ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 7 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 538.56

УСИЛЕНИЕ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Г. Н. Змиевской, М. В. Свиридов

Рассматривается усиление спонтанного излучения в среде нелинейного оптического усилителя бегущей волны. На примере однородного уширения спектральной линии показано, что хаотическая модуляция населенностей рабочих уровней этим излучением может существенно исказить контур частотной зависимости показателя усиления и привести к расширению спектра спонтанного излучения.

Одним из основных факторов, определяющих шум оптического усилителя (ОУ) бегущей волны, является спонтанное излучение на частоте рабочего перехода. В процессе распространения в активной среде интенсивность этого излучения может достигать величин, при которых становятся существенными эффекты насыщения. При этом зависимость показателя усиления от частоты начинает отличаться от случая насыщения монохроматическим полем [1]. Как показано в работах [2, 3], при однородном уширении спектральной линии рабочего перехода насыщение спонтанным излучением приводит лишь к пропорциональной «подсадке» контура этой линии. Форма контура остается без изменений и имеет вид лоренцевой функции, полуширина которой не зависит от интенсивности излучения и равна постоянной релаксации недиагональных элементов матрицы плотности.

Этот результат является следствием усреднения диагональных элементов по некоррелированным фазам спектральных компонент спонтанного излучения. Иными словами, пренебрегается хаотической модуляцией населенностей рабочих уровней, создаваемой этим излучением [4, 5]. Однако такая модуляция должна приводить к обогащению спектра индуцированной поляризации активной среды, а значит—к обогащению (уширению) спектра и самого спонтанного излучения.

В настоящей работе показано, что форма контура усиления с ростом интенсивности спонтанного излучения может существенно отклониться от лоренцевой. Это приводит к тому, что в процессе распространения излучения в среде сужение его спектра сменяется расширением даже при однородном уширении линии рабочего перехода (расширение спектра при неоднородном уширении рассмотрено в [6]). Кроме того, происходит искажение частотной характеристики ОУ, который в таком режиме может применяться для усиления слабых узкополосных или периодических сигналов.

Рассмотрим одномерную модель ОУ и положим, что спонтанное излучение распространяется только в сторону возрастающих значений x. Встречная волна спонтанного излучения (а значит и собственный шум ОУ) может быть существенно ослаблена, например, применением оптического вентиля Вина. Предположим также, что интенсивность источников спонтанного излучения достаточно мала, чтобы их можно было считать сосредоточенными на входе ОУ [7].

Воспользуемся разложением стационарного случайного (спонтанного поля) $E(t, x)$ в интеграл Фурье:

$$E(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\omega, x) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] d\omega,$$

причем [8]

$$\langle a(\omega, x) a^*(\omega', x) \rangle = W(\omega, x)\,\delta(\omega - \omega') \tag{1}$$

(скобки $\langle\ \rangle$ означают статистическое усреднение) Поскольку функция $E(t, x)$ действительна, то $a(\omega, x) = a^*(-\omega, x)$.

Если $b(\omega, x)$ — амплитудная плотность разложения Фурье макроскопической поляризации среды, то

$$\frac{\partial}{\partial x} W(\omega, x) = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c} \operatorname{Im} R(\omega, x), \tag{2}$$

где

$$\langle b(\omega, x) a^*(\omega', x) \rangle = R(\omega, x)\,\delta(\omega - \omega'). \tag{3}$$

Выражение (2) получено в предположении, что амплитуды $a(\omega, x)$ и $b(\omega, x)$ являются «медленными» функциями координаты x, т. е. мало меняются на расстояниях порядка c/ω.

Показатель усиления $g(\omega, x)$ интенсивности каждой фурье-компоненты электрического поля определяется следующим образом:

$$g(\omega, x) = \frac{1}{W(\omega, x)} \frac{\partial}{\partial x} W(\omega, x) = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c} \frac{\operatorname{Im} R(\omega, x)}{W(\omega, x)}. \tag{4}$$

Связь между W и R дают материальные уравнения среды. В дальнейшем используется двухуровневое приближение с однородно уширенной спектральной линией атомного перехода. Времена жизни уровней предполагаются равными Тогда поле $E(t, x)$, поляризация $P(t, x)$ и разность населенностей $N(t, x)$ удовлетворяют следующей системе уравнений [9]:

$$\ddot{P} + 2\gamma\dot{P} + \omega_0^2 P = -\frac{2\omega_0 d^2}{\hbar} NE; \tag{5}$$

$$\dot{N} + \Gamma N = \frac{2}{\hbar\omega_0} E\dot{P} + \Gamma N_0. \tag{6}$$

Здесь d—матричный элемент дипольного момента атома, N_0—разность населенностей в отсутствие поля, ω_0 — центральная частота рабочего перехода. Постоянные релаксации γ и Γ равны друг другу в случае невзаимодействующих атомов и $\gamma > \Gamma$ в случае преобладающего ударного уширения.

