho^2)^2}. \quad (5)$$

График функции  $\rho W_0(\rho)$  при различных значениях параметра  $\alpha$  изображен на рис. 1. Из (6) следует, что если рассеяние преобладает над поглощением ( $\alpha \ll 1$ ), то  $\rho W_0 \sim \delta(1-\rho)$ ; в обратном случае ( $\alpha \gg 1$ ) имеем  $\rho W_0 \sim \delta(\rho)$ . Характерный оптический путь  $\tau_c$ , на котором устанавливается стационарное распределение (5), легко оценить из (4):  $\tau_c \sim \tau_0/(1+\alpha\tau_0)$ , где  $\tau_0$  — характерный путь установления в непоглощающей среде\*. Таким образом, если оптическая толщина слоя  $\tau_L > \tau_c > \frac{\beta}{2(\beta+4)}$ , то поведение

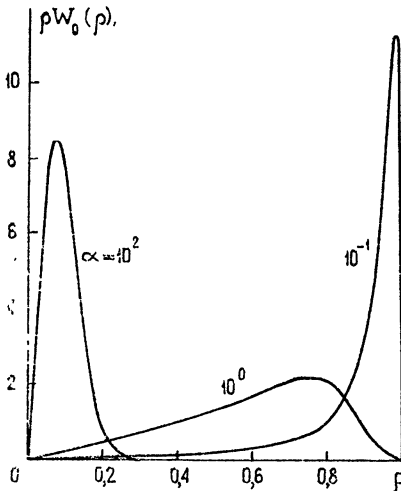


Рис. 1.

коэффициента отражения описывается функцией распределения

$$W(\rho, \varphi, \tau) = \frac{W_0(\rho)}{2\pi}. \quad (6)$$

Если же слой «тонкий»,  $\tau_L < \tau_c$ , то для характеристик коэффициента отражения справедливы результаты [2, 3, 6].

Используем (6) для определения интенсивности отраженной волны  $I = \langle A^2 \rangle$ . Усредняя (2) с помощью (6), после несложных преобразований получаем

$$I = 1 + \alpha e^\alpha (1 + 2\rho_1^2 + \alpha\rho_1^2) E_1(-\alpha) + \rho_1^2(2 + \alpha), \quad (7)$$

где  $E_1(x)$  — интегральная показательная функция,  $\rho_1 = |R_1| \ll 1$ . Из (7) следует, что достаточно толстый слой ( $\tau_L > \tau_c$ ), в котором рассеяние преобладает над диссипацией

( $\alpha \ll 1$ ), практически полностью отражает энергию падающей волны в виде энергии рассеянного поля  $I \approx 1 + \alpha \ln \alpha$ , что согласуется с результатом работы [3]. При  $\alpha \gg 1$  толстый слой отражает очень мало  $I \approx \frac{1}{\alpha} + \rho_1^2$ . Последнее связано с тем, что при  $\alpha \gg 1$  волна не успевает эффективно рассеиваться из-за быстрого поглощения.

Выражаем благодарность В. И. Беспалову и Ю. А. Рыжову за постановку задачи и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Герценштейн, В. Б. Васильев, Радиотехника и электроника, 4, 611 (1959).
2. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 5, 711 (1959).
3. Ю. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 8, 1240 (1973).
4. В. Н. Тутубалин, Теория вероятности и ее применение, 14, 577 (1969).
5. М. Х. Захар-Иткин, Теория вероятности и ее применение, 18, 290 (1973).
6. Ю. А. Рыжов, Тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, т. 1, Ереван, 1973.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
4 декабря 1974 г

\* При отсутствии диссипации стационарным является распределение  $W_{cr} = \delta(1-\rho)$ , которое, как следует из численных расчетов [2], устанавливается за  $\tau = \tau_0 \sim 5$ .



**АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ СКИБАРКО**

(1910—1975)

20 марта 1975 года после продолжительной болезни скончался член редакционной коллегии «Радиофизики» профессор Алексей Петрович СКИБАРКО.

А. П. Скибарко был непосредственным участником становления и развития отечественной радиопромышленности, научных исследований в области радиотехники и радиофизики и радиотехнического образования.

А. П. Скибарко родился в 1910 г. в семье участкового агронома. После окончания в 1934 г. аспирантуры Научно-исследовательского института физики при Московском университете он работал в промышленных предприятиях, где прошел путь от рядового инженера до директора предприятия. В 1935—52 гг. А. П. Скибарко работал в Горьком и с 1952 г. до конца жизни—в Москве.

Работу в промышленности А. П. Скибарко постоянно совмещал с преподавательской деятельностью. В Горьком он в 1937—1945 гг. читал ряд лекционных курсов в Политехническом институте, а с 1945 г. стал заведующим кафедрой радиотехники на радиофизическом факультете Горьковского университета. С 1953 г. А. П. Скибарко преподавал в Московском авиационном институте, где с 1960 г. он заведовал кафедрой приемно-усилительных устройств.

Заслуги Алексея Петровича Скибарко были высоко оценены Родиной. Он был награжден двумя Орденами Ленина, Орденом Красной звезды и медалями. Ему дважды (в 1949 и 1958 гг.) была присуждена Государственная премия.

Свои обширные знания и свой талант Алексей Петрович щедро отдавал всегда окружавшим его сотрудникам и ученикам. Высокие моральные качества, светлый ум и глубокие знания, организаторский талант, умение поддержать и развить новое всегда привлекали к Алексею Петровичу молодежь.

Таким он и сохранится в нашей памяти.

**Товарищи по работе и сотрудники.**