УДК 538.3

О СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ «ОПРОКИДЫВАЮЩЕГОСЯ КОЛЬЦА», СОСТОЯЩЕГО ИЗ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЭЛЕКТРОНОВ

С. Б. Рубин

При рассмотрении неустойчивости электронно-ионного кольца по отношению к изгибам без изменения формы поперечного сечения [1] в дипольном приближении тороидальный электронный пучок «по большому размеру» можно считать имеющим форму эллипса с малым эксцентриситетом Плоскость, в которой этот эллипс лежит, почти перпендикулярна оси вращения электронов, а сам эллипс в однородном магнитном поле вращается как целое с той же угловой скоростью, что и электроны, [2]*.

Как известно, сплошное кольцо заряженных частиц синхротронно не излучает. В ситуации, описанной выше, возникает синхротронное излучение. Характеристики этого излучения могут представить определенный интерес и будут рассмотрены ниже.

1. В каждый фиксированный момент времени t электроны с постоянной линейной плотностью заполняют кривую в виде эллипса, являющуюся наклонным сечением цилиндрической поверхности радиуса R_0. Электроны вращаются с постоянной угловой скоростью ω_0 около оси $0z$. Радиус вращения каждого электрона есть R_0.

Такой системе соответствуют плотность заряда ρ и плотность тока $\bar{j}$, в цилиндрической системе координат r, χ, z имеющие вид

$$\rho(t, r, \chi, z) = q\,\frac{\delta(r - R_0)}{2\pi r}\,\delta[z - R_0 \operatorname{tg}\theta \sin(\chi - \omega_0 t)]; \tag{1}$$

$$j_\chi = \omega_0 R_0 \rho, \qquad j_r = j_z = 0, \tag{2}$$

где q — общий заряд системы, деленный на 2π, θ — постоянный угол наклона эллипса к оси $0z$.

Для временной компоненты Фурье плотности тока после некоторых преобразований (с учетом системы корней функции

$$\psi(t) = z - p\sin(\chi - \omega_0 t), \tag{3}$$

где $p = R_0 \operatorname{tg}\theta$, и формулы $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(i\,\frac{\omega}{\omega_0}\,2\pi n\right) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\omega}{\omega_0} - n\right)\Big)$ получается

$$j_{\chi\omega} = \frac{qR_0\,\delta(r - R_0)\exp\left(i\,\frac{\omega}{\omega_0}\chi\right)}{2\pi r p\sqrt{1 - z^2/p^2}} \left\{\exp\left(-i\,\frac{\omega}{\omega_0}\arcsin\frac{z}{p}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left[i\,\frac{\omega}{\omega_0}\left(\pi + \arcsin\frac{z}{p}\right)\right]\right\} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\omega}{\omega_0} - n\right). \tag{4}$$

2. Рассмотрим теперь излучение, возбуждаемое этой системой, проходящее через цилиндрическую поверхность большого радиуса с осью $0z$. Отличными от нуля являются A_r, A_χ — составляющие векторного потенциала и скалярный потенциал. Так как рассматривается только поле излучения в дальней зоне, то достаточно принять $\bar{E} \approx -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$ и вычислить A_r, A_χ.

Пусть $\bar{R} = \{R, \tilde{\chi}, \vartheta\}$ — радиус-вектор точки наблюдения, записанный в сферической системе координат, $\bar{n}$ — единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения. Тогда, как обычно, в дальней зоне $(k = \omega/c)$

$$A_{l\omega} \approx \frac{e^{ikR}}{R} \int j_{l\omega}(\bar{r}')\cos(\tilde{\chi} - \chi')\, e^{-ik(\bar{n}\bar{r}')}\, dV'; \tag{5}$$

* Вообще говоря, угол наклона в реальном пучке является функцией времени, однако это обстоятельство ниже не учитывается. Расплывание электронного кольца, связанное с собственным зарядом, также не учитывается.

$$A_{r\omega} \approx \frac{e^{ikR}}{R} \int j_{\chi\omega}(\vec{r}') \sin(\tilde{\chi} - \chi') e^{-ik(\vec{n}\vec{r}')} dV'. \tag{6}$$

(Заметим, что $A_{\chi\omega}$, $A_{r\omega}$ относятся к цилиндрической системе координат, хотя для удобства получения приближенных выражений (5), (6) точка наблюдения отнесена к сферической системе координат.)