Если спектр излучения значительно шире, чем Γ, а его интенсивность невелика, то, как видно из (6), можно положить

$$N \approx \langle N \rangle = N_0 + \frac{2}{\hbar\omega_0\Gamma} \langle E\dot{P} \rangle = \text{const}. \tag{7}$$

Используя спектральные разложения E и P и соотношения (1) и (3), можно получить следующее выражение для показателя усиления·

$$g(\omega) = \frac{g_0}{1 + \beta Q} \frac{\gamma^2}{\xi^2 + \gamma^2}, \tag{8}$$

где $\xi = \omega - \omega_0$ — расстройка относительно центральной частоты,

$g_0 = \dfrac{\omega_0 d^2}{\varepsilon_0 c\hbar\gamma} N_0$ — ненасыщенный показатель усиления в центре линии,

$\beta = \dfrac{2d^2}{\hbar^2 \gamma \Gamma}$ — параметр насыщения [1] и

$$Q = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^2 W(\zeta)}{\zeta^2 + \gamma^2} d\zeta \tag{9}$$

— интенсивность излучения в полосе частот спектральной линии.

Из (8) видно, что в приближении (7) действительно ширина контура усиления равна 2γ. Однако при больших интенсивностях $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle \sim \langle N \rangle^2$ и пренебрежение флуктуациями разности населенностей является слишком грубым.

Исключим N из уравнения (5), записав (6) в интегральной форме:

$$\ddot{P} + 2\gamma \dot{P} + \omega_0^2 P = -\frac{2\,\omega_0 d^2}{\hbar} N_0 E - \frac{2d^2}{\hbar^2} \int\limits_0^{\infty} E(t)E(t-\theta)\dot{P}(t-\theta)\exp(-\Gamma\theta)d\theta.$$

Применив преобразование Фурье, получим

$$\begin{gathered} -[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega]\, b(\omega) = \frac{2\,\omega_0 d^2}{\hbar} N_0 a(\omega) + \\ + i\frac{2d^2}{\hbar^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' b(\omega') a(\omega'') a(\omega - \omega' - \omega'')}{\Gamma + i(\omega' + \omega'')} d\omega' d\omega''. \end{gathered} \tag{10}$$

Умножим это равенство на $a^*(\nu)$ и усредним:

$$\begin{gathered} -[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega]\, R(\omega)\delta(\omega - \nu) = \frac{2\,\omega_0 d^2}{\hbar} N_0 W(\omega)\delta(\omega - \nu) + \\ + i\frac{2d^2}{\hbar^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \langle b(\omega') a(\omega'') a(\omega - \omega' - \omega'') a^*(\nu) \rangle}{\Gamma + i(\omega' + \omega'')} d\omega' d\omega''. \end{gathered} \tag{11}$$

Амплитуды, входящие в функцию корреляции 4-го порядка,

$$k(\omega, \omega', \omega'', \nu) = \langle b(\omega') a(\omega'') a(\omega - \omega' - \omega'') a^*(\nu) \rangle, \tag{12}$$

берутся со своими частотами. В дальнейшем положим, что если все эти частоты различны, то $k = 0$, т. е. предположим некоррелированность фаз сомножителей, составляющих (12). В случае слабой нелинейности это свойство очевидно, поскольку из-за независимости источников спонтанного излучения поле подчиняется гауссовой статистике. При сильной нелинейности такое предположение означает пренебрежение статистической зависимостью между фазами спектральных амплитуд, если такая зависимость возникает в процессе распространения излучения в среде. Это пренебрежение оправдывается тем, что зависимость является слабой, поскольку среда обладает инерционной нелинейностью ($\Gamma \ll \omega$), и фактически реализуется система с сильным перемешиванием [10].

