

УДК 621.371.24 : 535.2

ЧАСТОТНЫЕ СПЕКТРЫ СЛУЧАЙНЫХ СМЕЩЕНИЙ СВЕТОВОГО ПУЧКА В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

В. Л. Миронов, В. В. Носов

В приближении марковского случайного процесса с использованием гипотезы замороженности Тейлора проведено исследование временных частотных спектров поперечных смещений светового пучка в приземном слое атмосферы в зависимости от дифракционного размера излучающей апертуры, параметров фокусировки излучения и величины внешнего масштаба турбулентности. Показано, что частоты, превышающие характерную частоту смещений пучка, определяемую радиусом излучающей апертуры и поперечной к направлению трассы компонентой скорости ветра, практически не вносят вклада в спектр смещений. При конечном внешнем масштабе турбулентности значение спектральной плотности на нулевой частоте ограничено.

В связи с использованием пространственно-ограниченных световых пучков в атмосфере для целей связи и локации вызывает интерес вопрос о флуктуациях пространственного положения пучка. Анализ дисперсии и пространственной корреляции случайных смещений пучка посвящено значительное количество теоретических и экспериментальных работ. Однако эти характеристики описывают исследуемое явление не полностью. В ряде приложений необходимы сведения о спектральном составе флуктуаций положения пучка. В настоящей работе в марковском приближении [1, 2] с использованием гипотезы замороженной турбулентности рассчитаны временные частотные спектры поперечных смещений светового пучка в приземном слое атмосферы.

Будем описывать распространение оптического излучения в приближении скалярного параболического уравнения

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} u(x, \rho, t) + \Delta_{\rho} u(x, \rho, t) + k^2 \varepsilon_1(x, \rho, t) u(x, \rho, t) = 0, \quad (1)$$

где $x, \rho \{y, z\}$ — соответственно продольная и поперечные координаты, t — время, $\varepsilon_1(x, \rho, t)$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости среды, $\varepsilon_1 = \varepsilon - \langle \varepsilon \rangle$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Положение светового пучка принято характеризовать координатой центра тяжести распределения интенсивности

$$\rho_c(x, t) = \rho_0^{-1} \int d\rho \rho I(x, \rho, t), \quad (2)$$

где $I(x, \rho, t) = u(x, \rho, t) u^*(x, \rho, t)$ — реализация случайного поля интенсивности в плоскости $x = \text{const}$ в момент времени t , $\rho_0 = \int d\rho I(x, \rho, t)$ — полный поток интенсивности в пучке. Корреляционная функция смещений пучка во времени, согласно (2), представляется в виде

$$R_c(x, t, t') = \rho_0^{-2} \int d\rho_1 \int d\rho_2 \rho_1 \rho_2 \langle I(x, \rho_1, t) I(x, \rho_2, t') \rangle. \quad (3)$$

Второй момент интенсивности в (3) $\langle I(x, \rho_1, t) I(x, \rho_2, t') \rangle$ описывается пространственно-временной функцией когерентности четвертого

порядка, для которой, используя уравнение (1) и применяя к однородному и стационарному полю $\varepsilon_1(x, \rho, t)$ гипотезу замороженности Тейлора, аналогично [3], можно получить замкнутое уравнение. Применяя найденное для функций когерентности уравнение и проводя преобразования, подобные [4], соотношение (3) представим в форме

$$R_c(x, t, t') = \frac{\pi}{4\rho_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \int dr \Delta_r H(r - v(t - t')) \times \quad (4)$$

$$\times \int dR \langle I(\xi, R + r/2, t) I(\xi, R - r/2, t') \rangle,$$

где $H(\rho) = 2 \int d\mathbf{x} (1 - \cos \mathbf{x}\rho) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$, $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ — трехмерный спектр флуктуаций поля ε_1 , v — поперечная к направлению распространения составляющая скорости ветра.

Строгое аналитическое выражение для момента $\langle I(\xi, R + r/2, t) \times I(\xi, R - r/2, t') \rangle$ неизвестно. Применим в выражении (4) для величины $\langle I(\xi, R + r/2, t) I(\xi, R - r/2, t') \rangle$ приближение, аналогичное предложенному в [1]:

$$\langle I(x, R + r/2, t) I(x, R - r/2, t') \rangle \approx \langle I(x, R + r/2, 0) \rangle \langle I(x, R - r/2, 0) \rangle. \quad (5)$$

В этом случае, как видно из [1], представление (4) обладает существенными преимуществами перед исходным соотношением (3). Так же, как это сделано в работе [5], можно показать, что при расчете временной корреляционной функции $R_c(x, t, t')$ приближение (5) не вносит значительной ошибки в результат.

