ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 7 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 621.391.82

СРЕДНЕЕ ЧИСЛО И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЭКСТРЕМУМОВ СУММЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ И НОРМАЛЬНОГО ШУМА

Ю. И. Провоторов

Рассмотрены задачи определения математического ожидания числа экстремумов на интервале времени $[0, T]$ и плотности распределения модуля экстремумов суммы гармонического колебания с постоянной или случайной начальной фазой и нормального стационарного дифференцируемого процесса. Для указанных задач получены точные решения. Зависимости среднего числа экстремумов (максимумов) и плотности распределения модуля экстремумов рассчитаны на ЭВМ, составлены таблицы и построены графики. Для случаев узкополосного и широкополосного шумов приводятся достаточно точные и простые аналитические формулы плотности распределения модуля экстремумов. Найденная статистика экстремумов может быть использована при синтезе устройств цифровой обработки сигналов.

Одной из важнейших характеристик выбросов случайных процессов является распределение экстремумов (максимумов и минимумов) стационарных случайных процессов [1]. В настоящей работе определяются статистические свойства экстремумов одного практически важного класса случайных процессов.

Первым этапом является отыскание среднего числа экстремальных точек в интервале $[0, T]$ процесса

$$z(t) = s(t) + \xi(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — нормальный стационарный случайный процесс с нулевым средним и четырежды дифференцируемой в нуле корреляционной функцией, $s(t) = A_m \sin(\omega_s t + \theta)$ — периодическая дифференцируемая функция, начальная фаза θ которой может быть постоянной или случайной; в последнем случае θ считается равномерно распределенной на интервале $[0, 2\pi]$. Очевидно, что среднее число экстремумов $z(t)$ равно полному среднему числу выбросов производной $\dot z(t)$ за нулевой уровень.

Пусть $W(z_1, z_2, t)$ — совместная плотность распределения $z_1 = \dot z(t)$ и $z_2 = \ddot z(t)$ в совпадающие моменты времени t. Предположим сначала, что начальная фаза θ фиксирована. Тогда среднее число экстремумов периодически нестационарного с периодом $T_s = 2\pi/\omega_s$ случайного процесса на интервале $[0, T]$ равно [1]

$$N_{\text{ext}}(z_1 = 0, T) = \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{\infty} |z_2| W(z_1 = 0, z_2, t) dz_2 dt. \tag{2}$$

В силу статистической симметрии процесса $z(t)$ относительно нулевого уровня, среднее число экстремумов $N_{\text{ext}}(z_1 = 0, T)$ можно определить также выражением

$$N_{\text{ext}}(z_1 = 0, T) = 2N_{\min}(z_1 = 0, T) = 2\int\limits_0^T \int\limits_0^{\infty} z_2 W(z_1 = 0, z_2, t) dz_2 dt. \tag{3}$$

Известно [1], что процессы $\dot{\xi}(t)$ и $\ddot{\xi}(t)$ независимы в совпадающие моменты времени t. Поэтому для совместного распределения z_1 и z_2 можем записать:

$$W(z_1, z_2, t) = (2\pi\sigma_1\sigma_2)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sigma_1^{-2}(z_1-\dot{s}(t))^2 + \sigma_2^{-2}(z_2-\ddot{s}(t))^2\right]\right\}, \tag{4}$$

где $\sigma_1^2 = (\sigma_0\omega_0)^2$ — дисперсия первой производной $\dot{\xi}(t)$, $\sigma_2^2 = \frac{(\sigma_0\omega_0^2)^2}{1-\varepsilon^2}$ — дисперсия второй производной $\ddot{\xi}(t)$, σ_0^2 — дисперсия процесса $\xi(t)$, $\varepsilon = \sqrt{1-(\omega_0/\omega_1)^2}$ — параметр, характеризующий относительную среднеквадратичную ширину энергетического спектра процесса $\xi(t)$ [2], $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, ω_0 и ω_1 — среднеквадратичные частоты $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ соответственно,