Если в (12) появляются две пары сомножителей, в каждой из которых частоты одинаковы, k уже не обратится в нуль, поскольку такие пары будут иметь вполне определенный энергетический смысл. В соответствии со сказанным, усреднение этих пар можно производить раздельно. Учитывая это, представим k в виде суммы членов с попарно сгруппированными сомножителями и воспользуемся (1) и (3):

$$k(\omega, \omega', \omega'', \nu) = \delta(\omega - \nu)\,[R(\omega')\,W(\omega)\,\delta(\omega' + \omega'') + R(\omega')\,W(\omega)\,\delta(\omega - \omega'') + R(\omega)\,W(\omega'')\,\delta(\omega - \omega')]. \tag{13}$$

Заметим, что расцепление корреляций в (11) можно рассматривать как следующее по сравнению с (7) приближение, основанное на статистической независимости (точнее слабой зависимости) фаз спектральных компонент. Вообще говоря, исходя из уравнения (10), можно искать следующие приближения, расцепляя корреляционные функции 6-го порядка на суммы произведений функций 4-го и 2-го порядков и т. д.

Подставляя (13) в (11), находим, что W и R связаны между собой интегральным соотношением

$$-[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega]\,R(\omega) = \frac{2\omega_0 d^2}{\hbar} N_0 W(\omega) + 2i\frac{d^2}{\hbar^2} W(\omega) \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' R(\omega')\,d\omega'}{\Gamma + i(\omega + \omega')} + 2i\frac{d^2}{\hbar^2}\,\omega R(\omega) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{W(\omega')\,d\omega'}{\Gamma + i(\omega + \omega')} + 2i\frac{d^2}{\hbar^2\Gamma} W(\omega) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega' R(\omega')\,d\omega'. \tag{14}$$

Учитывая, что $W(\omega) = W(-\omega)$ и $R(\omega) = R^*(-\omega)$, и вводя обозначения

$$\omega - \omega_0 = \xi, \quad \omega + \omega' = \eta \text{ и } \omega' - \omega_0 = \zeta,$$

можно (14) записать в более компактной форме:

$$\left[(\xi - i\gamma) - \frac{d^2}{\hbar^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{W(\xi - \eta)}{\eta - i\Gamma}\,d\eta\right] R(\xi) = \left[\frac{d^2}{\hbar} N_0 - \frac{2d^2}{\hbar^2\Gamma}\int\limits_{-\omega_0}^{\infty} \operatorname{Im} R(\zeta)\,d\zeta - \frac{d^2}{\hbar^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R^*(\xi - \eta)}{\eta - i\Gamma}\,d\eta\right] W(\xi). \tag{15}$$

Здесь обозначено $R(\omega_0 + \xi) = R(\xi)$ и $W(\omega_0 + \xi) = W(\xi)$.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $\gamma \gg \Gamma$, т. е. преобладает ударное уширение, что характерно для газовых ОУ [11]. Если полуширина спектра излучения Δ, определяемая условием $W(\Delta) = W_0/2$, где $W_0 = W(\omega_0)$ — максимальное значение спектральной плотности, велика по сравнению с Γ, R и W, входящие под интегралы в (15), медленно меняются по сравнению с лоренцевыми функциями и могут быть вынесены из-под знака интеграла. Тогда

$$(\xi - i\gamma)\,R(\xi) = \left[\frac{d^2}{\hbar} N_0 - \frac{2d^2}{\hbar^2\Gamma}\int\limits_{-\omega_0}^{\infty} \operatorname{Im} R(\zeta)\,d\zeta\right] W(\xi) - 4\pi\frac{d^2}{\hbar^2} W(\xi) \operatorname{Im} R(\xi).$$

Разрешая это уравнение относительно $\operatorname{Im} R$ и интегрируя по ξ, можно найти $\int \operatorname{Im} R d\zeta$. Окончательное выражение для показателя усиления имеет вид

$$g(\xi) = \frac{g_0}{1 + \beta Q_1}\,\frac{\gamma^2}{\xi^2 + \gamma^2[1 + 4\pi\beta\Gamma W(\xi)]}, \tag{16}$$

где

$$Q_1 = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^2 W(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^2 + \gamma^2[1 + 4\pi\beta\Gamma W(\zeta)]}. \tag{17}$$