С учетом соотношения (5) выражение (4) примет вид

$$R_c(x, \tau) = \frac{\pi}{2\rho_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \int dr \int dR \langle I(\xi, R + r/2, 0) \rangle \times \quad (6)$$

$$\times \langle I(\xi, R - r/2, 0) \rangle \int d\mathbf{x} \mathbf{x}^2 \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \cos \mathbf{x}(r - v\tau),$$

где $\tau = t - t'$.

Будем рассматривать гауссов пучок, имеющий в плоскости $x = 0$ распределение поля вида

$$u_0(\rho) = u_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} - \frac{ik\rho^2}{2F}\right),$$

где a — начальный радиус пучка, F — радиус кривизны фазового фронта в центре излучающей апертуры. Для средней интенсивности такого пучка в работе [5] получено выражение

$$\langle I(x, R, 0) \rangle = \frac{u_0^2 a^2}{a_{\text{эфф}}^2(x)} \exp\left(-\frac{R^2}{a_{\text{эфф}}^2(x)}\right). \quad (7)$$

В формуле (7)

$$a_{\text{эфф}}^2(x) = a^2 q(x) = a^2 [(1 - x/F)^2 + \Omega^{-2} + 8\sigma_0^{12/5} \Omega^{-1}] \quad (8)$$

— квадрат эффективного радиуса пучка на расстоянии x , $\sigma_0^2 = 0,077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}$ — средний квадрат флуктуаций уровня амплитуды плоской волны в первом приближении метода плавных возмущений, C_ε^2 — структурная постоянная флуктуаций поля ε_1 , $\Omega = ka^2/x$ — число Френеля для передающей апертуры.

Подставляя в (6) соотношение (7) и интегрируя по r и R , для корреляционной функции $R_c(x, \tau)$ будем иметь

$$R_c(x, \tau) = \frac{\pi}{2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \int d\kappa \kappa^2 \Phi_\varepsilon(x) \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2 \Phi_\varepsilon(\xi)}{2} - i\kappa v \tau\right). \quad (9)$$

Сравнивая выражение (9) с приведенной в [5] формулой для пространственной корреляционной функции $B_c(x, \rho)$ смещений разнесенных на вектор ρ параллельных пучков, можно заметить, что в рамках рассматриваемого приближения справедливо равенство

$$R_c(x, \tau) = B_c(x, v\tau).$$

Отмеченная в ряде работ [5-8] существенная зависимость функции $B_c(x, \rho)$ от поведения спектра $\Phi_\varepsilon(x)$ в энергетическом интервале хорошо описывается [8] модельным представлением спектральной плотности атмосферной турбулентности вида

$$\Phi_\varepsilon(x) = A_0 C_\varepsilon^2 x^{-11/3} \left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\right], \quad (10)$$

где $A_0 = 0,033$, $x_0 = 2\pi/L_0$ — волновое число, соответствующее внешнему масштабу турбулентных образований L_0 .

Используя в выражении (9) формулу (10) и интегрируя по κ , для функции $R_c(x, \tau)$ получим

$$R_c(x, \tau) = \sigma_c^2 \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \left\{ q^{-1/6}(\xi x) {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1; -\frac{v^2 \tau^2}{2a^2} q^{-1}(\xi x)\right) - [q(\xi x) + \beta]^{-1/6} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1; -\frac{v^2 \tau^2}{2a^2} [q(\xi x) + \beta]^{-1}\right) \right\}, \quad (11)$$

где $\sigma_c^2 = 1,29 C_\varepsilon^2 x^3 (2a)^{-1/3}$, $\beta = 2/x_0^2 a^2$, ${}_1F_1(\alpha, \gamma; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Интересующий нас частотный спектр смещений пучка связан с временной корреляционной функцией $R_c(x, \tau)$ известным соотношением

$$\omega_c(x, f) = 4 \int_0^\infty d\tau \cos(2\pi f \tau) R_c(x, \tau). \quad (12)$$