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \omega_s A_m \cos(\omega_s t + \theta), \\ \ddot{s}(t) &= -\omega_s^2 A_m \sin(\omega_s t + \theta). \end{aligned} \tag{5}$$

Для получения выражения среднего числа экстремумов $N_{\text{ext}}(z_1 = 0, T)$ целесообразно вычислить с учетом (4) внутренний интеграл $I(t)$ в (3). Используя для вычисления $I(t)$ табличный интеграл [3] и опуская довольно громоздкие, хотя и не сложные аналитические преобразования, приведем конечный результат:

$$\begin{aligned} I(t) = \int_0^\infty z_2 W(z_1 = 0, z_2, t) dz_2 = \frac{\omega_0}{2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}} \varphi\Bigg[-q^2\gamma\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}} \sin(\omega_s t + {} \\ + \theta)\Bigg] \exp\left\{-\frac{1}{2}[q\gamma\cos(\omega_s t + \theta)]^2\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varphi(x) = \exp(-x^2) + \sqrt{\pi}\, x(1+\Phi(x))$ — монотонно возрастающая функция x, $\Phi(x)$ — табличная функция ошибок:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$\gamma = A_m/\sigma_0$ — отношение сигнал/шум, $q = \omega_s/\omega_0 = f_s/N_1^+(0)$ — отношение частоты сигнала $s(t)$ к среднему числу «положительных» нулей шума $\xi(t)$ в единицу времени.

Из (3) и (6) видно, что в общем случае среднее число экстремумов $z(t)$ зависит от выбора значения начальной фазы θ. Если выбрать T кратным периоду гармонического колебания, $T = T_s = 2\pi/\omega_s$, то зависимость N_{ext} от θ устраняется и

$$N_{\text{ext}}(0, T_s) = \frac{1}{q\pi\sqrt{1-\varepsilon^4}} \int_0^{2\pi} \varphi\left(-q^2\gamma\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}} \sin\psi\right) \exp\left[-\frac{1}{2}(q\gamma\cos\psi)^2\right] d\psi. \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда начальная фаза θ — случайная, равномерно распределенная в интервале $[0, 2\pi]$. Теперь случайный процесс $z(t)$ будет стационарным, но не нормальным, а для вычисления $N_{\text{ext}}(z_1 = 0, T)$ нужно усреднить (3) по θ с плотностью $W(\theta) = 1/2\pi$.

Если в (6) выполнить сначала интегрирование по θ, сделать замену переменной θ на $\psi = \omega_s t + \theta$ и учесть периодичность подынтегрального выражения и затем положить $T = T_s$, то придем к формуле (7). Следовательно, формула (7) определяет среднее число экстремумов суммы гармонического и нормального стационарного шума за время T_s как при постоянной, так и при случайной начальной фазе θ.

Представляет интерес выяснить соотношение между средним числом нулей и средним числом экстремумов процесса $z(t)$ на периоде сигнала T_s. Для этого подставим в (7) выражение для $\varphi(x)$ и почленным интегрированием получим

$$N_{\mathrm{ext}}(0, T_s) = \frac{2}{q\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[e^{-\alpha} I_0(\beta) + \frac{\gamma^2 q^4(1-\varepsilon^2)}{2\alpha} Ie\left(\frac{\beta}{\alpha}, \alpha\right)\right], \tag{8}$$

где

$$\alpha = \frac{(\gamma q)^2}{4}\,[1 + q^2(1-\varepsilon^2)], \qquad \beta = \frac{(\gamma q)^2}{4}[1 - q^2(1-\varepsilon^2)], \tag{9}$$

$I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $Ie(\pm k, y) = \int\limits_0^y e^{-u} I_0(ku)\,du$ — специальный интеграл, введенный в работе [4].