Из (5), (6) с учетом (4) получается ($k_0 = \omega_0/c$)

$$(\bar{A}_\omega)_{r;\chi} = \frac{e^{ikR}}{cR} qR_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k/k_0 - n) B_1(k, \vartheta) B_2^{(r);(\chi)}(k, \vartheta, \tilde{\chi}). \tag{7}$$

B_1, $B_2^{(r);(\chi)}$ выражаются определенными интегралами, в общем случае сводящимися к комбинациям функций Бесселя и Ангера. Если, однако, учесть множители $\delta(k/k_0 - n)$, то при $k/k_0 = n$ их можно выразить так ($\nu = nk_0R_0 \sin\vartheta$):

$$B_1 = (-1)^n 2\pi J_n(nk_0\rho \cos\vartheta), \qquad B_2^{(\chi)} = iJ_n'(\nu) e^{in\left(\tilde{\chi} - \frac{\pi}{2}\right)},$$
$$B_2^{(r)} = -\frac{n}{\nu} J_n(\nu) e^{in\left(\tilde{\chi} + \frac{3}{2}\pi\right)}. \tag{8}$$

3. Если ввести полный заряд кольца $Q = 2\pi q$ и считать величину R_0 радиусом вращения электрона в магнитном поле ($R_0k_0 = \beta_0$, $p_\perp = mc\,\beta_0\gamma_0$), то для среднего потока вектора Пойнтинга через боковую поверхность цилиндра достаточно большого радиуса за время одного оборота «системы» $T = 2\pi/ck_0$ получится выражение

$$\Pi = \frac{Q^2 \beta_0^3}{\pi R_0} F(\theta, \beta_0), \tag{9}$$

где

$$F(\theta, \beta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^1 J_n'^2\left(\frac{n\beta_0\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{2-\zeta^2}}\right) J_n^2(n\beta_0 \operatorname{tg}\theta\zeta)\, d\zeta. \tag{10}$$

Были подсчитаны значения коэффициента $F(\theta, \beta_0)$. Например, при $\beta_0 = 0{,}99945$ и $\theta = 0{,}04$ получается $F \approx 1{,}89 \cdot 10^{-4}$, при том же β_0 и $\theta = 0{,}2$ получается $F \approx 4{,}77 \cdot 10^{-3}$. Как оказывается, при малых углах θ главный вклад в величину F дает первый член, т. е. излучение в основном соответствует основной частоте ω_0.

Некогерентные потери энергии на синхротронное излучение одним электроном за время $T = 2\pi/ck_0$ можно вычислить по формуле

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 \beta_0^3 \gamma_0^4}{R_0}. \tag{11}$$

Отношение этой величины к когерентным потерям, получаемым с учетом (9)—(10) для $Q = Ne$, равно

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{ког}}} \approx \frac{4\pi^2}{3F} \frac{\gamma_0^4}{N}. \tag{12}$$

Для приведенных значений β_0 и θ отсюда получится соответственно $\alpha \sim 5{,}7 \cdot 10^{10} N^{-1}$ и $2{,}3 \cdot 10^9 N^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Р. Зенкевич, Д. Г. Кошкарев, Э. А. Перельштейн, Атомная энергия, 33, вып. 1, 567 (1972).
2. D. Koshkarev, P. Zenkevich, Particle accelerators, 3, 1 (1972).

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
21 января 1974 г.,
после доработки
14 января 1975 г.