Лишь при $4\pi\beta\Gamma W_0 \ll 1$ формулы (16) и (17) совпадают с (8) и (9). В противном случае происходит искажение формы линии усиления: вблизи частот, определяемых уравнением $\xi^2 = 4\pi\gamma^2\Gamma\beta[W_0 - W(\xi)]$, появляются максимумы, а в центре кривой $g = g(\xi)$ возникает «провал». Из (16) следует, что если W монотонно убывает с увеличением расстройки $|\xi|$, то спектр вынужденного излучения среды, т. е. $g(\xi)W(\xi)$, обладает тем же свойством при любых полях. Следовательно, это свойство сохраняется в процессе распространения спонтанного излучения. Иначе говоря, спектр излучения всегда имеет симметричную «колоколообразную» форму. Однако можно показать, что при прохождении излучением элемента среды dx полуширина Δ получает отрицательное приращение, если $\Delta^2 > 2\pi\gamma^2\beta\Gamma W_0$, и положительное — в противоположном случае. Таким образом, искажение формы линии усиления проявляется в том, что при достижении определенной интенсивности ширина спектра начинает возрастать. Такой процесс вызван «уплощением» вершины кривой $W(\xi)$ вследствие проявления провала в линии усиления.

В рассмотренном случае ($\Delta \gg \Gamma$) интенсивность излучения, при которой появляется искажение контура усиления, примерно в $\Delta/2\pi\Gamma$ больше интенсивности, вызывающей пропорциональную «подсадку» всего контура (см. (16) и (17)). Если же $\Gamma \sim \Delta$, то выносить W и R из-под знаков интегралов в (15) нельзя. Поскольку в этом случае отыскание общего решения уравнения (15) представляется сложным, рассмотрим лишь слабую нелинейность, когда слагаемые в (15), содержащие множитель $\varepsilon = \frac{d^2}{\hbar^2} \sim \beta$, малы. Используя ε в качестве «малого» параметра, будем искать $R(\xi)$ в виде

$$R(\xi) = R_0(\xi) + \varepsilon R_1(\xi) \tag{18}$$

(формально при $\varepsilon \to 0$ уравнение (15) переходит в линейное, однако, в общем случае необходимо считать малым не сам параметр ε, а выражение, содержащее его как множитель). Подставляя (18) в (15) и опуская слагаемые, содержащие ε^2, получим

$$R_0(\xi) = \frac{d^2}{\hbar} N_0 \frac{W(\xi)}{\xi - i\gamma} \tag{19}$$

и

$$R_1(\xi) = -\frac{d^2}{\hbar} N_0 \left[\frac{2\gamma}{\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W(\zeta)}{\zeta^2+\gamma^2}d\zeta + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{W(\xi-\eta)}{(\xi-\eta+i\gamma)(\eta-i\Gamma)}d\eta - \frac{1}{\xi-i\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W(\xi-\eta)}{\eta-i\Gamma}d\eta\right]\frac{W(\xi)}{\xi-i\gamma}. \tag{20}$$

Если интенсивность источников спонтанного излучения мала, то значительный начальный отрезок активной среды будет работать как линейный усилитель. Поскольку такой усилитель обладает свойством сжимать спектр шума по мере его распространения и, кроме того, ширина спектра источников сама не превосходит 2γ, естественно считать, что в области, где существенны нелинейные эффекты, излучение имеет полуширину спектра Δ, меньшую, чем γ [2].

Поэтому, учитывая, что $\gamma \gg \Gamma$, второе и третье слагаемые в (20) отличны от нуля лишь вблизи центральной частоты Тогда, пренебрегая расстройкой во входящих в эти слагаемые лоренцевых функциях с шириной 2γ, получим

$$g(\xi) = \frac{g_0\gamma^2}{\xi^2+\gamma^2}\left[1-\beta Q-\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\Gamma^2 W(\xi-\eta)}{\eta^2+\Gamma^2}d\eta\right]. \tag{21}$$

Видно, что и теперь в центре контура усиления возникает провал шириной $\sim(\Delta+\Gamma)$. Однако интенсивность спонтанного излучения, при которой появляется этот эффект, равна и даже меньше, (если $\Delta<\Gamma$) интенсивности, вызывающей общую «подсадку» всего контура в целом. Соответственно раньше начинается расширение спектра этого излучения.