Применительно к узкополосному шуму $\xi(t)$ ($\varepsilon \to 0$), когда $\rho = \omega_s/\omega_0 \approx$ формула (8) упрощается и

$$N_{\mathrm{ext}}(0, T_s) = N_1(0) T_s \left[e^{-\alpha} I_0(\beta) + \frac{\gamma^2 q^4}{2\alpha} Ie\left(\frac{\beta}{\alpha}, \alpha\right)\right], \tag{10}$$

где α и β определяются в (9) при $\varepsilon = 0$, $N_1(0)$ — полное среднее число нулей узкополосного шума $\xi(t)$ в единицу времени. Таким образом, среднее число нулей [1] и экстремумов узкополосного процесса $z(t)$ совпадают.

В отсутствие сигнала ($\gamma = 0$) из (8) находим выражение для среднего числа экстремумов шума $\xi(t)$ в единицу времени:

$$N_{\mathrm{ext}_1}(0) = \frac{N_{\mathrm{ext}}(0, T_s)}{T_s} = N_1(0)/\sqrt{1-\varepsilon^2}. \tag{11}$$

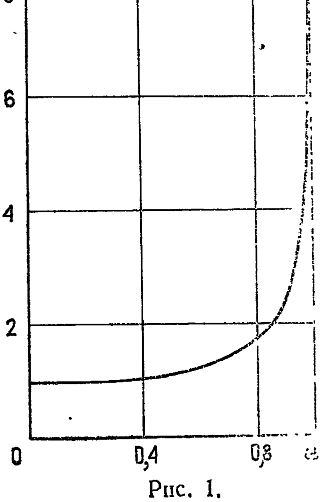

Рис. 1.

Из (11) и рис. 1, где приведена зависимость отношения $N_{\mathrm{ext}_1}(0)/N_1(0)$ от относительной среднеквадратичной ширины энергетического спектра шума $\xi(t)$, видно, что точное совпадение средних чисел нулей и экстремумов шума $\xi(t)$ достигается только при очень узком ($\varepsilon = 0$) энергетическом спектре $\xi(t)$, т. е. когда на любом «квазипериоде» шума имеется не более двух экстремумов.

Перейдем к нахождению плотности распределения модуля экстремумов процесса $z(t)$. Путь решения задачи состоит в следующем. В силу статистической симметрии выборок процесса $z(t)$ в нулях его первой производной ($\dot z(t) = 0$), для отыскания распределения модуля экстремумов $z(t)$ достаточно подвергнуть нелинейному безынерционному преобразованию вида

$$\eta = q(h) = \begin{cases} h(t), & h(t) \geqslant 0 \\ -h(t), & h(t) < 0 \end{cases} \tag{12}$$

случайную последовательность максимумов процесса $z(t)$, распределенных по закону $W(h)$. Так как якобиан преобразования равен $\left|\frac{dh}{d\eta}\right| = 1$, то искомая плотность распределения с учетом (12) определяется выражением

$$W(\eta = |h|) = \begin{cases} W(\eta) + |W(-\eta)| & (\eta \geqslant 0) \\ 0 & (\eta < 0) \end{cases}. \tag{13}$$

Таким образом, задача сводится к отысканию плотности распределения $W(h)$ максимумов процесса $z(t)$.

Допустим, что начальная фаза θ сигнала $s(t)$ фиксирована. Тогда плотность распределения $W(h)$ максимумов случайного процесса $z(t)$ определяется [1] как вероятность $W(h)dh$, равная отношению среднего числа максимумов, попавших за время $[0, T]$ в интервал $[h, h-dh]$, к среднему числу всех максимумов $N_{\max}(0, T)$ за время $[0, T]$, т. е.

$$W(h) = \frac{1}{N_{\max}(0, T)} \int_0^T \int_0^{-\infty} z_2 W(h, z_1 = 0, z_2, t) dz_2 dt, \tag{14}$$

где $N_{\max}(0, T)$ уже найдено и за интервал $T_s = 2\pi/\omega_s$ равно половине среднего числа экстремумов $N_{\text{ext}}(0, T_s)$ в (8). В (14) $W(z_0, z_1, z_2, t)$ — совместная плотность распределения процесса $z(t)$, его первой и второй производных $z_1 = \dot{z}(t)$, $z_2 = \ddot{z}(t)$ в совпадающие моменты времени [1].