Подставляя в выражение (12) функцию (11) и вычисляя интеграл по τ , для $\omega_c(x, f)$ будем иметь

$$\omega_c(x, f) = f^{-1} \sigma_c^2 \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \left\{ c_1 E^{1/3} \left[{}_1F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}; -E^2 q(\xi x)\right) - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}; -E^2 [q(\xi x) + \beta]\right) \right] - c_2 E \left[q^{1/3}(\xi x) {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; -E^2 q(\xi x)\right) - (q(\xi x) + \beta)^{1/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; -E^2 [q(\xi x) + \beta]\right) \right] \right\}, \quad (13)$$

где $E = f/f_0$ — безразмерная частота, $f_0 = v/a\pi\sqrt{2}$ — характерная частота смещений пучка, $c_1 = \alpha_0 \Gamma(1/3) \Gamma^{-1}(5/6)$, $c_2 = -\alpha_0 \Gamma(-1/3) \Gamma^{-1}(1/2)$, $\alpha_0 = 2\pi^{-1/2} \Gamma^{-1}(1/6)$. В дальнейшем будем рассматривать безразмерную нормированную функцию спектральной плотности

$$G(E) = \frac{f \omega_c(x, f)}{R_c(x, 0)}. \quad (14)$$

При выполнении условий

$$E^2 q(x) \ll 1, \quad E^2 \beta \ll 1, \quad (15)$$

удерживая первые члены разложения гипергеометрической функции в степенной ряд, для $G(E)$ можно получить асимптотическую формулу:

$$G(E) = \frac{\sigma_c^2 c_2 E}{R_c(x, 0)} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \{ [q(\xi x) + \beta]^{1/3} - q^{1/3}(\xi x) \}. \quad (16)$$

Из соотношения (16) следует, что в низкочастотной области, где выполняются условия (15), функция $G(E)$ с увеличением частоты E растет линейно. Это означает, что при конечном внешнем масштабе турбулентности ($\beta \neq \infty$) значение спектральной плотности $\omega_c(x, f)$ на нулевой частоте ограничено.

При замене неравенств (15) на противоположные, используя асимптотическое представление функции ${}_1F_1$, для $G(E)$ будем иметь

$$G(E) = \frac{\sigma_c^2 \alpha_0 E^{-2\beta}}{R_c(x, 0)} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \{ q^{-1/2}(\xi x) \exp[-E^2 q(\xi x)] - [q(\xi x) + \beta]^{-1/2} \exp[-E^2 (q(\xi x) + \beta)] \}. \quad (17)$$

В выражениях (16), (17) возникают различные ситуации в зависимости от значений параметров x/F , Ω , σ_0 .

При расчетах коэффициента пространственной корреляции смещений с использованием функции $B_c(x, \rho)$ было показано [5], что в случае коллимированных ($x/F = 0$) и расходящихся ($x/F < 0$) световых пучков для интересных в практическом отношении трасс ($0 < \sigma_0^2 \leq 100$) можно пользоваться приближением

$$q(x) = (1 - x/F)^2 + \Omega^{-2}.$$

При этом максимальное изменение уровня корреляции при варьировании σ_0^2 наблюдалось в промежуточной зоне дифракции ($\Omega = 1$). На рис. 1 изображена функция нормированного частотного спектра смещений $G(E)$ для коллимированного ($x/F = 0$) пучка в промежуточной зоне дифракции ($\Omega = 1$), полученная численным интегрированием по формулам (11), (13), (14), в зависимости от величины параметра σ_0 ($\beta = 10^3$; $I - \sigma_0 = 0$, $2 - \sigma_0 = 3$, $3 - \sigma_0 = 10$, $4 - \sigma_0 = 33$). Отсюда видно, что изменение нормированного спектра $G(E)$ при увеличении σ_0 оказывается несущественным. Учитывая последнее обстоятельство и считая в дальнейшем $\beta \gg 1$, что соответствует реальным приземным трассам, исследуем поведение функции $G(E)$ в высокочастотной области при $\sigma_0 = 0$.