Наконец, кратко рассмотрим случай невзаимодействующих атомов, когда $\gamma=\Gamma\gg\Delta$. Тогда лоренцевы функции в (15) могут быть вынесены из-под интегралов. Учитывая, что спектр излучения симметричен относительно ξ, а, следовательно, реальная часть функции $R(\xi)$ антисимметрична, находим для $\xi>-\omega_0$

$$\operatorname{Im}R(\xi)=\gamma W(\xi)\frac{(\alpha-\beta\gamma S)\xi^2+\gamma^2(\alpha-3\beta\gamma S)\left(1+\frac{1}{2}\beta Q\right)}{\xi^4+2\gamma^2\left(1-\frac{1}{2}\beta Q\right)\xi^2+\gamma^4\left(1+\frac{1}{2}\beta Q\right)^2},$$

где $S=\int\limits_{-\omega_0}^{\infty}\operatorname{Im}R(\zeta)\,d\zeta$, $\alpha=\frac{d^2}{\hbar}N_0$. Интегрируя и пренебрегая расстройками $|\xi|$, получим

$$S=\frac{1}{2\gamma}\,\frac{\alpha Q}{1+2\beta Q}.$$

Отсюда

$$g(\xi)=\frac{\gamma^2 g_0}{1+2\beta Q}\,\frac{\left(1+\frac{3}{2}\beta Q\right)\xi^2+\gamma^2\left(1+\frac{1}{2}\beta Q\right)^2}{\xi^4+2\gamma^2\left(1-\frac{1}{2}\beta Q\right)\xi^2+\gamma^4\left(1+\frac{1}{2}\beta Q\right)^2}. \tag{22}$$

Анализ полученного выражения показывает, что теперь провал возникает при интенсивности $\beta Q\sim 2/5$, т. е. практически одновременно с подсадкой линии усиления в целом ($\beta Q\sim 1/2$).

Если Δ не слишком отличается от γ (но $\Delta<\gamma$), можно получить следующие приближения, раскладывая лоренцевы функции, входящие в (15) под интегралы по степеням расстройки $|\xi|$. Очевидно, что вследствие симметричности $\operatorname{Im}R(\xi)$ поправка следующего приближения будет иметь порядок $\frac{\Delta^2}{\gamma^2\left(1+\frac{1}{2}\beta Q\right)}$. Следовательно, при больших полях ($\beta Q>1/2$) можно пользоваться (22) вплоть до $\Delta\lesssim\gamma/2$. Таким образом, формула (22) применима при достаточно мощных источниках спонтанного излучения, когда нелинейные эффекты возникают быстрее, чем существенно сузится его спектр.

В заключение отметим, что вследствие искажения линии усиления спонтанным излучением частотная характеристика ОУ становится равномерной в довольно широком интервале частот вблизи ω_0, что может оказаться существенным при усилении слабых узкополосных или периодических сигналов, для которых ОУ линеен.

Заметим еще, что в [12] рассмотрен похожий эффект образования «провала» (и даже поглощения на «крыльях» линии) в контуре усиления спонтанного излучения, возникающий в некотором смысле в противоположном случае, когда в среде присутствует мощное монохроматическое поле, энергия которого значительно больше энергии спонтанного излучения. Однако при этом провал образуется также и в спектре спонтанного излучения, чего не наблюдается при насыщении среды в отсутствие монохроматического поля.

Авторы считают своим долгом выразить особую благодарность И. П. Мазанько за участие в постановке задачи и ценные обсуждения в процессе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. H. Close, Phys. Rev., **153**, 360 (1967).
2. L. W. Casperson, A. Yariv, IEEE. J. Quant. Electron., **QE-8**, 80 (1972).
3. С. М. Козел, Е. П. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 10, 1486 (1972).
4. С Г. Раутиан, Тр. ФИАН, **43**, 3 (1968).
5. R. Graham, H. Haken, Zs. Phys., 237, 31 (1970).
6. L. W. Casperson, Optics Communications, **8**, 85 (1973).
7. И. П. Мазанько, М В Свиридов, Оптика и спектроскопия, **33**, 314 (1972)
8. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М, 1966.
9. L. W. Davis, Proc. IEEE, **51**, 76 (1963).
10. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, изд. Наука, М, 1970
11. R. L. Fork, M. A. Pollak, Phys. Rev., **139**, A1408 (1965).
12. П. С. Ланда, Е. Ф. Слинько, ЖЭТФ. **63**, 1609 (1972).

Поступила в редакцию
1 марта 1974 г.

AMPLIFICATION OF SPONTANEOUS RADIATION IN A NONLINEAR ACTIVE MEDIUM

G. N. Zmievskoi, M. V. Sviridov

The amplification of spontaneous radiation in the medium of a nonlinear optical traveling-wave amplifier is considered. It is shown by the example of a homogeneous broadening of the spectral line that a random modulation of popularities of operating levels by this radiation may essentially distort the contour of the frequency dependence of the amplification coefficient and lead to broadening of the spontaneous radiation spectrum.