Для гауссова стационарного процесса $\xi(t)$ $W(z_0, z_1, z_2, t)$ описывается общей трехмерной нормальной плотностью распределения:

$$\begin{aligned} W(z_0, z_1, z_2, t) = {} & (2\pi)^{-3/2}(\sigma_0\sigma_1\sigma_2)^{-1}(1 - r_{01}^2 - r_{12}^2 - r_{20}^2 + 2r_{01}r_{12}r_{20})^{-1/2} \times \\ & \times \exp\Big\{-\frac{1}{2}(1 - r_{01}^2 - r_{12}^2 - r_{20}^2 + 2r_{01}r_{12}r_{20})^{-1}\big[\sigma_0^{-2}(1 - r_{12})^2(z_0 - s(t))^2 + \\ & + \sigma_1^{-2}(1 - r_{20}^2)(z_1 - \dot{s}(t))^2 + \sigma_2^{-2}(1 - r_{01}^2)(z_2 - \ddot{s}(t))^2 - \\ & - 2(\sigma_0\sigma_1)^{-1}(r_{01} - r_{12}r_{20})(z_0 - s(t))(z_1 - \dot{s}(t)) - \\ & - 2(\sigma_1\sigma_2)^{-1}(r_{12} - r_{20}r_{01})(z_1 - \dot{s}(t))(z_2 - \ddot{s}(t)) - \\ & - 2(\sigma_2\sigma_0)^{-1}(r_{20} - r_{01}r_{12})(z_2 - \ddot{s}(t))(z_0 - s(t))\big]\Big\}, \end{aligned} \tag{15}$$

где часть параметров распределения определяется формулами (5), а недостающие имеют вид

$$r_{01} = r_{12} = 0, \quad r_{02} = -\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \tag{16}$$

Для получения выражения $W(h)$ целесообразно вычислить внутренний интеграл $I(t, h)$ в (14) с учетом (15), (5) и (16). Опуская аналитические преобразования, приведем конечный результат вычислений:

$$I(t, h) = \int_0^{-\infty} z_2 W(h, z_1 = 0, z_2, t) dz_2 = (2\pi)^{-3/2} \frac{\omega_0 \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \times$$

$$\times \varphi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}}\left[h+(q^2-1)\gamma\sin(\omega_s t+\theta)\right]\right\}\times \tag{17}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(h-\gamma\sin(\omega_s t+\theta))^2+(q\gamma\cos(\omega_s t+\theta))^2\right]\right\},$$

где $h = z_{\max}/\sigma_0$, а $\varphi(x)$ определено в (6).

Переходя в (17) к новой переменной $\psi = \omega_s t+\theta$ и принимая $T = T_s$, в соответствии с (14), (17) и (8) получаем выражение плотности вероятности максимумов суммы гармонического колебания и нормального стационарного шума:

$$W(h)=\int_0^{2\pi}\varepsilon\varphi\left\{\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}}\left[h+(q^2-1)\gamma\sin\psi\right]\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(h-\gamma\sin\psi)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(q\gamma\cos\psi)^2\right]\right\}d\psi\left\{(2\pi)^{3/2}\left[e^{-\alpha}I_0(\beta)+\frac{\gamma^2q^4(1-\varepsilon^2)}{2\alpha}Ie\left(\frac{\beta}{\alpha},\alpha\right)\right]\right\}^{-1} \tag{18}$$

$$(-\infty\leqslant h\leqslant\infty).$$

Повторив рассуждения, приведенные после формулы (7), убеждаемся, что плотность вероятности максимумов суммы гармонического колебания со случайной равномерно распределенной начальной фазой θ и нормального стационарного шума также описывается выражением (18).