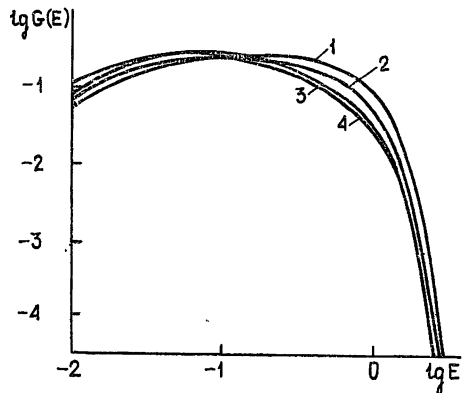


Рис. 1.

В ближней зоне дифракции ($\Omega \gg 1$) для коллимированного пучка ($x/F = 0$) из соотношения (17) находим

$$G(E) = \frac{\alpha_0 E^{-2/3}}{1 - \beta^{-1/6}} \exp(-E^2). \quad (18)$$

Фокусировка излучения ($x/F = 1$) для частот $E \gg 1$, $E^2 \Omega^{-2} \ll 1$ приводит к степенному закону уменьшения уровня $G(E)$, описываемому полученной из (11), (13), (14) приближенной формулой

$$G(E) = \frac{0,077 E^{-8/3}}{\frac{3}{8} - \frac{1}{3} \beta^{-1/6}}. \quad (19)$$

При дальнейшем увеличении частоты, в области $E^2 \Omega^{-2} \gg 1$, характер убывания $G(E)$ меняется. Из выражения (17) в этом случае получим

$$G(E) = \frac{\alpha_0 E^{-8/3}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \beta^{-1/6}} \exp(-E^2 \Omega^{-2}). \quad (19a)$$

Как следует из соотношений (18) и (19), (19a), в ближней зоне дифракции поведение функции $G(E)$ в высокочастотной области существенно зависит от условий фокусировки пучка.

В дальней зоне дифракции ($\Omega \ll 1$) при $\beta \Omega^2 \ll 1$, $\beta \gg 1$ из выражения (17) для $G(E)$ имеем

$$G(E) = \frac{\alpha_0 \Gamma(1/6)}{3 \Gamma(2/3)} \beta^{-1/3} E^{-5/3} \exp(-E^2).$$

В случае коллимированного пучка функция $G(E)$, вычисленная по формулам (11), (13), (14), для различных значений β и Ω при $\varepsilon_0 = 0$ приведена на рис. 2 (а) $\Omega = 10^2$, б) $\Omega = 10^0$, в) $\Omega = 10^{-2}$; 1— $\beta = 10^5$, 2— $\beta = 10^3$, 3— $\beta = 10^2$, 4— $\beta = 10^0$; пунктирные кривые, полученные по формуле

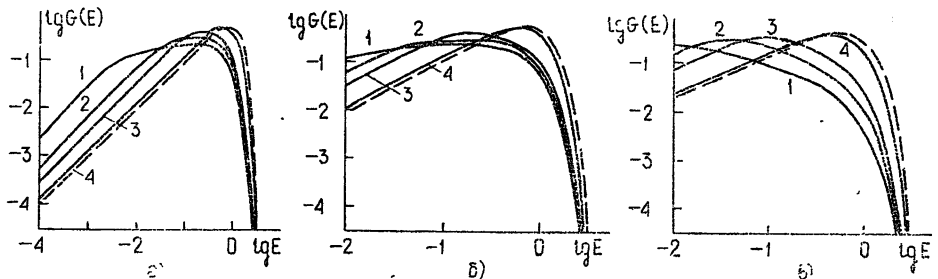


Рис. 2.

(20), соответствующую значению $\beta = 0$. Переход в дальнюю зону дифракции приводит к смещению максимума нормированной спектральной плотности в область более низких частот. При $\beta \gg 1$ низкочастотная область функции $G(E)$ имеет два характерных участка роста. При увеличении размера передающей апертуры, по сравнению с внешним масштабом турбулентности, область линейной асимптотики (16) расширяется. Дальнейшее уменьшение параметра β практически не сказывается на поведении функции $G(E)$. Предельная кривая при $\beta = 0$ имеет четко выраженный максимум на характерной частоте смещений пучка $E \approx 1$. Аналитическое выражение для нее следует из соотношений (11), (13), (14):