Формула (18) показывает, что в общем случае плотность распределения максимумов $W(h)$ процесса $z(t)$ однозначно определяется тремя параметрами ε, q, γ. При $\gamma = 0$ из (18), воспользовавшись соотношением (9)

$$Ie(k, 0) = 0,$$

получаем известный [1] результат для плотности распределения максимумов нормального стационарного шума:

$$W(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\varepsilon\exp\left(-\frac{h^2}{2\varepsilon^2}\right)+\sqrt{\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon^2)}\,h\exp\left(-\frac{h^2}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+\Phi\left(\frac{h}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{2}}\right)\right]\right\}\qquad(-\infty\leqslant h\leqslant\infty). \tag{19}$$

В общем случае вычисление $W(h)$ и, следовательно, плотности распределения модуля экстремумов $W(\eta)$ в (13) требует применения численных методов. Однако в случаях узкополосного ($\varepsilon\approx 0$) и широкополосного ($\varepsilon\approx 1$) процессов $z(t)$ в (18) возможны упрощения.

В частности, при $\varepsilon\approx 0$ и, следовательно, $q\approx 1$ из (13) и (18), используя соотношение

$$Ie(0, y) = 1-e^{-y},$$

находим, что модуль экстремумов суммы гармонического колебания и узкополосного нормального шума распределен по закону Рэлея—Райса:

$$W(\eta)=\eta\exp\left(-\frac{\eta^2+\gamma^2}{2}\right)I_0(\gamma\eta),\qquad \eta=\frac{|z_{\max}|}{\sigma_0}\geqslant 0. \tag{20}$$

Одномерные моменты случайной величины η, распределенной по закону (20), хорошо известны [5] и поэтому здесь не приводятся.

При $\varepsilon \to 1$ и $q \approx 1$ модуль экстремумов суммы гармонического колебания и широкополосного нормального шума распределен по так называемому обобщенному нормальному закону [6]

$$W(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2 + \gamma^2/2}{2}\right) \frac{I_0(\gamma\eta)}{I_0(\gamma^2/4)} \quad (\eta \geqslant 0). \tag{21}$$

Одномерные моменты случайной величины η, распределенной по закону (21), легко определяются, если воспользоваться соотношением (см. [5], формула (3.73))

$$m_{k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_0 \exp(\gamma^2/4)}{I_0(\gamma^2/4)} (2\sigma_0^2)^{k/2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) {}_1F_1\left(-\frac{k}{2}, 1; -\frac{\gamma^2}{2}\right), \tag{22}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция, ${}_1F_1(\alpha, \beta; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Для иллюстрации полученных результатов в табл. 1 и 2 приведены значения среднего числа максимумов $N_{\max}(0, T_s) = \frac{1}{2} N_{\text{ext}}(0, T_s)$ суммы гармонического колебания и нормального стационарного шума при различных значениях параметров ε, q и γ, полученные путем вычислений на ЭВМ по формуле (7).

Таблица 1

Среднее число максимумов $N_{\max}(0, T_s)$ суммы гармонического колебания и нормального стационарного шума за период $T_s = 2\pi/\omega_s$; $q = 1$

ε \ γ	0	0,3	1,0	3,0	5,0
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,001	1,000050	1,000049	1,000047	1,000003	1,000000
0,2	1,020620	1,019723	1,012587	1,000243	1,000042
0,4	1,091089	1,087246	1,056443	1,001246	1,000043
0,6	1,250000	1,240081	1,159606	1,004823	1,000060
0,8	1,666666	1,643110	1,448724	1,026156	1,000391
0,99	7,088810	6,935060	5,638708	2,193730	1,421480
1	∞	—	—	—	—

Таблица 2

Среднее число максимумов $N_{\max}(0, T_s)$ суммы гармонического колебания и «низкочастотного» нормального стационарного шума за период $T_s = 2\pi/\omega_s$; $\varepsilon = 2/3$

q \ γ	0	0,3	1,0	2,0	3,0	5,0	8,0
0,25	5,366520	5,359224	5,286551	5,057559	4,710045	3,831795	2,623828
0,5	2,683260	2,670253	2,545688	2,204617	1,812877	1,278302	1,047913
0,75	1,788835	1,773351	1,634501	1,336501	1,125046	1,008990	1,000078
1,0	1,341630	1,328474	1,221257	1,061463	1,007907	1,000074	1,000001
1,25	1,073304	1,068485	1,034482	1,003607	1,000092	1,000005	1,000000
1,5	0,894411	0,905141	0,967853	0,999074	0,999998	1,000000	1,000000

В табл. 1 представлена зависимость $N_{\max}(0, T_s) = f(\varepsilon, \gamma)$ при $q = 1$. Из табл. 1 видно, что при конечной ширине энергетического спектра процесса $0 < \varepsilon < 1$ $N_{\max}(0, T_s)$ при увеличении отношения сигнал/шум γ асимптотически приближается к значению $\lim\limits_{\gamma\to\infty} N_{\max}(0, T_s) = 1$, т. е. к среднему числу максимумов на периоде гармонического колебания, что вполне естественно.

В табл. 2 и на рис. 2 приведена зависимость среднего числа максимумов суммы гармонического колебания и нормального шума $N_{\max}(0, T_s) = f(q, \gamma)$ от отношения сигнал/шум $\gamma = A_m/\sigma_0$ для низкочастотного» [1] ($\varepsilon = 2/3$) энергетического спектра процесса $\xi(t)$. Из рис. 2 видно, что в общем поведение $N_{\max}(0, T_s)$ при различных значениях параметра $q = f_s/N_1^+(0)$ подчиняется тем же закономерностям, что и поведение среднего числа «положительных» нулей суммы сигнала и шума $N_z^+(0, T_s)$ [1]. Однако есть и отличие. В частности, $N_{\max}(0, T_s) > 1$ даже при $q > 1$. Равенство $N_{\max}(0, T_s) = 1$ при любом отношении сигнал/шум γ достигается при $q = 3/\sqrt{5}$, т. е., когда частота гармонического колебания совпадает со средним числом максимумов «низкочастотного» шума в единицу времени. При $q > 3/\sqrt{5}$ из рис. 2 видно, что $N_{\max}(0, T_s) < 1$. Для среднего числа «положительных» нулей суммы сигнала и шума $z(t)$ за период $T_s = 2\pi/\omega_s$ выполняются неравенства [1] $N_z^+(0, T_s) > 1$ при $q < 1$ и $N_z^+(0, T_s) < 1$ при $q > 1$.

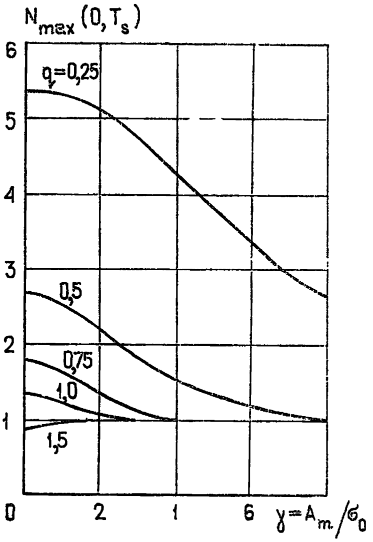

Рис. 2.

Анализ зависимости $N_{\max}(0, T_s) = f(\varepsilon, q, \gamma)$ показывает, что смещение границы (значение параметра q), вне которой $N_{\max}(0, T_s) \gtrless 1$, зависит от вида автокорреляционной функции шума $\xi(t)$. Например, для широкополосного процесса $\xi(t)$, имеющего гауссов энергетический спектр ($\varepsilon = \sqrt{2/3}$) [1], это значение ужс равно $q = \sqrt{3}$.

Плотности вероятности распределения модуля экстремумов $W(\eta)$ процесса $z(t)$ табулировались на ЭВМ в соответствии с формулой (13), где

$$W(h) = \frac{2}{N_{\text{ext}}(0, T_s)} \int\limits_0^{2\pi} I(\psi, h)\, d\psi, \qquad (23)$$

$N_{\text{ext}}(0, T_s)$ определено в (7), а $I(\psi, h)$ — в (17) при переходе в правой части выражения к переменной $\psi = \omega_s t + \theta$.