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} G(E) = \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \left[\frac{c_1 E^{7/3}}{4} {}_1F_1 \left(\frac{7}{6}, \frac{5}{3}; -E^2 q(\xi x) \right) + \right. \\ \left. + \frac{c_2 E}{3} q^{-2/3}(\xi x) {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; -E^2 q(\xi x) \right) - \frac{3c_2 E^3}{8} q^{1/3}(\xi x) \times \right. \\ \left. \times {}_1F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}; -E^2 q(\xi x) \right) \right] \left[\frac{1}{6} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 q^{-7/6}(\xi x) \right]^{-1}. \quad (20)$$

Зависимость функции $G(E)$ от условий фокусировки излучения иллюстрируется рис. 3 ($\sigma_0 = 0$; $\Omega = 10^2$; $I - \beta = 10^3$; $II - \beta = 10^0$). Расфокусировка излучения смещает максимум нормированной спектральной плотности в сторону более низких частот.

Характерной особенностью полученных спектральных плотностей является их экспоненциальное убывание в области $E \gg 1$. Это означает, что частоты, превышающие характерную частоту f_0 , практически не вносят вклада в спектр смещений световых пучков. Исключение составляет сфокусированный пучок ($x/F = 1$, $\Omega \gg 1$).

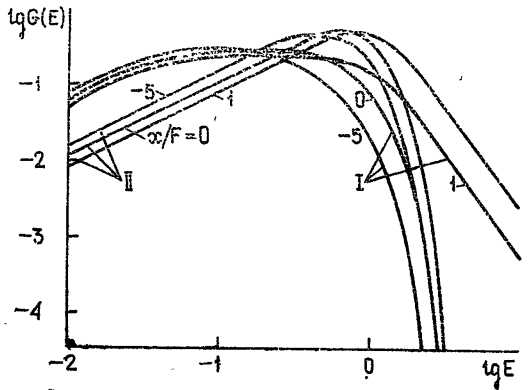


Рис. 3.

На рис. 4 представлена функция $G(E)$ для сфокусированного пучка ($x/F = 1$, $\Omega = 10^2$) при различных значениях σ_0 ($I - \beta = 10^3$, $II - \beta = 10^0$). Увеличение параметра σ_0 приводит к более быстрому, по сравнению

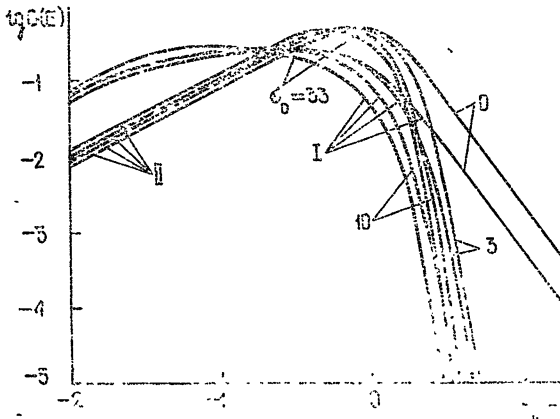


Рис. 4.

со степенным законом (19), убыванию функции $G(E)$ в области высоких частот. Если учесть, что при значении $\sigma_0 = 3$ эффективный размер пучка по средней интенсивности (8) приблизительно совпадает с радиусом излучающей апертуры, то, как видно из рис. 1, степенная высокочастотная асимптотика спектра справедлива при условии $a_{\text{эфф}}(x) \ll a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 9, 1331 (1972).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
3. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2106 (1969).
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
5. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 10, 1501 (1974).
6. Э. И. Гельфер, А. И. Кон, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 245 (1973).
7. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов, II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения, Краткие тексты докладов, г. Томск, 1973.
8. В. Л. Миронов, В. В. Носов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 247 (1974).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
25 марта 1974 г.

FREQUENCY SPECTRA OF RANDOM DISPLACEMENTS OF A LIGHT
BEAM IN THE ATMOSPHERIC LAYER NEAR THE EARTH

V. L. Mironov, V. V. Nosov

The time frequency spectra of transverse displacements of a light beam in the atmospheric layer near the Earth as a function of diffraction size of a radiating aperture, radiation focusing parameters and external scale of turbulence have been investigated in the approximation of a Markovian random process using the Taylor frozen hypothesis. It is shown that the frequencies which exceed the characteristic shift frequency of a beam defined by the radius of a radiating aperture and by the wind velocity component transverse to the trace direction do not practically contribute to the spectral displacement. For a finite outer scale of turbulence the spectral density at the zero frequency is limited.