На рис. 3 изображена плотность вероятностей модуля экстремумов суммы гармонического колебания и нормального шума $W(\eta)$ при $q = 1$ и различных значениях параметров ε и γ.

На рис. 3 а представлены графики $W(\eta)$ как функции γ при фиксированном значении $\varepsilon = 0{,}01$. Подчеркнем, что при $\gamma = 0$ значение $W(\eta)$ в начале координат отлично от нуля и равно 0,008. Однако анализ показывает, что распределение модуля экстремумов $W(\eta)$ суммы гармонического колебания и узкополосного нормального шума с большой точностью аппроксимируется законом Рэлея—Райса (20).

Поведение кривых распределения $W(\eta)$ при увеличении ширины энергетического спектра процесса ε (0,5 и 0,99) показано соответственно на рис. 3 б и 3 в. В частности, плотность распределения $W(\eta)$ при

$q = 1$ и $\varepsilon = 0{,}99$ хорошо аппроксимируется обобщенным нормальным законом (21).

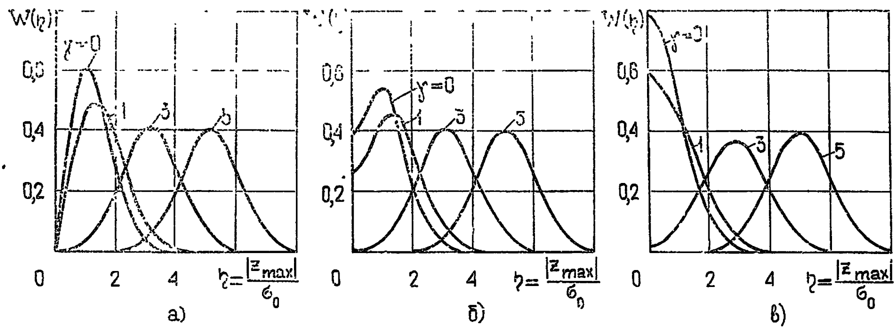

Рис. 3.

И, наконец, отметим еще одну особенность в поведении кривых распределения $W(\eta)$ в рассматриваемом здесь частном случае $q = 1$. Из рис. 3 видно, что при изменении ширины энергетического спектра процесса $\xi(t)$ плотность распределения $W(\eta)$ существенно трансформируется в области значений отношения сигнал/шум $\gamma \leqslant 1$ и почти не изменяется в области значений $\gamma \geqslant 3$. Используя асимптотическую формулу

$$I_0(x) \approx (1 + 1/8x) e^x / \sqrt{2\pi x} \qquad (x \gg 1),$$

можно показать, что при $\gamma \geqslant 3$ и $q = 1$ плотность распределения $W(\eta)$ модуля экстремумов суммы гармонического колебания и нормального шума с любой шириной энергетического спектра — почти нормальная.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, изд Наука, М, 1970.
2. D. E. Cartwright, M. S. Lonquet-Higgins, Proc. Roy. Soc., ser. A., **237** 1209 (1956).
3. И. С. Градштейн, И М Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М, 1963.
4. S. O. Rice, BSTJ, **27**, № 1, 109 (1948).
5 Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, изд. Сов. радио, М., 1966
6. Т. Харлеймл, К. Абенд, ТИИЭР, **56**, № 8, 107 (1968).

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию
1 апреля 1974 г.

THE AVERAGE NUMBER AND EXTREME MODULUS DISTRIBUTION OF THE SUM OF HARMONIC OSCILLATION AND NORMAL NOISE

Yu. I. Provctorov

The paper considers the problems of determining a mathematical expectation of the number of extremes over the time interval $[0, T]$ and the density of extreme modulus distribution of the sum of harmonic oscillation with constant or random initial phase and normal stationary differential process. Explicit solutions are obtained for the given problems. The dependences of the mean extremes (maxima) and the extreme modulus distribution density are computed. Tables are compiled and plots are built. For the case of narrow and broad band noises rather precise and simple analytical formulas of the extreme modulus distribution density are given. The extreme statistics found may be applicable in synthesiging the design of digital signal processing.